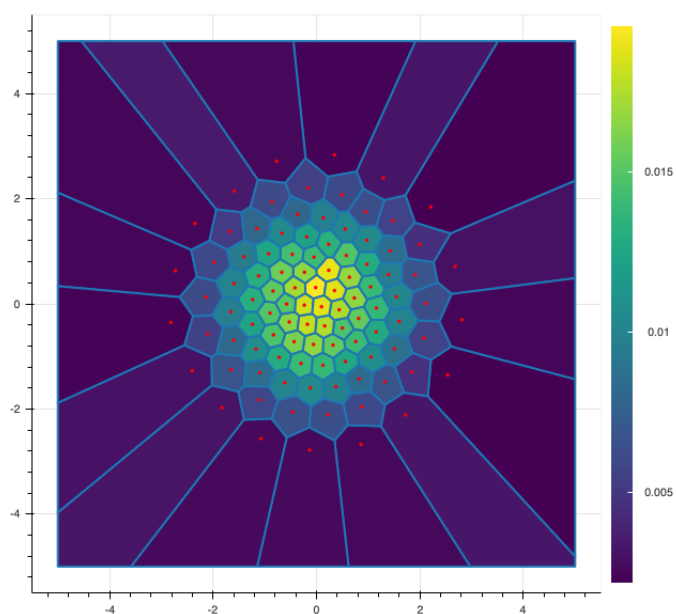


---

# Quantification d'une loi de probabilité continue par une loi discrète dans le cas Gaussien

---

Melvin Barbaux Allan Sercy  
Sous la direction de M. Samuel Herrmann



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Mosaïque de Voronoi et quantification</b>	<b>4</b>
1.1	Mosaïque de Voronoï . . . . .	4
1.2	Quantifieurs . . . . .	5
1.3	Distorsion optimale . . . . .	6
1.4	Quantificateur optimal . . . . .	7
1.5	Intégration numérique par quantification . . . . .	9
1.6	Erreur de quantification asymptotique . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Algorithmes de recherche d'un quantifieur optimal</b>	<b>12</b>
2.1	Algorithmes pour la quantification scalaire . . . . .	12
2.1.1	Méthode du point fixe de Lloyd . . . . .	13
2.1.2	Méthode du gradient déterministe . . . . .	14
2.2	Algorithme pour la quantification vectorielle : . . . . .	16
2.2.1	Competitive Learning Vector Quantization algorithm (CLVQ) . . .	16
2.2.2	Comparaisons des algorithmes . . . . .	18

# INTRODUCTION

Nous tenons, en premier lieu, à remercier chaleureusement M. Herrmann qui nous a encadré, conseillé et apporté un soutien pédagogique et technique dans la réalisation de notre projet. Ces remarques ont permis d'améliorer grandement la qualité de notre travail.

Nous tenons, en deuxième lieu, à remercier M. Dupuis, M. Cardot et M. Offret pour leurs cours, que nous avons suivis cette année et qui nous ont permis d'appréhender ce sujet avec plus de facilité.

La quantification optimale a été initialement introduite par Sheppard en 1897. Ses travaux ont porté sur la quantification optimale de la distribution uniforme sur les hypercubes unités. Elle a ensuite été étendue à des lois plus générales à support compact ou non, motivées par des applications à la transmission du signal dans les années 50.

Puis, dans les années 90, la quantification optimale a d'abord été utilisée à des fins d'intégration numérique pour l'approximation d'espérances, et plus tard utilisée pour l'approximation d'espérances conditionnelles pour des problèmes d'arrêt optimal appliqués à l'évaluation d'options américaines, puis pour des problèmes de filtrage non linéaire.

Nous étudierons le cadre théorique de la quantification en introduisant les mosaïques de Voronoï, la distorsion, les quantifieurs et l'utilité de cette théorie dans le cadre de l'intégration numérique. Puis, nous présenterons plusieurs algorithmes qui permettent de calculer le quantifieur optimal pour une loi normale.

## CHAPITRE

### 1

# MOSAIQUE DE VORONOI ET QUANTIFICATION

## 1.1 Mosaïque de Voronoï

Gueorgui Voronoï est un mathématicien Russe connu pour son diagramme de Voronoï qui permet de diviser un espace en polyèdres. Il nous faut définir ce qu'est un diagramme (ou une mosaïque) de Voronoï.

**Définition 1.** Considérons la norme euclidienne  $|\cdot|$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_N)$  un  $N$ -uplet de points de  $\mathbb{R}^d$ , la mosaïque de Voronoï est la famille d'ensembles définie par :

$$\overline{C}_i(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : |u - x_i| = \min_{j=1, \dots, N} |u - x_j| \right\}, i = 1, \dots, N$$

Les  $\overline{C}_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  sont appelées les cellules fermées de Voronoï engendrées par  $x$ .

**Remarque :** Tous les points de  $\mathbb{R}^d$  appartiennent à une cellule *i.e.*  $\cup_{i=1}^N \overline{C}_i(x) = \mathbb{R}^d$ .

L'intersection des cellules fermées n'étant pas vide nous devons définir d'autres cellules pour obtenir une partition de l'espace.

