中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

理论力学

自动化系

2020年3月

自动控制的研究对象（机理）

- 机械工程（ME）：机器人、无人车、无人机
- 电子（电机）工程（EE）：电力电子、电磁场与微波、信息处理、计算机
- 化工、冶金……

机电一体化（机电+光）：**理论力学**、**电磁场**（电机学）、**电子线路**

自然科学的形成：**牛顿力学+微积分**

理论力学：首次展现出一个严谨完备的科学体系之美，特别是Lagrange的“分析力学”（1788年，全书没有一张图）

目录

静力学应用场景：建筑、桥梁、机械零件与设计…

惯性定律（伽利略、牛顿第一定律）：

存在这样的参考系（惯性系），相对于它，所有不受外力作用的物体都保持匀速直线运动或静止。

不受外力 —> 合力为零 —> **平衡力系**

匀速直线运动或静止 —> **平衡状态**

平衡状态

- 质点： $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$（常矢量）
- 质点系： $\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{v}_0$（常矢量）， $k=1,2,\ldots,n$
- 刚体： $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i\equiv\boldsymbol{v}_c,\quad\forall\boldsymbol{r}_i$

  $\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{v}_0$（常矢量）， $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$

平衡力系

- 质点： $\boldsymbol{R}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_i\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$
- 质点系： $\boldsymbol{R}_k\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_i\boldsymbol{F}_{ki}^E+\sum_{j=1}^n\boldsymbol{F}_{kj}^I=\boldsymbol{0},\quad k=1,2,\ldots,n.\quad\left(\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\boldsymbol{F}_{kj}^I=\boldsymbol{0}\right)$
- 刚体：

$$\boldsymbol{R}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_i\boldsymbol{F}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\boldsymbol{v}_c)=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{L}_c\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{0}$$

合力（主矢$\boldsymbol{R}$）为零、合力矩（主矩$\boldsymbol{L}_c$）为零

质点系处于平衡态的条件：

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{v}_0 \Rightarrow \boldsymbol{R}_k=m_k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{C}_k\ \text{（依赖于}k\text{的常数）},\quad k=1,2,\dots,n$$

质点系平衡态的充要条件

$$\boxed{\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}_k|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,\quad k=1,2,\dots,n}$$

刚体处于平衡态的条件：

$$\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{v}_0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{R}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\boldsymbol{v}_c)=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{L}_c=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{L}_c=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}=\text{常矢量}$$

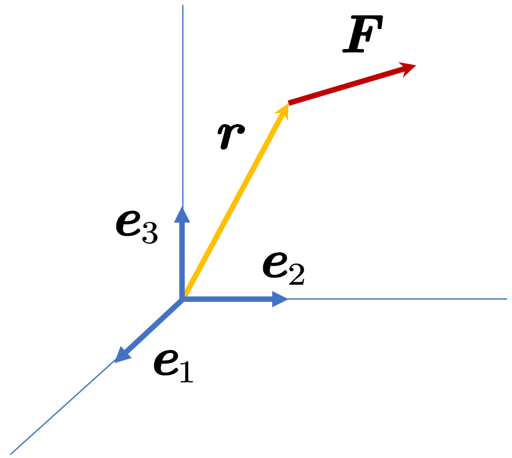
刚体平衡态的充要条件

$$\boxed{\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{L}_c=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\omega}|_{t=0}=\boldsymbol{0}}$$

计算矢径 $\boldsymbol{r}=r_1\boldsymbol{e}_1+r_2\boldsymbol{e}_2+r_3\boldsymbol{e}_3$ 上的力 $\boldsymbol{F}=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+f_3\boldsymbol{e}_3$ 形成的力矩 $\boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3$ 如下（其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是坐标基向量）：

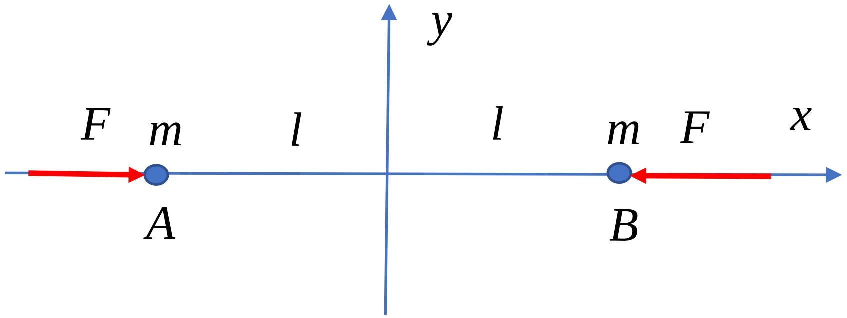
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\
&= \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = (r_2 f_3 - r_3 f_2)\boldsymbol{e}_1 + (r_3 f_1 - r_1 f_3)\boldsymbol{e}_2 + (r_1 f_2 - r_2 f_1)\boldsymbol{e}_3 \\
&\triangleq L_1\boldsymbol{e}_1 + L_2\boldsymbol{e}_2 + L_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

其中力矩在坐标基向量上的分量 L_1,L_2,L_3 在物理上就是分别**绕坐标轴 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的矩**



显然，如果作用力与坐标轴（或在延长线上）相交，绕该轴的矩为零

例7.2 两个小球由弹簧相连，求小球的运动方程.



$$m\ddot{x}_A = -2k(l + x_A) + F$$

$$m\ddot{x}_B = 2k(l - x_B) - F$$

通过初始条件，可解出x_A, x_B.

注意：力系对刚体来说是平衡力系，但本系统存在弹簧元件、不是刚体，所以不能保持平衡，实际上两小球作简谐振动。

等效力系：两组力系等效，系指两组力系分别作用于同一物体（质点、质点系、刚体），其动力学特征相同（动量及动量矩的变化率相同）。

对刚体来说，只要主矢 $\boldsymbol{R}$、对质心的主矩 $\boldsymbol{L}_c$ 相同，即为等效力系。

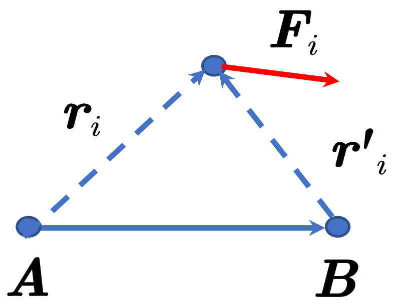
力系主矩定理（对刚体）： $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{L}_B + \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{R}.$

证明：

$$\boldsymbol{L}_A = \sum_i m_A(\boldsymbol{F}_i) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$= \sum_i \left(\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{r'}_i\right) \times \boldsymbol{F}_i = \overrightarrow{AB} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r'}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$= \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{L}_B$$



显然，若 $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{R}$，则有 $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{L}_B$. 由此可得：在力矢量延长线上任取一点作为力作用点，其力矩保持不变。

