Oscilações

Recebe o nome de oscilação ou de movimento oscilatório ou vibratório o movimento (ou mudança de estado) que em maior ou menor grau se repete com o tempo. Por sua natureza física, as oscilações podem ser muito diversas. Entre elas figuram as oscilações mecânicas (movimentos pendulares, movimento dos êmbolos dos motores de combustão interna, vibrações de cordas, lâminas, etc.)

As oscilações se chamam periódicas quando os valores das grandezas físicas que variam durante elas se repetem ao longo de intervalos de tempo iguais. O período de oscilações T é o intervalo mínimo de tempo ao longo do qual se repete os valores de todas as grandezas físicas que caracterizam o movimento oscilatório; durante este período se realiza uma oscilação completa, ou seja, é o tempo correspondente a um ciclo e sua unidade é o segundo. A frequência, f, é o número das oscilações completas que se cumpre na unidade de tempo: $f = 1/T$. A unidade SI de frequência é o hertz(H), onde 1hertz= 1Hz = 1ciclo/s = $1s^{-1}$. A frequência angular, ω, é 2π vezes a frequência: $\omega=2\pi f$. Ela representa uma taxa de variação de uma grandeza angular que é sempre medida em radianos, portanto possui unidades de rad/s.

A amplitude do movimento designado por A, é o módulo máximo do vetor deslocamento do corpo a partir da posição de equilíbrio, isto é, o valor máximo de $|x|$ ou $|y|$. A unidade de A no SI é o metro. O ciclo é uma oscilação completa, ou seja, de A até -A e retornando ao ponto A.

Atividade de Estudo

Deduzir e interpretar a equação que caracteriza o movimento do oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes da posição, da velocidade e da aceleração, cuja aceleração for proporcional ao seu deslocamento e tiver direção oposta a este movimento.

a)Transformação teórica

Considere um sistema constituído por uma massa **m** e uma mola de constante elástica **k** (sistema massa-mola) em equilíbrio estável sendo perturbado na sua posição– alongando ou comprimindo, ao deslocar-se da sua posição de equilíbrio adquire movimento e passa a oscilar em trajetória retilínea. Devemos adotar como referencial o eixo-x quando a massa desliza sem atrito em uma base plana, por exemplo, ou y quando oscila na posição vertical e colocar a origem na posição do seu centro de massa quando o sistema está em repouso. Em situações reais sempre existe alguma dissipação de energia devido ao atrito entre a massa e a superfície, e neste caso o oscilador é dito *amortecido*. Para fins deste estudo consideraremos um oscilador sem atrito.

b) Modelo do objeto de estudo

O modelo de um oscilador harmônico simples (OHS) é representado pelo sistema massa-mola, conforme Figura 1. Uma das extremidades da mola é presa em um ponto fixo enquanto a outra é presa a uma massa que pode deslizar sobre uma superfície plana sem atrito.

Quando oscila, o corpo passa contínua e alternadamente de posição de abscissa positiva para posição de abscissa negativa. A origem desse movimento está na força **F**, força elástica restauradora produzida pela mola e seu módulo varia conforme a lei de Hook: $F=-kx$. O movimento oscilatório do sistema massa-mola é retilíneo e o sentido se inverte periodicamente, caracterizando assim, o movimento harmônico simples – MHS. Quando a massa se afasta da distância **x** em relação à posição de equilíbrio, a mola exerce sobre ela uma força $-kx$, conforme a lei de Hooke: $F = -kx$. O sinal negativo indica que o sentido da força elástica restauradora, exercida pela mola sobre a massa é sempre oposto ao sinal da abscissa x.

