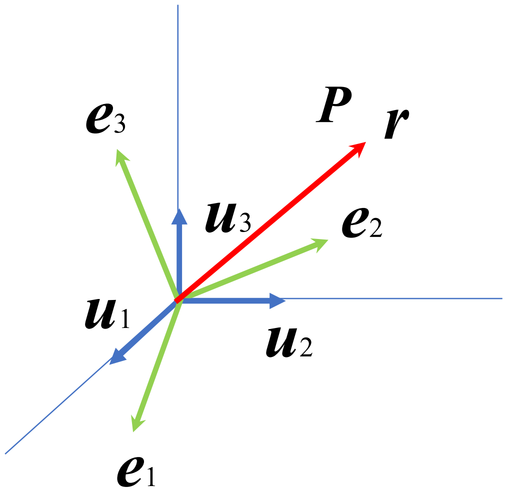
刚体动力学是理论力学的核心内容之一，是研究机器人、无人机自动控制的基础。

机器人与无人机等基本上是由机械部件（刚体）、关节电机（机翼驱动电机）、传感器件（光电系统）等组成，机电系统的物理背景和数学模型比较明确，深入理解机电系统的数学物理原理，便于对机电对象进行基于数学模型的控制设计。

坐标变换

考查由三个单位向量组成的直角坐标架$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$，以及坐标原点不变但经过旋转得到新的由三个单位向量组成的直角坐标架$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，新旧基向量之间有线性表示（坐标变换）



$$\boldsymbol{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{u}_i q_{ij},\quad j=1,2,3$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}\quad \text{简记为}\quad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}Q$$

其中 $q_{ij}=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$ 表示$\boldsymbol{u}_i$与$\boldsymbol{e}_j$之间的方向余弦，变换矩阵（旋转矩阵）$Q=(q_{ij})_{3\times3}$

注意到坐标基向量之间两两单位正交 $\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij}$，$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$，现对

$$\boldsymbol{e}_i=\sum_k \boldsymbol{u}_k q_{ki},\ \boldsymbol{e}_j=\sum_l \boldsymbol{u}_l q_{lj}$$

作内积（点乘），就有

$$\delta_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_k q_{ki}q_{kj}$$

写成矩阵形式

$$Q^TQ=I=(\delta_{ij})_{3\times3},\quad Q^{-1}=Q^T$$

这表明变换矩阵Q是正交矩阵，可得由$\boldsymbol{e}$到$\boldsymbol{u}$的坐标变换

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}Q^T$$

正交变换矩阵Q有9个元素，但因有6个正交性约束方程，因此矩阵Q一般只有3个独立量。

后面我们通常取原坐标架$\boldsymbol{u}$为固定坐标架，而$\boldsymbol{e}$为动坐标架，因此有时间导数

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{u}\dot{Q} = \boldsymbol{e}Q^T\dot{Q}$$

对 $Q^TQ = I$ 两边求导

$$0 = \frac{d}{dt}(Q^TQ) = \dot{Q}^TQ + Q^T\dot{Q} = \left(Q^T\dot{Q}\right)^T + Q^T\dot{Q}$$

这意味着矩阵

$$Q^T\dot{Q} \triangleq S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

是反对称的，通常称为**角速度矩阵（反对称算子）**。实际上对向量$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$，有

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = S(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}$$

现在讨论刚体**定点运动**，以下设$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$为固定（惯性）坐标架，$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$为固连在刚体上随刚体一起运动的**随体坐标架**，坐标架原点均取在刚体定点转动的固定点。设刚体上某点P的位置矢径

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{e}\cdot r=\boldsymbol{u}Qr$$

其中$r=(r_1,r_2,r_3)^T$ 是该点的随体坐标，它是不变的。点P的的速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{u}\dot{Q}r=\boldsymbol{e}Q^T\dot{Q}r=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$=(\omega_2 r_3-\omega_3 r_2)\boldsymbol{e}_1+(\omega_3 r_1-\omega_1 r_3)\boldsymbol{e}_2+(\omega_1 r_2-\omega_2 r_1)\boldsymbol{e}_3$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

其中定义**角速度矢量**（来源于旋转阵Q，可称为动坐标架相对于定坐标架的角速度）

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3\triangleq\boldsymbol{e}\omega,\quad \omega=(\omega_1\quad\omega_2\quad\omega_3)^T$$

