现代控制理论

中国科学技术大学 自动化系

本课程的篇章结构

<table>
<tr><td rowspan="2">建模</td><td>直接获取</td><td>第2章 系统的状态空间模型</td></tr>
<tr><td>模型转换</td><td>第2章 系统的状态空间模型
第6章 传递函数矩阵的状态空间实现</td></tr>
<tr><td rowspan="2">分析</td><td>定量分析</td><td>第3章 状态空间方程的解</td></tr>
<tr><td>定性分析</td><td>第4章 系统的稳定性
第5章 能控性和能观性</td></tr>
<tr><td rowspan="2">设计</td><td>常规控制</td><td>第7章 状态反馈和状态观测器</td></tr>
<tr><td>最优控制</td><td>第8章 最优性原理与动态规划
第9章 极小值原理
第10章 二次型指标的线性最优控制</td></tr>
</table>

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

R.E.卡尔曼（Rudolf Emil Kalman）

匈牙利裔美国数学家，1930年5月19日出生于匈牙利首都布达佩斯。1953年和1954年在美国麻省理工学院（MIT）分别获得电机工程学（又一说是理学）学士及硕士学位。1957年在哥伦比亚大学获得科学博士学位。1957～1958年在IBM公司研究大系统计算机控制的数学问题。1958～1964年在巴尔的摩高级研究院研究控制和数学问题。1964～1971年到斯坦福大学任教授。1971年任佛罗里达大学数学系统理论研究中心主任，并兼任苏黎世的瑞士联邦高等工业学校教授。

著名的卡尔曼滤波器，正是源于他的博士论文和1960年发表的论文《线性滤波与预测问题的新方法》。他也因此而闻名于世。卡尔曼滤波器广泛应用于机器人、导航、控制、传感器数据融合、甚至雷达系统以及导弹追踪等等。近年来更被应用于计算机图像处理，例如头脸识别，图像分割，图像边缘检测等等。

1960年卡尔曼提出了影响深远的系统能控性的概念。能控性是控制系统的研究和实现的基本概念，在最优控制理论、稳定性理论和网络理论中起著重要作用。卡尔曼还利用对偶原理导出能观测性概念，并在数学上证明了卡尔曼滤波理论与最优控制理论对偶。为此获国际电气与电子工程师学会(IEEE)的最高奖— IEEE荣誉奖章。卡尔曼著有《数学系统概论》(1968)等著作。

第五章 系统的能控性和能观性

§5.1 能控性与能达性

5.1.1 能控与能达的概念

5.1.2 能控的条件

§5.2 能观性与能构性

§5.3 线性系统状态空间结构

§5.4 线性离散系统的能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

5.1.1 能控与能达的概念

定义 5.1：状态的能控与能达

对某系统的一个特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$，若存在一个有限的时间段 $[t_0, t_f)$，以及定义在该时间段上的控制函数 $\boldsymbol{u}(t) = \bar{\boldsymbol{u}}(t), t \in [t_0, t_f)$，能够把系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 推向状态 $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{0}$，则称该系统的这一特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 t_0 时刻能控的；反过来，若存在将系统从 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ 推向 $\boldsymbol{x}(t_f) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 的控制作用，则称状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 t_0 时刻能达的。

对于线性定常的连续时间系统，当然还可以表述得更为明确一些：

定义 5.1C：状态的能控与能达（线性定常连续时间系统）

对系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 的一个特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$，若存在一个有限时间 $t_f > 0$，及控制函数 $\boldsymbol{u}(t) = \bar{\boldsymbol{u}}(t), t \in [0, t_f)$，能够把系统 $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ 从初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 推向状态 $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{0}$，则称该系统的这一特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是能控的；反过来，如果存在将系统从 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ 推向 $\boldsymbol{x}(t_f) = \bar{\boldsymbol{x}}$ 的控制作用，则称状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为能达的。

能控性实质上表征了系统的输入对系统的状态的指挥（控制）能力

5.1.1 能控与能达的概念

定义 5.2：系统的能控与能达

如果系统状态空间中的每一个状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的或简称系统是能控的；同样，若系统的每一个状态都是能达的则称系统是状态完全能达的，或简称系统是能达的。

注意：

1. 定义5.1中的“存在一个”（有限时间段）可替换为“对每一个”，可以证明这两种说法是等价的；
2. 可以证明：对于连续时间系统而言，系统能控与系统能达是完全等价的；
3. 因有上述结论，很多教材为简单起见，采取回避能达，直接定义简化了的系统的能控：

定义 5.2s：（简化的）系统能控（回避能达的概念）

系统称为是能控的是指：对状态空间中任意初态 $\boldsymbol{x}_1$ 及任意末态 $\boldsymbol{x}_2$，存在一个输入，使得在有限时间内将 $\boldsymbol{x}_1$ 转移至 $\boldsymbol{x}_2$ 。

特别说明：在“能控性”、“能达性”等术语中，“能”与“可”通用。

第五章 系统的能控性和能观性

§5.1 能控性与能达性

5.1.1 能控与能达的概念

5.1.2 能控的条件

§5.2 能观性与能构性

§5.3 线性系统状态空间结构

§5.4 线性离散系统的能控性和能观性

5.1.2 能控的条件

〇、象空间和零空间

【定义】矩阵的象空间（*range space*）

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的象空间是由

$$R(\boldsymbol{M})=\left\{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m \middle| \boldsymbol{y}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\right\}$$

定义的 $\boldsymbol{m}$ 维向量空间的子空间。

【定义】矩阵的零空间（*null space*）

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的零空间是由

$$N(\boldsymbol{M})=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \middle| \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$$

定义的 $\boldsymbol{n}$ 维向量空间的子空间。

零空间中的每一个元素都称作矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的化零向量

有关结论：

1. $N(\boldsymbol{M})=R(\boldsymbol{M}')^{\perp}$
2. $rank(\boldsymbol{M})+nullity(\boldsymbol{M}')=m$
3. $R(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')=R(\boldsymbol{M})$
4. $N(\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M})=N(\boldsymbol{M})$

