现代控制理论 第三、四章 习题课

3.7 由转移矩阵求系统矩阵。

解：由状态转移矩阵求系统矩阵

因为 $\Phi(t,0)=e^{At}$， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,0)=Ae^{At}$， 可得到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,0)\Big|_{t=0}=A$ ，求得：

$$(a)A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-4&4\\0&-1&-4\end{bmatrix}\qquad(b)A=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\qquad(c)A=\begin{bmatrix}1&1\\4&1\end{bmatrix}$$

3.8 已知初始状态及其解，求系统矩阵

解：由 $x(t)=\Phi(t,0)x(0)$，有 $\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}=\Phi(t,0)\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}$，可以求得状态转移矩阵 $\Phi(t,0)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}^{-1}$。再由状态转移矩阵求系统矩阵

$$\because\Phi(t,0)=e^{At},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,0)=Ae^{At}\Rightarrow\frac{d}{dt}\Phi(t,0)\Big|_{t=0}=A$$

$$(a)\Phi(\mathrm{t},0)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t}\text{-}\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{-2t}\text{-}\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&-3\end{bmatrix}$$

$$(b)\Phi(t,0)=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-e^{-3t}+8e^{-2t} & -2e^{-3t}+2e^{-2t}\\ e^{-3t}-4e^{-2t} & 2e^{-3t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\qquad A(t)=\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,0)\big|_{t=0}=\begin{bmatrix}\frac{-13}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}&\frac{-4}{7}\end{bmatrix}$$

$$(c)\Phi(\mathrm{t},0)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\\ 2\mathrm{e}^{-2t}\text{-}2\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{-2t}\text{-}\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$$

(b)的初始条件有误

对应的初始条件应为 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$。因为 $x(\mathrm{t})=\begin{bmatrix}e^{-3t}\\-e^{-3t}\end{bmatrix}$，显然原初始条件 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$，错误， 用正确的初始条件作 最后的结果为

$$(b)\Phi(\mathrm{t},0)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-2t}\\ \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-4\end{bmatrix}$$

1.已知线性定常系统的状态转移矩阵 e^{At} 来求系统矩阵 A 的方法:

- 依据 $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}] \Leftrightarrow L[e^{At}] = (sI-A)^{-1}$。先对$e^{At}$做拉式变换，之后对矩阵求逆，即可求出A。矩阵求逆过程较为复杂，运算量大。
- 由性质：$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$,且$e^{At}|_{t=0} = I$，则$\frac{de^{At}}{dt}|_{t=0} = A$, 因此对状态转移矩阵求导之后代入$t=0$即可。

3.7(b):

$$\phi(t,0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2(e^{-t}-e^{-t}) \\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}, \phi'(t=0,0) = A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2.习题3.7(a)中状态转移矩阵有误：由上述方法求得:

$$\phi(t,0) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix}, A = \phi'(t=0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

但并不满足$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$的性质。

3.习题3.8(b)中：$x(0) = [1,-4]^T, x(t) = [e^{-3t}, -e^{-3t}]^T$ 相矛盾，应将题目中初始状态改为$x(0) = [1,-1]^T$。

3.9 已知系统状态方程，求冲激响应

解：一方面，由于状态矩阵 A 已知，用各种方法（拉氏变换、标准型法、待定系数法）可求出系统状态矩阵

$$e^{At}=e^{-2t}\begin{bmatrix}\cos 4t+\frac{1}{2}\sin 4t & \frac{1}{4}\sin 4t\\ -5\sin 4t & \cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t\end{bmatrix};$$

另一方面，此题为线性定常（LTI）连续时间系统，由书上定理 3.4 知其状态响应表达式为：

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A\tau}B\delta(t-\tau)d\tau\\&=e^{At}x(0)+e^{At}B=e^{At}(x(0)+B),\end{aligned}$$

故将上述结果带入，状态响应 $x(t)=e^{-2t}\begin{bmatrix}\cos 4t+5\sin 4t\\ 18\cos 4t-14\sin 4t\end{bmatrix}$。

3.11（对应书上 3.4 节内容）已知系统状态空间方程，求(a)系统解耦模态矩阵；(b)初态已知的零输入状态响应模态分解表达式；(c)输出的冲激响应和阶跃响应。

解：(a) 易求得系统矩阵 A 的特征值为-1，-2，-3，由 $Aq=\lambda q$ 求它们对应的特征向量，将这些特征向量作为列，构成模态矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}1&1&1\\5&4&3\\6&3&2\end{bmatrix},Q^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-4&2&-1\\\frac{9}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

对应变换后的系统矩阵为 $\bar{A}=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{bmatrix}$，或有 $A=Q\bar{A}Q^{-1}$。