实际上角速度矢量不依赖于随体坐标架的选择，因为若对应随体坐标架$\boldsymbol{e}$与$\boldsymbol{e}'$的角速度分别为$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\omega}'$，刚体上某点的速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r},\quad\forall\boldsymbol{r}$$

故有$\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}$，即角速度矢量具有不变性，因此我们以后就称之为刚体的角速度。

对一般向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}(p_1\quad p_2\quad p_3)^T$ 求导，类似有

绝对导数

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}\begin{pmatrix}\dot{p}_1\\\dot{p}_2\\\dot{p}_3\end{pmatrix}+\dot{\boldsymbol{e}}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}\begin{pmatrix}\dot{p}_1\\\dot{p}_2\\\dot{p}_3\end{pmatrix}+\boldsymbol{e}Q^T\dot{Q}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$$

$$\triangleq\frac{\tilde{d}}{dt}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}$$

相对导数

随体导数

特别地，基向量的导数

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,3$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)$$

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$$

由此得到 $\boldsymbol{\omega}=(\dot{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_1+(\dot{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2+(\dot{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_3$

上述绝对导数与相对导数公式一般可以写成

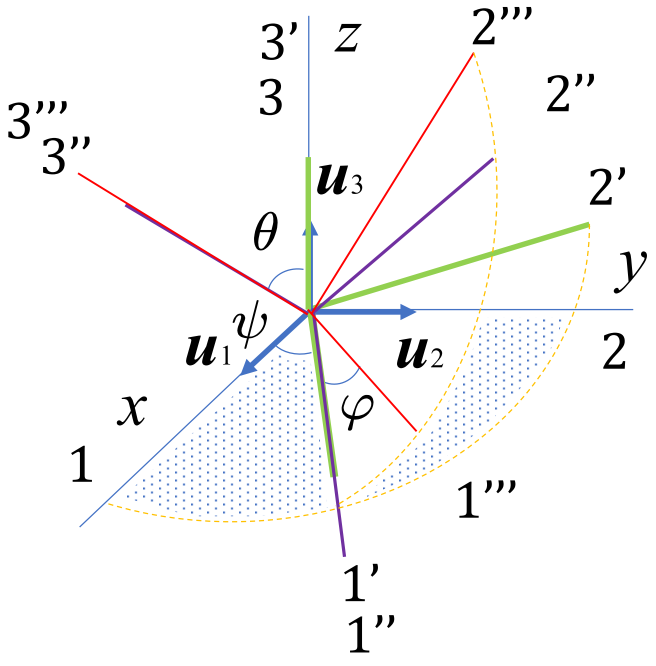
$$\frac{d^A}{dt}\boldsymbol{p}=\frac{d^B}{dt}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\omega}^{B|A}\times\boldsymbol{p}$$

坐标架*B*相对于坐标架*A*的角速度

向量$\boldsymbol{p}$在坐标架*A*中的时间导数

下面我们通过旋转（正交）变换讨论刚体定点转动的运动学关系

考虑到坐标变换阵Q只含3个独立变量，我们进行连续三次特别的坐标架旋转（ZXZ旋转），计算其旋转变换矩阵。



- 进动{1,2,3}-->{1',2',3'=3}：坐标架绕z轴转动ψ

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 章动{1',2',3'}-->{1''=1',2'',3''}：坐标架绕x轴转动θ

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 自转{1”,2”,3”}-->{1’’’,2’’’,3’’’ =3”}：坐标架绕z轴转动φ

$$Q_3=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

分别记坐标架{1,2,3}与{1’’’,2’’’,3’’’}的基向量为$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$及$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，自{1,2,3}至{1’’’,2’’’,3’’’}三次复合变换

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}Q_1Q_2Q_3\triangleq\boldsymbol{u}Q$$

$$Q=Q_1Q_2Q_3=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\\ \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\end{bmatrix}$$

对复合变换矩阵Q求导，并通过角速度矩阵的关系

$$Q^T\dot{Q}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

可得刚体定点运动的运动学方程（**Euler运动学方程**）

$$\begin{cases} \omega_1=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_2=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi} \end{cases}$$