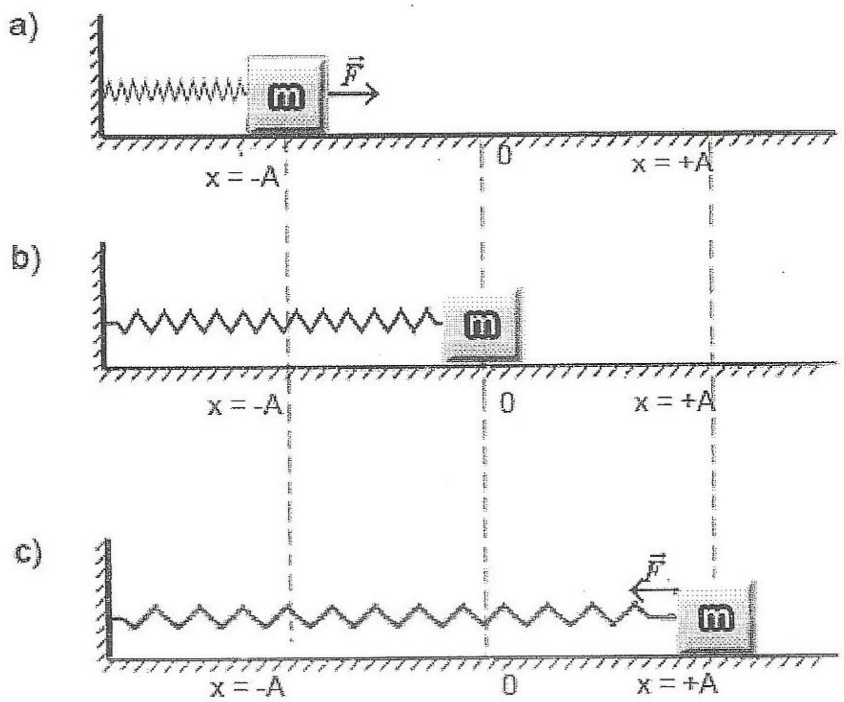

Figura 1. Descrição do diagrama de forças no sistema massa-mola. (a) posição de compressão máxima, a mola faz força para voltar ao seu comprimento de equilíbrio; (b) posição de equilíbrio; (c) posição de distensão máxima, a mola faz força para voltar ao seu comprimento de equilíbrio. Em (a) e (c) a força é sempre na direção oposta ao deslocamento.

O modelo de Movimento Harmônico Simples (MHS) é definido como o movimento retilíneo do corpo de massa **m** preso na extremidade de uma mola hookeana sujeita à ação de força resultante elástica restauradora. Desta forma, sendo F_R a força elástica restauradora, descrita pela lei de Hook: $F_R = -kx$ e pela segunda lei de Newton: $F_R = ma$, podemos escrever em módulo e sentido que: $ma = -kx$. Assim, podemos obter a expressão do módulo e o sentido da aceleração no MHS, dada por: $a = -(k/m)x$, ou seja, aceleração do corpo em função da elongação.

A aceleração é proporcional ao deslocamento da massa e tem o sentido oposto ao do deslocamento. Considera-se este resultado como a expressão fundamental do MHS, que permite a dedução das demais funções desse movimento, bem como possibilita definir se o movimento é MHS.

c)Transformação do modelo

Uma grandeza física **s** que oscila periodicamente terá em função do tempo **t**a forma: $s=s_0+x(t)$, onde:s_0 é uma constante e $x(t)$ é uma função periódica do tempo: $x(t+T)=x(t)$. O tipo mais simples de oscilações periódicas são as harmônicas (ou senoidais). Neste caso: $x=A\text{sen}(\omega t+\varphi_0)$ ou $x=A\cos(\omega t+\varphi_1)$, onde: A,ω,φ_0 e φ_1 são grandezas constantes, sendo $A>0$, $\omega>0$ e $\varphi_1=\varphi_0-(\pi/2)$. A grandeza A, é igual ao valor absoluto máximo de **x**, e se chama amplitude de oscilação. As expressões $\varphi=\omega t+\varphi_0$ e $\varphi=\omega t+\varphi_1$definem o valor de **x** em um instante **t** se chama fase de oscilação.

No instante em que começa a ser medido o tempo($t=0$), a fase é igual à fase inicial φ_0 e φ_1. A grandeza ω chama-se frequência cíclica, circular ou angular: $\omega=2\pi/T=2\pi f$.

O significado físico de fase no MHS é muito importante para o entendimento do fenômeno que ocorre quando o ponto material não descreve ângulos, porém a fase é expressa em ângulos por associação ao MCU. Assim, quando a fase do ponto material **P** ao deslocar-se em movimento circular para a esquerda for $\varphi_1=\pi/2$ radianos, o segmento de reta que liga a posição **P1** à origem do referencial forma um ângulo de 90^0 com o eixo-x. O ponto **Q** projeção de **P** sobre o diâmetro, nesse instante está passando pela origem no sentido negativo do eixo-x. Embora não descreva ângulo, é possível associar ao ponto material em MHS um ângulo ou fase a cada instante, correspondente à fase do movimento circular do ponto **P**. Dessa forma, quando Q passa pela extremidade à esquerda da trajetória, **P** está em 2 (**P2**), a fase é $\varphi_2=\pi$ e quando Q passa pela origem 0, no sentido positivo do eixo-x, P está em 3(**P3**), a fase é $\varphi_3=3\pi/2$.Quando Q passa pela extremidade à direita da trajetória, **P** está 4(**P4**), a fase é $\varphi_4=2\pi$.