根据主矩定理可以得到：

$$\boldsymbol{R}=0,\ \boldsymbol{L}_C=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{R}=0,\ \boldsymbol{L}_A=0,\ \forall A$$

刚体力系平衡的充要条件：主矢为零、对任一点的主矩为零。

刚体力系**等效原理**：主矢相同、对任一点的主矩相同。

具体来说，力系1与力系2等效的充要条件为：力系1与力系2的主矢相同，力系1与力系2对质心（或其它点）的主矩相同，即有

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{L}_{C1}=\boldsymbol{L}_{C2}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2\\ \boldsymbol{L}_{A1}=\boldsymbol{L}_{A2},\quad \forall A\end{cases}$$

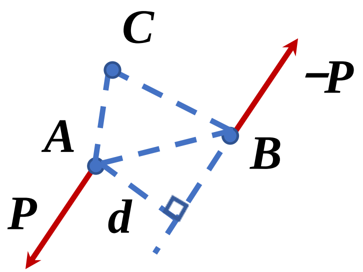
其中考虑到了力系主矩定理：$\boldsymbol{L}_{A1}=\boldsymbol{L}_{C1}+\overrightarrow{AC}\times\boldsymbol{R}_1$

$$\boldsymbol{L}_{A2}=\boldsymbol{L}_{C2}+\overrightarrow{AC}\times\boldsymbol{R}_2$$

力偶：大小相等方向相反（不共线）的一对力$\{\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{P}\}$

主矢 $\boldsymbol{R}=0$

对任一点$\boldsymbol{C}$的主矩



$$\boldsymbol{L}_C=\overrightarrow{CA}\times\boldsymbol{P}+\overrightarrow{CB}\times(-\boldsymbol{P})=\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\times\boldsymbol{P}$$

$$=\overrightarrow{BA}\times\boldsymbol{P}\triangleq\boldsymbol{M}$$

力矩（力偶矩）与查考点的选取无关，其大小为

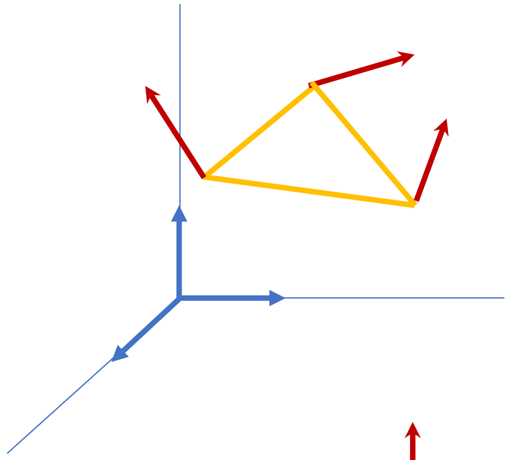
$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{P}|d$ ，其中 d 为力偶臂

作用力沿力矢量延长线移动，是相互等效的；作用力平行移动，产生附加力偶。

三力平衡原理：若刚体上三力平衡，则三力共面且汇交（平行线相交于无穷远点）

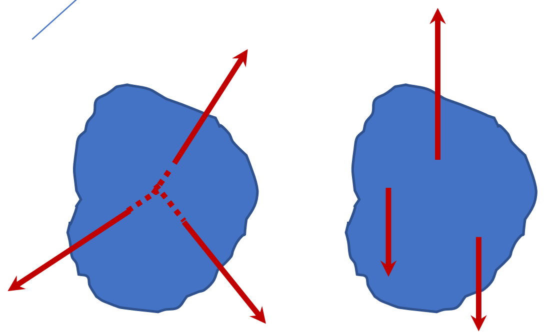
简单证明，只证三力共面：

若三力作用点构成三角形，则每个力一定处于该三角形平面上。否则三力对三角形三条边轴分别取矩，其中边轴上的二力对该轴力矩为零，另一力若不在三角形平面上就必然对该轴产生非零力矩，与平衡状态矛盾。



