实验五
ARAP Parameterization

ID: 58 陈文博

March 23, 2020

1 实验要求

* 在给定的网格框架上完成作业，实现
  - ASAP (As-similar-as-possible) 参数化算法
  - ARAP (As-rigid-as-possible) 参数化算法
  - Hybrid 参数化方法（可选）
* 对各种参数化方法（包括作业 4 的 Floater 方法、ASAP/ARAP 方法等）进行比较
* 继续学习和巩固三角网格的数据结构及编程
* 学习和实现矩阵的 SVD 分解
* 进一步巩固使用 Eigen 库求解大型稀疏线性方程组

2 开发环境

IDE： Microsoft Visual Studio 2019 community

CMake： 3.16.3

Qt： 5.14.1

Eigen： 3.3.7

Assimp： 5.0.1

tinyxml2： 8.0.0

Others

3 算法原理

3.1 基本方法

非固定边界参数化基本步骤：将三维三角网格每个三角形全等映射到二维平面上，通过设计合适的算法，将每个三角形合并成二维网格（如下图所示）

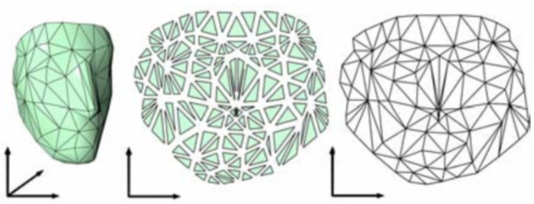


Figure 3.1: 基本步骤

寻找最佳映射，即求解以下能量函数：

$$E(u,L)=\sum_{t=1}^{T}A_t\|J_t(u)-Lt\|_F^2 \tag{3.1}$$

其中 L_t 为各个三角形的线性变换，每个 L_t 都有相似的结构，当变换为相似变换时，L_t 有以下形式：

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}: a,b\in\boldsymbol{R}\right\} \tag{3.2}$$

当变换为全等变换时，L_t 有以下形式：

$$M=\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}: \theta\in[0,2\pi)\right\} \tag{3.3}$$

能量函数可重写为：

$$E(u,L)=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=0}^{2}\cot(\theta_t^i)\|(u_t^i-u_t^{i+1})-L_t(x_t^i-x_t^{i+1})\|^2 \tag{3.4}$$

目标即求解最优化问题：

$$(u,L)=\mathop{\arg\min}_{(u,L)}E(u,L)\ \ s.t.\ \ L_t\in M \tag{3.5}$$

3.2 ASAP 全局解法

取 L_t 为：

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \boldsymbol{R} \right\} \tag{3.6}$$

此时 θ_t^i 和 x_t^i 为已知量，可以以 a,b 和 u 作为未知量建立稀疏线性方程组进行优化问题求解

3.3 Local/Global 方法

最优的 L 拟合矩阵

利用 SVD 分解，可将 J 矩阵做以下分解：

$$J = U\Sigma V^T \tag{3.7}$$

对于全等映射，L 的拟合矩阵为：

$$L = UV^T \tag{3.8}$$

即奇异值取 1，当需要进行相似映射时，奇异值取其平均数 $(\sigma_1+\sigma_2)/2$

Local Phase

利用二维三角形和当前估计坐标进行估计 $J_t(u)$

$$J_t(u) \sim S_t(u) = \sum_{t=0}^{2} \cot(\theta_t^i)(u_t^i - u_t^{i+1})(x_t^i - x_t^{i+1})^T \tag{3.9}$$

Global Phase

迭代求解新的估计坐标：

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in N(t)} [\cot(\theta_{ij}) + \cot(\theta_{ji}(u_i - u_j) \\ &= \sum_{j\in N(t)} [\cot(\theta_{ij})L_{t(i,j)} + \cot(\theta_{ji}L_{t(j,i)})(x_i - x_j)) \\ &\forall t = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.10}$$