**Définition 2.** Soit  $C_i(x) \subset \overline{C}_i(x)$  pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , une partition de Voronoï est telle que :

$$\bigcup_{i=1}^N C_i(x) = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad C_i(x) \cap C_j(x) = \emptyset \text{ si } x_i \neq x_j$$

**Propriété 1.** La mesure de la frontière des cellules est nulle pour la mesure de Lebesgue :

$$\lambda_d(\partial C_i(x)) = 0. \quad (1.1)$$

**Idée de preuve :** Il faut pour prouver cette propriété, introduire les cellules ouvertes de Voronoï, les demi-espaces médians, l'hyperplan séparateur entre  $x_i$  et  $x_j$  et utiliser quelques propriétés de topologie. Une preuve de cette proposition est dans [7].

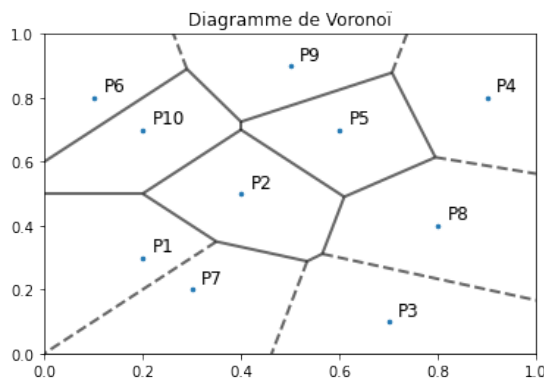


FIGURE 1.1 – Exemple de mosaïque de Voronoï

## 1.2 Quantifieurs

Pour la suite nous considérerons  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  de loi  $\mathbb{P}_X$  et telle que  $\mathbb{E}\|X\|^r < +\infty$  avec  $1 \leq r < +\infty$ . De plus, le  $N$ -uplet  $x$  défini précédemment est appelé dans ce contexte un  $N$ -quantifieur.

Soient  $E$  et  $F$  des espaces mesurables, munis respectivement de leur tribu borélienne  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est dite borélienne si :

$$\forall B \in \mathcal{F}, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

Nous allons maintenant définir une fonction borélienne qui sera la projection selon le plus proche voisin de la variable aléatoire  $X$  sur la grille  $x$ .

**Définition 3.** Nous appelons  $q$  une fonction borélienne définie de  $\mathbb{R}^d$  dans  $x$ , elle projette sur les cellules de Voronoï et est définie pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  par :

$$q(y) = \text{Proj}_x(y) := \sum_{i=1}^N x_i \mathbb{1}_{C_i(x)}(y)$$

Une telle fonction est appelée *quantificateur* et est entièrement caractérisée par la grille des centroïdes  $x$  dans laquelle elle prend ses valeurs et le N-uplet des poids  $p_i^N$  qui représentent la probabilité que  $X$  appartienne à la cellule de Voronoï, *i.e.* :

$$p_i := \mathbb{P}(X \in C_i(x)) = \mathbb{P}_X(C_i(x)), \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

### 1.3 Distorsion optimale

Nous travaillerons essentiellement avec la quantification optimale quadratique. Le terme optimale provient du fait que nous cherchons la meilleure approximation de  $X$  dans le sens où l'on va minimiser la distance entre les vecteurs aléatoires  $X$  et  $q(X)$  en optimisant la grille  $x$  pour une taille  $N$  donnée. Cette distance est mesurée en norme  $L^2$ , d'où le terme quadratique.

Cette distance est appelée erreur de quantification moyenne mais nous raisonnerons souvent en terme de distorsion qui n'est autre que le carré de l'erreur de quantification moyenne.

**Définition 4.** Nous appelons distorsion quadratique la fonction  $D_N^X(x)$  définie par :

$$D_N^X(x) := \mathbb{E}|X - q(X)|^2$$

**Remarque :** Cette définition peut s'écrire d'une manière équivalente :

$$D_N^X(x) = \mathbb{E}[|X - q(X)|^2] = \mathbb{E}\left[\left|X - \sum_{i=1}^N x_i \mathbb{1}_{C_i(x)}(X)\right|^2\right]$$

Si  $X$  n'est pas dans la cellule alors l'espérance est nulle donc :

$$D_N^X(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N |X - x_i|^2 \mathbb{1}_{C_i(x)}(X)\right]$$

La somme étant finie, nous pouvons inverser l'intégrale et la somme et appliquer le lemme de transfert :

$$\begin{aligned} D_N^X(x) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[|X - x_i|^2 \mathbb{1}_{C_i(x)}(X)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \min_{x_i \in x} |u - x_i|^2 \mathbb{P}_X(du) \end{aligned}$$

Il nous sera utile par la suite d'observer la distorsion d'une manière plus locale.

**Définition 5.** La distortion local  $d_N : (\mathbb{R}^d)^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  est définie par :

$$d_N(x, u) = \min_{i=1, \dots, N} |u - x_i|^2$$

**Remarque :** La distorsion quadratique s'écrit comme l'intégrale de la distorsion locale.

Le problème de la quantification optimale, pour  $N$  fixé, consiste à minimiser sur les quantifieurs la distorsion à l'aide notamment de la distorsion locale, c'est-à-dire, à trouver le  $N$ -uplet qui minimise la distorsion.

Dans la figure ci-dessous (cf [4] pour le code permettant de générer ces illustrations), nous présentons deux quantifieurs de taille  $N = 100$  d'un vecteur gaussien de dimension 2, centré et de matrice de variance-covariance  $\text{Id}_2$ .