5.1.2 能控的条件

一、能控性定理

定理5.1：能控性定理

对于线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是能控状态的充要条件是存在有限的 $t_f > 0$，使该状态属于象空间 $R[W_C(t_f)]$，即 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R[W_C(t_f)]$，其中

$$W_C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}d\tau$$

称为能控格兰姆（*Gramian*）矩阵。

推论 5.1：能控性定理

线性定常系统能控的充要条件是其能控格兰姆矩阵非奇异。

5.1.2 能控的条件（一、能控性定理）

定理5.1：能控性定理

对于线性定常系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，状态 x 是能控状态的充要条件是存在有限的 $t_f>0$，使该状态属于象空间 $R[W_C(t_f)]$，即 $\bar{x}\in R[W_C(t_f)]$，其中 $W_C(t_f)=\int_0^{t_f}e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau$ 称为能控格兰姆（Gramian）矩阵。

充分性证明： $\bar{x}\in R[W_C(t_f)]\Rightarrow x(t_f)=0$

因 $\bar{x}\in R[W_c(t_f)]$，故有向量 z 满足 $\bar{x}=W_c(t_f)z$ 于是，对初态 $x(0)=\bar{x}$，只要选取输入

$$\bar{u}(t)=-B'e^{-A't}z \qquad t\in[0,t_f]$$

则在 t_f 时刻，系统的状态响应是

$$x(t_f)=e^{At_f}x(0)+\int_0^{t_f}e^{A(t_f-\tau)}B\bar{u}(\tau)d\tau=e^{At_f}x(0)+\int_0^{t_f}e^{A(t_f-\tau)}B\left(-B'e^{-A'\tau}z\right)d\tau$$

$$=e^{At_f}\bar{x}-e^{At_f}\left(\int_0^{t_f}e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau\right)z=e^{At_f}\bar{x}-e^{At_f}W_C(t_f)z=e^{At_f}\bar{x}-e^{At_f}\bar{x}=0$$

此即表明，状态 x 是能控的。充分性得证。

5.1.2 能控的条件（一、能控性定理）

定理 5.1：能控性定理

对于线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，状态 $\boldsymbol{x}$ 是能控状态的充要条件是存在有限的 $t_f > 0$，使该状态属于象空间 $R[W_C(t_f)]$，即 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R[W_C(t_f)]$，其中 $W_C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}d\tau$ 称为能控格兰姆（*Gramian*）矩阵。

必要性证明： 状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 能控 $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{x}} \in R[W_C(t_f)]\left(\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{v} \in N[W_C(t_f)], \boldsymbol{v}'\bar{\boldsymbol{x}} = 0\right)$

状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 能控：有 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 使	$\forall \boldsymbol{v} \in N[W_C(t_f)]$
$\boldsymbol{x}(t_f) = e^{At_f}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$ $= e^{At_f}\left[\bar{\boldsymbol{x}} + \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right] = \boldsymbol{0}$ 因矩阵指数的非奇异性 $\bar{\boldsymbol{x}} + \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = \boldsymbol{0}$	$0 = \boldsymbol{v}'W_C(t_f)\boldsymbol{v} = \int_0^{t_f} \boldsymbol{v}'e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v}d\tau$ $= \int_0^{t_f} (\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v})'(\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v})d\tau$ $= \int_0^{t_f} \left\lVert \boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v}\right\rVert^2 d\tau$ $\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \forall \tau \in (0, t_f)$

$$\boldsymbol{v}'\bar{\boldsymbol{x}} = -\int_0^{t_f} \boldsymbol{v}'e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = -\int_0^{t_f} [\boldsymbol{B}'e^{-A'\tau}\boldsymbol{v}]'\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = 0$$

即若状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 能控，则必然有 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Re[W_C(t_f)]$。 **必要性得证。**

5.1.2 能控的条件 (一、能控性定理)

定理5.1：能控性定理

对于线性定常系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，状态 x 是能控状态的充要条件是存在有限的 $t_f>0$，使该状态属于象空间 $R[W_C(t_f)]$，即 $\bar{x}\in R[W_C(t_f)]$，其中 $W_C(t_f)=\int_0^{t_f} e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau$ 称为能控格兰姆（*Gramian*）矩阵。

推论 5.1：线性定常系统能控的充要条件是其能控格兰姆矩阵非奇异。

显然，推论5.1是定理5.1的自然结果，当然它也可以直接证明。
按照定义5.3给出的（简化的）能控性定义，推论5.1也是可以证明的。
证明工作留给有兴趣的同学

注意：

1.在很多书上（包括我们的教材）此推论就被直接陈述为能控性定理；

2.同时，能控格兰姆矩阵常定义为 $W_{c.}(t_f)=\int_0^{t_f} e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau$ ，但要指出的是：

①它不影响推论5.1（系统能控）结论的正确性，

②用它来描述定理5.1（状态能控）在此定义将会有问题。

5.1.2 能控的条件 (一、能控性定理)

定义5.3：能控子空间和不能控子空间

线性系统的所有能控状态的集合(及普通的向量加法和数乘运算)构成一个子空间，称之为系统的**能控子空间**；能控子空间的正交补空间称为系统的**不能控子空间**。

系统的能控子空间就是该系统能控格兰姆矩阵的象空间；而系统的不能控子空间是该系统能控格兰姆矩阵的零空间。

$$X_C = R[W_C(t_f)]$$

$$X_{\bar{C}} = N[W_C(t_f)]$$

线性空间

V — 集合 $\{\alpha, \beta, \delta, \cdots\}$

P — 数域 $\{k, l, \cdots\}$

V 上定义了加法

P 与 **V** 之间定义了数乘，且满足：

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. $(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)$
3. 存在零元素 o：$\alpha+o=\alpha$
4. 存在负元素 $\beta=-\alpha$：$\alpha+\beta=o$
5. $1\cdot\alpha=\alpha$
6. $k\cdot(l\cdot\alpha)=(kl)\cdot\alpha$
7. $(k+l)\cdot\alpha=k\cdot\alpha+l\cdot\alpha$
8. $k\cdot(\alpha+\beta)=k\cdot\alpha+k\cdot\beta$

5.1.2 系统能控的条件

二、能控性判据

定理5.2：能控性判据

定义 n 维系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{M}_C=[\,\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\,]$$

则系统的能控子空间是： $X_C=R[\boldsymbol{W}_C(t_f)]=R(\boldsymbol{M}_C)$

而系统的不能控子空间是： $X_{\bar{C}}=N[\boldsymbol{W}_C(t_f)]=N(\boldsymbol{M}_C')$

推论5.2（系统能控判据）

线性定常系统能控的充要条件是其能控性矩阵满秩，即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_C)=\mathrm{rank}[\,\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\,]=n$$

