

1.7 证明相似矩阵有相同的特征多项式和相同的特征值。提示：应用公式 $\det AB = \det A \det B$ 。

1.7 《线代》书 P177 命题 6.4.1

$\because B$ 与 A 相似 $\therefore \exists$ 可逆矩阵 T , s.t. $B = T^{-1}AT$

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(\lambda I - A)$$

其中用到 P97 定理 4.3.6 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(T^{-1}) \det(\lambda I - A) \cdot \det(T) = \det(\lambda I - A)$$

- 1.8 设 A 是 n 阶实方阵, 如果存在 n 维实向量 b 使得 $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ 彼此线性无关, 且 $A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \alpha_{n-2}A^{n-2}b + \dots + \alpha_1 Ab + \alpha_0 b = 0$, 则 A 相对于基 $E = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$ 的表达式为 \bar{A}

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

1.8 线性变换在不同基下的矩阵

$$(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot T \quad \text{即 } E = I \cdot T = T$$

\therefore 从自然基到新基 E 的过渡矩阵即为 E .

$$\therefore \bar{A} = E^{-1}AE \quad (\text{运用 P170 定理 6.3.1})$$

$$\text{即证 } E\bar{A} = AE$$

$$E\bar{A} = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = (Ab, A^2b, \dots, A^n b, m)$$

$$\text{其中 } m = -\alpha_0 b - \alpha_1 Ab - \dots - \alpha_{n-1} A^{n-1}b = -A^n b$$

$$\therefore E\bar{A} = AE = (Ab, A^2b, \dots, A^n b, A^n b)$$

1.11 求下面矩阵的 Jordan 形矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

1.11 法一: 无需求变换矩阵 Q 及 Q^{-1} 按照几何重数判断若尔当形式

对应于某一特征值的几何重数 $m_i =$ 该特征值的若尔当块数

$=$ 线性无关的特征向量数

$m_i = \dim(X) = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ 为 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的解空间的维数

$$P_{A_1}(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

A_1 有 3 个互不相等的特征根, 即 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

P180 引理 6.5.1 不同特征值的特征向量线性无关

P181 定理 6.5.1 n 阶 ^方阵相似于对角矩阵的充要条件为有 n 个线性无关的特征向量。

$\therefore A_1$ 可对角化 其若尔当标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$$P_{A_4}(\lambda) = \det(\lambda I - A_4) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \quad \text{即 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$\lambda = 2$ 对应的几何重数 $m = n - \text{rank}(2I - A) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow$ 一块若尔当块

$\therefore A_4$ 的若尔当标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

法二：求出变换矩阵Q

对于 $\lambda = 2$ 的特征值，其代数重数 $u = 2$ ，由 $(\lambda I - A_4)q = 0$ 计算其对应的特征向量

$$q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 计算出一个特征向量，即几何重数 } \xi = 1 < u = 2, \text{ 个数小于代数重数，}$$

即标准型中存在一个 $\lambda = 2$ 对应的约当块，约当块的阶数即 $\lambda = 2$ 的指数 $\eta = 2$ 。

注意 $\text{rank}(A_4 - 2I) = 3$ ，才能得出标准型为 Λ_4

可以利用P18的1.68式计算 $\lambda = 2$ 的广义特征向量 q_4 ，由 $(\lambda I - A_4)q_4 = q_3 \Rightarrow$

$$q_4 = c \cdot q_3 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}, \text{ 取 } q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}, \therefore Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Lambda_4 = Q^{-1} A_4 Q = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

注：若由 $(\lambda I - A_4)q = 0$ 计算出其对应有两个互不相关的的特征向量，则说明 $\lambda = 2$

的特征值对应有两个约当块，其约当标准型为 $\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$

1.12 证明 Vandermonde 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

的行列式等于

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

线代102页
例4.3.11

例 4.3.11 计算 Vandermonde 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解法一 从行列式的第 n 列开始至第 2 列, 依次把各列减去前一列的 a_n 倍, 得

$$\begin{aligned} \Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} - a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \cdot \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

易知 $\Delta_1 = 1, \Delta_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. 利用数学归纳法可得

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

法二:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots & 1 \\
 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_4 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 & & & \\
 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_3 & \lambda_4^2 - \lambda_1 \lambda_4 & \cdots & \lambda_n^2 - \lambda_1 \lambda_n & & &
 \end{array}$$

从第2行, 每行减第1行 $\times \lambda_1$

\Downarrow

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots & 1 \\
 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_4 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 & & & \\
 0 & 0 & -(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) & * & & * & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & &
 \end{array}$$

1.13 证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 0 \\ & & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

的特征多项式 $\det(sI - A)$ 有下面表达式

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$$

如果 $s = \lambda_1$ 是 A 的特征值, 即 $\Delta(\lambda_1) = 0$, 则

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

是伴随特征值 λ_1 的特征向量。

$$\begin{aligned}
\det(sI - A) &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & a_1 + \frac{a_0}{s} & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & a_2 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_0}{s^2} & \cdots & s + a_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s + a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{s} + \cdots + \frac{a_0}{s^{n-1}} \end{bmatrix} \\
&= s^{n-1} \left(s + a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{s} + \cdots + \frac{a_0}{s^{n-1}} \right) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0
\end{aligned}$$

$s = \lambda_1$ 是 A 的特征值, 则 $\det(\lambda_1 I - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1^n + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} + a_{n-2}\lambda_1^{n-2} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1^n = -a_0 - a_1\lambda_1 - \cdots - a_{n-1}\lambda_1^{n-1}$$

证特征向量只需证明 $A \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$ 即可。

1.14 证明习题 1.13 中矩阵 A 非奇异的充要条件是 $\alpha_0 \neq 0$, 并且 A 的逆如下

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_1/\alpha_0 & -\alpha_2/\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1}/\alpha_0 & -1/\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

DATE

S M T W T F S

1.14 可逆 \Leftrightarrow 行列式 $\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_0 \neq 0$ (行列式为 $(-1)^n \alpha_0$)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 & \cdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (-\alpha_0) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \cdots \\ & & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n \alpha_0$$

\therefore 当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$ 时 $\det(A) \neq 0$ 即矩阵非奇异