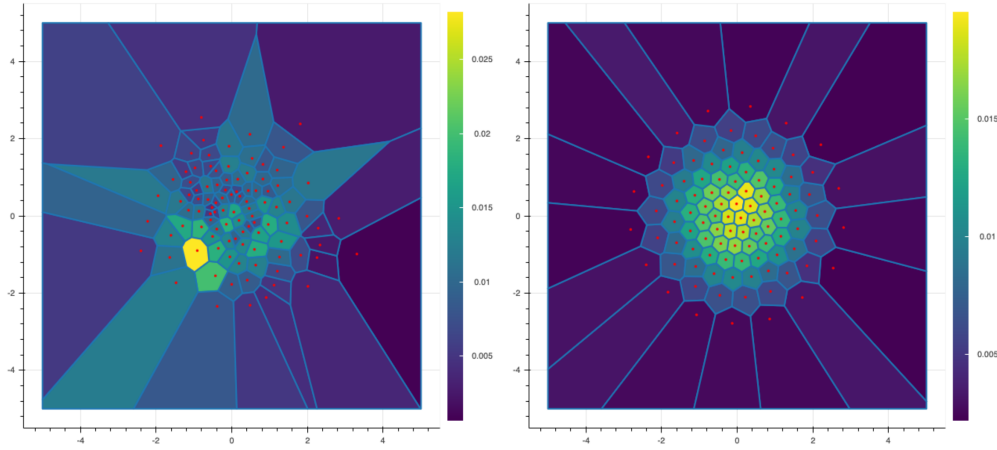


FIGURE 1.2 – Diagrammes de Voronoï d'une quantification quelconque (à gauche) et d'une quantification optimale (à droite)

## 1.4 Quantificateur optimal

L'existence et la caractérisation d'un quantifieur optimal nécessite l'étude de la distorsion  $D_N^X$  en fonction de  $x \in (\mathbb{R}^d)^N$ .

La fonction  $x \mapsto D_N^X$  est continue sur  $x$  et atteint son minimum, [2] donne une preuve de ce résultat.

**Proposition 1.** La fonction  $x \mapsto D_N^X$  est différentiable en tout point  $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$  tel que  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$  et  $\mathbb{P}_X(\cup_{i=1}^N \partial C_i(x)) = 0$ . De plus son gradient est donné par :

$$\nabla D_N^X(x) = 2 \left( \int_{C_i(x)} (x_i - u) \mathbb{P}_X(du) \right)_{1 \leq i \leq N}$$

**Preuve 1.** Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$  tel que  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$  et  $\mathbb{P}_X(\cup_{i=1}^N \partial C_i(x)) = 0$  nous avons :

$$\frac{\partial d_N}{\partial x}(u, x) = \frac{\partial \sum_{i=1}^N |u - x_i|^2 \mathbb{1}_{C_i(x)}(u)}{\partial x} = 2((x_i - u) \mathbb{1}_{C_i(x)}(u))_{1 \leq i \leq N}$$

La fonction de distortion locale est continue et la distortion est  $\mathbb{P}_X(du)$  presque partout différentiable sous la condition  $\mathbb{P}_X(\cup_{i=1}^N \partial C_i(x)) = 0$ .

Tous les centroïdes sont contenus dans un compact et cela peut importer le  $N$ -uplet de centroïde, nous pouvons poser  $x = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$  et nous avons alors :

$$\left| \frac{\partial d_N(u, x)}{\partial x} \right| \leq 2(|u| + x) \quad (1.2)$$

La fonction  $u \rightarrow 2(|u| + x)$  étant  $\mathbb{P}_X$  intégrable nous pouvons appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour obtenir le résultat.

**Proposition 2.** Si  $\mathbb{P}_X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors  $D_N^X$  est différentiable en tout  $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R})^N$  tel que  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$  et nous avons :

$$\arg \min_x D_N^X \in \{\nabla D_N^X = 0\}$$

Ce résultat est prouvé dans [7] page 8.

Notons  $\hat{X} = q(X)$  la variable quantifiée pour la suite. Un quantifieur  $\hat{X}$  est stationnaire si le  $N$ -uplet  $x$  associé satisfait  $\nabla D_N^X(x) = 0$ .

De plus, nous avons la propriété suivante démontrée dans [6] :

$$\mathbb{E}[X|\hat{X}] = \hat{X} \quad (1.3)$$

Pour un quantificateur stationnaire, la quantification vectorielle de  $X$  est constante et égale à  $\hat{X}$  pour tous les vecteurs  $X$  qui sont quantifiés à  $\hat{X}$ . Par conséquent, si l'on connaît la valeur quantifiée  $\hat{X}$ , la valeur attendue de  $X$  est simplement  $\hat{X}$ .

**Exemple :** Soit  $N = 2$  et  $X$  de loi discrète  $\mathbb{P}_X = \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_{\frac{1}{2}} + \delta_1)$ , nous avons pour tous  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$  :

$$\begin{aligned} D_2^X(x_1, x_2) &= \frac{1}{3} \left[ x_1^2 + \min_{i=1,2} \left( x_i - \frac{1}{2} \right)^2 + (x_2 - 1)^2 \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} \left( 2(x_1 - \frac{1}{4})^2 + (x_2 - 1)^2 + \frac{1}{8} \right) & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1 \\ \frac{1}{3} \left( x_1^2 + 2(x_2 - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{8} \right) & \text{si } x_1 + x_2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Calculons le gradient :

$$\nabla D_2^X(x_1, x_2) = \begin{cases} (4x_1 - 1, 2x_2 - 2) & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1 \\ (2x_1, 4x_2 - 3) & \text{si } x_1 + x_2 < 1 \end{cases}$$

La hessienne de la distorsion est définie positive donc la distorsion est convexe et nous avons alors :

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} D_2^X = \left\{ \left( \frac{1}{4}, 1 \right); \left( 0, \frac{3}{4} \right) \right\} \quad \left( \frac{1}{4}, 1 \right) \text{ et } \left( 0, \frac{3}{4} \right) \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} D_2^X$$

La distorsion minimale est alors  $D_2^X = \frac{1}{24}$ .

