现代控制理论

第一章　绪论
第二章　系统的状态空间模型
第三章　状态空间方程的解
第四章　系统的稳定性
第五章　能控性与能观性
第六章　传递函数的状态空间实现
第七章　状态反馈与状态观测器
第八章　最优性原理与动态规划
第九章　极小值原理
第十章　二次型指标的线性最优控制

中国科学技术大学 自动化系

本课程的篇章结构

建模	直接获取	第2章 系统的状态空间模型
	模型转换	第2章 系统的状态空间模型 第6章 传递函数的状态空间实现
分析	定量分析	第3章 状态空间状态方程的解
	定性分析	第4章 系统的稳定性 第5章 能控性和能观性
设计	常规控制	第7章 状态反馈和状态观测器
	最优控制	第8章 最优性原理与动态规划 第9章 极小值原理 第10章 二次型指标的线性最优控制

第十章 二次型指标的线性最优控制

线性二次型问题

最优控制对象为线性系统

性能指标为状态变量和控制变量的二次型函数

基本内容

最优状态调节、最优输出调节、最优跟踪

线性二次型调节器

LQR，Linear Quadratic Regulator

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.1 最优跟踪问题

运动方程：$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \quad y(t)=Cx(t)$

边界条件：$x(t_0)=x_0$

控制约束：控制$u(\cdot)$无约束。

性能指标：$J=e^T(t_f)Fe(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[e^T(t)Q(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$

其中$e(t)=y_l(t)-y(t),\ F\geq 0,\ Q(t)\geq 0,\ R(t)>0$

§10.1 最优跟踪问题

最优性能指标解读

- 末值项：$J_1 = \boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f)$
  - 末态误差向量尽可能小
- 第一过程项：$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)]dt$
  - 动态跟踪误差的总度量
- 第二过程项：$J_3 = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)\,dt$
  - 控制能量消耗的总度量

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.2 有限时间状态调节器

10.2.1 问题的描述

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，末端时刻 t_f 固定、有限

控制约束： 控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J=\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\,dt$

对称阵 $\boldsymbol{F}\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}(t)\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}(t)>\boldsymbol{0}$ 且具有相应的维数，各元连续且有界

§ 10.2 有限时间状态调节器

10.2.2 最优解

1．最优控制：

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

其中 $\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{0}$，是黎卡提（Riccati）矩阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{0}$$

在边界条件 $\boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$ 下的解。

2．最优轨线（闭环系统）：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

3．最优性能指标：

$$J^* = \boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

第十章 二次型指标的线性最优控制

特点

- 最优解有明确的解析表达式
- 线性状态反馈控制律
- 便于理论分析和工程实现

与教材上的表述略有不同：

- 性能指标表达式上没有1/2
- 相应地，最优指标也就没有1/2

极小值原理的问题、结论与求解

基本问题

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

边界条件：$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$； $\psi(\boldsymbol{x}_f, t_f) = \boldsymbol{0}$

控制约束：$\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$，分段连续

性能指标：$J = \varphi(\boldsymbol{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\, dt$

求：$\boldsymbol{u}^*(t)$、$\boldsymbol{x}^*(t)$、J^*

补充说明

末端时刻 t_f 固定、或自由

末端状态 $\boldsymbol{x}_f$ 固定、自由、或受约束

$\varphi(\cdot), L(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且二次可微

$\boldsymbol{f}(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续且可微

基本结论

最优控制使哈密顿函数取强极小

哈密顿函数：

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

最优解：

$$H^* = H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t) = \min_{u \in \Omega} H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)$$

最优解的求取（必要条件）

1. 正则方程

协态方程：$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

状态方程：$\dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$

2. 边界条件

始端：$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

末端：$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f} + \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial \boldsymbol{x}_f} \boldsymbol{\gamma}(t_f)$

$\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$（固定），$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_f}$（自由）

3. 极值条件

A. 对于定常系统：H^*为常数

特别当末端时刻 t_f 自由时　$H^*(t) \equiv 0$；

B. 对于时变系统：

t_f 固定：$H^*(t) = H^*(t_f) - \int_t^{t_f} \dfrac{\partial H(\tau)}{\partial \tau} d\tau$

t_f 自由：$H^*(t_f) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_f} - \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^T}{\partial t_f} \boldsymbol{\gamma}(t_f)$

10.2.3 有限时间状态调节器最优解的证明

1. 用极小值原理证明最优控制

哈密顿函数：$H=[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]+\lambda^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]$

协态方程： $\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}=-2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^T\lambda$

横截条件：$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\left[\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)\right]=2\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)$

极值条件：$\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}=2\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^T\lambda=0$

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{u}\partial \boldsymbol{u}^T}=2\boldsymbol{R}>0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boldsymbol{u}^*(t)=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\lambda(t)$

$$H=[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]+\lambda^T(t)[A(t)x(t)+B(t)u(t)]$$

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad \dot{\lambda}=-2Qx-A^T\lambda \qquad u^*=-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda$$

注意到，在最优控制条件下，增广状态与协态向量满足

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ -2Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix}=\Omega(t_f,t)\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \qquad \Omega(t_f,t)=\begin{bmatrix} \Omega_{11}(t_f,t) & \Omega_{12}(t_f,t) \\ \Omega_{21}(t_f,t) & \Omega_{22}(t_f,t) \end{bmatrix}$$

$$x(t_f)=\Omega_{11}(t_f,t)x(t)+\Omega_{12}(t_f,t)\lambda(t)$$

$$\lambda(t_f)=\Omega_{21}(t_f,t)x(t)+\Omega_{22}(t_f,t)\lambda(t)$$

$$\lambda(t_f)=2Fx(t_f)$$

$$\lambda(t)=[\Omega_{22}(t_f,t)-2F\Omega_{12}(t_f,t)]^{-1}[2F\Omega_{11}(t_f,t)-\Omega_{21}(t_f,t)]x(t)$$

$$\lambda(t)=2\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \qquad P(t_f)=F$$

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\lambda(t)$$

这样最优控制在形式上可写作

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

$$H=[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]+\lambda^T(t)[A(t)x(t)+B(t)u(t)]$$

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad \dot{\lambda}=-2Qx-A^T\lambda \qquad u^*=-\tfrac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda$$

注意到，在最优控制条件下，增广状态与协态向量满足

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ -2Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

即协态向量与状态向量呈线性关系，故可令

$$\lambda(t)=2P(t)x(t)$$

这样最优控制在形式上可写作

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\lambda} = -2Qx - A^T\lambda \qquad \lambda(t_f) = 2Fx(t_f)$$

$$\lambda(t) = 2P(t)x(t) \qquad u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$$