给定三个Euler角可以确定旋转变换矩阵Q，也确定了随体坐标架的位置；反之由旋转阵Q却不一定能确定三个Euler角。为了处理这种奇异性发展了四元素表示法。

四元素表示：取

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2},\ q_i = u_i \sin\frac{\theta}{2},\quad i = 1, 2, 3$$

可使满足条件 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ 或 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

令 $q = (q_1, q_2, q_3)^T$，取旋转变换（Rodrigues公式）

$$Q = (2q_0^2 - 1)I + 2qq^T - 2q_0 S(q)$$

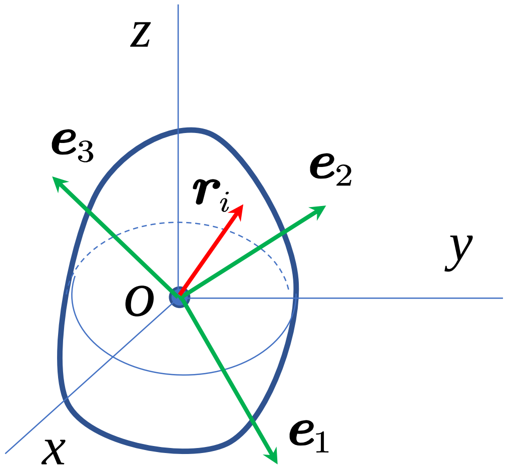
其中$S(q)$是对应q的角速度矩阵，可得运动学方程

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q^T \\ q_0 I + S(q) \end{bmatrix}\omega$$

注意到上面我们是通过坐标架ZXZ旋转，得到三个Euler角（进动角、章动角、自转角）。实际上我们可有不同的选择，比如通过坐标架ZXY旋转，可得偏航角、滚转角、俯仰角，这是飞行器运动学常取的三个姿态角。

定点旋转动力学：对定点O，取惯性系$\{x,y,z\}$及随体坐标架$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，考查刚体上一点$P$（第$i$点），其位置矢径

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}\begin{pmatrix}\xi_i\\ \eta_i\\ \zeta_i\end{pmatrix},\quad r_i^2=\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2$$



刚体动量矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)\\ &=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\\ &=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{\omega}-\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_i\\ &=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\boldsymbol{\omega}-\sum_i m_i(\omega_1\xi_i+\omega_2\eta_i+\omega_3\zeta_i)\boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

动量矩$\boldsymbol{H}=H_1\boldsymbol{e}_1+H_2\boldsymbol{e}_2+H_3\boldsymbol{e}_3$在随体坐标架上的分量

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_i m_i(\eta_i^2+\zeta_i^2) & -\sum\limits_i m_i\xi_i\eta_i & -\sum\limits_i m_i\xi_i\zeta_i \\ -\sum\limits_i m_i\eta_i\xi_i & \sum\limits_i m_i(\zeta_i^2+\xi_i^2) & -\sum\limits_i m_i\eta_i\zeta_i \\ -\sum\limits_i m_i\zeta_i\xi_i & -\sum\limits_i m_i\zeta_i\eta_i & \sum\limits_i m_i(\xi_i^2+\eta_i^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \triangleq J\omega$$

写成向量及矩阵形式

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}(H_1,H_2,H_3)^T=\boldsymbol{e}J\omega, \quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e}\omega=\boldsymbol{e}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$$

这里J是对称矩阵，称为**转动惯量**，在刚体转动过程中它是常量（随体坐标下）。相反，若在“定”坐标系中考查转动惯量将是时变的。

现在考查不同随体坐标架$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$与$\boldsymbol{e}'=(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$之下，动量矩的表达形式

$$\boldsymbol{H}=\mathbf{e}'J'\omega'=\mathbf{e}J\omega,\quad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{e}'\omega'=\mathbf{e}\omega$$

设有坐标变换（正交）$\mathbf{e}'=\mathbf{e}P,\ P^{-1}=P^T$，从而

$$\mathbf{e}'\omega'=eP\omega'=\mathbf{e}\omega \quad\Rightarrow\quad \omega'=P^T\omega$$

$$\mathbf{e}'J'\omega'=\mathbf{e}PJ'\omega'=\mathbf{e}PJ'P^T\omega=\mathbf{e}J\omega \quad\Rightarrow\quad J'=P^TJP$$