再验证 $AA^{-1} = I$ ($\alpha_0 \neq 0$ 时)

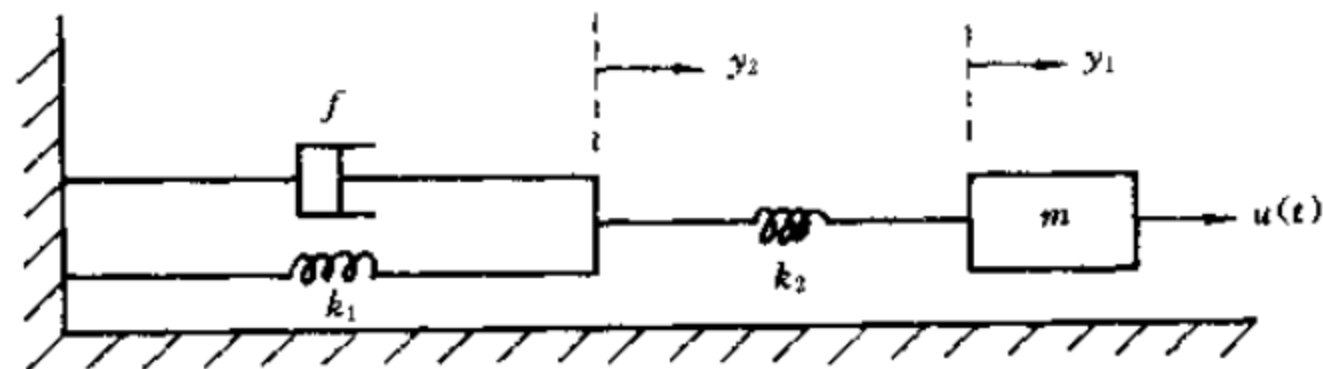
! 注意, 不能先验证 $A^{-1}A = I$ 再说明 $\alpha_0 \neq 0$

内容回顾:

1. 状态的定义：不要最少
2. 状态空间模型：系统矩阵，输入（控制）矩阵，输出矩阵，直传矩阵，注意：只有线性系统可以写成矩阵表达形式；当然对于非线性系统，显然不能写成矩阵表达的形式。
3. 对于状态空间的建模问题：选取状态变量一般要写成一阶微分方程的形式，因此在实际物理系统中，状态变量一般选取积分/储能器件

4. 给微分方程求状态空间模型：直接先求 Laplace 变换，再根据传递函数直接写出能控能观标准型，或者串并联实现等等即可，尤其是带有控制量微分的情形
5. 对于给出框图求解状态空间模型的，直接把每个一阶滤波器件的输出设置为状态变量即可求解，简单方便；
6. 对于竖立的弹簧阻尼系统，在建模时不需要额外考虑重力问题，假设是从平衡位置开始的即可，因为是线性系统。

- 2.1 试列写出图题 2.1 中机械系统输入-输出描述式和状态空间描述式,其中 f 是缓冲器的粘滞摩擦系数, k_1 和 k_2 分别为弹簧的弹性系数, m 为质量, y_1 和 y_2 表示位移为输出量, $u(t)$ 为外力。



2.1 解：列出力学方程：

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = u - k_2(y_1 - y_2) \\ k_2(y_1 - y_2) = f\dot{y}_2 + k_1y_2 \end{cases}$$

令 $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, 则状态空间方程为:

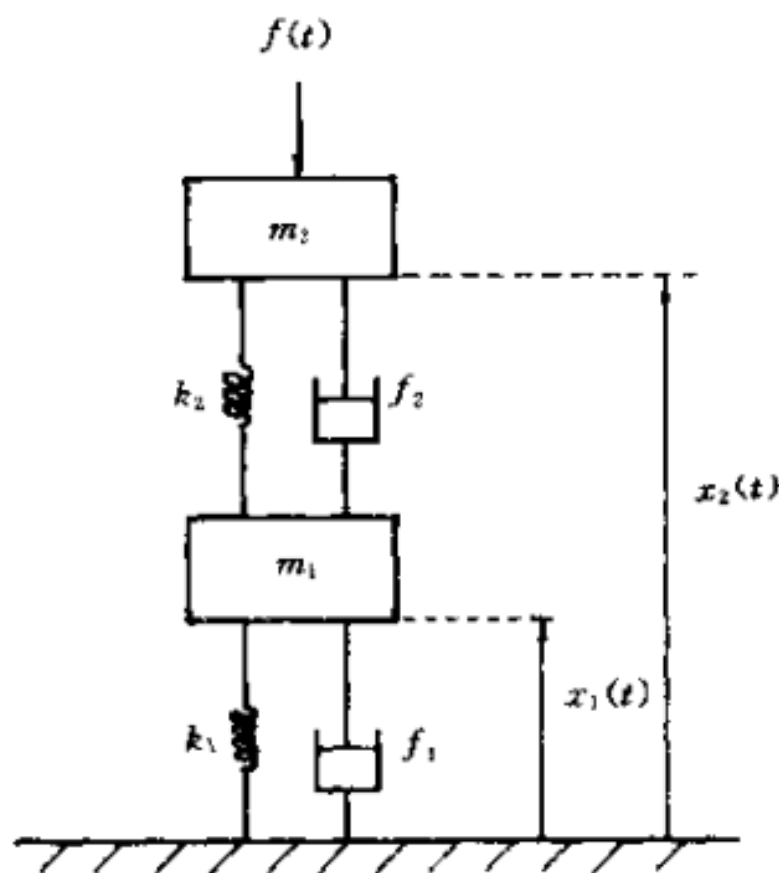
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2}{m} & 0 & \frac{k_2}{m} \\ \frac{k_2}{f} & 0 & -\frac{k_1 + k_2}{f} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

输入输出描述式：

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2 + fs}{ms^2(k_1 + k_2 + fs) + k_2 fs + k_1 k_2} \\ \frac{k_2}{ms^2(k_1 + k_2 + fs) + k_2 fs + k_1 k_2} \end{bmatrix} u(s)$$

- 2.2 试列写出图题 2.2 中机械系统的输入-输出描述式和状态空间描述式。和题 2.1 一样, f_1 和 f_2 分别是两个缓冲器的粘滞摩擦系数, k_1 和 k_2 分别为两个弹簧的弹性系数, m_1 和 m_2 分别为两个物体的质量, $f(t)$ 为外力, 以两个物体的位移作为输出量。