若三力作用点不能构成三角形，但在一力延长线上改变其作用点，仍能构成三角形，归结为上述情形，三力是共面的。

若三力作用点不能构成三角形，且在任一力延长线上改变作用点，也不能构成三角形，则三力同轴自然共面。

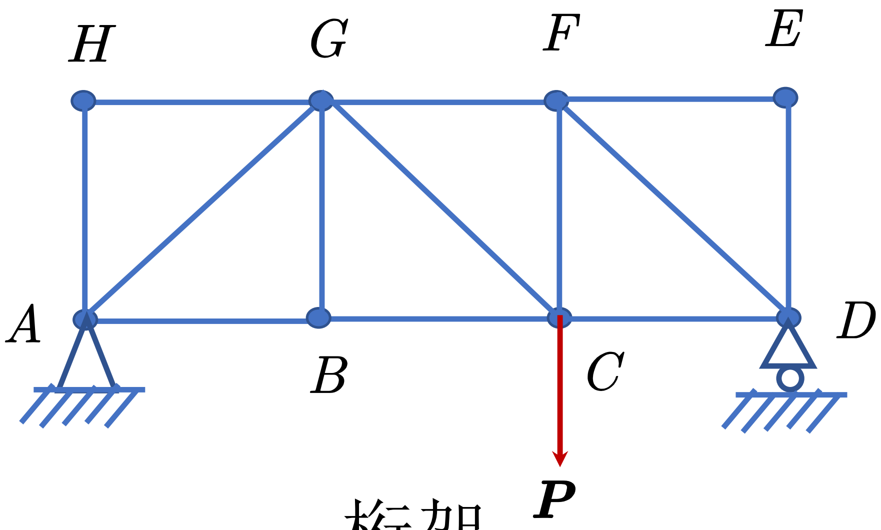


由三力共面不难证明三力汇交。

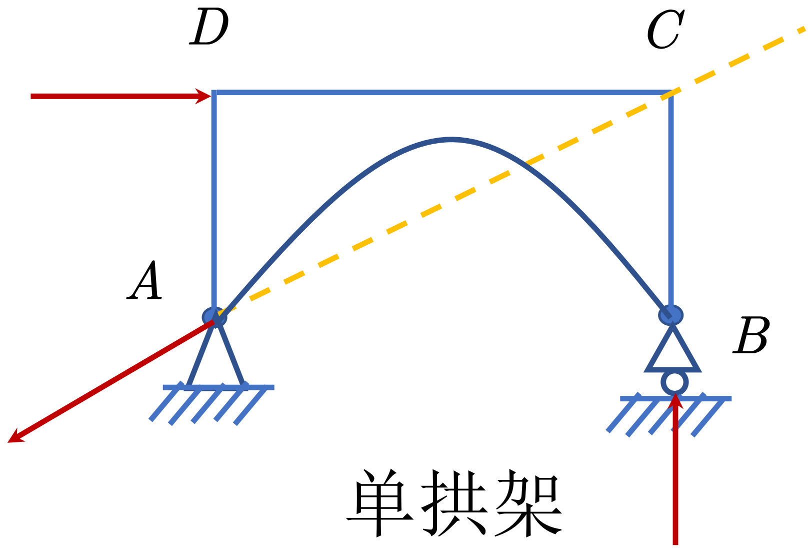
二力构件

三力构件

二力杆



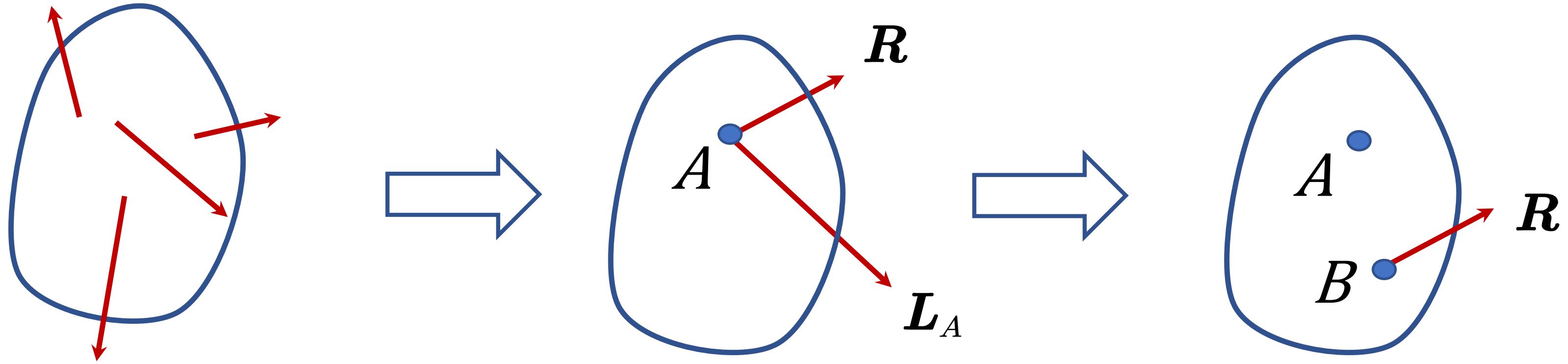
桁架



单拱架

力系简化

我们知道，刚体上力系的动力学特征取决于主矢 $\boldsymbol{R}$ 与主矩 $\boldsymbol{L}_A$（对某点A），利用力系等效原理，可以把复杂力系简化为由主矢与主矩组成的简单力系$\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_A\}$，根据等效原理，主矢 $\boldsymbol{R}$ 保持不变而主矩 $\boldsymbol{L}_A$ 依赖于简化中心A



$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\ldots\}$ $\qquad$ $\{\boldsymbol{F}_A \triangleq \boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_A\}$ $\qquad$ $\{\boldsymbol{F}_B \triangleq \boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{0}\}$

因主矢具有简化不变性，我们称主矢 $\boldsymbol{R}$ 为**第一不变量**，现在考查是否存在点B，使得$\boldsymbol{L}_B=0$？

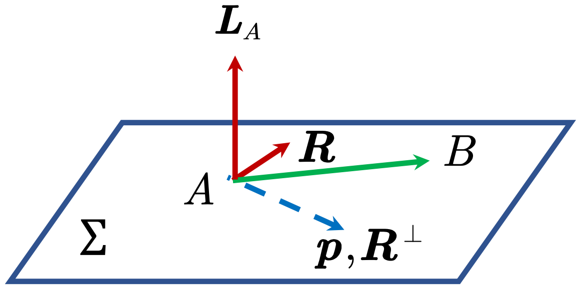
考虑到两力系$\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}_A\}$与$\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{0}\}$等效，对$A$点的矩相等，就有

$$\boldsymbol{L}_A=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}\implies \boldsymbol{L}_A\perp\boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}_A\perp\overrightarrow{AB}$$

上式左边等式实际上是这两力系等效的充分必要条件，右边垂直关系是等效的必要条件。若$\boldsymbol{L}_A\perp\boldsymbol{R}$，作过$\boldsymbol{R}$且以$\boldsymbol{L}_A$为法向量的平面$\Sigma$.

又因$\boldsymbol{L}_A\perp\overrightarrow{AB}$，这样一来$B$点可在$\Sigma$平面中选取，令

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R}\triangleq\boldsymbol{R}^{\perp}$$



向量组$\{\boldsymbol{L}_A,\boldsymbol{R},\boldsymbol{p}\}$形成三维直角坐标架。考虑到

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}_{\boldsymbol{R}}+\overrightarrow{AB}_{\boldsymbol{R}^{\perp}}$$

为零

$$\boldsymbol{L}_A=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}=\overrightarrow{AB}_{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{R}+\overrightarrow{AB}_{\boldsymbol{R}^{\perp}}\times\boldsymbol{R}=\overrightarrow{AB}_{\boldsymbol{R}^{\perp}}\times\boldsymbol{R}$$

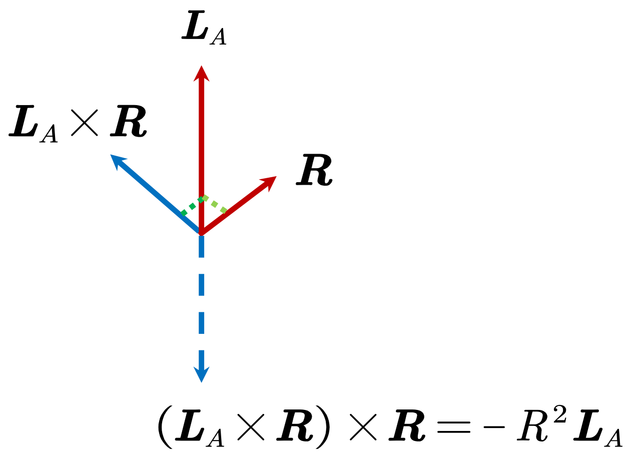
可以看到，只需在$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{R}^{\perp}$方向上寻找$B$点即可，因此我们取

$$\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{p}=k\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R},\quad k\text{待定}$$

从而有 $\boldsymbol{L}_A=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}=k(\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}$，取长度

$$|\boldsymbol{L}_A|=|k||\boldsymbol{L}_A|R^2,\quad \left(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}\triangleq R^2\right)$$

得到 $$|k|=\frac{1}{R^2}\xRightarrow{\text{方向相反}}k=-\frac{1}{R^2},\quad (R\neq 0)$$



于是

$$\overrightarrow{AB}=-\frac{\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R}}{R^2}=\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A}{R^2}$$

上述B点的选择满足了力系等效的条件，事实上

$$\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}=-\frac{\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R}}{R^2}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}_A$$

