

# 自动控制原理

中国科学技术大学  
工业自动化研究所

吴刚

2019年10月

# 第五章

## 反馈控制系统性能

# 目录

5.1 引论

5.2 测试输入信号

5.3 二阶系统性能

5.3' 一阶系统性能

5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

5.5  $s$ 平面上根的位置与瞬态响应

5.6 反馈控制系统稳态误差

5.7 性能准则

5.8 线性系统的简化

5.9 设计实例

# 目录

**5.10 应用控制设计软件分析系统性能**

**5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统**

**5.12 总结**

# 习题

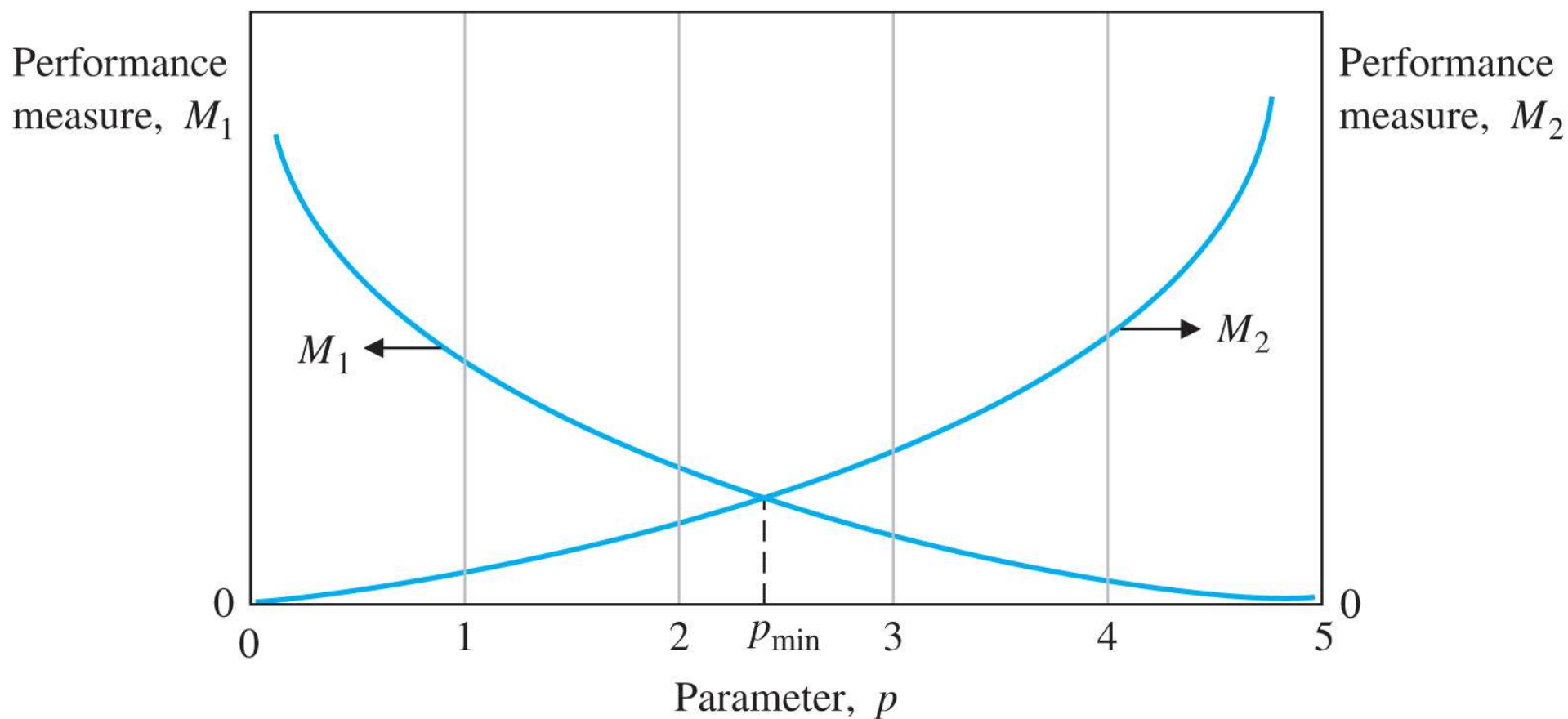
- **Skills Check:** 全做
- **Exercises:** E5.2, E5.3, E5.9, E5.10, E5.13, E5.14, E5.15, E5.18
- **Problems:** P5.1, P5.2, P5.6, P5.7, P5.8, P5.11, P5.17, P5.20, P5.21
- **Advanced Problems:** AP5.6, AP5.8
- **Design Problems:** CDP5.1
- 作业说明: 绘制系统输出响应、稳态误差响应曲线需用**MATLAB**作图, 并在图中标明必要信息, 集中在一起打印, 贴到作业本上

## 5.1 引论

- 为了分析、设计控制系统，必须定义并测量控制系统的性能。根据对闭环控制系统的期望性能，调整系统参数，得到期望的响应
- 由于系统中包含物质、能量的传输、存储元件，因此系统有惯性，是动态系统，在设定值、扰动信号作用下，具有瞬态响应和稳态响应，要从瞬态响应、稳态响应两个方面确定控制系统性能
- 控制系统设计指标包括对某个指定输入信号的几种时域响应指标，以及期望的稳态精度
- 给出设计指标的目的是为了获得期望的性能，因此设计指标并不是刚性的，常常需要在若干个设计指标之间折衷考虑

## 5.1 引论

- 设计过程中常常要对多个指标进行有效的折衷和调整，控制器设计的数学本质是多目标优化问题



两个性能指标与参数 $p$ 的关系

## 5.1 引论

- 控制系统性能指标可以总结为：稳、准、快
- 稳：稳定性，闭环系统必须是稳定的，并且具有足够的相对稳定性(稳定裕量)。一般希望，稳定性越强越好
- 准：准确性，稳态响应的跟踪精度要高(稳态跟踪误差要小)，瞬态响应的跟踪精度要高(动态跟踪误差要小)。一般希望，跟踪精度越高越好、跟踪误差越小越好
- 快：快速性，瞬态响应速度，与开环响应速度相比，有些系统要求加快闭环响应速度，有些系统要求减慢闭环响应速度。一般希望，在不影响稳定性、相对稳定性的前提下，闭环响应速度要尽可能快一些



## 5.2 测试输入信号

- 控制系统本质上是时域系统，因此评价控制系统的性能时，其时域性能指标非常重要
- 首先要判断系统是否稳定(下一章介绍)
- 如果系统是稳定的，就可以由系统对特定输入信号的响应获得若干个性能指标，来衡量系统的性能
- 系统实际运行时的输入信号未知，通常选择标准的测试输入信号**Test Input Signal**，来分析系统性能、比较不同的设计方案

## 5.2 测试输入信号

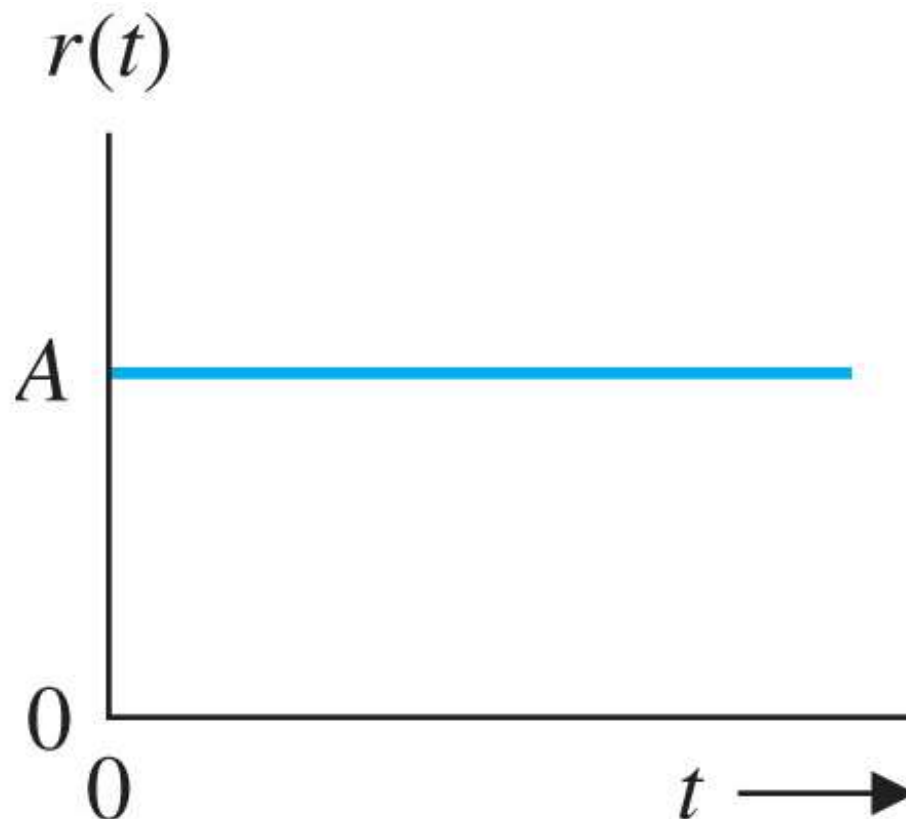
➤ 标准测试信号——阶跃输入 **Step Input**

$$r(t) = \begin{cases} A, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

➤  $A=1$ 时，称为单位阶跃输入 **Unit Step Input**

➤ 系统在阶跃输入作用下的输出响应，称为系统的阶跃响应。单位阶跃输入作用下的输出响应称为单位阶跃响应

➤ 阶跃信号容易产生，使用得也就最多



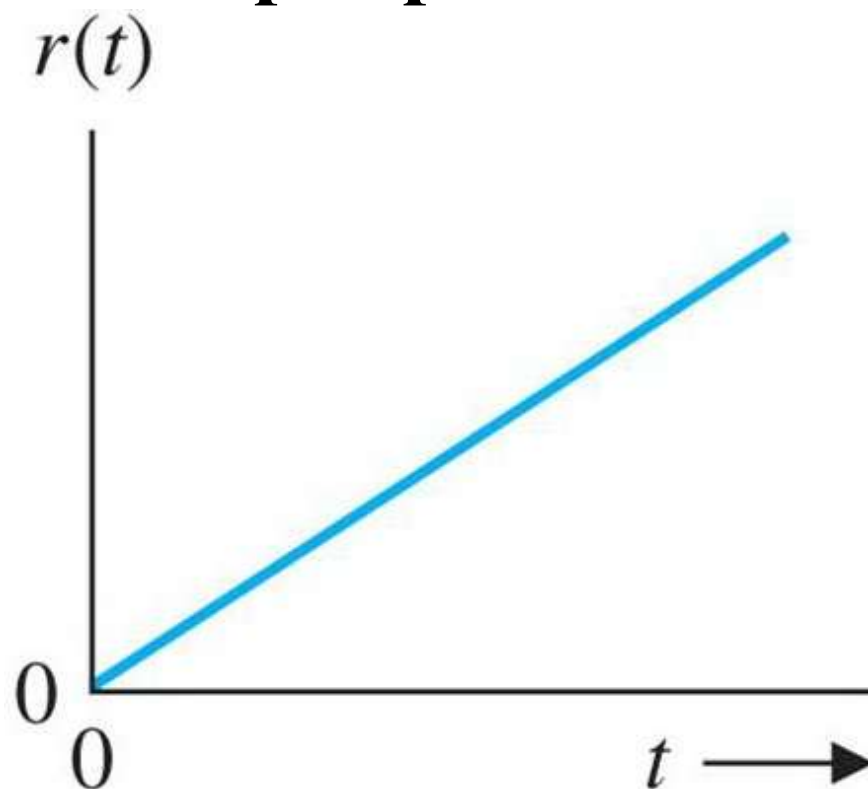
## 5.2 测试输入信号

➤ 标准测试信号——**斜坡输入Ramp Input**

$$r(t) = \begin{cases} At, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$

➤  $A=1$ 时，单位斜坡输入**Unit Ramp Input**

➤ 系统在斜坡输入作用下的输出响应，称为系统的斜坡响应。单位斜坡输入作用下的输出响应称为单位斜坡响应



## 5.2 测试输入信号

- 阶跃输入的积分是斜坡输入；斜坡输入的微分是阶跃输入。单位阶跃输入的积分是单位斜坡输入；单位斜坡输入的微分是单位阶跃输入
- 对于线性系统，阶跃响应的积分是斜坡响应，斜坡响应的微分是阶跃响应；单位阶跃响应的积分是单位斜坡响应，单位斜坡响应的微分是单位阶跃响应
- 过程控制、运动控制中都经常使用阶跃输入，运动控制中还经常使用斜坡输入
- 运动控制中，阶跃输入常常称为位置输入，斜坡输入常常称为等速度输入

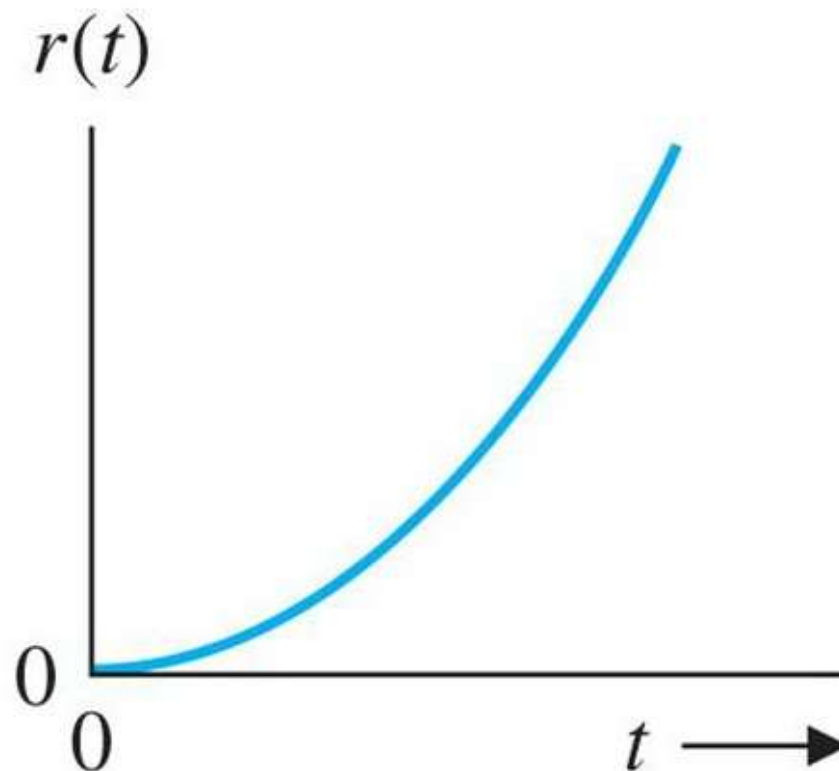
## 5.2 测试输入信号

➤ 标准测试信号——**抛物线输入Parabolic Input**

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} At^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$

➤  $A=1$ 时，单位抛物线输入**Unit Parabolic Input**

➤ 系统在抛物线输入作用下的输出响应，称为系统的抛物线响应。单位抛物线输入作用下的输出响应称为单位抛物线响应



## 5.2 测试输入信号

- 斜坡输入的积分是抛物线输入；抛物线输入的微分是斜坡输入。单位斜坡输入的积分是单位抛物线输入；单位抛物线输入的微分是单位斜坡输入
- 对于线性系统，斜坡响应的积分是抛物线响应，抛物线响应的微分是斜坡响应；单位斜坡响应的积分是单位抛物线响应，单位抛物线响应的微分是单位斜坡响应
- 运动控制中使用抛物线输入，常常称为等加速度输入

## 5.2 测试输入信号

➤ 标准测试信号——一般形式

$$r(t) = \begin{cases} t^n, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

## 5.2 测试输入信号

➤ 例如，系统传递函数：

$$G(s) = \frac{9}{s + 10}$$

➤ 稳态增益**0.9**，时间常数**0.1秒**

➤ 单位阶跃响应的拉氏变换：

$$Y(s) = \frac{9}{s(s + 10)}$$

➤ 单位阶跃输入的瞬态响应：

$$y(t) = 0.9(1 - e^{-10t})$$



## 5.2 测试输入信号

➤ 单位阶跃输入的稳态响应：

$$y(\infty)=0.9$$

➤ 稳态跟踪误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s \rightarrow 0} sE(s)=0.1$$

## 5.2 测试输入信号

➤ 矩形函数(方波信号):

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➤ 单位冲激 **Unit Impulse**

➤ 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 矩形函数  $f_{\varepsilon}(t) \rightarrow$  单位冲激  $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^{-}}^{0^{+}} \delta(t) dt = 1$$

## 5.2 测试输入信号

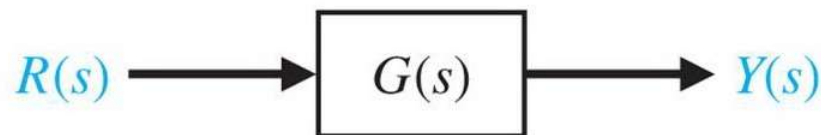
➤ 单位冲激函数的拉氏变换:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

➤ 对任意函数 $f(t)$ , 有:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt &= \int_{a^-}^{a^+} \delta(t-a) f(t) dt \\ &= \int_{a^-}^{a^+} \delta(t-a) f(a) dt \\ &= f(a) \int_{a^-}^{a^+} \delta(t-a) dt \\ &= f(a)\end{aligned}$$

## 5.2 测试输入信号



➤ 图示系统，在任意输入  $r(t)$  作用下，输出为：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s) = \mathcal{L}^{-1} G(s) R(s)$$

$$= \int_{-\infty}^t g(t - \tau) r(\tau) d\tau$$

➤ 其中： $g(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s)$ ， $G(s) = \mathcal{L} g(t)$

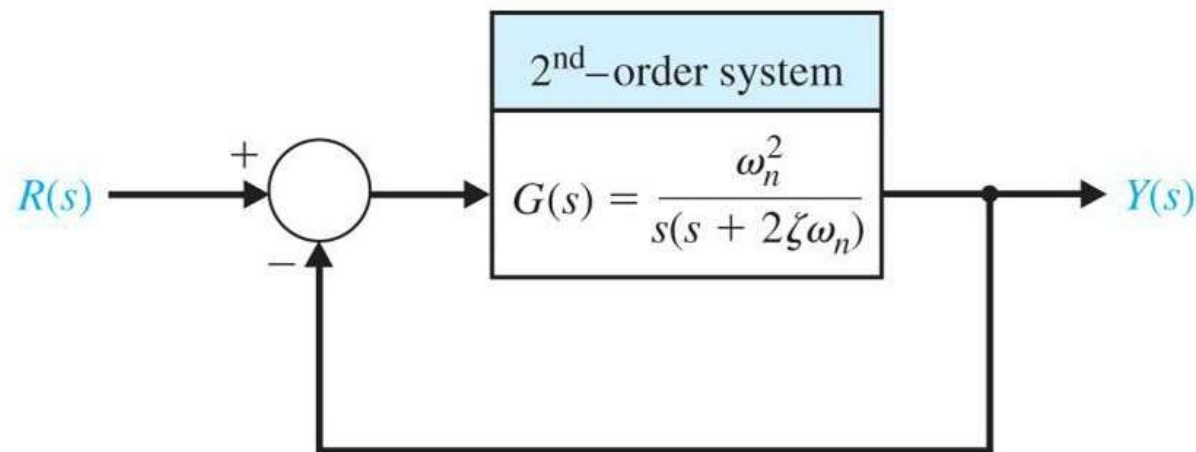
➤ 如果系统输入为单位冲激信号，系统输出为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = g(t)$$

➤ 系统的单位冲激响应即为  $g(t)$ ，系统单位冲激响应的拉氏变换即为系统的传递函数

## 5.3 二阶系统性能

➤ 单回路二阶闭环控制系统：



➤ 闭环系统传递函数：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

➤ 单位负反馈系统，闭环稳态增益为1

➤ 二阶系统的动态特性主要受阻尼比 $\zeta$ 、无阻尼自然振荡频率 $\omega_n$ 两个参数的影响

## 5.3 二阶系统性能

- $0 < \zeta < 1$ , 欠阻尼系统, 闭环极点为左半 $S$ 平面的一对共轭复极点, 瞬态响应是振荡的

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \end{aligned}$$

- 阻尼自然振荡频率  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
- 闭环系统有一对稳定的共轭复极点:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶闭环系统单位阶跃响应的拉氏变换:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 拉氏反变换，得到单位阶跃响应的时域表达：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s)$$

$$= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta \right), \quad t \geq 0$$



### 5.3 二阶系统性能

令：  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ 。则有：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

➤ 闭环系统对阶跃输入的跟踪误差：

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$= e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

## 5.3 二阶系统性能

- 二阶闭环系统对单位阶跃输入信号的动态跟踪误差为有阻尼的正弦振荡
- 稳态跟踪误差为：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 即二阶闭环系统对单位阶跃输入的稳态跟踪误差为零

## 5.3 二阶系统性能

- $\zeta=0$ ，无阻尼系统，闭环极点为虚轴上的一对共轭虚极点，单位阶跃响应为等幅振荡：

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)} \end{aligned}$$

闭环极点： $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$y(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad t \geq 0$$

- $\zeta=0$ 时，振荡角频率为 $\omega_n$ ，称为无阻尼自然振荡频率

## 5.3 二阶系统性能

- 欠阻尼系统  $0 < \zeta < 1$ ，通过实验不能直接测得无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$ ，只能测得有阻尼自然振荡频率：

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} < \omega_n$$

- 阻尼比  $\zeta$  增大，有阻尼自然振荡频率  $\omega_d$  将减小
- $\zeta > 1$  时，系统过阻尼，瞬态响应不再产生振荡

## 5.3 二阶系统性能

- $\zeta=1$ , 临界阻尼系统, 闭环极点为负实轴上一对稳定的重实极点, 阶跃响应不振荡

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

➤  $s_{1,2} = -\omega_n$

- 单位阶跃响应:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$

## 5.3 二阶系统性能

➤  $\zeta > 1$ , 过阻尼系统, 闭环极点为负实轴上两个不相同的实极点, 阶跃响应不振荡

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 负实轴上两个稳定的闭环实极点：

$$\begin{aligned}s_1 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_2 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n\end{aligned}$$

➤ 因此，有：  $|s_1| > |s_2|$

➤ 极点  $s_1$  比  $s_2$  离原点更远。阻尼比  $\zeta$  越大，两个极点相距越远， $s_2$  越有可能成为主导极点

## 5.3 二阶系统性能

➤ 闭环系统单位阶跃响应:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \times \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s-s_1} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s-s_2} \\ y(t) &= 1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_1 t} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_2 t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( -\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \end{aligned}$$



## 5.3 二阶系统性能

➤ 闭环系统单位阶跃响应包含两个衰减的指数项：

$$s_1 = -\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = -\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

- 极点 $s_1$ 比 $s_2$ 离原点更远， $s_1$ 对应的指数项比 $s_2$ 对应的指数项衰减更快
- 阻尼比 $\zeta$ 越大，极点 $s_1$ 离原点越远，两个极点相距越远， $s_2$ 越有可能成为主导极点，在瞬态响应中占据主要部分

## 5.3 二阶系统性能

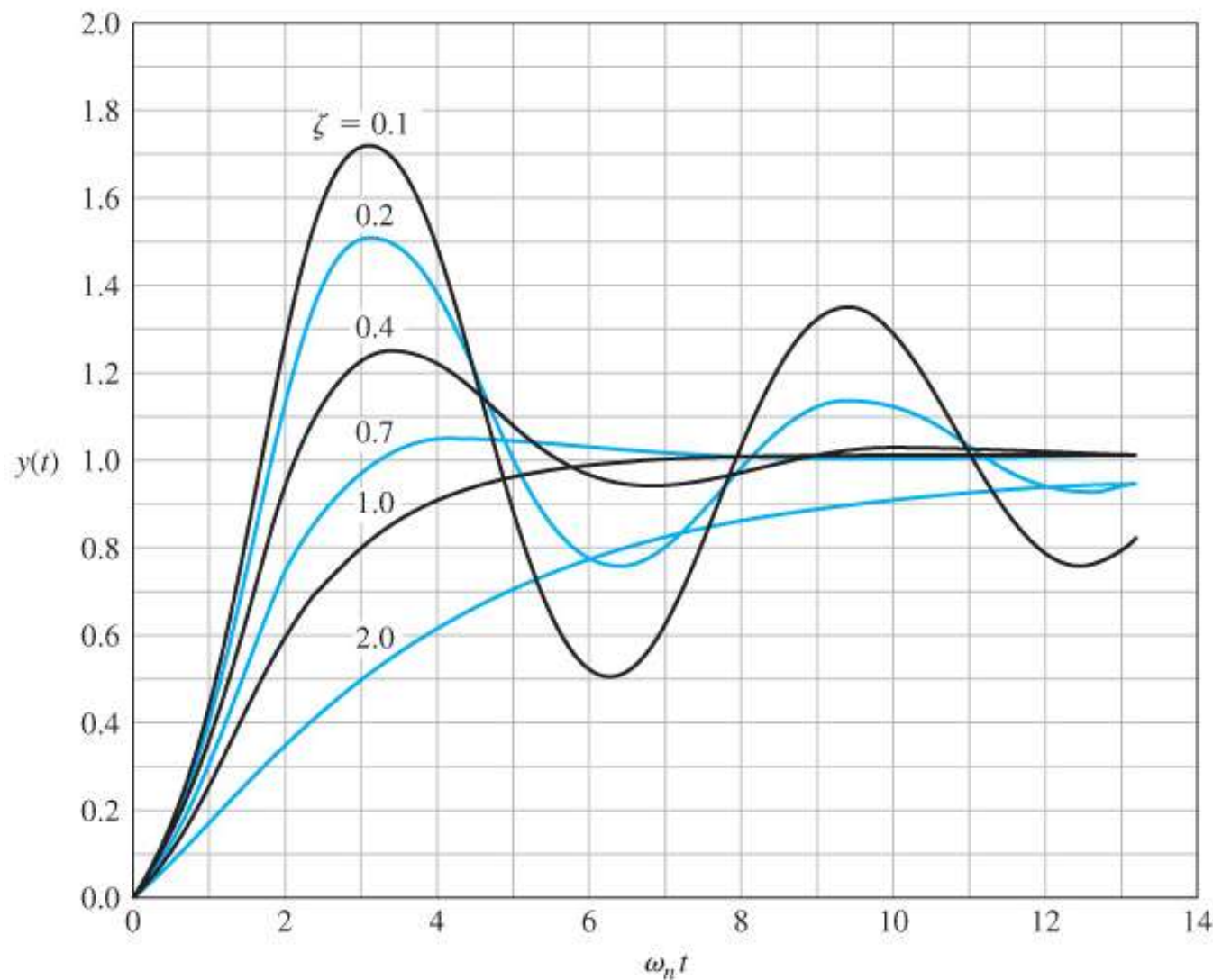
➤  $\zeta \gg 1$  时,  $s_1$  距离原点比  $s_2$  远得多,  $s_1$  对应的指数项衰减非常快, 可以近似为一阶系统:

$$\begin{aligned} T(s) &\approx \frac{1}{\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{\omega_n^2}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ &= \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ &= -\frac{s_2}{s - s_2} \end{aligned}$$

$$y(t) \approx 1 - e^{s_2 t} = 1 - e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 不同阻尼比的二阶系统单位阶跃响应：



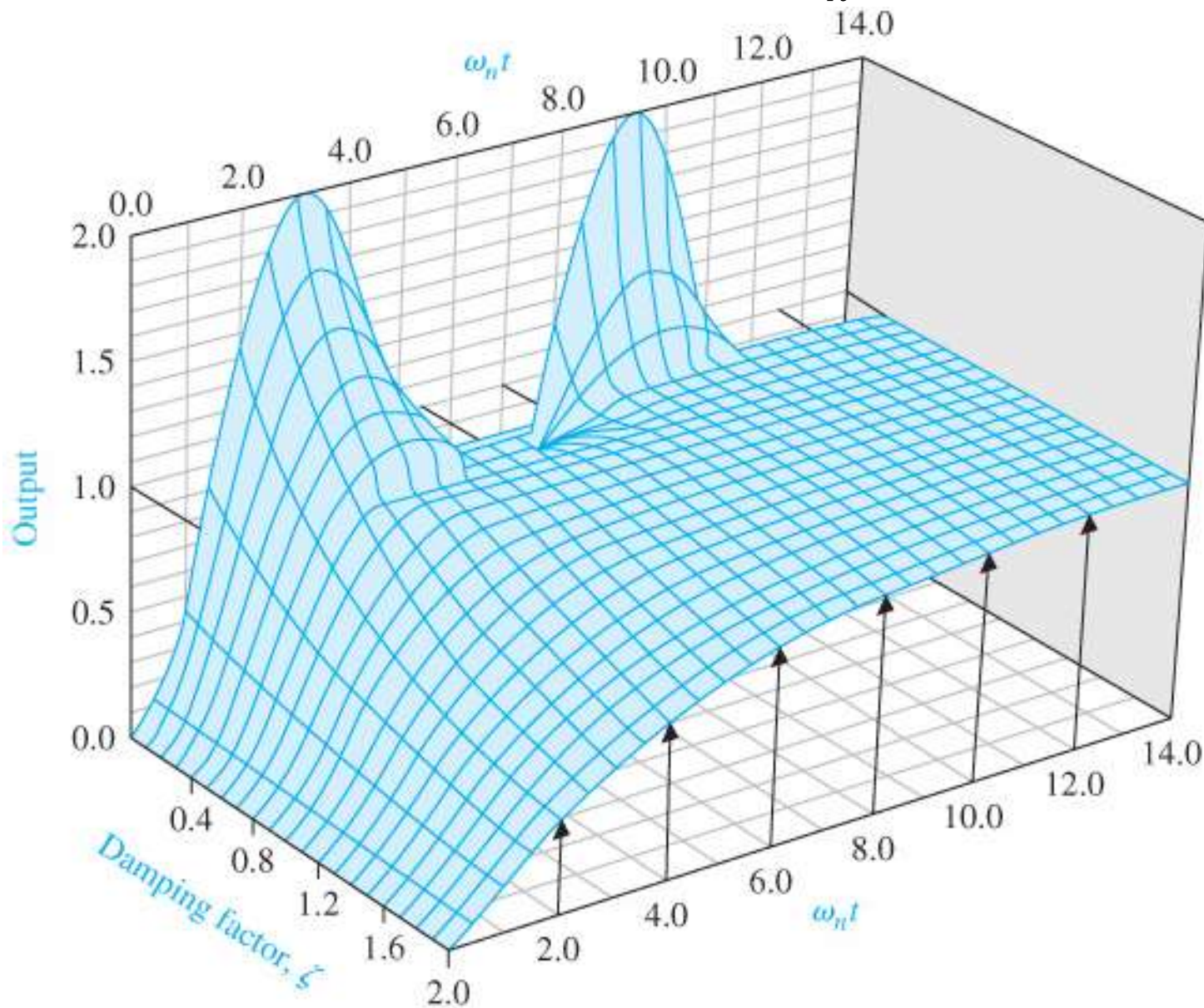
阻尼比越低，闭环极点越接近虚轴，瞬态响应振荡越剧烈

## 5.3 二阶系统性能

- 过阻尼系统缓慢响应输入信号，没有振荡
- 在无振荡响应中，临界阻尼系统响应速度最快
- $0.5 < \zeta < 0.8$  的欠阻尼系统，比临界阻尼系统、过阻尼系统更快的达到稳态值