代入到状态方程 $\dot{x} = [A - BR^{-1}B^T P]x$

代入到横截条件 $P(t_f) = F$

代入到协态方程 $2\dot{P}x + 2P\dot{x} = -2Qx - A^T \cdot 2Px$

$$\dot{P}x + P(A - BR^{-1}B^T P)x = -Qx - A^T Px$$

$$(\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P)x(t) = 0$$

注意到的 $\boldsymbol{x}(t)$ 独立性，可得 $\boldsymbol{P}(t)$ 应满足的**黎卡提方程**

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = O$$

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O\,, \qquad P(t_f) = F$$

这是一个有末态的非线性矩阵微分方程（ **Riccati** ）

§10.2 有限时间状态调节器

10.2.2 最优解

1．最优控制：

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$$

其中 $P \geq 0$，是黎卡提（Riccati）矩阵微分方程：

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0$$

在边界条件 $P(t_f) = F$ 下的解。

2．最优轨线（闭环系统）：

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

3．最优性能指标：

$$J^* = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

10.2.3 有限时间状态调节器最优解的证明

2. 由最优控制导出最优轨线

这是将最优控制代入状态方程的直接结果

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

注意到初始条件，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t)\,,\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

3. 关于最优性能指标的证明

$$J^*=\boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad u^* = -R^{-1}B^T Px$$

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O, \qquad P(t_f) = F$$

定义标量函数 $\quad V[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$

对时间求导，并将状态方程、黎卡提方程代入之

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)] = \dot{\boldsymbol{x}}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$= (\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu})^T\boldsymbol{Px} - \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu})$$

$$= 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PBu} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}$$

$$= -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Qx} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ru} + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Px})^T\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Px})$$

在最优轨线上

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{Px}^*) = -\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{Qx}^* - \boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{Ru}^*$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{*})=-\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{*} \qquad \boldsymbol{P}(t_f)=\boldsymbol{F}$$

$$J=\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f}[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{*})]dt=-\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^{*}+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{*})dt$$

$$\boldsymbol{x}^{*T}(t_f)\boldsymbol{P}(t_f)\boldsymbol{x}^{*}(t_f)-\boldsymbol{x}^{*T}(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}^{*}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^{*}+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{*})dt$$

而最优性能指标

$$J^{*}=\boldsymbol{x}^{*T}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}^{*}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{*T}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}^{*}(t)+\boldsymbol{u}^{*T}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}^{*}(t)]dt$$

$$=\boldsymbol{x}^{*T}(t_f)\boldsymbol{P}(t_f)\boldsymbol{x}^{*}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{*T}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}^{*}(t)+\boldsymbol{u}^{*T}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}^{*}(t)]dt$$

$$J^{*}=\boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

关于最优解证明的说明

- 关于最优解存在性和唯一性的证明，请同学们自阅教材上的相关内容
- 关于黎卡提方程解的存在、唯一、正定性的证明也请同学自学

习题：5.5，5.6

1．最优控制：

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

其中 $\boldsymbol{P}\geq \boldsymbol{0}$，是黎卡提（Riccati）矩阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t)+\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{0}$$

在边界条件 $\boldsymbol{P}(t_f)=\boldsymbol{F}$ 下的解。

2．最优轨线 (闭环系统)：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

3．最优性能指标：

$$J^*=\boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

例 5-1　已知一阶系统状态方程

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{2}x(t)+u(t),\quad x(t_0)=x_0$$

性能指标

$$J[x(t_0),t_0,u(t)]=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{1}{2}e^{-t}x^2(t)+2e^{-t}u^2(t)\right]dt$$

试求最优控制 $u^*(t)$ 及最优指标 $J^*[x(t_0),t_0]$。

$$[\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t)-P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+Q(t)]x(t)=0$$

解　由题意，$A=\frac{1}{2}$，$B=1$，$F=0$，$Q(t)=\frac{1}{2}e^{-t}$，$R(t)=2e^{-t}$。

黎卡提方程(5-13)及其边界条件(5-14)可写为

$$-\dot{p}(t)=p(t)-\frac{1}{2}e^{t}p^2(t)+\frac{1}{2}e^{-t},\quad p(t_f)=0$$

这是非线性变系数微分方程，可进行如下等价变换。令

$$\hat{x}(t)=e^{-\frac{1}{2}t}x(t),\quad \hat{u}(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

则有

$$\dot{\hat{x}}(t)=-\frac{1}{2}\hat{x}(t)+e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{1}{2}x(t)+u(t)\right]$$

于是，等价状态方程

$$\dot{\hat{x}}(t)=\hat{u}(t)$$

等价性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{1}{2}\hat{x}^2(t)+2\hat{u}(t)\right]\mathrm{d}t$$

等价黎卡提方程

$$-\dot{\hat{p}}(t)=-\frac{1}{2}\hat{p}^2(t)+\frac{1}{2},\quad \hat{p}(t_f)=0$$

解得

$$\hat{p}(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{t-t_f}}{1+\mathrm{e}^{t-t_f}}$$

可以算出等价最优控制

$$\hat{u}^*(t)=-\hat{R}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(t)\hat{p}(t)\hat{x}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\hat{p}(t)x(t)$$

从而,原系统的最优控制为

$$u^*(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\hat{u}^*(t)=-\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{t-t_f})(1+\mathrm{e}^{t-t_f})^{-1}x(t)$$

因为

$$u^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}p(t)x(t)$$

故有

$$p(t)=\mathrm{e}^{-t}\hat{p}(t)=(1-\mathrm{e}^{t-t_f})(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t-t_f})^{-1}$$

不难算出原系统的最优指标

$$\begin{aligned}J^*[x(t_0),(t_0)]&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)\\&=(1-\mathrm{e}^{t_0-t_f})(\mathrm{e}^{t_0}+\mathrm{e}^{2t_0-t_f})^{-1}x^2(t_0)\end{aligned}$$

例 5-2 设一阶系统的状态方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+u(t), \quad x(0)=x_0$$

性能指标

$$J=\frac{1}{2}fx^2(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[qx^2(t)+ru^2(t)]\,\mathrm{d}t$$

假定： $f\geqslant 0, q>0, r>0$。试求最优控制 $u^*(t)$，并对结果进行分析。

解 由有限时间调节器的结果得

$$u^*(t)=-\frac{1}{r}p(t)x(t)$$

式中 $p(t)$ 是如下黎卡提方程的解

$$\dot{p}(t)=-2ap(t)+\frac{1}{r}p^2(t)-q, \quad p(t_f)=f$$

对上式积分，得

$$p(t)=r\frac{\beta+a+(\beta-a)\gamma e^{2\beta(t-t_f)}}{1-\gamma e^{2\beta(t-t_f)}}$$