因此力系$\{\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{L}_A\}$可简化为$\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{0}\}$的充分必要条件是 $\boxed{\boldsymbol{L}_A\perp\boldsymbol{R}}$

满足力系等效条件的B点取法是不唯一的，事实上一般地可取

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A}{R^2}+\alpha\boldsymbol{R},\quad \alpha\text{为任意实数}$$

因为前面已知添加主矢 $\boldsymbol{R}$ 方向的分量不改变主矩 $\boldsymbol{L}_A$ 的值。

如果 $\boldsymbol{L}_A\pm\boldsymbol{R}$，就不能作通过选点使主矩为零的简化，但可做一些分析

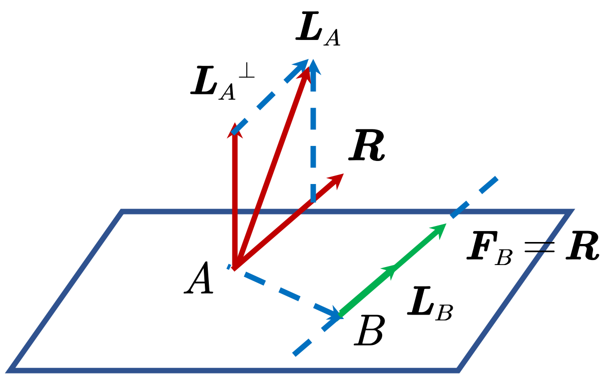
一般地 $\quad \boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{L}_B+\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}$

从而有投影关系

$$\boldsymbol{L}_B\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R}$$

即，主矩在主矢上的投影不变

第二不变量



$$\boldsymbol{L}_A^{\parallel}=\left(\boldsymbol{L}_A\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}=(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}$$

$$\boldsymbol{L}_A^{\perp}=\boldsymbol{L}_A-(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}$$

因此力系$\{\boldsymbol{F}_A=\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_A\}$可简化为$\{\boldsymbol{F}_B=\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}_B\}$，其中同样选择

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A^{\perp}}{R^2}=\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A}{R^2}$$

对该选点B，有

不变量

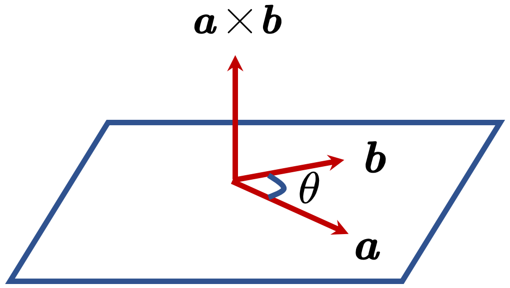
$$\boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{L}_A^{/\!/}=(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\triangleq\boldsymbol{M}$$

事实上对该选点B可以直接证明：

$$\boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{BA}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}_A+\frac{\boldsymbol{L}_A\times\boldsymbol{R}}{R^2}\times\boldsymbol{R}$$

$$=\boldsymbol{L}_A+(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}-(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{L}_A}{R^2}$$

$$=(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}$$



$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

$$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

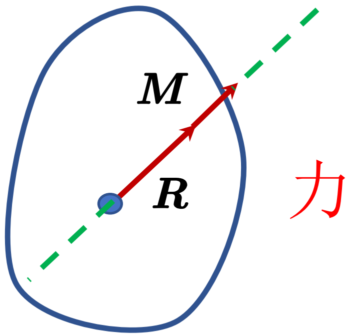
$$ab\sin\theta\cdot b\cdot b=-\lambda ab\sin\theta,\quad a=|\boldsymbol{a}|,b=|\boldsymbol{b}|$$

$$\lambda=-b^2=-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$0=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\mu=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

刚体上力系简化的四种情形



- $\boldsymbol{R}=0,\ \boldsymbol{L}_A=0$ ⇨ 平衡力系
- $\boldsymbol{R}=0,\ \boldsymbol{L}_A\neq 0$ ⇨ 力偶 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}_A$
- $\boldsymbol{R}\neq 0,\ \boldsymbol{L}_A\perp\boldsymbol{R}$ ⇨ 合力 $\boldsymbol{F}_B=\boldsymbol{R},\ \overrightarrow{AB}=\dfrac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A}{R^2}$
- $\boldsymbol{R}\neq 0,\ \boldsymbol{L}_A\not\perp\boldsymbol{R}$ ⇨ 力螺旋 $\boldsymbol{F}_B=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{L}_B=(\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R})\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}\triangleq\boldsymbol{M},\ \overrightarrow{AB}=\dfrac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_A}{R^2}$

作为特别情形：
刚体上**平面力系**可以简化为**合力**或**合力偶**；
刚体上空间**平行力系**可以简化为**合力**或**合力偶**；
最一般的情形是**力螺旋**。

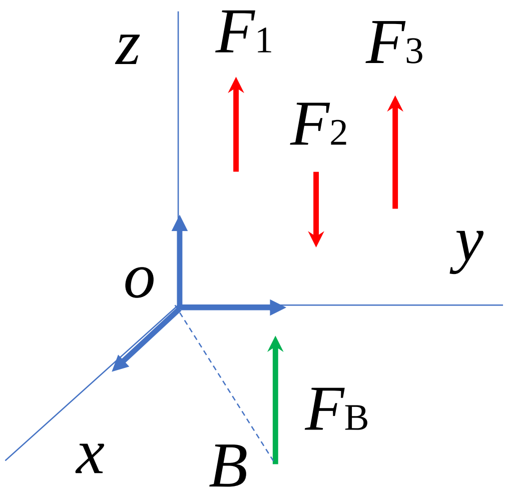
作为例子，现来计算空间平行力系的合力

在三维直角坐标系中，设有n个z方向的力

$$\boldsymbol{F}_i=(0,0,F_i),\ \text{作用点}(x_i,y_i,z_i),\quad i=1,2,\ldots,n$$

对坐标为 $(x_B,y_B,0)$ 的B点简化，其合力

$$\boldsymbol{F}_B=(0,0,F_B),\quad F_B=\sum_{i=1}^{n}F_i$$



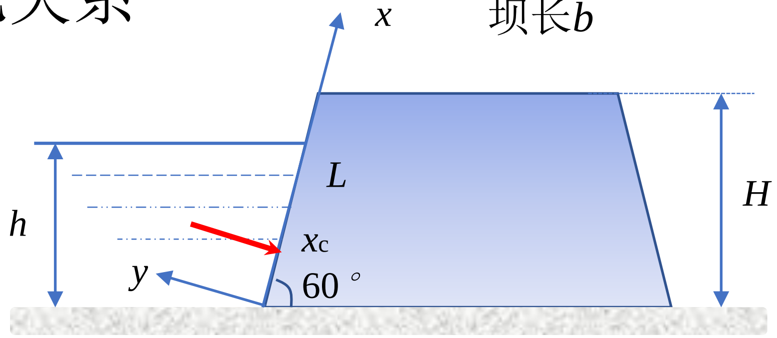
利用平行力系对原点的矩与等效力对原点的矩相等，可求出等效力的位置坐标

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F}_B \Longrightarrow \sum_i\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i\\ 0 & 0 & F_i\\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_B & y_B & 0\\ 0 & 0 & F_B\\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{vmatrix}$$

$$x_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iF_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i},\quad y_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_iF_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}$$