2.2 解：列出力学方程：

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) + f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - f_1 \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f \end{cases}$$

令 $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = \dot{x}_1$, $\bar{x}_3 = x_2$, $\bar{x}_4 = \dot{x}_2$, $u = f$, 则状态空间方程为：

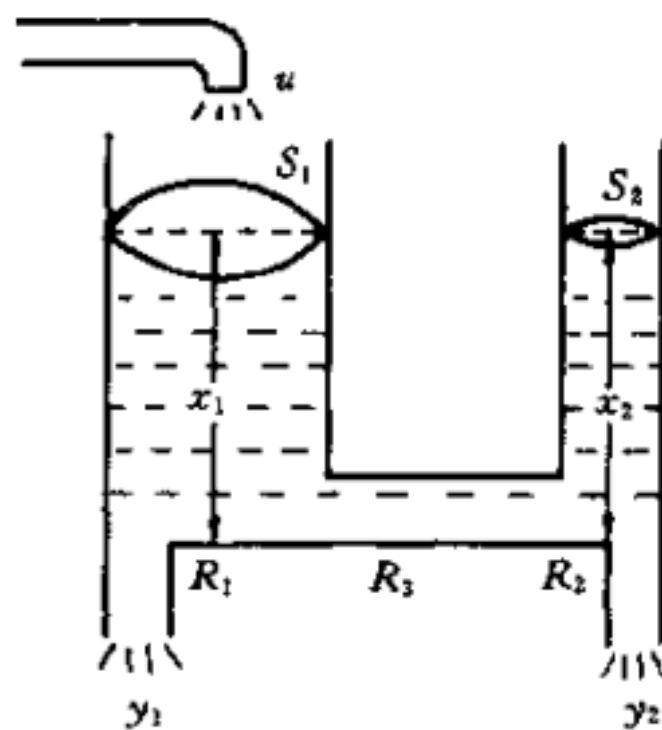
$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{f_1 + f_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{f_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{f_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{f_2}{m_2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}$$

输入输出描述式：

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2 + f_2 s}{(f_2 s + k_2)^2 - [m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2](m_2 s^2 + f_2 s + k_2)} \\ \frac{m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2}{(f_2 s + k_2)^2 - [m_1 s^2 + (f_1 + f_2)s + k_1 + k_2](m_2 s^2 + f_2 s + k_2)} \end{bmatrix} u(s)$$

- 2.5 图题 2.5 为两个水槽及连通管示意图。已知水槽 1 的断面积为 s_1 , 水位为 x_1 , 水槽 2 的断面积为 s_2 , 水位为 x_2 , R_1 、 R_2 和 R_3 分别为三条管道的阻力, u 为单位时间的注入量, y_1 和 y_2 为两条管道各自的单位时间流出量, 求以 x_1, x_2 为状态变量的状态方程, 和单位时间总流出量为输出 y 的输出方程。提示: $y_i = x_i / R_i, i = 1, 2, 3$ 。

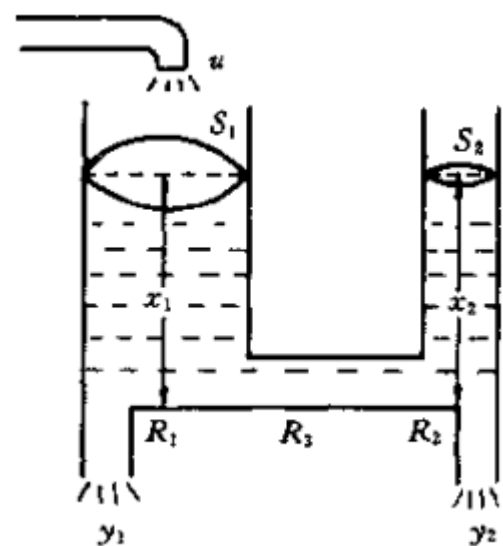


2.5 解：模型方程：

$$\begin{cases} S_1 \dot{x}_1 = u - y_1 - y_3 = u - \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_1 - x_2}{R_3} \\ S_2 \dot{x}_2 = y_3 - y_2 = \frac{x_1 - x_2}{R_3} - \frac{x_2}{R_2} \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}, \text{ 则状态空间方程为:}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) & \frac{1}{S_1 R_3} \\ \frac{1}{S_2 R_3} & -\frac{1}{S_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



2.6 根据下列系统的输入-输出描述式导出它们的状态空间描述式

$$(a) \quad \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t)$$

$$(b) \quad \dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$$

$$(c) \quad \ddot{y}_1(t) + 3\dot{y}_1(t) + y_2(t) = 2\dot{u}_1(t) + 3u_2(t) + \dot{u}_2(t)$$

$$\ddot{y}_2(t) + 4\dot{y}_2(t) + y_1(t) = \dot{u}_2(t) + 3u_1(t)$$

$$(d) \quad m_1 \ddot{y}_1(t) + 2ky_1(t) - ky_2(t) = u(t)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + 2ky_2(t) - ky_1(t) = 0$$

$$(e) \quad \ddot{y}_1(t) + e^{-t^2} \dot{y}(t) + e^t y(t) = u(t)$$

2.6 解: (a) 令 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 则状态空间方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

$$(b) \quad \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$$

DATE

S M T W T F S

2.6 输入函数有导数

(b) 两边做 Laplace 变换

$$s^2 \hat{y}(s) + 2s \hat{y}(s) + \hat{y}(s) = s \hat{u}(s) + 3 \hat{u}(s)$$

传递函数 $\hat{y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s+3}{s^2+2s+1}$

令 $\hat{v}(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \hat{u}(s)$ 即 $s^2 \hat{v}(s) + 2s \hat{v}(s) + \hat{v}(s) = \hat{u}(s)$

且 $\hat{y}(s) = (s+3) \hat{v}(s) = s \hat{v}(s) + 3 \hat{v}(s)$

定义状态变量 $x(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}$ 得 $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}$

