信号与图像处理基础

Fourier Analysis and Convolution

中国科学技术大学 自动化系
曹 洋

本节内容

- 傅里叶变换回顾
- 傅里叶变换性质与信号卷积
- 图像傅里叶变换

1. 傅里叶变换回顾

- 复数的几何意义
- 欧拉公式和调和函数
- 傅里叶变换
- 离散傅里叶变换

复数的几何意义

复数可以用于描述二维复平面上的点集

A complex number is one of the form

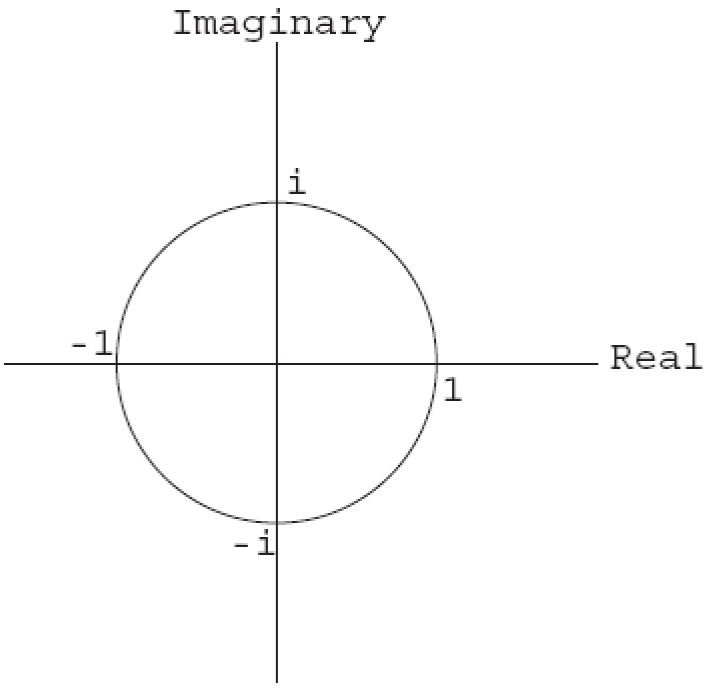
$$a + bi$$

where

$$i = \sqrt{-1}$$

a: *real part*

b: *imaginary part*



复数的几何意义

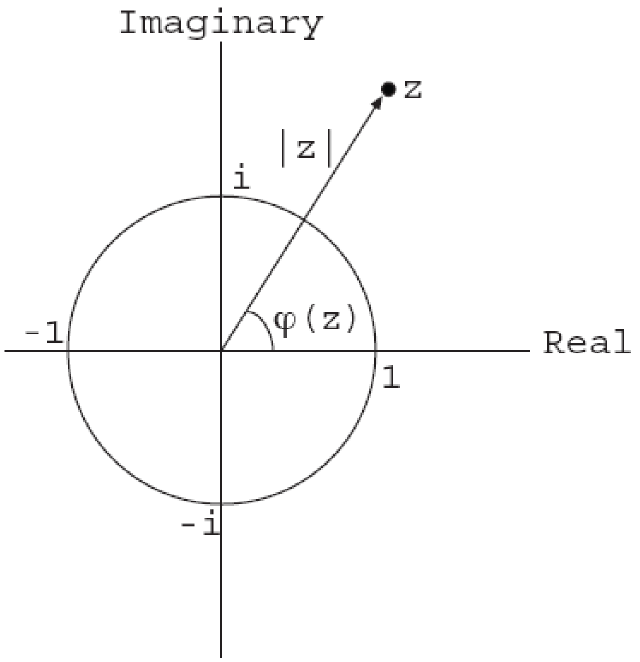
复数的幅值和相位（Magnitude and Phase）

- The length is called the *magnitude*:

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

- The angle from the real-number axis is called the *phase*:

$$\phi(a+bi) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



复数的几何意义

复数乘法

- When you multiply two complex numbers, their magnitudes multiply:

$$|xy| = |x||y|$$

and their phases add:

$$\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$$

复数乘法的等效表达：

$$(a_1 e^{b_1})(a_2 e^{b_2}) = a_1 a_2 e^{(b_1+b_2)}$$ 指数形式

欧拉公式

欧拉公式的定义

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

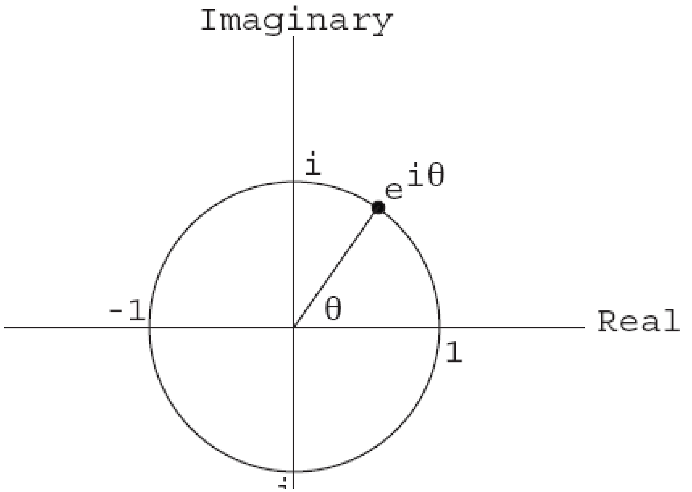
任意的一个复数z可以写作：

$$z = |z|\, e^{i\phi(z)}$$

欧拉公式的几何意义

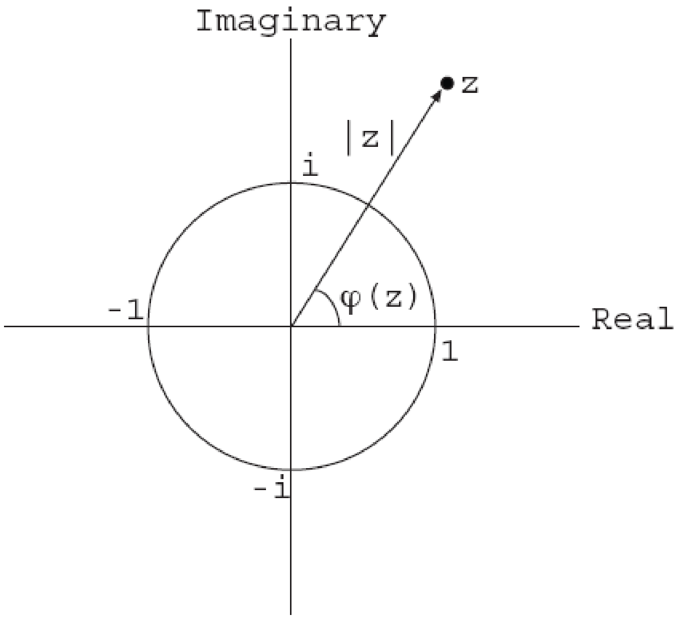
欧拉公式的定义

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



任意的一个复数z可以写作：

$$z = |z|\, e^{i\phi(z)}$$



调和函数（Harmonic Functions）

考虑一下这个函数：$f(t) = e^{i2\pi ut}$

Real Part	Imaginary Part
$\Re(e^{i2\pi ut})$	$\Im(e^{i2\pi ut})$
$\cos(2\pi ut)$	$\sin(2\pi ut)$

$e^{i2\pi ut}$ **模为1**

将正弦函数和余弦函数同时表示；

若这个函数是信号的描述，则u为信号频率；

这一函数被称作广义调和函数。

调和函数（Harmonic Functions）

若将调和函数输入一个线性时不变系统，则有

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{i2\pi ut} \\ f(t) &\rightarrow H(u)\ f(t) \end{aligned}$$

其中,**H(u)**为系统传递函数，满足

$$H(u) = |H(u)|\ e^{i\phi(H(u))}$$

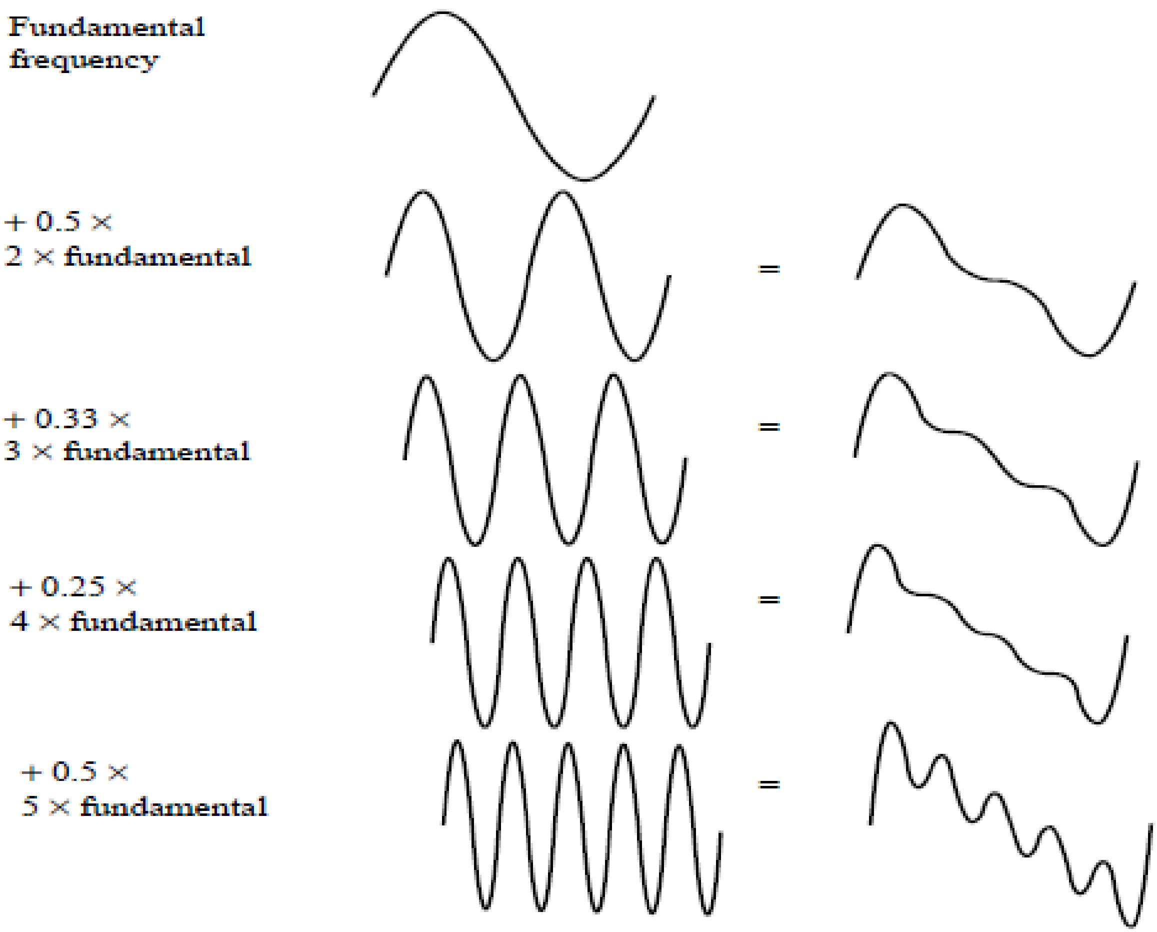
则有，

$$\begin{aligned} H(u)\ e^{i2\pi ut} &= |H(u)|\ e^{i\phi(u)}\ e^{i2\pi ut} \\ &= |H(u)|\ e^{i(2\pi ut+\phi(u))} \end{aligned}$$

$|H(u)|$ is the **Modulation Transfer Function (MTF)**
$\phi(H(u))$ is the **Phase Transfer Function (PTF)**