例7. 3 水坝水压力

水对坝体产生分布式正压力，其压强随位置的变化关系



$$p=\rho g(h-x\sin 60^\circ)=\rho g\left(h-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

分布式压力是平行力系，其合力为

$$F=\int_0^L bp\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\rho g b h^2,\quad L=\frac{h}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$$

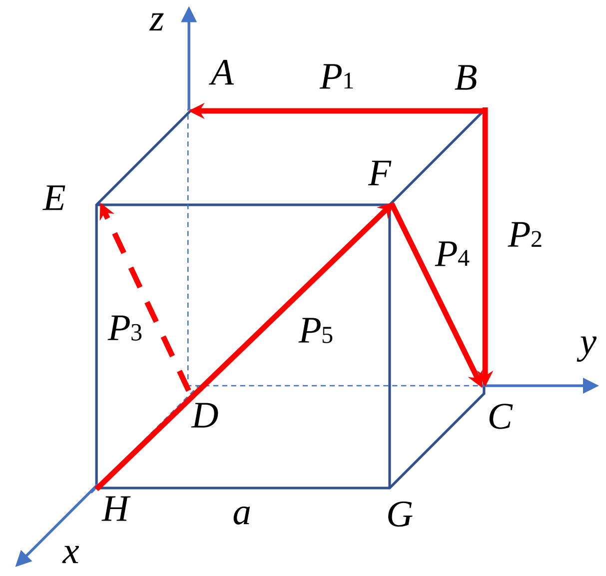
水平行压力的合力位置（压心），通过对原点的主矩相等关系

$$Fx_c=\int_0^L bpx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\rho g b h^3$$

得到压心位置 $x_c=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}h=\dfrac{1}{3}L$

例7.4 三维空间等效力系（向D点简化）

先考虑图解法，$\boldsymbol{P}_1$与$\boldsymbol{P}_2$的合力正好与$\boldsymbol{P}_5$形成力偶，而$\boldsymbol{P}_3$与$\boldsymbol{P}_4$也形成了力偶，因此最终的等效力系为合力偶。具体计算可用坐标矢量分析法进行。



图中5个力矢量及其作用点位置分别为

$$\boldsymbol{P}_1=(0,-a,0),\quad \boldsymbol{P}_2=(0,0,-a)$$

$$\boldsymbol{P}_3=(a,0,a),\quad \boldsymbol{P}_4=(-a,0,-a)$$

$$\boldsymbol{P}_5=(0,a,a)$$

$$B(0,a,a),\ D(0,0,0),\ F(a,a,a),\ H(a,0,0)$$

合力为零：$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{5}\boldsymbol{P}_i=(0,0,0)$

合力矩：$\boldsymbol{L}_D=\sum_{i=1}^{5}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{P}_i=(-a^2,-a^2,2a^2)$

向D点简化的等效力系为力偶，实际上向空间任一点简化均为力偶。

静力学分析

- 研究对象：确定分离体
- 受力分析：主动力、被动力（约束力）、受力图
- 平衡方程：列出平衡方程并求解
- 结果讨论：讨论与问题总结

三维空间单刚体平衡方程（6个标量方程）

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0, \quad \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$$