Cela nous donne les diagrammes de Voronoï suivants :

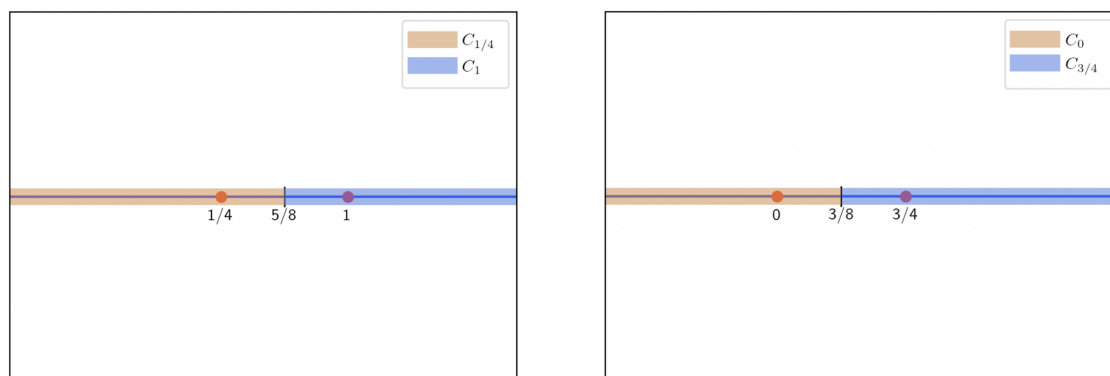


FIGURE 1.3 – Diagrammes de Voronoï pour une loi discrète

## 1.5 Intégration numérique par quantification

L'objectif de la quantification est d'approcher la probabilité  $\mathbb{P}_X$  sur  $\mathbb{R}^d$  par la loi de probabilité  $\mathbb{P}_{\hat{X}} = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x_i)$ . Autrement dit, pour toute fonction  $f$  intégrable par rapport à  $\mathbb{P}_X$ , notée  $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$  on approxime :

$$\mathbb{E}f(X) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \mathbb{P}_X(d\xi)$$

par :

$$\mathbb{E}f(\hat{X}) = \sum_{i=1}^N f(x_i) p_i$$

L'objectif est d'évaluer la qualité de cette approximation en fonction de la distorsion et donc numériquement, l'objectif est d'avoir accès au quantifieur optimal et aux masses des cellules de Voronoï pour obtenir la meilleure approximation possible.

Notons pour toute fonction  $f$  lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$l = \sup_{y \neq z \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(y) - f(z)|}{|y - z|} < +\infty$$

Nous pouvons établir un premier résultat concernant la qualité d'approximation numérique.

**Proposition 3.** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$  et  $f$  lipschitzienne, on a :

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| \leq l \sqrt{D_n^X(x)}$$

**Preuve 2.** Nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| &\leq \mathbb{E}|f(X) - f(\hat{X})| \\ &\leq l \mathbb{E}|X - \hat{X}| \\ &\leq l \sqrt{D_n^X(x)} \end{aligned}$$

La borne d'erreur peut être améliorée quand  $f$  est à gradient lipschitzien.

**Proposition 4.** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{P}_X)$  telle que  $f$  soit de classe  $C^1$  et à gradient lipschitzien de constante  $\nabla l$  et pour tout quantifieur stationnaire optimal  $\hat{X}$  nous avons :

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| \leq \nabla l D_N^X(x)$$

**Preuve 3.** En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, le fait que  $f$  soit à gradient lipschitzien et en considérant  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  nous avons :

$$\begin{aligned} f(X) - f(\hat{X}) &= \nabla f(\hat{X})(X - \hat{X}) + \int_0^1 (\nabla f(tX + (1-t)\hat{X}) - \nabla f(\hat{X}))(X - \hat{X}) dt \\ &\leq \nabla f(\hat{X})(X - \hat{X}) + \int_0^1 \left| (\nabla f(tX + (1-t)\hat{X}) - \nabla f(\hat{X}))(X - \hat{X}) \right| dt \\ &\leq \nabla f(\hat{X})(X - \hat{X}) + \nabla l \times |X - \hat{X}| \int_0^1 |(tX + (1-t)\hat{X}) - \hat{X}| dt \\ &\leq \nabla f(\hat{X})(X - \hat{X}) + \nabla l |X - \hat{X}|^2 \end{aligned}$$

Ensuite, en passant à l'espérance nous obtenons :

$$\mathbb{E}[f(X) - f(\hat{X})] \leq \mathbb{E}[\nabla f(\hat{X})(X - \hat{X})] + \nabla l \mathbb{E}|X - \hat{X}|^2$$

Pour finir en utilisant la propriété de stationnarité d'un quantifieur quadratique optimale (1.3) nous pouvons montrer que le premier terme du développement ci-dessus est nul :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\nabla f(\hat{X})(X - \hat{X})] &= \mathbb{E}[\nabla f(\hat{X})\mathbb{E}[X - \hat{X}|\hat{X}]] \\ &= \mathbb{E}[\nabla f(\hat{X})(\mathbb{E}[X|\hat{X}] - \hat{X})] \\ &= \mathbb{E}[\nabla f(\hat{X})(\hat{X} - \hat{X})] \\ &= 0\end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat

$$\left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| \leq \nabla l \mathbb{E}|X - \hat{X}|^2$$

## 1.6 Erreur de quantification asymptotique

Nous nous intéressons maintenant au comportement asymptotique de la distorsion minimale lorsque  $N$  tend vers l'infini.