式中

$$\beta=\sqrt{\frac{q}{r}+a^2}$$

$$\gamma=\frac{f/r-a-\beta}{f/r-a+\beta}$$

由最优闭环系统方程

$$\dot{x}(t)=\left[a-\frac{1}{r}p(t)\right]x(t),\quad x(0)=x_0$$

解得最优轨线

$$x^*(t)=x_0\exp\int_0^t\left[a-\frac{1}{r}p(\tau)\right]d\tau$$

对上式积分，得

$$p(t)=r\frac{\beta+a+(\beta-a)\gamma e^{2\beta(t-t_f)}}{1-\gamma e^{2\beta(t-t_f)}}$$

式中

$$\beta=\sqrt{\frac{q}{r}+a^2}$$

$$\gamma=\frac{f/r-a-\beta}{f/r-a+\beta}$$

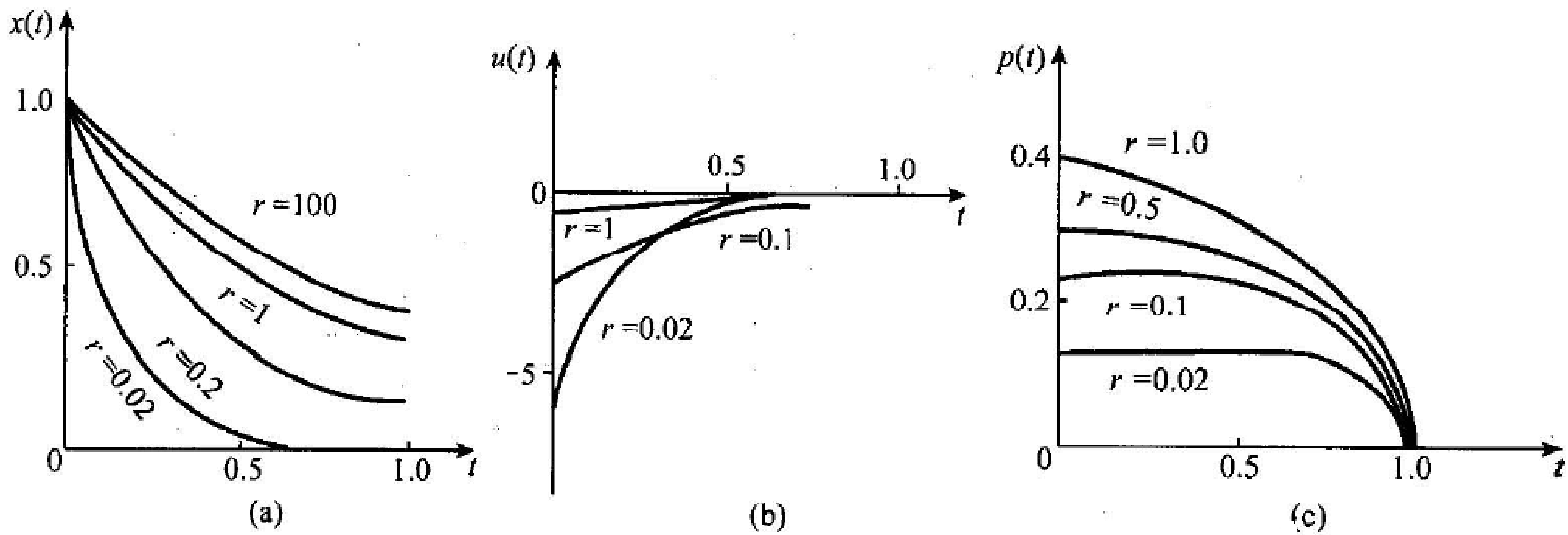
由最优闭环系统方程

$$\dot{x}(t)=\left[a-\frac{1}{r}p(t)\right]x(t),\quad x(0)=x_0$$

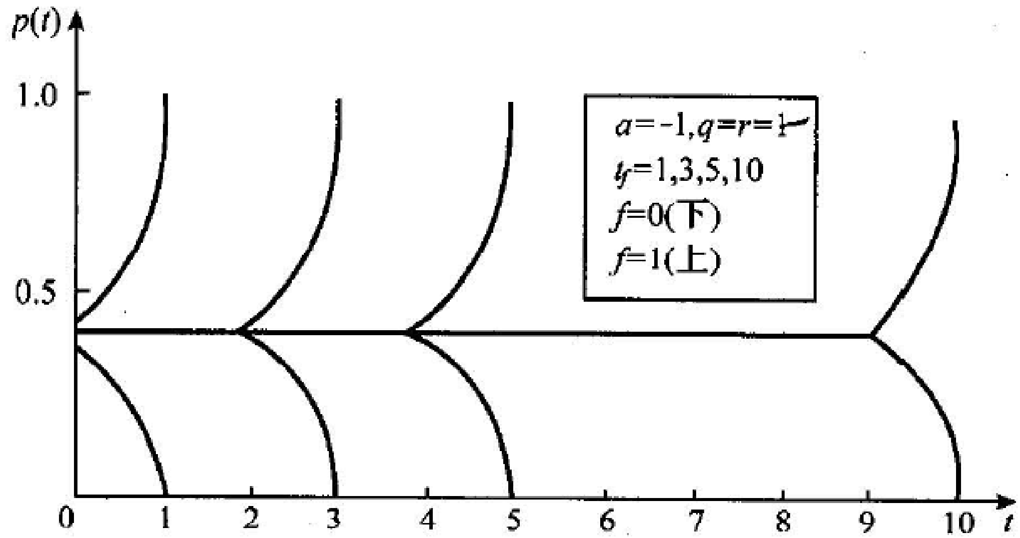
解得最优轨线

$$x^*(t)=x_0\exp\int_0^t\left[a-\frac{1}{r}p(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

若取 $a=-1, f=0, t_f=1, x_0=1, q=1$，而 r 取不同值，则系统的状态变量 $x(t)$、控制变量 $u(t)$ 和黎卡提方程解 $p(t)$ 的变化情况如图 5-1 所示。由图可见：当 r 较小时，$x(t)$ 能迅速趋于零值，而当 r 较大时，$x(t)$ 的衰减缓慢；当 r 较小时，$p(t)$ 在整个控制时间区间内几乎为常值，仅在接近末值的一段时间内才表现出时变特性，而当 r 值较大时，$p(t)$ 随时间有显著变化；当 r 值较小时，$u(t)$ 在初始时刻幅值很大，如果 $r\to 0$，$u(t)$ 在 $t=0$ 处将近似于一个强脉冲。