注意到变换前后的J与J'是正交相似的，而J是对称矩阵，故可正交相似对角化，即存在正交变换P使得

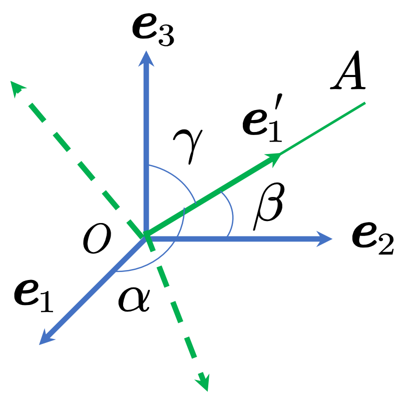
$$P^TJP=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}=\mathrm{diag}\{J_1,J_2,J_3\}$$

如果转动惯量在某随体坐标架下成为对角矩阵，称该坐标架为**惯性主轴**。若设$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$即为惯性主轴，则动量矩为

$$\boldsymbol{H}=J_1\omega_1\boldsymbol{e}_1+J_2\omega_2\boldsymbol{e}_2+J_3\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

现在讨论绕某一轴 $\overrightarrow{OA}$（方向）的转动惯量，取单位矢量

$$\boldsymbol{e}_1'=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$$



它与原坐标架$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$

补充单位矢量$\boldsymbol{e}'_2$与$\boldsymbol{e}'_3$，使$\boldsymbol{e}'=(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$构成右手直角坐标架，由$\boldsymbol{e}$到$\boldsymbol{e}'$的变换矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \circledast & \circledast \\ \cos\beta & \circledast & \circledast \\ \cos\gamma & \circledast & \circledast\end{bmatrix}$$

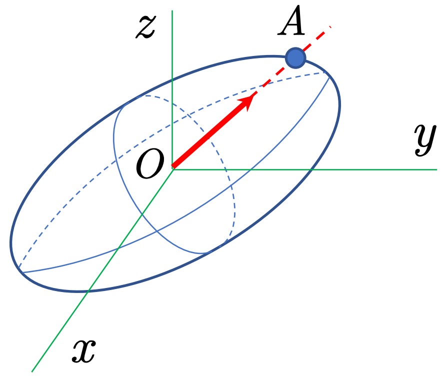
绕某一轴 $\overrightarrow{OA}$（即 $\boldsymbol{e}_1'$）的转动惯量

$$J_{OA}=J_{11}'=\sum_{i,j}(P^T)_{1i}(J)_{ij}(P)_{j1}=(\cos\alpha\quad\cos\beta\quad\cos\gamma)J\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$$

$$=J_{11}\cos^2\alpha+J_{22}\cos^2\beta+J_{33}\cos^2\gamma-2J_{12}\cos\alpha\cos\beta-2J_{23}\cos\beta\cos\gamma-2J_{31}\cos\gamma\cos\alpha$$

以 $x=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{J_{OA}}}$, $y=\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{J_{OA}}}$, $z=\dfrac{\cos\gamma}{\sqrt{J_{OA}}}$ 为参变量，上述方程成为椭球方程

$$J_{11}x^2+J_{22}y^2+J_{33}z^2-2J_{12}xy-2J_{23}yz-2J_{31}zx=1$$



椭球面上每点A到原点O的距离与刚体对轴 $\overrightarrow{OA}$ 的转动惯量的平方根成反比，称之为**惯量椭球**。

显然，椭球的三个主轴即为中心惯性主轴。

下面计算刚体定点转动的动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{v}_i$$
$$=\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_i\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\omega^T J\omega$$

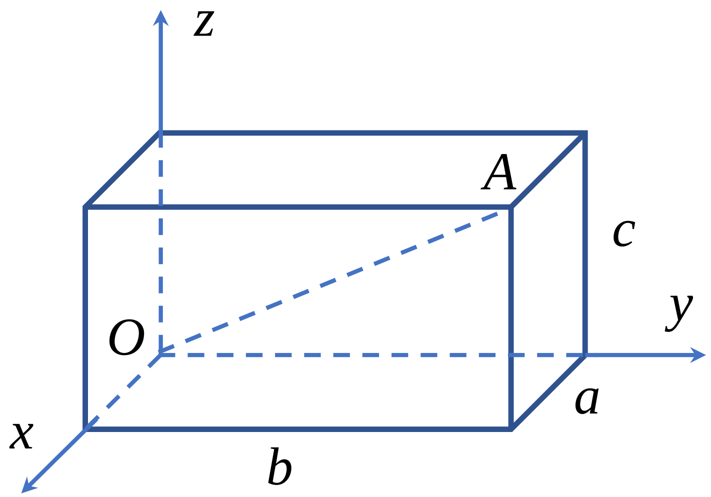
$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$$