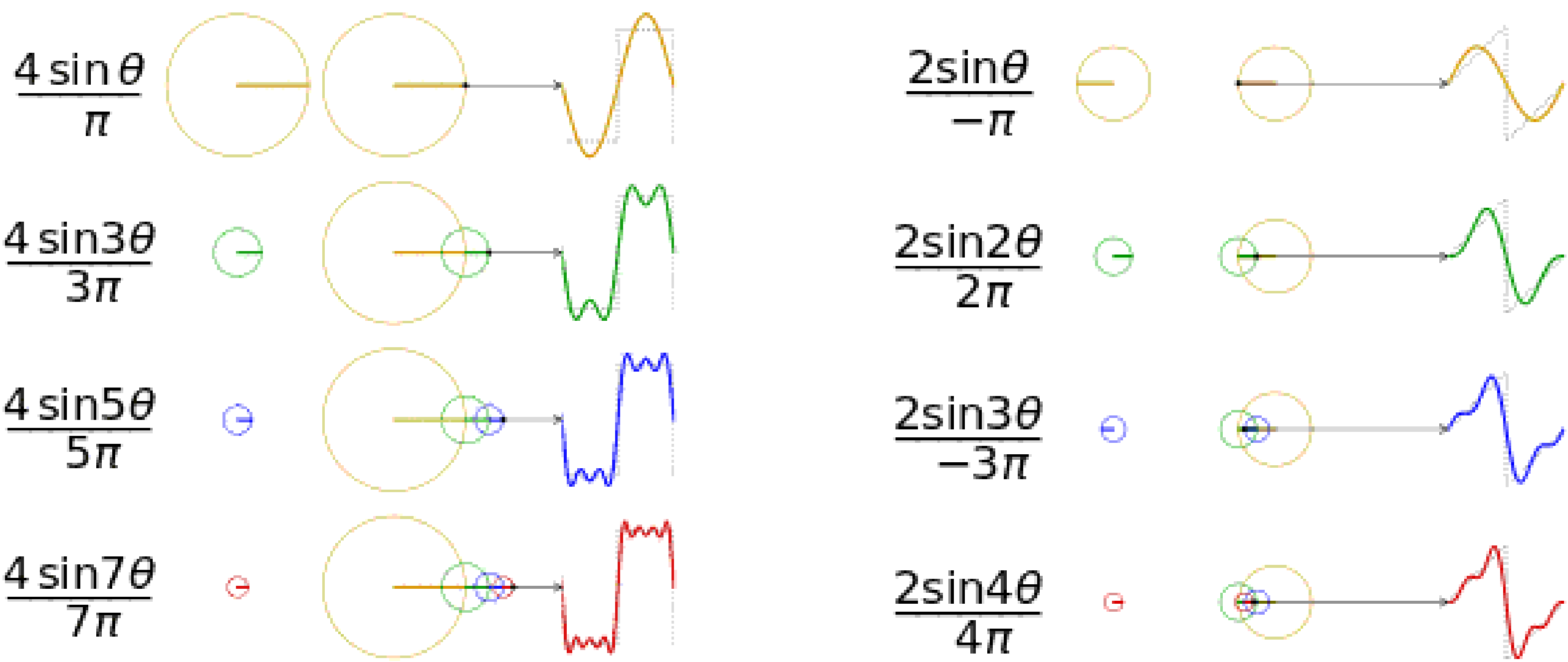
傅里叶变换

复杂信号描述为一组正弦信号的叠加



傅里叶变换

类正弦信号



$\frac{4\sin\theta}{\pi}$
$\frac{4\sin3\theta}{3\pi}$
$\frac{4\sin5\theta}{5\pi}$
$\frac{4\sin7\theta}{7\pi}$
$\frac{2\sin\theta}{-\pi}$
$\frac{2\sin2\theta}{2\pi}$
$\frac{2\sin3\theta}{-3\pi}$
$\frac{2\sin4\theta}{4\pi}$

傅里叶变换的基本原理

假设有一组单位正交基 $\{\overline{e}_k\}$

则属于由单位正交基所构成空间内的向量可以描述为：

$$\overline{v} = \sum_k a_k \, \overline{e}_k$$

其中，权重系数为

$$a_k = \overline{v} \cdot \overline{e}_k$$

Notes:

- 每个向量可以被转换为一组权重系数
- 向量与权重系数之间的转换是可逆变换

函数的线性计算

向量的内积：

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \sum_{j} \overline{u}[j]\ \overline{v}[j]$$

类比定义函数的内积：

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ g(x)\ dx$$

- *Functions satisfy all of the linear algebraic requirements of vectors.*

傅里叶变换的基本原理

类比向量的正交投影变换，函数同样满足：

	Vectors $\{\overline{e}_k\}$	Functions $\{e_k(t)\}$
Transform	$a_k = \overline{v} \cdot \overline{e}_k$ $= \sum_j \overline{v}[j]\ e_k[j]$	$a_k = f \cdot e_k$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e_k(t)\ dt$
Inverse	$\overline{v} = \sum_k a_k\ \overline{e}_k$	$f(t) = \sum_k a_k\ e_k(t)$

函数的基: 调和函数

调和函数可以作为输入函数的一组正交基:

$$e^{i2\pi ut} = \cos(2\pi ut) + i\sin(2\pi ut)$$

- The real part is a cosine of frequency u.
- The imaginary part is a sine of frequency u.

傅里叶级数

对于一个有限集合 $\{u_k\}$:

	All Functions $\{e_k(t)\}$	Harmonics $\{e^{i2\pi ut}\}$
Transform	$a_k = f \cdot e_k$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e_k(t)\, dt$	$a_k = f \cdot e^{i2\pi u_k t}$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi u_k t}\, dt$
Inverse	$f(t) = \sum_k a_k\, e_k(t)$	$f(t) = \sum_k a_k\, e^{i2\pi u_k t}$

傅里叶变换

将uk换为频率u，则有

	Fourier Series	Fourier Transform
Transform	$a_k = f \cdot e^{i2\pi u_k t}$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi u_k t}\, dt$	$F(u) = f \cdot e^{i2\pi u t}$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi u t}\, dt$
Inverse	$f(t) = \sum_k a_k\, e^{i2\pi u_k t}$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i2\pi u t}\, du$

傅里叶变换

To get the weights (amount of each frequency):

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi ut}\, dt$$

$\boxed{F(u) \text{ is the Fourier Transform of } f(t)\text{: } F(u) = \mathcal{F}(f(t))}$

To turn the weights back into the signal (invert the transform):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i2\pi ut}\, du$$

$\boxed{f(t) \text{ is the Inverse Fourier Transform of } F(u)\text{: } f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(u))}$

傅里叶变换

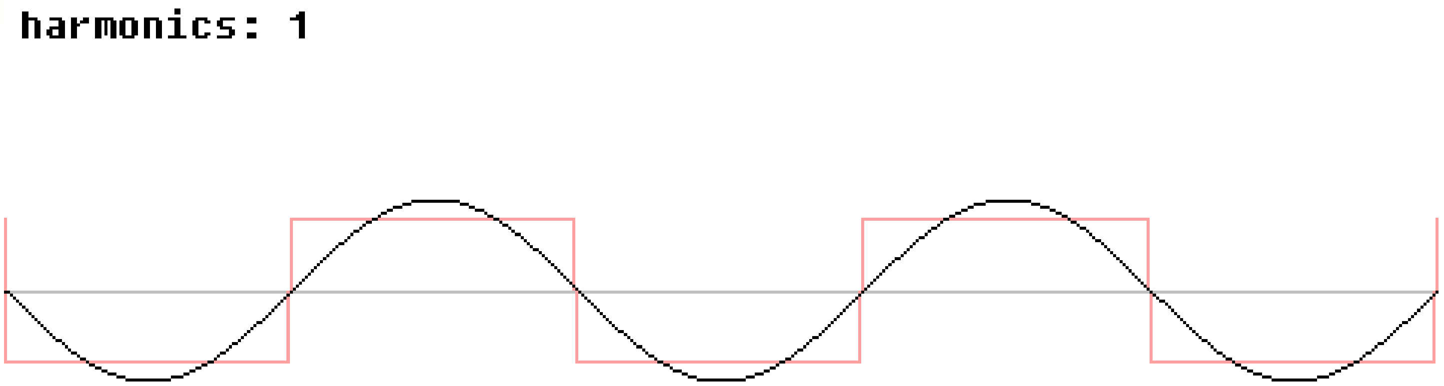
How to handle the complex numbers:

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi ut}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, [\cos(-2\pi ut) + i \sin(-2\pi ut)]\ dt \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \cos(-2\pi ut)\, dt}_{\text{Real-valued Integral}} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-2\pi ut)\, dt}_{\text{Real-valued Integral}}
\end{aligned}
$$

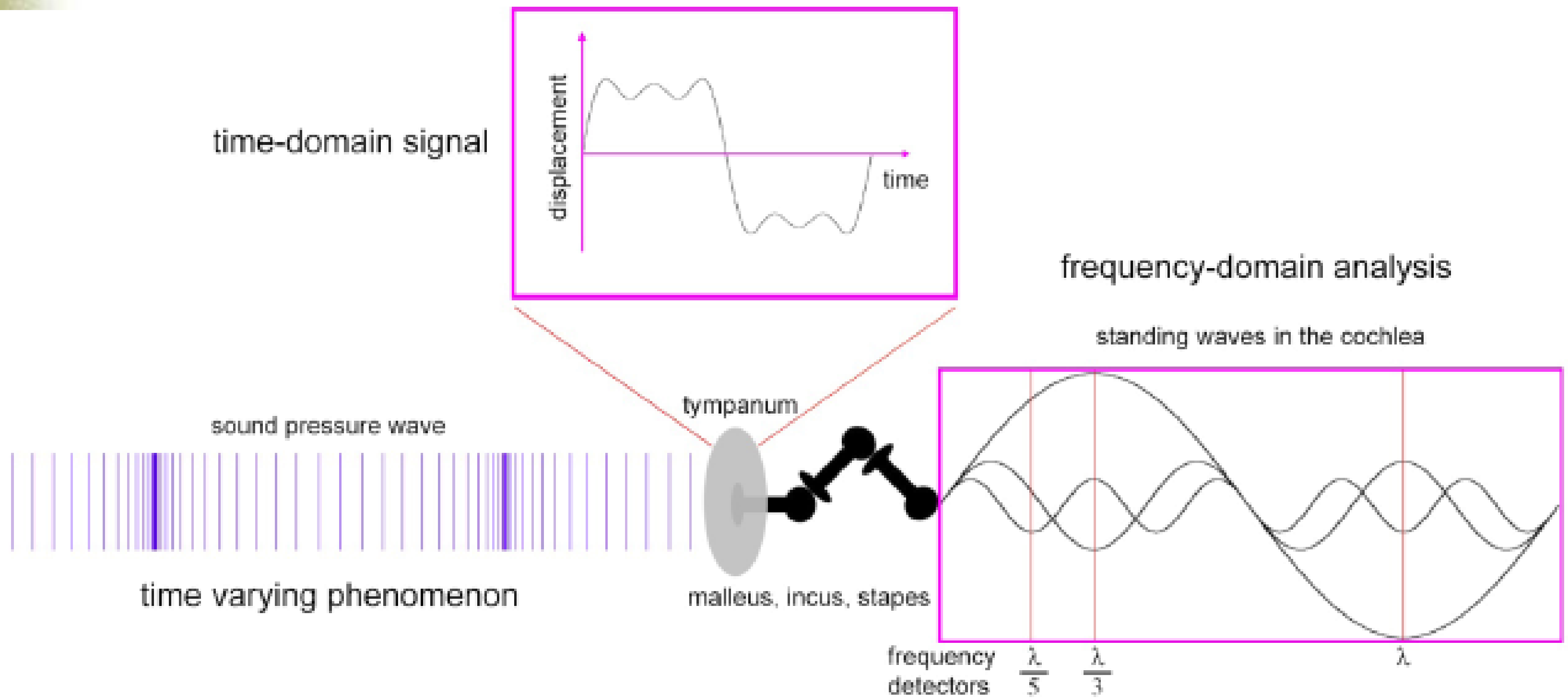
So, all we're really doing is

- projecting onto a cosine (one integral)
- projecting onto a sine (the other integral)
- encoding the result as a complex number

信号拟合– N Harmonics



哺乳动物的知觉感应使用傅里叶变换



离散傅里叶变换

离散傅里叶变换，将时域信号的采样变换为在离散时间傅里叶变换频域的采样。即使对有限长的离散信号作**DFT**，也应当将其看作经过周期延拓成为周期信号再作变换。

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{-i2\pi ux/M} \qquad f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)\, e^{i2\pi ux/M}$$

归一化离散傅里叶变换

Basis Functions	$e^{i2\pi ux/M}$
Transform	$F[u]=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\ e^{-i2\pi ux/M}$
Inverse	$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1} F[u]\ e^{i2\pi ux/M}$

Basis Functions	$\frac{1}{M}e^{i2\pi ux/M}$
Transform	$F[u]=\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\ e^{-i2\pi ux/M}$
Inverse	$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F[u]\ e^{i2\pi ux/M}$

Basis Functions	$\frac{1}{\sqrt{M}}e^{i2\pi ux/M}$
Transform	$F[u]=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\ e^{-i2\pi ux/M}$
Inverse	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{u=0}^{M-1} F[u]\ e^{i2\pi ux/M}$

2. 傅里叶变换性质与信号卷积

- 典型信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换的性质
- 信号的卷积

典型信号的傅里叶变换

$$f(t) = \cos(2\pi st)$$

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi ut}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\, e^{-i2\pi ut}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\; [\cos(-2\pi ut) + i\sin(-2\pi ut)]\; dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\; \cos(-2\pi ut)\, dt + i\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\; \sin(-2\pi ut)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\; \cos(2\pi ut)\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)\; \sin(2\pi ut)\, dt
\end{aligned}
$$

0 except when $u = \pm s$ 　　　 0 for all u

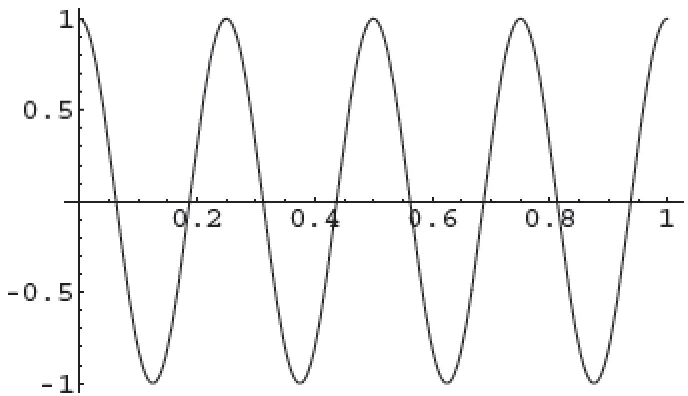
$$= \frac{1}{2}\delta(u-s) + \frac{1}{2}\delta(u+s)$$