对象平衡方程是一组代数方程，平衡方程个数为：

N个平面刚体 ➡ $3N$个独立方程

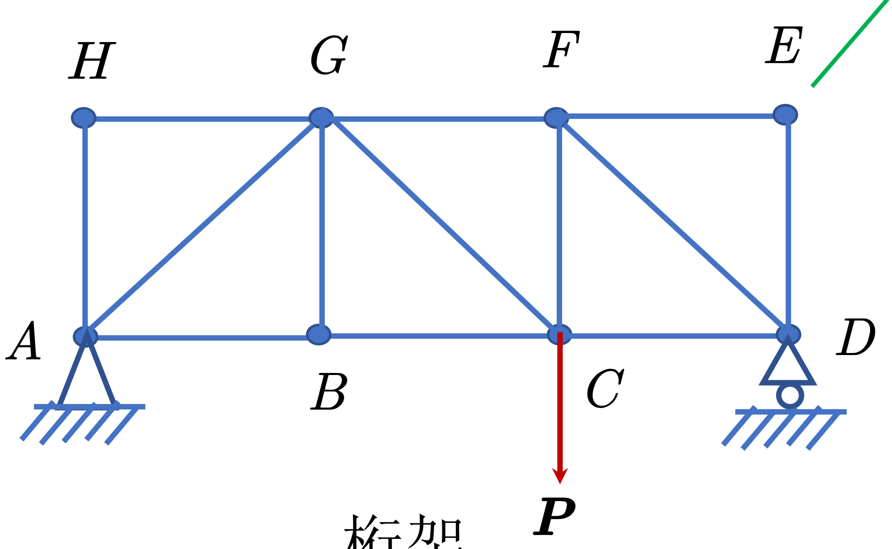
N个空间刚体 ➡ $6N$个独立方程

可解性？

如果通过平衡方程可以解出所有未知量（主要是约束力），称为**静定问题**；反之，如果不能全部解出未知量，成为**静不定问题**或**超静定问题**。

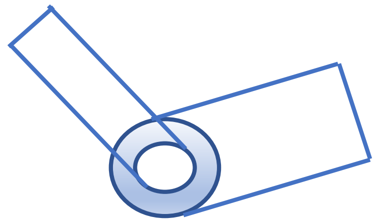
桁架结构与常见约束

二力杆

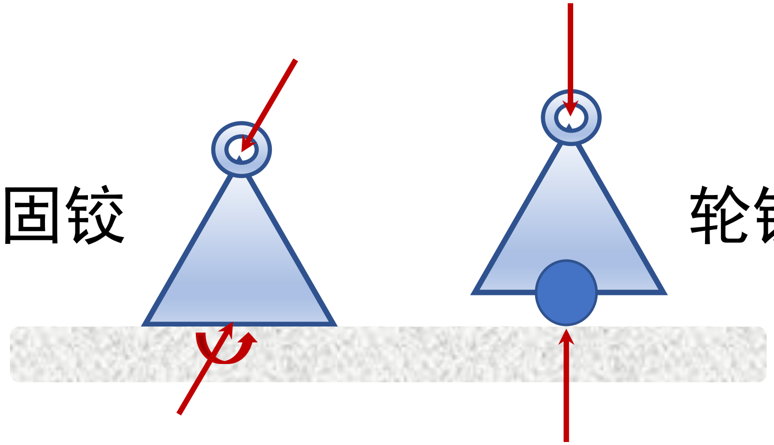


桁架

铰链
柱铰
球铰



固铰



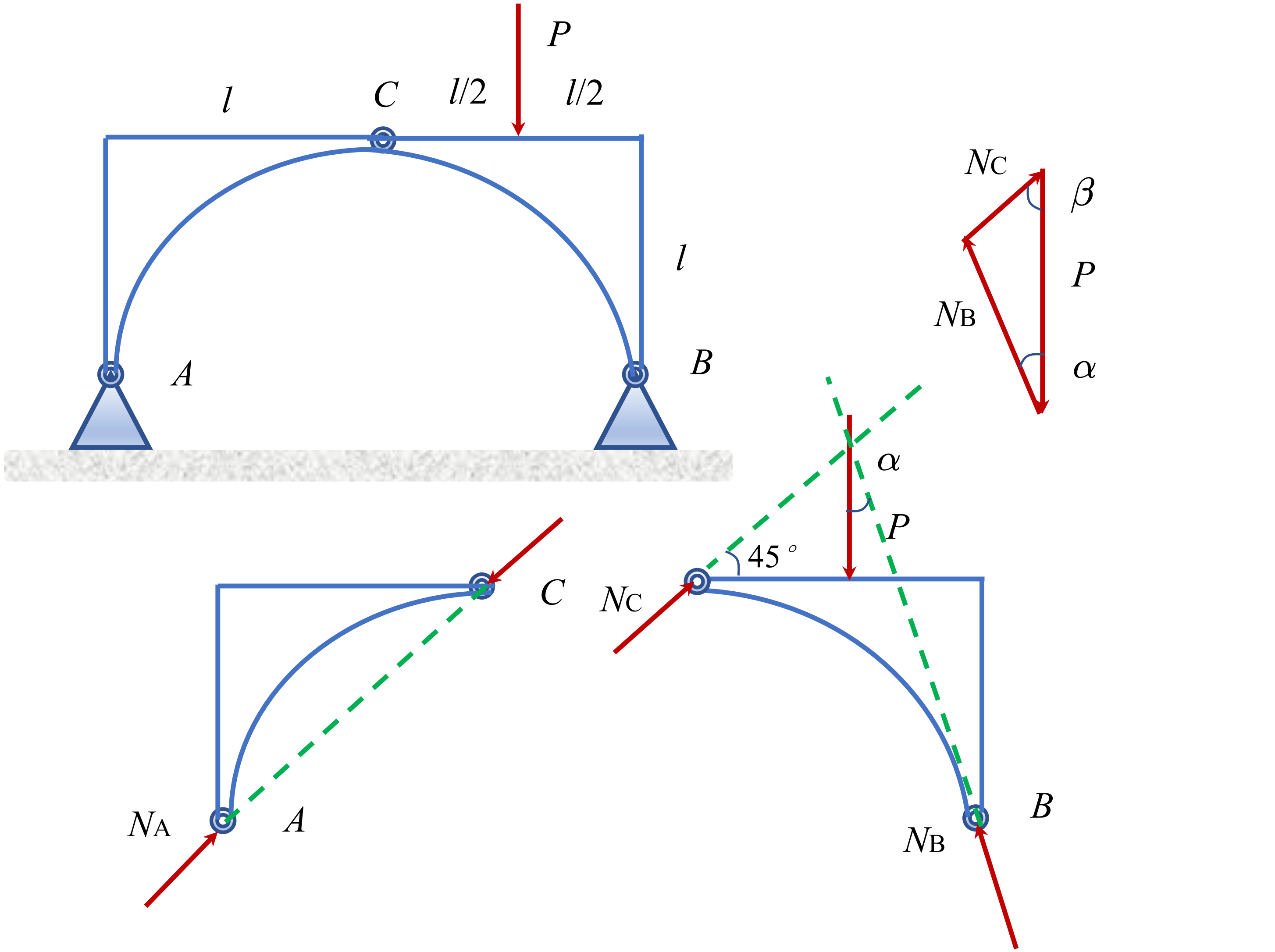
轮铰

例7.7 求三铰拱的约束反力

拱重量不计，将左拱分离出来，只有铰A与铰C两端受力，成为二力构件，二铰受力N_A与N_C的方向确定。

再将右拱分离出来，有主动力P、铰B与铰C三处受力（与左拱C处受力大小相等方向相反），形成三力平衡，从而汇交，于是N_B的方向确定，三力形成矢量三角形。

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}$$



矢量三角形的正弦定理

$$\frac{N_B}{\sin\beta}=\frac{N_C}{\sin\alpha}=\frac{P}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{\sqrt{20}}{4}P$$

解出

$$N_B=\frac{\sqrt{20}}{4}P\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{4}P$$

$$N_A=N_C=\frac{\sqrt{20}}{4}P\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}P$$

例7.9 桥梁桁架中各杆的内力

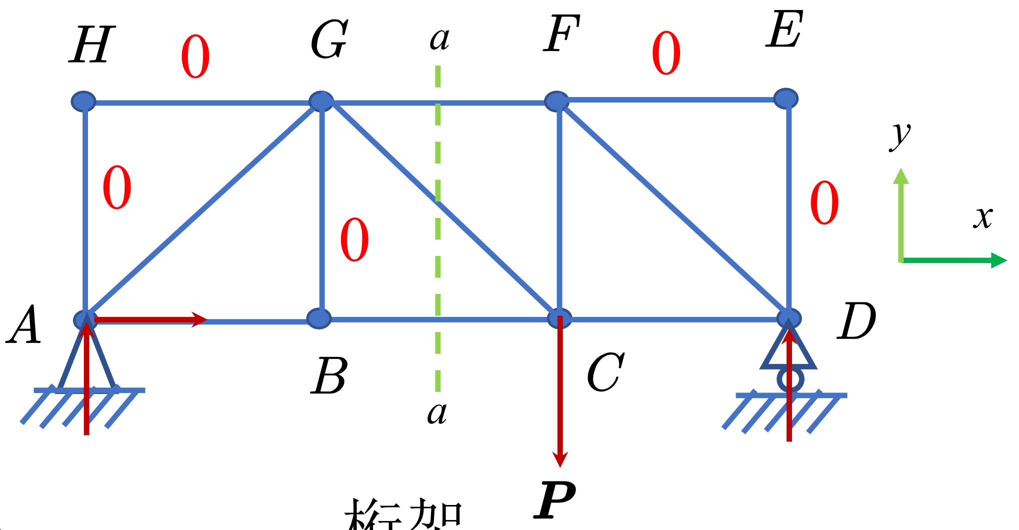
桁架中各杆长为1米，所有杆均为二力杆。

节点法是以节点为研究对象，进行受力分析。

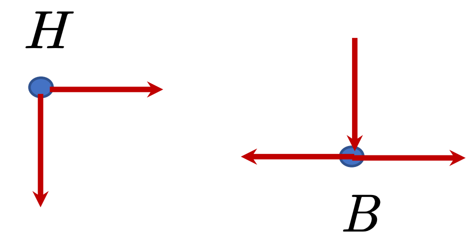
截面法是设想以一截面将桁架截开，取其中一部分为研究对象，进行受力分析。

对节点H，所受二力相互垂直，因此均为零，即杆AH与杆HG都是零力杆，类似可知杆BG、EF、DE均为零力杆。

注意到A处为固定铰，A处支承力设为水平力N_{Ax}与N_{Ay}，D处为轮式铰，其支承力为垂直方向设为N_D，现取桁架整体为研究对象，由水平方向合力为零得到 $N_{Ax}=0$