初始化

使用 Local/Global 方法需要进行初始化，可采用固定边界的参数化作为初始参数坐标

4 设计难点与解决

4.1 关于 ASAP 全局解法的方程组构建

一开始采用直接求导方法进行计算，由于在 x 和 y 方向都应求一次导加上 a 和 b 各为 T 维未知向量，直接求导将得到 $2n+4T$ 个方程，$2n+2T$ 个未知量，系数矩阵非方阵，考虑求最小二乘解 $AX=b \Leftrightarrow X=(A^TA)^{-1}A^Tb$，但由于情况复杂，计算结果未能调试成功，之后参考了文献 [1] 中的附录 B 给出的 ASAP 方法下 a,b 和 u 的关系，即可实现将未知量数目减少至 $2n$，简化了计算，由于时间受限暂未调试成功

4.2 关于纹理映射问题

一开始直接导入纹理坐标，发现纹理未能完全覆盖参数化平面，在网上查阅资料后发现可以通过修改 OpenGL 的参数实现纹理循环，而后在做 ASAP 的 Local/Global 方法时，由于特征值尺度不一导致展开的参数化平面大小随机（如下图）

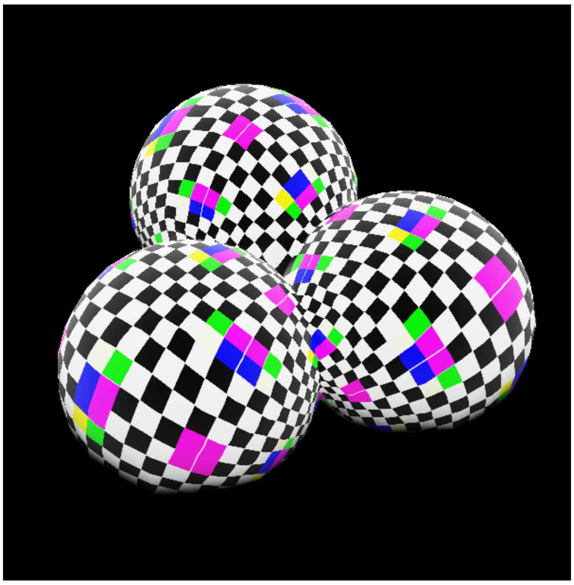


Figure 4.1: 参数化平面过大

后改为使用公式 $\frac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$ 进行归一化，将纹理坐标约束在 0 1 之间

5 实验效果

5.1 ARAP Local/Global 方法

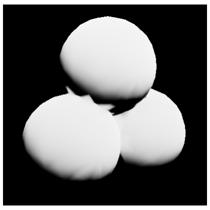
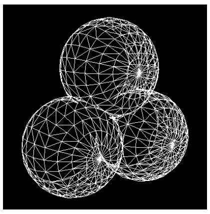
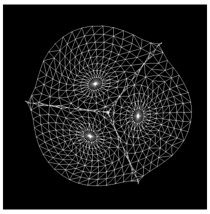
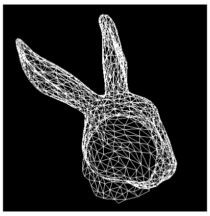
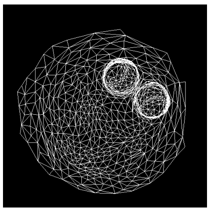
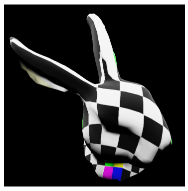
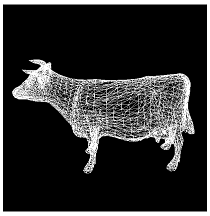
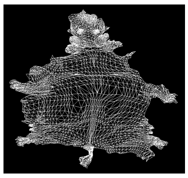
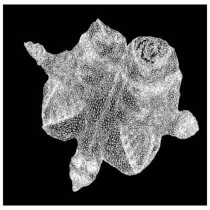
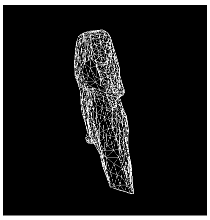
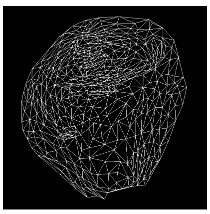
原曲面	原网格	参数化网格	纹理映射
			