(b) 模态分解下有 $e^{At}=Qe^{\bar{A}t}Q^{-1}=Q\begin{bmatrix}e^{-t}&&\\&e^{-2t}&\\&&e^{-3t}\end{bmatrix}Q^{-1}$，故零输入状态响应：

$$x(t)=e^{At}x(0)=Qe^{\bar{A}t}Q^{-1}x(0)$$

$$=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}x_0$$

$$=(p_1x_0)e^{-t}q_1+(p_2x_0)e^{-2t}q_2+(p_3x_0)e^{-3t}q_3$$

$$=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30})e^{-t}\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+x_{30})e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

(c)系统矩阵指数可求得，如下：

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}\end{bmatrix}$$

先求系统状态的冲激响应

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau=e^{At}(x(0)+B)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}+3)e^{-t}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}+(\frac{9}{2}x_{10}-\frac{3}{2}x_{20}+\frac{1}{2}x_{30}-\frac{3}{2})e^{-3t}\\ \frac{5}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}+3)e^{-t}+4(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}+3(\frac{9}{2}x_{10}-\frac{3}{2}x_{20}+\frac{1}{2}x_{30}-\frac{3}{2})e^{-3t}\\ 3(x_{10}-x_{20}+x_{30}+3)e^{-t}+3(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}+2(\frac{9}{2}x_{10}-\frac{3}{2}x_{20}+\frac{1}{2}x_{30}-\frac{3}{2})e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}+3)e^{-t}\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+1x_{30}-3)e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

则输出冲激响应：

$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}x(t)=x_1(t)$$

$$=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}+3)e^{-t}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+x_{30}-3)e^{-3t}$$

注：很多同学求错了(c)中的状态响应，得到如下错误结果：

$$x(t)=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30})e^{-t}\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30}+3)e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+1x_{30}+6)e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

错误原因：把矩阵 B 中的项直接加到了 $p_i x_0$ 上。实际上利用(b)中的公式和结论有：

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{At}\left(x(0)+B\right)=Qe^{\bar{A}t}Q^{-1}\left(x(0)+B\right)\\&=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}\left(x_0+B\right)\\&=(p_1\left(x_0+B\right))e^{-t}q_1+(p_2\left(x_0+B\right))e^{-2t}q_2+(p_3\left(x_0+B\right))e^{-3t}q_3\end{aligned}$$

其中 $p_i\left(x_0+B\right)$是一个标量。

输出的阶跃响应：

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t-\tau)d\tau=e^{At}(x(0)+A^{-1}B)-A^{-1}B$$

$$=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}-3)e^{-t}\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+x_{30}+1)e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\6\\8\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}x\left(t\right)=x_1\left(t\right)\\&=\frac{1}{2}(x_{10}-x_{20}+x_{30}-3)e^{-t}+(-4x_{10}+2x_{20}-x_{30})e^{-2t}+\frac{1}{2}(9x_{10}-3x_{20}+x_{30}+1)e^{-3t}+1\end{aligned}$$

3.12 已知系统状态方程，求解(a)系统特征值；(b)修正的模态矩阵及变换后系统矩阵；(c)初态已知情况下的零输入状态响应

解：(a)特征值满足$\left|\lambda I-A\right|=0$，实际上由下友型的系统矩阵易得特征方程为 λ^3+7λ^2+16λ+10=$\left(\lambda+1\right)\left(\lambda^2+6\lambda+10\right)$=0，解得$-1,-3\pm j$。

(b)对应上述特征值的特征向量为

$$q_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad q_2=\begin{pmatrix}1\\-3+j\\8-6j\end{pmatrix}\qquad q_3=\bar{q}_2$$

故修正后模态矩阵 $Q=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 1\\ 1 & 8 & -6\end{bmatrix}$， $Q^{-1}=\begin{bmatrix}2 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5}\\ -1 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5}\\ -1 & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$，

变换后系统矩阵 $\Lambda=Q^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}$。

(c)系统矩阵指数 $A=Q\Lambda Q^{-1},e^{At}=Qe^{\Lambda t}Q^{-1}$ 。零输入下有：

$$x(t)=e^{At}x_0=Qe^{\Lambda t}Q^{-1}x_0=Q\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-3t}\cos t & e^{-3t}\sin t\\ 0 & -e^{-3t}\sin t & e^{-3t}\cos t\end{bmatrix}Q^{-1}x_0$$