Desta forma, estabelecemos como referencial para o movimento harmônico simples de **Q**o eixo **x**, que coincide com o diâmetro horizontal da circunferência, orientado para a direita. Assim, a projeção do raio que passa por **P** é a abscissa **x** de **Q**. Como o raio da circunferência é igual à amplitude do MHS, R=A, podemos escrever: $\cos\varphi=x/A$ ou $x=A.\cos\varphi$. Como no MCU, $\varphi=\varphi_0+\omega t$, a função de posição do MHS fica: $x=A.\cos(\omega t+\varphi_0)$, conforme, Figura 2.

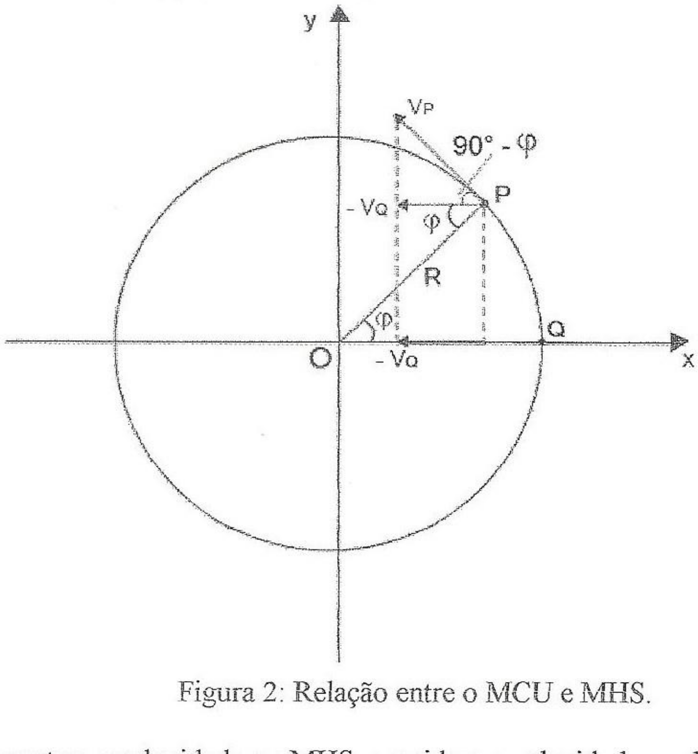

Figura 2: Relação entre o MCU e MHS.

Para encontrar a velocidade no MHS, considere a velocidade v_Q do ponto Q que se desloca para a esquerda em MCU tendo como referencial o eixo **x** orientado para a direita. A velocidade v_Q do movimento harmônico simples de Q pode ser obtida projetando-se sobre o eixo **x** a velocidade v_P do ponto P. O ângulo de v_P com a horizontal é $(90^\circ\text{-}\varphi)$. Portanto v_Q projeção de v_P sobre o eixo x é em modulo: $v_Q = -v_P\cos(90^\circ - \varphi)$.

O sinal negativo é colocado porque o sentido de v_Q é sempre oposto ao sentido do eixo x.Pela trigonometria, $\cos(90^\circ-\varphi)=\text{sen}\varphi$, então a expressão da velocidade torna-se, em módulo: $v_Q= -v_P.\text{sen}\varphi$; sabe-se que no MCU $\varphi=\varphi_0+\omega t$, substituindo este valor na expressão anterior temos: $v_Q=-v_P\text{sen}(\varphi=\varphi_0+\omega t)$.

Finalmente da expressão $v=\omega R$ do MCU, podemos escrever como: $v_P=\omega R$ e $R=A$; substituindo-se estes valores na função da velocidade em relação ao tempo descrita acima, temos: $v_Q=-v_P\text{sen}(\varphi=\varphi_0+\omega t)$ agora denominada apenas de **v**, obtemos: $v = -\omega A.\text{sen}(\omega t+\varphi_0)$.

A função da aceleração pode ser encontrada a partir da expressão: $a = -\omega^2 x$; sendo $x = A.\cos(\omega t+\varphi_0)$, obtemos:

$a = - \omega^2 A.\cos(\omega t+\varphi_0)$.