## 5.3 二阶系统性能

➤ 二阶系统瞬态阶跃响应与 $\zeta$ 、 $\omega_n t$ 的关系：



## 5.3 二阶系统性能

➤ 二阶系统单位冲激响应：

$$R(s)=1$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= T(s) \\ &= \frac{Y(s)}{R(s)} \end{aligned}$$

➤ 单位冲激响应是单位阶跃响应的导数

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼系统  $0 \leq \zeta < 1$ , 单位冲激响应:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t)$$

➤ 临界阻尼系统  $\zeta = 1$ , 单位冲激响应:

$$y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

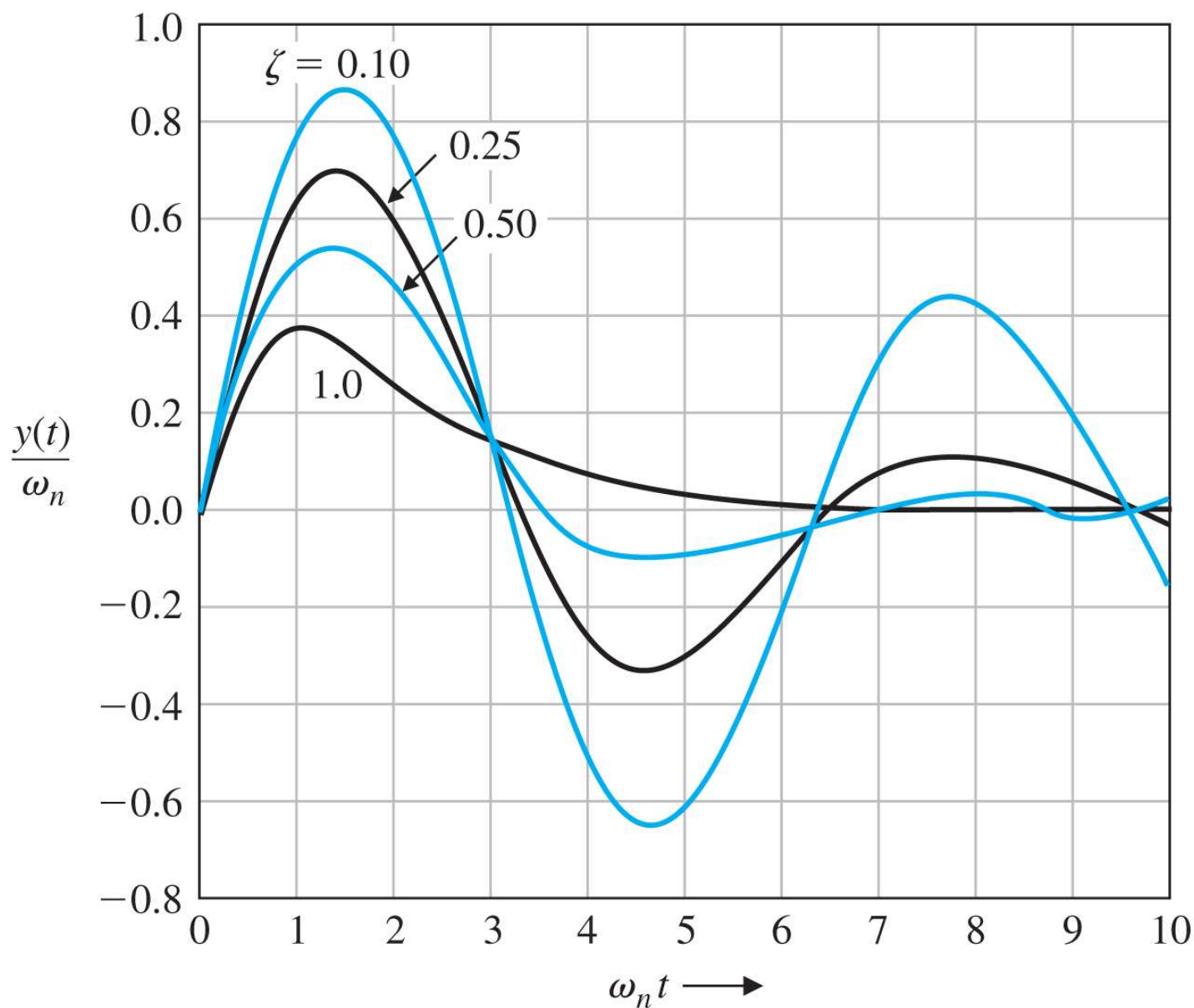
➤ 过阻尼系统  $\zeta > 1$ , 单位冲激响应:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$



## 5.3 二阶系统性能

➤ 不同阻尼比的二阶系统的单位冲激响应：



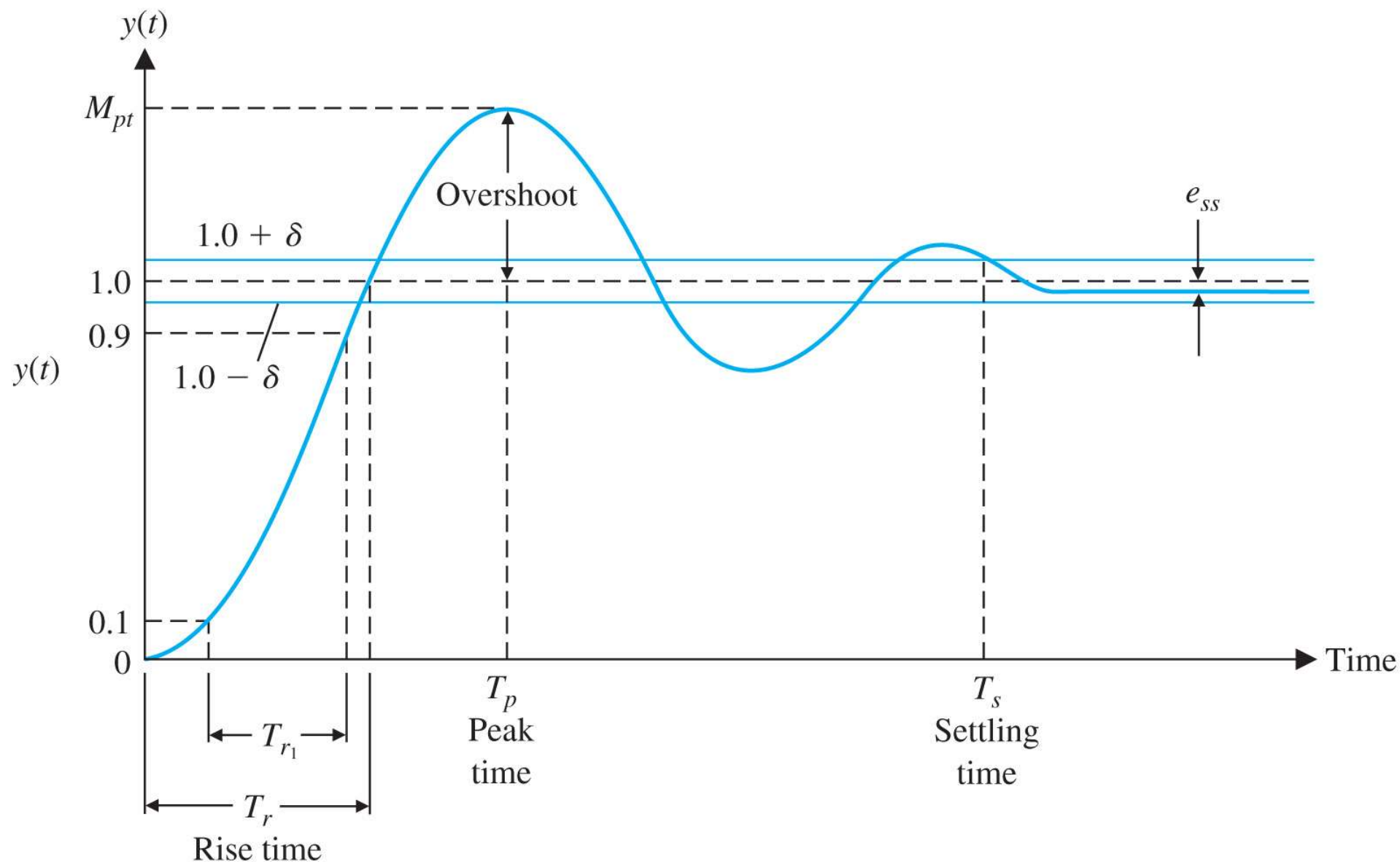


## 5.3 二阶系统性能

- 过阻尼系统、临界阻尼系统的冲激响应总是正值，没有往复振荡
- 欠阻尼系统的冲激响应围绕初始工作点往复振荡（衰减振荡）

## 5.3 二阶系统性能

➤ 通常采用系统的单位阶跃响应定义标准性能指标



## 5.3 二阶系统性能

- 用上升时间、峰值时间衡量系统响应速度
- **0%到100%上升时间rise time  $T_r$** : 输出响应从稳态值0%上升到100%所需要的时间
  - 适用于欠阻尼系统, 不适用于过阻尼系统
- **10%到90%上升时间rise time  $T_{r1}$** : 输出响应从稳态值10%上升到 90%所需要的时间
- **峰值时间peak time  $T_p$** 
  - 欠阻尼系统: 输出响应达到超调的第一个峰值所需要的时间
  - 过阻尼系统: 没有峰值时间的定义

## 5.3 二阶系统性能

- 用超调量、调整时间衡量实际响应与单位阶跃输入的逼近程度，即系统复现期望输出信号的能力
- **超调量overshoot**：系统瞬态响应中超过设定值的量。超过设定值的最大峰值称为最大超调量，对于单位阶跃响应即为超过1的最大峰值

- **百分比超调量percent overshoot**：相对超调量

$$P.O. = \frac{M_{pt} - fv}{fv} \times 100\%$$

- $M_{pt}$ 是响应的最大峰值， $fv$ 是响应的稳态值
- 欠阻尼系统才有超调，过阻尼系统没有超调
- 超调量表达了系统的相对稳定性

## 5.3 二阶系统性能

- **调整时间settling time  $T_s$** : 输出响应到达并且永远维持在稳态值的某个百分比允许误差 $\pm\delta$ 范围内所需要的时间
- 调整时间也称过渡过程时间
- $\pm 2\%$ 允许误差的调整时间
- $\pm 5\%$ 允许误差的调整时间
- **振荡次数**: 阶跃响应在调整时间内(即全部过渡过程中), 输出围绕设定值往复振荡的周期数
- **衰减比**: 系统阶跃响应中超过设定值的第一次峰值与超过设定值的第二次峰值之比

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，调整时间：

➤ 单位阶跃响应：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$$

➤ 单位阶跃响应曲线的包络线：

$$1 \pm \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \leq 1 \pm \Delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \leq \Delta$$

➤ 近似求出2%允许误差的调整时间：

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} \leq 0.02\beta < 0.02$$

$$\zeta\omega_n T_s \approx 4$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 则有：

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4\tau$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

➤ 5%允许误差的调整时间：

$$T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 3\tau$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，0%—100%上升时间：

$$y(T_r) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n T_r} \sin(\omega_n \beta T_r + \theta) = 1, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta$$

$$\frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n T_r} \sin(\omega_n \beta T_r + \theta) = 0$$

$$\sin(\omega_n \beta T_r + \theta) = 0$$

$$\omega_n \beta T_r + \theta = \pi$$

$$T_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \beta} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

➤ 增大 $\omega_n$ ，或减小 $\zeta$ ，可以减小上升时间 $T_r$



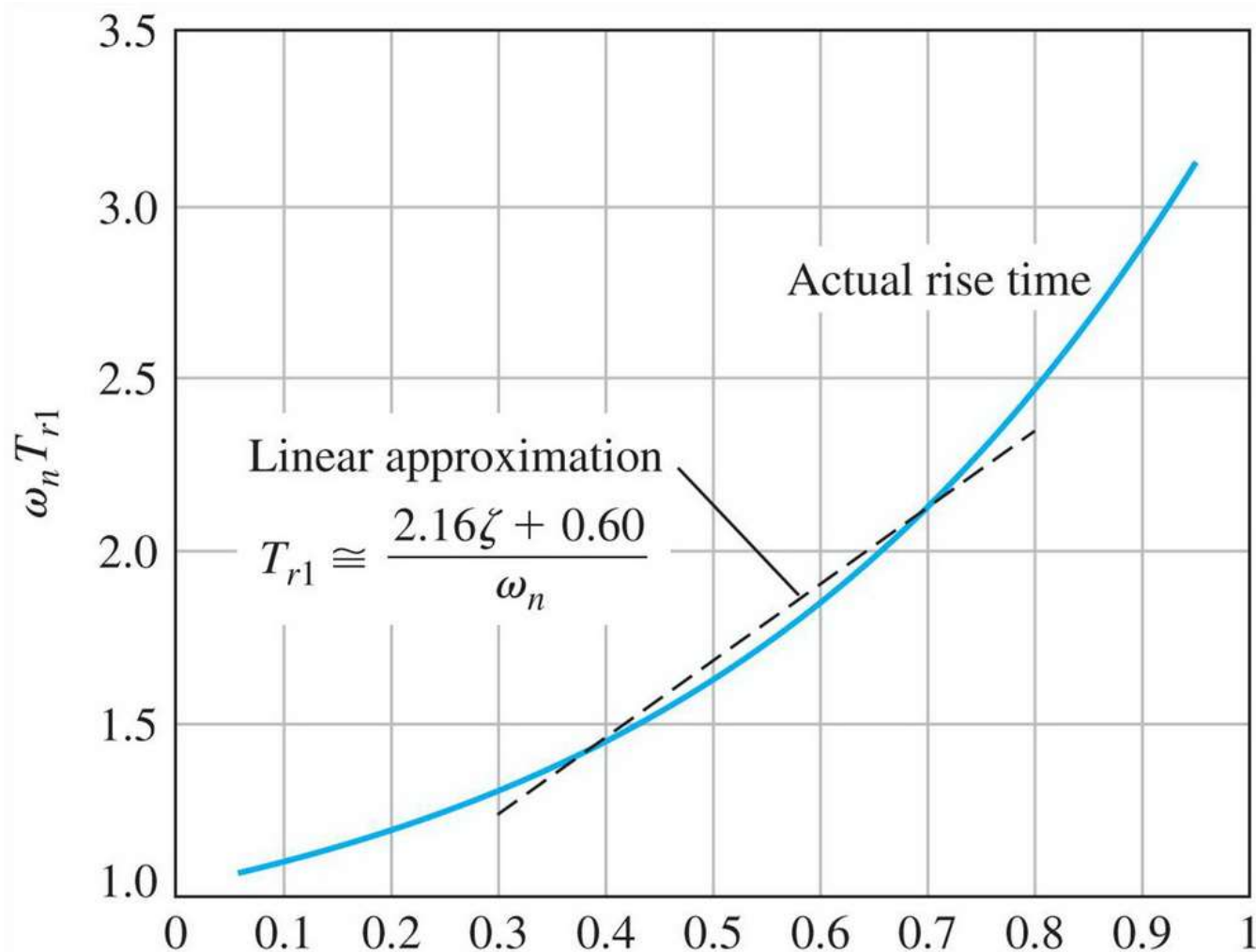
## 5.3 二阶系统性能

➤ 还可以求出 $y(t)$ 每一次穿越设定值的时刻:

$$\omega_n \beta T_i + \theta = i\pi, \quad i=1,2,3,\dots$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，10%—90%上升时间：



$0.3 \leq \zeta \leq 0.8$  时， $T_{r1}$  的线性近似：

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

$0.05 \leq \zeta \leq 0.95$  时， $\zeta$  与归一化上升时间  $\omega_n T_{r1}$  的关系

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，峰值时间：求单位阶跃响应对时间的导数等于零的时刻

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(T_j)}{dt} &= \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n T_j} \sin(\omega_n \beta T_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \omega_n \beta T_j = \omega_d T_j = j\pi, \quad j=1,2,3,\dots$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 到达第一次超调峰值的时间：

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \beta} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

➤ 到达其他峰值的时间：

$$T_j = \frac{j\pi}{\omega_d}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，超调量：

第一次峰值时刻  $T_p = \pi/\omega_d$ ，系统的峰值响应：

$$M_{pt} = 1 - e^{-\zeta\omega_n T_p} \cos \omega_d T_p - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_p} \sin \omega_d T_p$$

$$= 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

➤ 最大超调量（注意：超调量与  $\omega_n$  无关）：

$$\sigma = M_{pt} - 1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - 1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 百分比超调量:

$$P.O. = \frac{M_{pt} - f_v}{f_v} \times 100\%$$

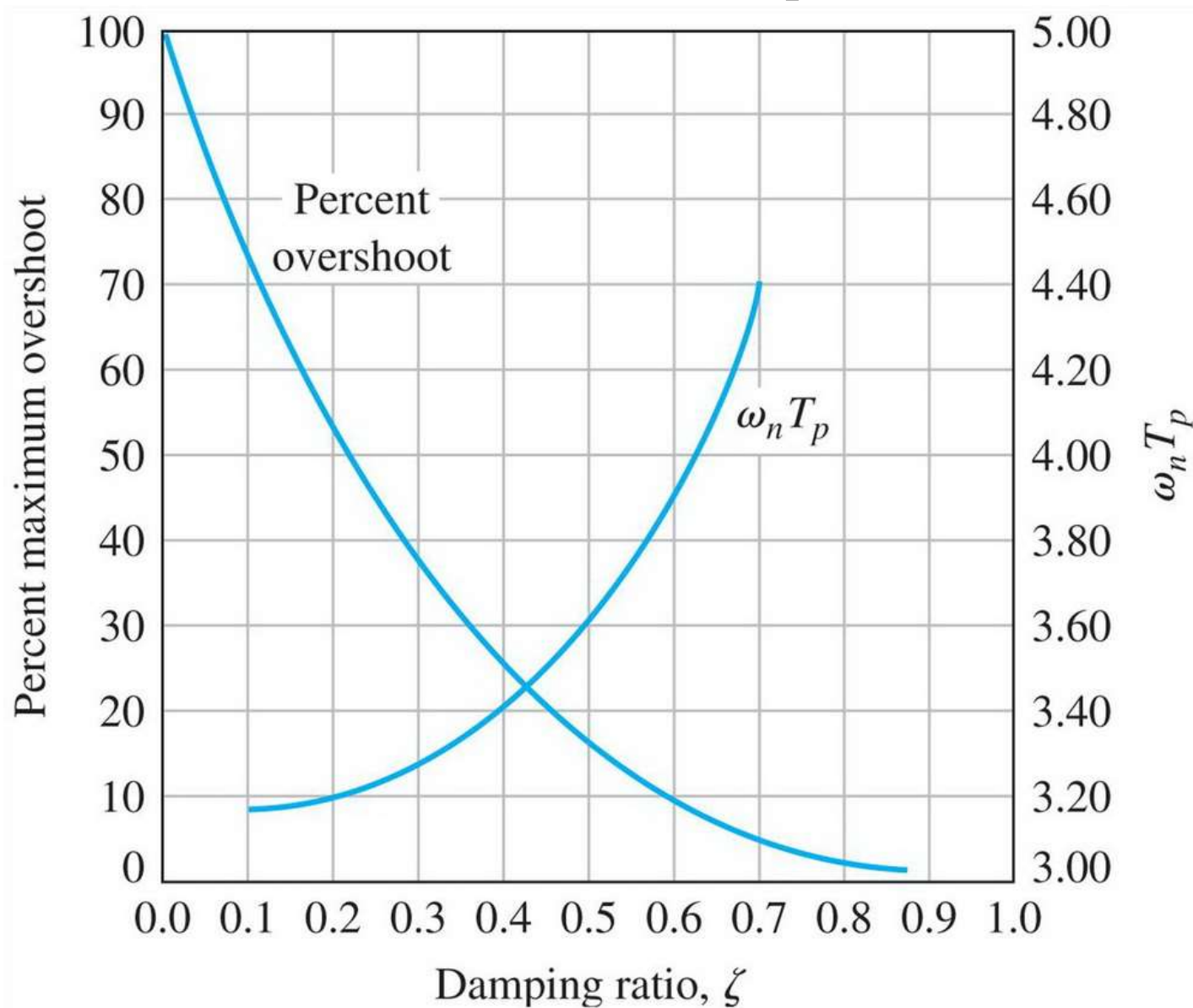
$$= 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (\%)$$

➤ 由其它峰值时间, 可以求出其它的峰值响应、超调量:

$$T_j = \frac{j\pi}{\omega_n \beta}$$

## 5.3 二阶系统性能

➤ 阻尼比与归一化峰值时间 $\omega_n T_p$ 、超调量的关系



## 5.3 二阶系统性能

➤ 欠阻尼二阶系统，衰减比：阶跃响应第一次峰值：

$$M_{pt} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

➤ 阶跃响应的第三次峰值时间和第三次峰值响应：

$$T_3 = \frac{3\pi}{\omega_d}$$

$$M_3 = 1 - e^{-\zeta\omega_n T_3} \cos \omega_d T_3 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_3} \sin \omega_d T_3$$

$$= 1 + e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



## 5.3 二阶系统性能

➤ 衰减比:

$$\eta = (M_{pt} - f\nu) : (M_3 - f\nu)$$

$$= e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} : 1$$

- 运动控制中，比较理想的是**4:1**衰减振荡，系统闭环响应速度比较快，闭环稳定性、相对稳定性比较好，稳态跟踪精度、动态跟踪精度比较高
- 过程控制中，有时选择**10:1**衰减振荡，最好是没有振荡。因为绝大多数过程控制系统是多变量耦合系统，并且非线性、时变特性严重

## 5.3 二阶系统性能

➤ 超调量与阻尼比:

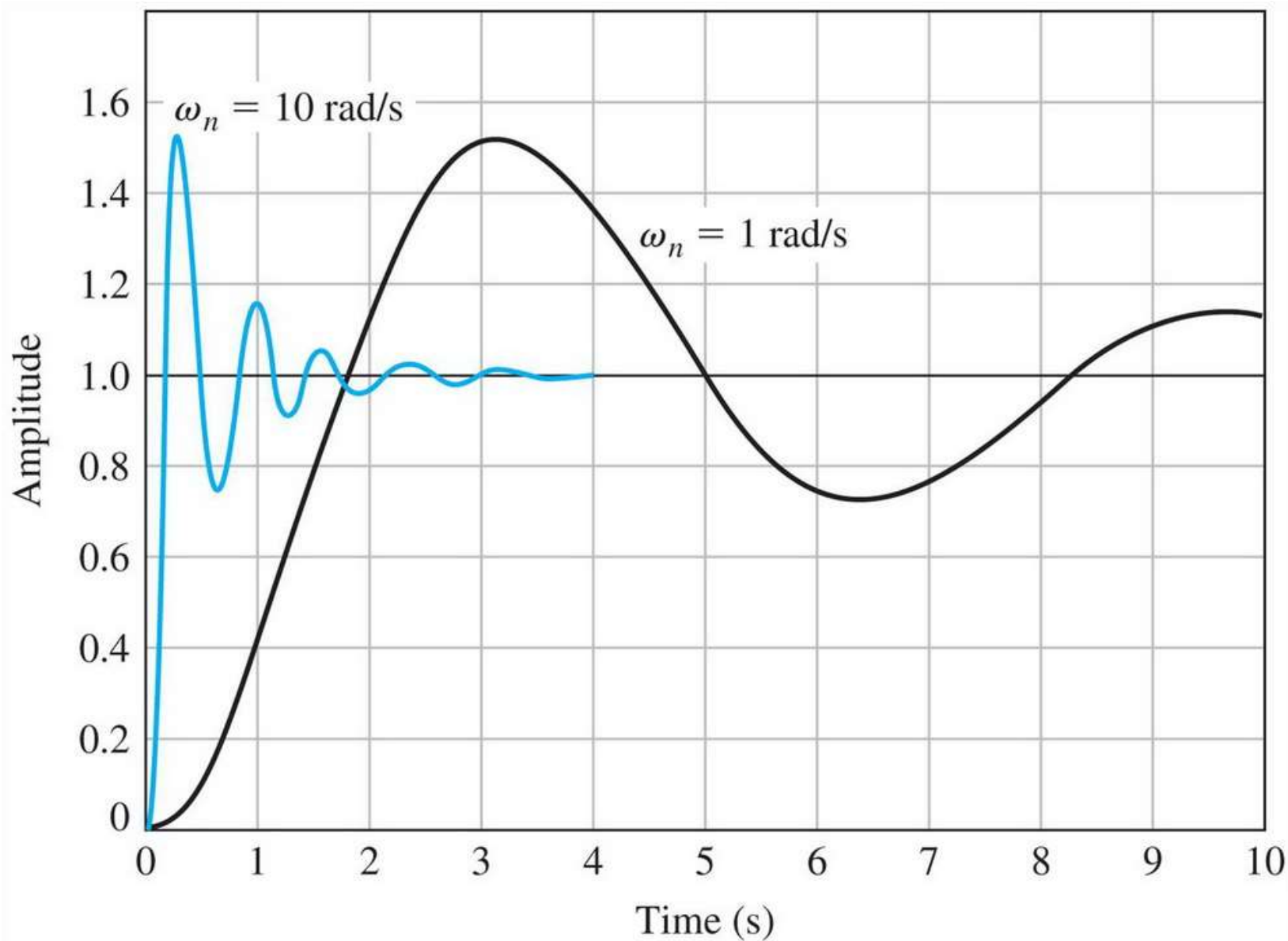
阻尼比	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
超调量	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

➤ 响应速度、允许超调量之间，需要折衷

- 阻尼比在0.4~0.8之间可以获得比较好的瞬态响应
- 阻尼比过小会造成瞬态响应严重超调
- 阻尼比过大会使瞬态响应速度缓慢
- 阻尼比为0.707时，称为二阶最佳系统

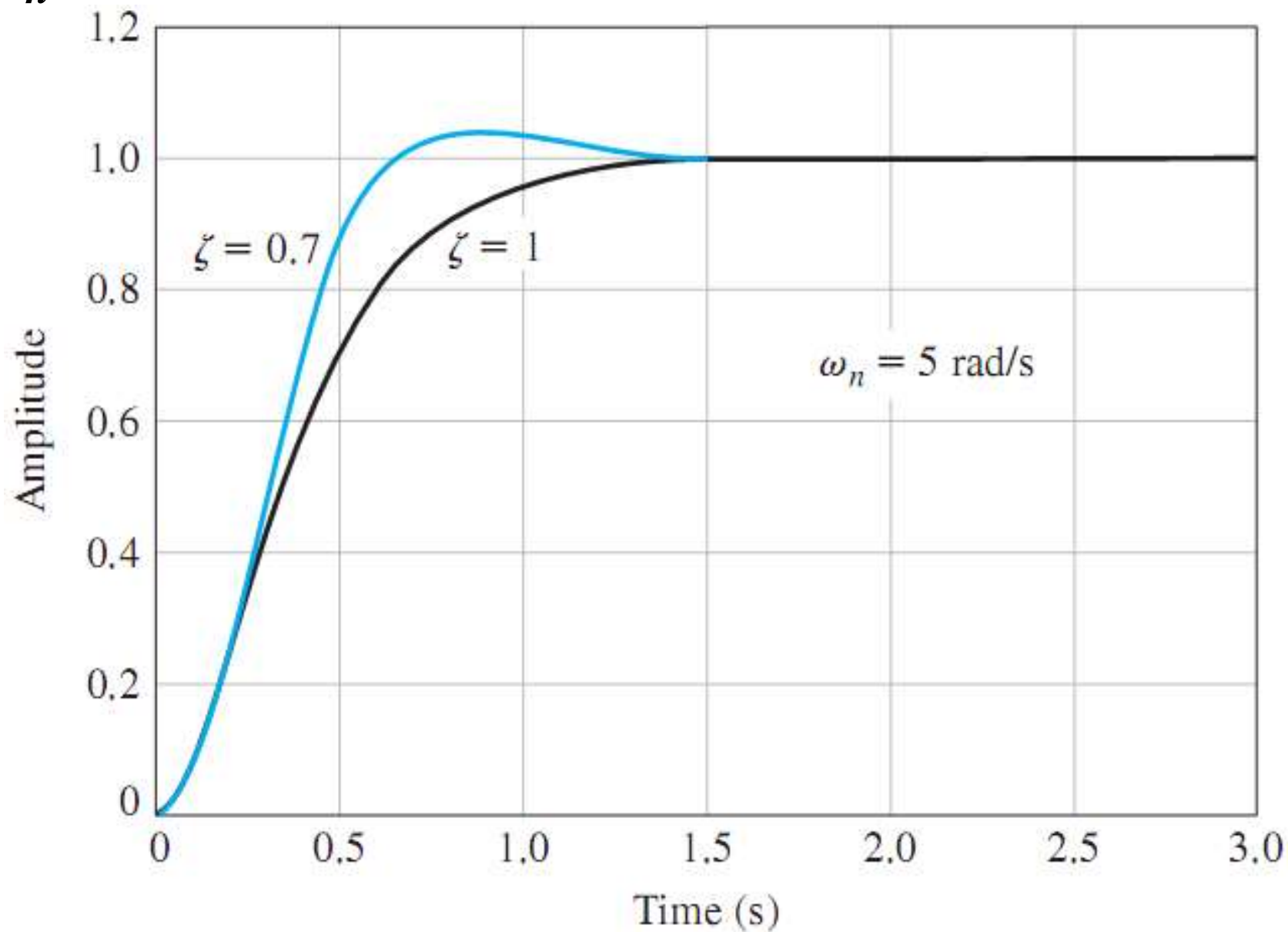
## 5.3 二阶系统性能

➤ 阻尼比 $\zeta$ 确定后， $\omega_n$ 越大，响应越快



## 5.3 二阶系统性能

➤  $\omega_n$  确定后,  $\zeta$  越小, 响应越快, 超调量增大

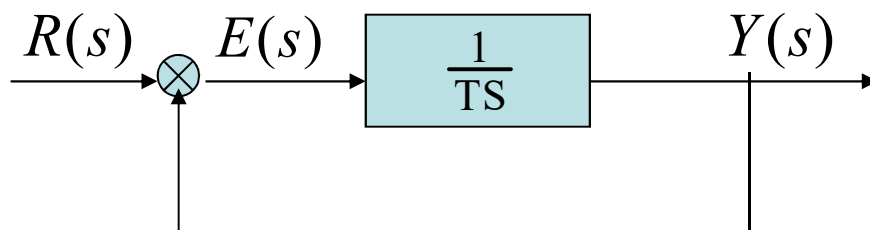


## 5.3' 一阶系统性能

- 由一阶线性定常微分方程描述的系统称为一阶系统，其微分方程模型为：

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

- $T$ 称为时间常数。典型的闭环一阶系统结构图：



- 闭环传递函数：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 单位冲激输入信号:

$$r(t)=\delta(t), \quad R(s)=1$$

➤ 一阶系统单位冲激响应:

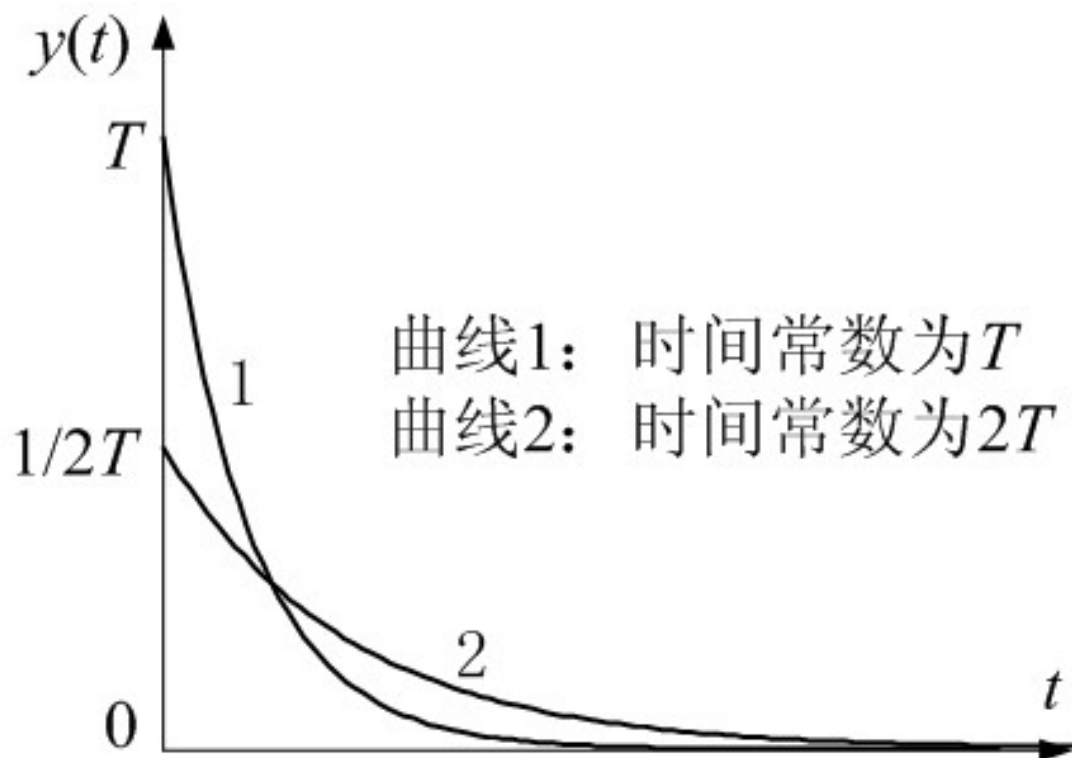
$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

➤ 拉氏反变换:

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统单位冲激响应曲线：



- 单调下降的一阶指数曲线，时间常数  $T$  越大，响应曲线下下降越缓慢，表明系统受到冲激输入信号后，恢复到初始状态的时间越长。
- 一阶系统单位冲激响应的稳态值为零。

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 单位阶跃(等位移)输入信号:

$$r(t)=1(t)$$

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

➤ 一阶系统单位阶跃响应:

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}R(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$$

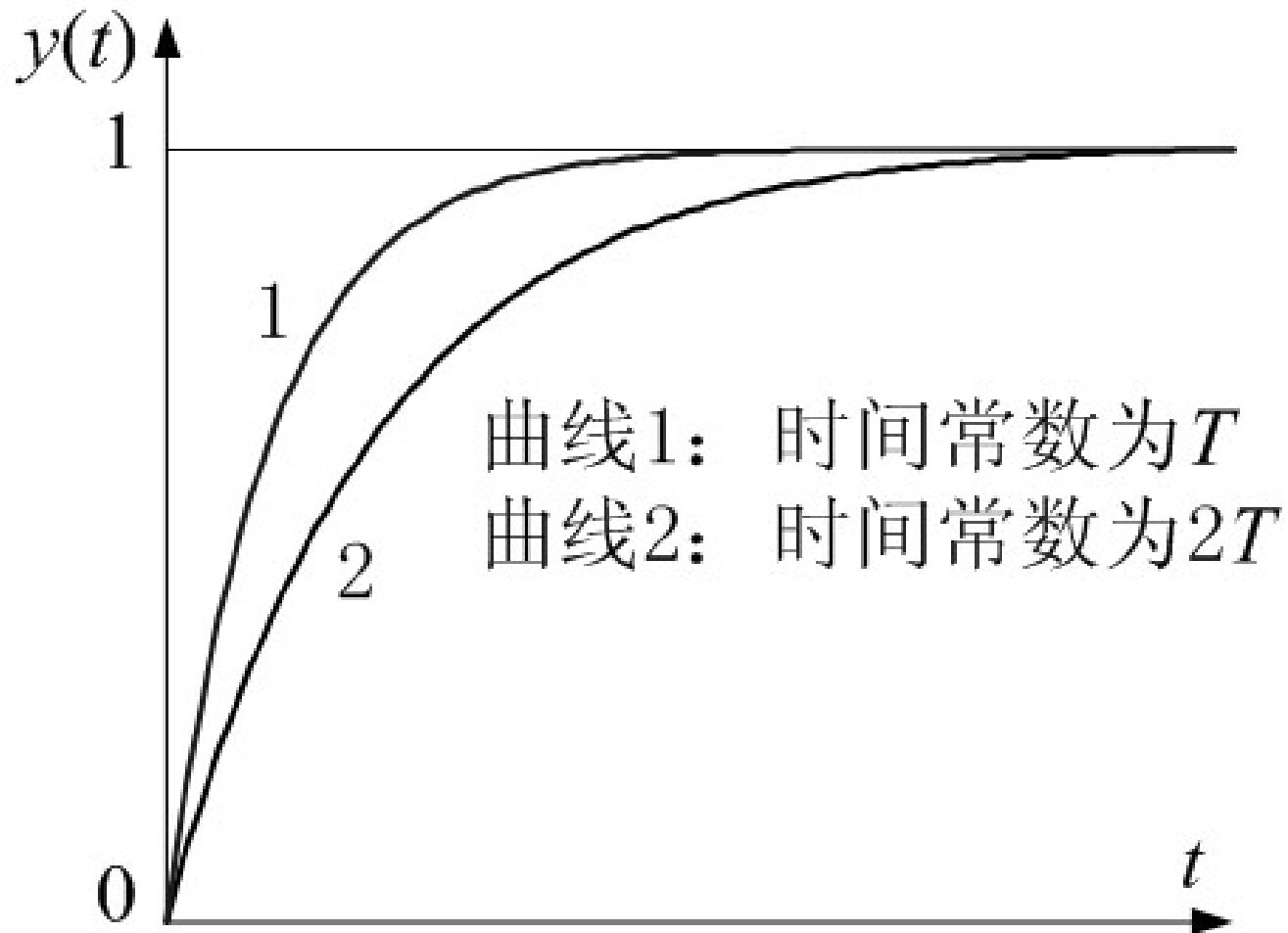
➤ 拉氏反变换:

$$y(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$



## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统单位阶跃响应曲线：



➤ 初始值为零，单调上升的一阶指数曲线

➤ 稳态值为1

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统单位阶跃响应特点：

■ 单位阶跃响应是单调上升的指数曲线，为非周期响应

■ 时间常数 $T$ 反映系统惯性：

◆  $T$ 越大，系统惯性越大，响应速度越慢，系统跟踪单位阶跃信号慢，单位阶跃响应曲线上升平缓

◆ 反之， $T$ 越小，系统惯性越小，响应速度快，系统跟踪单位阶跃信号快，单位阶跃响应曲线上升陡峭

## 5.3' 一阶系统性能

■ 单位阶跃响应曲线的斜率：

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

■  $t=0$ 处的斜率为 $1/T$ ，随着时间的增加斜率变小。

■ 曲线上各点值、斜率与时间常数 $T$ 的关系：

时间 $t$	0	$T$	$2T$	$3T$	...	$\infty$
输出量	0	0.632	0.865	0.950	...	1.0
斜率	$1/T$	$0.368/T$	$0.135/T$	$0.050/T$	...	0.0

■ 可用实验方法测定系统是否属于一阶系统，并测定一阶系统的时间常数

## 5.3' 一阶系统性能

■ 响应的输出量和输入量之间的位置误差随时间减小，最终趋于零：

◆ 动态位置误差：

$$e(t) = 1(t) - y(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

◆ 稳态位置误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 单位斜坡(等速度)输入信号:

$$r(t) = t, \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

➤ 一阶系统单位斜坡响应:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ts + 1} R(s) \\ &= \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 拉氏反变换，得到一阶系统单位斜坡响应：

$$y(t) = t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0$$

➤ 一阶系统单位斜坡响应特点：

■ 动态位置跟踪误差：

$$e(t) = r(t) - y(t) = T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

■ 稳态位置跟踪误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = T$$

## 5.3' 一阶系统性能

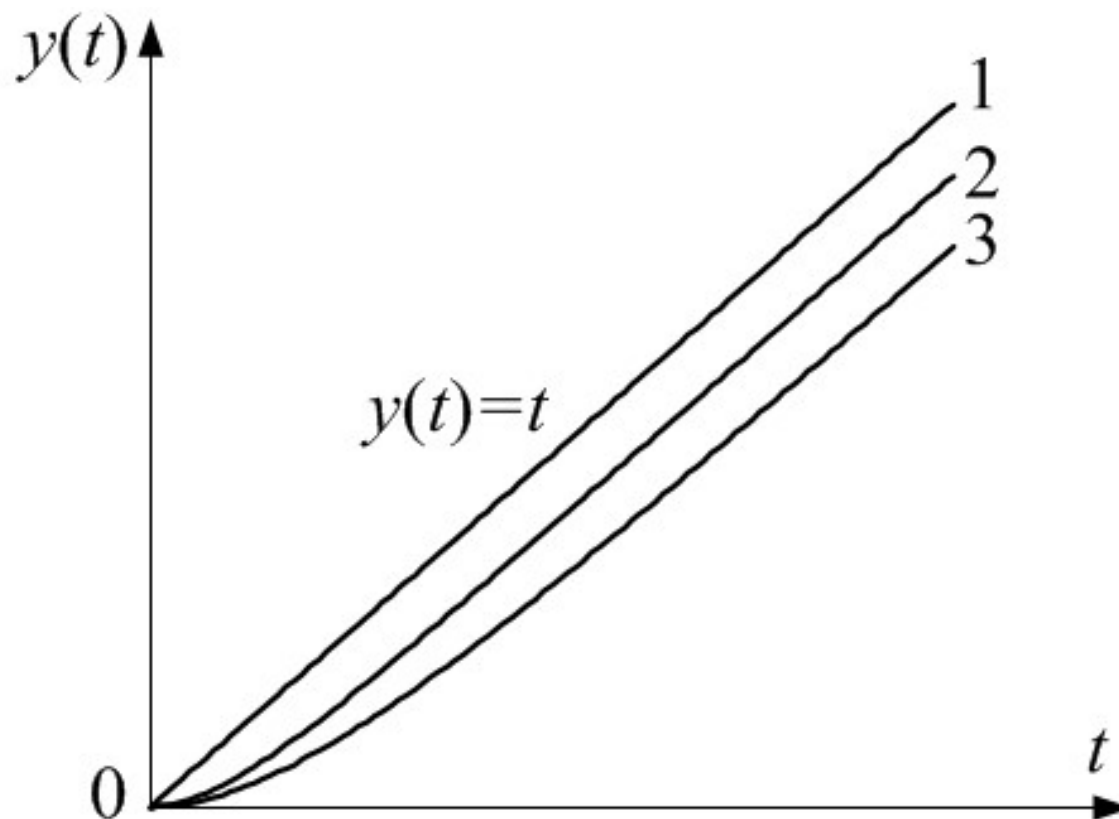
- 单位斜坡响应曲线的斜率为：

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

- 在 $t=0$ 时斜率为零，随着时间增加斜率变大，最大斜率为1
- 一阶系统跟踪单位斜坡信号时，总是有位置误差，并且位置误差随时间而增大，最后趋于常值 $T$ ， $T$ 越大，位置误差越大，跟踪精度越低

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统单位斜坡响应曲线：



➤ 曲线1表示单位斜坡输入信号  $r(t)=t$

➤ 曲线2、曲线3分别表示时间常数等于  $T$ 、 $2T$  时的单位斜坡响应信号



## 5.3' 一阶系统性能

➤ 单位抛物线(等加速度)输入信号:

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

➤ 一阶系统单位抛物线响应:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ts + 1} R(s) \\ &= \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 拉氏反变换，得到一阶系统单位抛物线响应：

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad t \geq 0$$

➤ 一阶系统单位抛物线响应特点：

■ 动态位置跟踪误差：

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$= Tt - T^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

## 5.3' 一阶系统性能

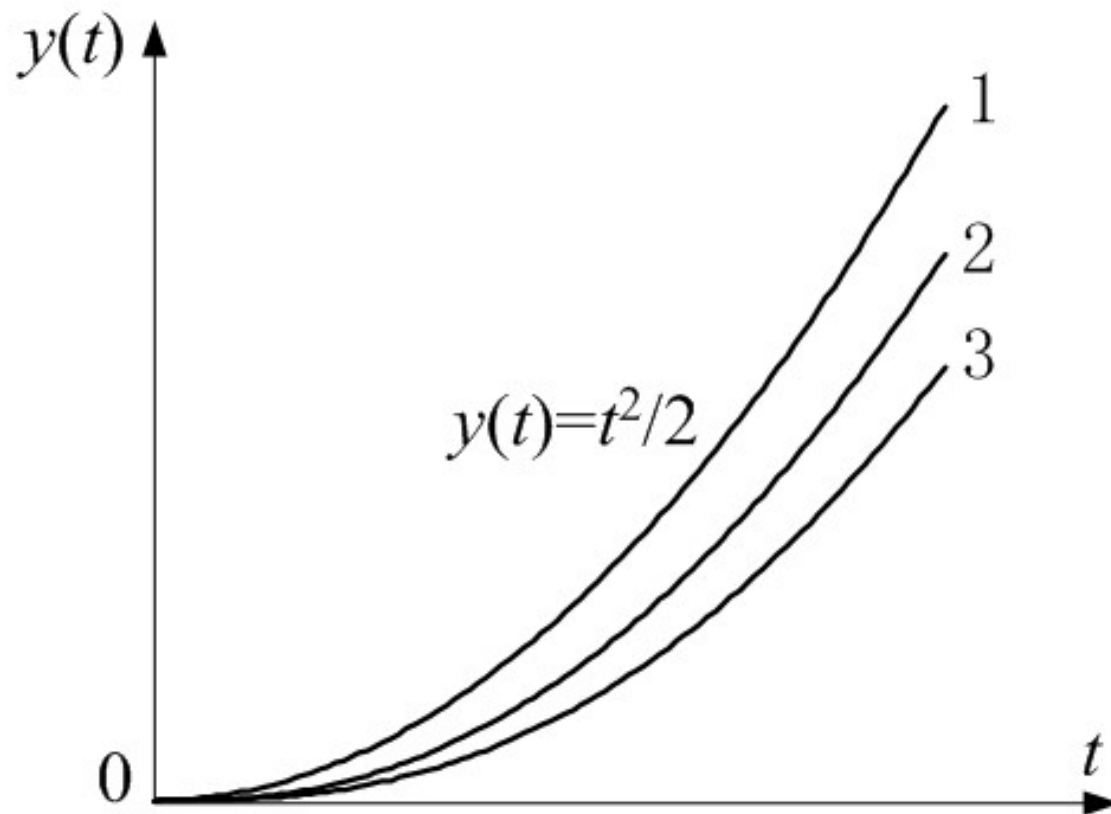
■ 稳态位置跟踪误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ Tt - T^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] = \infty$$

- 一阶系统在跟踪单位抛物线信号时，总是存在位置误差，并且位置误差的大小随时间而增大，最终趋于无穷大
- 一阶系统不能跟踪单位加速度信号

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统单位抛物线响应曲线：



➤ 曲线1表示单位抛物线输入信号  $r(t)=t^2/2$

➤ 曲线2、曲线3分别表示时间常数等于  $T$ 、 $2T$  时的单位抛物线响应信号

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 一阶系统对各种输入信号的响应：

输入信号	输出响应
$\delta(t)$	$e^{-t/T}/T, \quad t \geq 0$
$1(t)$	$1 - e^{-t/T}, \quad t \geq 0$
$t$	$t - T + Te^{-t/T}, \quad t \geq 0$
$t^2/2$	$t^2/2 - Tt + T^2(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 输入信号关系：

$$\begin{aligned} r_{\text{脉冲}}(t) &= \frac{d}{dt} r_{\text{阶跃}}(t) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} r_{\text{斜坡}}(t) \\ &= \frac{d^3}{dt^3} r_{\text{加速度}}(t) \end{aligned}$$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 输出响应关系：

$$y_{\text{脉冲}}(t) = \frac{d}{dt} y_{\text{阶跃}}(t)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} y_{\text{斜坡}}(t)$$

$$= \frac{d^3}{dt^3} y_{\text{加速度}}(t)$$

## 5.3' 一阶系统性能

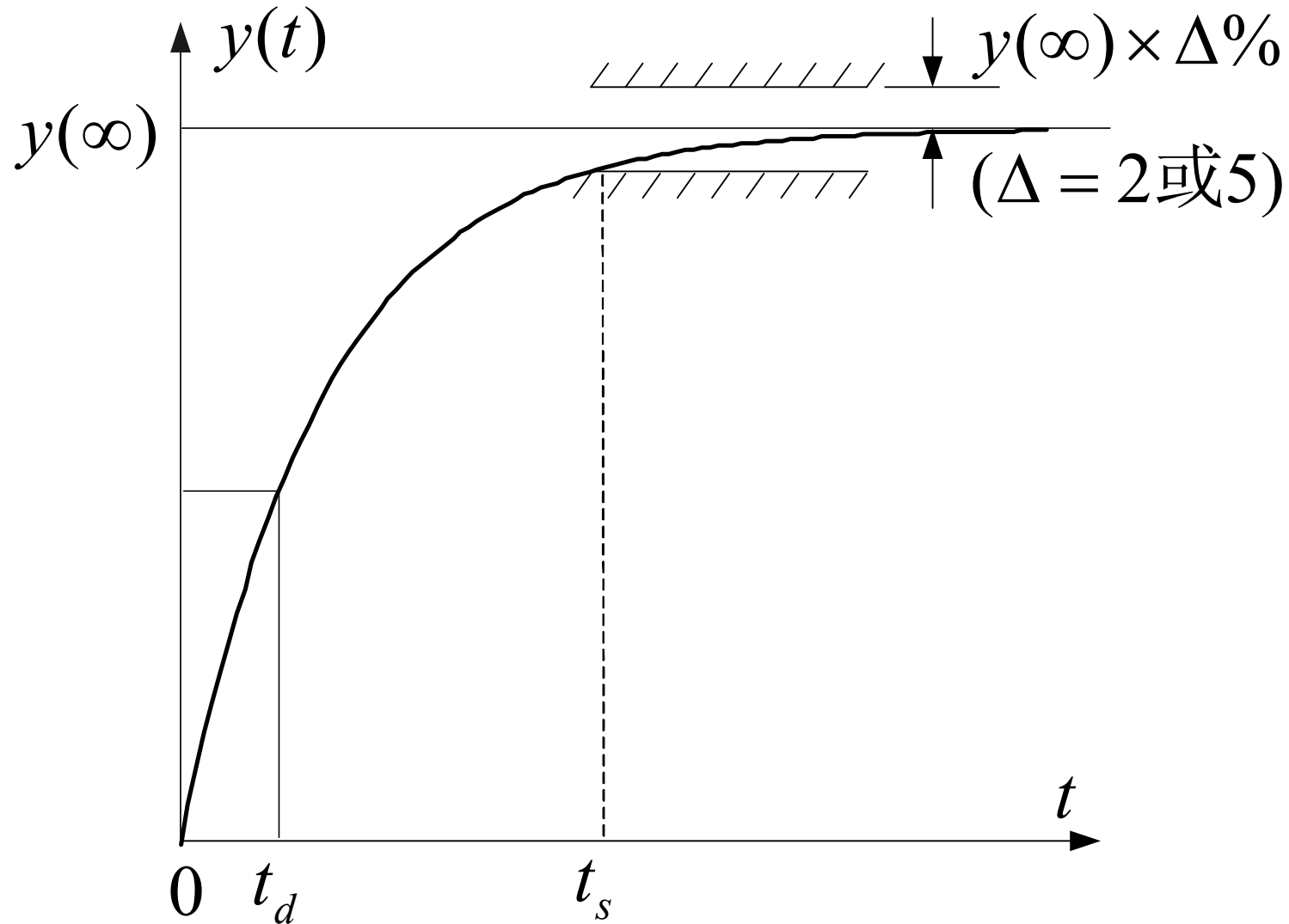
### ➤ 结论:

- 一阶系统对输入信号导数的响应，等于一阶系统对该输入信号响应的导数
- 这个性质是线性定常系统的一个重要特性，适用于任何阶的线性定常系统，而线性时变系统和非线性系统则不具有这个特性



## 5.3' 一阶系统性能

➤ 瞬态性能指标：延迟时间、上升时间、调整时间、峰值时间、超调量



## 5.3' 一阶系统性能

➤ **延迟时间 $t_d$** : 输出响应第一次达到稳态值的**50%**所需的时间

$$1 - e^{-\frac{t_d}{T}} = 50\% \quad \Rightarrow \quad t_d \approx 0.693T$$

➤ **上升时间 $t_r$** : 输出响应达到**10%**稳态值的时间为 $t_1$ , 达到**90%**稳态值的时间为 $t_2$ , 则有:

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} = 10\% \\ 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} = 90\% \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 \approx 0.10T \\ t_2 \approx 2.30T \end{cases}$$

➤ 上升时间为:  $t_r = t_2 - t_1 \approx 2.20T$

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 调整时间 $t_s$ ：假设允许误差带宽度为 $\Delta$

$$1 - \Delta\% = 1 - e^{-\frac{t_s}{T}}$$

$$t_s = -T \ln \Delta\% \approx \begin{cases} 4T, & \Delta = 2\% \\ 3T, & \Delta = 5\% \end{cases}$$

➤ 调整时间为系统主导时间常数的4倍(或3倍)

➤ 峰值时间 $t_p$ 、超调量 $P.O.$ ：一阶系统的单位阶跃响应曲线为单调上升的指数曲线，没有往复振荡，不存在峰值时间、超调量

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 减小一阶系统时间常数的措施：

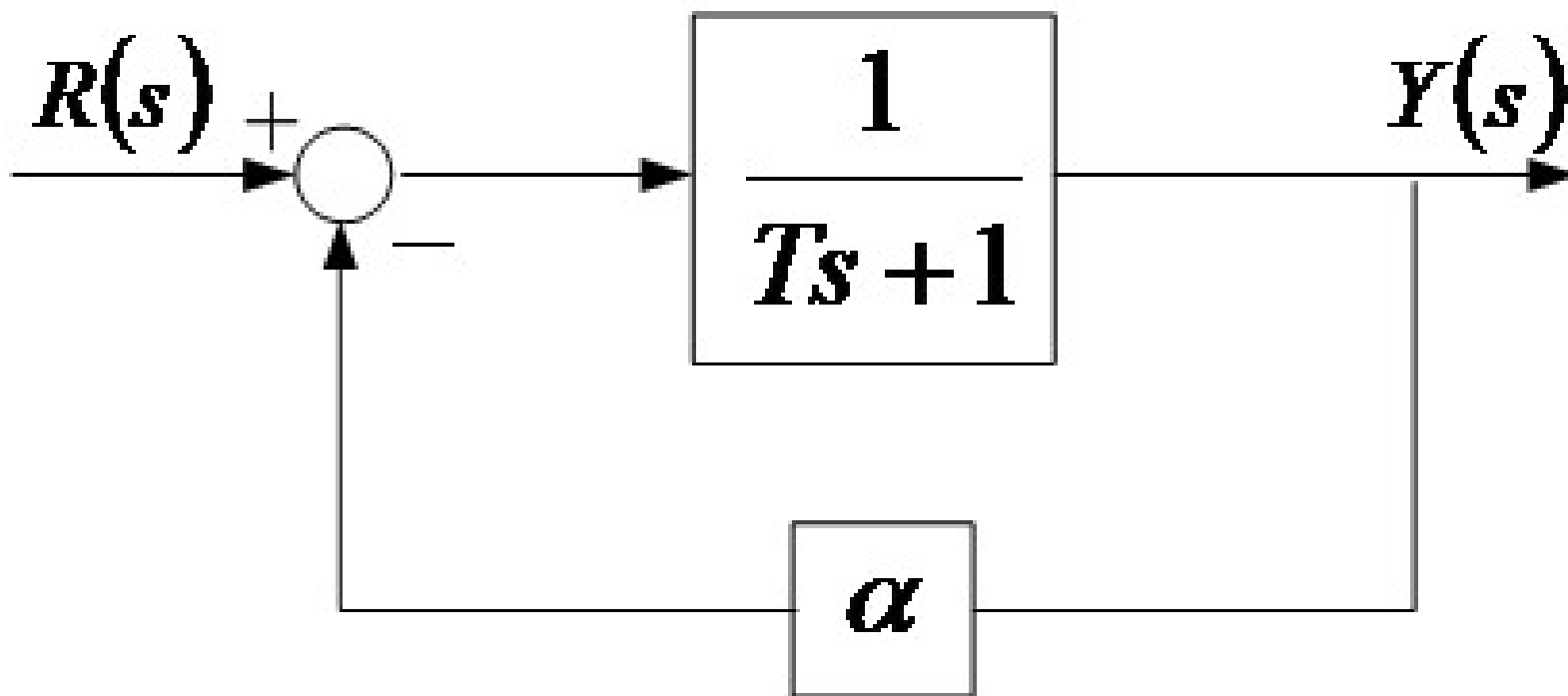
- 一阶系统的时间常数 $T$ 对系统性能起着非常重要的作用，不仅影响一阶系统的响应速度，还影响系统跟踪输入信号的精度
- 对不同的输入信号，时间常数越大，系统的响应速度越慢，跟踪精度越低
- 对大多数实际工程系统，通常希望有较小的时间常数

## 5.3' 一阶系统性能

■ 方法一：通过负反馈减小时间常数

原系统为：

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



## 5.3' 一阶系统性能

■ 加入负反馈后闭环传递函数:

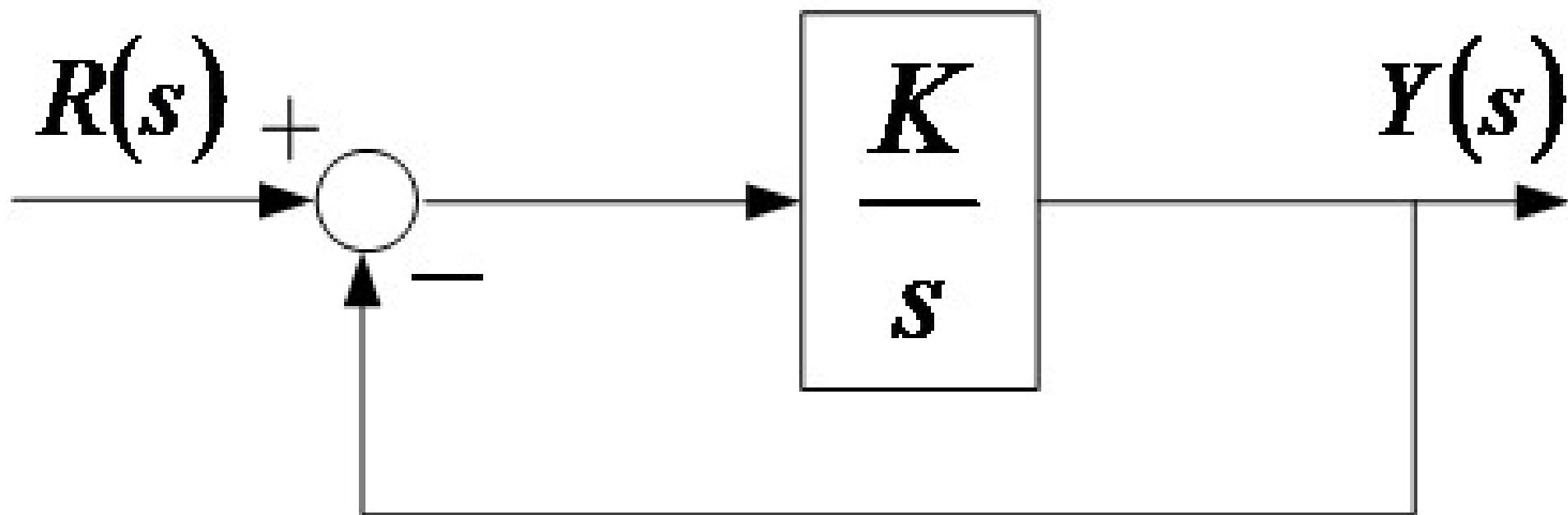
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{1}{Ts+1}}{1+\alpha\frac{1}{Ts+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\alpha}}{\frac{T}{1+\alpha}s+1} \\ &= \frac{K'}{T's+1} \end{aligned}$$