3.13（对应书上 3.5 节内容及公式 3.77）利用预解矩阵算 $(sI-A)^{-1}$， A^{-1} 和 $\det A$

解：(a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$

$$\alpha_0(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2},\alpha_1(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$(sI-A)^{-1}=\alpha_0(s)I+\alpha_1(s)A=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}4+s & 2\\ -3 & -1+s\end{bmatrix},A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\det A=2$$

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^3-2s^2-12s+27}\begin{bmatrix}s^2-s-12 & 3s-9 & -2s+12\\ -s-7 & s^2-2s-3 & 4s-2\\ -2s-3 & 3s-9 & s^2-s+3\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9}\\ \frac{7}{27} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27}\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix},\det A=-27$$

3.14 已知状态方程，用频域法求解状态响应、输出响应、传递函数/矩阵

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)] \qquad y(t)=Cx(t)$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

解：(a)

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{7}{2}-2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}\cos t-\frac{3}{2}e^{-t}\sin t \\ -1+2e^{-t}-e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t \\ -1-2e^{-t}+3e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t \end{bmatrix},$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 4e^{-t}-4e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{s^2+s-2}{s^3+3s^2+4s+2} & \frac{8s+2}{s^3+3s^2+4s+2} \\ \frac{-1}{s^2+2s+2} & \frac{3s+2}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}$$

(b)

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{2}{15}+\frac{5}{3}e^{-6t}-\frac{32}{15}e^{-5t}+\frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{1}{15}-\frac{25}{6}e^{-6t}+\frac{64}{15}e^{-5t}-\frac{1}{6}e^{-2t} \\ \frac{1}{5}+\frac{4}{5}e^{-5t} \end{bmatrix},$$

$$y(t)=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}e^{-6t}-\frac{4}{3}e^{-5t}+\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$G(s)=\frac{s^2+8s+20}{s^3+13s^2+52s+60}$$

3.19 状态空间方程离散化

计算矩阵指数

$$F=e^{AT}=\begin{pmatrix} e^{3T} & 0 & 0 \\ 0 & 0.2e^{2T}+0.8e^{-3T} & 0.2e^{2T}-0.2e^{-3T} \\ 0 & 0.8e^{2T}-0.8e^{-3T} & 0.8e^{2T}+0.2e^{-3T} \end{pmatrix}$$

$$H=\left(\int_0^T e^{A\tau}\mathrm{d}\tau\right)B=\begin{pmatrix} \left(e^{3T}-1\right)/3 & 0 \\ e^{2T}/10+e^{-3T}/15-1/6 & \left(e^{2T}-e^{-3T}\right)/5 \\ 2e^{2T}/5-e^{-3T}/15-1/3 & \left(4e^{2T}+e^{-3T}\right)/5-1 \end{pmatrix}$$

补充题 1： $A=\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$**，求** e^{At}

解：$A=\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}=\sigma I+\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}\triangleq\sigma I+B$，由性质 5，$\sigma I$ 与 B 可交换，即 $\sigma I\cdot B=B\cdot\sigma I=\sigma B$，故 $e^{At}=e^{(\sigma I+B)t}=e^{\sigma t}\cdot e^{Bt}$ 。

$$\text{又：}\left(sI-B\right)^{-1}=\begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix},$$

$$\therefore e^{Bt}=L^{-1}\left(sI-B\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=e^{\sigma t}\cdot e^{Bt}=\begin{bmatrix} \cos\omega t\cdot e^{\sigma t} & \sin\omega t\cdot e^{\sigma t} \\ -\sin\omega t\cdot e^{\sigma t} & \cos\omega t\cdot e^{\sigma t} \end{bmatrix}$$

注：e^{Bt} 的求法除了用 Laplace 变换，还可以用其他课堂上教授的方法。

补充题 2：证明：若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$**，则对所有** $k\in\mathbb{N}$**，有** $A^k=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m A^m$

证：分情况讨论

i) 当 $k<n$ 时，显然有 $A^k=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m A^m$；

ii) 当 $k=n$ 时，由 Caley-Hamilton 定理，方阵满足自己的特征多项式 $f\left(\lambda\right)=\det\left(\lambda I-A\right)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$，则一定有 $A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_n=0\Rightarrow A^n=-\left(a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_n\right)$；

iii) 当 $k>n$ 时，用数学归纳法很容易就能求得结论（$k=n+1$ 时结论成立，假设 $k=l>n$ 成立，则 $k=l+1$ 也成立）。这里只证明 $k=n+1$ 时结论成立：

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \cdot A^{n} = -A\left(a_{1}A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_{n}\right) \\
&= -a_{1}A^{n} - a_{2}A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A^{2} - a_{n}A \\
&= -a_{1}\left(-a_{1}A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A - a_{n}\right) - a_{2}A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A^{2} - a_{n}A \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{m} A^{m}
\end{aligned}
$$

6.2 若系统的冲激响应函数 $g(t)=(t+1)^{-1}$ ，系统是 BIBO 稳定系统?