状态空间方程 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \dot{y}_1(t) + 3\dot{y}_1(t) + y_2(t) = 2\dot{u}_1(t) + 3u_2(t) + \dot{u}_2(t) \\ & \ddot{y}_2(t) + 4\dot{y}_2(t) + y_1(t) = \dot{u}_2(t) + 3u_1(t) \end{aligned}$$

• 方法1: 利用传递函数求状态空间方程:

做拉式变换: \Leftarrow

$$y_1(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 - 3}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_1(s) + \frac{s^3 + 7s^2 + 11s}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_2(s) \Leftarrow$$

$$y_2(s) = \frac{3s^2 + 7s}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_1(s) + \frac{s^3 + 3s^2 - s - 3}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_2(s) \Leftarrow$$

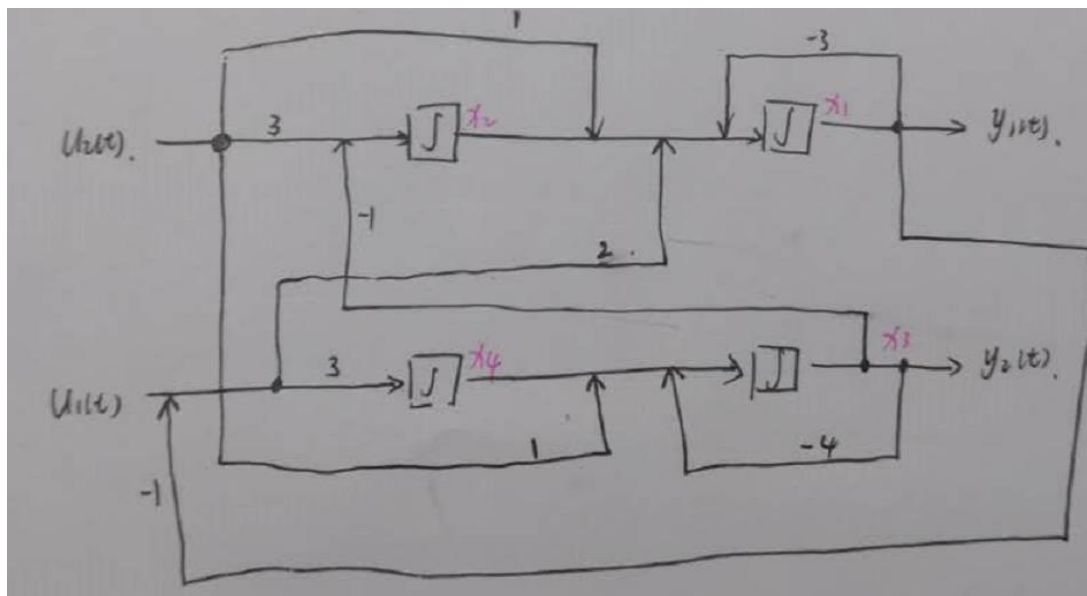
$$\text{令 } v_1(s) = \frac{1}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_1(s), \quad v_2(s) = \frac{1}{s^4 + 7s^3 + 12s^2 - 1} u_2(s),$$

$$\mathbf{x} = [v_1 \quad \dot{v}_1 \quad \ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_1 \quad v_2 \quad \dot{v}_2 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{v}_2]^T, \text{ 则状态空间方程为: } \dot{\mathbf{x}} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -12 & -7 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 & 2 & 0 & 11 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- 方法2：利用动态结构图求状态空间方程：
- 绘制结构图为



依据图中的状态选取，可以构造状态空间方程为：

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

- 方法3：直接找合适状态来求状态空间方程：

选取状态变量为：

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 - 2u_1 - u_2 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 - u_2 \end{bmatrix}, \text{ 则: } \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 - 2\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 - \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

(d) 令 $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2$, 则状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad m_1 \ddot{y}_1(t) + 2ky_1(t) - ky_2(t) &= u(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + 2ky_2(t) - ky_1(t) &= 0 \\ \text{(e)} \quad \ddot{y}_1(t) + e^{-t^2} \dot{y}_1(t) + e^t y_1(t) &= u(t) \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m_1} & 0 & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{2k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

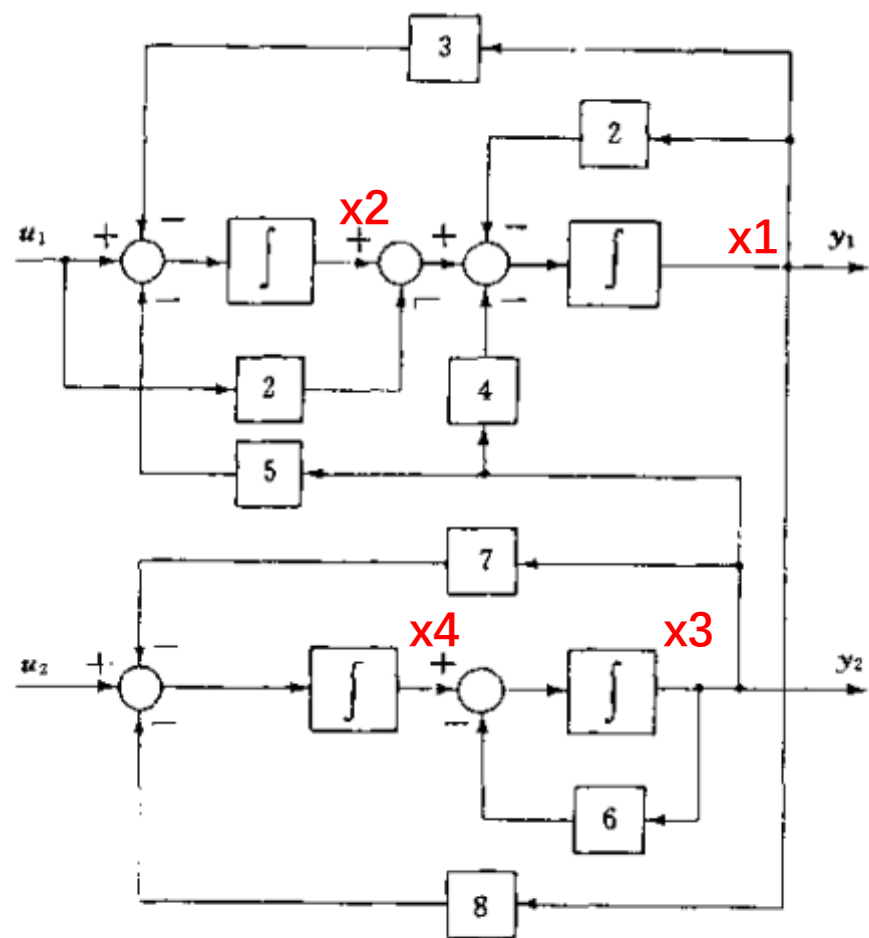
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(e) 令 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 则状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^t & -e^{-t^2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