**Proposition 5.** Soit  $\hat{X}$  un  $N$ -quantifieur optimal alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} D_N^X = 0$$

**Preuve 4.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dense dans  $\mathbb{R}^d$  i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid \forall n > N, |x_n - x| < \varepsilon$$

et soit le  $N$ -uplet  $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R})^d$ . La suite de variables aléatoires positives  $f_N = \min_{i=1, \dots, N} |X - x_i|^2$  est décroissante et converge p.s vers 0. Nous en déduisons en utilisant le théorème de convergence monotone que :

$$D_N^X(x) = \mathbb{E}[f_N] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puisque  $0 \leq \min_{x \in (\mathbb{R}^d)^d} D_N^X(x) \leq D_N^X(x)$ , nous avons le résultat.

**Remarque 1.** Par conséquent si  $\hat{X}$  est un  $N$ -quantifieur optimal alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(\hat{X})] \right| = 0 \quad (1.4)$$

La recherche de la vitesse de convergence de la distorsion minimale a été résolue en plusieurs étapes, d'abord par Zador [8], puis Buckley et Wise [1] puis finalement Graf et Lushgy [2].

En utilisant la propriété (3) et le théorème de Zador nous avons une vitesse de convergence de l'ordre de  $1/N^{1/d}$ . En utilisant cette fois-ci la propriété (4) nous obtenons une vitesse de l'ordre de  $2/N^{1/d}$ .

## CHAPITRE

# 2

# ALGORITHMES DE RECHERCHE D'UN QUANTIFIEUR OPTIMAL

Considérons un vecteur aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous allons travailler sur le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Trouver : } x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \\ D_N^X(x_1^*, \dots, x_N^*) \leq D_N^X(x_1, \dots, x_N), \quad \forall (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N \end{cases}$$

Deux approches existent pour construire un quantifieur optimal de la loi de  $X$ . La première approche consiste à généraliser le cas scalaire (*i.e.*  $d = 1$ ) directement au cas vectoriel et obtenir ainsi une quantification optimale de  $X$ . Si l'on connaît la densité de  $X$  alors il est encore possible en dimension 2 ou 3 d'appliquer les méthodes déterministes. Cependant dès que  $d \geq 4$ , nous ne pouvons plus compter que sur des méthodes d'optimisation stochastique fondées sur la simulation d'échantillons de la loi de  $X$ .

La seconde appelée la *quantification produit*, consiste à construire un quantifieur optimal de chacune des composantes du vecteur aléatoire et ensuite de construire le quantifieur en considérant le produit cartésien entre toutes les composantes quantifiées optimalement.

## 2.1 Algorithmes pour la quantification scalaire

Nous allons nous intéresser dans le cadre de la quantification scalaire à des algorithmes pour trouver un quantifieur optimal pour une variable aléatoire gaussienne.

### 2.1.1 Méthode du point fixe de Lloyd

L'algorithme du point fixe de Lloyd a été proposé par Stuart Lloyd en 1957 et a été créé historiquement pour numériser des signaux électriques, cet algorithme est parfois appelé algorithme de Lloyd-Max.

Nous cherchons les quantifieurs stationnaires c'est-à-dire les solutions de  $\nabla D_N^X(x^*) = 0$ . Le quantifieur peut se réécrire comme :

$$x_i = \frac{1}{\mathbb{P}_X(C_i(x))} \int_{C_i(x)} u \mathbb{P}_X(du), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

L'algorithme de Lloyd consiste à définir une suite  $(x^n)_{n \leq 0}$  dans  $(\mathbb{R}^d)^N$  partant d'un point initial  $x \in (\mathbb{R}^d)^N$  :

$$x^0 = x$$

$$x_i^{n+1} = F_i(x^n) = \frac{1}{\mathbb{P}_X(C_i(x^n))} \int_{C_i(x^n)} u \mathbb{P}_X(du), \quad i = 1, \dots, N$$

Nous remarquons que d'après (2.1) les quantifieurs stationnaires sont des points fixes de l'application  $F$ .