若取 $a=-1, q=1, r=1, f=0$ 或 $f=1$，而 t_f 取不同值，则黎卡提方程解 $p(t)$ 的变化情况如图 5-2 所示。由图可见，从 t_f 时刻起，$p(t)$ 随 t 的减小而趋于一个“稳态值”；随着 t_f 的增大，$p(t)$ 保持常值的时间区间也随之增大；当 t_f 相当大时，$p(t)$ 的“稳态值”与边界条件无关。



事实上，当 t_f 趋于无穷时，式(5-47)的极限为

$$\lim_{t_f\to\infty} p(t)=r(\beta+a)=ar+r\sqrt{\frac{q}{r}+a^2}$$

将 $a=-1, q=r=1$ 代入上式，得 $\lim\limits_{t_f\to\infty} p(t)=0.4142$

由此可见，只要 t_f 取得足够大，可将 $p(t)$ 视为常数。

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.1 线性定常系统的无限时间状态调节器

状态方程：$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

边界条件：$x(0) = x_0$， 末端时刻 $t_f \to \infty$

控制约束：控制 $u(\cdot)$ 无约束。

性能指标：$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]\,dt$

其中定常加权阵 $Q \geq 0,\ R > 0$ 且具有相应的维数

$$J = \lim_{t_f \to \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{\top}(t)Qx(t) + u^{\top}(t)Ru(t)]dt = \lim_{t_f \to \infty} J_{t_f}$$

$$P(t_f) = 0$$

$$t_f = \infty$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{O}$$

$$A(t) = A, B(t) = B, R(t) = R, Q(t) = Q$$

$$\lim_{t_f \to \infty} P(t) = P, \quad 0 \le t << t_f$$

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O}$$

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.2 最优解

若系统$\{A,B\}$能控，则存在唯一的最优控制：

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$$

且最优性能指标为：

$$J^* = x^T{}_0 P\, x_0$$

其中$P \geq 0$，是黎卡提（Riccati）矩阵代数方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O$$

的唯一解。

§ 10.3 无限时间状态调节器

10.3.3 最优解的存在性问题

【例 5.3】考查如下的无约束最优控制问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\,, & x_1(0)=1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u\,, & x_2(0)=1 \end{cases}\,,\qquad J=\int_0^{\infty}[x_1^2(t)+x_2^2(t)+u^2(t)]dt$$

注意到性能指标的被积函数中的第一项是

$$x_1^2(t)=(e^t\cdot 1)^2=e^{2t}$$

它会随 t 趋于无穷而趋于正无穷；而被积函数中的另两项均为非负数，所以无论控制输入如何选取整个性能指标都是无穷大，于是对此问题最优控制是没有意义的。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, & x_1(0)=1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u, & x_2(0)=1 \end{cases}, \quad J = \int_0^\infty [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

我们来讨论一下造成这一结果的原因：

A．状态 x_1 不能控，故其趋于无穷大的趋势和过程控制输入无法干预；（系统能控）

B．但显然“系统能控”不是避免上述问题所必要的，因为只要把第一个状态方程修改为 $\dot{x}_1 = -x_1$，性能指标无穷大的问题即不复存在；（系统能稳定）

C．当然，“系统能稳定”也不是避免性能指标无穷大的必要条件，因若性能指标泛函取为 $J = \int_0^\infty [x_2^2(t) + u^2(t)]dt$，即系统不能控且不稳定的模态不出现在性能泛函中。

10.3.3 最优解的存在性问题

结论： 系统能控是线性定常系统无限时间状态调节器问题有解的充分条件。

事实上，上述充分条件还可继续降低为“系统能稳定”，甚至还可以继续降低，但对于最优控制问题而言，系统能控是一个要求不高的一般性条件，所以一般的教科书上都把系统能控作为无限时间状态调节器问题有解的充分条件。

最优控制存在的充要条件

性能指标中的被积函数绝对可积；　或 ——
性能指标中不含系统不能控且不稳定的运动模态。

10.3.3 最优解的存在性问题

根据以上分析：以下关于必要性的说法是错误的：

本课程使用的教材《最优控制理论与系统》(胡寿松等编著，2005年9月科学出版社第二版）虽然在进行相关定理陈述时（173页），认为系统能控是最优控制唯一存在的充分条件；但在176页又说："…因此，即使对于无限时间定常状态调节器问题，为了保证最优解存在，也必须要求系统完全可控"。

清华大学的教材《自动控制原理（下册）》(吴麒主编，1992年4月清华大学出版社第一版）428 页："可以证明，系统（12.8.37）的完全能控性是保证问题12.8.2有解的充分条件，而系统（12.8.37）的能稳定性（即不能控部分是渐近稳定的）是问题12.8.2有解的充分必要条件。"

10.3.3 最优解的存在性问题

关于“系统能控是最优控制存在的充分条件”

如果系统能控，则对任意的有限时间 t_1 都可找到定义在 $[t_0, t_1]$ 上的控制 $\boldsymbol{u}(t, t_1)$，使 $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{0}$，于是考虑 $t_f = t_1$ 的有限时间调节器问题，可得到与 t_1 有关的，在 $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{0}$ 约束下的最优控制输入 $\bar{\boldsymbol{u}}(t, t_1), t \in [t_0, t_1]$，当然

$$\boldsymbol{u}^*(t, t_1) = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}(t, t_1), & t_0 \le t \le t_1 \\ \boldsymbol{0}, & t > t_1 \end{cases}$$

显然 $\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{u}^*(t, t_1) \Big|_{J^* = \min\limits_{t_0 \le t_1 < \infty} J^*(t_1)}$

是本问题的一个次优解。增大 t_1，可能得到比上述次优解指标更优的解，但至少这个次优解的存在，保证了最优解的存在。

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.4 黎卡提代数方程解的正定性问题

【定理】设矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是黎卡提矩阵代数方程

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{O}$$

的解，则 $\boldsymbol{P}$ 正定的充要条件是：若 $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}$，则矩阵对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$ 能观

【证明】充分性:$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$能观 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P}>\boldsymbol{O}$

必要性:$\boldsymbol{P}>\boldsymbol{O}$ $\Longrightarrow$ $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$能观