2.7 根据图题 2.7 中系统的模拟框图写出它们的动态方程。

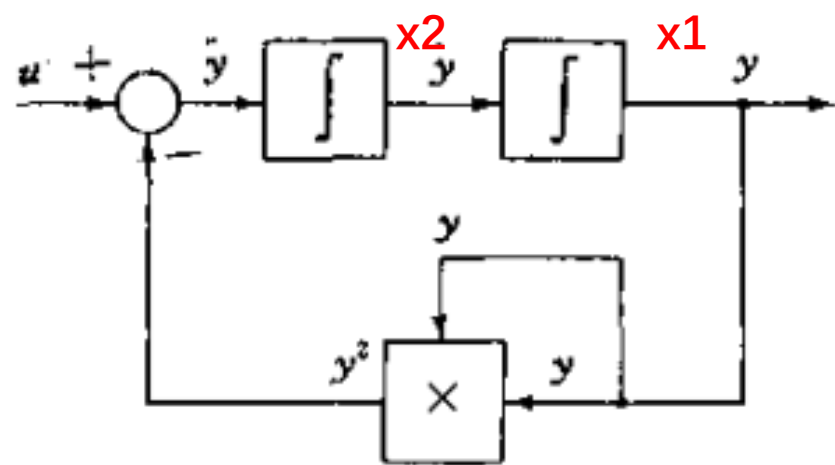


(b)

(b)选积分号后面的状态为 x_1, x_2, x_3, x_4 (顺序不同影响结果)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ -8 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



(c)

(c)非线性方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1^2 \end{cases} \quad y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

(d)方法一：先求传递函数 $G(s) = \frac{s+3}{s^2+2s-3}$ ，由上面的方法写出状态空间方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

按减号时，也可以 $G(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+3}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

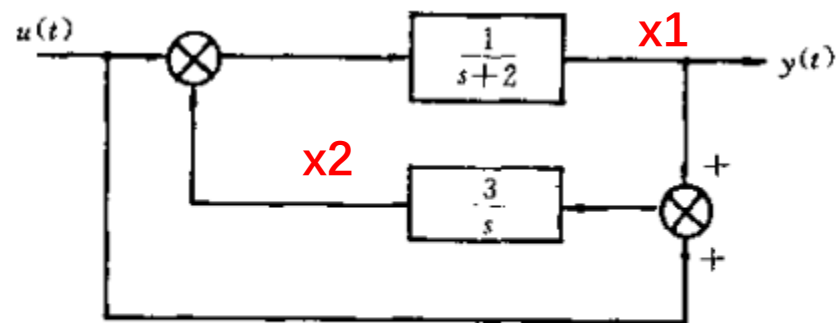
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

方法二：选取 $1/(s+2)$ 和 $3/s$ 后面为变量 x_1 和 x_2

设 $\begin{cases} (u + x_2) \cdot \frac{1}{s+2} = x_1 \Rightarrow sx_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \frac{3}{s} \cdot (x_1 + u) = x_2 \Rightarrow sx_2 = 3x_1 + 3u \end{cases}$ ，则状态空间方程可为：

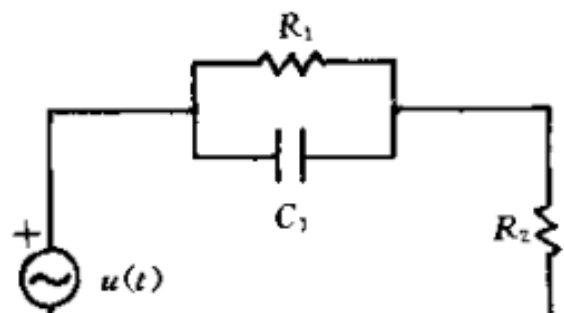
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



(d)

2.8 试导出图题 2.8 中电路的状态方程并画出其模拟框图。注意,图题 2.8(c)中 k 表示理想电压放大器,即 $v_2 = kv_1$, 输入阻抗无限大, 输出阻抗为零。



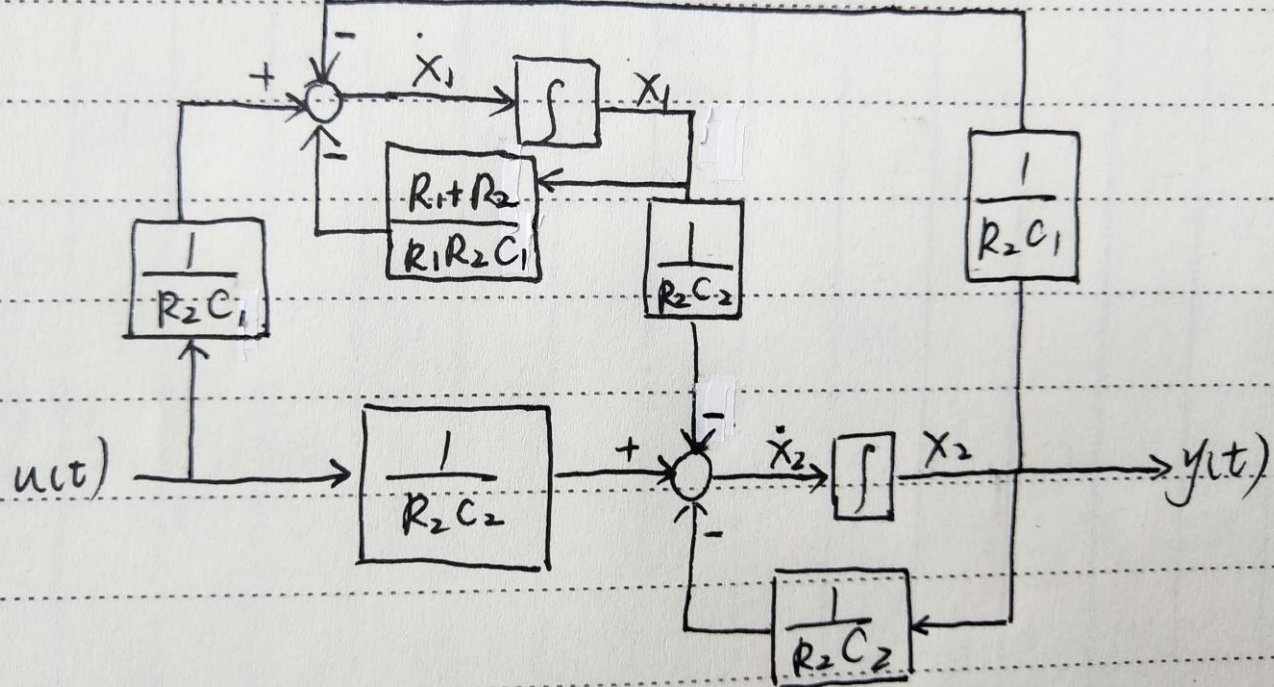
2.8 解: (a) 设 C_1, C_2 两端电压为 x_1, x_2 , 如图, 列出模型方