**Application :** Nous avons implémenté l'algorithme en dimension 1 et nous obtenons :

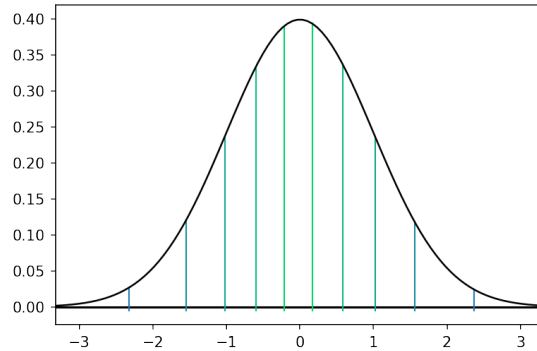


FIGURE 2.1 – Illustration de l'algorithme de Lloyd avec 300 itérations et 10 centroïdes

Posons  $\hat{X}^n = \hat{X}^{x^n}$  et si la suite  $\hat{X}^n$  converge alors d'après la proposition (1.3) la limite vérifie :

$$\hat{X}^\infty = \mathbb{E}[X | \hat{X}^\infty]$$

La méthode est ainsi dite du point fixe :

$$\hat{X}^{n+1} = \mathbb{E}[X | \hat{X}^n], \quad n \in \mathbb{N}$$

En dimension 1, lorsque  $\mathbb{P}_X$  admet une densité logarithmiquement concave alors d'après [3] l'application  $x \mapsto (F_i(x))_{1 \leq i \leq N}$  est une contraction. Elle admet également un unique

point fixe vers lequel la suite introduite par la méthode de Lloyd converge avec une vitesse exponentielle.

**Définition 6.** Soient  $I$  un intervalle réel et une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .  $f$  est logarithmiquement concave, si, pour tous points  $x, y$  de  $I$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ , nous avons l'inégalité suivante :

$$\ln(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \geq \lambda \ln(f(x)) + (1 - \lambda) \ln(f(y))$$

**Remarque 2.** Une manière équivalente de formuler cela est de remarquer que la fonction  $\ln(f)$  doit être concave pour que  $f$  soit logarithmiquement concave.

**Application :** Montrons que la densité d'une loi normale est logarithmiquement concave. La densité d'une loi normale de paramètres  $\mu, \sigma$  est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Posons  $g(x) = \ln(f(x))$  et sa dérivée seconde est :

$$g''(x) = -\frac{1}{\sigma^2} \leq 0$$

$f$  est bien logarithmiquement concave et l'algorithme de Lloyd converge.

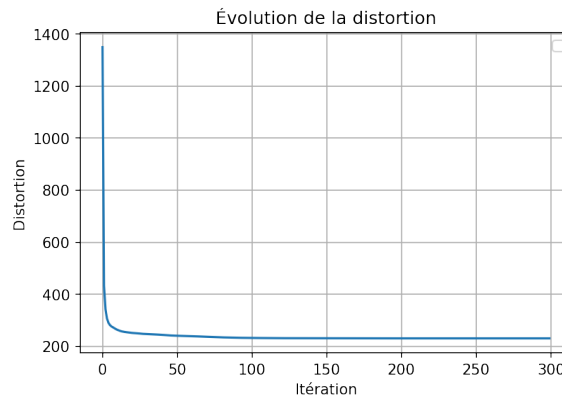


FIGURE 2.2 – Illustration de la convergence de l'algorithme de Lloyd

### 2.1.2 Méthode du gradient déterministe

Nous allons maintenant considérer l'algorithme de gradient déterministe. Il corrige à chaque pas sa direction avec des corrections de directions de plus en plus petites. Nous appelons  $x^*$  un point attractif si :

$$\langle x - x^* | \nabla D_N^X(x) \rangle > 0, \quad \forall x \neq x^* \in (\mathbb{R})^N$$

Nous pouvons alors considérer l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x^{n+1} &= x^n - \gamma_n \nabla D_N^X(x^n), \end{aligned}$$

où la suite des pas  $(\gamma_n)$  est une suite positive telle que  $\sum_{n \geq 0} \gamma_n = +\infty$  et  $\sum_{n \geq 0} \gamma_n^2 < +\infty$ .

**Application : Exemple pour la loi normale centrée réduite en dimension 1**

Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et soit  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Les cellules de Voronoï sont :

$$C_i(x) = \left[ \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right]$$

avec pour convention :

$$C_1(x) = \left] -\infty; \frac{x_1 + x_2}{2} \right]; C_N(x) = \left] \frac{x_{N-1} + x_N}{2}, +\infty \right[$$

Notons  $\phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Et nous pouvons calculer la distorsion explicitement :

$$\nabla D_N^X(x^n) = x_i \left[ \phi \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \phi \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)^2} \right]$$

Nous obtenons le diagramme de Voronoï suivant :

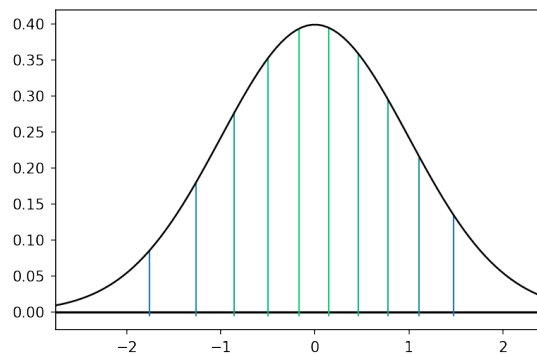


FIGURE 2.3 – Illustration de l'algorithme de descente de gradient avec 300 itérations et 10 centroïdes

Nous avons aussi le graphique de la distorsion en fonction du nombre d'itérations :

