Chapitre IV: Diagonalisation des matrices carrées

1 Valeurs propres-vecteurs propres:

1.1 Définition:

Soit A une matrice carrée d'ordre n, V un vecteur non nul appartient à $\mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. On dit que V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si: $AV = \lambda V$.

1.2 Polynôme caractéristique:

Soit A une matrice carrée d'ordre n. λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre de A associé à λ donc on a:

$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$

Le polynôme caractéristique de A est par définition $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$

Théorème:

Les valeurs propres d'une matrice carrée A d'ordre n sont les racines de polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = 0$.

Exemple 1:

Soit la matrice A_1 suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de A_1.

Réponse:

- Cherchons le polynôme caractéristique de A_1

$$P_{A_1}(\lambda) = det(A_1 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

- Pour déterminer les valeurs propres de A il suffit de résoudre:

  $P_{A_1}(\lambda) = 0$

Exemple 2:

Soit la matrice A_2 suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`https://youtu.be/vrru5an0DRM`

Remarques:

- On dit que λ est une valeur propre de multiplicité α, si λ est une racine d'ordre α de $P_A(\lambda) = 0$.
- Si A est une matrice carrée d'ordre n, λ_i est une valeur propre de A de multiplicité α_i alors $n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ (l'ordre de la matrice est égale à la somme de multiplicité de ces valeurs propres).
- Une valeur propre de multiplicité 1 est dite valeur propre simple.
- Une valeur propre de multiplicité $\alpha > 1$ est dite valeur propre multiple.
  - Si $\alpha = 2$: Valeur propre double.
  - Si $\alpha = 3$: Valeur propre triple.

Propositions:

- Si λ est une valeur propre non nulle d'une matrice inversible A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.
- Si λ est une valeur propre non nulle d'une matrice A, alors λ^p est une valeur propre de A^p.
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.

- La somme des valeurs propres de A = trace(A).
- Le produit des valeurs propres de $A = det(A)$.

Exemples:

Donner les valeurs propres des matrices suivantes:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3 Recherche des vecteurs propres:

1.3.1 Théorème:

A une valeur propre λ, on associe une infinité des vecteurs propres tous colinéaires entre eux.

V_1, V_2 sont colinéaires : $V_1 = \alpha V_2$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs propres de A.

Réponse

A est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont:

$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = -1$

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = 1$, s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_1 V \rightarrow (A - I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A - I_3)V = 0$$

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -x \\ z &= \frac{1}{2}x \\ x &\in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= x \\ y &= -x \\ z &= \frac{1}{2}x \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x.V_1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des vecteurs propres de A associé à λ_1, sont les vecteurs colinéaires à V_1, cet ensemble s'appelle sous-espace propre de λ_1, noté $E(\lambda_1)$ et puisque tous les vecteurs de $E(\lambda_1)$ sont colinéaires à V_1, on dit que $E(\lambda_1)$ est engendré par V_1 et dimension de $E(\lambda_1) = 1$, on écrit $dimE(\lambda_1) = 1$.

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, est un vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 2$, s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_2 V \rightarrow (A - 2I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A - 2I_3)V = 0$$

$$\begin{cases} -x &= 0 \\ x &= 0 \\ x - 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &\in \mathbb{R} \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y.V_2 \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

Le sous-espace propre de $E(\lambda_2)$ est engendré par V_2 et $dim E(\lambda_2 = 2)$

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, est un vecteur propre de A associé à $\lambda_3 = -1$, s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_3 V \to (A + I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A + I_3)V = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ x + 3y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z.V_3 \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

Le sous-espace propre de $E(\lambda_3)$ est engendré par V_3 et $dim E(\lambda_3) = 1$.

Exemple

Soit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs propres correspondants.

2 Diagonalisation des matrices:

2.1 Définition:

A est une matrice carrée, est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P, dite matrice de passage, et une matrice diagonale D. Tel que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

2.2 Théorème:

Pour qu'une matrice carrée A soit diagonalisable, il faut et il suffit que la dimension de sous-espace propre associé à λ_i égale à la multiplicité de cette valeur propre λ_i

A est diagonalisable ssi:

$$dimE(\lambda_i) = \alpha_i$$

Avec α_i: multiplicité de λ_i

Remarque:

- La matrice digonale D est la matrice des valeurs propres.
- La matrice de passage P est la matrice des vecteurs propes.

2.3 Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$: Valeur propre simple ($\alpha_1 = 1$).

$\lambda_2 = 3$: Valeur propre simple ($\alpha_2 = 1$).

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $dimE(\lambda_1) = 1 = \alpha_1$.

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $dimE(\lambda_2) = 1 = \alpha_2$.

cl: A est diagonalisable, donc il existe D, matrice diagonale, et P,matrice de passage, tel que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

$$P = [V_1V_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$: Valeur propre double ($\alpha = 2$).

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $dimE(\lambda) = 1 \neq \alpha = 2$ $\Rightarrow$ B n'est pas diagonalisable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$: Valeur propre simple ($\alpha_1 = 1$).

$\lambda_2 = 2$: Valeur propre simple ($\alpha_2 = 1$).

$\lambda_3 = -1$: Valeur propre simple ($\alpha_3 = 1$).

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $dimE(\lambda_1) = 1 = \alpha_1$.

$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $dimE(\lambda_2) = 1 = \alpha_2$.

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad dimE(\lambda_3) = 1 = \alpha_3.$$

C est diagonalisable donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P tel que $C = P.D.P^{-1}$ avec:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$: Valeur propre simple ($\alpha_1 = 1$).

$\lambda_2 = 1$: Valeur propre double ($\alpha_2 = 2$).

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad dimE(\lambda_1) = 1 = \alpha_1.$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad dimE(\lambda_2) = 2 = \alpha_2.$$

H est une matrice diagonalisable donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P tel que $H = P.D.P^{-1}$ avec:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Application: Calcul de A^n

A est une matrice carrée diagonalisable, Calculer A^2.

$$A^2 = A.A \quad \text{or} \quad A = P.D.P^{-1}$$

D'où

$$A^2 = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$$
$$A^3 = A^2.A = P.D^2.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$
$$A^{n+1} = A^n.A = P.D^n.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$$