## 5.3' 一阶系统性能

■ 方法二：在前向通道上串联一个比例环节

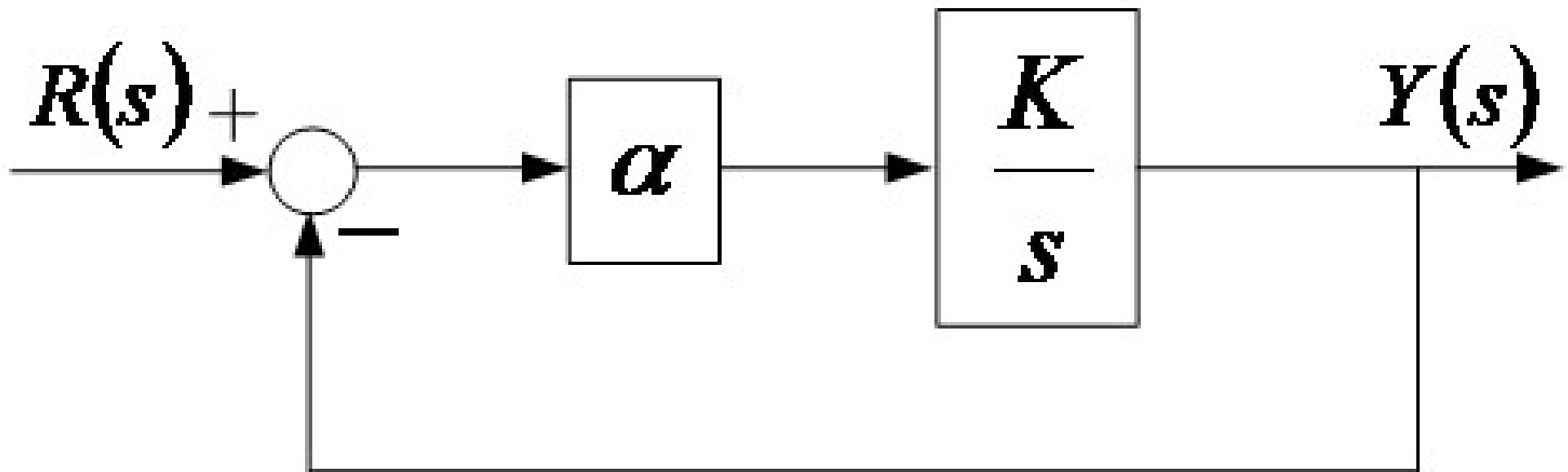
原闭环系统为：

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{\frac{1}{K}s + 1}$$



## 5.3' 一阶系统性能

■ 改进后系统为：



■ 改进后系统闭环传递函数为：

$$G(s) = \frac{\alpha \frac{K}{s}}{1 + \alpha \frac{K}{s}} = \frac{\alpha K}{s + \alpha K}$$



### 5.3' 一阶系统性能

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha K} s + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{T}{\alpha} s + 1}$$

$$= \frac{1}{T' s + 1}$$

$$T' = \frac{T}{\alpha} = \frac{1}{\alpha K}$$

## 5.3' 一阶系统性能

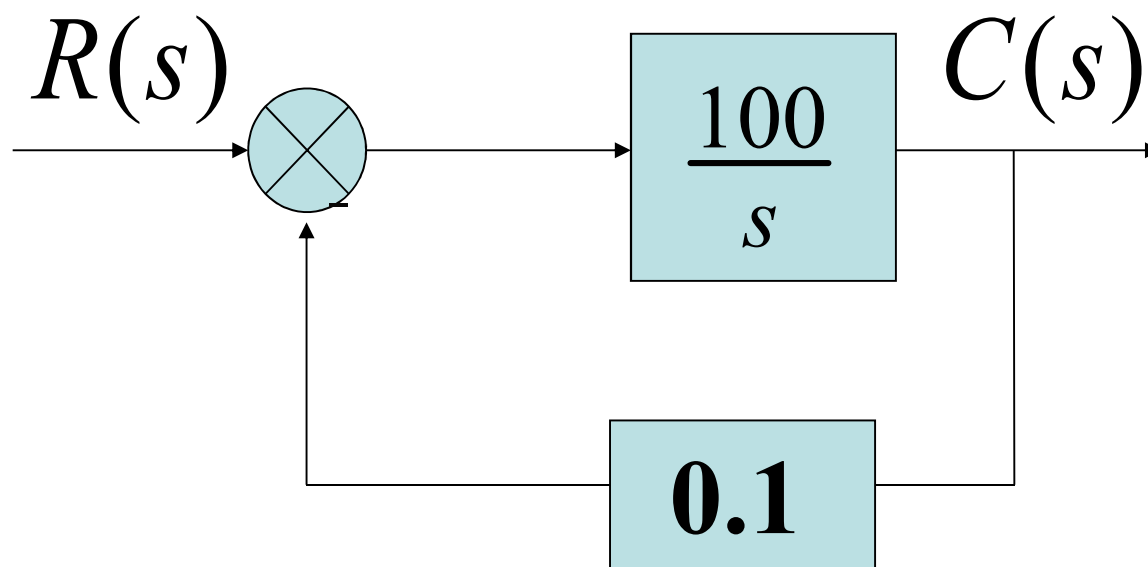
➤ 例：已知一阶系统方块图

① 试求单位阶跃响应的调整时间  $t_s$  ( $\Delta=0.05$ )

② 若要求  $t_s \leq 0.1$  秒，求反馈系数

➤ 闭环传递函数：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{100}{1 + \frac{100}{s} \times 0.1} \\ &= \frac{100}{s + 10} \\ &= \frac{10}{0.1s + 1} \end{aligned}$$



## 5.3' 一阶系统性能

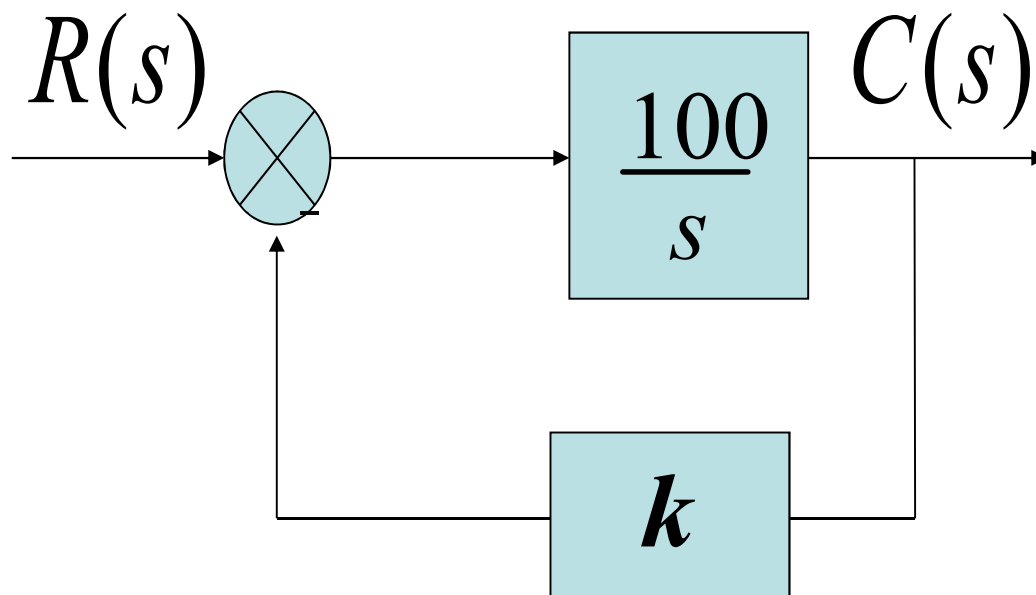
➤ 由闭环传递函数知时间常数  $T=0.1$  秒

① 所以调整时间为：

$$t_s = 3T = 0.3 \text{ 秒 } (\Delta = 0.05)$$

② 若要求  $t_s \leq 0.1$  秒，设此时的反馈系数为  $k$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s}{1 + k \frac{100}{s}} \\ &= \frac{1}{\frac{0.01}{k} s + 1} \end{aligned}$$



## 5.3' 一阶系统性能

➤ 因而有：

$$T = \frac{0.01}{k}$$

➤ 所以：

$$t_s = 3T = \frac{0.03}{k} \leq 0.1$$

➤ 如果选择  $k \geq 0.3$ ，则有  $t_s \leq 0.1$  秒

➤ 对于一阶系统，施加深度负反馈可减小调整时间

## 5.3' 一阶系统性能

➤ 反馈加深对系统的响应还有什么影响？

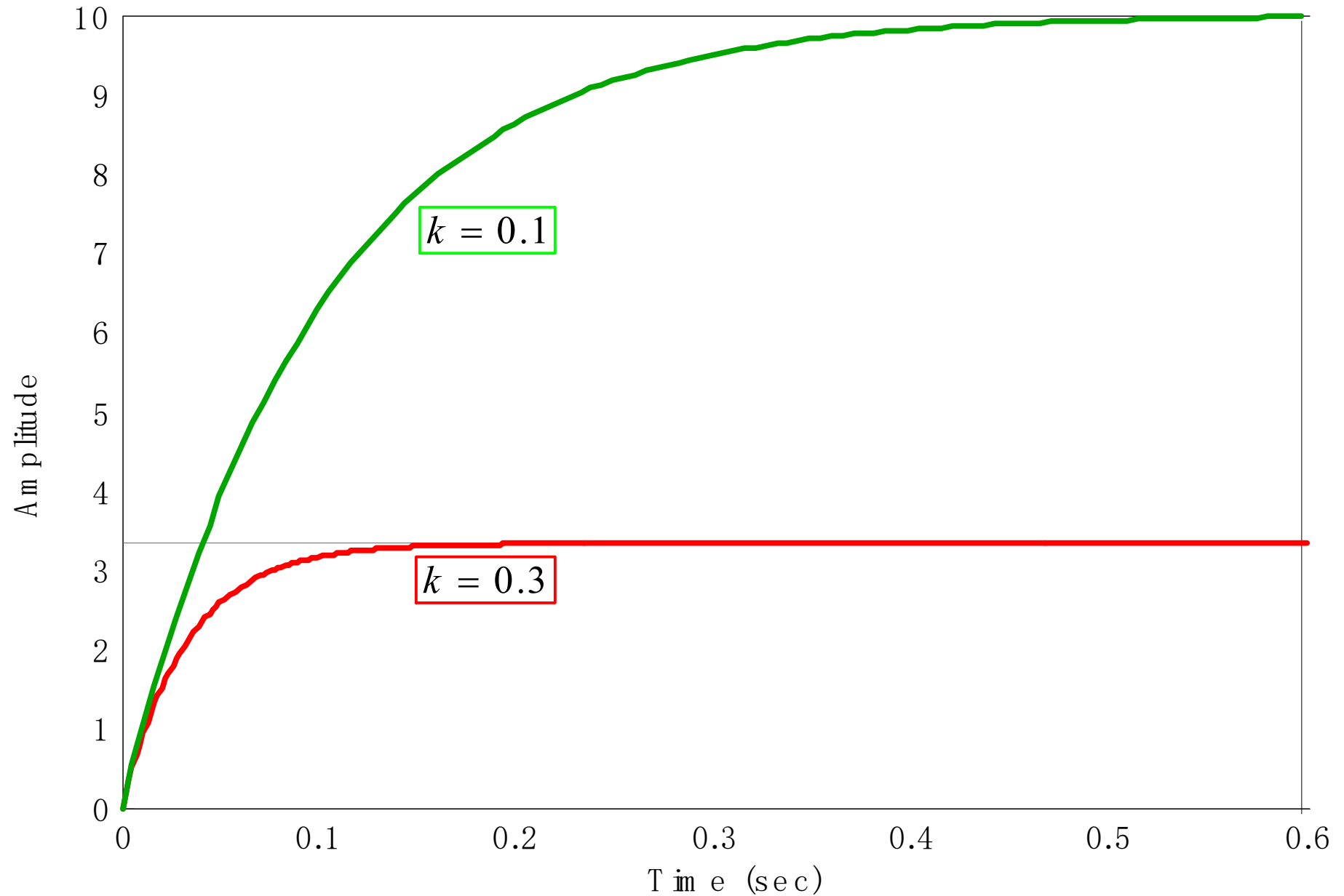
$$Y(s) = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times 0.3} \times \frac{1}{s} = \frac{100}{s+30} \times \frac{1}{s}$$
$$= \frac{10}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+30} \right)$$

$$y(t) = \frac{10}{3} \left( 1 - e^{-30t} \right)$$

➤ 所以，反馈加深还将减小闭环增益、输出幅值

## 5.3' 一阶系统性能

Step Response

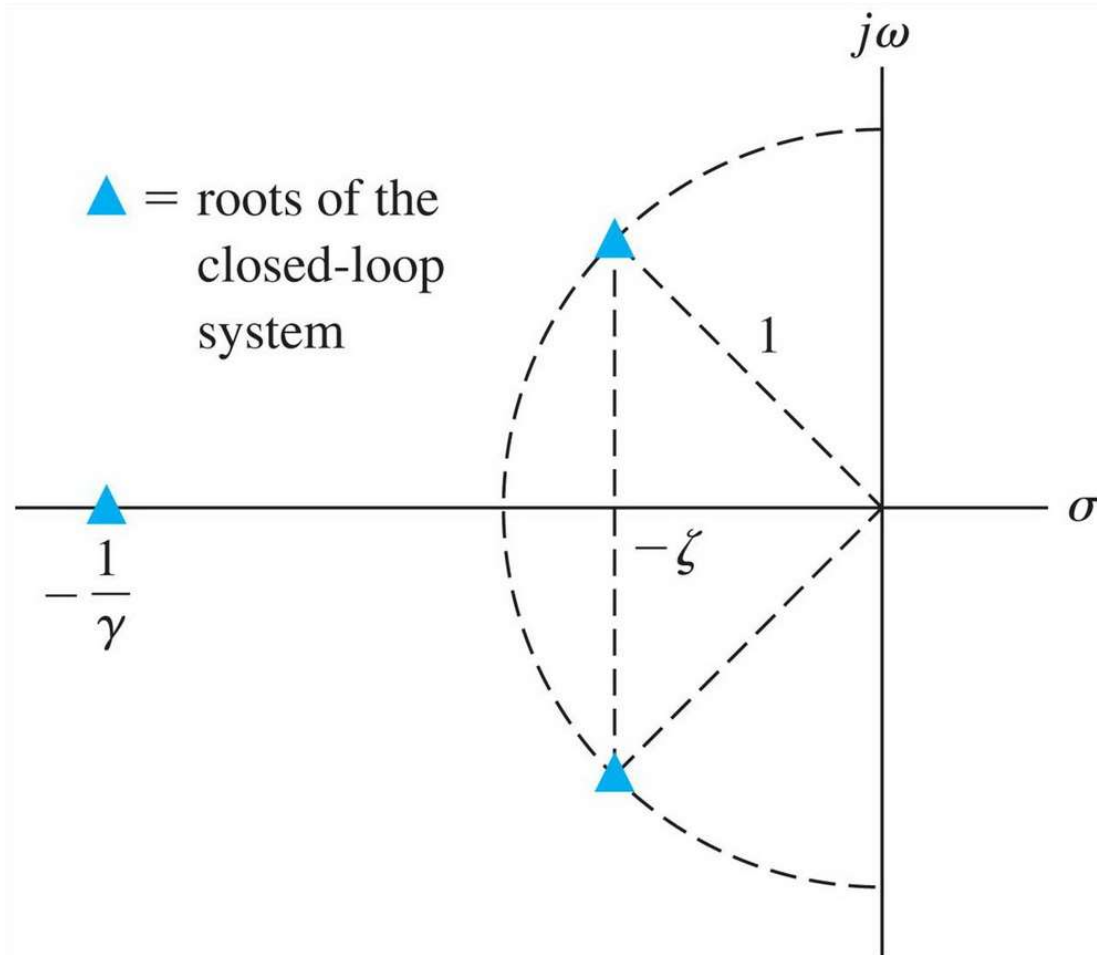


## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 归一化三阶系统的闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \times \frac{1}{\gamma s + 1}$$

$$\omega_n = 1$$



## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

- 第三个极点是稳定的负实极点，它使系统的响应更加平缓，响应速度减慢，超调量减小，过渡过程时间延长
- 当  $|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$  时，共轭复极点的实部小于负实极点实部的  $1/10$ ，共轭复极点是一对**主导极点 dominant root**
- 此时，三阶系统可以近似为主导极点表示的二阶系统，三阶系统的响应可用主导极点表示的二阶系统的响应来近似，系统的性能指标(超调量，调整时间等)可用二阶系统曲线来表示



## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 考虑三阶系统：

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1)(\gamma s + 1)}$$

➤ 选 $\omega_n=1$ ,  $\zeta=0.45$ ,  $\gamma=1.0$ 。则 $|1/\gamma| \approx 10|\zeta\omega_n|=4.5$

➤ 系统极点 $S_{1,2}=-0.45 \pm 0.89i$ ,  $S_3=-1.0$

➤ 百分比超调量 $P.O.=10.9\%$ ；2%允许误差的调整时间 $T_s=8.84$  s；上升时间 $T_{r1}=2.16$  s

➤ 选 $\omega_n=1$ ,  $\zeta=0.45$ ,  $\gamma=0.22$ 。则 $|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|=4.5$

➤ 系统极点 $S_{1,2}=-0.45 \pm 0.89i$  主导极点,  $S_3=-4.5$

➤ 百分比超调量 $P.O.=20.0\%$ ；2%允许误差的调整时间 $T_s=8.56$  s；上升时间 $T_{r1}=1.6$  s

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

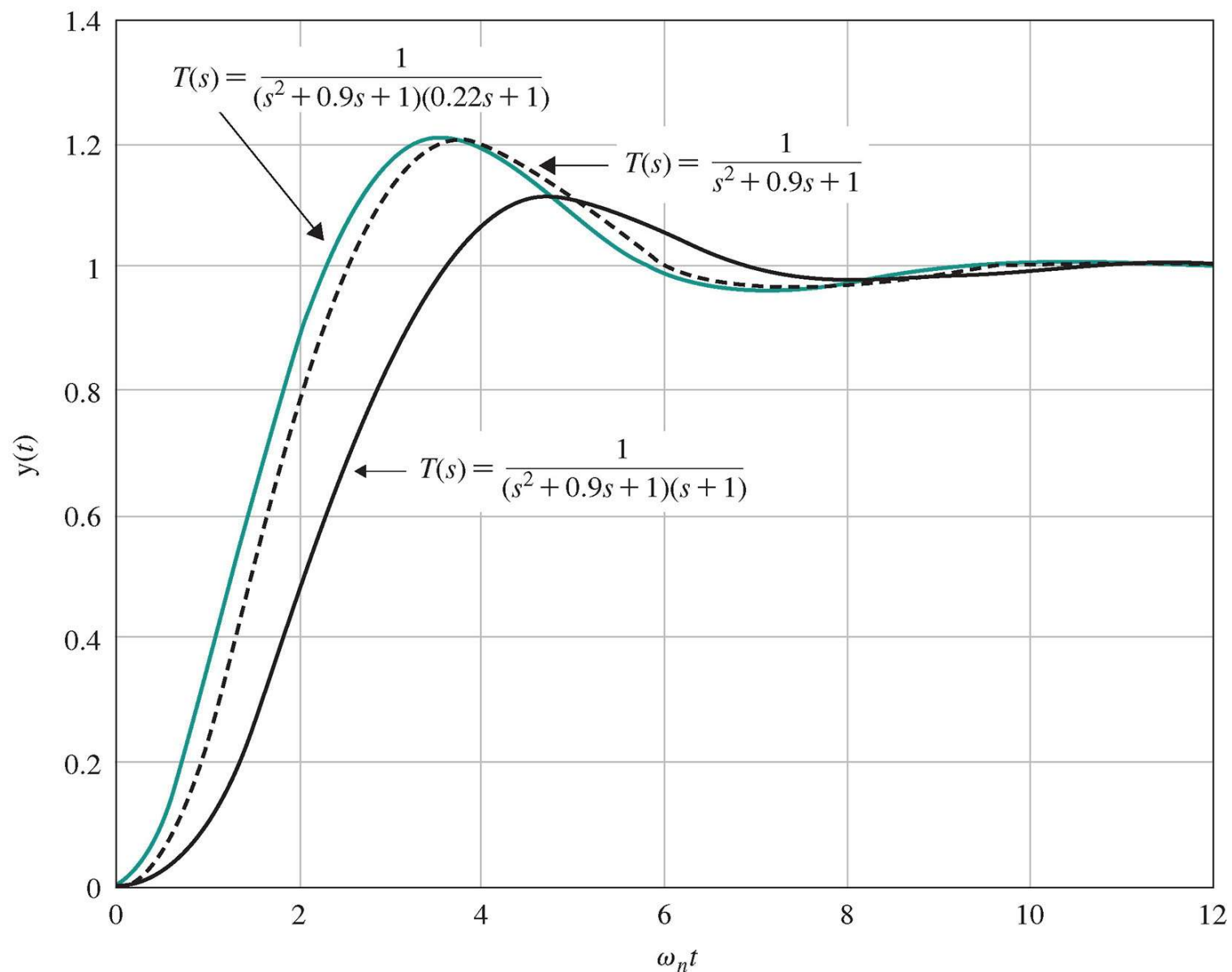
➤ 如果共轭复极点是主导极点，则三阶系统可近似为二阶系统：

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1} = \frac{1}{s^2 + 0.9s + 1}$$

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 20.5\%$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8.89 \text{ s}$$

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} = 1.57 \text{ s}$$



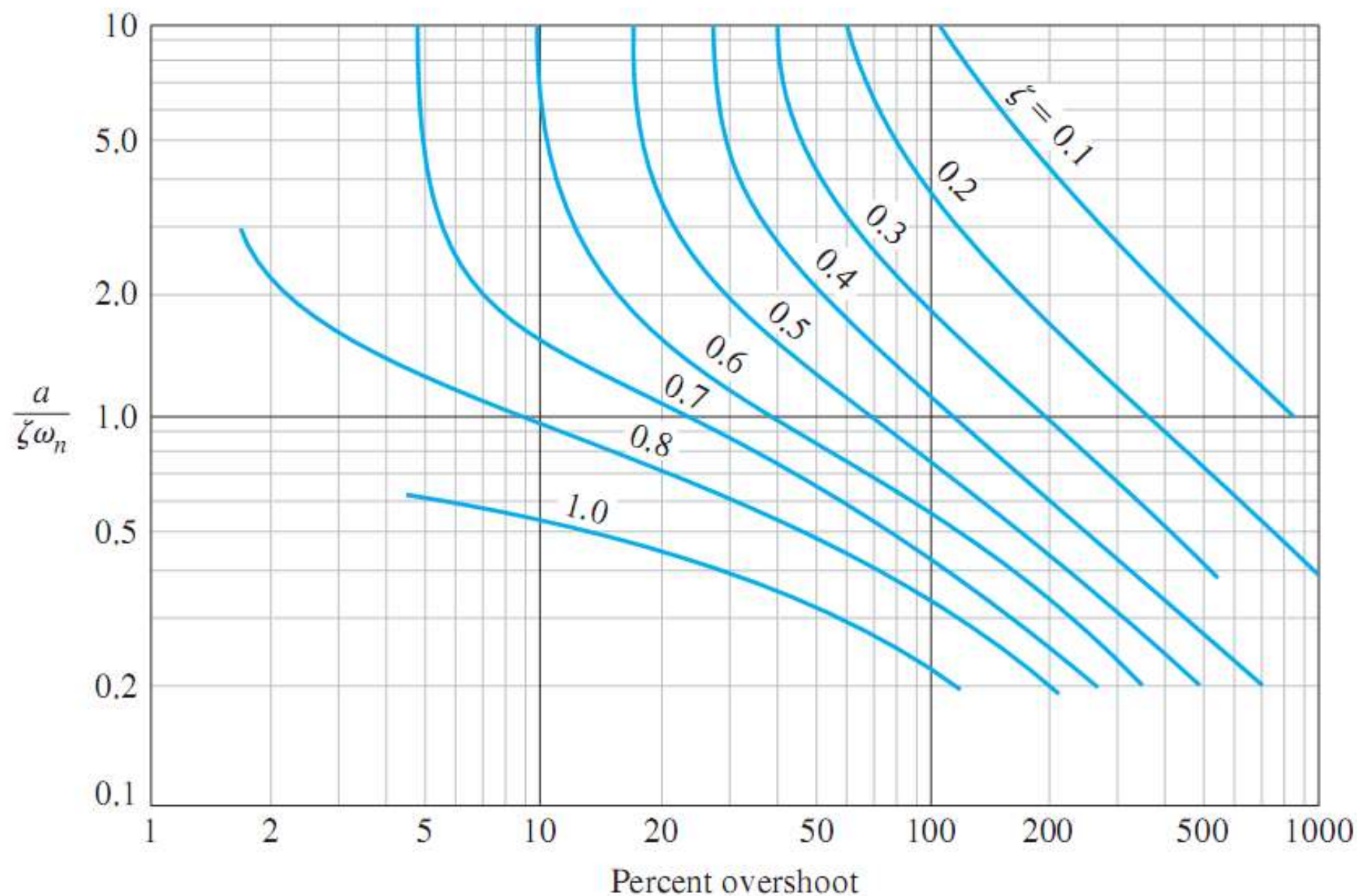
两个三阶系统与一个二阶系统的对比  
 当  $|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$  时，主导极点的概念

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

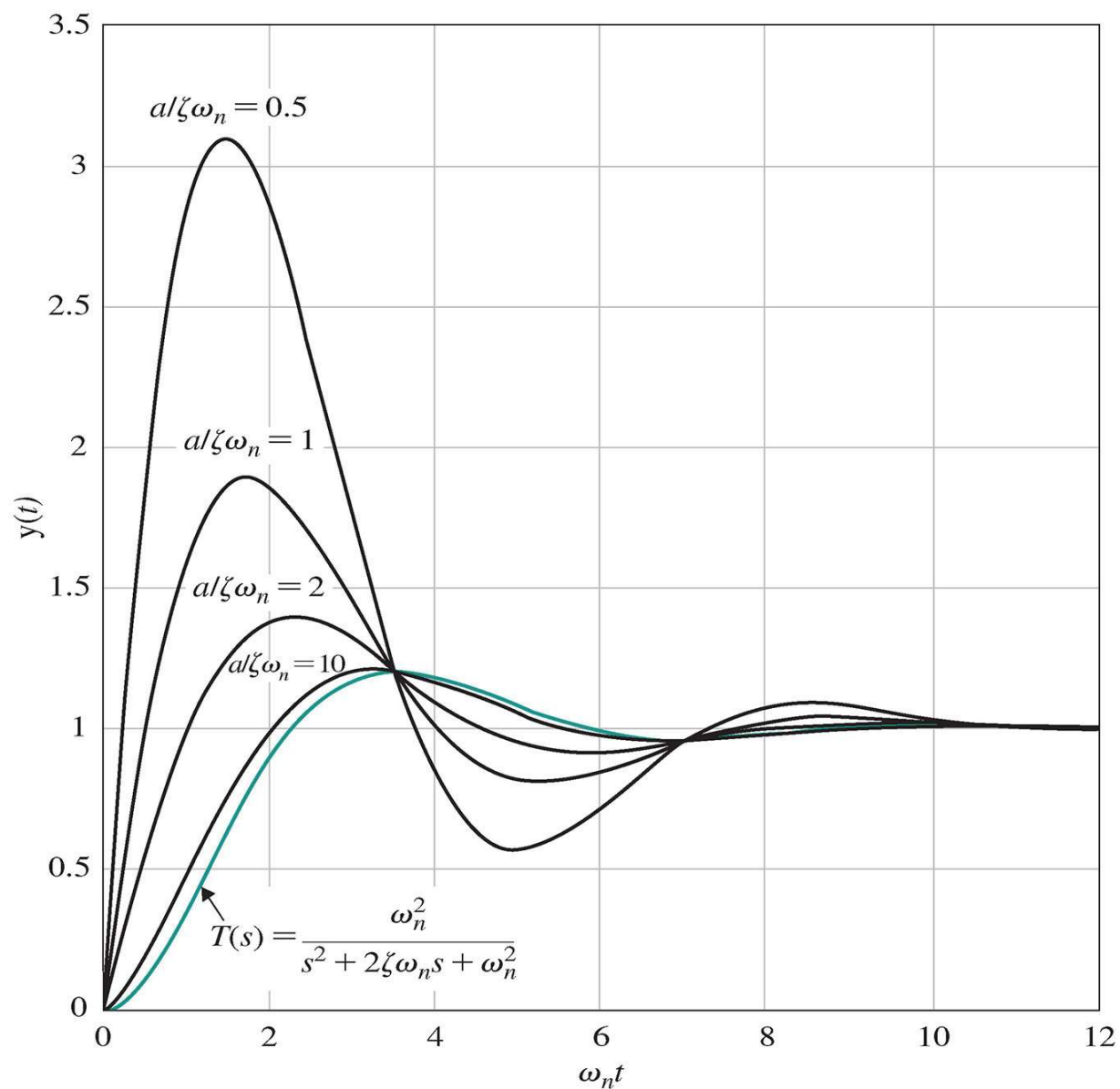
- 若系统具有有限大小的零点，并且位于主导复极点附近，则零点对系统瞬态响应的影响很大
- 具有一个零点、两个极点的系统，其瞬态响应受零点位置的影响：

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\left(\omega_n^2/a\right)(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{s+a}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{s}{a} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