典型信号的傅里叶变换

余弦信号

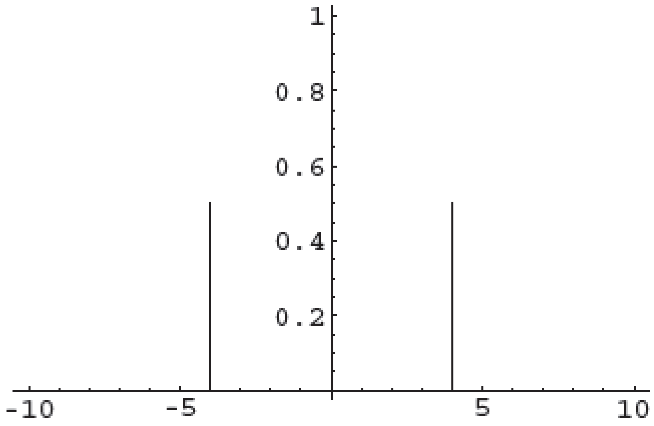
Spatial Domain

$\cos(2\pi st)$



Frequency Domain

$\frac{1}{2}\delta(u-s)+\frac{1}{2}\delta(u+s)$

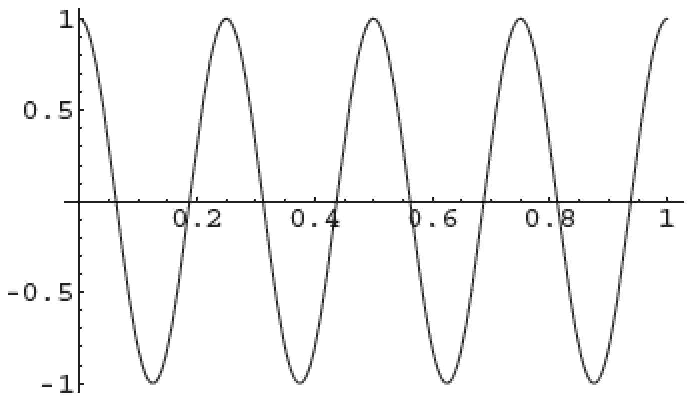


典型信号的傅里叶变换

余弦信号

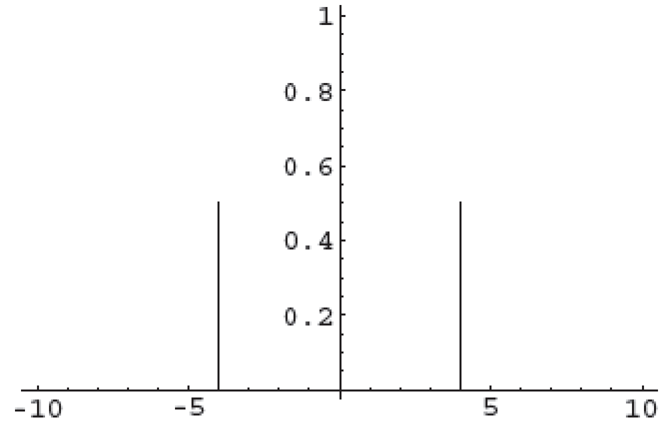
Spatial Domain

$\cos(2\pi st)$



Frequency Domain

$\frac{1}{2}\delta(u-s)+\frac{1}{2}\delta(u+s)$



典型信号的傅里叶变换

正弦信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\cos(2\pi st)$	$\frac{1}{2}[\delta(u+s)+\delta(u-s)]$
$\sin(2\pi st)$	

典型信号的傅里叶变换

正弦信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\cos(2\pi st)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(u+s)+\delta(u-s)\right]$
$\sin(2\pi st)$	$\frac{1}{2}i\left[\delta(u+s)-\delta(u-s)\right]$

典型信号的傅里叶变换

阶跃信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
1	
a	

典型信号的傅里叶变换

阶跃信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
1	$\delta(u)$
a	$a\ \delta(u)$

典型信号的傅里叶变换

冲击信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\delta(t)$	

典型信号的傅里叶变换

冲击信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\delta(t)$	1

典型信号的傅里叶变换

门信号

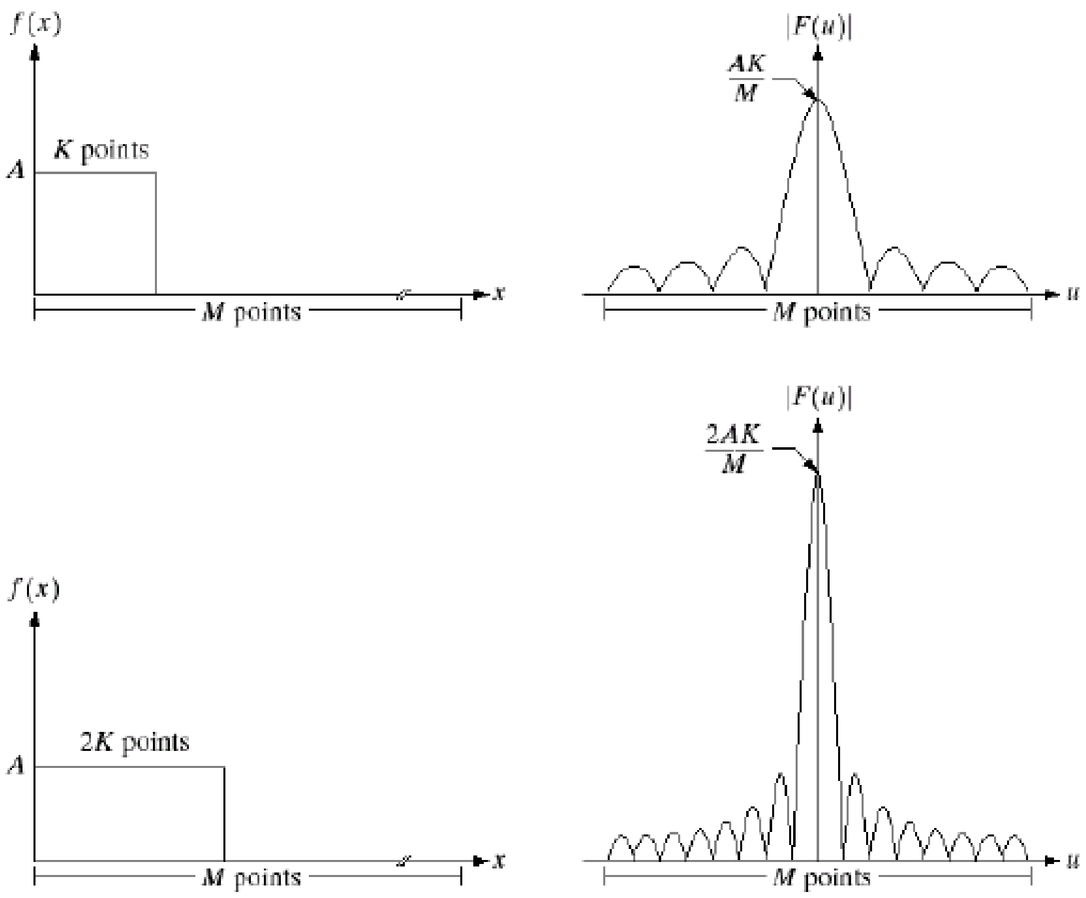
Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\begin{cases} 1 & \text{if } -a/2 \leq t \leq a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	

典型信号的傅里叶变换

门信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\begin{cases} 1 & \text{if } -a/2 \le t \le a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\operatorname{sinc}(a\pi u) = \frac{\sin(a\pi u)}{a\pi u}$

典型信号的傅里叶变换



a b
c d

FIGURE 4.2 (a) A discrete function of *M* points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

门信号

辛格信号

典型信号的傅里叶变换

高斯信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$e^{-\pi t^2}$	

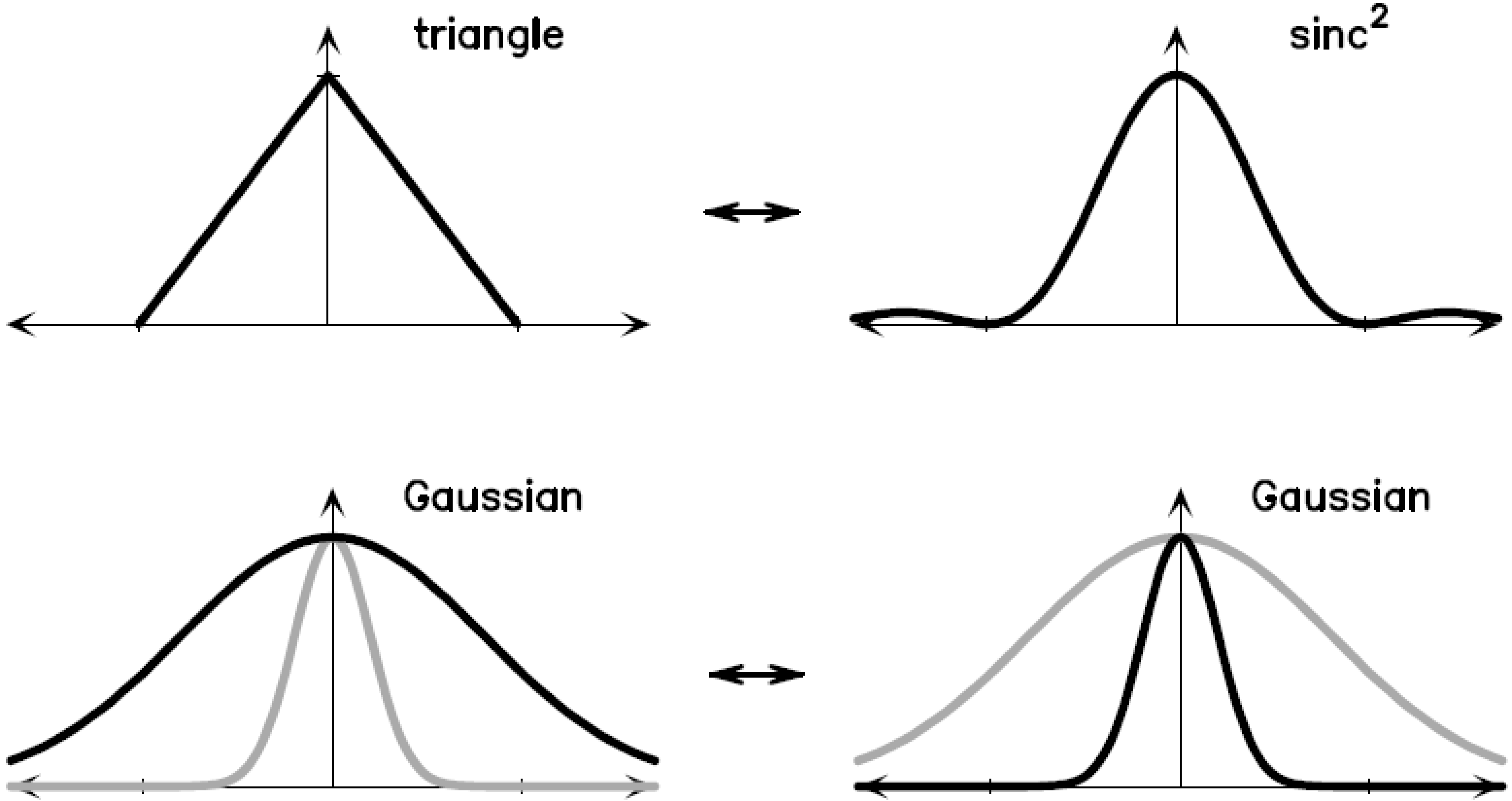
典型信号的傅里叶变换

高斯信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi u^2}$

典型信号的傅里叶变换

三角信号 vs 高斯信号



典型信号的傅里叶变换

差分信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\frac{d}{dt}$	

典型信号的傅里叶变换

差分信号

Spatial Domain $f(t)$	Frequency Domain $F(u)$
$\frac{d}{dt}$	$2\pi iu$

典型信号的傅里叶变换

Spatial Domain $f(t)$		Frequency Domain $F(u)$	
Cosine	$\cos(2\pi st)$	Deltas	$\frac{1}{2}[\delta(u+s)+\delta(u-s)]$
Sine	$\sin(2\pi st)$	Deltas	$\frac{1}{2}i\,[\delta(u+s)-\delta(u-s)]$
Unit	1	Delta	$\delta(u)$
Constant	a	Delta	$a\delta(u)$
Delta	$\delta(t)$	Unit	1
Comb	$\delta(t \bmod k)$	Comb	$\delta(u \bmod 1/k)$

典型信号的傅里叶变换

Spatial Domain $f(t)$		Frequency Domain $F(u)$	
Square	$\begin{array}{ll} 1 & \text{if } -a/2 \le t \le a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{array}$	Sinc	$\mathrm{sinc}(a\pi u)$
Triangle	$\begin{array}{ll} 1-\lvert t\rvert & \text{if } -a \le t \le a \\ 0 & \text{otherwise} \end{array}$	Sinc^2	$\mathrm{sinc}^2(a\pi u)$
Gaussian	$e^{-\pi t^2}$	Gaussian	$e^{-\pi u^2}$
Differentiation	$\frac{d}{dt}$	Ramp	$2\pi i u$