若$\boldsymbol{B}$的列秩为m，上式还可进一步简化为

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_C)=\mathrm{rank}[\,\boldsymbol{B}\;\; \boldsymbol{AB}\;\; \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\cdots \boldsymbol{A}^{n-m}\boldsymbol{B}\,]=n$$

5.1.2 能控的条件（二.能控性判据）

定理5.2：能控性判据

系统的能控子空间是 $X_C = R[W_C(t_f)] = R(M_C)$

$W_C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} BB' e^{-A'\tau} d\tau \qquad M_C = [\,B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\,]$

证明：因 $W_C = W_C'$，且 $R(M_C)^{\perp} = N(M_C')$， $R(W_C)^{\perp} = N(W_C') = N(W_C)$

故只要证：$N(W_C) = N(M_C') \quad \Leftrightarrow \quad N(W_C) \subset N(M_C')$ 且 $N(W_C) \supset N(M_C')$

先证 $N(W_C) \subset N(M_C')$： 设 $z \in N(W_C)$， 则 $W_C z = 0$， 当然：

$$0 = z' W_C z = \int_0^{t_f} z' e^{-At} BB' e^{-A't} z\, dt = \int_0^{t_f} (B' e^{-A't} z)'(B' e^{-A't} z)\, dt = \int_0^{t_f} \left\| B' e^{-A't} z \right\|^2 dt$$

于是：$B' e^{-A't} z \equiv 0,\ \forall t \in (0, t_f)$ 等式两端同时对 t 求 k 阶导数并令 $t = 0$，可得

$$B'(A')^k z = 0 \qquad k = 0,1,2\cdots,n-1$$

于是 $M_C' z = \begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ \vdots \\ B'(A')^{n-1} \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} B'z \\ B'A'z \\ \vdots \\ B'(A')^{n-1} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ 此即 $z \in N(M_C')$

所以 $N(W_C) \subset N(M_C')$

为了证明 $N(W_C) \supset N(M_C')$，只需把上述证明过程反向：

5.1.2 能控的条件（二.能控性判据）

定理5.2：能控性判据

系统的能控子空间是 $X_C = R[W_C(t_f)] = R(M_C)$

$$W_C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B' e^{-A'\tau} d\tau \qquad M_C = [\,B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\,]$$

证明： 因 $W_C = W_C'$，且 $R(M_C)^{\perp} = N(M_C')$，$R(W_C)^{\perp} = N(W_C') = N(W_C)$

故只要证：$N(W_C) = N(M_C') \quad \Leftrightarrow \quad N(W_C) \subset N(M_C')$ 且 $N(W_C) \supset N(M_C')$

前页已证 $N(W_C) \subset N(M_C')$

现在来证 $N(W_C) \supset N(M_C')$： 若 $z \in N(M_C')$，即 $M_C' z = 0$ 则

$$B'(A')^k z = 0 \qquad k = 0,1,2.\cdots, n-1$$

于是：$B' e^{-A't} z = B' \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)(-A')^k \right) z = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_k(t) B'(A')^k z \equiv 0, \quad \forall t \in (0, t_f)$

所以 $W_C z = \int_0^{t_f} e^{-At} B B' e^{-A't} dt \cdot z = \int_0^{t_f} e^{-At} B \left(B' e^{-A't} z \right) dt = 0$ 此即 $z \in N(W_C)$

所以 $N(W_C) \supset N(M_C')$

这就是所要的结论。 【证毕】

5.1.2 能控的条件（二.能控性判据）

【例5.1】 判断如下几个系统的能控性

$$S_1:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$S_2:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$S_3:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$S_4:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$S_5:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$S_6:\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

5.1.2 系统能控的条件（示例）

【例 5.2】判断如下系统的能控性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

【解】因 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 2，故可用 $M_{C2} = [\,\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{AB}\,]$ 替代 $M_C = [\,\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{AB} \;\; \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\,]$ 来检验系统的能控性。因

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}_{C2}) = \operatorname{rank}([\,\boldsymbol{B} \;\; \boldsymbol{AB}\,]) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

故题给的状态空间方程不是状态完全能控的，或者说系统是不能控的。

习题：p168-170（159-162）

4.6 4.10 4.11

5.1.2 系统能控的条件

三、能控性校验

定理5.3：能控性校验

n 维系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 能控的充要条件是：对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值λ都有

$$\operatorname{rank}[\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}]=n$$

$$\text{rank}[\,\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}\,]=n$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{rank}(\boldsymbol{M}_C)=\text{rank}[\,\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\,]=n$$

(i) $rank\left(\left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right]\right)=n \Rightarrow$?

当 λ 不是A的特征值， $|\lambda I-A| \neq 0 \Rightarrow rank([\lambda I-A, B])=n$

当 λ 是A的特征值， $|\lambda I-A|=0 \Longrightarrow rank(\lambda I-A)<n$

假设 $rank([\lambda I-A, B])<n$ ，则存在非0向量v，使得

$v^T[\lambda I-A, B]=0 \Rightarrow v^TB=0, \ \lambda v^T=v^TA$

$\Downarrow$

$v^TAB=\lambda v^TB=0, \Rightarrow v^TA^kB=0, \ k=0,1,2,\cdots$

$\Downarrow$

矛盾！ $\Leftarrow v^T\left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right]=0,$

(ii) $rank([\lambda I - A, B]) = n, \forall \lambda \Longrightarrow$?