黎卡提矩阵代数方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O$$

的解 P 正定的充要条件是：若 $H^T H = Q$ 则矩阵对 (A, H) 能观。

【充分性证明】反证法：P 不正定 $\Rightarrow$ (A, H) 不能观

P 正半定而非正定，存在 $x_0 \neq 0, \partial\, Px_0 = 0$

$$J^* = \int_0^\infty [x^{*T}(t)Qx^*(t) + u^{*T}(t)Ru^*(t)]\,dt = x_0^T P x_0 = 0$$

性能指标为零的唯一情况是被积函数（两个均非负的正半定二次型泛函及正定二次型泛函）恒为零，又因 $R > O$，有 $u^*(t) \equiv 0$，于是 $x^*(t) = e^{At}x_0$，进而有

$$J^* = x_0^T P x_0 = 0 = \int_0^\infty [x^{*T}(t)Qx^*(t) + u^{*T}(t)Ru^*(t)]\,dt$$

$$= \int_0^\infty x^{*T}(t)Qx^*(t)\,dt = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} H^T H e^{At} x_0 dt = \int_0^\infty \left\| He^{At}x_0 \right\|^2 dt$$

黎卡提矩阵代数方程 $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O$

的解 P 正定的充要条件是：若 $H^T H = Q$ 则矩阵对 (A , H) 能观

【充分性证明】P 不正定 $\Rightarrow$ （ A , H ）不能观

$$\int_0^\infty \left\| He^{At}x_0 \right\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow He^{At}x_0 \equiv 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

在 $t = 0$ 处，对后等式两端同时对 t 微分 k 次（ $k = 1, 2, \cdots, n-1$ ）

$$HA^k x_0 \equiv 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

把这 n 个等式写在一起，即：$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = M_O x_0 = 0$

因 $x_0 \neq 0$，只有 M_O 不满秩，故 (A , H) 不能观。 [充分性证毕]

黎卡提矩阵代数方程 $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = O$

的解 P 正定的充要条件是：若 $H^T H = Q$ 则矩阵对 (A, H) 能观

【必要性证明】(A, H) 不能观 $\Rightarrow$ P 不正定

若 (A, H) 不能观，存在 $x_0 \neq 0$，使 $M_O x_0 = 0$，即

$$HA^k x_0 \equiv 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$He^{At}x_0 = H\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k\right) x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\left(HA^k x_0\right) = 0$$

令初态为 $x(0) = x_0$，取 $u \equiv 0$ 时的性能指标为

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t)\, dt = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} H^T H e^{At} x_0 dt = 0$$

它显然是最优性能指标（因从 J 的定义式知 J 为非负标量），故有

$$J^* = x_0^T P x_0 = 0$$

因 $x_0 \neq 0$，故 P 为奇异阵，当然不可能是正定的。[证毕]

10.3.5 最优调节器的闭环稳定性问题

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

最优控制： $\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$

其中：$\boldsymbol{P}\geq\boldsymbol{0}$ ，且满足

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{O}$$

线性定常无限时间最优调节器是一个常增益状态反馈系统，其闭环方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

我们来讨论该闭环系统的稳定性

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.5 最优调节器的闭环稳定性问题

记得在导出有限时间最优调节器值最优指标时，曾定义标量函数 $V[x(t)] = \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 并导出

$$\frac{dV}{dt} = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})$$

$$= -(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{x}^* - (\boldsymbol{u}^*)^T \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{u}^*$$

这是否意味着：最优控制律下的（最优轨迹）系统，一定是闭环渐近稳定的？

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.5 最优调节器的闭环稳定性问题

【例 5.4】考察一阶系统

$$\dot{x} = x + u, \qquad J = \int_0^\infty u^2 dt$$

的最优控制问题。显而易见，其最优解是 $u \equiv 0$，但此时闭环系统 $\dot{x} = x$ 是不稳定的。

原因分析

开环系统不稳定

不稳定的状态轨线未能反映在性能指标中

10.3.5 最优调节器的闭环稳定性问题

线性定常无限时间最优调节器是一个常增益状态反馈系统，其闭环方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_{0}$$

我们来讨论该闭环系统的稳定性

【定理】线性定常无限时间调节器渐近稳定的充分条件是：

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能控，且若$\boldsymbol{H}^{T}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}$ 则矩阵对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$能观

因系统最优状态反馈前后均为线性系统，故一旦闭环系统稳定，则其大范围渐近稳定的结论也是不言而喻的

【定理】线性定常无限时间调节器渐近稳定的充分条件是：

(A,B)能控，且若 $H^T H = Q$ 则矩阵对(A,H)能观。

【证明】因(A,H)能观，故 P 正定，为用李雅普诺夫稳定性理论证明闭环系统的稳定性，选正定泛函 $V(x)=x^T P x$，于是

$$
\begin{aligned}
\dot V(x) &= \dot x^T P x + x^T P \dot x \\
&= x^T (A - BR^{-1}B^T P)^T P x + x^T P(A - BR^{-1}B^T P) x \\
&= x^T (A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P) x \\
&= -x^T (Q + PBR^{-1}B^T P) x \\
&= -x^T(t) Q x(t) - (u^*(t))^T R (u^*(t))
\end{aligned}
$$

由于 $Q \ge O, R > O$ 故有 $Q + PBR^{-1}B^T P \ge O$，即正定泛函 $V(x)$ 对时间的导函数 $\dot V(x)$ 为负半定泛函，由李雅普诺夫第二方法的结论知最优控制的闭环系统是李雅普诺夫意义下稳定的。

【定理】线性定常无限时间调节器渐近稳定的充分条件是：(A, B) 能控，且若 $H^T H = Q$ 则矩阵对 (A, H) 能观。

为证明它还是渐近稳定的，只需将 $\dot{V}(x) \equiv 0$ 与闭环状态方程联立，导出 $x(t) \equiv 0$：

$$\dot{V}(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^T Q x = 0 \quad 且 \quad x^T PBR^{-1}B^T Px = u^{*T} R u^* = 0$$

因 $R > O$ 故后一式表明 $u^* \equiv 0$，此时闭环系统的状态方程退化为 $\dot{x} = Ax$，它在初态 $x(0) = x_0$ 下的解是：$x(t) = e^{At} x_0$，代入至前一式：

$$0 \equiv x^T Q x \equiv x_0^T e^{A^T t} H^T H e^{At} x_0 \equiv \left\| H e^{At} x_0 \right\|^2$$

矩阵对 (A, H) 能观时只有 $x(0) = x_0 = 0$，注意到前已导出的 $u^* \equiv 0$，知在最优轨线上有 $x(t) \equiv 0$，这就是希望的结果。于是，闭环系统的渐近稳定性以至全局渐近稳定性，得到了严格的证明。