As equações cinemáticas do MHS são: $x = A.\cos(\omega t+\varphi_0)$; $v = -\omega A.\text{sen}(\omega t+\varphi_0)$; e $a = -\omega^2 A.\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Atividade de Estudo: Movimento Harmônico Simples

Considere o sistema constituído de um bloco de massa **m** preso a uma mola e fixo na outra extremidade. Neste sistema ideal o atrito é desprezível e a massa da mola é pequena em comparação com a massa do bloco. Suponhamos que o bloco tenha uma massa **m** e que a constante da mola seja **k**. O bloco é puxado para o lado de modo que a mola sofre uma distensão de **x** e então é liberado a partir do repouso em t=0. Determinar a frequência angular ω, o período T e a frequência (f).

a) Transformação Teórica do Objeto de Estudo

Um movimento é considerado oscilatório quando um corpo se movimenta, periodicamente, em torno de sua posição central, conhecida como posição de equilíbrio. O Movimento Harmônico Simples – MHS é um movimento periódico de um corpo em torno de um ponto de equilíbrio quando o corpo é submetido a uma força restauradora. A aceleração desse movimento é dirigida para a posição de equilíbrio, e sua intensidade é proporcional à distância em relação à posição de equilíbrio.

As grandezas frequência angular, frequência e período são características e relevantes de um movimento oscilatório. Assim, a frequência angular(ω) representa uma taxa de variação de uma grandeza angular que é sempre medida em radianos. A frequência (f) de um movimento oscilatório é o número de oscilações completas do corpo em certo intervalo de tempo. O período (T) de um movimento oscilatório é o intervalo de tempo necessário para que o corpo realize uma oscilação completa.

Além da frequência angular, da frequência e do período, a amplitude é outra grandeza importante do movimento oscilatório; a amplitude de um movimento oscilatório é a medida da maior distância do corpo em relação à posição de equilíbrio.

Para o sistema da massa presa a uma mola e fixa em outra extremidade, a força resultante sobre o bloco é devida à mola, ou seja, $\sum F = F_R = -kx_i$. O bloco é deslocado para a direita e $\sum F$ é dirigido para a esquerda; quando o bloco está na posição de equilíbrio, $\sum F = 0$.

Quando o bloco está se deslocando para a esquerda, $\sum F$ é dirigido para a direita. Se o bloco é deslocado do equilíbrio e liberado em seguida, executa MHS.

b) Modelo do Objeto de Estudo

Seja **x** a coordenada do bloco em MHS; então: $x = A.\cos(\omega t+\varphi)$. Neste sistema ideal, o bloco desliza ao longo da superfície horizontal com atrito desprezível, de modo que a força exercida pela superfície é igual ao peso do bloco, e a força resultante sobre o bloco é a força F_R devida à mola: $F_R = -kx$, que é força restauradora linear, linear por ser linearmente proporcional ao deslocamento x, e é dirigida em oposição ao deslocamento. Como a força da mola é a força resultante sobre o bloco e da segunda lei de Newton $\sum F = ma$, conclui-se: $-kx = ma_x \Rightarrow a_x = -(k/m)x$(equação fundamental do MHS).

c) Transformação do modelo do Objeto de Estudo

Um objeto está em movimento harmônico simples-MHS se sua coordenada varia senoidalmente com o tempo (como uma função seno ou cosseno). Seja "x" a coordenada de um objeto em MHS; então: $x = A.\cos(\omega t+\varphi)$; $v = -\omega A.\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$ e $a = -\omega^2 A\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$.

Da equação fundamental do MHS: $a_x = -(k/m)x$, substituindo os valores de "x" deslocamento e da "a_x" aceleração, obtemos:

$$-\omega^2 A\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) = -k/m(A.\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow -\omega^2 = -k/m \text{ ou } \omega^2 = k/m \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}.$$

Isto significa que o bloco executa um MHS e a frequência angular é: $\omega = \sqrt{k/m}$.

O movimento no MHS se repete após um determinado intervalo de tempo chamado período T. O objeto percorre um ciclo completo do seu movimento durante o tempo T.

Assim, para um ciclo completo, a fase $(\omega t+\varphi)$ aumenta de 2πrad enquanto o tempo "t" aumenta de T, ou: $\omega(t+T)+\varphi=(\omega t+\varphi)+2\pi \Rightarrow \omega t+\omega T+\varphi = (\omega t+\varphi)+2\pi$ ou $\omega T+(\omega t+\varphi) = (\omega t+\varphi) + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$ ou $T = 2\pi/\omega$.