- 系统的零点离原点越近，即 $a$ 越小，零点对系统瞬态响应的影响越大
- 无穷远处的零点对瞬态响应几乎没有影响



一个零点、两个极点系统超调量受 $\zeta\omega_n$ 的影响  
零点使上升时间、峰值时间减小，超调量增大



一个零点、两个极点系统的阶跃响应  
 $\zeta=0.45$ ,  $a/\zeta\omega_n$ 为: 0.5, 1, 2, 10

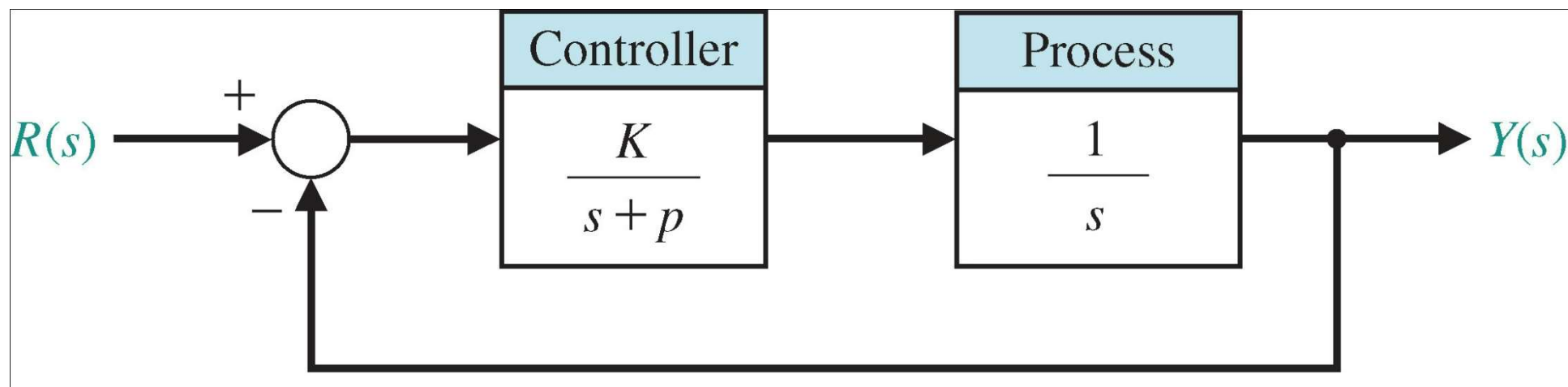
## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

### ➤ 例5.1 参数选择:

选择控制器增益 $K$ 、极点 $p$ ，满足单位阶跃响应：

■ 超调量小于5%；

■ 2%允许误差准则的调整时间小于4s。



## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 闭环系统传递函数为二阶系统：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$
$$= \frac{K}{s^2 + ps + K}$$

➤ 对欠阻尼二阶系统，有：

$$P.O. = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \leq 5\%$$

$$e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0.05$$



## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

$$-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \ln 0.05$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geq -\frac{\ln 0.05}{\pi}$$

$$\zeta^2 \geq \frac{\left(-\frac{\ln 0.05}{\pi}\right)^2}{1 + \left(-\frac{\ln 0.05}{\pi}\right)^2} = 0.477$$

➤ 所以 $\zeta \geq 0.69$ 时满足超调量小于5%的要求

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 二阶最佳系统，取：

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

➤ 此时  $P.O.=4.3\%$

➤ 2%允许误差时，对调整时间的要求：

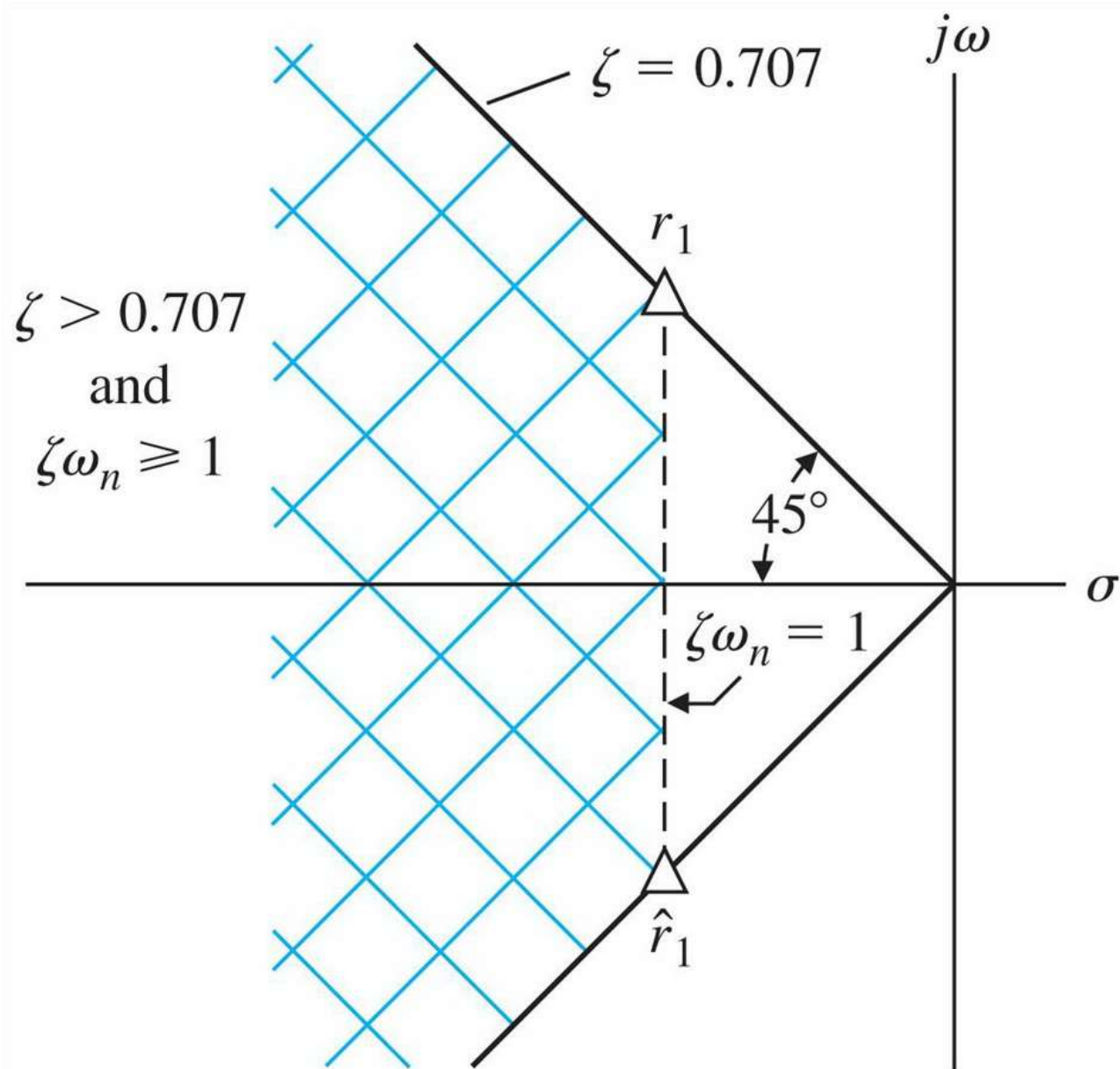
$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4s$$

$$\therefore \zeta \omega_n \geq 1$$

➤ 共轭复极点的实部要大于等于1

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 闭环系统极点要位于 $S$ 平面阴影部分：



## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 若取阻尼比、无阻尼自然振荡频率为：

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\omega_n = \frac{1}{\zeta} = \sqrt{2} = 1.414$$

➤ 闭环系统调整时间、百分比超调量：

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4 \text{ s}$$

$$P.O. = 4.3\%$$

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 闭环系统极点:

$$r_1 = -1 + j1, \quad \hat{r}_1 = -1 - j1$$

➤ 闭环传递函数:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

$$K = \omega_n^2 = 2$$

$$p = 2\zeta\omega_n = 2$$

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ **例5.2** 闭环传递函数 $T(s)$ 的主导极点

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{s+a}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)(\tau s + 1)} \\ &= \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)(\tau s + 1)} \end{aligned}$$

- 系统零点和实极点都会影响瞬态响应。
- 当 $a \gg \zeta\omega_n$ 、 $1/\tau \gg \zeta\omega_n$ 时，对阶跃响应影响不大。

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 若取闭环传递函数为：

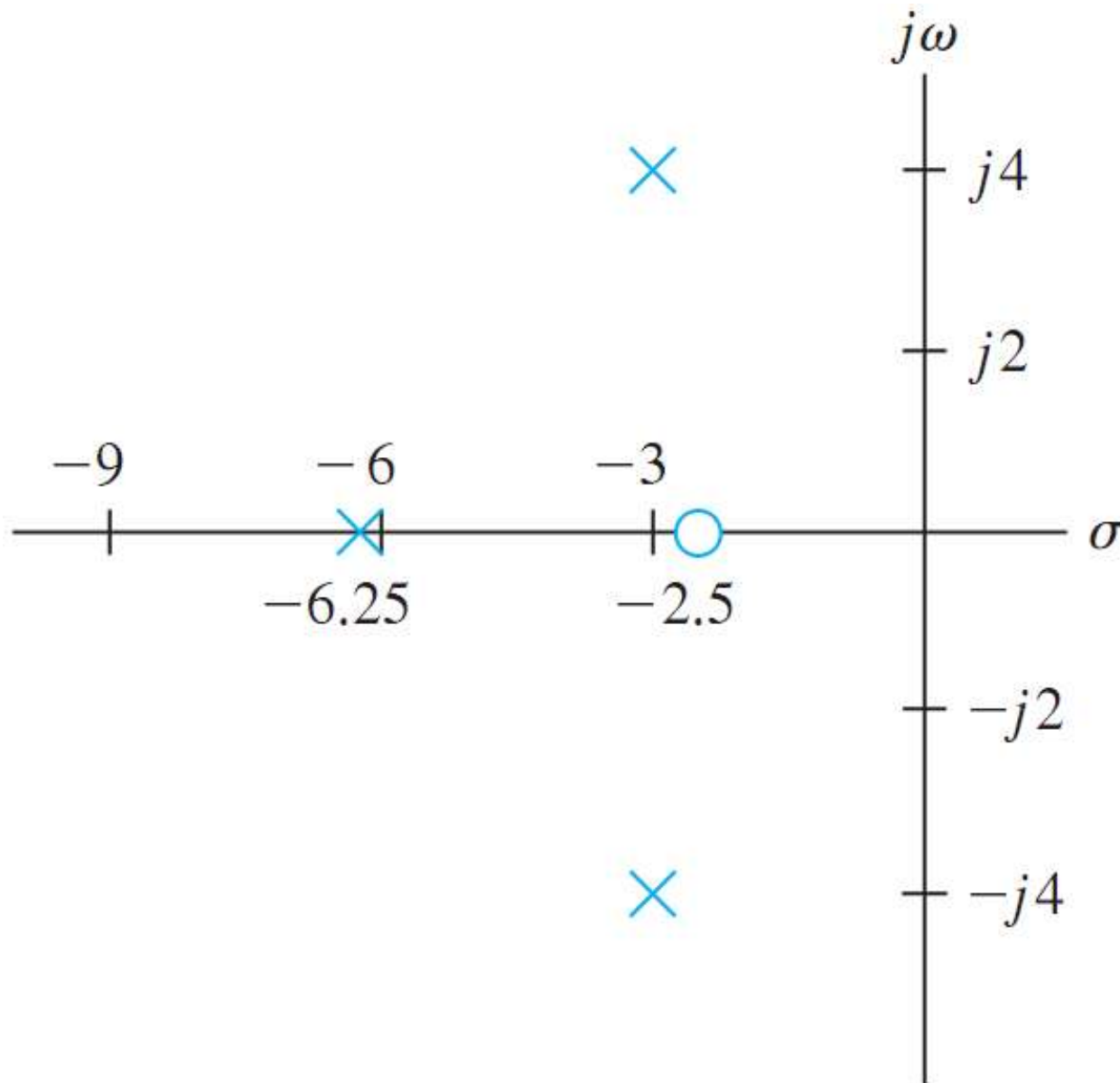
$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{62.5(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6.25)} \\ &= \frac{1.6(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(0.16s + 1)} \end{aligned}$$

➤ 闭环系统稳态增益等于1，即  $T(0)=1$

➤ 对于阶跃输入的稳态误差为0

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤  $S$ 平面上零极点分布：





## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 系统有关参数为：

$$\omega_n=5$$

$$\zeta\omega_n=3, \quad \zeta=0.6$$

$$\tau=0.16$$

$$a=2.5$$

➤ 若忽略实极点和零点，系统可近似为：

$$T(s) \approx \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

➤ 近似的二阶系统参数： $\omega_n=5$ ， $\zeta=0.6$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6 \times 5} = 1.33 \text{ s}$$

$$P.O. = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 9.5\%$$

➤ 原三阶系统超调量 $P.O.=38\%$ ，调整时间 $T_s=1.6$ 秒

➤ 系统的零点和第三个实极点与原点的距离，与共轭复极点在负实轴上的投影与原点的距离大致相同，不能忽略。

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

- 阻尼比对调整时间、百分比超调量、峰值时间、上升时间都有影响。阻尼比是影响二阶系统阶跃响应百分比超调量的唯一因素
- 阻尼比也是影响闭环系统性能的关键因素之一
- 实践中，需要由阶跃响应估算系统阻尼比
- 方法一：由阶跃响应百分比超调量估算阻尼比
- 测量系统的单位阶跃响应，测得百分比超调量，将系统视为二阶欠阻尼系统，估算阻尼比：

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (\%)$$

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\ln\frac{P.O.}{100}$$

$$\pi^2\zeta^2 = \left(-\ln\frac{P.O.}{100}\right)^2 (1-\zeta^2)$$

$$\zeta^2 = \frac{\left(-\ln\frac{P.O.}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(-\ln\frac{P.O.}{100}\right)^2}$$

## 5.4 附加零极点对二阶系统响应的影响

$$\zeta = \frac{-\ln \frac{P.O.}{100}}{\sqrt{\pi^2 + \left[ -\ln \frac{P.O.}{100} \right]^2}}$$

➤ 方法二：由系统阶跃响应往复振荡的次数估算阻尼比(略)

## 5.5 $S$ 平面上根的位置与瞬态响应

- 闭环反馈控制系统瞬态响应主要由传递函数的极点、零点位置决定

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i(s) \Delta_i(s)}{\Delta(s)}$$

系统特征方程 $\Delta(s)=0$

- 单回路单位负反馈系统特征方程为：

$$\Delta(s)=1+G(s)=0$$

闭环系统 $T(s)$ 的极点包括两部分：特征方程 $\Delta(s)$ 的根、 $\sum P_i(s)\Delta_i(s)$ 的极点

## 5.5 $S$ 平面上根的位置与瞬态响应

➤ 增益为1的无重根系统单位阶跃响应为：

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + \sigma_i} + \sum_{k=1}^N \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}$$

其中： $A_i$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ 是常数

系统的极点为： $s = -\sigma_i$  或  $s = -\alpha_k \pm j\omega_k = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j\omega_{dk}$

➤ 拉氏反变换：

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^N D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \theta_k)$$

$D_k$ 是由 $B_k$ ,  $C_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\omega_k$ 决定的常数

## 5.5 $S$ 平面上根的位置与瞬态响应

- 瞬态响应包括稳态输出、指数项、阻尼正弦项
- 系统响应稳定，所有特征根必须均位于 $S$ 平面左半平面，即特征根的实部满足：

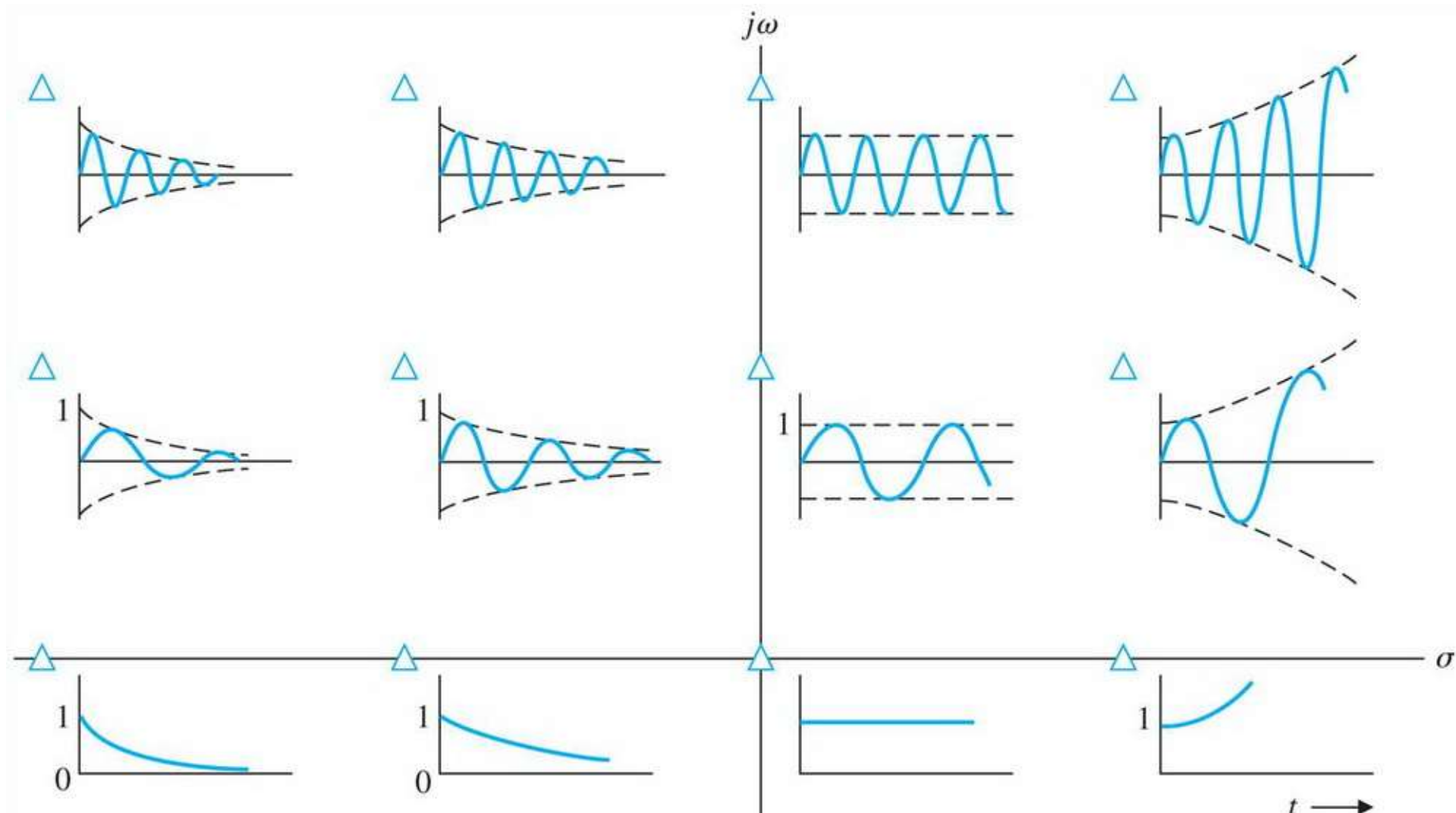
$$-\sigma_i \leq 0$$

$$-\alpha_k \leq 0$$



## 5.5 $S$ 平面上根的位置与瞬态响应

➤  $S$ 平面不同位置根的冲激响应



## 5.5 $S$ 平面上根的位置与瞬态响应

- $T(s)$ 的极点决定了系统特定的响应模态
- $T(s)$ 的零点决定了每个响应模态的权重。例如，将一个零点移向一个指定的极点，将减小此极点对系统性能的影响
- 增加、删去、移动 $T(s)$ 的极点和零点，都将影响系统的响应

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 反馈能够减小系统的稳态误差。跟踪误差为：

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

➤ 稳态跟踪误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

➤ 首先考虑单位负反馈系统对三种标准测试信号的稳态误差

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 阶跃输入 **Step Input**: 位置输入信号

对幅值为  $A$  的阶跃输入, 稳态误差为:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s} \\ &= \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

➤ 前向通道的稳态增益  $G_c(0)G(0)$  决定了稳态误差。  
回路传递函数  $G_c(s)G(s)$  的形式决定了稳态误差

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 回路传递函数的通式：

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + p_k)}, \quad z_i \neq 0, \quad p_k \neq 0$$

- 当 $s$ 趋于零时，回路传递函数的值依赖于积分器的数目 $N$
- 积分器的数目 $N$ 称为系统的**型数type number**
- 系统稳态误差取决于系统的型数

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤  $N>0$  (1型和高于1型系统), 则  $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)$  趋于

无穷大, 跟踪阶跃设定值的稳态误差为零

➤  $N=0$  (0型系统), 阶跃信号稳态跟踪误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + G_c(0)G(0)} = \frac{A}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 稳态位置误差系数 **position error constant**  $K_p$ :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)$$

$$= G_c(0)G(0)$$

$$= \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}$$

➤ 稳态位置误差系数  $K_p$  即前向通道稳态

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 对阶跃输入的稳态位置跟踪误差：

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}, \quad 1 + K_p = \frac{A}{e_{ss}}$$

➤ 0型系统具有有限的稳态位置误差系数，对阶跃设定值具有有限的稳态位置跟踪误差：

$$K_p = G_c(0)G(0) = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}, \quad e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$



## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 1型和高于1型系统的稳态位置误差系数为无穷大，对阶跃设定值的稳态位置跟踪误差为零：

$$K_p = G_c(0)G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = \infty, \quad N \geq 1$$

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{As^N}{s^N + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}} = 0, \quad N \geq 1$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 斜坡输入 **Ramp Input**: 速度输入信号

对斜率为  $A$  的斜坡输入, 稳态误差:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG_c(s)G(s)} \\ &= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 稳态速度误差系数 **velocity error constant**  $K_v$ :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s)$$

➤ 对斜坡输入的稳态位置跟踪误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$$

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 0型系统稳态速度误差系数为0，跟踪斜坡设定值的稳态位置误差无穷大

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \infty$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 1型系统具有有限的稳态速度误差系数，跟踪斜坡设定值具有有限的稳态位置跟踪误差：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s \prod_{k=1}^Q p_k} = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{k=1}^Q (s + p_k)}} = \frac{A}{\frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}} = \frac{A}{K_v}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 2型和高于2型系统的稳态速度误差系数为无穷大，对斜坡设定值的稳态位置跟踪误差为零：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^{N-1} \prod_{k=1}^Q p_k} = \infty, \quad N \geq 2$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = 0$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ **抛物线输入Parabolic Input**: 加速度输入信号  
当输入为  $r(t)=\frac{1}{2}At^2$  时, 稳态误差为:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2 G_c(s)G(s)} \\ &= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 稳态加速度误差系数 **acceleration error constant**

$K_a$ :

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G(s)$$

➤ 对抛物线输入的稳态位置跟踪误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$$

$$K_a = \frac{A}{e_{ss}}$$



## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ **0型和1型系统**，稳态加速度误差系数为**0**，跟踪抛物线设定值的稳态位置误差无穷大

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k}$$

$$= 0, \quad N \leq 1$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a} = \infty, \quad N \leq 1$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 2型系统具有有限的稳态加速度误差系数，跟踪抛物线设定值具有有限的稳态位置跟踪误差：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^2 \prod_{k=1}^Q p_k} = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

- 3型和高于3型系统的稳态加速度误差系数为无穷大，对斜坡设定值的稳态位置跟踪误差为零：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^{N-2} \prod_{k=1}^Q p_k}$$
$$= \infty, \quad N \geq 3$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = 0, \quad N \geq 3$$

- 3型和高于3型的系统闭环难以稳定，在工程上难以实现

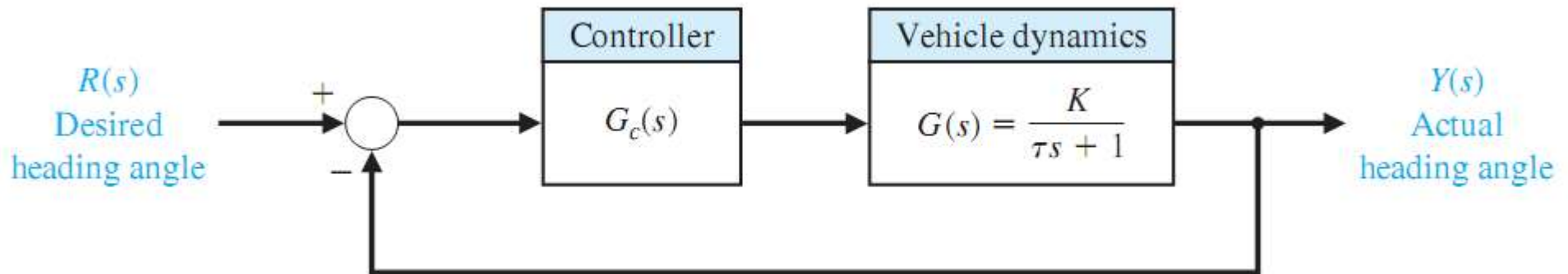
## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 控制系统常用型数和稳态误差系数 $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ 来描述

$G_c(s)G(s)$	输入		
中积分器 个数 型数	阶跃 $r(t)=A, R(s)=\frac{A}{s}$	斜坡 $A t, \frac{A}{s^2}$	抛物线 $\frac{1}{2} A t^2, \frac{A}{s^3}$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	无穷大	无穷大
1	$e_{ss} = 0$	$\frac{A}{K_v}$	无穷大
2	$e_{ss} = 0$	0	$\frac{A}{K_a}$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

### ➤ 例5.3：移动机器人驾驶控制



### ➤ 采用纯比例控制器 (P控制器)：

$$G_c(s) = K_1$$

### ➤ 回路传递函数：

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_1 K}{\tau s + 1}, \quad 0 \text{型系统}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 稳态位置误差系数：

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)$$

$$= K_1 K$$

➤ 系统对幅值为 $A$ 的设定值阶跃输入具有有限的稳态位置误差：

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p} = \frac{A}{1 + K_1 K}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 采用比例积分控制器 (PI控制器):

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s}$$

➤ 回路传递函数:

$$G_c(s)G(s) = \frac{(K_1 s + K_2)K}{s(\tau s + 1)}, \quad \text{1型系统}$$

➤ 稳态位置误差系数:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = \infty$$

➤ 系统对幅值为 $A$ 的阶跃输入的稳态位置误差为0

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 稳态速度误差系数:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s)$$

$$= K_2 K$$

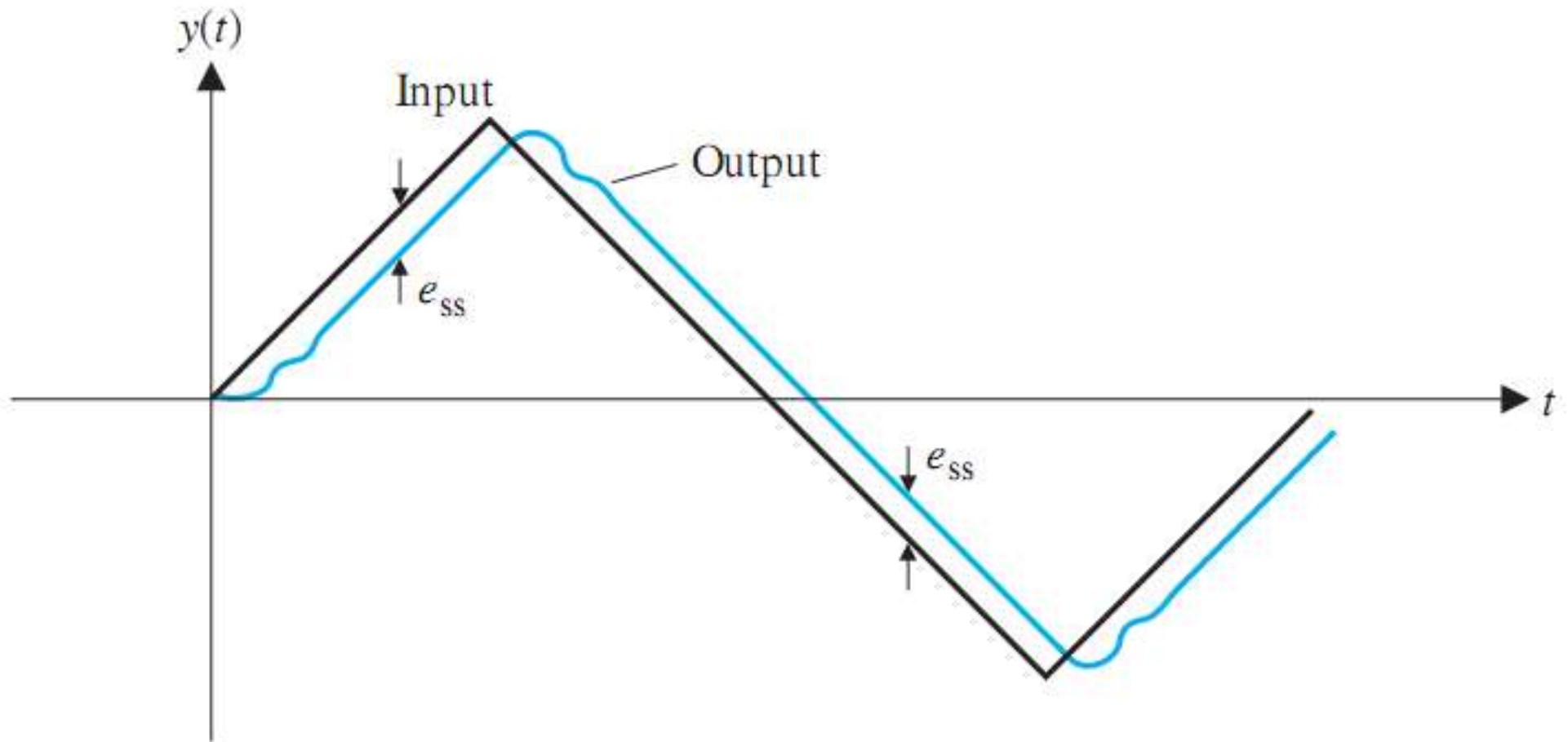
➤ 系统对速度为  $A$  的斜坡输入具有有限的稳态位置误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{K_2 K}$$



## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 采用PI控制器时，系统的三角波响应：



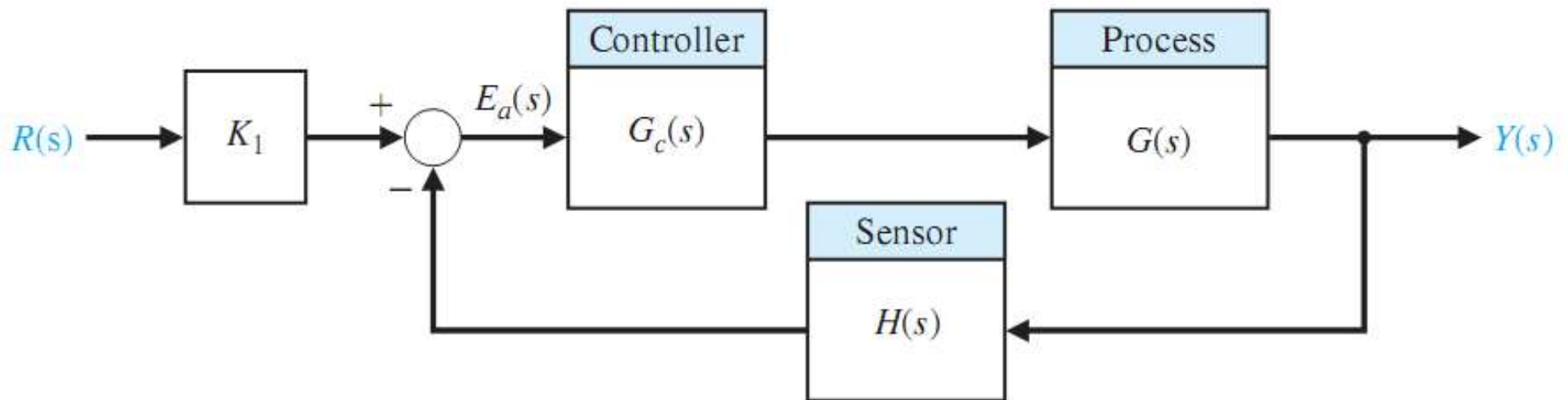
➤ 输出的速度达到了期望要求的速度，与输入速度相同，但仍然存在有限的稳态位置跟踪误差

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

- 控制系统的误差系数 $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ 表达了系统减小乃至消除稳态误差的能力, 它们是衡量系统稳态性能的指标
- 设计反馈控制系统时, 要设计稳态误差系数, 并确定增大稳态误差系数的方法, 既要减少控制系统的稳态误差, 又必须注意维持较好的瞬态性能, 在稳态响应、瞬态响应之间折衷考虑
- 在本例中, 增大增益 $KK_2$ , 就增大了稳态速度误差系数 $K_v$ , 减小了跟踪斜坡信号时的稳态位置误差, 但增大增益 $KK_2$ , 就减小了系统阻尼比 $\zeta$ , 改变了系统瞬态响应, 使瞬态响应振荡更加剧烈

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

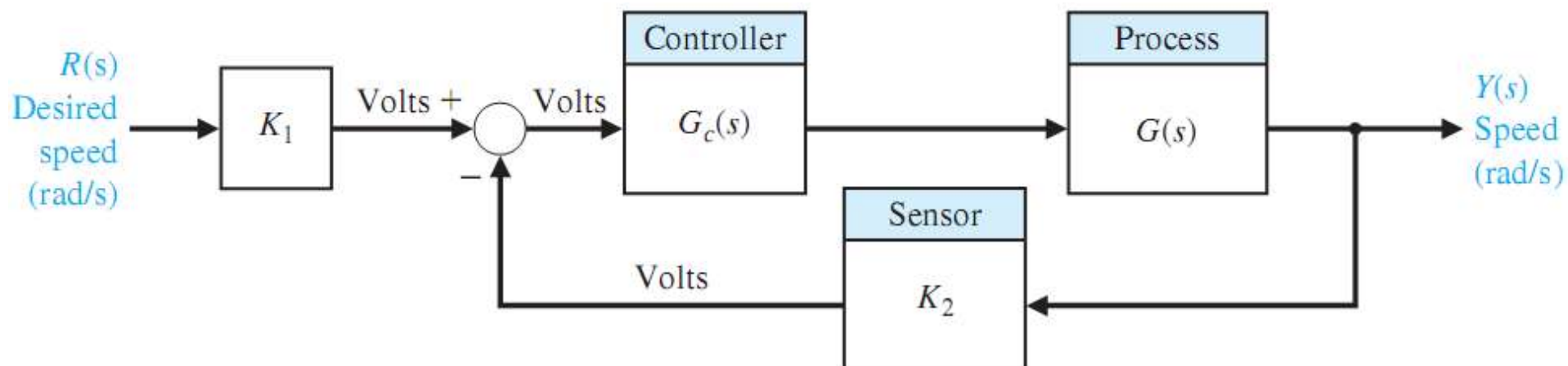
- 非单位负反馈系统的稳态误差
- 非单位负反馈系统 ( $H(s) \neq 1$ ) 的输出  $Y(s)$ , 与传感器的输出 (反馈信号) 常常具有不同的物理单位, 常常是不同性质的物理量



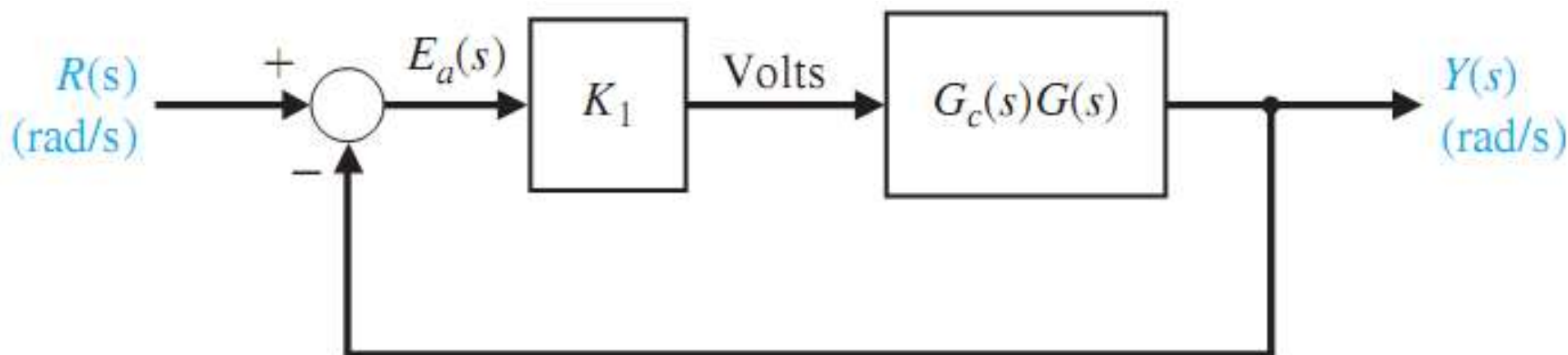
非单位反馈系统的一般形式

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

- 图示速度控制系统， $H(s)=K_2$ ，参数 $K_1$ 、 $K_2$ 实现从一组单位到另一组单位的转换， $rad/s$ 到V



- 选择 $K_1$ ，使 $K_1=K_2$ ，采用方框图变换，得到等价的单位负反馈系统



## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 若反馈通道传感器的时间常数不能忽略，则有：

$$H(s) = \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

➤ 反馈通道直流增益为：

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K_2$$

➤ 若选取  $K_2 = K_1$ ，则系统闭环传递函数：

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{K_1 G_c(s) G(s)}{1 + H(s) G_c(s) G(s)} \\ &= \frac{(\tau s + 1) K_1 G_c(s) G(s)}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s) G(s)} \end{aligned}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 系统跟踪误差：

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$=[1-T(s)]R(s)$$

$$=\frac{1+\tau s\left[1-K_1G_c(s)G(s)\right]}{\tau s+1+K_1G_c(s)G(s)}R(s)$$

➤ 假定系统前向通道不存在纯积分环节，则有：

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s)=0$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 系统对单位阶跃信号的稳态跟踪误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + \tau s [1 - K_1 G_c(s) G(s)]}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s) G(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tau s - \tau K_1 s G_c(s) G(s)}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s) G(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G(s)}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ **例5.4：** 稳态误差

$$G_c(s) = 40, \quad G(s) = \frac{1}{s+5}$$

$$H(s) = \frac{20}{s+10} = \frac{2}{0.1s+1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = 0$$

➤ 选  $K_1 = K_2 = 2$ ，对单位阶跃信号的稳态位置误差：

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G(s)} = \frac{1}{1 + 2(40)(1/5)} = \frac{1}{17}$$

➤ 即稳态误差为阶跃输入信号幅值的**5.9%**

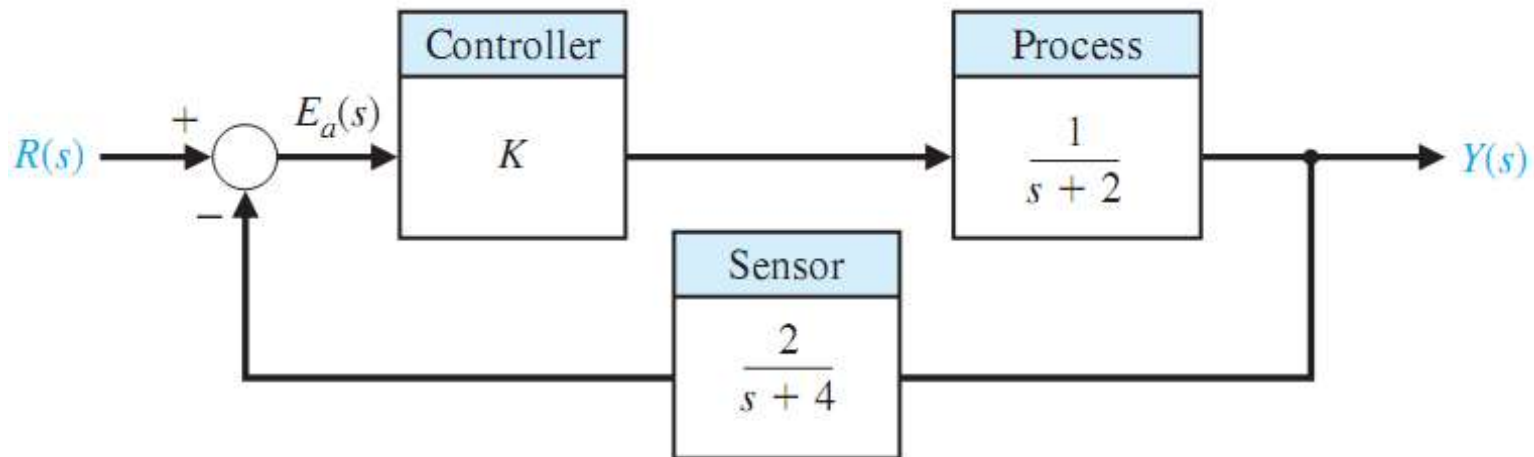


## 5.6 反馈控制系统稳态误差

### ➤ 例5.5：非单位负反馈控制系统

在设定值通道上无法插入比例环节  $K_1$

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}$$
$$= \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4) + 2K}$$



## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 实际跟踪误差：

$$E(s)=[1-T(s)]R(s)$$

➤ 对阶跃输入的稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ 1 - T(s) \right] \frac{1}{s} = 1 - T(0)$$

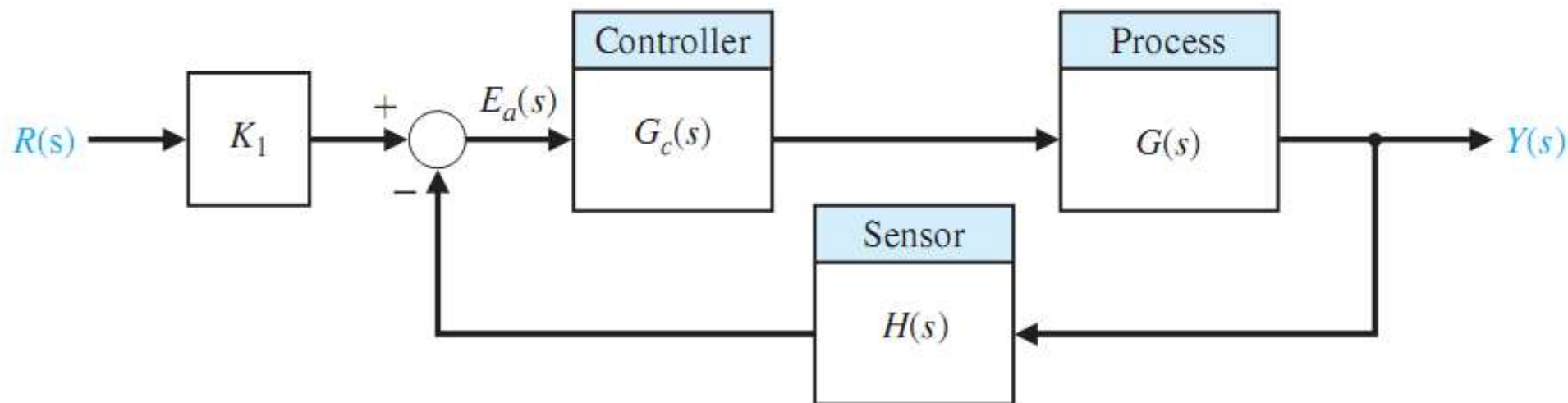
$$= 1 - \frac{4K}{8 + 2K}$$

$$= \frac{8 - 2K}{8 + 2K}$$

➤ 当  $K=4$  时，对阶跃输入的稳态误差为零

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

### ➤ 非单位负反馈系统等效误差系数



### ➤ $K_1=1$ 时，非单位负反馈系统闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + H(s)G_c(s)G(s)}$$

$$\text{令： } T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Z(s)}{1 + Z(s)}$$

## 5.6 反馈控制系统稳态误差

➤ 得到等效的单位负反馈系统回路传递函数 $Z(s)$ :

$$Z(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)[H(s) - 1]}$$

➤ 等效单位负反馈系统稳态误差系数:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} Z(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Z(s)$$

➤  $H(s)=1$ ,  $Z(s)=G_c(s)G(s)$ 时, 所得结果即为单位负反馈系统稳态误差系数

## 5.7 性能准则

- 性能准则 **performance index** 对系统性能的定量测度。性能准则通常为非负值，极小化性能准则得到最佳系统
- 性能准则 **performance index** 试图用一个单一的量化指标综合地、全面地表达系统各方面的性能
- 设计指标 **Specification** 一般指各个具体的设计规格，体现系统某一方面的性能，如超调量、调整时间、稳态误差等
- 选择性能准则要着重体现重要的系统设计指标
- 最优控制系统 **optimum control system** 调整系统参数使性能准则达到极值(通常为最小值)

## 5.7 性能准则

➤ 误差平方积分 ISE, Integral of the Square of the Error

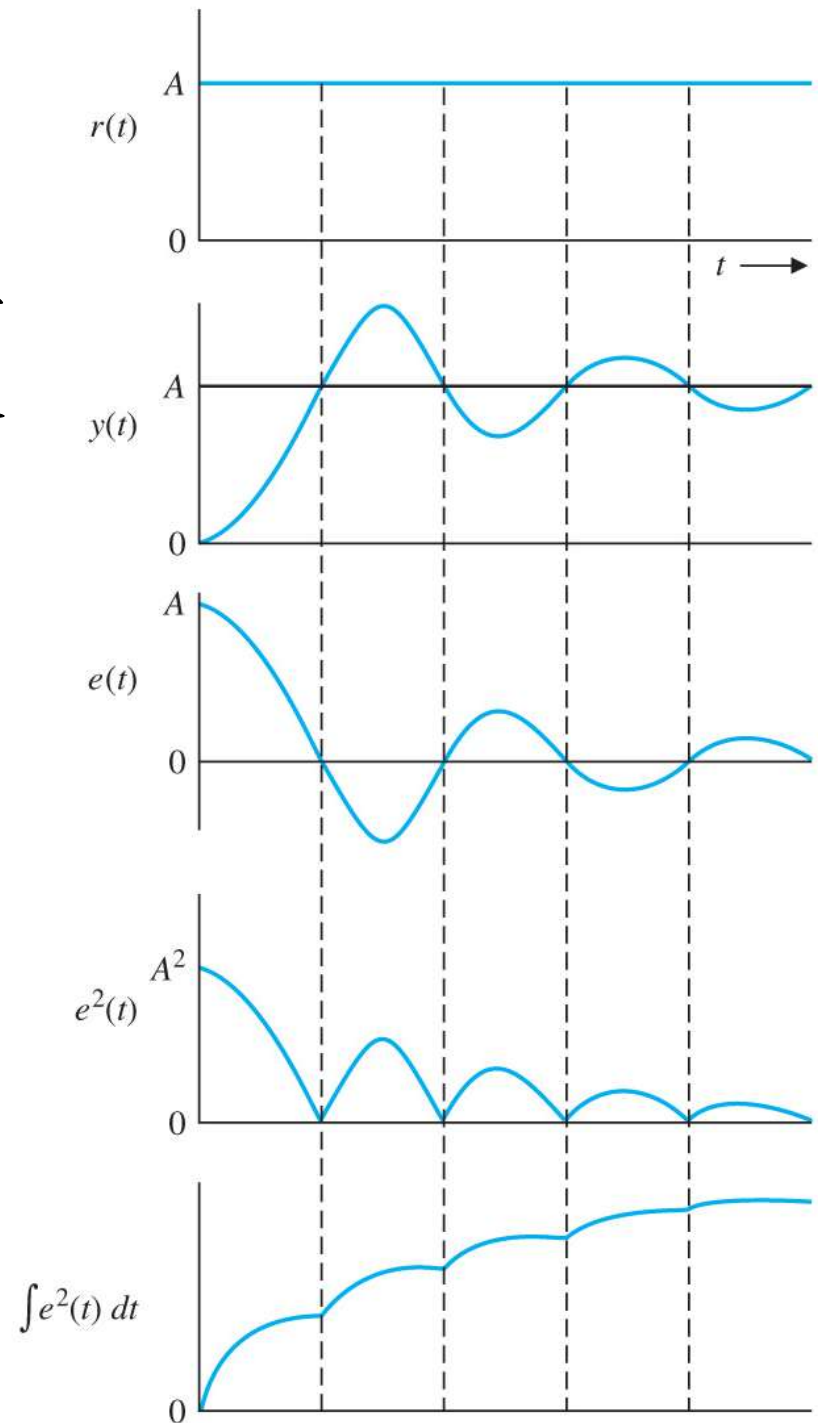
$$\text{ISE} = \int_0^T e^2(t) dt$$

- 积分上限  $T$  为有限时间, 一般选择  $T$  使积分达到稳态值, 如调整时间  $T_s$
- ISE 的区分度不好, 仅能区分过度的过阻尼系统和过度的欠阻尼系统。折衷选取阻尼值, 得到 ISE 的极小值
- ISE 适合于实际应用: 误差平方在数学上易于分析和计算; 求平方电路容易获得

➤ 在某一设计参数下，选择标准测试信号(一般选单位阶跃信号)作为闭环系统设定值，计算或测量得到系统输出、跟踪误差信号，计算数值积分，即可得到性能准则

➤ 改变设计参数，重复上述过程，即可得到新的设计参数下闭环系统性能准则

➤ 比较



## 5.7 性能准则

- **误差绝对值积分IAE, Integral of the Absolute magnitude of the Error**

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt$$

- IAE非常适用于计算机仿真研究，但微分困难
- **时间加权误差绝对值积分ITAE, Integral of Time multiplied by Absolute Error**

$$\text{ITAE} = \int_0^T t |e(t)| dt$$

- ITAE强调响应后期误差的影响，而减弱响应初期较大初始误差对性能准则的影响



## 5.7 性能准则

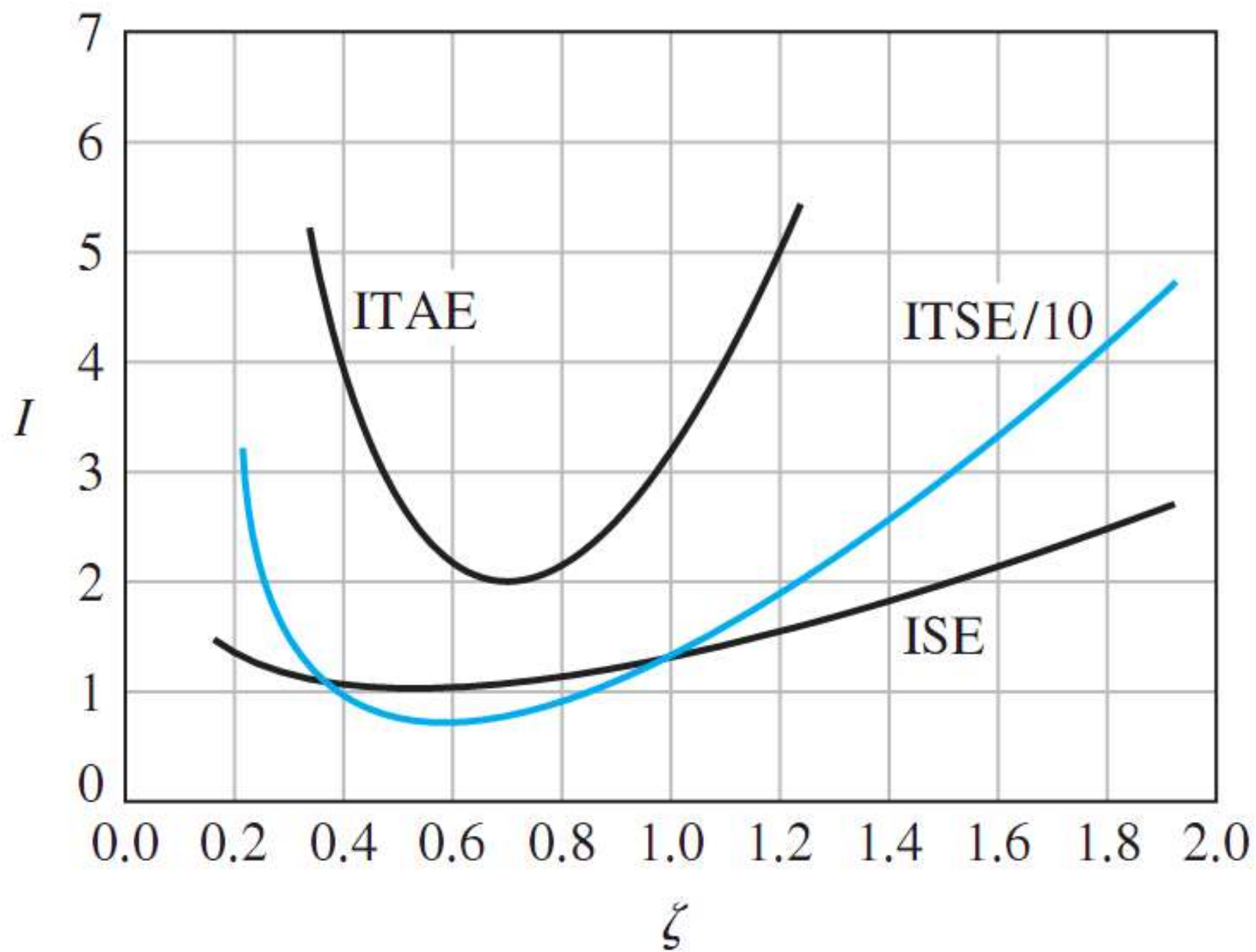
- 时间加权误差平方积分ITSE, Integral of Time multiplied by the Squared Error

$$\text{ITSE} = \int_0^T t e^2(t) dt$$

- 在各种性能准则中，ITSE选择性最好：随着系统参数变化，积分的最小值很容易辨别
- 积分形式性能准则的通式：

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), y(t), u(t), t) dt$$

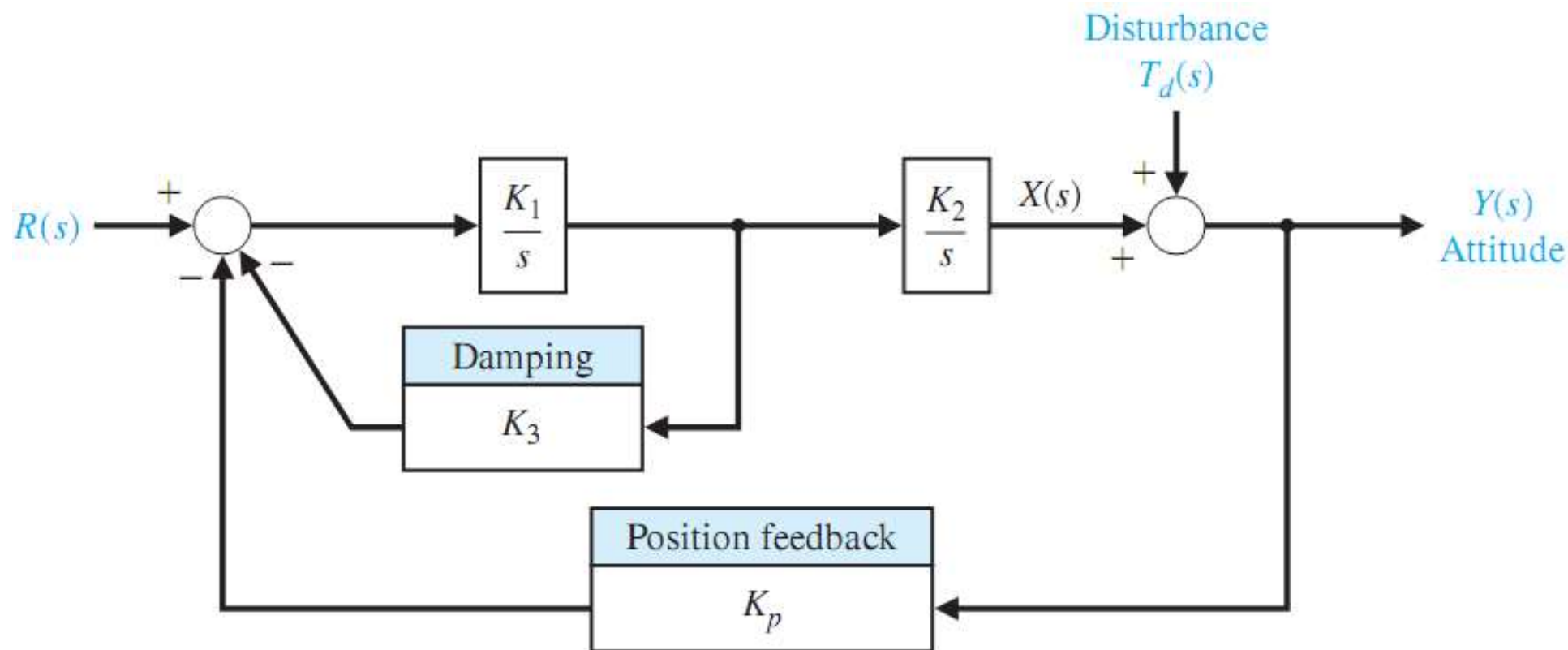
- $f$  是误差、设定值、输出、控制量、时间的函数
- 极小化IAE、ISE常常具有实际意义，如极小化飞机和空间飞行器的燃料消耗
- 性能准则有利于控制系统的设计和分析



## 5.7 性能准则

### ➤ 例5.6：空间望远镜定向控制系统

选择增益 $K_3$ ，使扰动 $T_d(s)$ 的影响达到最小。此时，扰动等价于一个初始的姿态误差



空间望远镜定向控制系统方框图

## 5.7 性能准则

➤ 扰动输入到姿态输出的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{1 + 1 \times K_p \frac{\frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} K_3} \frac{K_2}{s}} = \frac{s(s + K_1 K_3)}{s^2 + K_1 K_3 s + K_1 K_2 K_p}$$

➤ 典型参数值  $K_1=0.5$ ,  $K_1 K_2 K_p=2.5$ ：

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{s(s + 0.5 K_3)}{s^2 + 0.5 K_3 s + 2.5}$$

➤ 航天器的自然振荡频率为：

$$f_n = \omega_n / 2\pi = \sqrt{2.5} / 2\pi \approx 0.25 \text{ 周/秒}$$

## 5.7 性能准则

➤ 在单位阶跃扰动作用下，姿态输出：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s(s + 0.5K_3)}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} T_d(s) \\ &= \frac{s(s + 0.5K_3)}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} \frac{1}{s} \\ &= \frac{s + 0.5K_3}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} \\ &= \frac{s + 0.5K_3}{(s + 0.25K_3)^2 + 2.5 - (0.25K_3)^2} \end{aligned}$$

## 5.7 性能准则

查拉氏变换表,  $\frac{s + \alpha}{(s + a)^2 + \omega^2}$  的拉氏反变换:

$$\frac{1}{\omega} \sqrt{(\alpha - a)^2 + \omega^2} e^{-at} \sin(\omega t + \psi)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a}$$

$$\text{选取: } \alpha = 0.5K_3 = \frac{1}{2} K_3$$

$$a = 0.25K_3 = \frac{1}{4} K_3$$

$$\omega^2 = 2.5 - (0.25K_3)^2 = \frac{1}{4} \left( 10 - \frac{1}{4} K_3^2 \right)$$

## 5.7 性能准则

若取  $\beta = \sqrt{10 - \frac{1}{4}K_3^2}$

则有：  $\omega^2 = \frac{1}{4}\beta^2, \quad \omega = \frac{1}{2}\beta$

$$\begin{aligned} (\alpha - a)^2 + \omega^2 &= \left( \frac{1}{2}K_3 - \frac{1}{4}K_3 \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 10 - \frac{1}{4}K_3^2 \right) \\ &= \frac{10}{4} \end{aligned}$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a} = \tan^{-1} \frac{2\beta}{K_3} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{40}{K_3^2} - 1}$$

## 5.7 性能准则

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{(\alpha - a)^2 + \omega^2} e^{-at} \sin(\omega t + \psi)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\beta} \sqrt{\frac{10}{4}} e^{-\frac{1}{4}K_3 t} \sin\left(\frac{1}{2}\beta t + \psi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\beta} e^{-0.25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) = 0 - y(t)$$

$$= -\frac{\sqrt{10}}{\beta} e^{-0.25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right)$$



## 5.7 性能准则

$$\begin{aligned}\min_{K_3} \text{ISE} &= \min_{K_3} \int_0^{\infty} e^2(t) dt \\&= \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right) dt \\&= \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\beta t + 2\psi) \right] dt \\&= \frac{1}{K_3} + 0.1K_3\end{aligned}$$