由于能量（二次型）非负，可知转动惯量J为半正定对称矩阵。

如果取惯性主轴，则有

$$T=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2$$

例8.1 长方体的转动惯量



均质长方体的质量为M，其密度为

$$\rho = \frac{M}{abc}$$

对于连续介质物体，前面转动惯量的对质点求和在这里转化为积分

$$J_{xx} = \int_V (y^2 + z^2)\rho\,\mathrm{d}v = \frac{M}{3}(b^2 + c^2), \quad J_{xy} = \int_V xy\rho\,\mathrm{d}v = \frac{M}{4}ab$$

惯量矩阵的其它元素可类似计算，得到

$$J = M\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(b^2+c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(c^2+a^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

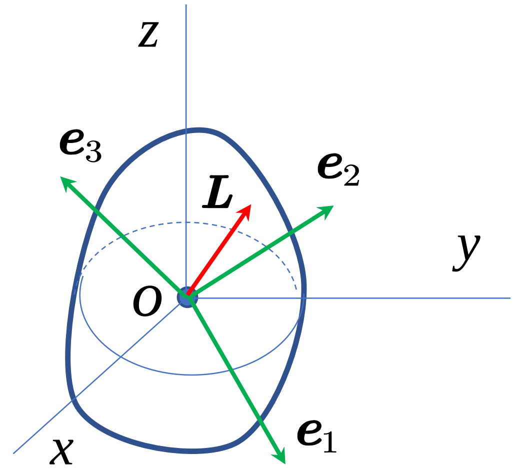
刚体定点运动的动力学方程

在随体坐标架下的动量矩定理

$$\boldsymbol{L}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}$$

相对导数

随体导数



其中$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{e}(L_1,L_2,L_3)^T=\boldsymbol{e}L$ 为刚体上的主矩，而动量矩为

$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}(H_1,H_2,H_3)^T=\boldsymbol{e}H=\boldsymbol{e}J\omega$，相对导数为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e}_1\dot{H}_1+\boldsymbol{e}_2\dot{H}_2+\boldsymbol{e}_3\dot{H}_3=\boldsymbol{e}\begin{pmatrix}\dot{H}_1 & \dot{H}_2 & \dot{H}_3\end{pmatrix}^T=\boldsymbol{e}\dot{H}$$

随体导数可写成 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}S(\omega)H=\boldsymbol{e}S(\omega)J\omega$

角速度矩阵（反对称）

于是动量矩定理就可表示为

$$\dot{H}+S(\omega)H=L \quad 或 \quad J\dot{\omega}+S(\omega)J\omega=L$$

写成分量形式的动力学方程

$$\begin{cases} \dot{H}_1 + \omega_2 H_3 - \omega_3 H_2 = L_1 \\ \dot{H}_2 + \omega_3 H_1 - \omega_1 H_3 = L_2 \\ \dot{H}_3 + \omega_1 H_2 - \omega_2 H_1 = L_3 \end{cases}$$

如果随体坐标架取在惯性主轴上，则可简化为

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases}$$

Euler动力学方程

可以看出刚体定点运动的**Euler动力学方程**是3个非线性微分方程，再加上3个**Euler运动学方程**，一共6个微分方程，如果刚体给定了外力，就可求解6个未知量 $\psi,\theta,\varphi,\omega_1,\omega_2,\omega_3$，然而求解这组微分方程是相对困难的。

现在讨论刚体定点运动的**动能定理**，考查动能变化率

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega^T J\omega)=\frac{1}{2}(\dot{\omega}^T J\omega+\omega^T J\dot{\omega})=\omega^T J\dot{\omega}$$

注意到力矩做功（功率）

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}=\omega^T L=\omega^T(J\dot{\omega}+S(\omega)J\omega)=\omega^T J\dot{\omega}$$