桁架



分别对A点与D点取矩，就有

$$\sum m_A = 0 \Longrightarrow N_D \times 3 - P \times 2 = 0$$

$$\sum m_D = 0 \Longrightarrow P \times 1 - N_{Ay} \times 3 = 0$$

由此求出 $N_A = N_{Ay} = P/3,\ N_D = 2P/3$

现以a-a为截面，取桁架左半部为研究对象，分别对C点与G点取矩，得到

$$\sum m_C = 0 \Longrightarrow N_{FG} \times 1 - N_A \times 2 = 0$$

$$\sum m_G = 0 \Longrightarrow N_{BC} \times 1 - N_A \times 1 = 0$$

求出 $N_{FG} = 2P/3,\ N_{BC} = P/3$，再由铅垂方向的平衡方程，得到

$$-N_{CG}\cos 45° + N_A = 0 \Longrightarrow N_{CG} = \sqrt{2}\,P/3$$

其它各杆内力可类似求得。

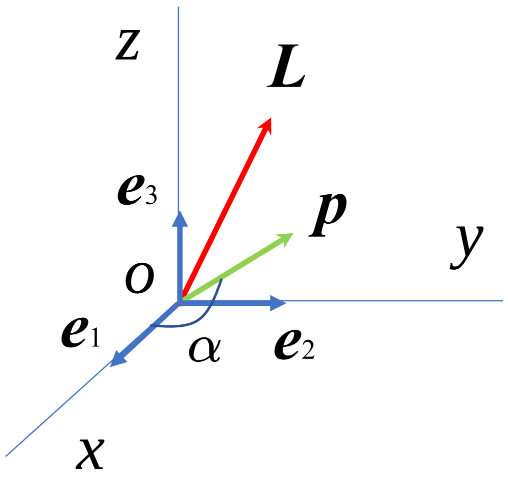
空间力系 平衡方程

前面讨论的力矩一般是对某点的矩，在一定坐标系之下其坐标分量就是对坐标轴的矩，实际上我们可以对任意方向求力矩。

考查力矩$\boldsymbol{L}$和一个单位矢量$\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{p}=p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3$$

其中 $p_1=\cos\alpha, p_2=\cos\beta, p_3=\cos\gamma$ 是矢量$\boldsymbol{p}$的方向余弦。



力矩$\boldsymbol{L}$在单位矢量$\boldsymbol{p}$上的投影称为广义的**轴矩**

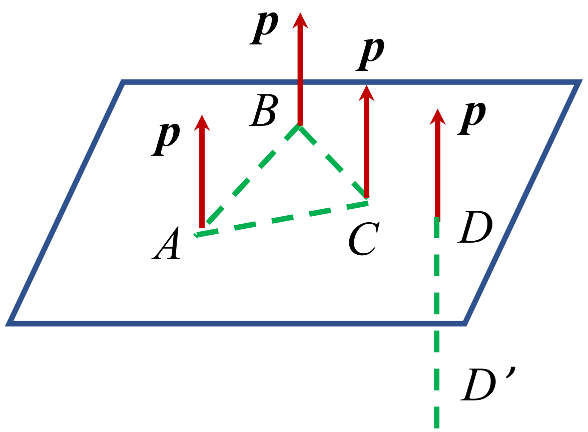
$$L_p=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p}=L_1p_1+L_2p_2+L_3p_3$$

如果有三个线性无关的单位矢量 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$，不难证明

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\\r_1&r_2&r_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow L_p=L_q=L_r=0$$

我们来证明在空间平衡力系中平行不共面的取轴矩最多只能取三条

考查三点A,B,C，它们形成平面，再取点D，其上均有单位矢量$\boldsymbol{p}$，只需证明轴矩关系



$$L_{Ap}=L_{Bp}=L_{Cp}=0 \Longrightarrow L_{Dp}=0$$

这里D可取在平面ABC上，事实上，对于经过D在$\boldsymbol{p}$方向上的另一点D'，我们有

$$L_{D'p}=\boldsymbol{L}_{D'}\cdot\boldsymbol{p}=\left(\boldsymbol{L}_D+\overrightarrow{D'D}\times\boldsymbol{R}\right)\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{L}_D\cdot\boldsymbol{p}=L_{Dp}$$

从而点D的位置可表示为 $\overrightarrow{DA}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{CA}$，注意到

$$L_{Ap}=\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{p},\quad L_{Bp}=\boldsymbol{L}_B\cdot\boldsymbol{p}=\left(\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{BA}\times\boldsymbol{R}\right)\cdot\boldsymbol{p}$$

$$L_{Cp}=\boldsymbol{L}_C\cdot\boldsymbol{p}=\left(\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{CA}\times\boldsymbol{R}\right)\cdot\boldsymbol{p}$$

于是

$$\begin{aligned}L_{Dp} &= \left(\boldsymbol{L}_A + \overrightarrow{DA} \times \boldsymbol{R}\right) \cdot \boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{L}_A + \lambda\overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{R} + \mu\overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{R}\right) \cdot \boldsymbol{p} \\ &= (1-\lambda-\mu)L_{Ap} + \lambda L_{Bp} + \mu L_{Cp} = 0\end{aligned}$$