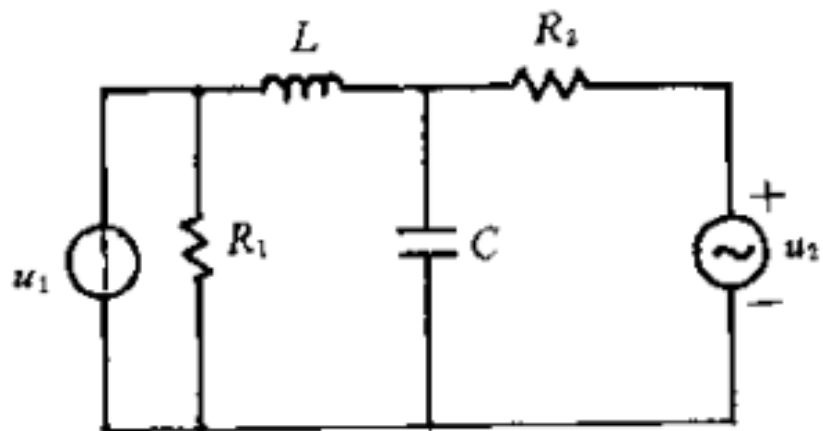
$$\begin{cases} c_1 \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_1} = c_2 \dot{x}_2 \\ u = x_1 + x_2 + R_2 c_2 \dot{x}_2 \end{cases}, \text{ 状态空间方程:}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 c_1} & -\frac{1}{R_2 c_1} \\ -\frac{1}{R_2 c_2} & -\frac{1}{R_2 c_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 c_1} \\ \frac{1}{R_2 c_2} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [-1 \quad 0] \mathbf{x} + u$$

(a) 模拟框图



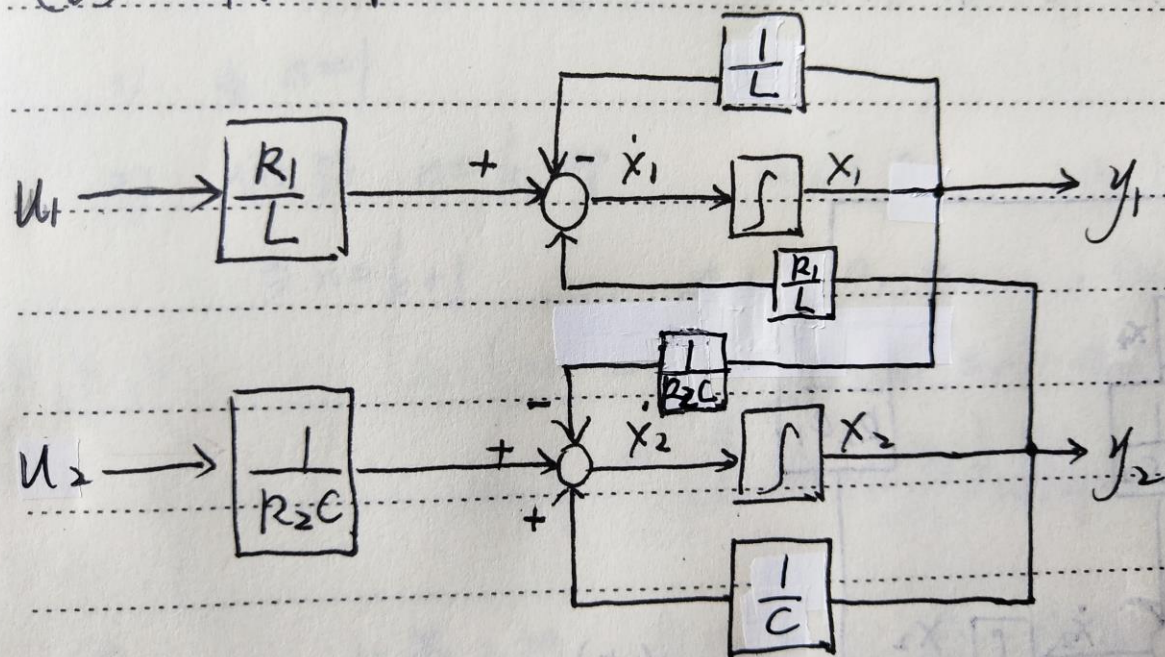


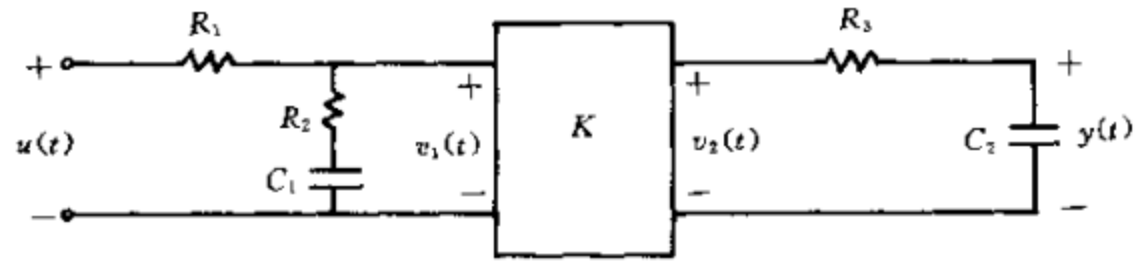
(b) 设 C , L 上电压和电流分别为 x_1 , x_2 ,

$$\begin{cases} R_1(x_2 - u_1) + L\dot{x}_2 + x_1 = 0 \\ \frac{1}{R_2}(u_2 - x_1) + x_2 = C\dot{x}_1 \end{cases}, \text{ 状态空间方程:}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2C} \\ \frac{R_1}{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