## 5.7 性能准则

- 如果ISE的极小值存在，应当是在ISE对 $K_3$ 的一阶导数等于0的点上

$$\frac{d\text{ISE}}{dK_3} = -\frac{1}{K_3^2} + 0.1 = 0$$

$$K_3^2 = 10$$

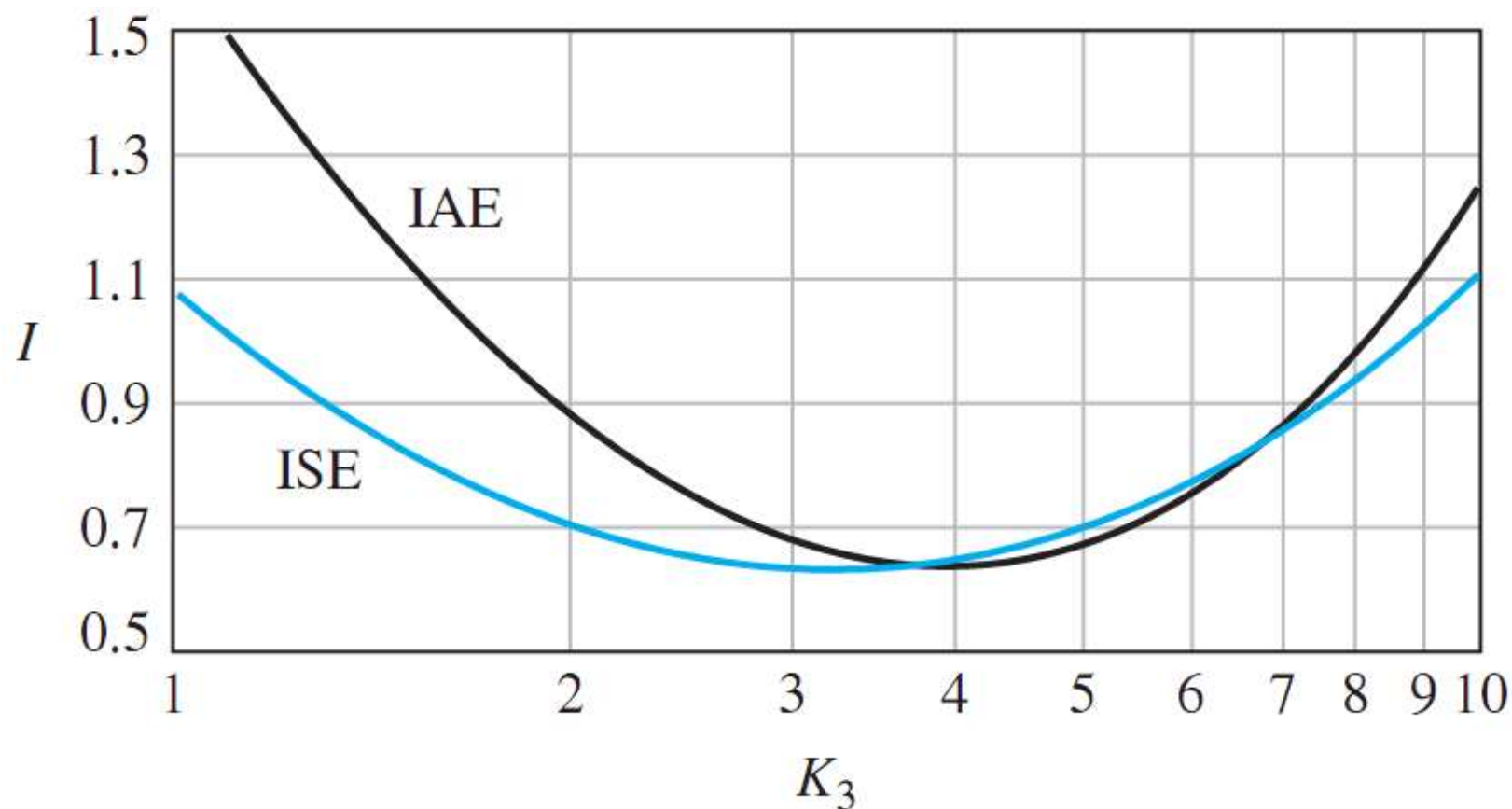
$$K_3 = \sqrt{10} \approx 3.16$$

$$\text{ISE}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} \sqrt{10} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0.63$$

- 当 $K_3 \approx 3.16$ 时，ISE达到极小值0.63，此时阻尼比 $\zeta = 0.50$

## 5.7 性能准则

- 难以用解析方法求IAE的极小值，一般通过实际测量或计算机数值仿真
- 当 $K_3=4.2$ 时，IAE取极小值，阻尼比  $\zeta=0.665$
- ISE的选择性没有IAE好



## 5.7 性能准则

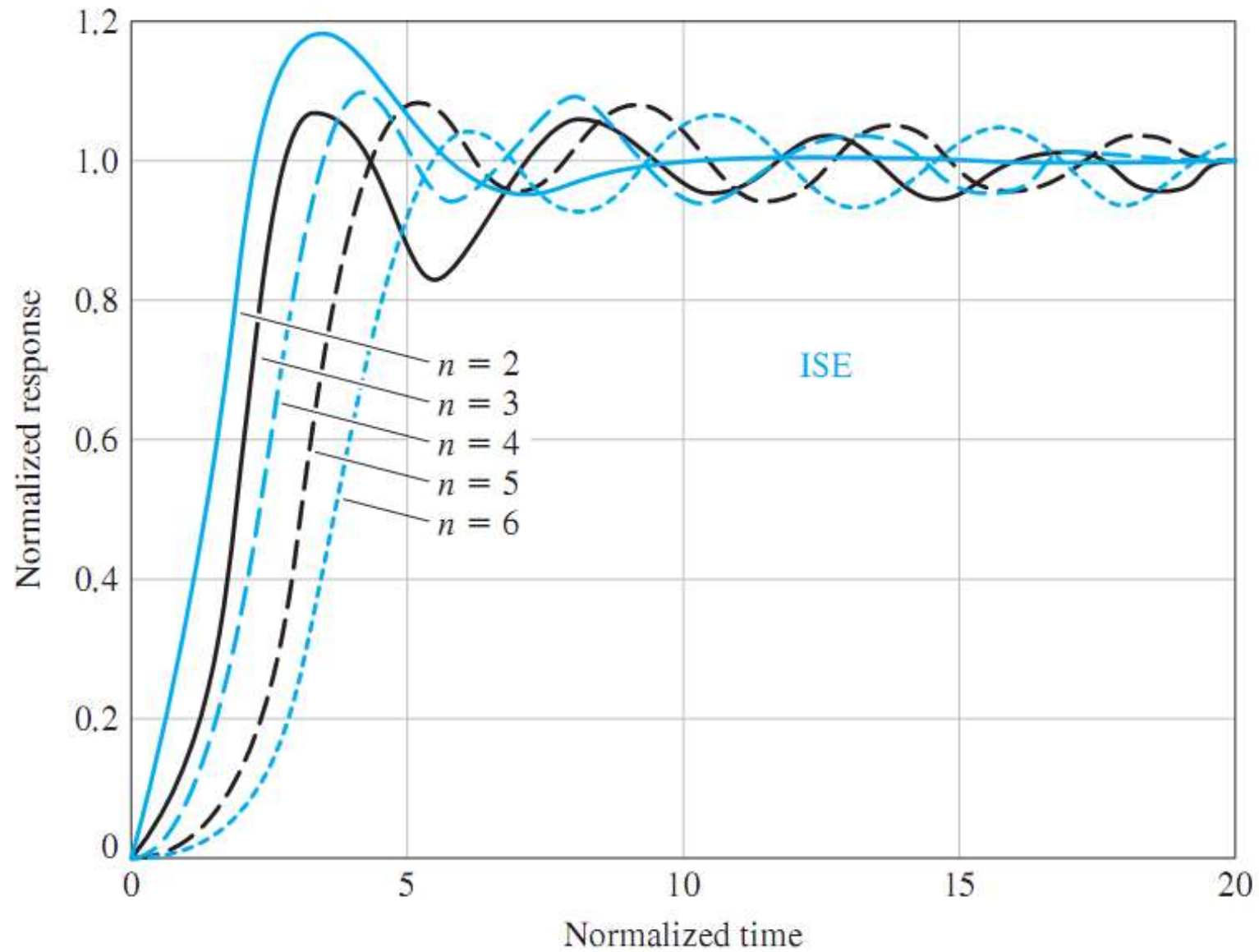
- 不同的性能准则，参数最优值是不同的，性能准则的最优值也不同
- 若系统闭环传递函数为：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}$$

- 系统有 $n$ 个极点，没有有限零点，对阶跃输入的稳态误差为0
- 对阶跃输入信号，使ISE、IAE、ITAE性能准则达到极小，则可确定 $T(s)$ 的最优参数

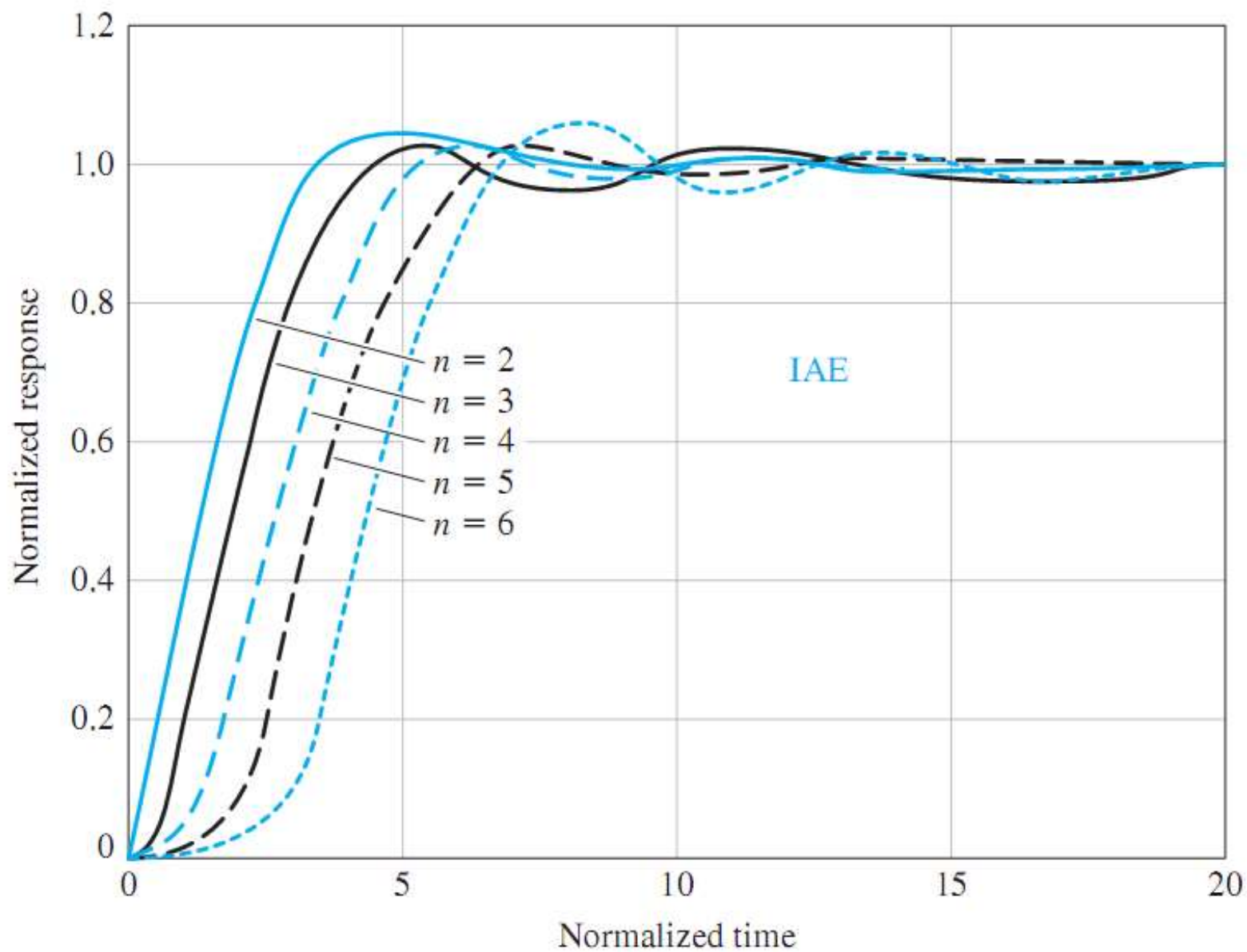
## 5.7 性能准则

### ➤ 最优ISE准则



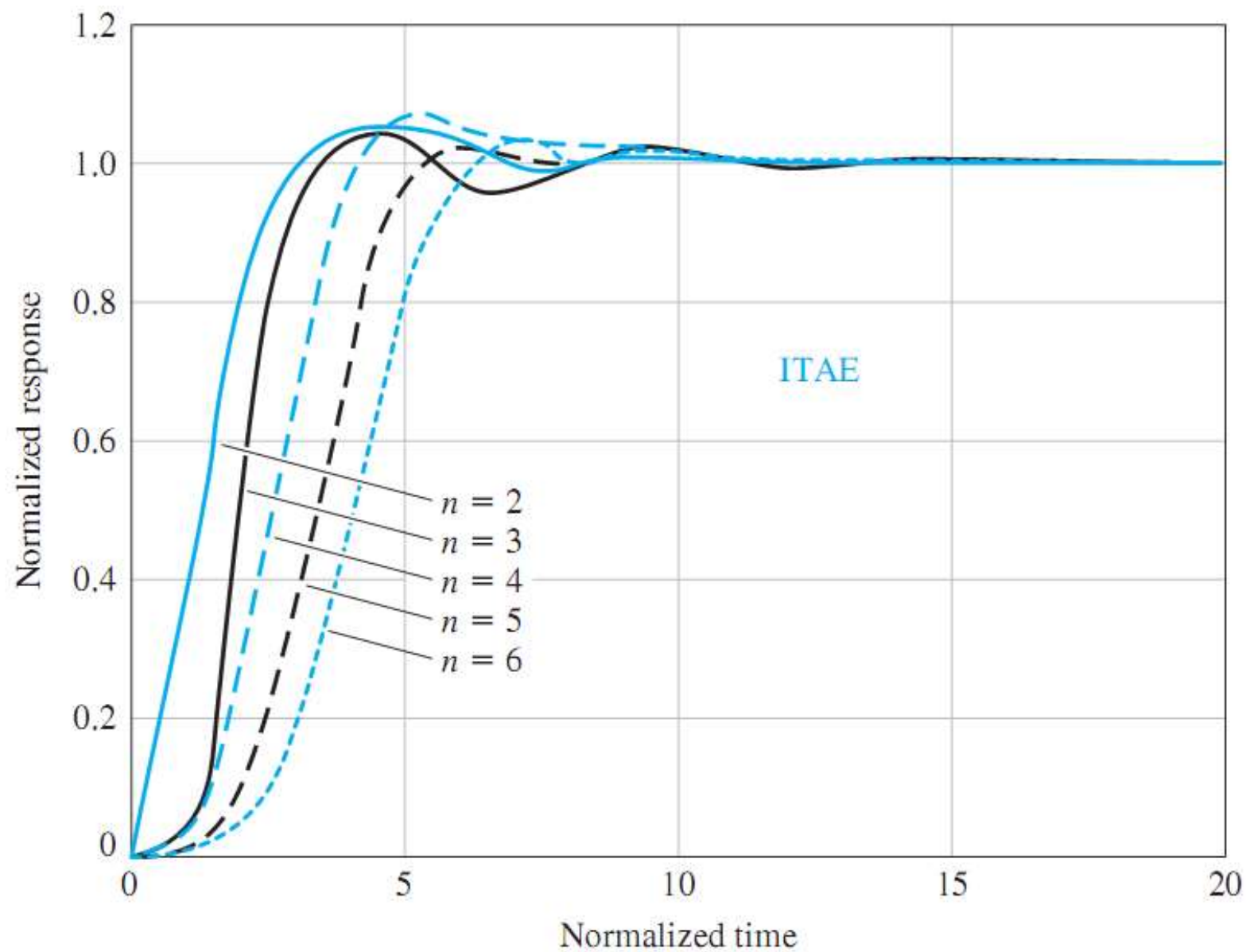
## 5.7 性能准则

### ➤ 最优IAE准则



## 5.7 性能准则

### ➤ 最优ITAE准则



## 5.7 性能准则

➤ 阶跃输入时，使ITAE准则最优的 $T(s)$ 参数表

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

---



## 5.7 性能准则

- 对斜坡输入的稳态误差为0，使ITAE准则极小化的系统闭环传递函数一般形式：

$$T(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}$$

- 前向通道传递函数  $G(s)$  至少要有两个纯积分环节，才能使跟踪斜坡输入的稳态位置误差为0
- 斜坡输入时，使ITAE准则最优的  $T(s)$  参数表

$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

## 5.8 线性系统的简化

➤ 高阶传递函数的复杂系统可以用低阶模型近似

➤ **模型降阶方法**：主导极零点法

删除传递函数中对瞬态响应影响不大的非主导极零点。删除时要注意：必须保留非主导极零点对系统稳态增益的影响

➤ 对如下系统，主导极点为 $S=-2$ ，忽略非主导极点 $S=-30$ 的影响，并保持稳态响应，化简为：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{s(s+2)(s+30)} \approx \frac{K}{s(s+2) \times 30} \\ &= \frac{K}{30} \frac{1}{s(s+2)} \end{aligned}$$

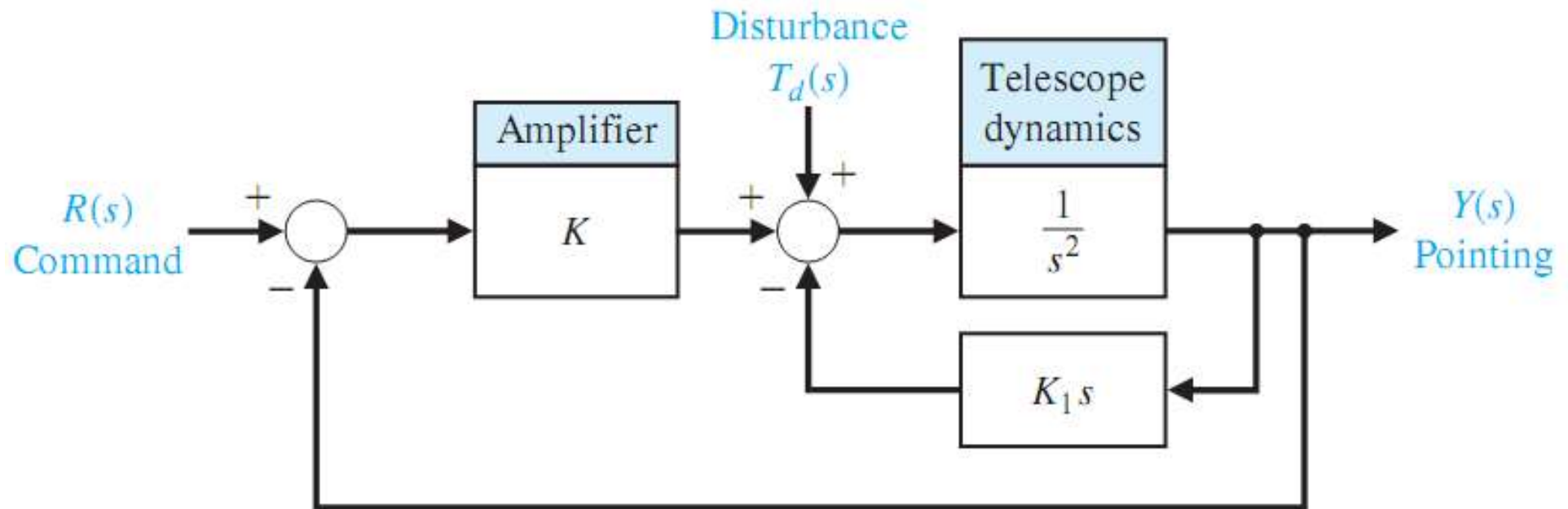
## 5.9 设计实例

### ➤ 例5.10：哈勃空间望远镜定向控制

定向系统可以在400英里外聚焦到一枚硬币

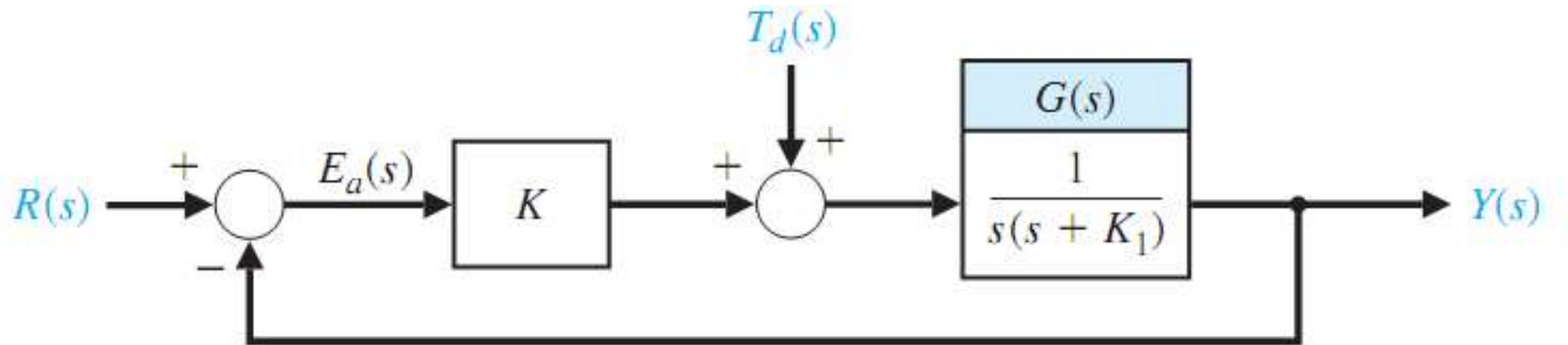
### ➤ 设计目标：选择 $K_1$ 和 $K$ 使得：

- 阶跃响应的超调量小于或等于10%
- 斜坡输入作用下稳态误差达到最小
- 减小阶跃扰动的影响



## 5.9 设计实例

➤ 对内回路的速度反馈，进行方框图化简：



➤ 两个输入作用下的系统输出：

$$Y(s) = T(s)R(s) + \frac{T(s)}{K}T_d(s)$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K}{s^2 + K_1s + K}$$

## 5.9 设计实例

➤ 闭环系统跟踪误差：

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$= \frac{1}{1 + L(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)} T_d(s)$$

➤ 先选择 $K$ 和 $K_1$ ，满足对阶跃响应超调量的要求：

$$\text{令： } R(s) = \frac{A}{s}, \quad T_d(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s) = \frac{K}{s^2 + K_1s + K} \frac{A}{s}$$

## 5.9 设计实例

➤ 为满足阶跃响应超调量小于等于10%的要求：

$\zeta=0.6$ 时，超调量 $M_{pt}=9.5\%<10\%$

$$K = \omega_n^2, \quad \omega_n = \sqrt{K}$$

$$K_1 = 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.6 \times \omega_n = 1.2\sqrt{K}$$

➤ 再计算斜坡输入的稳态误差：

$$r(t)=Bt, \quad t \geq 0$$

$$e_{ss} = \frac{B}{K_v} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} sKG(s)} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{1}{s(s+K_1)}} = \frac{B}{K_1}$$

## 5.9 设计实例

$$\frac{K}{K_1} = \frac{K}{1.2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{1.2}$$

$$e_{ss} = \frac{1.2B}{\sqrt{K}}$$

- 控制器增益 $K$ 增大，斜坡输入的稳态位置误差 $e_{ss}$ 减小
- 为使斜坡输入的稳态误差达到最小，要在满足其它性能指标的前提下，尽可能增大控制器增益 $K$

## 5.9 设计实例

➤ 由单位阶跃扰动引起的稳态误差：

$$R(s) = 0, \quad T_d(s) = \frac{1}{s}$$

$$E(s) = -\frac{G(s)}{1+L(s)} T_d(s) = -\frac{1}{s^2 + K_1 s + K} \frac{1}{s}$$

$$e_{\text{ssd}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( -\frac{1}{s^2 + K_1 s + K} \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{K}$$

➤ 控制器增益 $K$ 增大，阶跃扰动引起的稳态位置误差 $e_{\text{ssd}}$ 减小

➤ 为减小阶跃扰动的影响，也要尽可能增大 $K$



## 5.9 设计实例

- 实际系统中必须限制 $K$ ，使系统工作在线性区
- 取控制器增益 $K=100$ ，则有：

$$K_1 = 1.2 \sqrt{K} = 12$$

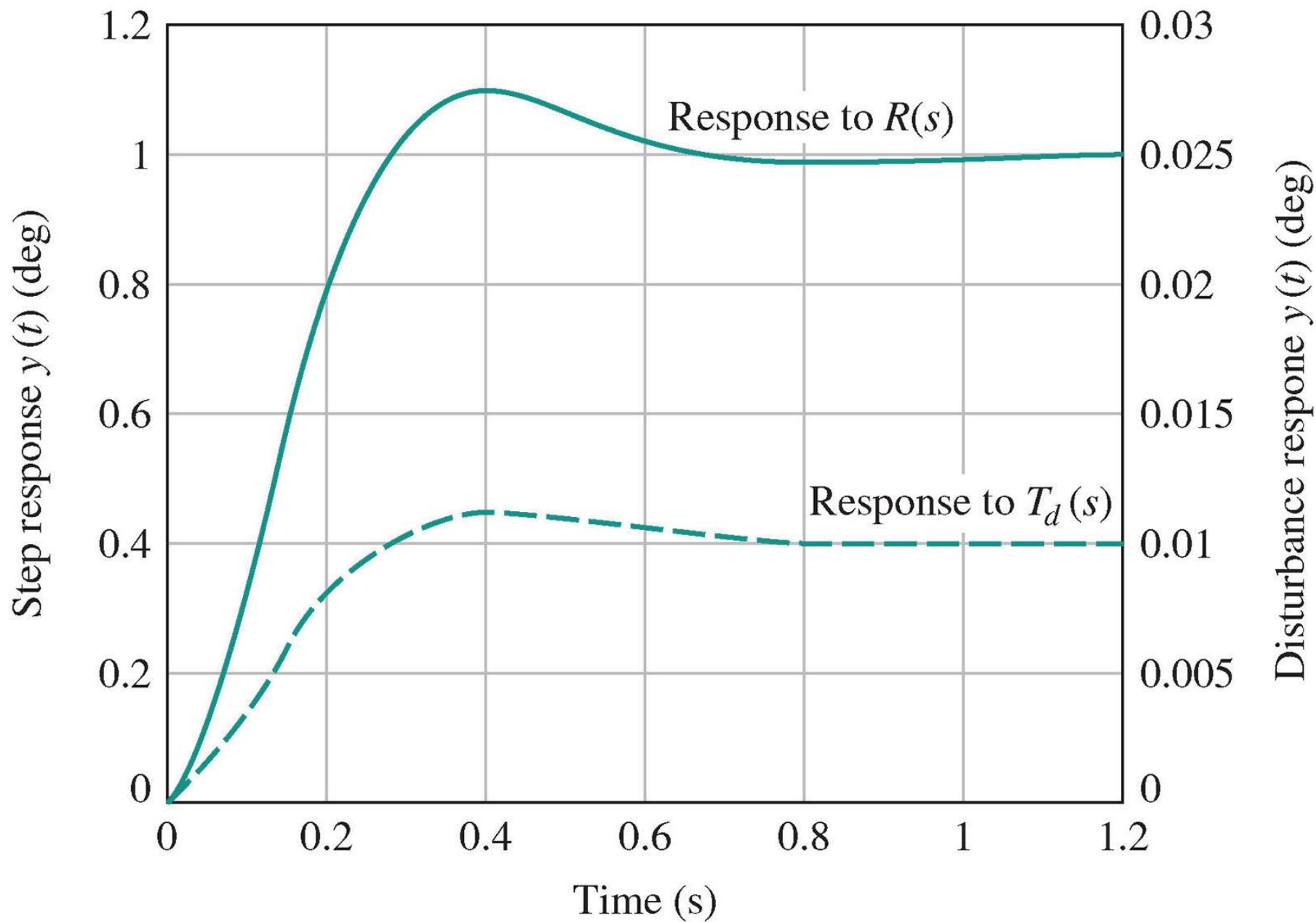
- 斜波输入的稳态误差：

$$e_{ss} = \frac{1.2B}{\sqrt{K}} = 0.12B$$

- 单位阶跃扰动的稳态误差：

$$e_{ssd} = -\frac{1}{K} = -0.01$$

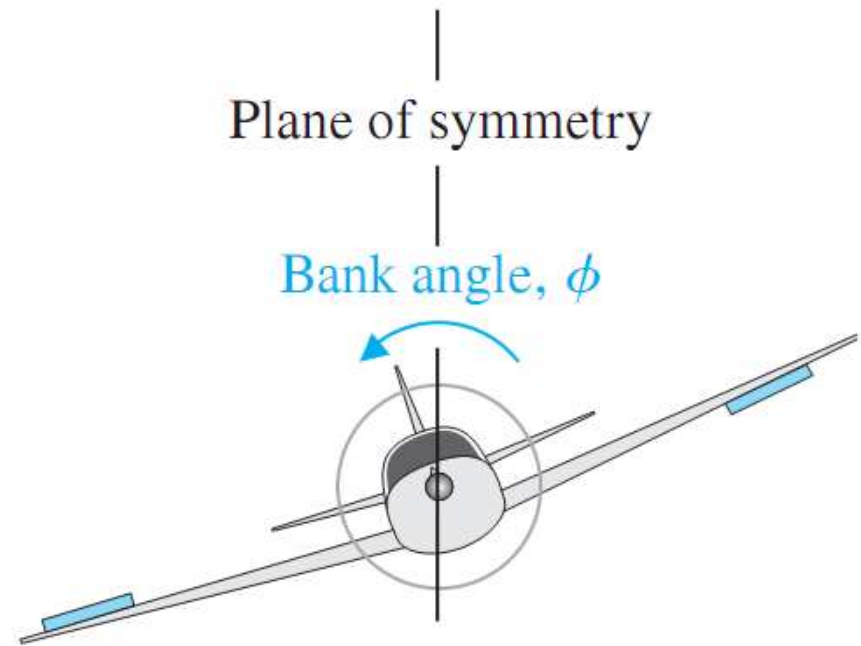
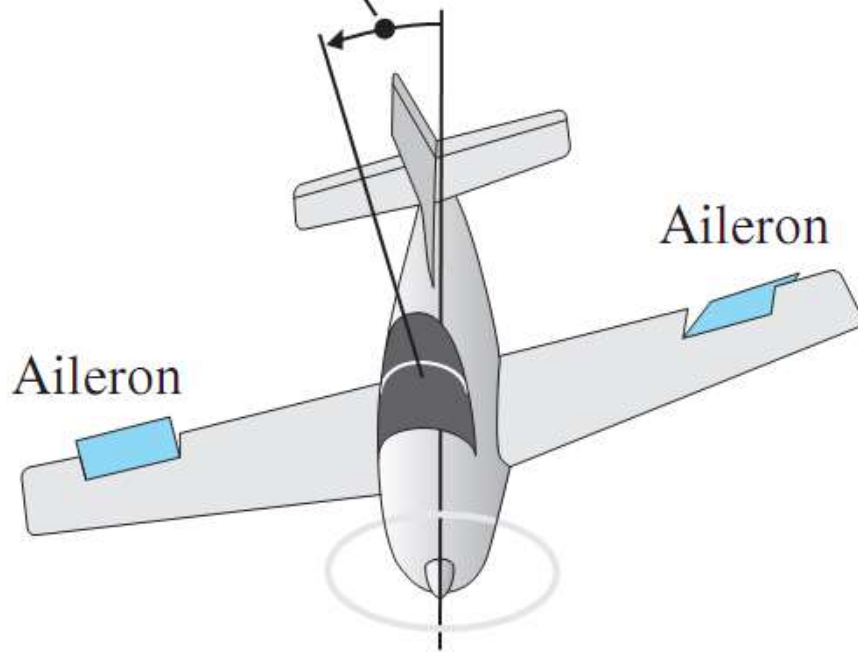
## 5.9 设计实例