傅里叶变换性质: 线性

傅里叶变换的线性特性表示为

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\Omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\Omega)$

则 $af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\Omega) + bF_2(\Omega)$

式中 a、b 为任意常数。

证： $\int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]\, e^{-j\Omega t} dt$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\Omega t} dt + b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\Omega t} dt = aF_1(\Omega) + bF_2(\Omega)$$

利用傅氏变换的线性特性，可以将待求信号分解为若干基本信号之和。

傅里叶变换性质: 时延

傅里叶变换的时延（移位）特性表示为

若 $f(t) \leftrightarrow F(\Omega)$

则 $f_1(t) = f(t-t_0) \leftrightarrow F_1(\Omega) = F(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$

证： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\Omega(x+t_0)}dx$

$$= e^{-j\Omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\Omega x}dx = F(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

时延（移位）性说明波形在时间轴上时延，不改变信号振幅频谱，仅使信号增加一 $-\Omega t_0$ 线性相位。

傅里叶变换性质: 尺度变换

傅里叶变换的尺度变换特性表示为

若 $\quad f(t) \leftrightarrow F(\Omega)$

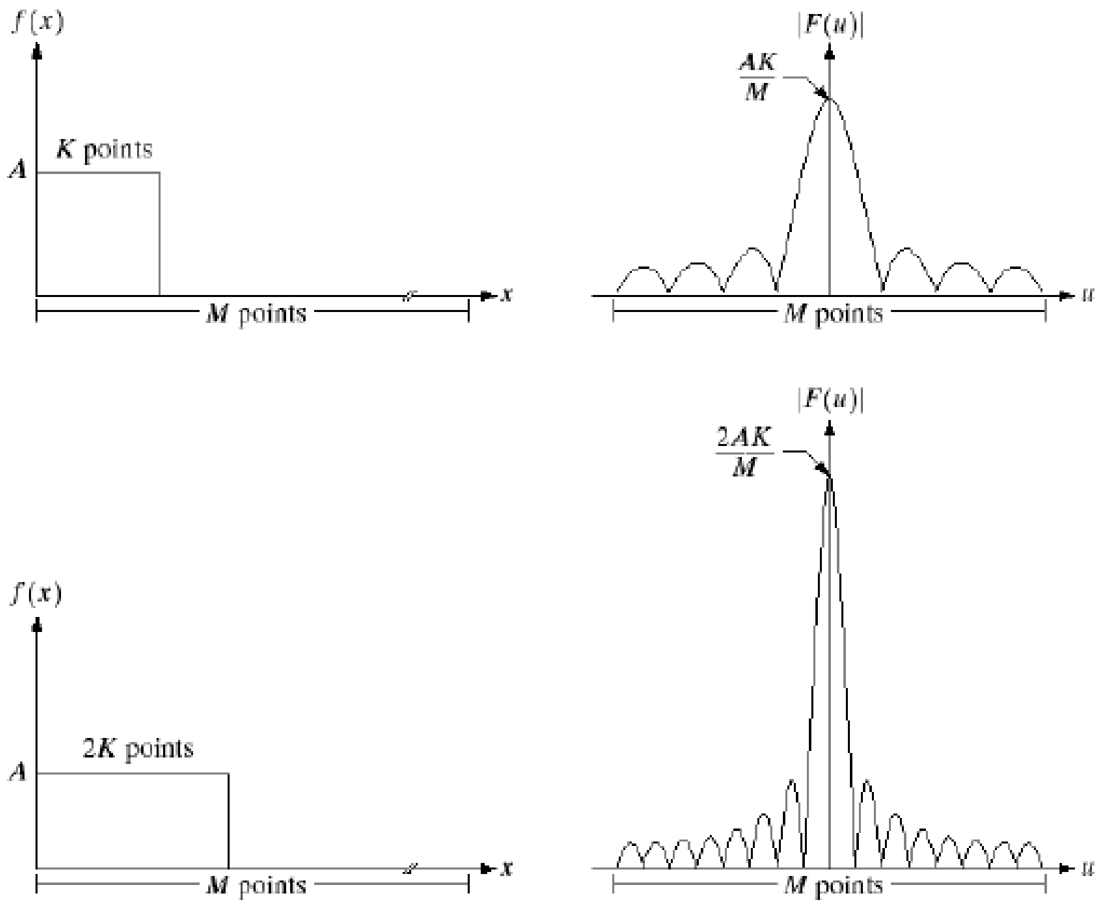
则 $\quad f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\Omega}{a}\right) \qquad a \neq 0$

证: $\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\Omega t} dt$

$a > 0$ 令 $at = x$, 则 $dt = (1/a)dx$, $t = x/a$ 代入上式

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\Omega}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

傅里叶变换性质: 尺度变换



a b
c d

FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

傅里叶变换性质:帕斯瓦尔定理

傅里叶变换后信号的总能量不变

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \ du$$

傅里叶变换性质:卷积定理

时域内作 f(x)和h(x)的卷积，可以转化为在频域内作乘法

- $$\mathcal{F}\{f(x) * h(x))\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(a)h(x-a)da\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(a)h(x-a)da\ e^{-2\pi i\xi x}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(a)e^{-2\pi i\xi a}da\int_{-\infty}^{\infty} h(b)e^{-2\pi i\xi b}db = F(\xi)H(\xi)$$

信号的卷积

线性系统与响应

	Time/Spatial	Frequency
Input	f	F
Output	g	G
Impulse Response	h	
Transfer Function		H
Relationship	$g = f * h$	$G = FH$

Is there a relationship?

信号的卷积

线性系统与响应

	Time/Spatial	Frequency
Input	f	F
Output	g	G
Impulse Response	h	
Transfer Function		H
Relationship	$g = f * h$	$G = FH$

Relationship: the Transfer Function $H(u)$
is the Fourier Transform of the impulse response $h(u)$

图像生成机制

定义亮度为空间变量的函数，f(x,y)是点(x,y)的亮度

$f(x,y) \rightarrow$ 成像系统（D） $\rightarrow g(x,y)$

成像系统会使输入图像退化（质量失真），得到图像为

$$g(x,y)=D(f(x,y))$$

D为退化函数，一般包含某些随机噪声过程，若退化操作D是线性移不变的，则g可以写成

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\, d\beta+n(x,y)$$

以一维条件下为例（可以自然推广到二维情况），点x处的函数f为：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx'$$

其中，δ（r）表示增量函数

$$g(x)=D(f(x))=D(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx')$$

若D是线性运算，可以变换D与积分符号次序

$$g(x)=D(f(x))=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')D(\delta(x-x'))dx'$$

引入新的函数 $h(x,x')=D(\delta(x-x'))$，假设D只与$x-x'$有关，则有

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x-x')dx'$$

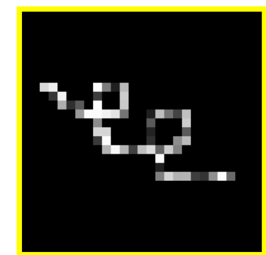
图像生成机制

Blurred image I

$=$

Sharp image L

$\otimes$



Blur kernel h

点扩散函数

(Point Spread Function)

(Blur kernel)

$+$

Camera Noise n

卷积定理

卷积定理的一个直接应用是对于卷积的运算可以在频域内进行，这也是绝大多数信号处理问题中所采用的方法

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))$$

能够大大降低计算的复杂度（依赖于快速傅里叶变换的出现）

相关与卷积

Convolution is

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\ d\tau$$

Correlation is

$$f(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t+\tau)\ d\tau$$

相关的作用是判断两个信号的相似程度，不仅是波形上的，也包括起始位置。

相关的频域特性

与卷积类似，相关也可以在频域内计算

Convolution

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(s)\ G(s)$$

Correlation

$$f(t) * g(-t) \leftrightarrow F(s)\ G^{*}(s)$$

信号的自相关

自相关是指与信号自身进行相关计算，

$$f(t)*f(-t)$$

其作用是判断信号是否周期性信号？

实际应用中用来表示局部范围内有效信号和噪声的权重比

3. 图像傅里叶变换

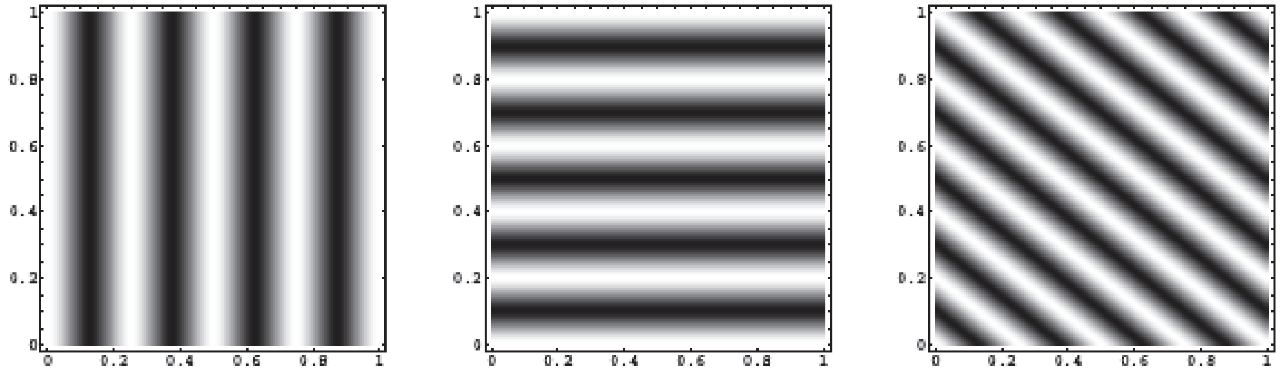
- 二维连续傅里叶变换
- 二维离散（图像）傅里叶变换
- 图像与傅里叶频谱之间的关系

二维连续傅里叶变换

二维连续傅里叶变换

可以分解为水平和垂直方向上的一维连续傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
b(u,v) &= e^{i2\pi ux}\, e^{i2\pi vy} \\
&= e^{i2\pi(ux+vy)}
\end{aligned}
$$



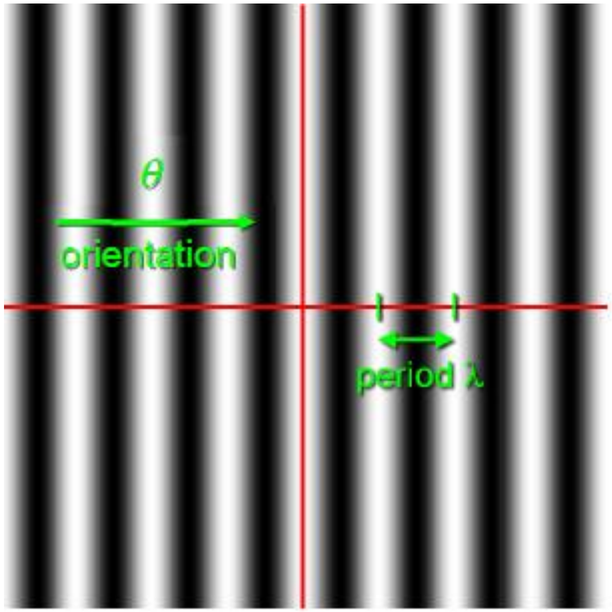
$u=4, v=0$ $\quad$ $u=0, v=5$ $\quad$ $u=4, v=5$

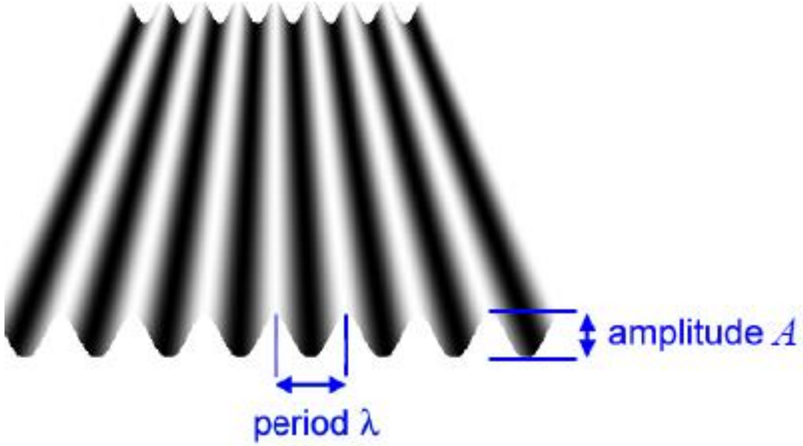
(real parts)

二维连续傅里叶变换

二维连续傅里叶变换

$$v = \omega \sin\theta, \quad u = \omega \cos\theta, \quad \omega = \sqrt{v^2 + u^2}, \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right).$$





二维连续傅里叶变换

二维连续傅里叶变换

The transform now becomes:

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

Similar process for the inverse:

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{i2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$$