假设 $rank([B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]) < n$. 存在非0向量$v$使得：

$$v^T[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] = 0, \Longrightarrow v^T B = 0, \cdots, v^T A^{n-1} B = 0$$

$$\Longrightarrow v^T A^l B = 0, l \geq n \text{ (Cayley-Hamilton Theorem)}$$

$V = \{v \mid v^T A^l B = 0, \forall l \in N\}$ 是一个线性空间。

V 非空。 V 有一组基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$, $V = span\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$

对任意向量$v \in V$，有如下坐标展开

$$v = \sum_{j=1}^{s} y_j v_j = [v_1, v_2, \cdots, v_s] y, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix}$$

可以验证： $v \in V$ ，

$$A^T v \in V, \quad \left(A^T v\right)^T A^l B = v^T A^{l+1} B = 0, \forall l \in N$$

So $A^T v_j \in V, j = 1, \cdots, s$

$$\left\{\begin{aligned} A^T v_1 &= [v_1, v_2, \cdots, v_s]\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{s1} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A^T v_s &= [v_1, v_2, \cdots, v_s]\begin{bmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ \vdots \\ z_{ss} \end{bmatrix} \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} &A^T [v_1, v_2, \cdots, v_s] = [v_1, v_2, \cdots, v_s] Z, \\ &Z = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{s1} & \cdots & z_{ss} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Z 至少有一个特征值 α 和一个特征向量 u

$$Zu = \alpha u, u \neq 0$$

定义 $\bar{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_s]u \quad \bar{v} \neq 0$

$$\begin{aligned} A^T \bar{v} &= A^T [v_1, v_2, \cdots, v_s]u \\ &= [v_1, v_2, \cdots, v_s]Zu \\ &= [v_1, v_2, \cdots, v_s](\alpha u) = \alpha [v_1, v_2, \cdots, v_s]u \\ &= \alpha \bar{v} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}^T A = \alpha \bar{v} \\ \bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v}^T B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{v}^T [\alpha I - A \quad B] = 0, \bar{v} \neq 0$$

$$\Rightarrow rank([\lambda I - A \quad B]) < n, \lambda = \alpha$$

$$rank([B, AB, A^2 B, \cdots, A^{n-1} B]) = n \quad \Leftrightarrow \quad rank([\lambda I - A, B]) = n, \forall \lambda$$

5.1.2 系统能控的条件

定理5.4：

线性变换不改变系统的能控性。

$$\overline{A}=PAP^{-1},\overline{B}=PB,\qquad P:\text{非奇异}$$

$$\begin{aligned}&\left[\overline{B},\overline{A}\overline{B},\overline{A}^2\overline{B},\cdots,\overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]\\&=\left[PB,PAP^{-1}PB,PA^2P^{-1}PB,\cdots,PA^{n-1}P^{-1}PB\right]\\&=P\left[B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&rank\left[\overline{B},\overline{A}\overline{B},\overline{A}^2\overline{B},\cdots,\overline{A}^{n-1}\overline{B}\right]\\&=rank\left[B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B\right]\end{aligned}}$$

5.1.2 系统能控的条件

四、能控标准型

定义5.4 能控标准型系统与能控标准型

单输入系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_C u$，若矩阵对 $(\boldsymbol{A}_C, \boldsymbol{b}_C)$ 具有如下的标准形式：

$$\boldsymbol{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则系统 $\{\boldsymbol{A}_C, \boldsymbol{b}_C\}$ 称作能控标准型系统，矩阵对 $(\boldsymbol{A}_C, \boldsymbol{b}_C)$ 称作能控标准型。

能控标准型系统一定能控。（同学们可自行完成证明）

定理5.5 能控标准型系统

单输入系统能控的充要条件是：存在一个线性变换，可将系统变换为能控标准型系统。

能控标准型求取：*n=4*为例

$$(A,b)\text{能控} \xrightarrow{?} A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2&-\alpha_3\end{bmatrix},\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b & A^3b\end{bmatrix}\ \text{满秩}$$

$$\Downarrow$$

$$v^T\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b & A^3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{存在唯一非0向量}v$$

$$v^T b=0,\quad v^T Ab=0,\quad v^T A^2b=0,\quad v^T A^3b=1$$

$$\Downarrow$$

$$P=\begin{bmatrix}v^T\\ v^TA\\ v^TA^2\\ v^TA^3\end{bmatrix} \longleftarrow \text{非奇异}$$

$$P\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b & A^3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v^Tb & v^TAb & v^TA^2b & v^TA^3b\\ v^TAb & v^TA^2b & v^TA^3b & v^TA^4b\\ v^TA^2b & v^TA^3b & v^TA^4b & v^TA^5b\\ v^TA^3b & v^TA^4b & v^TA^5b & v^TA^6b\end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = PAP^{-1}, \overline{b} = Pb$$

$$\overline{b} = Pb = \begin{bmatrix} v^T b \\ v^T Ab \\ v^T A^2 b \\ v^T A^3 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v^T b = 0, \quad v^T Ab = 0,$$
$$v^T A^2 b = 0, \quad v^T A^3 b = 1$$

$$\overline{A}P = PA = \begin{bmatrix} v^T \\ v^T A \\ v^T A^2 \\ v^T A^3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} v^T A \\ v^T A^2 \\ v^T A^3 \\ v^T A^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T \\ v^T A \\ v^T A^2 \\ v^T A^3 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$A^4 = -\alpha_3 A^3 - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

$$v^T A^4 = -\alpha_3 v^T A^3 - \alpha_2 v^T A^2 - \alpha_1 v^T A - \alpha_0 v^T$$

$$\overline{A} = PAP^{-1}, \overline{b} = Pb$$

$$\overline{b} = Pb = \begin{bmatrix} v^T b \\ v^T A b \\ v^T A^2 b \\ v^T A^3 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v^T b = 0, \quad v^T A b = 0,$$
$$v^T A^2 b = 0, \quad v^T A^3 b = 1$$

$$\overline{A} P = PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} P$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

其它能控标准型求取：*n=4*为例

$$v^T\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 存在唯一非0向量*v*

$$v^T b = 0, \quad v^T Ab = 0, \quad v^T A^2 b = 0, \quad v^T A^3 b = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} v^T A^3 \\ v^T A^2 \\ v^T A \\ v^T \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = PAP^{-1}, \overline{b} = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{b} = Pb = \begin{bmatrix} v^T A^3 b \\ v^T A^2 b \\ v^T Ab \\ v^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}P = PA = \begin{bmatrix} v^T A^3 \\ v^T A^2 \\ v^T A \\ v^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} v^T A^4 \\ v^T A^3 \\ v^T A^2 \\ v^T A \end{bmatrix}$$

$$A^4 = -\alpha_3 A^3 - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T A^3 \\ v^T A^2 \\ v^T A \\ v^T \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

几种型式的能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2&\cdots&-\alpha_{n-1}\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

下友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_0\\1&0&\cdots&0&-\alpha_1\\0&1&\cdots&0&-\alpha_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-\alpha_{n-1}\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

右友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}-\alpha_{n-1}&-\alpha_{n-2}&\cdots&-\alpha_1&-\alpha_0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