【定理】线性定常无限时间调节器渐近稳定的充分条件是：(A,B)能控，且若$H^TH=Q$则矩阵对(A,H)能观。

定理中(A,B)能控充分保证了最优控制律的存在、唯一；而(A,H)的能观又充分保证了闭环系统的渐近稳定。

最优闭环系统的渐近稳定的充分条件还可以由(A,H)能观进一步放宽为(A,H)是能检测的，不过一般而言(A,H)能观的条件并不苛刻；

还要指出的是$Q=H^TH$的分解不是唯一的，但上述结论不取决于某一特定的分解，从根本上说它是由Q本身决定的。

【定理】线性定常无限时间最优调节器问题，非零最优控制下的闭环系统总是渐近稳定的。

习题：5-9,5-10

例题

设系统状态方程

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \qquad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), \qquad x_2(0) = 1$$

性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \left(x_2^2(t) + \frac{1}{4} u^2(t) \right) dt$$

试求最优控制、最优轨线和最优指标

§10.3 无限时间状态调节器

10.3.6 具有给定稳定裕度的状态调节器

一、问题的描述

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

控制约束： 控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J=\int_0^{\infty} e^{2\alpha t}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]dt$

其中 $\boldsymbol{Q}\geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}>\boldsymbol{0}$ 且具有相应的维数

10.3.6 具有给定稳定裕度的状态调节器

二、最优解

最优控制： $u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$

最优性能指标： $J^* = x^T{}_0\bar{P}\,x_0$

最优闭环系统： $\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})x(t)$， $x(0) = x_0$

闭环系统稳定性：渐近稳定的，且稳定度至少为α

最优控制存在且唯一的充分条件：

系统$\{A, B\}$能控，若$H^TH = Q$，(A, H)能观

$\bar{P} > 0$，是如下黎卡提矩阵代数方程的唯一解

$$\bar{P}(A + \alpha I) + (A^T + \alpha I)\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = O$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \quad , \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

$$J=\int_0^{\infty} e^{2\alpha t}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]dt$$

三、化归性证明

定义 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)=e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t), \quad \hat{\boldsymbol{u}}(t)=e^{\alpha t}\boldsymbol{u}(t)$

则 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\dfrac{d}{dt}[e^{\alpha t}\boldsymbol{x}]=\alpha e^{\alpha t}\boldsymbol{x}+e^{\alpha t}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\cdot e^{\alpha t}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\cdot e^{\alpha t}\boldsymbol{u}$

即状态方程及初态变为 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}$， $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$

此时，最优性能指标变为 $J=\int_0^{\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\hat{\boldsymbol{u}}^T(t)\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{u}}(t)]dt$

与典型的无限时间定常调节器问题对照，这里仅是状态方程中的系统矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变成了 $\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$，其它的都没有变化。
而 $(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$ 能控、$(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I},\boldsymbol{H})$ 能观 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能控、$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{H})$ 能观自然结论

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\alpha \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$J = \int_0^\infty [\hat{\boldsymbol{x}}^T(t)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \hat{\boldsymbol{u}}^T(t)\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{u}}(t)]\,dt \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t), \quad \hat{\boldsymbol{u}}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{u}(t)$$

四、关于稳定度的说明

回到证明之初变量代换

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t), \quad \hat{\boldsymbol{u}}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{u}(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\alpha t}\hat{x}(t), \quad u(t) = e^{-\alpha t}\hat{u}(t)$$

将后一等式代入到关于 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 的最优解中，可立即得到

$$u^*(t) = e^{-\alpha t}\hat{u}^*(t) = e^{-\alpha t}(-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{x}}(t)) = -e^{-\alpha t}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{P}} \cdot e^{\alpha t}\boldsymbol{x}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}(t)$$

此外，注意到变换后的状态轨线 $\hat{\boldsymbol{x}}^*(t)$ 是渐近趋于零状态的，即

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\boldsymbol{x}}^*(t) = \lim_{t\to\infty}e^{\alpha t}\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{0}$$

它表明 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 可以以比 $e^{-\alpha t}$ 更快的速度收敛至零状态，我们称这样的闭环系统的稳定度为α。

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.4 离散系统状态调节器

10.4.1 有限时间离散状态调节器

状态方程： $\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{A}[k]\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{u}[k]$

边界条件： $\boldsymbol{x}[k_0]=\boldsymbol{x}_0$，末端时刻 k_N 固定、有限

控制约束： 控制 $\boldsymbol{u}[\cdot]$ 无约束。

性能指标： $J=\boldsymbol{x}^T[k_N]\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}[k_N]+\sum_{k=k_0}^{k_N-1}(\boldsymbol{x}^T[k]\boldsymbol{Q}[k]\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{u}^T[k]\boldsymbol{R}[k]\boldsymbol{u}[k])$

其中 $\boldsymbol{F}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Q}[k]\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{R}[k]>\boldsymbol{0}$ 且具有相应的维数

§10.4 离散系统状态调节器

10.4.2 最优解

最优控制： $\boldsymbol{u}[k]=-\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{x}[k]$

最优性能指标： $J^*=\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{P}[k_0]\boldsymbol{x}_0$

其中：最优反馈增益序列

$$\boldsymbol{K}[k]=(\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{B}[k]+\boldsymbol{R}[k])^{-1}\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{A}[k]$$

$$k=k_0,\,k_0+1,\,k_0+2,\cdots,\,k_N-1$$

而 $\boldsymbol{P}[k]$是下列离散黎卡提差分方程的正半定对称解

$$\boldsymbol{P}[k]=(\boldsymbol{A}[k]-\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k])^T\boldsymbol{P}[k+1](\boldsymbol{A}[k]-\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k])+$$

$$+\boldsymbol{K}^T[k]\boldsymbol{R}[k]\boldsymbol{K}[k]+\boldsymbol{Q}[k],\quad k=k_0,\,k_0+1,\,k_0+2,\cdots,\,k_N-1$$

其边界条件是： $\boldsymbol{P}[k_N]=\boldsymbol{F}$

§ 10.4 离散系统状态调节器

10.4.3 最优解的求取方法

$$\boldsymbol{u}[k] = -\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{x}[k] \qquad J^* = \boldsymbol{x}^T[k_0]\boldsymbol{P}[k_0]\boldsymbol{x}[k_0]$$

$$\boldsymbol{K}[k] = (\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{B}[k] + \boldsymbol{R}[k])^{-1}\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{A}[k]]$$

$$\boldsymbol{P}[k] = (\boldsymbol{A}[k] - \boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k])^T\boldsymbol{P}[k+1](\boldsymbol{A}[k] - \boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k]) + \boldsymbol{K}^T[k]\boldsymbol{R}[k]\boldsymbol{K}[k] + \boldsymbol{Q}[k]$$

$$k = k_0, k_0+1, k_0+2, \cdots, k_N - 1, \qquad \boldsymbol{P}[k_N] = \boldsymbol{F}$$

