

# Chapitre IV: Diagonalisation des matrices carrées

## 1 Valeurs propres-vecteurs propres:

### 1.1 Définition:

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $V$  un vecteur non nul appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda$  un scalaire. On dit que  $V$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si:  $AV = \lambda V$ .

### 1.2 Polynôme caractéristique:

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  donc on a:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est par définition  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

#### **Théorème:**

Les valeurs propres d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  sont les racines de polynôme caractéristique  $P_A(\lambda) = 0$ .

#### **Exemple 1:**

Soit la matrice  $A_1$  suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de  $A_1$ .

Réponse:

- Cherchons le polynôme caractéristique de  $A_1$

$$P_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1$$

- Pour déterminer les valeurs propres de  $A$  il suffit de résoudre:

$$P_{A_1}(\lambda) = 0$$

### Exemple 2:

Soit la matrice  $A_2$  suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<https://youtu.be/vrru5an0DRM>

### Remarques:

- On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité  $\alpha$ , si  $\lambda$  est une racine d'ordre  $\alpha$  de  $P_A(\lambda) = 0$ .
- Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $A$  de multiplicité  $\alpha_i$  alors  $n = \sum_{i=1}^p \alpha_i$  (l'ordre de la matrice est égale à la somme de multiplicité de ces valeurs propres).
- Une valeur propre de multiplicité 1 est dite valeur propre simple.
- Une valeur propre de multiplicité  $\alpha > 1$  est dite valeur propre multiple.
  - Si  $\alpha = 2$ : Valeur propre double.
  - Si  $\alpha = 3$ : Valeur propre triple.

### Propositions:

- Si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle d'une matrice inversible  $A$ , alors  $\frac{1}{\lambda}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ .
- Si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle d'une matrice  $A$ , alors  $\lambda^p$  est une valeur propre de  $A^p$ .
- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.

- La somme des valeurs propres de  $A = \text{trace}(A)$ .
- Le produit des valeurs propres de  $A = \det(A)$ .

### Exemples:

Donner les valeurs propres des matrices suivantes:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Recherche des vecteurs propres:

### 1.3.1 Théorème:

A une valeur propre  $\lambda$ , on associe une infinité des vecteurs propres tous colinéaires entre eux.

$V_1, V_2$  sont colinéaires :  $V_1 = \alpha V_2$

### Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs propres de  $A$ .

Réponse

$A$  est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = -1$$

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_1 = 1$ , s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_1 V \rightarrow (A - I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I_3)V = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \frac{1}{2}x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x.V_1, \quad x \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des vecteurs propres de  $A$  associé à  $\lambda_1$ , sont les vecteurs colinéaires à  $V_1$ , cet ensemble s'appelle sous-espace propre de  $\lambda_1$ , noté  $E(\lambda_1)$  et puisque tous les vecteurs de  $E(\lambda_1)$  sont colinéaires à  $V_1$ , on dit que  $E(\lambda_1)$  est engendré par  $V_1$  et dimension de  $E(\lambda_1) = 1$ , on écrit  $\dim E(\lambda_1) = 1$ .

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_2 = 2$ , s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_2 V \rightarrow (A - 2I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 2I_3)V = 0$$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y.V_2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Le sous-espace propre de  $E(\lambda_2)$  est engendré par  $V_2$  et  $\dim E(\lambda_2) = 2$

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_3 = -1$ , s'il vérifie l'égalité suivante:

$$AV = \lambda_3 V \rightarrow (A + I_3)V = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A + I_3)V = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z \cdot V_3, \quad z \in \mathbb{R}$$

Le sous-espace propre de  $E(\lambda_3)$  est engendré par  $V_3$  et  $\dim E(\lambda_3) = 1$ .

### Exemple

Soit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs propres correspondants.

## 2 Diagonalisation des matrices:

### 2.1 Définition:

$A$  est une matrice carrée, est diagonalisable s'il existe une matrice inversible  $P$ , dite **matrice de passage**, et une **matrice diagonale**  $D$ . Tel que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

### 2.2 Théorème:

Pour qu'une matrice carrée  $A$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que la dimension de sous-espace propre associé à  $\lambda_i$  égale à la multiplicité de cette valeur propre  $\lambda_i$

$A$  est **diagonalisable ssi**:

$$\dim E(\lambda_i) = \alpha_i$$

Avec  $\alpha_i$ : multiplicité de  $\lambda_i$

**Remarque:**

- La matrice digonale  $D$  est la matrice des valeurs propres.
- La matrice de passage  $P$  est la matrice des vecteurs propres.

### 2.3 Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$  : Valeur propre simple ( $\alpha_1 = 1$ ).

$\lambda_2 = 3$  : Valeur propre simple ( $\alpha_2 = 1$ ).

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \dim E(\lambda_1) = 1 = \alpha_1.$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \dim E(\lambda_2) = 1 = \alpha_2.$$

**cl:**  $A$  est diagonalisable, donc il existe  $D$ , matrice diagonale, et  $P$ , matrice de passage, tel que:

$$A = P.D.P^{-1}$$

$$P = [V_1 V_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$  : Valeur propre double ( $\alpha = 2$ ).

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\dim E(\lambda) = 1 \neq \alpha = 2 \Rightarrow B$  n'est pas diagonalisable.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$  : Valeur propre simple ( $\alpha_1 = 1$ ).

$\lambda_2 = 2$  : Valeur propre simple ( $\alpha_2 = 1$ ).

$\lambda_3 = -1$  : Valeur propre simple ( $\alpha_3 = 1$ ).

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \dim E(\lambda_1) = 1 = \alpha_1.$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \dim E(\lambda_2) = 1 = \alpha_2.$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \dim E(\lambda_3) = 1 = \alpha_3.$$

$C$  est diagonalisable donc il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  tel que  $C = P.D.P^{-1}$  avec:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$  : Valeur propre simple ( $\alpha_1 = 1$ ).

$\lambda_2 = 1$  : Valeur propre double ( $\alpha_2 = 2$ ).

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \dim E(\lambda_1) = 1 = \alpha_1.$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \dim E(\lambda_2) = 2 = \alpha_2.$$

$H$  est une matrice diagonalisable donc il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  tel que  $H = P.D.P^{-1}$  avec:



$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Application: Calcul de $A^n$

$A$  est une matrice carrée diagonalisable, Calculer  $A^2$ .

$$A^2 = A.A \quad \text{or} \quad A = P.D.P^{-1}$$

D'où

$$A^2 = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$$

$$A^3 = A^2.A = P.D^2.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$

.

.

.

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

$$A^{n+1} = A^n.A = P.D^n.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$$