对于含有定常、理想约束的质点系，可以采用虚位移（虚功）原理研究静力学问题。通过达朗伯原理，引入惯性力可以将动力学问题转化为静力学问题。这里我们可将虚位移原理与达朗伯原理结合起来，给出一种求解动力学问题的分析力学方法。

对于由n个质点组成的质点系，其达朗伯原理为

$$\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}_k+\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{0},\quad k=1,2,\ldots,n$$

这里$\boldsymbol{F}_k$为主动力，$\boldsymbol{N}_k$为被动力（约束力），$\boldsymbol{S}_k=-m_k\boldsymbol{a}_k$是第$k$个质点的惯性力。

质点系动力学问题已转化为力系平衡问题，如果约束是定常和理想的，利用虚位移原理则有

$$\delta W=\sum_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{S}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

$$\xlongequal{\sum_i \boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0}\sum_i(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

达朗伯—拉格朗日方程

上述方程称为**达朗伯—拉格朗日方程**，也称**动力学普遍方程**。注意到我们在证明虚功原理时，必要性证明不需要约束的定常性，充分性证明需要定常约束，只是体现在虚位移总是可以取到实位移即可。所以一般讲，对于具有理想约束的质点系，动力学普遍方程总是成立的。

现在引入广义坐标，进一步考查动力学普遍方程。设质点系有n个质点、m个自由度，广义坐标为 $q_1, q_2, \dots, q_m$ 。对于完整约束，每个质点的矢径可表为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

它的等时变分为

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

现在来逐项研究动力学普遍方程

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

实际上我们是要利用广义坐标及其变分来分析

$$\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

注意到

$$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

其中 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ 称为**广义速度**，上式右边是 $q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t$ 的函数，再求导

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t\, \partial q_j} + \sum_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

光滑系统混合导数可交换

假定系统是光滑的，那么二阶混合导数是可交换的，于是得到下式的交换性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}$$

有了这些准备，我们就推出

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i&=\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\\&=\sum_i\left(m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot\sum_j\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=\sum_j\left(\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)\end{aligned}$$

令动能

$$T=\sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i=\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

则有

$$\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\sum_j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \delta q_j$$

将主动力虚功用广义力虚功来表示

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j=\sum_j\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j=\sum_j Q_j \delta q_j$$

我们得到

$$\sum_{i=1}^n\left(\boldsymbol{F}_i-m_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^m\left[Q_j-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \delta q_j=0$$

由于变分 $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ 的独立性，就得到（第二类）**拉格朗日方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,2,\ldots,m$$

拉格朗日方程描述了具有理想、完整约束的质点系的动力学规律。

拉格朗日方程由m个二阶常微分方程组成，可以求解描述质点系（包括刚体）状态的广义坐标随时间的变化规律。方程中包含了系统的动能、广义坐标、广义速度和广义力等标量，改变了矢量力学的传统。注意到方程中没有出现约束反力等未知量，导致方程的阶次较低，这是分析力学的一大优势。如果需要求解约束反力，或者出现非完整约束，可以将所关心的约束力作为主动力，找出它与约束方程之间的依赖关系，引入拉格朗日待定乘子，可以得到**第一类拉格朗日方程**，这里不再深入讨论。

如果主动力有势，即存在势能函数（与广义速度无关）

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_m, t)$$

使得广义力

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

则前述拉格朗日方程可改写成（保守力场）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

其中定义 $L = T - U$, $L = L(q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, t)$ 称为**拉格朗日函数**。

这是具有理想、完整约束、主动力有势的一般质点系的动力学方程。

对于拉格朗日函数 $L = L(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,t)$

定义**广义动量**

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \triangleq p_j(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,t), \quad j = 1,2,\dots,m$$

上式中需注意拉格朗日函数L为能量量纲，广义速度为“速度”量纲，求导以后应为“动量”量纲，这就是广义动量说法的来源。

现在考虑能否从上面方程中反解出广义速度 $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1,\dots,q_m,p_1,\dots,p_m,t), \quad j = 1,2,\dots,m$$

根据隐函数定理，如果下面导函数矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{m\times m} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{m\times m}$$

非奇异，即可解出广义速度。实际上该条件可满足，因为动能具正定性（见后）。

其中 $q_1,\dots,q_m,p_1,\dots,p_m$ 称为**哈密顿正则变量**，现定义**哈密顿函数**（广义能量）

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L=\sum_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-L$$

