现代控制理论

第一章　绪论
第二章　系统的状态空间模型
第三章　状态空间方程的解
第四章　系统的稳定性
第五章　能控性与能观性
第六章　传递函数的状态空间实现
第七章　状态反馈与状态观测器
第八章　最优性原理与动态规划
第九章　极小值原理
第十章　二次型指标的线性最优控制

中国科学技术大学 自动化系

本课程的篇章结构

建模	直接获取	第2章 系统的状态空间模型
	模型转换	第2章 系统的状态空间模型 第6章 传递函数矩阵的状态空间实现
分析	定量分析	第3章 状态空间方程的解
	定性分析	第4章 系统的稳定性 第5章 能控性和能观性
设计	常规控制	第7章 状态反馈和状态观测器
	最优控制	第8章 最优性原理与动态规划 第9章 极小值原理 第10章 二次型指标的线性最优控制

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

§3.2 状态空间方程的解

§3.3 预解矩阵及频域求解

本章的主要目的是——求解状态空间方程：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

已知的$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{u}(\cdot)$，求 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$

拟从考察已知初态的线性定常系统零输入响应开始

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$$

即齐次状态方程的求解：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 \end{aligned} \Longrightarrow \boldsymbol{x}(t) = ?$$

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

§3.2 状态空间方程的解

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

定义3. 1： 若时变线性系统的齐次状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

的解可写作

$$\boldsymbol{x}(t,t_0)=\Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0$$

则称矩阵 $\Phi(t,t_0)$为该系统的状态转移矩阵。

对于线性定常系统，因总可以将初始时间平移至 $t_0=0$，故其状态转移矩阵是时间 t 的单变量函数，在不致产生误解时，通常直接简写为$\Phi(t)$。

线性定常系统：$\boxed{\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0,0)}$

§ 3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \longrightarrow \boldsymbol{x}(t) = ?$$

试着用熟知的拉氏变换法解之：

$$s\hat{\boldsymbol{x}}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(s) \quad \Rightarrow \quad (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{x}}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}_0 \qquad \boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0$$

在得到线性定常系统的零输入响应（齐次状态方程的解、自由运动的解）的同时，也得到该系统状态转移矩阵的拉氏反变换表示形式：

$$\Phi(t) = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

3.1.1 状态转移矩阵

为进一步揭示线性定常系统状态转移矩阵

$$\Phi(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

的本质，注意到对于标量系统

$$\phi(t)=L^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(at)^k=1+at+\frac{1}{2!}(at)^2+\frac{1}{3!}(at)^3+\cdots$$

于是，我们非常希望能够定义一个矩阵函数 $f(\boldsymbol{A},t)=e^{\boldsymbol{A}t}$ 使

$$\Phi(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}t)^k=e^{\boldsymbol{A}t}$$

显然，需要对这个指数为方阵的矩阵函数给予更数学化的定义：

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

§3.2 状态空间方程的解

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.1 矩阵指数

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

定义3.2（矩阵指数） 对方阵 $\boldsymbol{S}$，其矩阵指数定义为

$$e^{\boldsymbol{S}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{S}^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{S} + \frac{1}{2!} \boldsymbol{S}^2 + \frac{1}{3!} \boldsymbol{S}^3 + \cdots$$

因线性定常系统的状态转移矩阵（它还是时间 t 的函数）是最常见的矩阵指数，故在控制理论的书籍中，经常把

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \exp(\boldsymbol{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k t^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!} \boldsymbol{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \boldsymbol{A}^3 t^3 + \cdots$$

就默认为矩阵指数的定义式。以下，尤其是关于矩阵指数的性质的讨论，也将在此基础上展开。同学们自当可以辨别。

§ 3.1 矩阵指数

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

一、矩阵指数（状态转移矩阵）定义

$$e^{At} = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots$$

二、状态转移矩阵的性质

性质1： $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$

性质2： $\Phi(0) = e^{A0} = \boldsymbol{I}$

性质3： $\dot{\Phi}(t) = \boldsymbol{A}\Phi(t) = \Phi(t)\boldsymbol{A}$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}(e^{At}) = \boldsymbol{A}e^{At} = e^{At}\boldsymbol{A}$