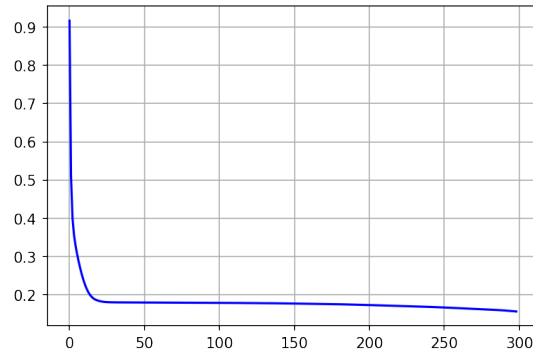


FIGURE 2.4 – Illustration de la convergence de l'algorithme de descente de gradient

## 2.2 Algorithme pour la quantification vectorielle :

Nous pouvons utiliser l'algorithme de Lloyd en dimension 2. Nous avons comme illustration :

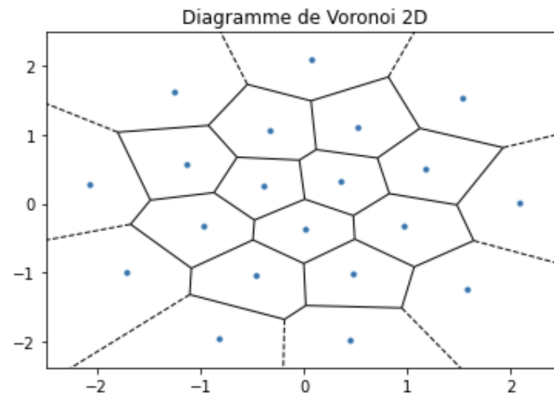


FIGURE 2.5 – Illustration de l'algorithme de Lloyd avec  $N = 20$  et 300 itérations

Cela nous servira comme base pour la comparaison avec l'algorithme qui va suivre (une base uniquement pour la dimension 2).

### 2.2.1 Competitive Learning Vector Quantization algorithm (CLVQ)

L'algorithme CLVQ peut s'écrire de la façon suivante avec  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  :  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$x_i^{n+1} = x_i^n - \gamma_{n+1} \mathbb{1}_{C(x_i^n)}(X)(x_i^n - X)$$



Cet algorithme est parfois appelé algorithme de Kohonen avec 0 voisin. Il se décompose en deux phases :

- *Phase de compétition* : Trouver le bon indice  $i_0(n+1)$
- *Phase d'apprentissage* : Mettre à jour la composante d'indice  $i_0(n+1)$  en faisant une homothétie centrée en  $X^{n+1}$  avec comme rapport  $(1 - \gamma_{n+1})$

Il est possible de l'écrire de manière équivalent en posant  $i_0(n+1) \in \mathbb{N}$  tel que  $X^{n+1} \in C(x_{i_0(n+1)}^n)$ ,  $i_0(n+1) \in \{1, \dots, N\}$

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x_i^{n+1} = x_i^n - \gamma_{n+1}(x_i^n - X^{n+1}) & \text{si } i = i_0(n+1) \\ x_i^{n+1} = x_i^n & \text{si } i \neq i_0(n+1) \end{cases}$$

D'un point de vue numérique l'étape la plus couteuse est la phase de compétition.

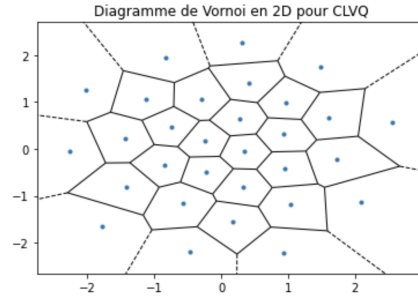


FIGURE 2.6 – Illustration de l'algorithme CLVQ avec  $N = 20$  et 300 itérations

Dans l'article [6] la suites des pas  $(\gamma)_n$  est définie de la manière suivante avec  $\gamma_0 \in [0, 1]$  :

$$\gamma_n = \gamma_0 \frac{4N^{1/d}}{4N^{1/d} + \gamma_0 \pi^2 N^{-2/d}} \quad (2.2)$$

Nous avons avec ce pas :

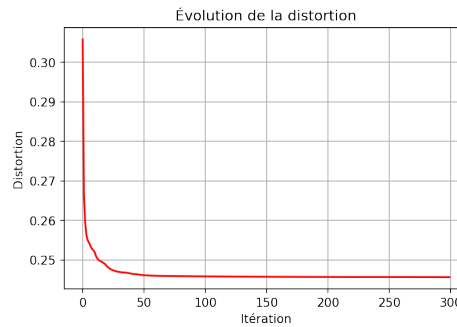


FIGURE 2.7 – Distorsion en fonction des itérations pour l'algorithme CLVQ

### 2.2.2 Comparaisons des algorithmes

En mettant sur le même graphique la distorsion en fonction des itérations de l'algorithme de Lloyd et l'algorithme de descente de gradient nous obtenons :

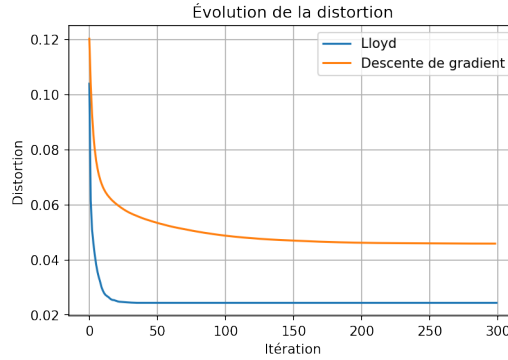


FIGURE 2.8 – Comparaison de l'algorithme de Lloyd et l'algorithme de descente de gradient pour  $N = 50$  et 300 itérations

Nous pourrions conclure que l'algorithme de Lloyd est meilleur mais, en implémentant un compteur d'opérations nous constatons que l'algorithme de descente de gradient effectue en moyenne 4 fois moins d'opérations.