对上式微分

两项抵消

$$\mathrm{d}H=\sum_j p_j\mathrm{d}\dot{q}_j+\sum_j\dot{q}_j\mathrm{d}p_j-\sum_j\frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j-\sum_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

拉格朗日方程

$$=\sum_j\dot{q}_j\mathrm{d}p_j-\sum_j\dot{p}_j\mathrm{d}q_j-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

将哈密顿函数看成广义坐标、广义动量和时间的函数，并作全微分，则有

$$H=H(q_1,\dots,q_m,p_1,\dots,p_m,t),\quad \mathrm{d}H=\sum_j\frac{\partial H}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j+\sum_j\frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j+\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

比较两个微分表达式，就有

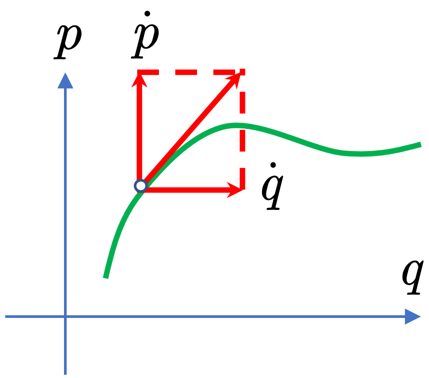
$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$$

哈密顿正则方程

其中 $j=1,2,\dots,m$，且 $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$

上式称为**哈密顿正则方程**，它是$2m$个一阶微分方程。

哈密顿正则方程的解（系统运动轨迹）可以表示为$2m$维空间的一条时间参数曲线，在某一瞬间系统状态为该曲线上的一个点（相点），这个$2m$维空间常称为**相空间**（状态空间），系统运动轨迹称为相轨迹。相点的运动速度与运动轨迹相切。如果自由度为1，相空间就是一个二维相平面。



如果部分主动力有势，广义力可以分解为

$$Q_j = Q'_j - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j=1,2,\ldots,m$$

其中Q'_j为非保守广义力，则拉格朗日方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j, \quad j=1,2,\ldots,m$$

哈密顿正则方程可写成

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} + Q'_j \end{cases}$$

其中 $j=1,2,\ldots,m$

下面计算一般质点系的动能，第i个点的位置与速度为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,...,q_m,t),\quad i=1,2,..,n$$

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,\quad i=1,2,...,n$$

质点系动能

$$\begin{aligned}T&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k\\&\triangleq T_0+T_1+T_2\end{aligned}$$

其中T_2为关于 $\dot{q}_1,...,\dot{q}_m$ 的二次型。如果系定常约束，可选择广义坐标使$\boldsymbol{r}_i$不显含t，这时就有$T_0=0$，$T_1=0$，而$T=T_2$.

由于动能总是大于等于零，动能恒为零对应质点系静止，所以矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{m\times m}$$

为正定对称矩阵。考虑到

$$\sum_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = T_1, \quad \sum_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T_2$$

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = T_1 + 2T_2$$

于是有

$$H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = T_1 + 2T_2 - (T - U) = T_2 - T_0 + U$$

对于定常系统，因T_0=0，T_2=T，则哈密顿函数H=T+U（机械能），所以可称哈密顿函数为**广义能量**。

现在讨论保守系统的**首次积分**

如果拉格朗日函数L（或哈密顿函数H）不显含某个广义坐标q_k，则有

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\text{const.}$$

或者

$$\frac{\partial H}{\partial q_k}=0 \;\Rightarrow\; \dot{p}_k=0 \;\Rightarrow\; p_k=\text{const.}$$

这意味着**广义动量守恒**，该首次积分通常称为广义动量积分或循环积分。

现在考查广义能量的变化率（全导数）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)\\&=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\right)=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

如果哈密顿函数H不显含时间t（或拉格朗日函数L不显含时间t），则有

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0 \quad \Rightarrow \quad H=\text{const.}$$

这意味着**广义能量守恒**，该首次积分通常称为广义能量积分。

广义能量守恒可看作是机械能守恒的推广。

这两类首次积分可以总结为：

- 若哈密顿函数H不显含某个广义坐标 q_k，则相应的广义动量 p_k 守恒
- 若哈密顿函数H不显含时间t，则广义能量H守恒

哈密顿正则方程虽然是在经典力学范围内推导出来的，但是用广义坐标、广义动量及广义能量来刻画物理规律的思想可推广应用到微观和高速物理学中。