(b) 模拟框图

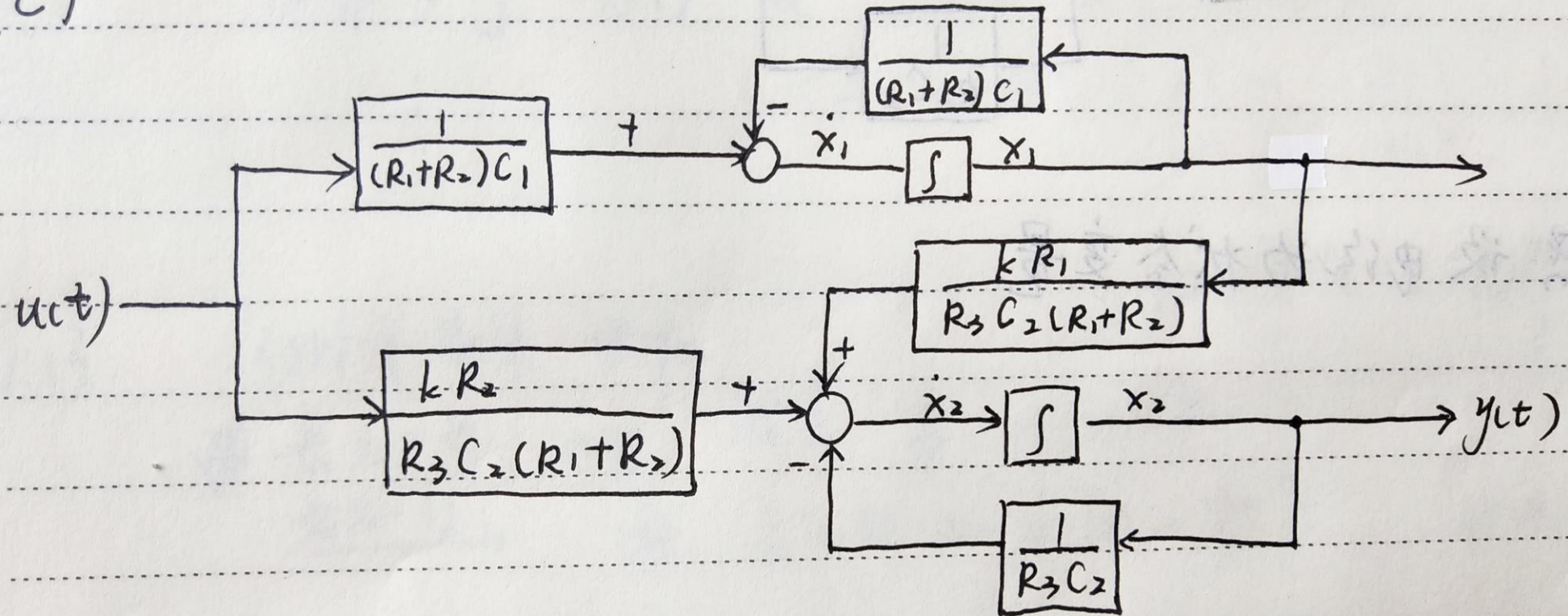




(c)

$$v_2 = x_2 + R_3 C_2 \dot{x}_2$$

(c)



2.9 设某人第 k 月初在银行存款总数为 $x(k)$ 。第 k 月取款为 $t(k)$, 存款为 $s(k)$ 。试写出描述他存款情况的差分方程。

$$2.9 \text{ 解: } x(k+1) = x(k) - t(k) + s(k)$$

2.10 已知离散系统的输入-输出描述式如下:

$$y_1(k+3) + 6[y_1(k+2) - y_3(k+2)] + 2y_1(k+1) + y_2(k+1) +$$

$$y_1(k) - 2y_3(k) = u_1(k) + u_2(k+1)$$

$$y_2(k+2) + 3y_2(k+1) - y_1(k+1) + 5y_2(k) + y_3(k)$$

$$= u_1(k) + u_2(k) + u_3(k)$$

$$y_3(k+1) + 2y_3(k) - y_2(k) = u_3(k) - u_2(k) + 7u_3(k+1)$$

应用单位延迟器、乘法器和加法器组成这一离散系统的仿真系统,挑选状态变量写出它的状态空间描述式。

2.10

法一：做z变换

2.10

$$y_1(z)(z^3 + 6z^2 + 2z + 1) + zy_2(z) + y_3(z)(-6z^2 - 2) = u_1 + zu_2$$

$$-zy_1(z) + y_2(z)(z^2 + 3z + 5) + y_3(z) = u_1 + u_2 + u_3$$

$$-y_2(z) + y_3(z)(z + 2) = -u_2 + (1 + 7z)u_3$$

$$\Rightarrow$$

$$y_1(z) = \frac{(z^3 + 10z^2 + 9z + 13)u_1 + (-5z^4 - 13z^3 - 16z^2 + 2z - 8)u_2 + (42z^5 + 132z^4 + 242z^3 + 86z^2 + 75z + 12)u_3}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11}$$

$$y_2(z) = \frac{(z^4 + 8z^3 + 15z^2 + 7z + 2)u_1 + (z^4 + 4z^3 + 22z^2 + 5z + 3)u_2 + (36z^4 - 29z^3 + 8z^2 - 2z + 1)u_3}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11}$$

$$y_3(z) = \frac{(z^3 + 6z^2 + 3z + 1)u_1 + (-z^5 - 9z^4 - 24z^3 - 31z^2 - 11z - 4)u_2 + (-13z^5 - 117z^4 - 289z^3 - 530z^2 - 167z - 71)u_3}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11} + 7u_3$$