解：$\int_0^{+\infty}|g(t)|dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+1}dt=\ln(t+1)|_0^{+\infty}\to\infty$，故非 BIBO 稳定。

6.5 设系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}x$$

确定系统为 BIBO 稳定，李氏稳定，渐近稳定三种情况下 λ_1、λ_2 的取值范围。

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s-\lambda_1 & -1 & 0\\ 0 & s-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & s-\lambda_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2(s-\lambda_1)+1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{s-\lambda_2}\\ \frac{1}{s-\lambda_1} & 0\end{pmatrix}$$

1、BIBO 稳定要求矩阵的每个元素具有负实部，故 $\mathrm{Re}(\lambda_1,\lambda_2)<0$。

2、由于 λ_1 为最小多项式重根，则 $\mathrm{Re}(\lambda_1)<0$， $\mathrm{Re}(\lambda_2)\le 0$。

3、 $\mathrm{Re}(\lambda_1,\lambda_2)<0$

6.6. $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)<0$（传递函数极点具有负实部）。

6.15. (a) $V(x)=x_1^2+(x_1+x_2)^2,\dot{V}(x)=-2x_1^2-2(x_1+x_2)^2$ 渐近稳定。

或者 $V(x)=2x_1^2+x_2^2,\dot{V}(x)=-4x_2^2$ 但可放宽，渐近稳定。

(b) $V(x)=(x_1+3x_2+x_3)^2+x_1^2+x_2^2,\dot{V}(x)=-6x_2^2$ 负半定，不可放宽，也可以通过特征值判定：$0,-1,-2$。李雅普诺夫意义下稳定。

6.16. $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -k & -5 & -6\end{pmatrix}x$

解：取$Q=2I$，也可以取$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$（得说明为什么可放宽，）$P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{12}&p_{22}&p_{23}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{pmatrix}$，

解方程$A^TP+PA=-Q$

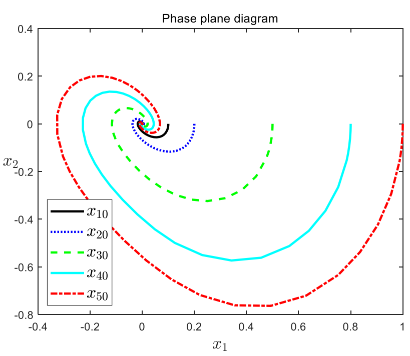
$$\begin{cases}p_{11}=\dfrac{k^3+6k^2+31k+150}{k(30-k)}\\ p_{12}=\dfrac{6(k^2+30)}{k(30-k)}\\ p_{13}=\dfrac{1}{k}\\ p_{22}=\dfrac{6k^2+67k+216}{k(30-k)}\\ p_{23}=\dfrac{k^2+6k+36}{k(30-k)}\\ p_{33}=\dfrac{6k+6}{k(30-k)}\end{cases}$$

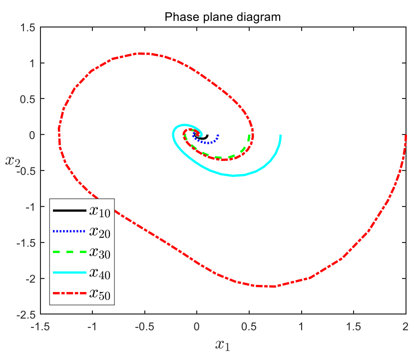
要求$P>0$，则可得$0<k<30$。

特征值判断，特征方程：$\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda+k=0$，全部为负根。

劳斯判据：$\begin{cases}k>0\\5\times6>1\times k\end{cases}$

6.17. $V(x)=x_1^2+x_2^2\rightarrow\dot{V}(x)=-(1-|x_1|)x_2^2\Rightarrow|x_1|<1$ 渐近稳定。





6.22. 李雅普诺夫间接法：$0.5\pm3.4j,-2$，

离散李雅普诺夫直接法：$A^T PA - P = -Q$ 不稳定

6.23. 李雅普诺夫间接法：

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^3 - \frac{k}{2}\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{|k|}{2}} \Rightarrow |k| < 2$$

离散李雅普诺夫直接法：$A^T PA - P = -Q$。

补充题：

1、$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \dot{V}(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \Rightarrow$ 渐近稳定。

2、方法一：线性化

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + 2) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ 系统限界稳定。

方法二：$V(x) = (2x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 + 6x_2^2 \rightarrow \dot{V}(x)$ 负半定，限界稳定。