上友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}-\alpha_{n-1}&1&0&\cdots&0\\-\alpha_{n-2}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\alpha_1&0&0&\cdots&1\\-\alpha_0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

左友型能控标准型

右友型能控标准型求取：*n*=4为例

$$Q = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ, \bar{b} = Q^{-1}b$$

$$Q\bar{b} = b = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q\bar{A} = AQ = \begin{bmatrix} Ab & A^2b & A^3b & A^4b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

5.1.2 系统能控的条件

五、输出能控性

定义 5.5 系统的输出能控性

对系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$，若存在一个有限时间$t_f>0$，及控制函数

$$\boldsymbol{u}(t)=\overline{\boldsymbol{u}}(t) \qquad t\in[\,0,t_f\,]$$

能够把系统的输出从任一初始输出$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}_1$推向$t_f$时刻的任意指定输出$\boldsymbol{y}(t_f)=\boldsymbol{y}_2$，则称该系统是输出能控的。

定理5.6 系统输出能控的条件

系统输出能控的充要条件为系统的输出能控性矩满秩。

$$\boldsymbol{M}_{Cy}=[\,\boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{CB} \quad \boldsymbol{CAB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B}\,]=[\,\boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{CM}_C\,]$$

5.1.3 系统能达的条件

定义 5.7 系统的能达集合

$$S_r = \left\{ x \;\middle|\; x = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B u(\tau) d\tau, \forall t_f, \forall u(\tau) \right\}$$

$$S_r \subset span\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right]$$

$$+ \quad S_r^{\perp} \subset \left(span\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right]\right)^{\perp}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_r = R^n \Leftrightarrow rank\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right] = n}$$

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

5.2.1 能观与能构的概念

5.2.2 对偶性原理

5.2.3 能观性的判定

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

§ 5.2 能观性与能构性

5.2.1 能观与能构的概念

定义 5.6：状态的不能观测与不能重构

零输入条件下，若系统在某有限时间段的输出恒为零，则称该时间段的初始状态是不能观测的；而称该时间段的末端状态是不能重构的。

定义 5.7：系统的能观与能构

如果系统的状态空间中没有不能观测的非零状态，则称系统是状态完全能观测的，简称系统是能观的；同样，如果状态空间中没有不能重构的非零状态，则称系统是状态完全能重构的，简称系统是能构的。

定义 5.8：能观子空间和不能观子空间

线性系统的所有不能观状态的集合（及普通的向量加法和数乘运算）构成一个子空间，称之为系统的不能观子空间；不能观子空间的正交补空间称为系统的能观子空间。

注意：所有能观状态的集合不能构成一个线性子空间，因为其中没有零元素 。

§ 5.2 能观性与能构性

5.2.1 能观与能构的概念

在其它教材上，系统的能观与能构更常见的是如下的定义。当然它也许更容易理解，而且可以证明它与上面的定义是完全等价的。

定义 5.7e：系统的能观与能构 (不涉及状态不能观与不能构的概念)

如果依据有限时间内测得的输入输出信号，可以唯一确定该有限时间段起始时刻系统的状态，则称该系统是能观(测)的；若可以唯一确定该有限时间段末端时刻的状态，则称该系统是能(重)构的。

可以证明：对线性定常连续时间系统，系统的能观测性与能重构性的条件是相同的。

以上对概念的陈述大多没有引入系统的具体数学表达，这是为了避免概念的特指，即在本子节中陈述的概念可同时适用于连续时间系统或离散时间系统、时变系统或定常系统、线性系统或非线性系统(定义5.8除外)。

第五章 能控性和能观性

§ 5.2 能观性与能构性

5.2.2 对偶性原理

一、能观性定理

定理 5.7：能观性定理

线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$的状态$\boldsymbol{x}$为不能观测的充要条件是：

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]$$

其中对称阵

$$\boldsymbol{W}_O(t_f) = \int_0^{t_f} e^{\boldsymbol{A}'t}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\,dt$$

称为系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$的能观格拉姆（Gramian）矩阵。

能观性定理表明：系统的不能观子空间是该系统能观格兰姆矩阵的零空间，当然系统的能观子空间是该系统能观格兰姆矩阵的象空间。

$$X_{\bar{O}} = N[W_O(t_f)] \qquad X_O = R[W_O(t_f)]$$

5.2.2 对偶性原理（一、能观性定理）

定理 5.7：能观性定理

线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$的状态$\bar{\boldsymbol{x}}$为不能观测的充要条件是：$\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]$

其中对称阵$\boldsymbol{W}_O(t_f)=\int_0^{t_f}e^{A't}C'Ce^{At}dt$称为该系统的能观格拉姆（Gramian）矩阵。

证明： 必要性 $\bar{\boldsymbol{x}}$不能观$\Rightarrow\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]$

如果状态$\bar{\boldsymbol{x}}$不能观，则存在某有限的$t_f>0$，使

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{C}e^{At}\bar{\boldsymbol{x}}=0\qquad\forall t\in[0,t_f]$$

于是
$$\boldsymbol{W}_O(t_f)\bar{\boldsymbol{x}}=\int_0^{t_f}e^{A't}C'Ce^{At}dt\,\bar{\boldsymbol{x}}=\int_0^{t_f}e^{A't}C'\boldsymbol{y}(t)dt=\boldsymbol{0}$$

当然，此即表明$\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]$。

充分性 $\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]\Rightarrow\bar{\boldsymbol{x}}$不能观。只需把充分性的证明过程反过来：

因
$$\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]，\qquad 即\ \boldsymbol{W}_O(t_f)\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$$

故
$$0=\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{W}_O(t_f)\bar{\boldsymbol{x}}=\int_0^{t_f}\bar{\boldsymbol{x}}'e^{A't_f}C'Ce^{At_f}\bar{\boldsymbol{x}}dt=\int_0^{t_f}\left\|Ce^{At_f}\bar{\boldsymbol{x}}\right\|^2dt$$

故当$\boldsymbol{u}(t)\equiv\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}(0)=\bar{\boldsymbol{x}}$时，系统的输出为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{C}e^{At}\bar{\boldsymbol{x}}=0\qquad\forall t\in[0,t_f]$$