			
			
			
			

Table 5.1: ARAP Local/Global 方法

圆边界 cotangent 方法初始化迭代 3 次

5.2 ASAP Local/Global 方法

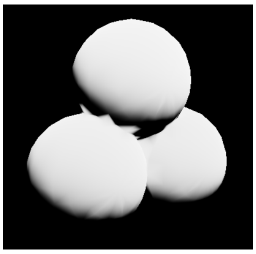
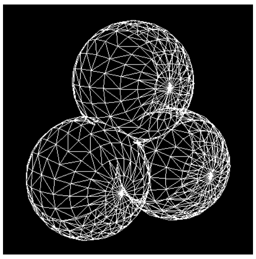
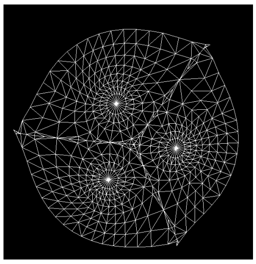
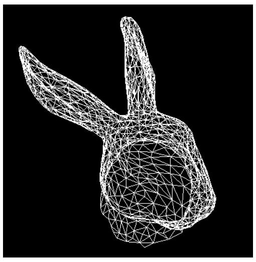
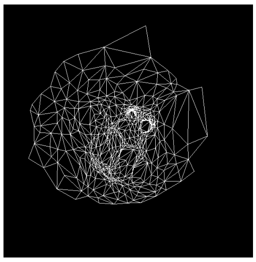
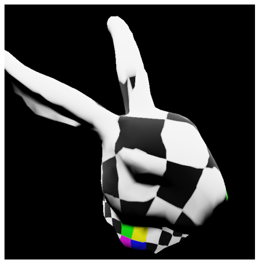
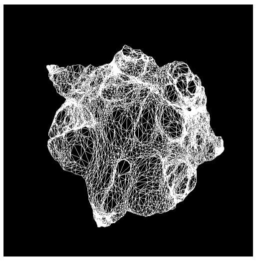
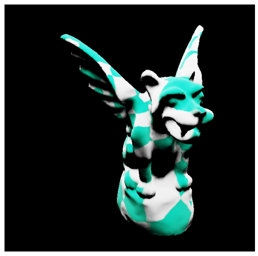
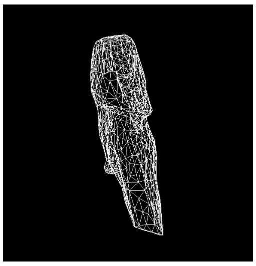
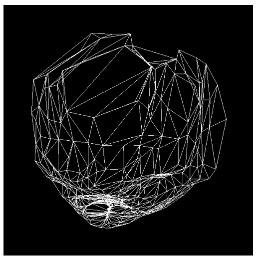
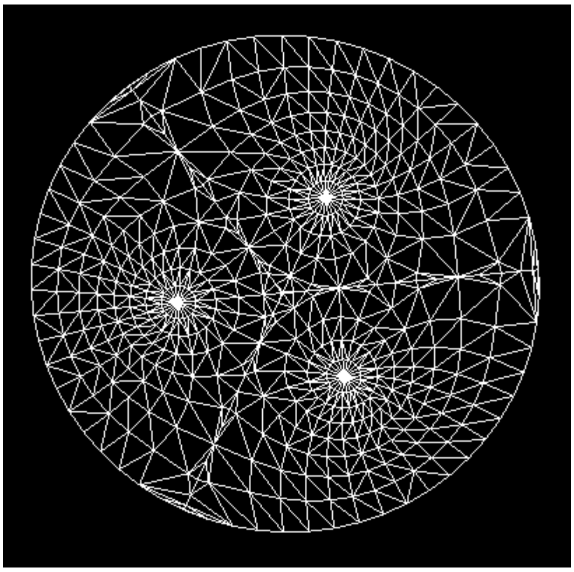
原曲面	原网格	参数化网格	纹理映射
			