二维离散傅里叶变换

对于一副**M*N**的图像，可以描述为：

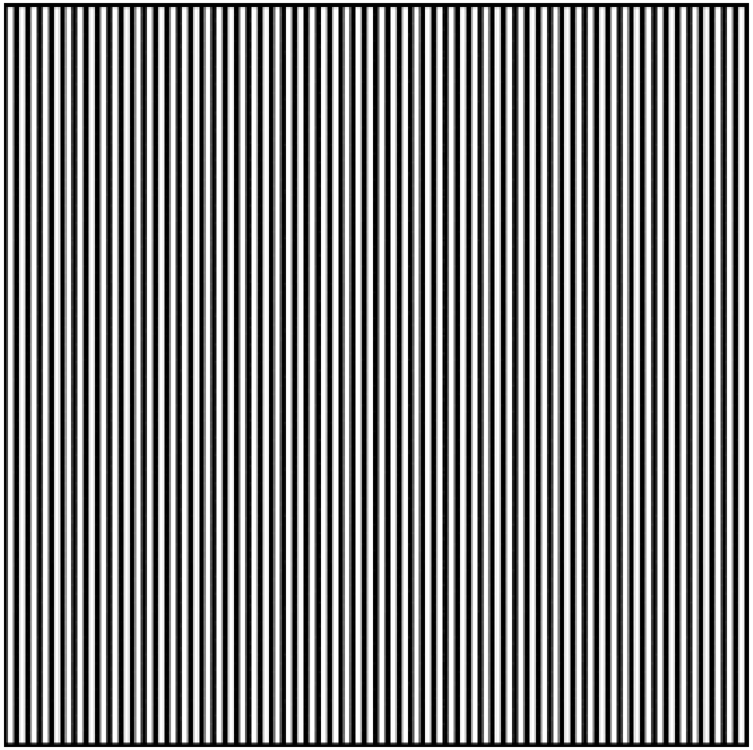
$$
\begin{aligned}
f_{u,v}[x,y] &= e^{i2\pi ux/M}\, e^{i2\pi vy/N} \\
&= e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}
\end{aligned}
$$

其傅里叶变换及逆变换为：

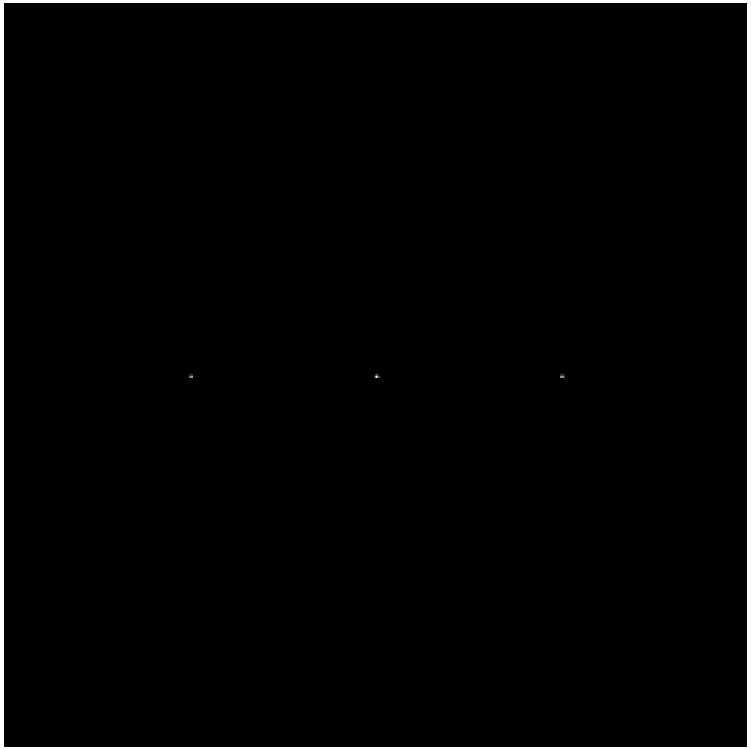
$$F[u,v] = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f[x,y]\; e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f[x,y] = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F[u,v]\; e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

例子

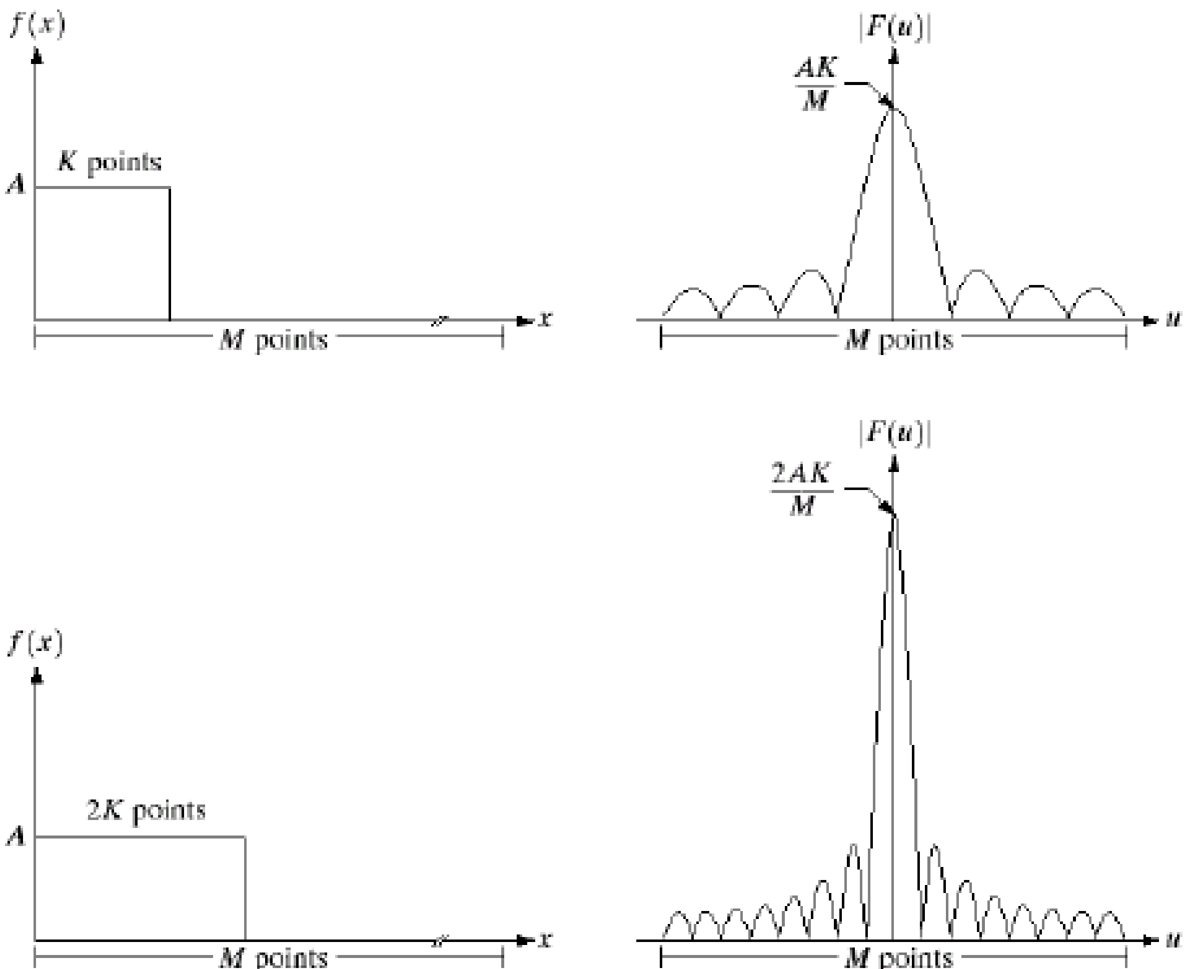


Image



Fourier Transform (magnitude)

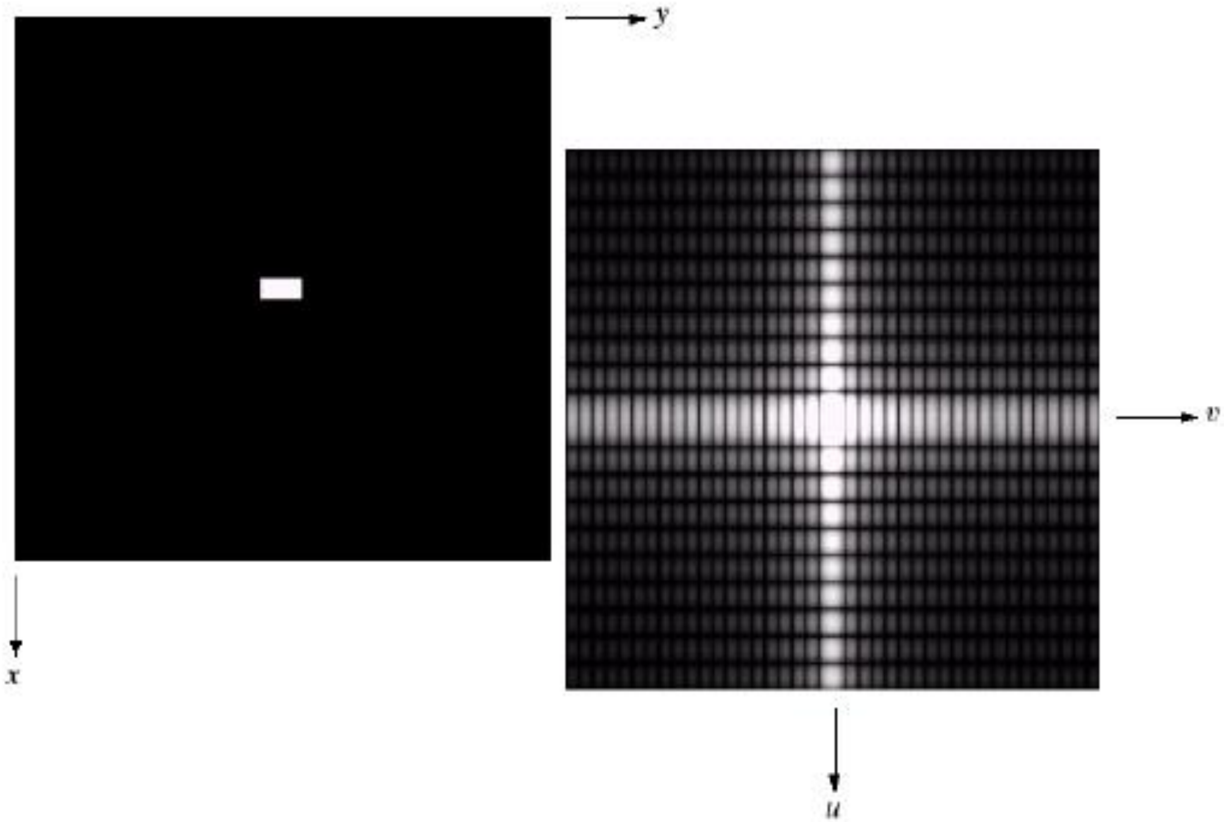
一维离散傅里叶变换：门信号



a b
c d

FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

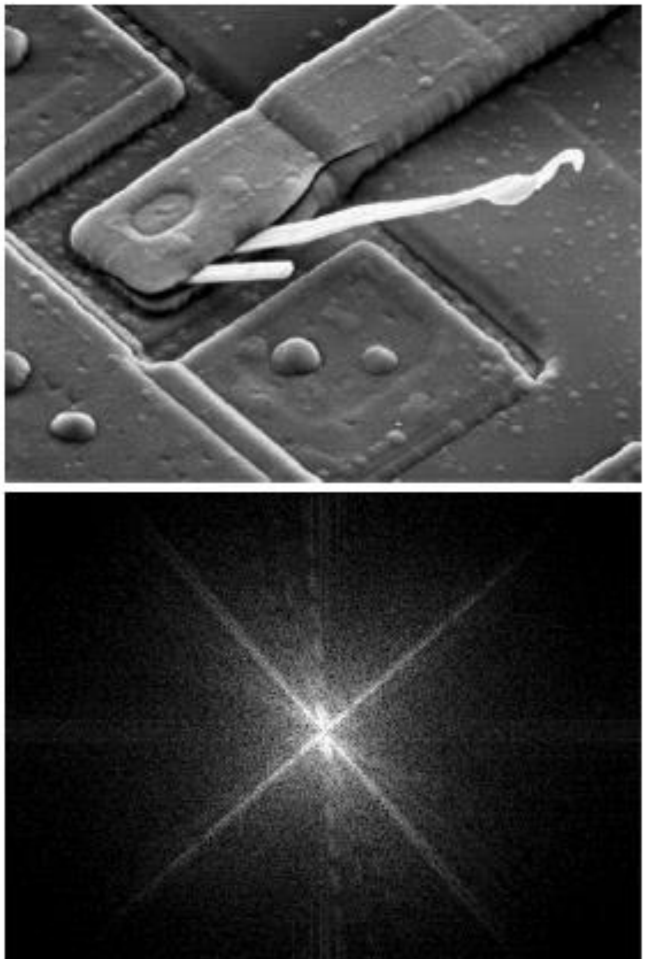
二维离散傅里叶变换：门信号



a b

FIGURE 4.3
(a) Image of a 20×40 white rectangle on a black background of size 512×512 pixels.
(b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.