这就是状态$\bar{\boldsymbol{x}}$不能观的定义。

5.2.2 对偶性原理（一、能观性定理）

定理 5.7：能观性定理

线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$的状态$\bar{\boldsymbol{x}}$为不能观测的充要条件是：$\bar{\boldsymbol{x}}\in N[\boldsymbol{W}_O(t_f)]$

其中对称阵$\boldsymbol{W}_O(t_f)=\int_0^{t_f}e^{A't}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}e^{At}dt$称为该系统的能观格拉姆（Gramian）矩阵。

$$X_{\bar{O}}=N[W_O(t_f)] \qquad X_O=R[W_O(t_f)]$$

推论5.3 线性系统能观的充要条件是其能观格兰姆矩阵非奇异。

在很多书上（包括我们的教材）此推论就被直接陈述为能观性定理，当然它可以直接得到证明。

§ 5.2 能观性、能构性

5.2.2 对偶性原理

二、对偶性原理

把连续时间系统的能控子空间和不能控子空间以及能观子空间和不能观子空间的表达式写在一起:

$$X_C = R[W_C(t_f)], \quad X_{\bar{C}} = N[W_C(t_f)], \qquad W_C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-At} BB' e^{-A't} dt$$

$$X_O = R[W_O(t_f)], \quad X_{\bar{O}} = N[W_O(t_f)], \qquad W_O(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A't} C'C e^{At} dt$$

考虑2个系统的能控性、能观性:

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{x} = -A'x + C'u \\ y = B'x \end{cases}$$

针对S1：

$$S_1:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

$$W_{C,1}(t_f)=\int_0^{t_f}e^{-At}BB'e^{-A't}dt,\qquad X_{C,1}=R[W_{C,1}(t_f)]$$

针对S2：

$$S_2:\begin{cases}\dot{x}=A_2x+B_2u=-A'x+C'u\\ y=C_2x=B'x\end{cases}$$

$$W_{O,2}(t_f)=\int_0^{t_f}e^{A_2't}C_2'C_2e^{A_2t}dt=\int_0^{t_f}e^{(-A')'t}(B')'(B')e^{(-A')t}dt$$

$$=\int_0^{t_f}e^{-At}BB'e^{-A't}dt$$

$$=W_{C,1}(t_f)$$

$$X_{O,2}=R[W_{O,2}(t_f)]=R[W_{C,1}(t_f)]=X_{C,1}$$

$\boxed{\text{S2能观}}\Longleftrightarrow\boxed{\text{S1能控}}$

针对S1：

$$S_1:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

$$W_{O,1}(t_f)=\int_0^{t_f} e^{A't}C'Ce^{At}dt, \qquad X_{O,1}=R[W_{O,1}(t_f)]$$

针对S2： $S_2:\begin{cases}\dot{x}=A_2x+B_2u=-A'x+C'u\\ y=C_2x=B'x\end{cases}$

$$W_{C,2}(t_f)=\int_0^{t_f} e^{-A_2t}B_2B_2'e^{-A_2't}dt=\int_0^{t_f} e^{-(-A')t}(C')(C')'e^{-(-A')t}dt$$

$$=\int_0^{t_f} e^{A't}C'Ce^{At}dt$$

$$=W_{O,1}(t_f)$$

$$X_{C,2}=R[W_{C,2}(t_f)]=R[W_{O,1}(t_f)]=X_{O,1}$$

$\boxed{\text{S2能控}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{S1能观}}$

§ 5.2 能观性与能构性

5.2.2 对偶性原理

定理 5.8： 对偶性原理

系统 1：$\{A, B, C\}$，与系统 2：$\{\bar{A} = -A', \bar{B} = C', \bar{C} = B'\}$，即

$$S_1: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} \dot{x} = -A'x + C'u \\ y = B'x \end{cases}$$

是一对偶系统，即：

$$\boxed{\text{S1能控}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{S2能观}}$$

$$\boxed{\text{S1能观}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{S2能控}}$$

第五章 能控性和能观性

§5.1 能控性与能达性

§5.2 能观性与能构性

5.2.1 能观与能构的概念

5.2.2 对偶性原理

5.2.3 能观性的判定

§5.3 线性系统状态空间结构

§5.4 线性离散系统的能控性和能观性

§5.2 能观性与能构性

5.2.3 能观性的判定

一、能观性判据

定理5.9：能观性判据

如果对于系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$，定义 n 维能观性矩阵为 $\boldsymbol{M}_O$，则系统的不能观状态的子空间是$\mathrm{X}_{\bar{O}}$，而系统的能观子空间是X_O

$$\boldsymbol{M}_O=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix},\qquad \mathrm{X}_{\bar{O}}=\mathrm{N}(\boldsymbol{M}_O),\qquad \mathrm{X}_O=\mathrm{R}(\boldsymbol{M}_O')$$

推论5.4：系统能观的充要条件是其能观性矩阵满秩。

§ 5.2.3 能观性的判定

二、能观性校验

定理 5.10：能观性校验

n 维系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 能观的充要条件是：对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=n$$

§ 5.2.3 能观性的判定

三、能观标准型

定义 5.9 能观标准型系统和能观标准型

能控标准型系统的对偶系统是能观标准型系统，能观标准型系统的系统矩阵和输出矩阵组成的矩阵对称为能观标准型。

更具体的说法是：

对 n 维单输出系统 $\{A_o, B_o, c_o, d_o\}$，若其中矩阵 A_o 和 c_o 具有如下型式：

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad c_o = [0 \quad 0 \cdots 0 \quad 1]$$

则系统 $\{A_o, B_o, c_o, d_o\}$ 称作能观标准型系统，矩阵对 (A_o, c_o) 称作能观标准型。

§ 5.2.3 能观性的判定

三、能观标准型

定理5.11 能观标准型系统

单输出系统能观的充要条件是，存在一个线性变换，将之变换成能观标准型系统。

能观标准型也可分为右友型、左友型、下友型、上友型四种，它们的型式可由相应的能控标准型的对偶系统得到；

化能观系统为能观标准型系统的变换阵也可由同样方式得到。

若无明确指出具体型式，在本课程里，能观标准型默认为右友型能观标准型；当然能控标准型也默认为下友型能控标准型。

几种型式的能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

下友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

右友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}-\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

上友型能控标准型

$$A_C=\begin{bmatrix}-\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix};\quad b_C=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