			
			
			

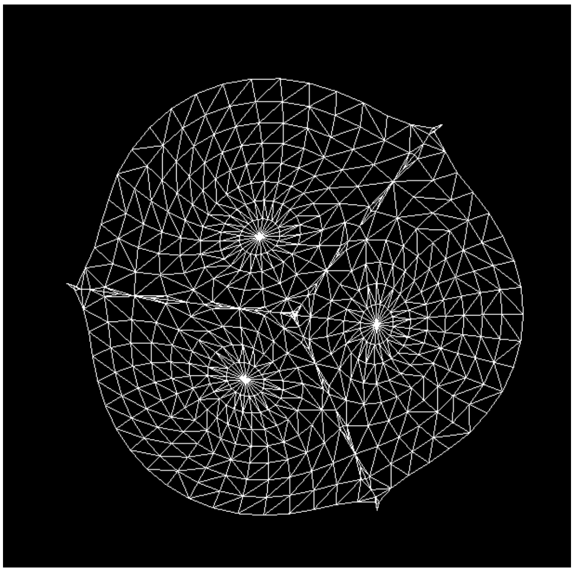
Table 5.2: ASAP Local/Global 方法圆边界 cotangent 方法初始化迭代 10 次

5.2.1 ARAP迭代次数的影响

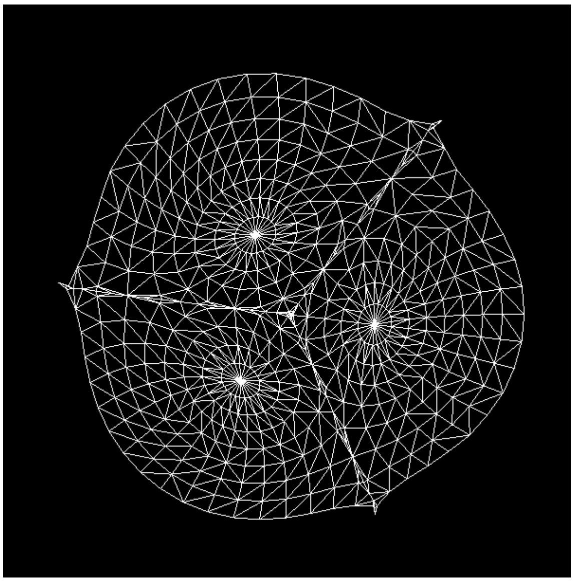
初始状态



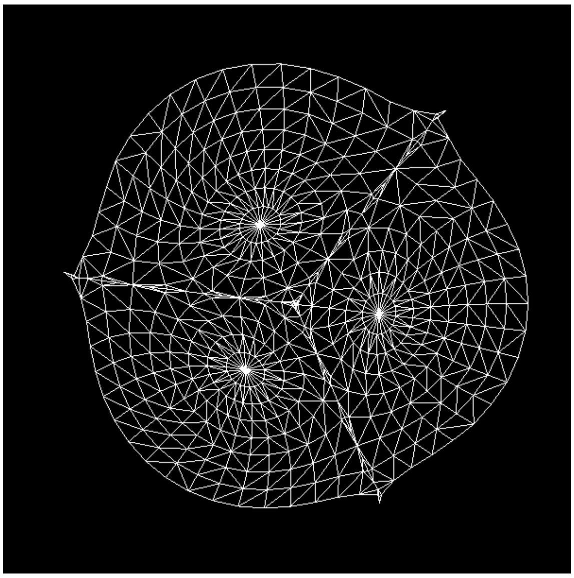
迭代一次



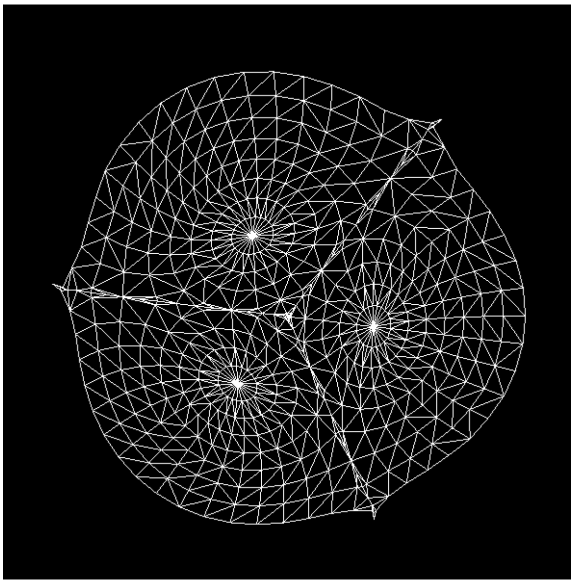
迭代两次



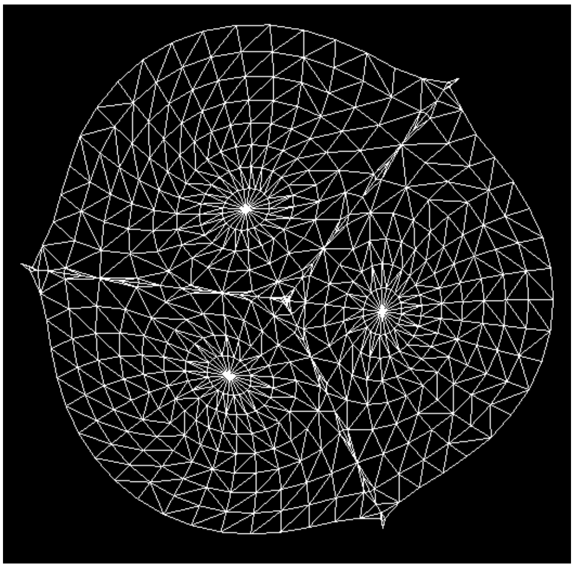
迭代三次



迭代十次