O período T é inversamente proporcional a ω; quanto maior a frequência angular, menor o período e mais rapidamente o objeto completa um ciclo.
A frequência é: $f=1/T= 1/(2\pi/\omega) = \omega/2\pi = 1/2\pi\ (\sqrt{k/m})$.

Sistema Oscilante Vertical: Massa-Mola

Quando um corpo está pendurado preso à extremidade de uma mola fixada num suporte, além da força da mola, age sobre o corpo o seu peso – mg. Se escolhermos como positiva a direção para baixo, a força da mola sobre o corpo é F=-ky, em que **y** é a diferença entre a posição da extremidade da mola esticada pelo peso do corpo e a posição da mola não esticada pelo peso (posição inicial), conforme Figura 1 a seguir.

A posição de um sistema massa-mola vertical apresenta três situações:

a) Posição de equilíbrio sem o corpo;
b) Posição de equilíbrio com o corpo, a mola estica de $y_0=mg/k$;
c) Posição de oscilação em torno do ponto de equilíbrio com o deslocamento $y'=y-y_0$.

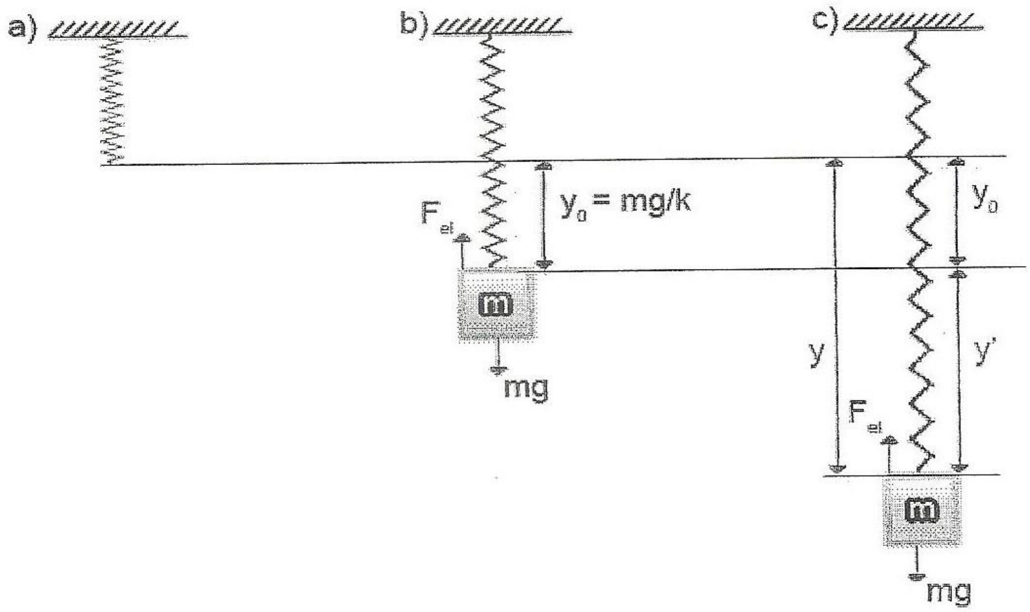

Figura 1. Oscilador vertical massa-mola

O ponto de equilíbrio está deslocado de $y_0 = mg/k$; sendo a elongação: $y' = y-y_0$, para uma posição arbitrária, temos: $mg-ky = ma \Rightarrow mg-k(y'+(mg)/k) = ma \Rightarrow a = -(k/m)y'$. Como vimos, no sistema massa-mola, a massa **m** oscila presa à mola de constante elástica k, e a aceleração do sistema é dada pela expressão: $a = -(k/m)y$ ou $a = -\omega^2\, y$ (movimento circular).

Observando as expressões acima concluímos que $\omega^2=k/m$. A frequência angular do sistema é: $\omega^2=k/m$ ou $\omega=\sqrt{k/m}$. Sabemos que $\omega=2\pi f$ e $T=1/f$; podemos obter as expressões do período e da frequência do oscilador massa-mola. $T=2\pi\sqrt{m/k}$ e $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

A frequência e o período do oscilador massa-mola não dependem da amplitude da oscilação, mas apenas da constante elástica da mola e da massa do corpo.