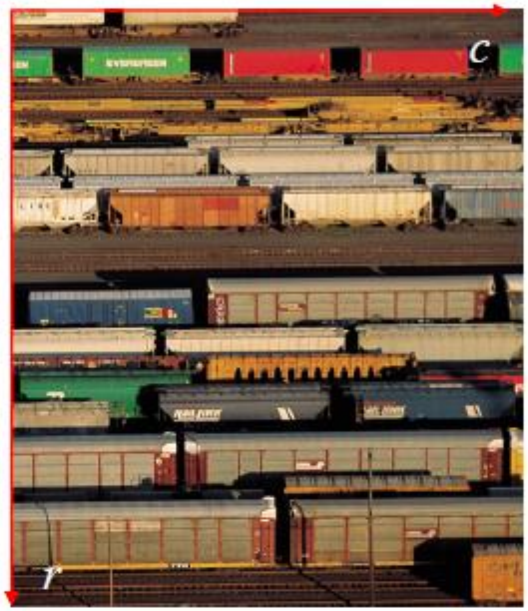
二维离散傅里叶变换：图像



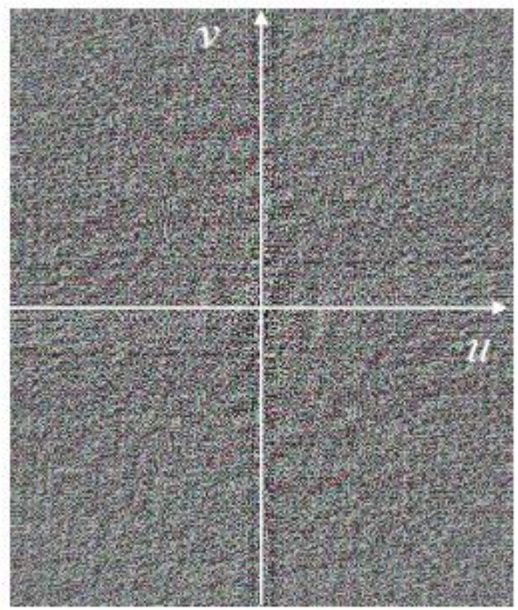
a
b

FIGURE 4.4 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

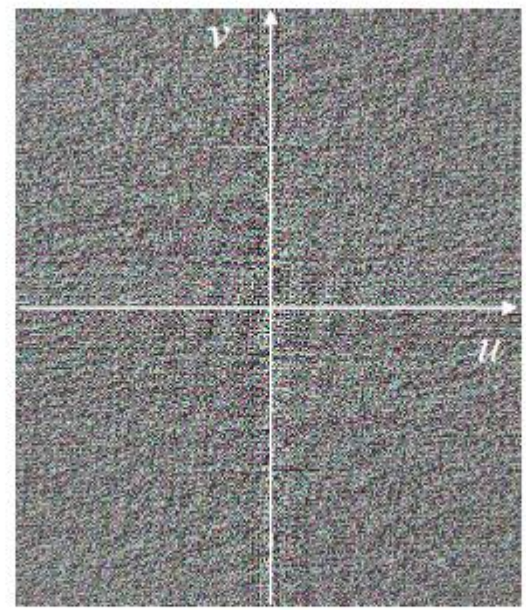
二维离散傅里叶变换：图像（实部和虚部）



$\mathbf{I}$

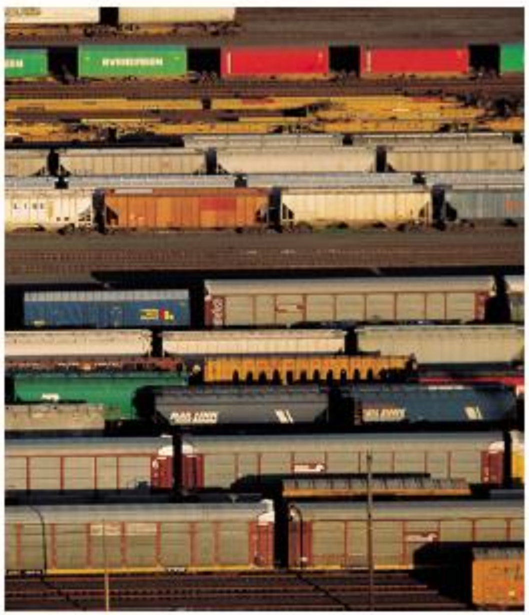


$\mathrm{Re}[\mathfrak{F}\{\mathbf{I}\}]$

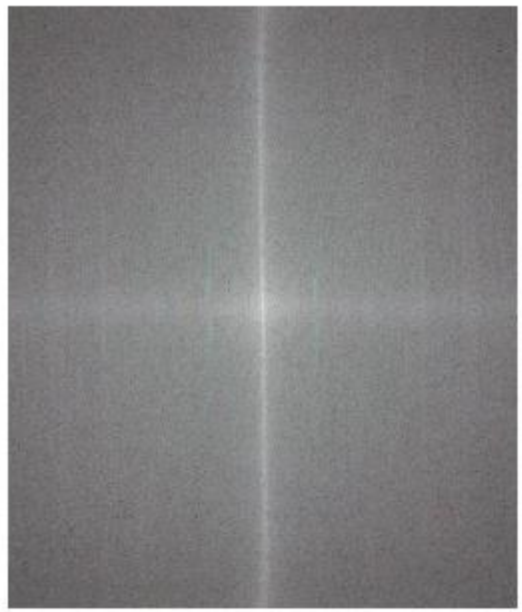


$\mathrm{Im}[\mathfrak{F}\{\mathbf{I}\}]$

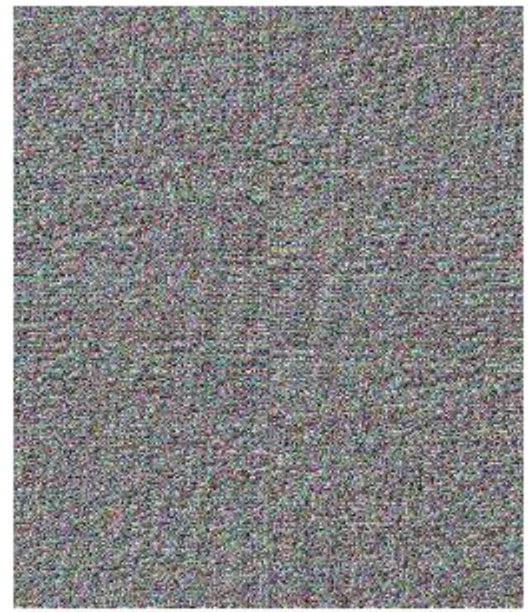
二维离散傅里叶变换：图像（功率和相位）



$\mathbf{I}$

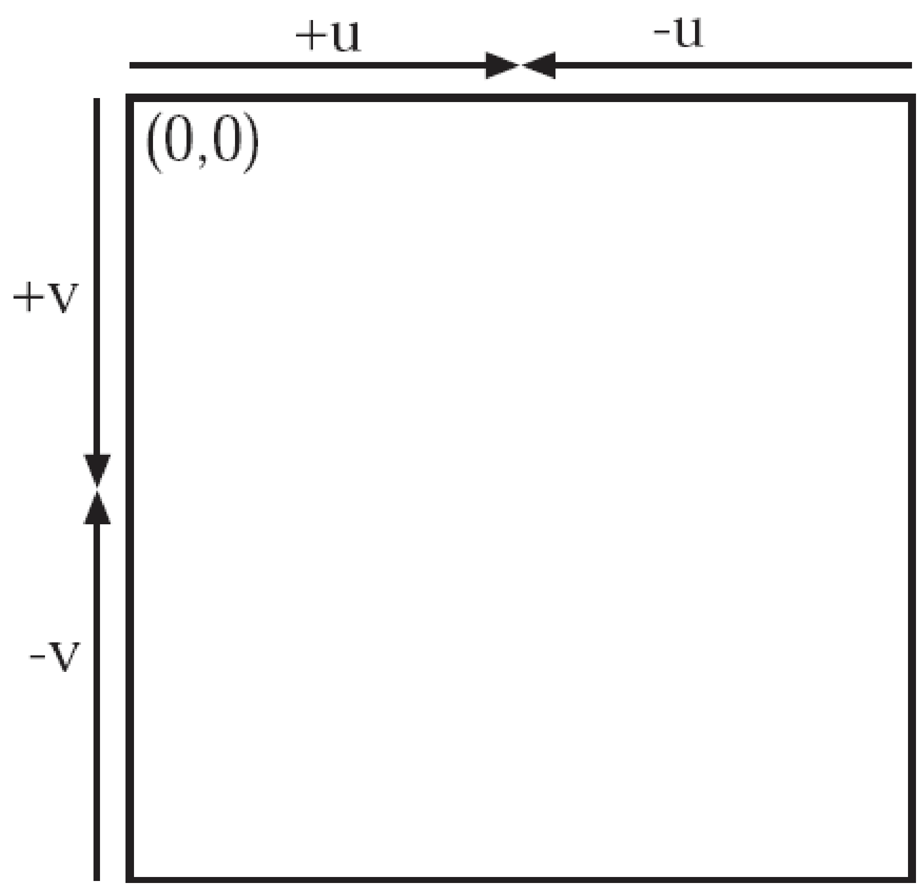


$\log\{|\mathcal{F}\{\mathbf{I}\}|^2+1\}$