由$\boldsymbol{K}[k]$和$\boldsymbol{P}[k]$满足的方程式可见：$\boldsymbol{K}[k]$和$\boldsymbol{P}[k]$均与$\boldsymbol{x}[\;]$无关，都可以离线计算。而可从末态边界条件出发，依序求出$\boldsymbol{P}[k]$和$\boldsymbol{K}[k]$：

$$\boldsymbol{P}[k_N] = \boldsymbol{F} \qquad k = k_N - 1, k_N - 2, \cdots, k_0 + 1, k_0$$

$$\boldsymbol{K}[k]=(\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{B}[k]+\boldsymbol{R}[k])^{-1}\boldsymbol{B}^T[k]\boldsymbol{P}[k+1]\boldsymbol{A}[k]]$$

$$\boldsymbol{P}[k]=(\boldsymbol{A}[k]-\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k])^T\boldsymbol{P}[k+1](\boldsymbol{A}[k]-\boldsymbol{B}[k]\boldsymbol{K}[k])+\boldsymbol{K}^T[k]\boldsymbol{R}[k]\boldsymbol{K}[k]+\boldsymbol{Q}[k]$$

$$k=k_0,k_0+1,k_0+2,\cdots,k_N-1,\qquad \boldsymbol{P}[k_N]=\boldsymbol{F}$$

10.4.3 最优解的求取方法

$$\boldsymbol{P}[k_N]=\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{Z}_1(k)=\boldsymbol{Q}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)$$

$$\boldsymbol{Z}_2(k)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)$$

$$\boldsymbol{Z}_3(k)=\boldsymbol{R}(k)+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}(k)$$

$$\boldsymbol{K}(k)=\boldsymbol{Z}_3^{-1}(k)\boldsymbol{Z}_2(k)$$

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{Z}_1(k)-\boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Z}_3^{-1}(k)\boldsymbol{Z}_2(k)$$

10.4.3 最优解的求取方法

【例 5-8】已知离散系统

$$x[k+1]=x[k]+2u[k]$$

试求最优控制序列$\{u^*[0], u^*[1], u^*[2]\}$，是性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{2}(x^2[k]+ru^2[k])$$

为最小。其中 r 为正实数。

【解】本例为有限时间离散状态调节器，注意到

$A=1,\quad B=2,\quad F=0,\quad Q=1,\quad R=r,\quad k_0=0,\quad k_N=3$

$$Z_1(k)=Q(k)+A^T(k)P(k+1)A(k)$$
$$Z_2(k)=B^T(k)P(k+1)A(k)$$
$$Z_3(k)=R(k)+B^T(k)P(k+1)B(k)$$
$$K(k)=Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$$
$$P(k)=Z_1(k)-Z_2^T(k)Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$$

$$A=1,\quad B=2,\quad F=0,\quad Q=1,\quad R=r,\quad k_0=0,\quad k_N=3$$

① $k_N=3,\quad P[3]=F=0$

② $k=2$，可求出

$$Z_1(2)=Q(2)+A^T(2)P(3)A(2)=1$$
$$Z_2(2)=B^T(2)P(3)A(2)=0$$
$$Z_3(2)=R(2)+B^T(2)P(3)B(2)=r$$
$$K(2)=Z_3^{-1}(2)Z_2(2)=0$$
$$P(2)=Z_1(2)-Z_2^T(2)K(2)=1$$

③ $k=1$，可求出

$$Z_1(1)=Q(1)+A^T(1)P(2)A(1)=2$$
$$Z_2(1)=B^T(1)P(2)A(1)=2$$
$$Z_3(1)=R(1)+B^T(1)P(2)B(1)=r+4$$
$$K(1)=Z_3^{-1}(1)Z_2(1)=\frac{2}{r+4}$$
$$P(1)=Z_1(1)-Z_2^T(1)K(1)=\frac{2(r+2)}{r+4}$$

④ $k=0$，可求出

$$Z_1(0)=Q(0)+A^{T}(0)P(1)A(0)=\frac{3r+8}{r+4}$$

$$Z_2(0)=B^{T}(0)P(1)A(0)=\frac{4(r+2)}{r+4}$$

$$Z_3(0)=R(0)+B^{T}(0)P(1)B(0)=\frac{(r+4)^2+4r}{r+4}$$

$$K(0)=Z_3^{-1}(0)Z_2(0)=\frac{4(r+2)}{(r+4)^2+4r}$$

$$P(0)=Z_1(0)-Z_2^{T}(0)K(0)=\frac{3r^3+28r^2+80r+64}{r^3+16r^2+64r+64}$$

⑤于是可以求出最优控制序列

$$u^*(0)=-K(0)x(0)=-\frac{4(r+2)}{(r+4)^2+4r}x(0)$$

$$u^*(1)=-K(1)x(1)=-\frac{2}{r+4}x(1)$$

$$u^*(2)=-K(2)x(2)=0$$

§10.4 离散系统状态调节器

10.4.4 无限时间离散状态调节器

状态方程： $\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k]$

边界条件： $\boldsymbol{x}[0]=\boldsymbol{x}_0$

控制约束： 控制 $\boldsymbol{u}[\cdot]$ 无约束。

性能指标： $J=\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{x}^T[k]\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{u}^T[k]\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}[k])$

其中 $\boldsymbol{Q}\geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}>\boldsymbol{0}$ 且具有相应的维数

§ 10. 4 离散系统状态调节器

10.4.5 无限时间离散状态调节器最优解

最优控制： $\boldsymbol{u}[k] = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}[k]$

最优性能指标： $J^* = \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{x}_0$

其中：最优反馈增益序列

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$$

而 $\boldsymbol{P}$ 是下列离散黎卡提代数方程的正半定对称解

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Q}]$$

习题：**5-18，5-20，5-22**

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.1 有限时间最优输出调节器

状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$， $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$， 末端时刻 t_f 固定、有限

控制约束：控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J=\boldsymbol{y}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]dt$

其中 $\boldsymbol{F}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Q}(t)\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{R}(t)>\boldsymbol{0}$， 有相应的维数， 各元连续有界

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.2 有限时间输出调节器的最优解

最优控制： $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$

最优轨线： $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t)$， $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