左友型能控标准型

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

如前所述：整个状态空间可分为彼此正交的“能控(观)子空间”和“不能控(观)子空间”。

所谓“系统能控”是指其“不能控子空间”的维数为零；而当“系统不能控”时，有可能是两个子空间的维数都非零。

为了在表现形式上能够将“能控子空间”和“不能控子空间”分离开来，可借助于状态空间的线性变换这一工具，对状态空间进行分解。

先复习一下状态空间的线性变换方面的结论——

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \xrightarrow[\bar{x} = Px = Q^{-1}x]{x = Q\bar{x}} \begin{cases}\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u\end{cases}$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \qquad \bar{B} = Q^{-1}B \qquad \qquad \bar{A} = PAP^{-1} \qquad \bar{B} = PB$$

$$\bar{C} = CQ \qquad \bar{D} = D \qquad P = Q^{-1} \qquad \bar{C} = CP^{-1} \qquad \bar{D} = D$$

5.3.1 坐标变换对状态空间方程的影响

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \xrightarrow[\bar{x} = Px = Q^{-1}x]{x = Q\bar{x}} \qquad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = Cx + Du \qquad\qquad\qquad y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

$$Q\dot{\bar{x}} = AQ\bar{x} + Bu \qquad\qquad \dot{\bar{x}} = Q^{-1}AQ\,\bar{x} + Q^{-1}Bu$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \qquad \bar{B} = Q^{-1}B$$

$$\bar{C} = CQ \qquad \bar{D} = D$$

$$P = Q^{-1}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} \qquad \bar{B} = PB$$

$$\bar{C} = CP^{-1} \qquad \bar{D} = D$$

§ 5.3 线性系统状态空间结构

5.3.1 能控性分解

定理5.13 能控性分解

考虑 n 维线性系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$，当系统不能控，即

$$\operatorname{rank}(M_C)=\operatorname{rank}([\,\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\,])=n_1<n$$

时，构造 $n\times n$ 的矩阵

$$\boldsymbol{Q}:=[\,\boldsymbol{q}_1\ \ \boldsymbol{q}_2\cdots \boldsymbol{q}_{n_1}\ \ \boldsymbol{q}_{n_1+1}\cdots\ \boldsymbol{q}_n\,]$$

其中前 n_1 列是能控性矩阵 $\boldsymbol{M}_C$ 阵中的任一 n_1 个线性无关列，而剩下的列在保持 $\boldsymbol{Q}$ 非奇异的前提下可任意选取。这样，等价变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{x}}$ 可将系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 在形式上变换为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_c\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_c & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_c\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{y}=[\,\boldsymbol{C}_c\quad \boldsymbol{C}_{\bar{c}}\,]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_c\\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

其中 $\boldsymbol{A}_c$ 是 $n_1\times n_1$ 维的，$\boldsymbol{A}_{\bar{c}}$ 是 $(n-n_1)\times(n-n_1)$ 的，且变换后的 n_1 维子方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

是能控的，且与原系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 具有相同的传递矩阵。

$$P_1 = \lfloor q_1, q_2, \cdots, q_{n_1} \rfloor \qquad P_2 = \lfloor q_{n_1+1}, q_{n_1+2}, \cdots, q_n \rfloor$$

$$AP_1 \in span\{AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^nB\}$$
$$\subseteq span\{B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\} = R(P_1)$$

$$AP_1 = P_1\bar{A}_1 = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad AP_2 = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$A[P_1, P_2] = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$B \in span(P_1) \Longrightarrow B = P_1\bar{B}_1 = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.3.1 能控性分解

【例 5.3】 对如下三维系统的状态空间方程进行能控性分解

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad y = [1 \quad 1 \quad 1]\boldsymbol{x}$$

这是在例 5.2 见过的系统。因

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_{C2}) = \mathrm{rank}([\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}]) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

选择

$$\boldsymbol{Q} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}$ 的前两列是 $\boldsymbol{M}_{C2}$ 的前两个线性无关列；其最后一列是在保证 $\boldsymbol{Q}$ 非奇异的前提下随意选取的。令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{x}}$， 可求出

5.3.1 能控性分解

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_c(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{B}_c$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_c$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s-1)^2} & \dfrac{2}{s-1} \end{bmatrix}$$

§ 5.3 线性系统状态空间结构

5.3.2 规范分解

定理5.14 能观性分解

考虑 n 维系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$，当系统不能观，即（下左式）

$$\operatorname{rank}(M_O)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}=n_2<n,\qquad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_{n_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$$

时，通过构造 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$（上右式）【其中前 n_2 行是 O 的任意 n_2 个线性无关行，剩下的各列可在保证 $\boldsymbol{P}$ 非奇异的条件下任意选取】，等价变换 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Px}$ 即可将系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 在形式上变换为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_o\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_o & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_o\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_o\\ \boldsymbol{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_o & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_o\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

其中 $\boldsymbol{A}_o$ 是$n_2\times n_2$矩阵， $\boldsymbol{A}_{\bar{o}}$ 是$(n-n_2)\times(n-n_2)$的矩阵。变换后的 n_2 维子方程

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_o=\bar{\boldsymbol{A}}_o\bar{\boldsymbol{x}}_o+\bar{\boldsymbol{B}}_o\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{C}}_o\bar{\boldsymbol{x}}_o+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}$$

是能观的，且与原系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 具有相同的传递矩阵。

5.3.2 规范分解

二、卡尔曼分解

定理5.15 规范分解（卡尔曼分解）

每一个状态空间方程都可以通过一等价变换，变换为如下的规范形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & O & \bar{A}_{13} & O \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ O & O & \bar{A}_{\bar{c}o} & O \\ O & O & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{c\bar{o}} \\ O \\ O \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_{co} & O & C_{\bar{c}o} & O \end{bmatrix} \bar{x} + D u$$