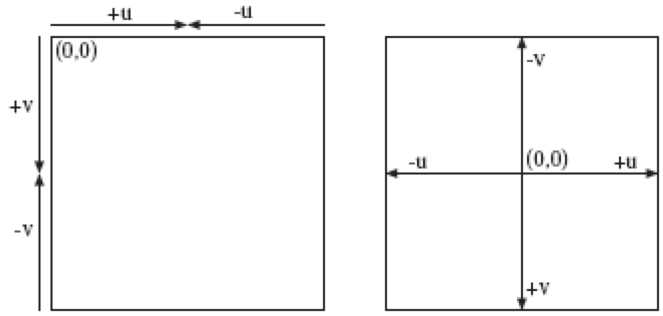
$\angle[\mathcal{F}\{\mathbf{I}\}]$

二维离散傅里叶变换：中心化



二维离散傅里叶变换：中心化

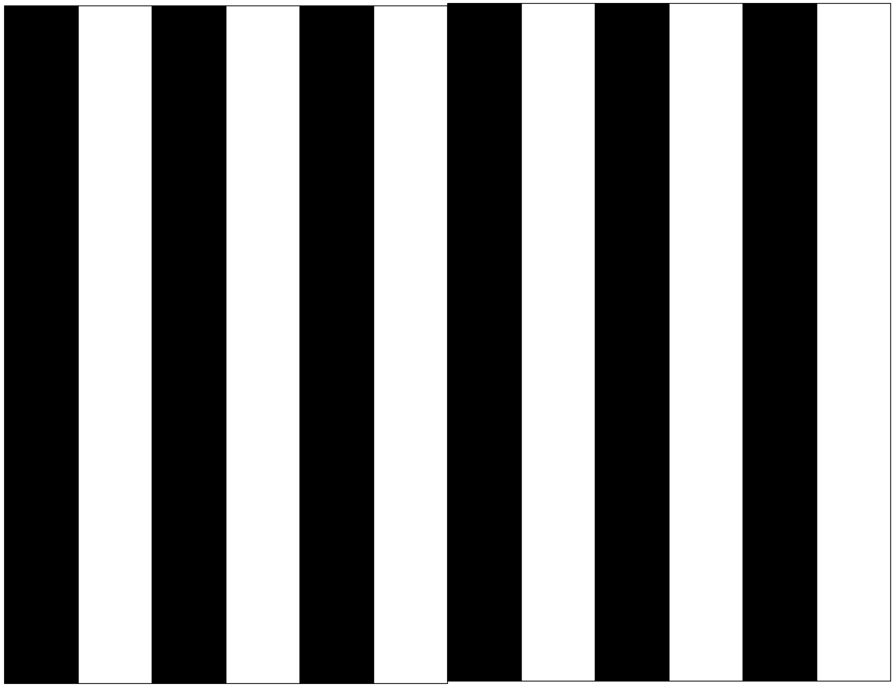
为了便于分析和描述，需要对频谱进行中心化。

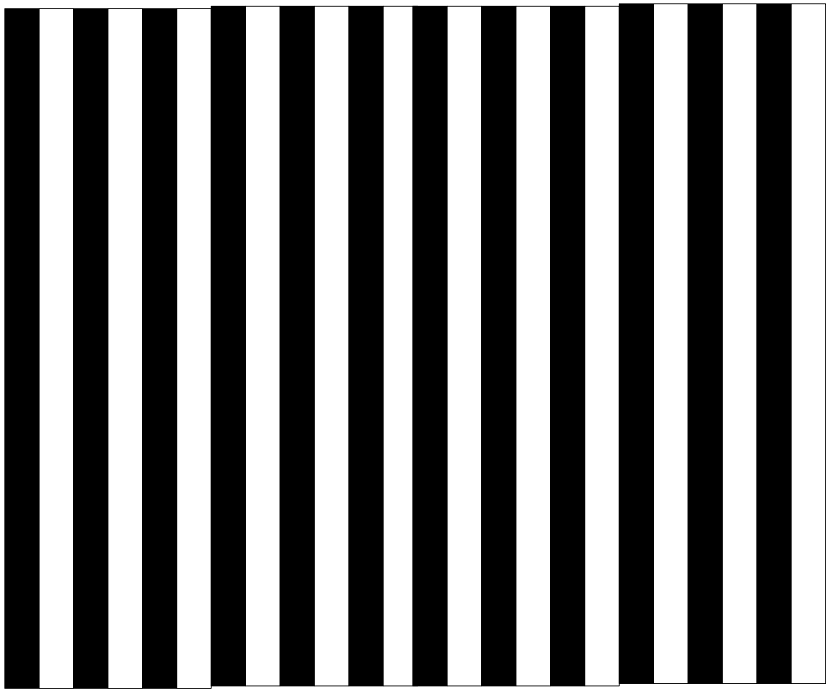


DFT storage　　Centered

用$(-1)^{x+y}$乘以输入图像来进行中心变换

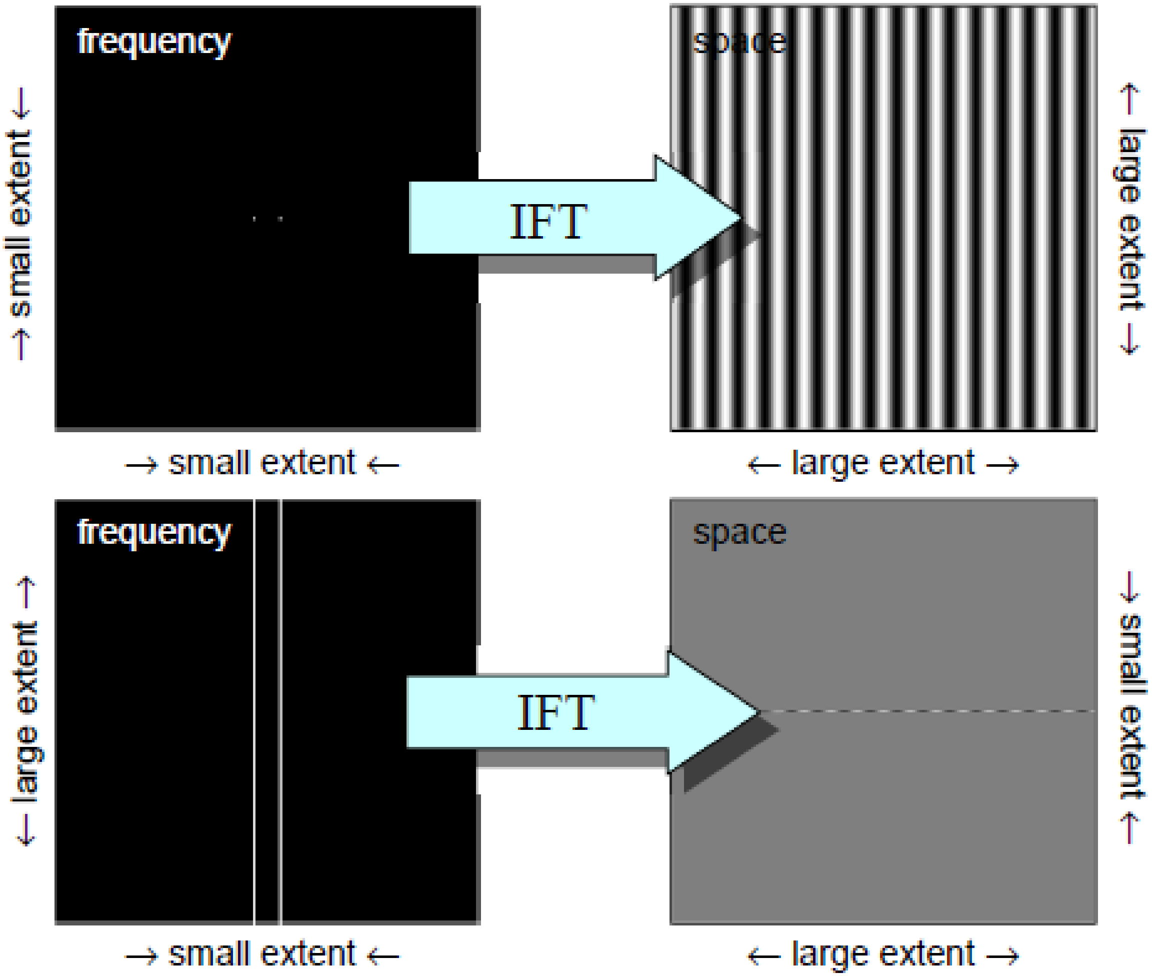
图像与频谱之间的关系





图像与频谱之间的关系

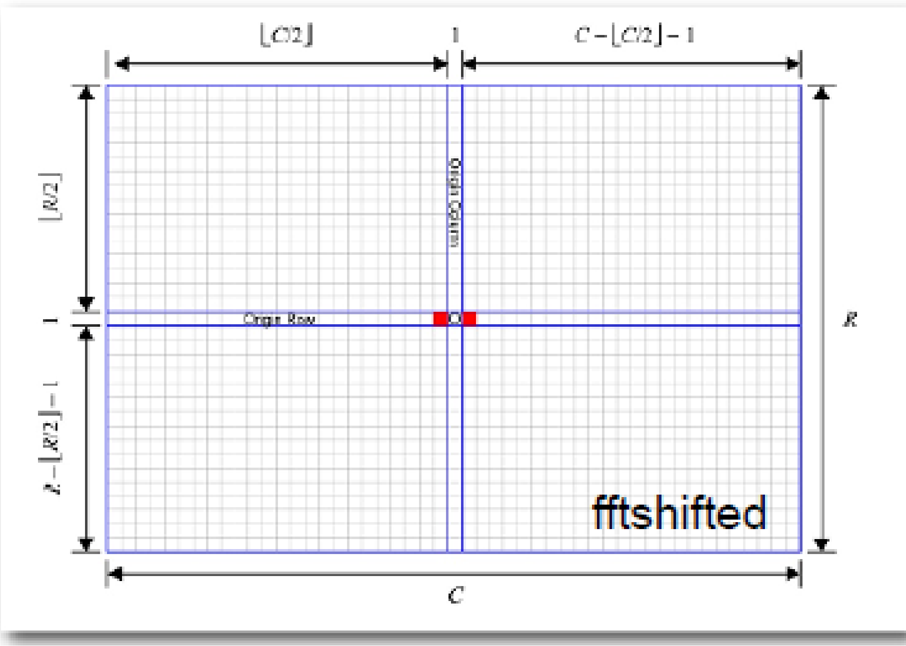
图像与频谱之间的关系

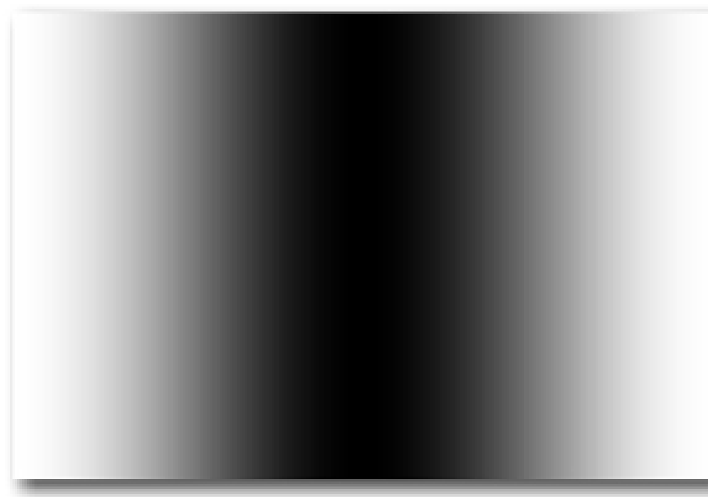


frequency
IFT
space
small extent
large extent
frequency
IFT
space
small extent
large extent
large extent
small extent
small extent
large extent