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

二、状态转移矩阵的性质

$$\Phi(t)=e^{At}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(At)^k$$

性质4： $\Phi(t)\Phi(\tau)=\Phi(t+\tau)$ $\qquad e^{At}e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)}$

推论1：状态转移矩阵是可逆阵，且总有

$$[\Phi(t)]^{-1}=\Phi(-t) \qquad [e^{At}]^{-1}=e^{-At}$$

推论2：对一切整数*k*，总有

$$[\Phi(t)]^k=\Phi(kt) \qquad [e^{At}]^k=e^{Akt}$$

易见，性质4是熟知的标量指数的一般规则 $e^{at}e^{a\tau}=e^{a(t+\tau)}$ 的简单推广。于是，我们立刻想到并希望，上述规则的另一个写法 $e^{at}e^{bt}=e^{(a+b)t}$ 能简单地推广至矩阵情形，非常遗憾的是，这个推广一般而言不能成立！

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

二、状态转移矩阵的性质

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k$$

性质5： $AB = BA \Leftrightarrow e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

推论3：若对标量 σ 和方阵 B，有 $A = \sigma I + B$ 则：

$$e^{At} = e^{\sigma t}e^{Bt}$$

性质6： 对任一非奇异矩阵 P 有

$$e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P$$

习题：p123-127（118-121）

3.7，3.8，3.9

3.11，3.12，3.13，3.14(ab)

补1：证明：

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} t\right) = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

补2：对$n\times n$矩阵A，证明：对所有自然数k

$$\mathrm{A}^k = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{k,m}\mathrm{A}^m$$

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

§3.2 状态空间方程的解

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.1 矩阵指数

3.1.3 矩阵指数的求取

一、直接计算法

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

- 若矩阵$\boldsymbol{A}$呈对角线形，即：$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$则

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{diag}(e^{a_1 t},e^{a_2 t},\cdots,e^{a_m t})$$

- 若矩阵$\boldsymbol{A}$呈对角块形，即：$\boldsymbol{A}=\mathrm{Diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m)$则

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{Diag}(e^{\boldsymbol{A}_1 t},e^{\boldsymbol{A}_2 t},\cdots,e^{\boldsymbol{A}_m t})$$

3.1.3 矩阵指数的求取

一、直接计算法

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

【例3.1】求以下方阵的矩阵指数 e^{At}

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A_3=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}, {A_2}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, {A_2}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, {A_2}^4=0$$

$$e^{A_2t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}{A_2}^k t^k=I+t\times A_2+\frac{t^2}{2!}\times {A_2}^2+\frac{t^3}{3!}\times {A_2}^3$$

$$e^{A_2t}=\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}&\frac{t^3}{3!}\\0&1&t&\frac{t^2}{2!}\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow e^{\boldsymbol{A}t}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4!}t^4\\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3\\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=\lambda I+A_5,A_5=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=e^{(\lambda I+A_5)t}=e^{\lambda It}\times e^{A_5t}=e^{\lambda t}e^{A_5t}$$

3.1.3 矩阵指数的求取

二、拉氏变换法 $e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$

【例3.2】：已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，试求 e^{At}

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\dfrac{2}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)}+\dfrac{2}{(s+2)}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

3.1.3 矩阵指数的求取

三、标准型法

$$e^{At} = Q\,e^{(Q^{-1}AQ)t}Q^{-1} = Q\,e^{\Lambda t}Q^{-1}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相关的特征向量时，可以通过相似变换将 $\boldsymbol{A}$ 变换为对角线形。

【例3.3】用标准型法重做例3.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3.1.3 矩阵指数的求取

三、标准型法 $e^{At}=\boldsymbol{Q}\,e^{(\boldsymbol{Q}^{-1}A\boldsymbol{Q})t}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\,e^{\bar{A}t}\boldsymbol{Q}^{-1}$

一定存在相似变换，化方阵A为约当型。

注意：对角线形是约当型的一个特殊形式(所有约当块均为一阶)。在使用标准型法求取约当矩阵的矩阵指数时，需记忆如下结论(以五阶为例)：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow e^{At}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \frac{1}{4!}t^4\\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3\\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3.1.3 矩阵指数的求取