## 5.9 设计实例

- **例5.11：**飞机姿态控制
- 飞机运动的精确模型很复杂，一组高度非线性、时变、耦合的微分方程
- 飞机侧滚运动模型可简化为副翼偏转、飞机倾斜角之间的输入输出传递函数

Bank angle,  $\phi$

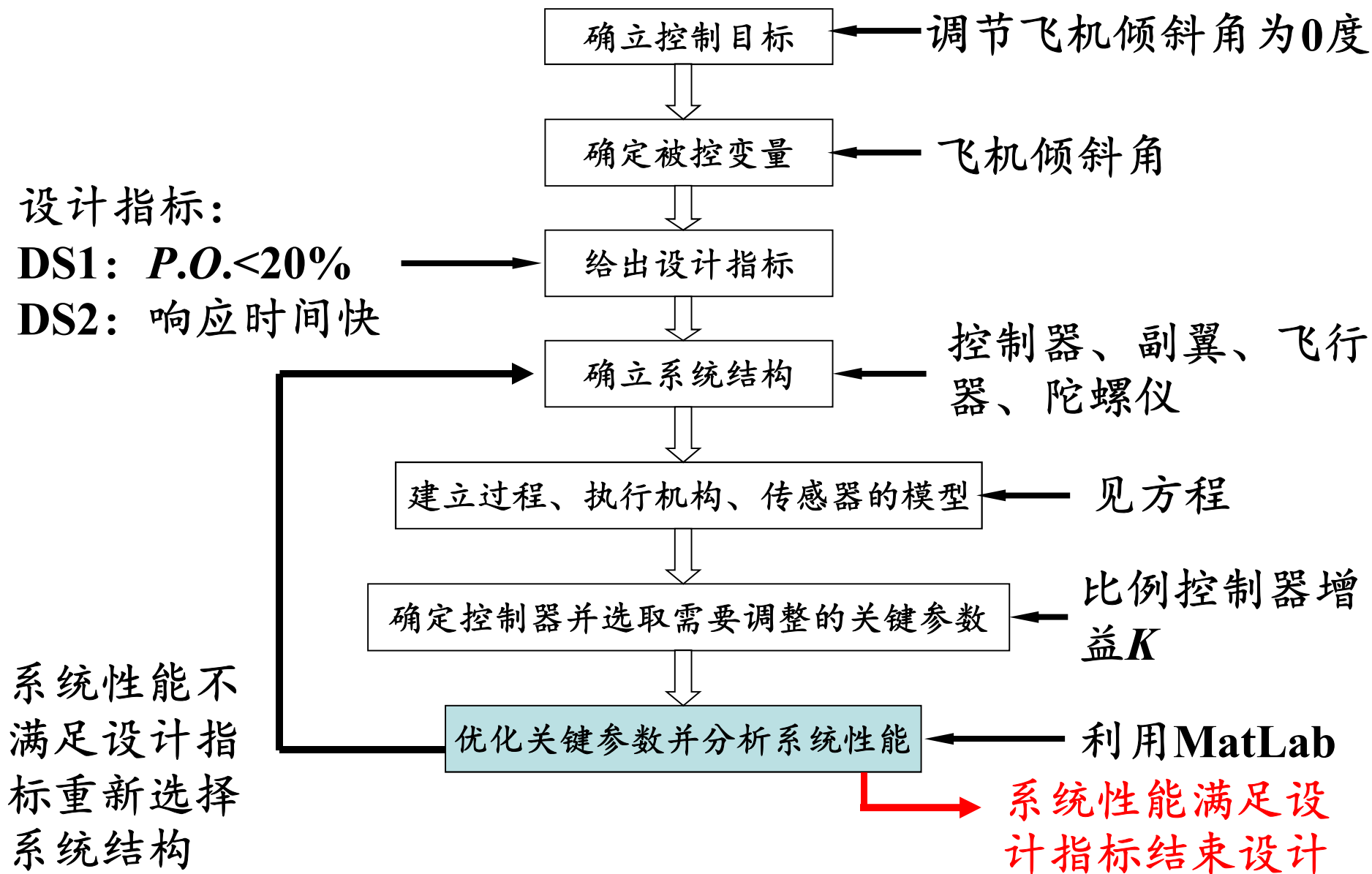


## 5.9 设计实例

- 假设飞机是刚性的，具有一个对称面，以亚音速或低超音速(马赫数 $<3$ )巡航，低速稳定，机翼水平飞行姿态
- **控制目标：** 调节飞机倾斜角为0度(稳定的，机翼水平)，出现不可预知的外部扰动时，能够维持机翼水平方向
- **被控变量：** 飞机倾斜角(记为 $\Phi$ )
- **控制设计指标：**
  - **DS1：** 单位阶跃输入百分比超调量小于20%
  - **DS2：** 响应时间快(以峰值时间计)

## 5.9 设计实例

### ➤ 飞机姿态控制系统设计过程中的要素



## 5.9 设计实例

- 在稳定、水平飞行时，经简化和线性化，得侧滚运动传递函数模型：

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{k(s - c_0)(s^2 + b_1s + b_0)}{s(s + d_0)(s + e_0)(s^2 + f_1s + f_0)}$$

- 副翼偏转 $\delta_a(s)$ 为输入，倾斜角 $\Phi(s)$ 为输出
- 飞机侧向运动主要有三种模式：荷兰翻滚、螺旋、衰减横摇。共轭复极点 $s^2 + f_1s + f_0$ 与荷兰翻滚模态有关；极点 $S = -d_0$ 与螺旋模态有关；极点 $S = -e_0$ 与衰减横摇模态有关，一般有 $e_0 \gg d_0$
- F-16以500 ft/s稳定、水平飞行时，有： $e_0 = 3.57$ ， $d_0 = 0.0128$

## 5.9 设计实例

- 小攻角(例如稳定、水平飞行)时, 荷兰翻滚模态通常与传递函数中 $s^2+b_1s+b_0$ 项对消
- 可以忽略螺旋模态, 它本质上是一种偏航运动, 与侧滚运动关系不大
- 零点 $S=c_0$ 代表重力影响, 在侧滚时造成飞机侧滑, 假定飞机侧滑微弱或没有, 这种影响可以忽略
- 得到单自由度的近似模型:

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{k}{s(s+e_0)}$$

- 选取:  $e_0=1.4$ ,  $k=11.4$
- 衰减横摇的时间常数 $\tau=1/e_0\approx 0.7$ 秒

## 5.9 设计实例

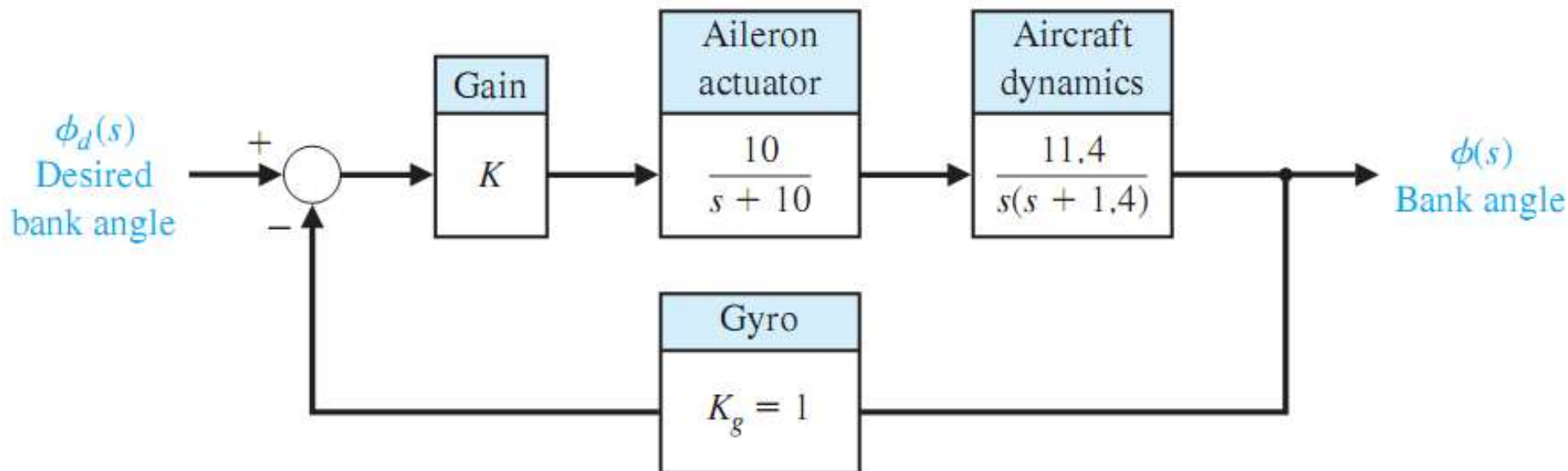
- 副翼执行器通常采用一阶模型：

$$\frac{\delta_a(s)}{e(s)} = \frac{p}{s + p}$$

- $p=10$ ，时间常数  $\tau=1/p=0.1$  秒

- $e(s)=\Phi_d(s)-\Phi(s)$

- 忽略陀螺动态，陀螺仪模型： $K_g=1$





## 5.9 设计实例

- 采用比例控制器： $G_c(s)=K$
- 选择关键调整参数：控制器增益 $K$
- 闭环传递函数为三阶模型，降阶为二阶模型，使近似系统的频率响应尽量接近原系统

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} = \frac{114K}{s^3 + 11.4s^2 + 14s + 114K} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{14}{114K}s + \frac{11.4}{114K}s^2 + \frac{1}{114K}s^3} \end{aligned}$$

## 5.9 设计实例

➤ 近似传递函数为：

$$G_L(s) = \frac{11.29K}{s^2 + \sqrt{1.92 - 2.91K}s + 11.29K}$$

➤ 为保证系统物理可实现，分母多项式的系数必须为实数，要求  **$K < 0.65$**

➤ 期望的二阶传递函数为：

$$G_L(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 11.29K$$

$$\zeta^2 = \frac{0.043}{K} - 0.065$$

## 5.9 设计实例

➤ 要求单位阶跃输入百分比超调量小于20%:

$$P.O.=100 e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 20$$

可得:  $\zeta \geq 0.45$

取:  $\zeta = 0.45$

得:  $K = 0.16$

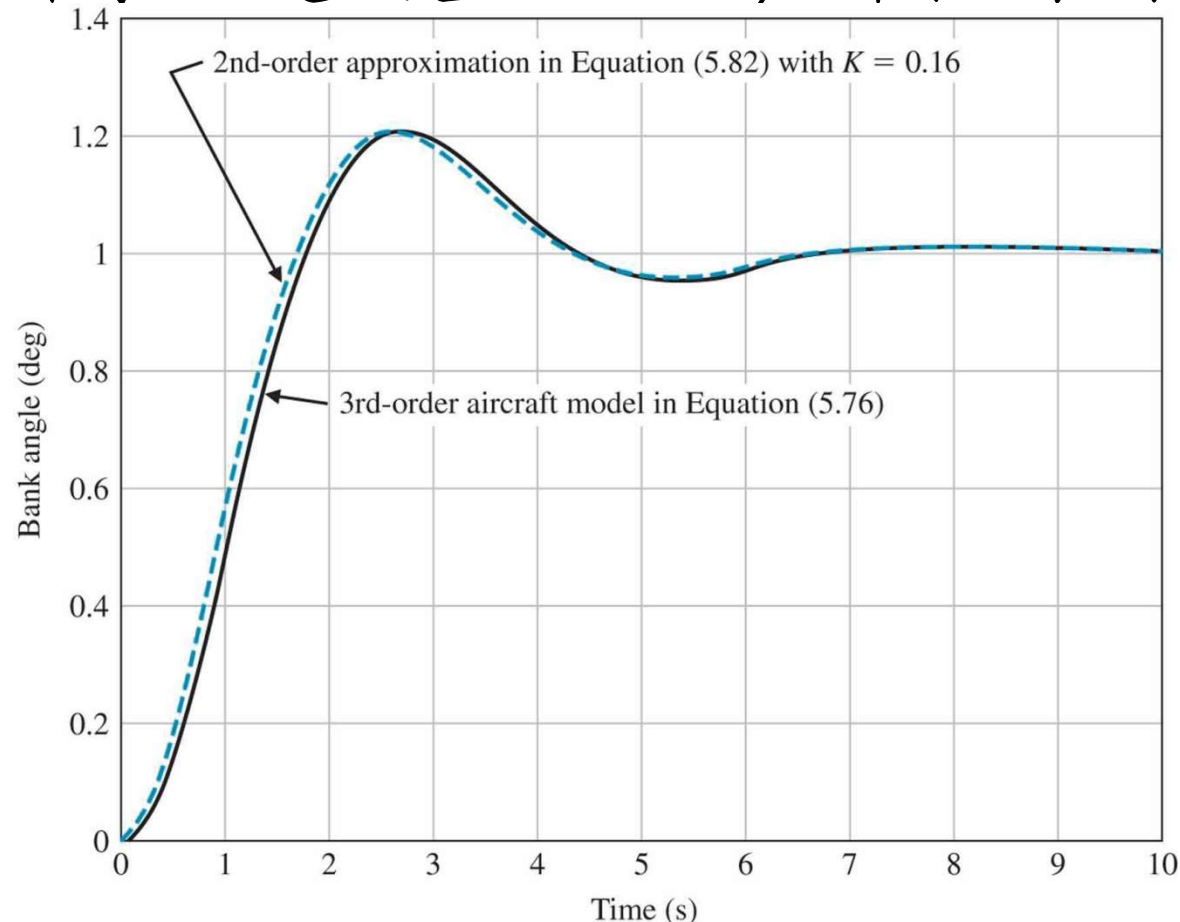
$$\omega_n = \sqrt{11.29K} = 1.34$$

➤ 峰值时间:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2.62 \text{秒}$$

## 5.9 设计实例

- 实际是三阶系统，要考虑第三个极点的影响
- 观察阶跃响应，二级模型能很好近似三阶模型
- $K=0.16$ 时二阶系统超调量20%，峰值时间2.62s
- 实际三阶系统超调量20.5%，峰值时间2.73s



## 5.9 设计实例

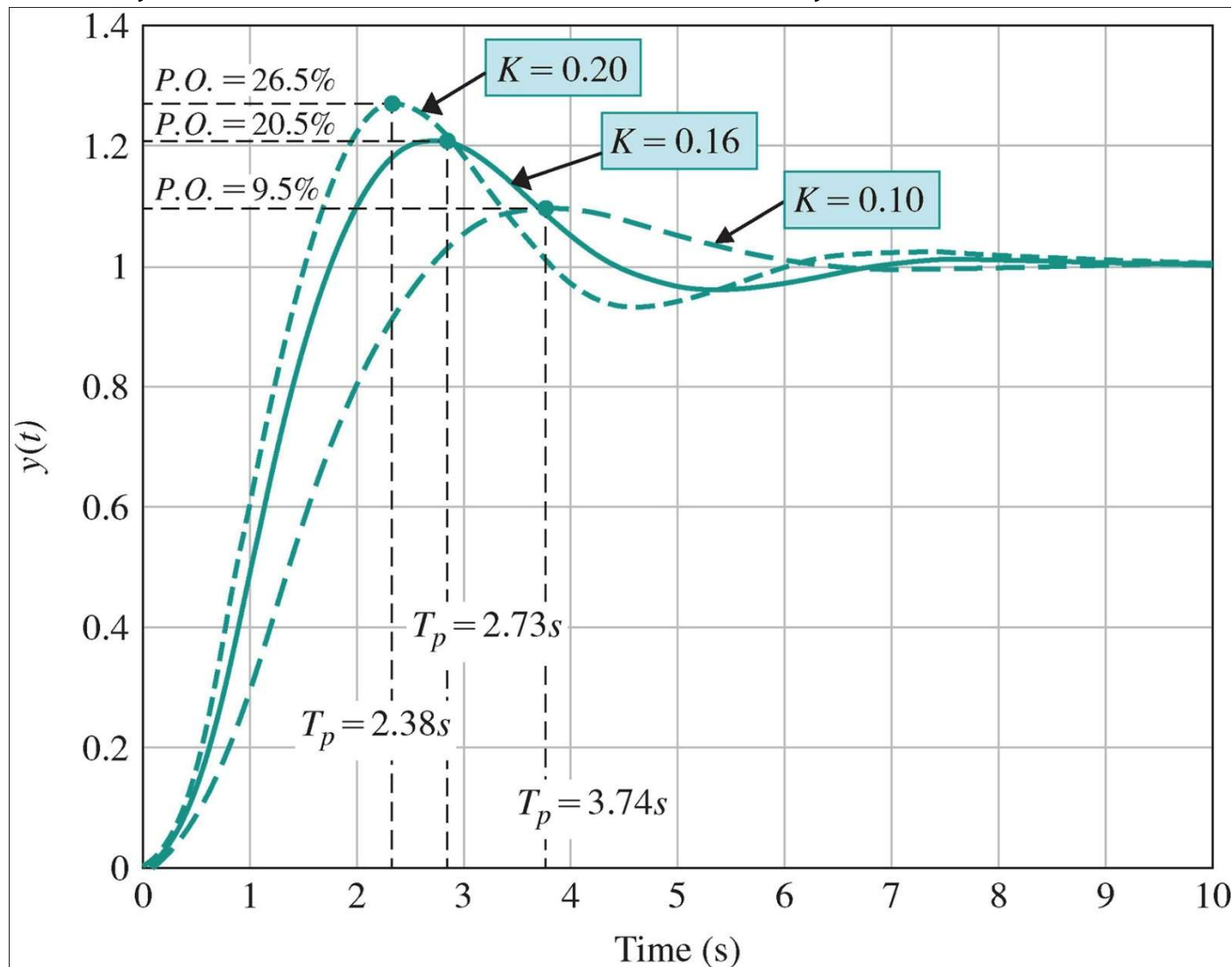
- 若选取 $\zeta > 0.45$ ，则可进一步的减小超调量
- 但增加 $\zeta$ ，就要减小 $K$ ，而减小 $K$ ， $\omega_n$ 也随着减小，峰值时间随着增大

$K$	P.O. (%)	$T_p(s)$
0.10	9.5	3.74
0.16	20.5	2.73
0.20	26.5	2.38

- 设计要求保证超调量，同时使峰值时间最小
- 选择 $\zeta = 0.45$ 能同时满足两个设计目标

## 5.9 设计实例

➤  $K=0.10, 0.16, 0.20$ 时, 三阶系统阶跃响应, 随着 $K$ 减小, 百分比超调量减小, 峰值时间上升



## 5.10 应用控制设计软件分析系统性能 (略)

## 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤ **设计目标：** 系统有最快的阶跃响应，同时：

- 限制响应的超调量和振荡特性

- 减小扰动对读磁头输出位置的影响

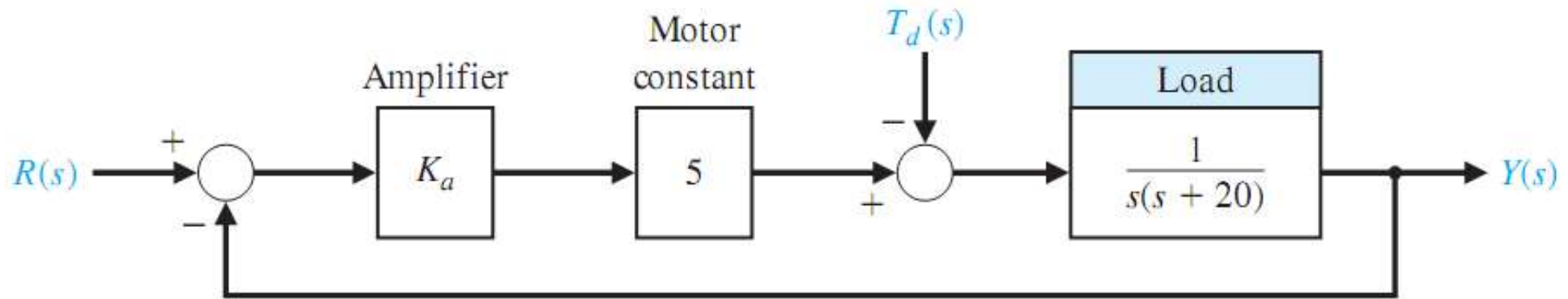
➤ **瞬态响应设计指标：**

工作指标	期望值
百分比超调量	小于 <b>5%</b>
调整时间	小于 <b>250 ms</b>
对单位阶跃扰动的最大响应值	小于 <b>0.005</b>



## 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

- 忽略线圈电感之后，电机和读磁头臂的动力学特性是二阶模型



- 当  $T_d(s)=0$  时，闭环系统输出：

$$Y(s) = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a} R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

- 可得：  $\omega_n^2 = 5K_a$ ,  $2\zeta\omega_n = 20$

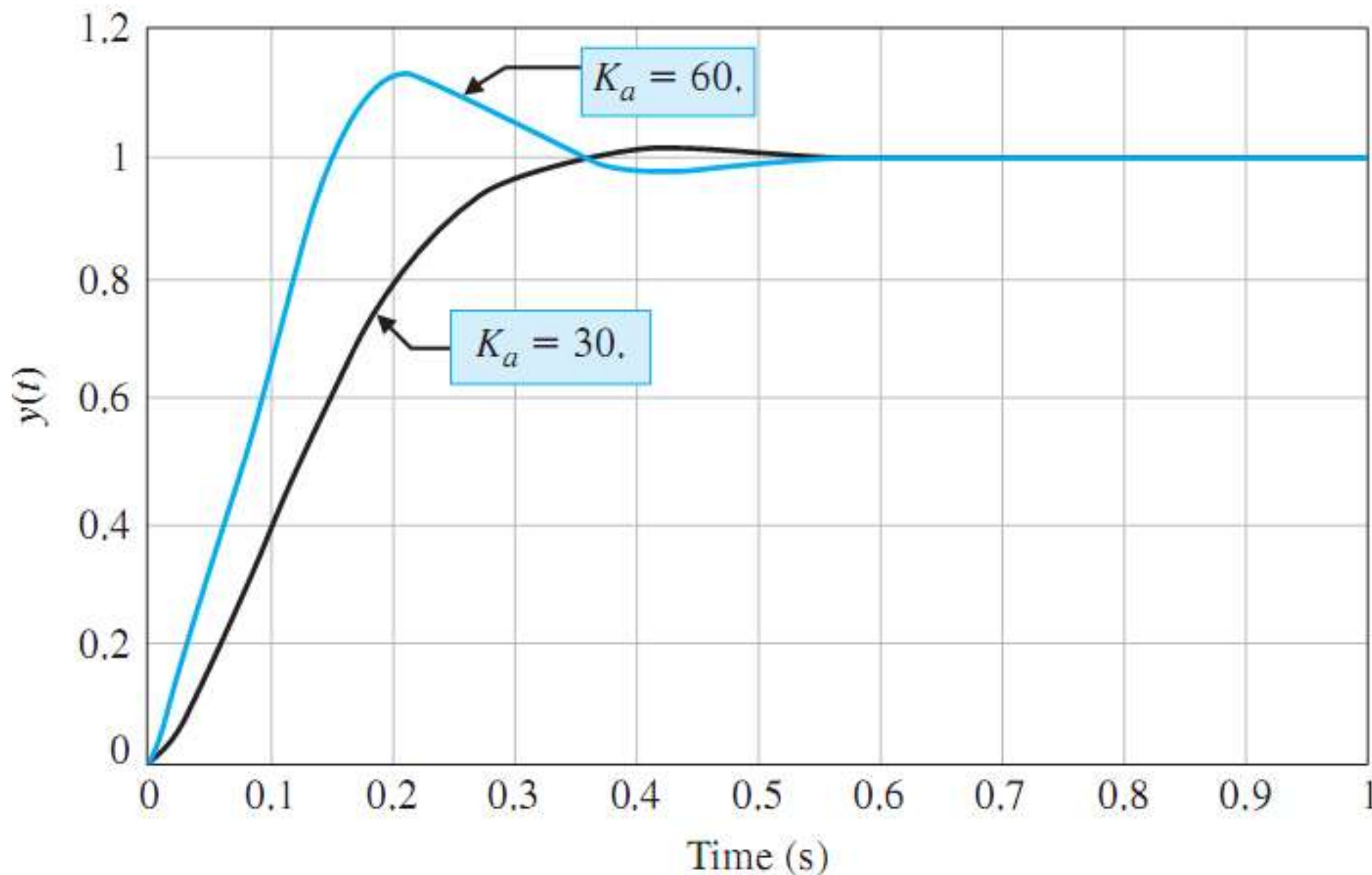
## 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤ 控制器增益变化时，闭环系统响应品质：

$K_a$	20	30	40	60	80
阻尼比	1	0.82	0.707	0.58	0.50
百分比超调量	0	1.2%	4.3%	10.8%	16.3%
调整时间(秒)	0.55	0.40	0.40	0.40	0.40
对单位阶跃扰动的最大响应值	-0.01	-0.0066	-0.0052	-0.0037	-0.0029

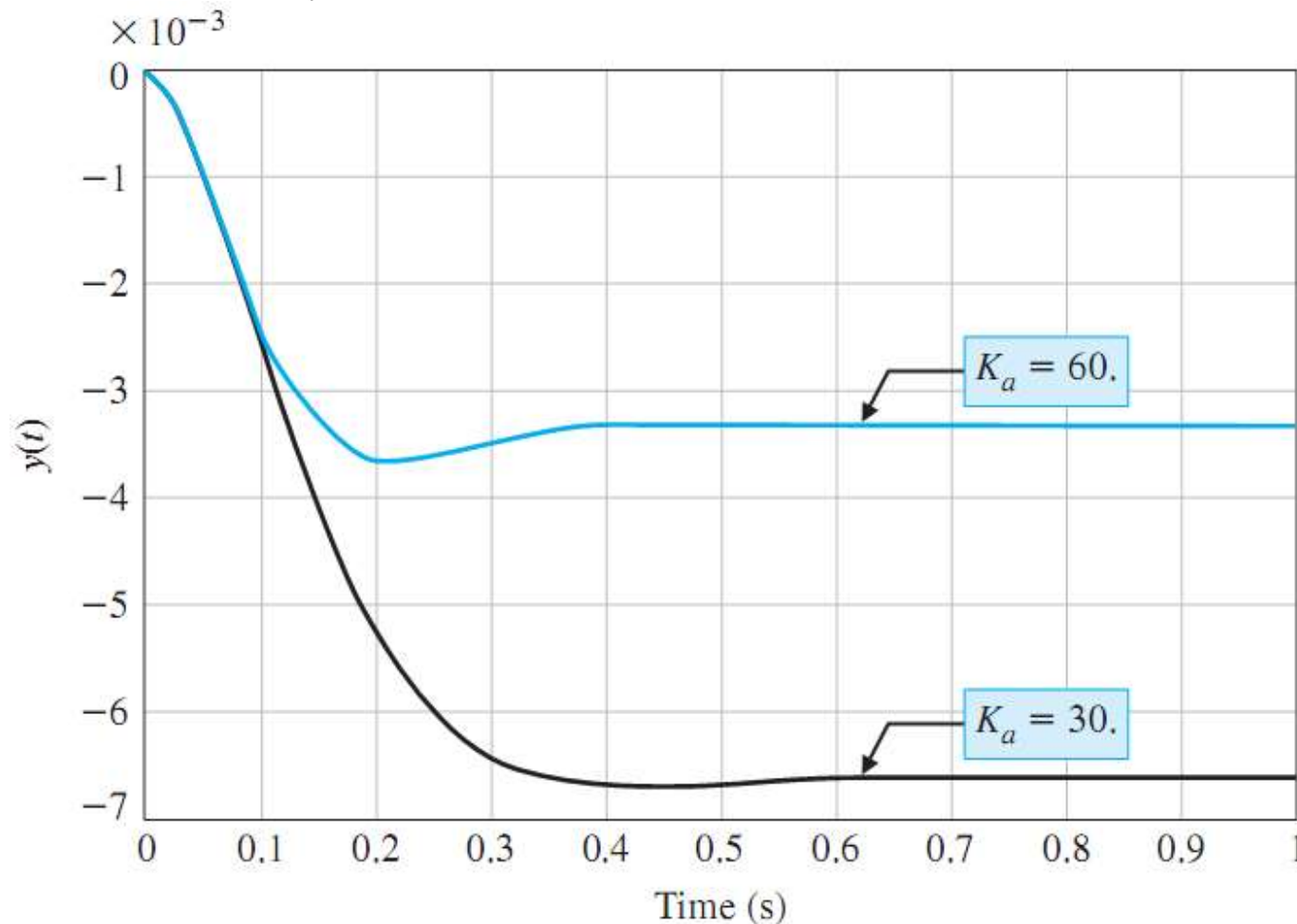
## 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤  $K_a=30$ 和60时，系统单位阶跃响应



## 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤  $K_a=30$ 和60时，系统对单位阶跃扰动的响应：



➤  $K_a=60$ 时，扰动的影响减少了一半

➤ 折衷选取  $K_a=40$ ，它并不满足所有的性能指标

## 5.12 总结

- 反馈控制系统性能指标的定义、测度
- 标准测试信号
- 对标准阶跃测试信号的几种性能指标
- 性能指标之间通常是矛盾的，需要折衷设计
- 系统传递函数的极点在 $S$ 平面上的位置，与系统响应之间的联系
- 系统对标准测试信号的稳态误差
- 积分性能准则

**END**