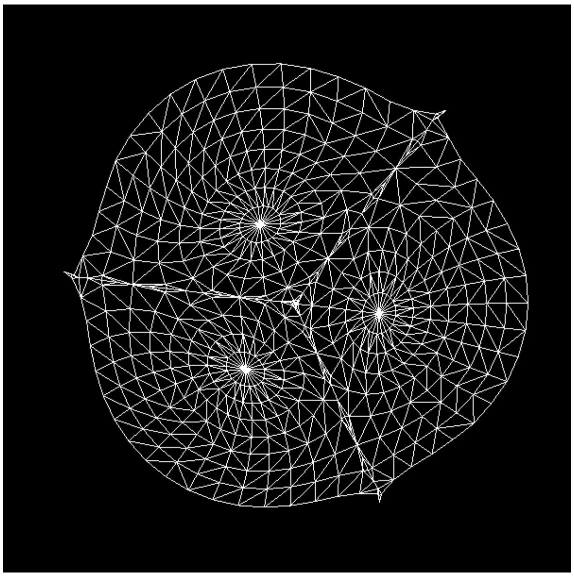
迭代一百次



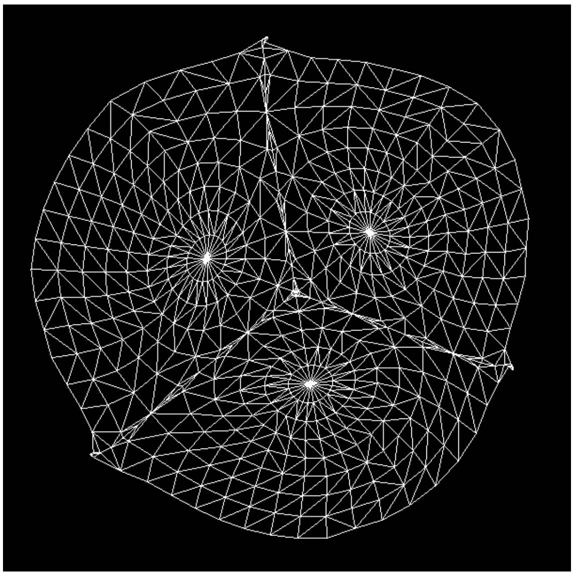
可见 ARAP 的收敛是很快的

5.3 初始条件对 ARAP 的影响

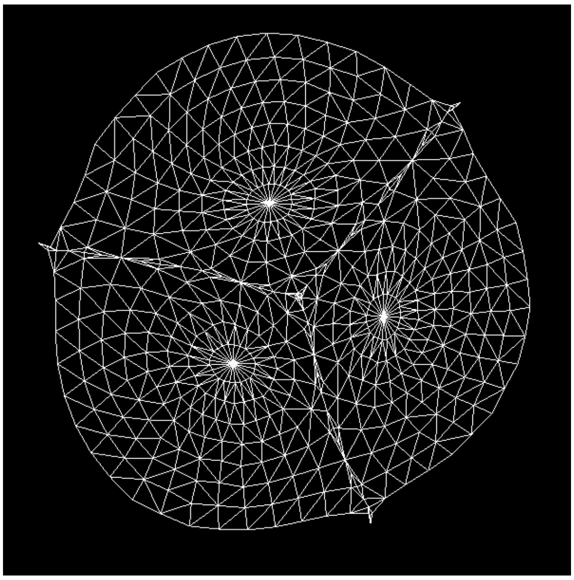
cotangent 权重，圆边界，迭代三次



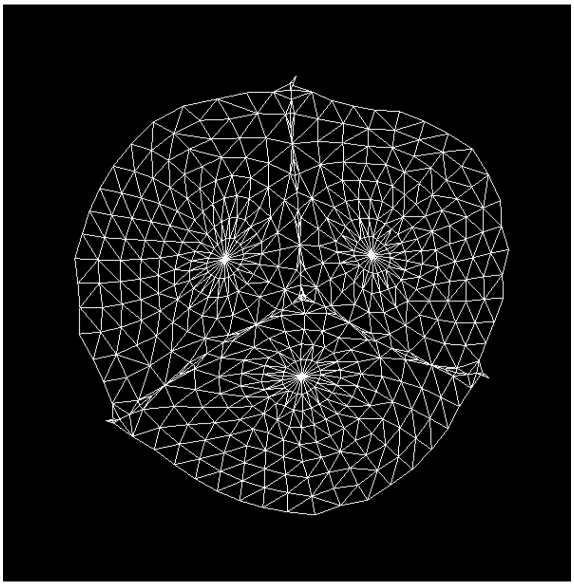
cotangent 权重，正方形边界，迭代三次



uniform 权重，圆形边界，迭代三次



uniform 权重，正方形形边界，迭代三次



可见使用不同初始化条件对收敛有一定影响，在本项中，cotangent 权重要优于 uniform 权重，circle 边界要由于 square 边界。

6 总结

本次实验难度不小，主要是过程复杂调试困难，需要耐心和细心，由于前期过多时间花在构建 ASAP 方程组，导致一部分功能未能很好实现。

References

[1] Ligang Liu, Lei Zhang, Yin Xu, Craig Gotsman, and Steven J Gortler. A local/global approach to mesh parameterization. In *Computer Graphics Forum*, volume 27, pages 1495–1504. Wiley Online Library, 2008.