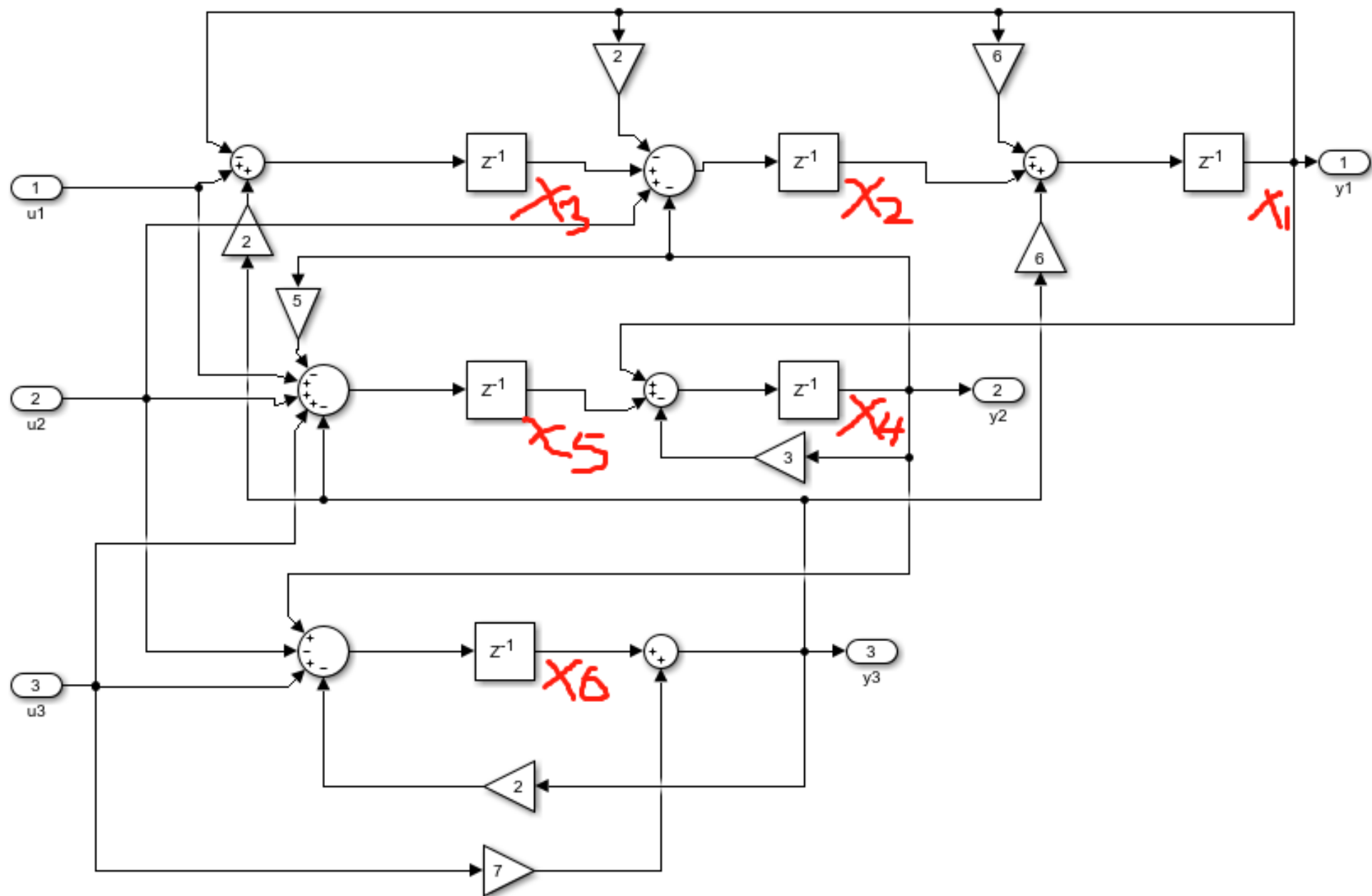
$$\text{设 } v_1 = \frac{1}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11} u_1$$

$$v_2 = \frac{1}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11} u_2$$

$$v_3 = \frac{1}{z^6 + 11z^5 + 43z^4 + 83z^3 + 95z^2 + 31z + 11} u_3$$

$$x = \begin{bmatrix} v_1 & \dot{v}_1 & \ddot{v}_1 & v_1^{(3)} & v_1^{(4)} & v_1^{(5)} & v_2 & \dot{v}_2 & \ddot{v}_2 & v_2^{(3)} & v_2^{(4)} & v_2^{(5)} & v_3 & \dot{v}_3 & \ddot{v}_3 & v_3^{(3)} & v_3^{(4)} & v_3^{(5)} \end{bmatrix}^T$$

法二：根据题目要求画出结构图：



- 根据结构图可得：

$$\begin{aligned}
 x[k+1] &= \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -13 \end{bmatrix} u[k] \\
 y[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} u[k]
 \end{aligned}$$

补充：求相似变换使如下矩阵等价于约当规范型和模式规范型

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



补充:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + j)(\lambda - j)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = j, \lambda_4 = -j$$

∴ 矩阵的约当标准形

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & j & \\ & & & -j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$A \underline{g}_1 = \lambda_1 \underline{g}_1$$

$$\text{取 } \underline{g}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\underline{g}_2 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$$

$$\lambda_3 = j$$

$$\underline{g}_3 = [j \ -1 \ -j \ 1]^T$$

$$\lambda_4 = -j$$

$$\underline{g}_4 = [j \ 1 \ -j \ -1]^T$$

$$\text{记 } Q = [\underline{g}_1 \ \underline{g}_2 \ \underline{g}_3 \ \underline{g}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & j & j \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -j & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{有 } Q^{-1} A Q = J$$

$$\text{令变换矩阵为 } \bar{Q} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -j0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix} \quad \text{令 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -j0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } \bar{\Lambda} = \bar{Q}^{-1} A \bar{Q} = P^{-1} J P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & -j \\ 0 & 0 & -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -j0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -j0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & j0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$