得证

对空间力系作静力学分析时，灵活的取轴矩可能带来解题方便。

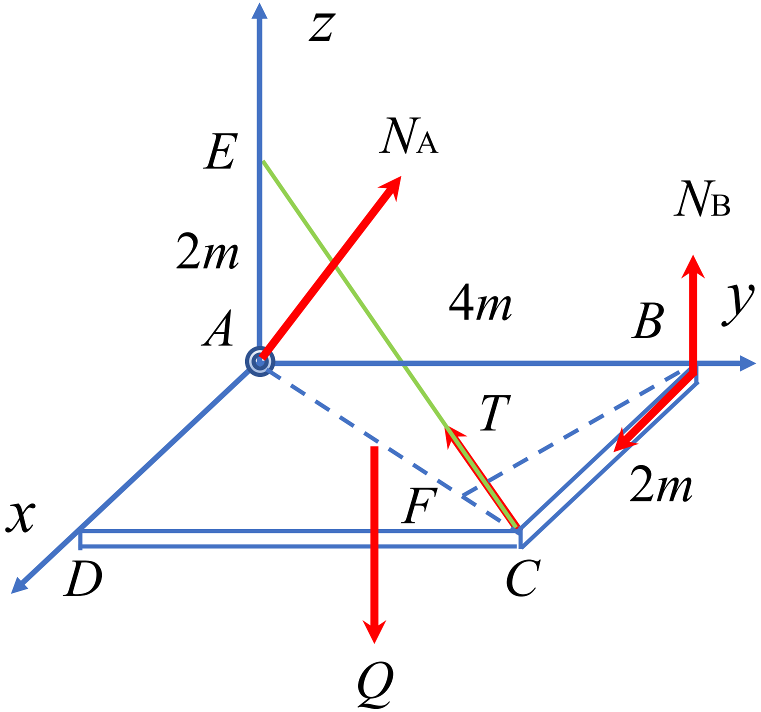
例7. 12 悬挂薄板

题中角A处为球铰、EC为绳索、角B处嵌入水平滑槽，A处球铰支承力N_A方向不定， B点滑槽支承力N_B处于xz平行平面中，板重为Q。

因位置$C(2,4,0)$及$E(0,0,2)$确定，CE方向单位矢量为

$$\overrightarrow{CE}=(0,0,2)-(2,4,0)=(-2,-4,2)$$

$$\tau=\frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$



一共有六个未知量N_{Ax}、N_{Ay}、N_{Az}、N_{Bx}、N_{Bz}、以及绳索拉力$\boldsymbol{T}=T\tau=(T_x,T_y,T_z)$，可以通过刚体六个平衡方程来求解。

三个坐标方向的平衡方程

$$N_{Ax}+N_{Bx}+T_x=0$$
$$N_{Ay}+T_y=0$$
$$N_{Az}+N_{Bz}-Q+T_z=0$$

分别对z轴、AC轴和BC轴取矩，得到

$$-N_{Bx}\cdot\overline{AB}=0$$
$$N_{Bz}\cdot\overline{FB}=0$$
$$-N_{Az}\cdot\overline{AB}+Q\cdot\overline{AB}/2=0$$

解方程求出

$$N_{Bx}=N_{Bz}=0$$
$$N_{Ax}=Q/2,\ N_{Ay}=Q,\ N_{Az}=Q/2,\ T=\sqrt{6}\,Q/2$$

摩擦力

摩擦力是两个物体接触处存在的阻碍相对运动的力，摩擦的微观力学机理复杂，这里只探讨其宏观表象规律，即**库伦摩擦**定律

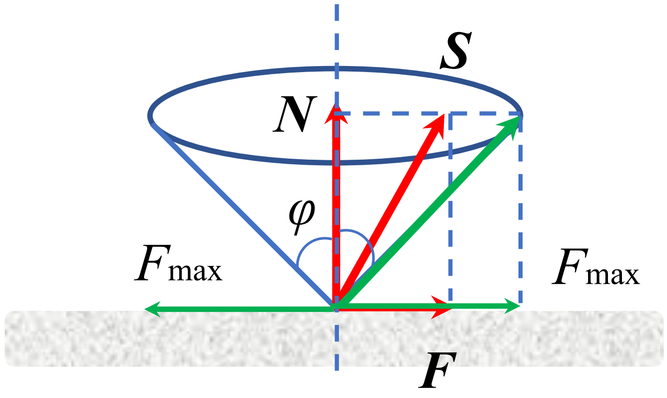
$$|\boldsymbol{F}| \leqslant F_{\max} = fN, \quad |\boldsymbol{M}| \leqslant M_{\max} = \delta N$$

其中$|\boldsymbol{N}|=N$为正压力，$\boldsymbol{F}$为切向摩擦力（$F_{\max}$为最大值）， $\boldsymbol{M}$为滚阻摩擦力偶矩（$M_{\max}$为最大值），f为静（滑动）摩擦系数，δ为滚动摩擦系数。一般地，动摩擦系数小于等于静摩擦系数。由于

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} \triangleq \boldsymbol{S}$$

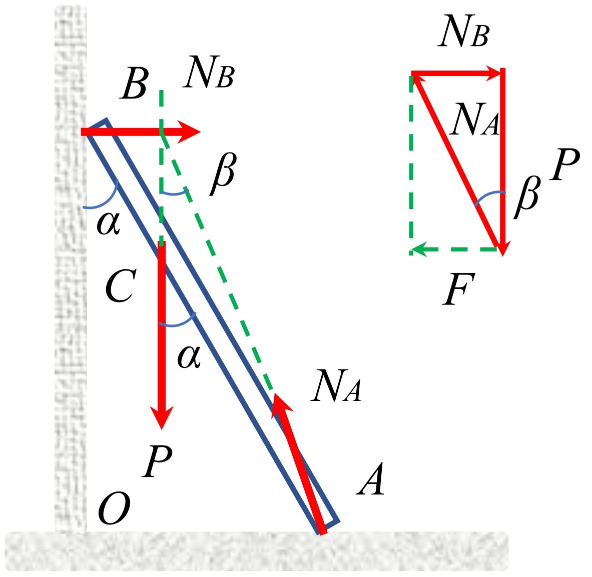
$$\frac{F_{\max}}{N} = f \triangleq \tan\varphi, \quad \varphi = \arctan f$$

这里摩擦力与正压力的合力（全反力）记为$\boldsymbol{S}$，以摩擦角φ为半顶角作一圆锥（摩擦锥）。物体滑动的**自锁条件**是接触反力$\boldsymbol{S}$处于摩擦锥内。



例7.13 靠墙梯子

梯子AB架在铅垂的光滑墙上，与墙交成α角，梯长为l，水平地面的静摩擦系数为f，梯子重量不计，为保证重为P的工人从底部安全到达梯子顶点，求角α满足的条件。



保证安全的条件是攀登过程中摩擦力满足 $|F| \leqslant F_{\max} = fN$

地面与墙的约束反力N_A、N_B和体重P三力平衡

利用几何关系 $\overline{AC}\sin\alpha = \overline{OB}\tan\beta = l\cos\alpha \cdot \tan\beta$

考虑到地面摩擦力

$$F = P\tan\beta = \frac{\overline{AC}}{l} \cdot P\tan\alpha \leqslant fN = fP, \quad \tan\alpha \leqslant \frac{l}{\overline{AC}} f$$

安全角α随着工人位置的上升而减小，处于顶点到达最大安全角

$$\alpha \leqslant \arctan f \triangleq \alpha_{\max}$$