达朗伯原理：用静力学的力系平衡条件来处理动力学问题

前面我们通过引入假想的惯性力，可以在非惯性系中研究对象的动力学，这里将特别研究在非惯性系中相对静止的物体。

考查质量为m之质点的动力学方程

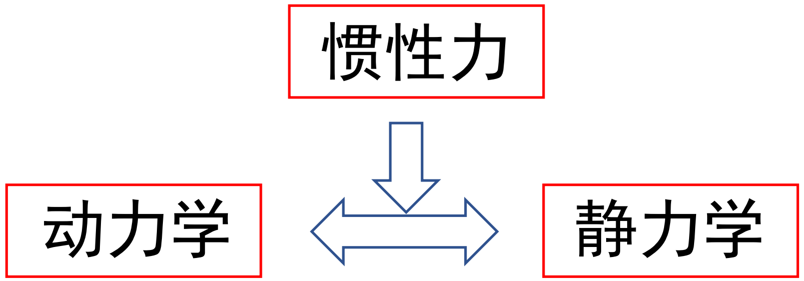
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}$$

其中$\boldsymbol{F}$为主动力，$\boldsymbol{N}$为被动力（约束力），
定义惯性力

$$\boldsymbol{S} = -m\boldsymbol{a}$$

则有力系平衡方程

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$$



对于由n个质点组成的质点系，其达朗伯原理为

$$\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}_k+\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{0},\quad k=1,2,\ldots,n$$

这里 $\boldsymbol{S}_k=-m_k\boldsymbol{a}_k$ 是第k个质点的惯性力。注意，这里达朗伯引入的惯性力，不能在同一的非惯性坐标架中描述，可称之为**达朗伯惯性力**。

对于一般刚体运动，可通过质点系力平衡方程相加和力矩平衡方程相加，消除内力影响只留下外约束力，刚体达朗伯原理表示为

$$\boldsymbol{R}_F+\boldsymbol{R}_N+\boldsymbol{R}_S=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{L}_{FO}+\boldsymbol{L}_{NO}+\boldsymbol{L}_{SO}=\boldsymbol{0}$$

其中惯性力主矢和惯性力主矩分别为

动量变化率

$$\boldsymbol{R}_S=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{L}_{SO}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}$$

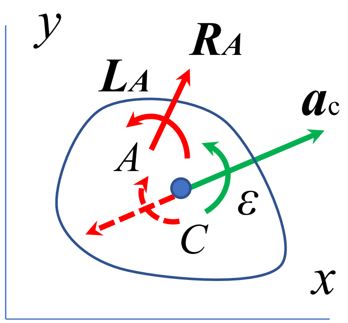
动量矩变化率

这里O为固定点（取矩）

而对质心C取矩的刚体运动达朗伯原理为

$$\boldsymbol{R}_F+\boldsymbol{R}_N+\boldsymbol{R}_S=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{L}_{FC}+\boldsymbol{L}_{NC}+\boldsymbol{L}_{SC}=\boldsymbol{0}$$



这里惯性力主矢和惯性力主矩分别为

$$\boldsymbol{R}_S=-M\boldsymbol{a}_c,\quad \boldsymbol{L}_{SC}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t}=-\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_c$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e}\omega,\ \boldsymbol{H}_c=\boldsymbol{e}J_c\omega$

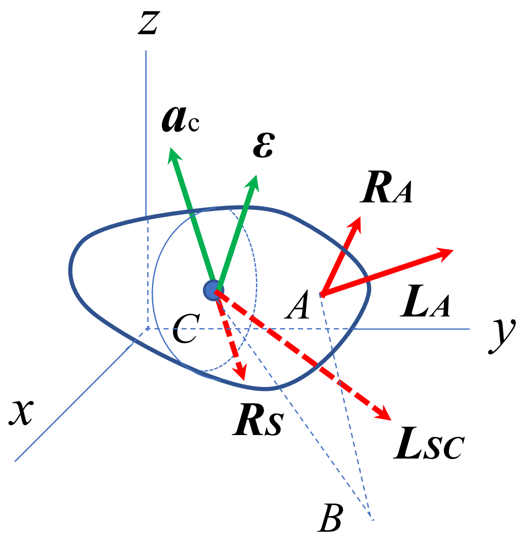
特别地，平面运动刚体的惯性力主矢和惯性力主矩分别为

$$\boldsymbol{R}_S=-M\boldsymbol{a}_c=-M(\ddot{x}_c\quad \ddot{y}_c\quad 0),\quad \boldsymbol{L}_{SC}=-(0\quad 0\quad J_c\varepsilon)^T$$

其中 $\varepsilon=\dot{\omega}$ 为角加速度

考查三维空间作一般运动的刚体，如果刚体所受的外力（包括主动力与被动力）在点A简化成主矢$\boldsymbol{R}_A$与主矩$\boldsymbol{L}_A$，在质心C处有惯性力$\boldsymbol{R}_S$和惯性力矩$\boldsymbol{L}_{SC}$，则“平衡方程”为

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_S = \boldsymbol{0} \\ \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{L}_{SC} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$



其中力矩方程是对质心C取矩的

如果对另一点B取矩，将有

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{R}_A + \overrightarrow{BC} \times \boldsymbol{R}_S + \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{L}_{SC} \\ &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \times \boldsymbol{R}_A + \overrightarrow{BC} \times \boldsymbol{R}_S + \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{L}_{SC} \\ &= \overrightarrow{BC} \times (\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_S) + \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{L}_{SC} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

可见对“平衡”力系来说，对任一点B取矩与对质心C取矩是等价的，这与我们之前的认知是一致的。所以将动力学问题转化为静力学问题在取矩点上是方便的。