En résumé l'algorithme de Lloyd est une méthode général et peut être utilisée tout le temps contrairement à l'algorithme de descente de gradient qui suppose que nous sommes en mesure de calculer le gradient de la distorsion.

De la même façon en mettant sur le même graphique la distorsion en fonction des itérations de l'algorithme de Lloyd en dimension 2 et l'algorithme CLVQ nous obtenons :

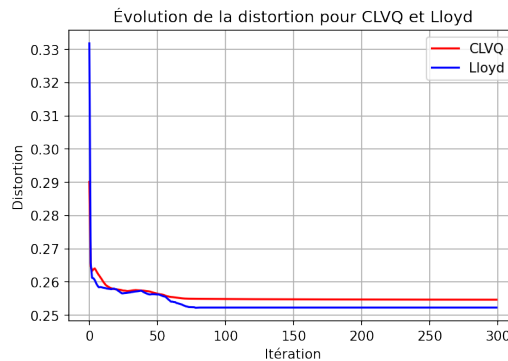


FIGURE 2.9 – Comparaison de l'algorithme de Lloyd en dimension 2 et l'algorithme CLVQ  $N = 50$  et 300 itérations

Cette fois la comparaison est claire, l'algorithme de CLVQ est le meilleur comparé à Lloyd. De plus l'algorithme CLVQ peut être utilisé pour des dimensions supérieur à 2. Cependant dans l'article [6], les auteurs expliquent qu'il est efficace mais il est nécessaire d'avoir un nombre énorme de points pour que l'algorithme converge.

Au début de ce chapitre nous avons parlé de quantification produit, c'est une alternative qui permet d'utiliser les algorithmes de quantification scalaire sur chacune des composantes de notre variable aléatoire et ainsi économiser du temps de calcul. Un exemple de diagramme de Voronoï dans ce contexte est donné ci-dessous :

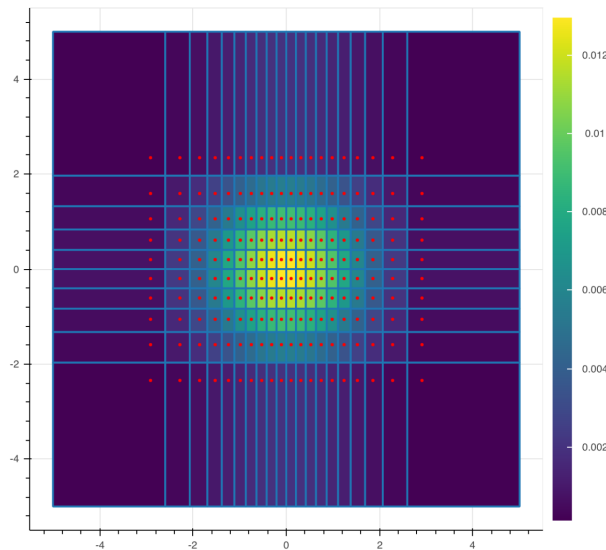


FIGURE 2.10 – Diagramme de Voronoï d'une loi normale de dimension 2, quantifiée par une quantification produit

# CONCLUSION

Dans ce document, nous avons présenté une introduction à la théorie de la quantification vectorielle optimale. C'est un sujet vaste avec de nombreuses applications, notamment dans le monde de la finance.

Nous avons implémenté plusieurs algorithmes dans le but d'obtenir une grille qui nous permet de mieux estimer une intégrale. Il est parfois fastidieux de calculer la distorsion, c'est en partie pourquoi nous nous sommes cantonnés à la loi normale.

La méthode de Lloyd ainsi que la descente de gradient sont des méthodes efficaces pour des dimensions petites. Concernant les dimensions supérieures, l'algorithme CLVQ est le plus adapté, même s'il faut un faible nombre de centroïdes pour s'assurer un temps de calcul raisonnable.

Durant ce travail, nous nous sommes majoritairement basés sur [6], et ponctuellement sur [5] et [7]. Le site internet de Thibaut Montes (ancien doctorant de Gilles Pagès) nous a fourni de jolies illustrations pour notre projet. Enfin, la bibliothèque Scipy donne accès à une documentation très complète avec de nombreux exemples et des explications limpides. Tous ces éléments nous ont permis de rendre, nous l'espérons, un projet de qualité.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Bucklew and G. Wise. Multidimensional asymptotic quantization theory with  $r$ th power distortion measures. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2) :239–247, 1982.
- [2] Siegfried Graf and Harald Luschgy. Foundations of quantization for probability distributions. 2000.
- [3] J. Kieffer. Exponential rate of convergence for lloyd’s method i. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2) :205–210, 1982.
- [4] Thibaut Montes. *Numerical methods by optimal quantization in finance*. PhD thesis, 2020.
- [5] Gilles Pagès. A space quantization method for numerical integration. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 89(1) :1–38, 1998.
- [6] Gilles Pagès and Jacques Printems. Optimal quadratic quantization for numerics : the gaussian case. 2003.
- [7] Huyèn Pham. *Applications des méthodes probabilistes et de contrôle stochastique à la finance mathématique*. PhD thesis, 1995. 1995PA090001.
- [8] P. Zador. Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2) :139–149, 1982.