最优性能指标： $J^* = \boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$

其中 $\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{0}$，是黎卡提（Riccati）矩阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{C}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{0}$$

在边界条件 $\boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{C}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}(t_f)$ 下的解。

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.3 最优输出调节器解的化归性证明

事实上，只要把输出方程代入至性能指标的表达式中，便可立即得到：

$$J = y^T(t_f)Fy(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

$$= x^T(t_f)C^T(t_f)FC(t_f)x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T C^T QCx) + u^T Ru]dt$$

$$= x^T(t_f)\overline{F}x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T\overline{Q}x + u^T Ru]dt$$

其中 $\overline{F} = C^T(t_f)FC(t_f),\quad \overline{Q}(t) = C^T(t)Q(t)C(t)$

因 $F \ge 0,\quad Q(t) \ge 0,\quad R(t) > 0$

不难验证， $\overline{F} \ge 0,\quad \overline{Q}(t) \ge 0,\quad R(t) > 0$

的成立几乎是无条件的（只需 C 具有合适的维数即可）。于是上述问题立即化归成由有限时间状态调节问题，它的最优解是自然的。

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.4 无限时间定常输出调节器

状态方程： $\dot{x} = Ax + Bu$， $y = Cx$

边界条件： $x(0) = x_0$

控制约束： 控制 $u(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J = \int_0^\infty [y^T Q y + u^T R u] dt$

其中 $Q \geq 0, R > 0$，有相应的维数

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.5 无限时间输出调节器的最优解

最优控制： $u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$

若 (A, B) 能控、(A, H) 能观，其中 $H^T H = C^T Q C$

则最优控制存在且唯一

最优轨线： $\dot{x} = [A - BR^{-1}B^T P]x$， $x(0) = x_0$

闭环系统在非零最优控制下渐近稳定

最优性能指标： $J^* = x_0^T P x_0$

其中 $P > 0$，满足黎卡提矩阵代数方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T Q C = 0$$

10.5.5 无限时间输出调节器的最优解

无限时间最优输出调节器的证明也是显而易见的。要指出的是所谓输出调节器问题事实上只是状态调节器问题的一个特例（不是推广）。

注：本教材的相关段落有一些画蛇添足的错误，举例如下：

1. 式(6. 3)以下$0<l\le m\le n$是不需要的;
2. 引理 6－1 的内容是奇怪的（结论与条件无关）;
3. 定理 6－1 中能观性条件是不需要的;
4. 定理 6－2 中(A,C)能观的条件也是不需要的。

§10.5 线性最优输出调节器

10.5.6 输出反馈次优调节器

线性最优调节器问题的最优解是状态反馈，是因为状态中含有了所有的系统信息（同学们可回顾一下状态的定义），但一般而言，状态变量是不能实时量测的，所以研究基于输出反馈的次优控制得到了一些专家们的重视。

当然，我们认为借助于状态观测器来实现最优状态反馈更有价值。

第十章 二次型指标的线性最优控制

§10.6 线性最优跟踪问题

10.6.1 有限时间最优跟踪控制器

状态空间方程： $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$

边界条件： $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，末端时刻 t_f 固定、有限

控制约束： 控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J=\boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]dt$

其中：$\boldsymbol{F}\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}(t)\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}(t)>\boldsymbol{0}$ 且具有相应的维数，时变矩阵的各元连续且有界； $\boldsymbol{y}_r(t)$ 表示期望输出向量，误差向量 $\boldsymbol{e}(t)$ 定义为

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{y}_r(t)-\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_r(t)-\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

10.6.2 线性最优跟踪问题的解

最优控制： $u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[P(t)x(t) - g(t)]$

最优轨线： $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TP)x + BR^{-1}B^Tg, \quad x(t_0) = x_0$

最优性能指标： $J^* = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) - 2g^T(t_0)x_0 + \varphi(t_0)$

其中

① $P \geq 0$，是黎卡提矩阵微分方程：

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t) = 0$$

在边界条件 $P(t_f) = C^T(t_f)SC(t_f)$ 下的唯一解；

② $g(t)$ 称为伴随向量，满足向量微分方程

$$\dot{g}(t) + [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T g(t) + C^T(t)Q(t)y_l(t) = 0$$

及边界条件 $g(t_f) = C^T(t_f)Sy_l(t_f)$

③标量函数 $\varphi(t)$ 满足微分方程

$$\dot{\varphi}(t) = y_r^T(t)Q(t)y_r(t) + 2g^T(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)g(t)$$

及边界条件 $\varphi(t_f) = y_r^T(t_f)P(t_f)y_r(t_f)$

10.6.2 线性最优跟踪问题的解

- 最优跟踪控制律由两部分组成。其一是线性状态反馈 $-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{T}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 它与相应的线性输出调节器（跟踪目标为恒零的情况）完全相同；其二是前馈输入 $\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{T}(t)\boldsymbol{g}(t)$ 它是为了实现目标跟踪而出现的
- 最优跟踪系统的闭环结构与相应的线性输出调节器完全相同，它决定了跟踪能力的强弱。
- 实现最优跟踪不仅要知道全部的状态信息，还要掌握全部的被跟踪轨迹。

§ 10.6 线性最优跟踪问题

10.6.3 无限时间最优跟踪控制器

状态空间方程： $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

边界条件： $x(0) = x_0$

控制约束： 控制 $u(\cdot)$ 无约束。

性能指标： $J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt$

其中：$Q \geq 0, R > 0$ 且具有相应的维数；$y_r(t)$ 表示期望输出向量，误差向量 $e(t)$ 定义为

$$e(t) = y_r(t) - y(t) = y_r(t) - Cx(t)$$

10.6.4 线性最优跟踪问题的解

最优控制(近似)：$u^* = -R^{-1}B^T[Px - g(t)]$

最优轨线：$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TP)x + BR^{-1}B^Tg(t), \quad x(0) = x_0$

最优性能指标：$J^* = x_0^TPx_0 - 2g^T(0)x_0$

其中① $P > O$，满足黎卡提矩阵代数方程：

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + C^TQC = 0$$

②伴随向量 $g(t) = [A^T - PBR^{-1}B^T]^{-1}C^TQy_r(t)$

此外，为保证最优控制近似解的存在，还要求 (A, B) 能控、(A, H) 能观，其中 $H^TH = C^TQC$

习题：**6-2，6-8**

最优控制习题总汇

2-13（求最优控制、最优轨线、最优指标）

3-8，3-9，3-11，3-22，,3-31，3-42

4-1，4-4，4-7

5-5，5-6，5-9，5-10，5-18， 5-20， 5-22

6-2，6-8