于是主矩做功的功率等于动能变化率，即动能定理

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}=\frac{dT}{dt}$$

Euler动力学方程的首次积分

刚体定点运动Euler动力学微分方程一般求解比较困难，但在一些特殊场合可获得首次积分从而使微分方程降价。如果没有外力矩L=0，比如重刚体绕其质心作定点运动，Euler动力学方程转化为

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1+(J_3-J_2)\omega_2\omega_3=0 & \times\omega_1 & \times J_1\omega_1 \\ J_2\dot{\omega}_2+(J_1-J_3)\omega_3\omega_1=0 & \times\omega_2 & \times J_2\omega_2 \\ J_3\dot{\omega}_3+(J_2-J_1)\omega_1\omega_2=0 & \times\omega_3 & \times J_3\omega_3 \end{cases}$$

上式左右两边同乘角速度及动量矩，然后三式相加，得到

机械能守恒

$$J_1\dot{\omega}_1\omega_1+J_2\dot{\omega}_2\omega_2+J_3\dot{\omega}_3\omega_3=0 \Longrightarrow J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2=\text{const.}$$

$$J_1^2\dot{\omega}_1\omega_1+J_2^2\dot{\omega}_2\omega_2+J_3^2\dot{\omega}_3\omega_3=0 \Longrightarrow J_1^2\omega_1^2+J_2^2\omega_2^2+J_3^2\omega_3^2=\text{const.}$$

动量矩大小守恒

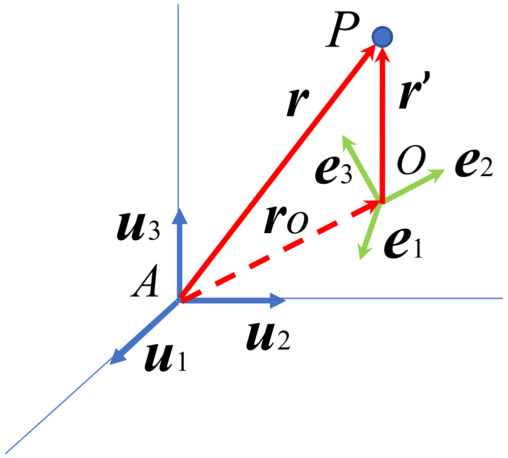
右边二式分别表示了机械能守恒与动量矩大小守恒（动量矩矢量不一定守恒），这样一来，运动学与动力学微分方程组从6阶降为4阶。

现在讨论刚体一般运动的动力学。我们在原点处于A的“定”（惯性）坐标架$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$，以及原点处于$O$的“动”坐标架$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$中研究运动，类似有正交坐标变换

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}Q,\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}Q^T$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}Q^T\dot{Q}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是“动”系相对于“定”系的角速度矢量，对矢径为$\boldsymbol{r}$的点P，考查其速度及其分解



$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_o+\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_o+\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{v}_o+\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$$

相对速度

$$=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e$$

绝对速度

相对速度

牵连速度

加速度及其分解

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}&=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_o}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\
&=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\\
&=\boldsymbol{a}_r+\underline{\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')}+\underline{2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r}\\
&=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c
\end{aligned}
$$

绝对加速度

哥氏加速度

牵连加速度

相对加速度

其中角加速度

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e}\dot{\omega}
$$

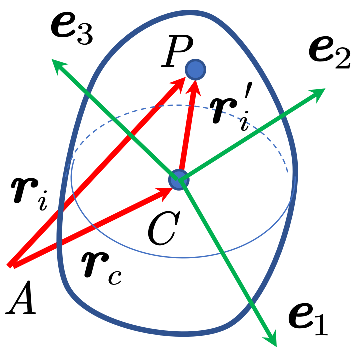
特别，如果坐标架$\{O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$固连在刚体上，则刚体上一点的速度、加速度有

$$
\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\triangleq\boldsymbol{v}_e
$$

$$
\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\triangleq\boldsymbol{a}_e
$$

现对一般运动刚体取惯性参考系$\{A,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$以及原点在质心$C$的随体坐标架$\{C,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，讨论刚体上任一点$P$的运动

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_c+\boldsymbol{r}_i'$$



设刚体质量为M，对刚体质心C有关系式

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i=M\boldsymbol{r}_c,\ \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_c+\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'=M\boldsymbol{r}_c+\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'$$

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'=0,\ \sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=M\dot{\boldsymbol{r}}_c=M\boldsymbol{v}_c$$