Oscilador Harmônico Simples: Pêndulo Simples

Atividade de Estudo

Determinar o período e a frequência de oscilações do pêndulo simples de comprimento ℓ onde a aceleração da gravidade local é g.

a) Transformação Teórica

Um pêndulo simples é um corpo ideal que consiste de uma massa suspensa por um fio inextensível, de massa desprezível sob a ação da gravidade. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscilará em um plano vertical descrevendo movimento periódico e oscilatório, desta forma, podemos determinar o período do movimento. O estudo do pêndulo simples requer que o deslocamento do fio que suporta a massa pendular forme ângulos pequenos com a vertical ($\theta<5^{\circ}$); dessa forma a trajetória do pêndulo será aproximadamente retilínea e o movimento poderá ser considerado harmônico simples. Assim, é possível obter as expressões da frequência e do período de oscilações do pêndulo simples de comprimento ℓ num lugar onde a aceleração da gravidade é g.

b) Modelo

O modelo do oscilador pêndulo simples é representado na Figura 6. O modelo representa um pêndulo simples de comprimento ℓ, de massa **m** presa num ponto O.

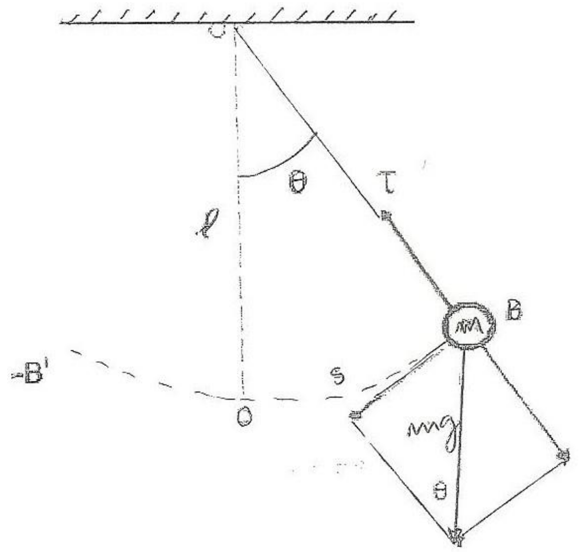

Figura 6. Modelo do oscilador pêndulo simples

Neste modelo, o fio faz um ângulo θ com a vertical oscilando entre B e a posição simétrica B'. As forças que atuam em **m** são o peso **m.g** e a tração do fio τ. O movimento será em torno de um arco de círculo de raio ℓ; por isto, escolheremos um referencial em que um dos eixos seja radial e o outro tangente ao círculo. O peso **m.g** pode ser decomposto numa componente radial de módulo **m.g.cosθ** e numa componente tangencial **m.g.senθ**. A componente radial da resultante é a força centrípeta que mantém a partícula na trajetória circular. A componente tangencial é a força restauradora F_R que se opõe ao aumento de θ.

A força restauradora é proporcional ao **senθ**. o que não caracteriza um movimento harmônico simples. Porém, se o ângulo θ for suficientemente pequeno($\theta<5^0$). **senθ** será aproximadamente igual a **θ** em radianos,e o deslocamento ao longo do arco será **x = ℓ.θ**e, para ângulos pequenos, ele será aproximadamente retilíneo. Para pequenos deslocamentos, a força restauradora é proporcional ao deslocamento e tem o sentido oposto; esta é a condição para se ter o movimento harmônico simples.

Por isto, supondo **sen θ=θ,**obteremos:

$F_R = -$ m.g. senθ = - m.g. θ = - m.g. (x/ℓ) = - $(m.g/\ell)x$ e pela segunda lei de Newton:

$-m.g/\ell=m.a \Rightarrow a = -(x/\ \ell)g$. Do MHS. $a=-\omega^2x \Rightarrow -\omega^2x= -(x/\ell)g \Rightarrow \omega^2 = g/\ell$. substituindo-se $\omega=2\pi/T$ nesta equação temos: $(2\pi/T)^2=g/\ell \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\ell/g}$.

$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ (Período de Oscilações)

$f=1/T \Rightarrow f= (1/2\pi)\sqrt{g/l}$ (Frequência de Oscilações)

c) Transformação do Modelo

O Pêndulo Simples, através da equação acima, também fornece um método simples para medições do valor da aceleração da gravidade **g**, ou seja: $\mathbf{g = 4\pi^2\ell\ /\ T^2}$. Note que o período **T**, é independente da massa **m**, do objeto suspenso. Analisando a equação do período de pêndulo simples podemos concluir que:

a) o período de oscilação não depende da massa do pêndulo;
b) quanto maior for o comprimento do pêndulo, maior será seu período;
c) em lugares onde a aceleração da gravidade é alta, o período será pequeno.