三、标准型法

$$e^{At}=Q\,e^{(Q^{-1}AQ)t}Q^{-1}=Q\,e^{\Lambda t}Q^{-1}$$

【例3.4】已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{bmatrix}$，用标准型法求 e^{At}

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\\lambda_1&1&\lambda_2\\\lambda_1^2&2\lambda_1&\lambda_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}\quad \Lambda=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\quad e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^t&te^t&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Qe^{\Lambda t}Q^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&te^t&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}&(3t+2)e^t-2e^{2t}&-(t+1)e^t+e^{2t}\\-2(t+1)e^t+2e^{2t}&(3t+5)e^t-4e^{2t}&-(t+2)e^t+2e^{2t}\\-2(t+2)e^t+4e^{2t}&(3t+8)e^t-8e^{2t}&-(t+3)e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}$$

3.1.3 矩阵指数的求取

四、待定系数法

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

凯利-哈密尔顿定理：方阵满足自身的特征方程。

（***Cayley Hamilton***）

对于 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，设其特征多项式为

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

则凯利-哈密尔顿定理保证如下的矩阵方程成立

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$$

推论：若 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$则对任意自然数 k 总有 $A^k=\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{k,m}A^m$

更进一步：

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{n-1}\beta_m\boldsymbol{A}^m=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)\boldsymbol{A}^m$$

四、待定系数法

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

结论：已知某函数 $f(\lambda)$ 和一方阵 $\boldsymbol{A}$，若多项式 $g(\lambda)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的谱(*spectrum*)上与 $f(\lambda)$ 相等，则矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$。

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots n)$，则函数 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**谱上相等**可理解为如下 n 个等式：

$$f(\lambda_i)=g(\lambda_i),\quad (i=1,2,\cdots n)$$

$$e^{\lambda_i t}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)\lambda_i^m$$

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个互不相同的特征值，其第 k 个特征值为 l_k 重，则函数 $f(\lambda)$ 与多项式函数 $g(\lambda)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱上相等可理解为：

$$\left.\frac{d^{(i)}}{d\lambda^i}f(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_k}=\left.\frac{d^{(i)}}{d\lambda^i}g(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_k}\qquad (i=0,1,2,\cdots,l_k-1;\quad k=1,2,\cdots m)$$

矩阵函数、标量函数的相互构造：

$$f(A)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\Leftrightarrow f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!}=e^{\lambda t}$$

构造另一个低阶多项式标量函数：

$$g(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\lambda^k\neq f(\lambda)$$

特征多项式：
$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta(A)=0$$

特征多项式除高阶多项式：

$$f(\lambda)=\Delta(\lambda)\times h(\lambda)+g(\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$f(A)=\Delta(A)\times h(A)+g(A)=0\times h(A)+g(A)$$
$$=g(A)=???$$

$$\{\alpha_{n-1},\quad\alpha_{n-2},\quad\cdots,\quad\alpha_0\}=?$$

$$\{\alpha_{n-1},\quad \alpha_{n-2},\quad \cdots,\quad \alpha_0\} = ?$$

$$f(\lambda) = \Delta(\lambda) \times h(\lambda) + g(\lambda)$$

$$\boxed{\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_l)^{n_l}}$$

$$f(\lambda_1) = \Delta(\lambda_1) \times h(\lambda_1) + g(\lambda_1) = 0 \times h(\lambda_1) + g(\lambda_1) = g(\lambda_1)$$

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda}(\Delta(\lambda_1) \times h(\lambda_1)) + \frac{d}{d\lambda} g(\lambda_1) = 0 + \frac{d}{d\lambda} g(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda} g(\lambda_1)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_l)^{n_l}}$$

$$\frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}} f(\lambda_1) = \frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}}(\Delta(\lambda_1) \times h(\lambda_1)) + \frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}} g(\lambda_1) = 0 + \frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}} g(\lambda_1) = \frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}} g(\lambda_1)$$

$$g(\lambda_1)=f(\lambda_1)$$
$$\frac{d}{d\lambda}g(\lambda_1)=\frac{d}{d\lambda}f(\lambda_1)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}}g(\lambda_1)=\frac{d^{n_1-1}}{d\lambda^{n_1-1}}f(\lambda_1)$$
$$\vdots$$
$$g(\lambda_l)=f(\lambda_l)$$
$$\frac{d}{d\lambda}g(\lambda_l)=\frac{d}{d\lambda}f(\lambda_l)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{n_l-1}}{d\lambda^{n_l-1}}g(\lambda_l)=\frac{d^{n_l-1}}{d\lambda^{n_l-1}}f(\lambda_l)$$