其中向量 x_{co} 是既能控又能观的，$x_{c\bar{o}}$ 是能控而不能观的，$x_{\bar{c}o}$ 是不能控但能观的，$x_{\bar{c}\bar{o}}$ 是既不能控又不能观的。且其状态方程零状态等价于既能控又能观的状态方程

$$\dot{x}_{co} = A_{co} x_{co} + B_{co} u$$
$$y = C_{co} x_{co} + D u$$

即传递矩阵为：

$$\hat{G}(s) = C_{co}(sI - A_{co})^{-1} B_{co} + D$$

9.3.2 规范分解

三、能稳定性与能检测性

定义9.10 能稳定性和能检测性

若系统的不能控子系统是稳定的，则称该系统是能稳定系统，也叫能镇定系统；同样，若系统的不能观子系统是稳定的，则称该系统是能检测系统。

四、系统的能控能观性与传递矩阵的关系

定理9.16 零极点对消

若系统是不能控或不能观的，则系统的既约传递函数之分母的阶数一定小于系统的维数。即出现了零极点对消。

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

第五章 能控性和能观性

§ 5.1 能控性与能达性

§ 5.2 能观性与能构性

§ 5.3 线性系统状态空间结构

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

5.4.1 能控、能达、能观、能构的概念

5.4.2 离散时间系统能控与能达判据

5.4.3 离散化系统的能控性

§ 5.4 线性离散系统的能控性和能观性

5.4.1 能控、能达、能观、能构的概念

事实上，只要在前述的相应定义中，把有关系统的具体描述去掉，几乎就可以适应对离散时间系统的定义了

定义 5.1：状态的能控与能达

对某系统的一个特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$，若存在一个有限的时间段 $[t_0, t_f)$，以及定义在该时间段上的控制函数 $\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{u}}(t), t\in[t_0, t_f)$，能够把系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\bar{\boldsymbol{x}}$ 推向状态 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称该系统的这一特定状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 t_0 时刻能控的；反过来，若存在将系统从 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 推向 $\boldsymbol{x}(t_f)=\bar{\boldsymbol{x}}$ 的控制作用，则称状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 t_0 时刻能达的。

定义 5.2：系统的能控与能达

如果系统状态空间中的每一个状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的或简称系统是能控的；同样，若系统的每一个状态都是能达的则称系统是状态完全能达的，或简称系统是能达的。

5.4.1 能控、能达、能观、能构的概念

定义5.3：能控子空间和不能控子空间

线性系统的所有能控状态的集合(及普通的向量加法和数乘运算)构成一个子空间，称之为系统的**能控子空间**；能控子空间的正交补空间称为系统的**不能控子空间**。

定义 5.6：状态的不能观测与不能重构

零输入条件下，若系统在某有限时间段的输出恒为零，则称该时间段的初始状态是不能观测的；而称该时间段的末端状态是不能重构的。

定义 5.7：系统的能观与能构

如果系统的状态空间中没有不能观测的非零状态，则称系统是状态完全能观测的，简称系统是能观的；同样，如果状态空间中没有不能重构的非零状态，则称系统是状态完全能重构的，简称系统是能构的。

定义 5.8：能观子空间和不能观子空间

线性系统的所有不能观状态的集合（及普通的向量加法和数乘运算）构成一个子空间，称之为系统的不能观子空间；不能观子空间的正交补空间称为系统的能观子空间。

第五章 能控性和能观性

§5.1 能控性与能达性

§5.2 能观性与能构性

§5.3 线性系统状态空间结构

§5.4 线性离散系统的能控性和能观性

5.4.1 能控、能达、能观、能构的概念

5.4.2 离散时间系统能控与能达判据

5.4.3 离散化系统的能控性

5.4.2 离散时间系统能控与能达判据

记得对于连续时间系统，系统能控与系统能达的条件是完全相同的。对于离散时间系统，先看一个例子：

【例5.4】研究如下系统的能控性与能达性

$$\boldsymbol{x}[k+1]=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}[k]+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}u[k]$$

系统矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为三阶幂零矩阵，即当 $k\geq3$ 时有 $\boldsymbol{F}^k=\boldsymbol{0}$。故对任意初态 $\boldsymbol{x}[0]$，总有

$$\boldsymbol{x}[3]=\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{x}[0]=\boldsymbol{0}$$

对照能控性的定义，该离散时间系统总是能控的。

另一方面：初态为零时，系统不会运行到零状态以外的任何状态。故按能达性的定义，该离散时间系统除零状态以外都是不能达的。

此即表明，对于离散时间系统，能控与能达是有差别的。事实上，能达比能控更难一些

5.4.2 离散时间系统能控与能达判据

定理5.17 离散时间系统的能控与能达判据

定义 n 维离散时间系统 $\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}[k]$ 的 j 步能控性矩阵为

$$M_{Cdj}=[\,\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{H}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{j-1}\boldsymbol{H}\,]$$

则该系统 j 步能达的充要条件是矩阵 M_{Cdj} 满秩，而系统 j 步能控的充要条件是

$$R(\boldsymbol{M}_{Cdj})\supseteq R(\boldsymbol{F}^{n})$$

当且仅当系统矩阵F 满秩时，离散时间系统的能控性与能达性完全等价

能观与能构的判据可以借助于对偶原理得到，注意：能观与能达对偶，能构与能控对偶

5.4.2 离散时间系统能控与能达判据

注意：

1. 为简单起见，定理直接给出了系统能控与系统能达的充要条件，而并非象介绍连续时间系统能控能达性时那样，先给出状态的能控能达的条件，而把系统的能控能达条件作为进一步的推论。关于离散时间系统状态的能控能达性条件，有兴趣的读者可以自行导出。
2. 在陈述系统的能控与能达性时，前面冠以了“j步”。显然这是离散时间系统所特有的，它强调指出了完成状态转移所需的步数。一般当无需强调完成期望的状态转移的步数或当时均可省略“n步”一词。另外，还可以证明：“n步”不能控（达）的系统“n+1步”也一定不能控（达）。
3. 当且仅当系统矩阵F满秩时，离散时间系统的能控性与能达性完全等价。

第五章 能控性和能观性

5.4.3 离散化系统的能控性

定理 5.18

若连续时间线性定常状态方程是不能控的，则对任何采样周期，其离散化的状态方程总是不能控的。

定理 5.19

若连续时间线性定常系统$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$是能控的，且系统的特征值集合为$\{\lambda_i, i=1,2,\cdots n\}$，则在采样周期为 T 时的离散化方程$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}\}$能控的充分条件是：

当 $\mathrm{R_e}[\lambda_i - \lambda_j]=0$ 时，$\left|\mathrm{Im}(\lambda_i-\lambda_j)\right| \neq \dfrac{2\pi m}{T} \qquad m=1,2,\cdots$

对单输入情况，此条件也是必要的。

习题：p168-170（159-162）

4.6 4.10 4.11

4.12, 4.13，4.14, 4.16