得出合力（主矢）与质心加速度的关系

$$\boldsymbol{R}=\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=M\ddot{\boldsymbol{r}}_c=M\boldsymbol{a}_c$$

质心动力学方程

对固定点A，有动量矩定理

$$\boldsymbol{L}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{L}_c+\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{R}$$

计算动量矩及其变化率

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A&=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)\\&=\sum_i \boldsymbol{r}_c\times(m_i\boldsymbol{v}_i)+\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times(m_i(\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i'))\\&=\boldsymbol{r}_c\times(M\boldsymbol{v}_c)+\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{v}_c+\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i')\\&=\boldsymbol{r}_c\times(M\boldsymbol{v}_c)+\boldsymbol{H}_c\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}_c\times(M\boldsymbol{v}_c)+\boldsymbol{r}_c\times(M\dot{\boldsymbol{v}}_c)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}_c\times(M\boldsymbol{a}_c)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t}$$

由此得出绕质心转动的动力学

$$\boldsymbol{L}_c = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}_c$$

利用$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e}\omega$, $\boldsymbol{L}_c = \boldsymbol{e}L_c$, $\boldsymbol{H}_c = \boldsymbol{e}H_c = \boldsymbol{e}J_c\omega$，可以写成矩阵形式

$$\dot{H}_c + S(\omega)H_c = L_c \quad \text{或} \quad J_c\dot{\omega} + S(\omega)J_c\omega = L_c$$

绕质心运动动力学方程

作为练习，可以证明刚体一般运动的动能

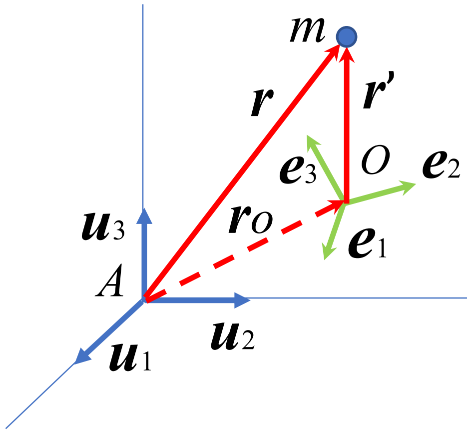
$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{H}_c = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\omega^T J_c \omega$$

刚体的一般运动，可以用质心平动动力学、绕质心转动动力学、运动学（如前面的Euler运动学）等方程来刻画，共有9个标量微分方程，原则上可以求解包括质心位置、姿态角、角速度等9个未知标量 $x_c, y_c, z_c, \psi, \theta, \varphi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$，当然获得分析解是很困难的。一般有两类问题：第一，已知力求运动（解动力学微分方程），第二，已知（期望）运动求力（控制问题）。

非惯性系中的动力学（教材第16章）

牛顿动力学在惯性系中成立，在非惯性系中讨论动力学问题需要作些处理。地球是个近似的惯性系（公转、自转速度很小）

现取惯性参考系$\{A,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$以及非惯性系坐标架$\{O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，考查质量为$m$之质点的动力学



$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}$$

其中$\boldsymbol{F}$为主动力，$\boldsymbol{N}$为被动力（约束力），加速度有分解式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c\\&=\underbrace{\boldsymbol{a}_r}_{\text{相对加速度}}+\underbrace{\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')}_{\text{牵连加速度}}+\underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r}_{\text{哥氏加速度}}\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\varepsilon}$分别为非惯性系相对于惯性系的角速度与角加速度

于是我们有相对运动的动力学方程

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_c$$

这里$\boldsymbol{S}_e = -m\boldsymbol{a}_e$ 称为**牵连惯性力**，$\boldsymbol{S}_c = -m\boldsymbol{a}_c$ 称为**哥式惯性力**，而

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2 \boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

其中(x,y,z)是非惯性系中的坐标（相对坐标）

这样一来，通过引入假想的惯性力，在非惯性系中牛顿动力学方程形式上依然成立。刚体相对运动动力学方程类似，我们知道刚体动力学分为质心平动和绕质心转动的动力学，质心平动相对动力学与上述类似，绕质心转动的相对动力学涉及到再取一个非惯性坐标系，这里不作讨论，但我们在下一章达朗伯原理中将作一些类似分析。