*n*个未知数：

$$g(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\lambda^k \neq f(\lambda)$$

*n*个方程：

$$n_1+n_2+\cdots+n_l=n$$

$$f(A)=g(A)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k A^k$$

四、待定系数法

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

【例3.5】：已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求 e^{At}

解：A 特征多项式为： $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)$

即特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ 。

设 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，$g(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda$ 则

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

解 $\begin{aligned}e^{-t}&=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)(-1)\\ e^{-2t}&=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)(-2)\end{aligned}$ 得 $\begin{aligned}\alpha_0(t)&=2e^{-t}-e^{-2t}\\ \alpha_1(t)&=e^{-t}-e^{-2t}\end{aligned}$

所以

$$e^{At}=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

四、待定系数法

【例3.6】：已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求 A^{100}

解：A 特征多项式为：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2$ 即特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$。

取 $f(\lambda)=\lambda^{100}$， $g(\lambda)=g_0+g_1\lambda$ $\quad A^{100}=g_0I+g_1A$

解 $\lambda=1$： $f(\lambda)=g(\lambda)$， $f'(\lambda)=g'(\lambda)$

即 $\lambda=1$： $\lambda^{100}=g_0+g_1\lambda \Rightarrow 1=g_0+g_1$

$\lambda=1$： $100\lambda^{99}=g_1 \Rightarrow 100=g_1$

$\Rightarrow \quad g_0=-99, \quad g_1=100$

得 $g(\lambda)=g_0+g_1\lambda=-99+100\lambda$

所以

$$A^{100}=f(A)=g(A)=100A-99I=100\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-99\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 200\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

四、待定系数法

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

【例3.7】：已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$，求 e^{At}

解：A 特征多项式为：$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

故若设 $e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_1(t)A^2$

则可解得

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 0 & 1 & 2\lambda_1\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ te^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{t}\\ te^{t}\\ e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}\\ (3t+2)e^t-2e^{2t}\\ -(t+1)e^t+e^{2t}\end{bmatrix}$$

所以

$$e^{At}=(-2te^t+e^{2t})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+[(3t+2)e^t-2e^{2t}]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}+[-(t+1)e^t+e^{2t}]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\\ 8 & -18 & 11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t} & (3t+2)e^t-2e^{2t} & -(t+1)e^t+e^{2t}\\ -2(t+1)e^t+2e^{2t} & (3t+5)e^t-4e^{2t} & -(t+2)e^t+2e^{2t}\\ -2(t+2)e^t+4e^{2t} & (3t+8)e^t-8e^{2t} & -(t+3)e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}$$

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

3.1.1 状态转移矩阵

3.1.2 矩阵指数的定义和性质

3.1.3 矩阵指数的求取

3.1.4 模态与模态分解

§3.2 状态空间方程的解

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.1 矩阵指数

3.1.4 模态与模态分解

考察齐次状态空间方程的解，以互不相同特征值为例：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0=e^{(\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{-1})t}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}e^{\Lambda t}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

$$=[\,\boldsymbol{q}_1\ \ \boldsymbol{q}_2\cdots\boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0=[\,e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{q}_1\ \ e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{q}_2\cdots e^{\lambda_n t}\boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_0\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_0)e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{q}_1+(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_0)e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{q}_2+\cdots+(\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_0)e^{\lambda_n t}\boldsymbol{q}_n$$

【注意】：式中，$\boldsymbol{p}$为行向量，$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{x}$为列向量，$(\boldsymbol{px})$为标量

对于一个给定的线性定常系统，不论进行怎样的状态变换，系统矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值及其相应的特征向量是不会改变的。

由于 $e^{\lambda_i t}$ 体现了系统的固有属性，一般将 $e^{\lambda_i t},(i=1,2,\cdots,n)$ 称作系统的**模态**，或者称作振荡振型，简称**振型**。也称将系统矩阵约当化的状态变换阵$\boldsymbol{Q}$为该系统的**模态矩阵**，称该状态变换过程及结果为**模态分解**。