图像与频谱之间的关系

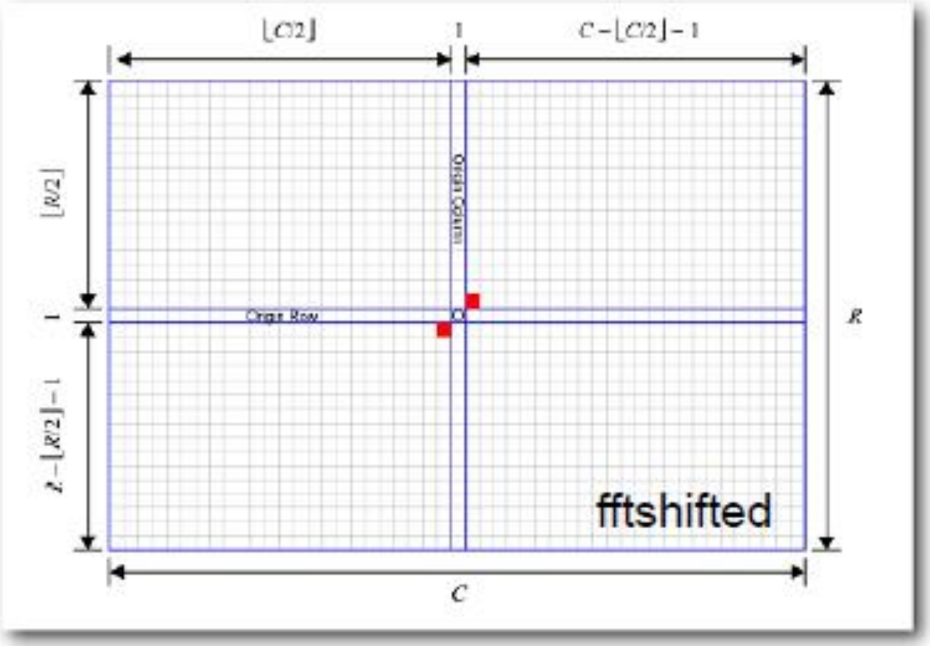
脉冲（点）的频谱

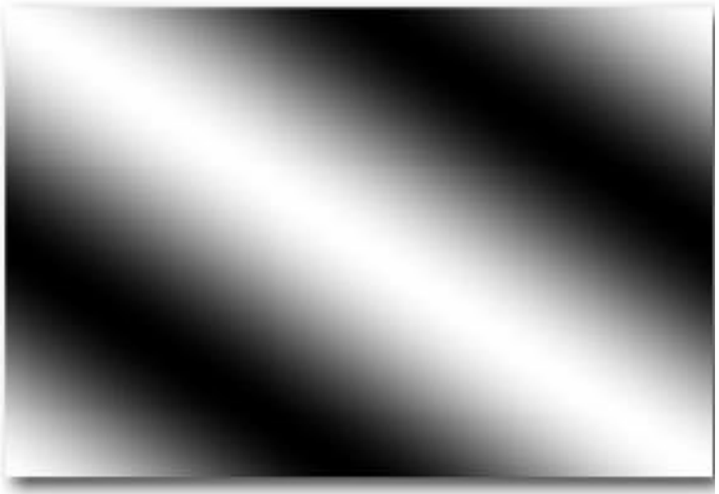




图像与频谱之间的关系

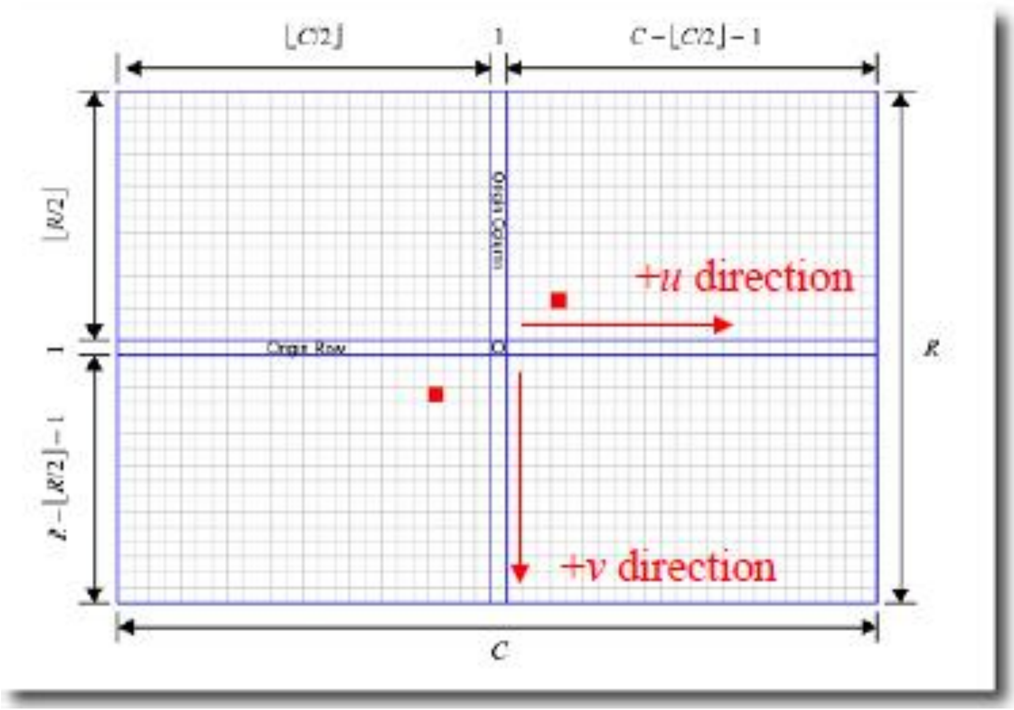
脉冲（点）的频谱

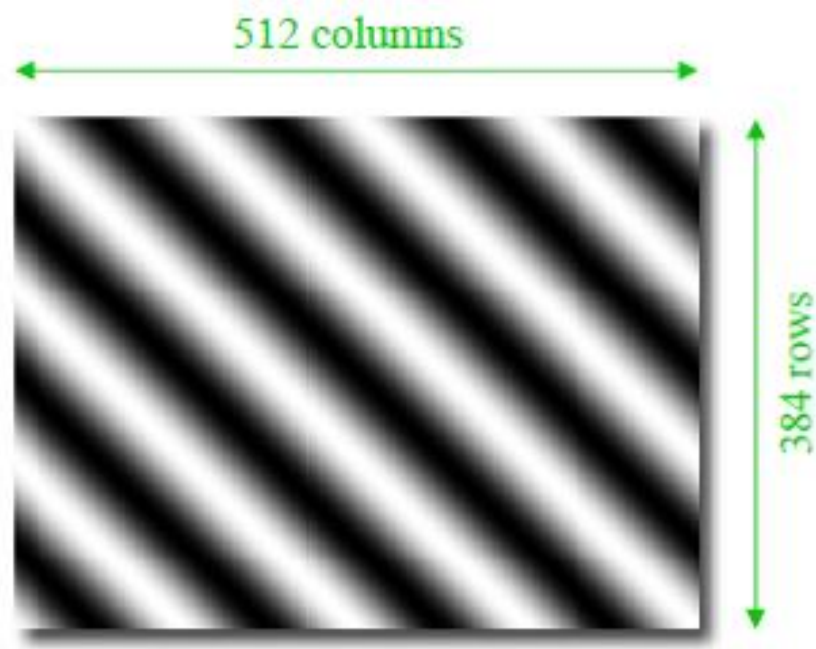




图像与频谱之间的关系

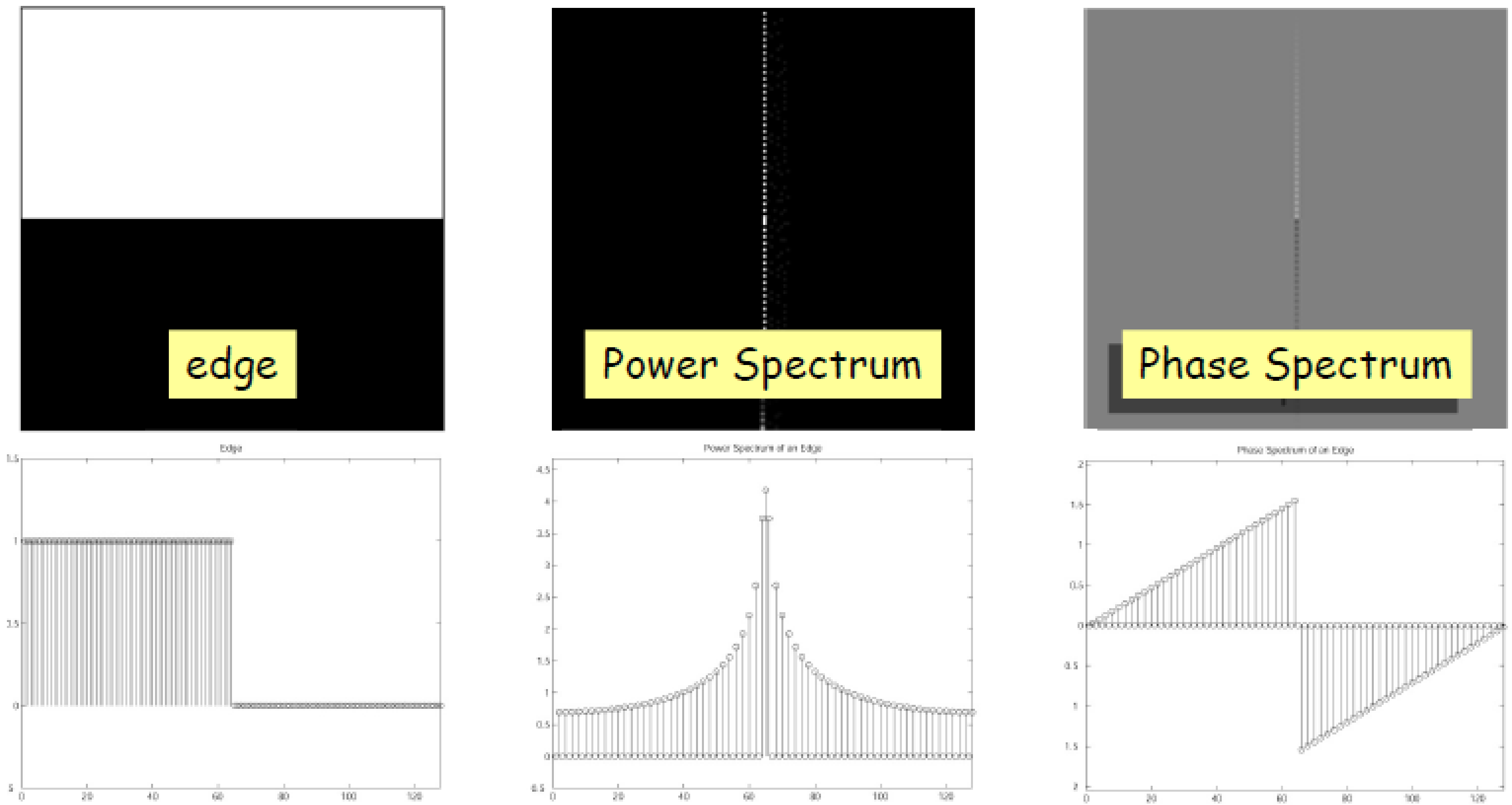
脉冲（点）的频谱





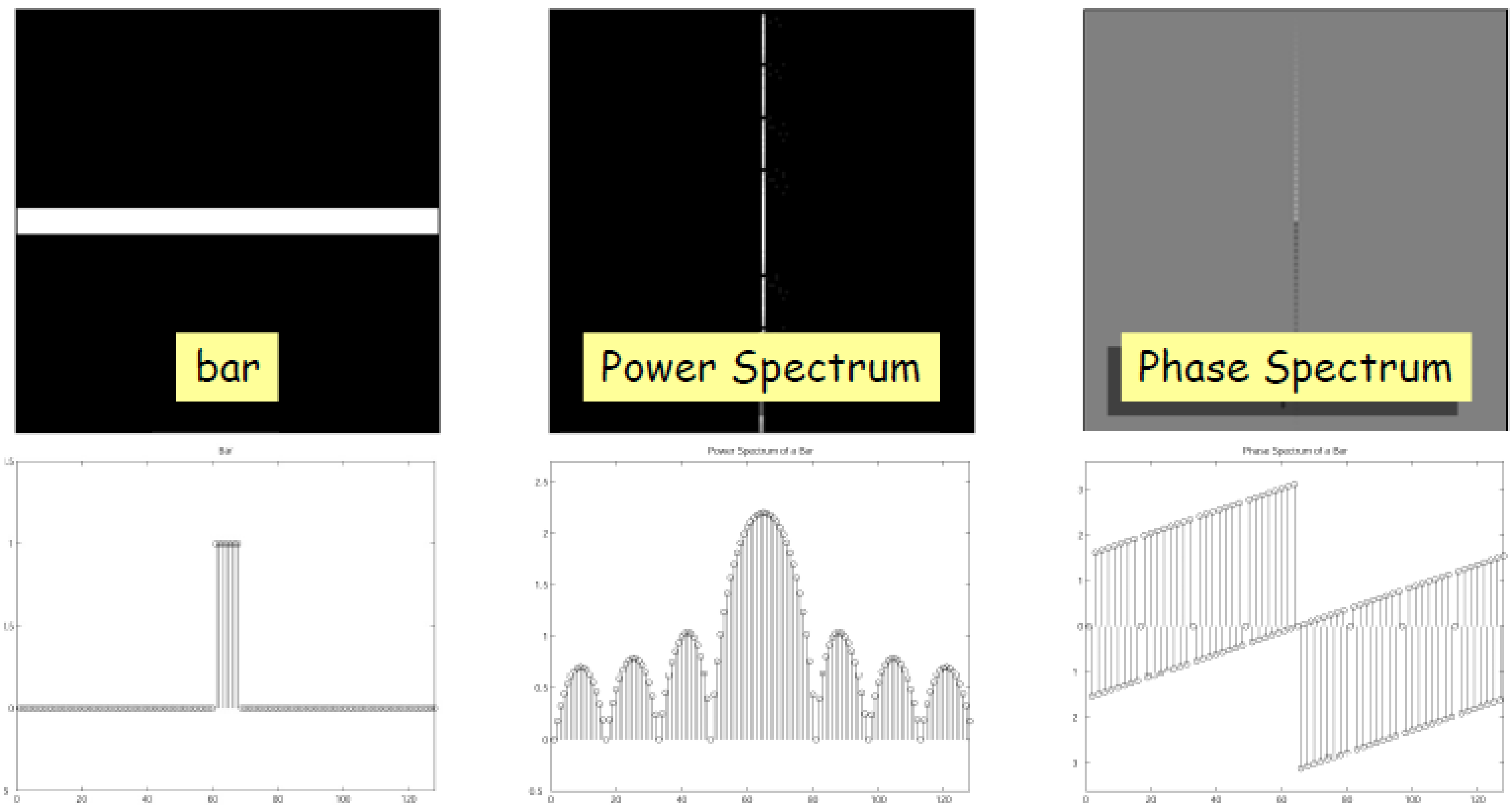
图像与频谱之间的关系

边缘的频谱



图像与频谱之间的关系

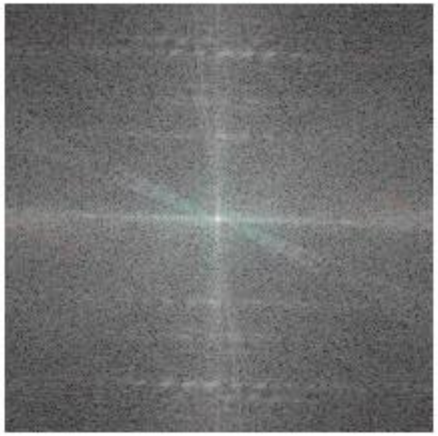
线的频谱



图像与频谱之间的关系

相位谱的作用

图像

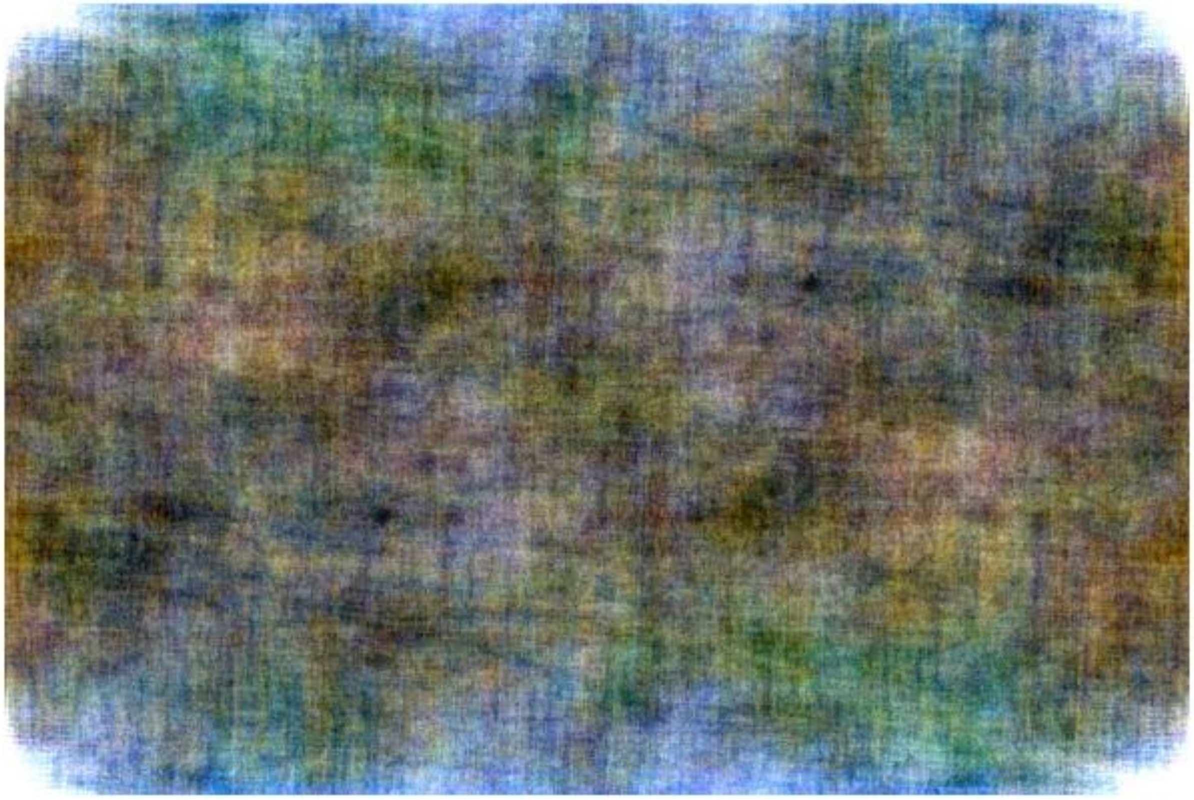


功率谱

相位谱

图像与频谱之间的关系

仅使用功率谱重建的结果



图像与频谱之间的关系

仅使用相位谱重建的结果