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

§3.2 状态空间方程的解

3.2.1 非齐次状态方程的解

3.2.2 状态空间方程的解

3.3.3 状态空间方程的离散化

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.2 状态空间方程的解

3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

两端同时左乘 e^{-At} 并移项 $\quad e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

此即 $\quad \dfrac{d}{dt}\left(e^{-At}\boldsymbol{x}(t)\right) = e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

对此式从0至 t 积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t) - e^{0}\boldsymbol{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

移项、等式两边同时左乘 e^{At}

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

变量代换后 $\quad \boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau$

3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \qquad \boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau$$

即使是定常系统，也会遇到初始时刻非零的问题。此时

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = e^{At_0}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{A(t-t_0+t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^{t_0} e^{A(t-t_0+t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= \left[e^{A(t-t_0)}e^{At_0}\boldsymbol{x}_0 + e^{A(t-t_0)}\int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$\mathrm{x}(t) = e^{\mathrm{A}(t-t_0)}\mathrm{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathrm{A}\tau}\mathrm{Bu}(t-\tau)d\tau$$

3.2.1 线性定常非齐次状态方程的解

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \qquad \boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau$$

【例3.9】 已知单输入线性定常系统的状态方程是 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$ ，试综合以下的条件确定矩阵$\boldsymbol{A}$和向量$\boldsymbol{b}$

(1) 当$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $u(t) \equiv 0$时， $\boldsymbol{x}(t) = e^{-t}\boldsymbol{x}(0)$；

(2) 当$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$， $u(t) \equiv 0$时， $\boldsymbol{x}(t) = e^{-2t}\boldsymbol{x}(0)$；

(3) 当$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$， $u(t)$为单位阶跃信号时， $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ -1 + e^{-t} \end{bmatrix}$

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

§3.2 状态空间方程的解

3.2.1 非齐次状态方程的解

3.2.2 状态空间方程的解

3.3.3 状态空间方程的离散化

§3.3 预解矩阵及频域求解

§3.2 状态空间方程的解

3.2.2 状态空间方程的解

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{C}\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

$$= \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{C}\int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

第三章 状态空间方程的解

§3.1 矩阵指数

§3.2 状态空间方程的解

3.2.1 非齐次状态方程的解

3.2.2 状态空间方程的解

3.3.3 状态空间方程的离散化

§3.3 预解矩阵及频域求解

§ 3.2 状态空间方程的解

3.2.3 状态空间方程的离散化

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{u}[k] \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{u}(t)$ 分段定常，且（采样T、保持、计算机控制）对所有的 $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(kT) =: \boldsymbol{u}[k] \qquad \forall kT \le t < (k+1)T$$

以 kT 时刻为时间起点应用状态方程解的公式：

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = e^{AT}\boldsymbol{x}(kT) + \int_{KT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}[k+1] = e^{AT}\boldsymbol{x}[k] + \int_{KT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}d\tau \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}[k]$$

而 $$\int_{KT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}d\tau \cdot \boldsymbol{B} = -\int_{T}^{0} e^{A\alpha}d\alpha \cdot \boldsymbol{B} = \int_{0}^{T} e^{A\tau}d\tau \cdot \boldsymbol{B} \qquad \alpha = (k+1)T - \tau$$

$$\boldsymbol{F} = e^{AT} \qquad \boldsymbol{H} = \left(\int_0^T e^{A\tau}d\tau\right)\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{D}_d = \boldsymbol{D}$$

3.2.3 状态空间方程的离散化

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[k] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F} = e^{AT} \qquad \boldsymbol{H} = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau\right)\boldsymbol{B}$$

【例3.10】若$\boldsymbol{A}$非奇异，证明：$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}^{-1}(e^{AT} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$

证明：令方阵函数$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{A}^{-1}(e^{At} - \boldsymbol{I})$，则$\boldsymbol{M}(0) = \boldsymbol{O}$且

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}(t) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}^{-1}e^{At} - \boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}^{-1}\frac{d}{dt}(e^{At}) = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}e^{At} = e^{At}$$

于是：

$$\boldsymbol{H} = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \cdot \boldsymbol{B} = \int_0^T \left(\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{M}(\tau)\right) d\tau \cdot \boldsymbol{B}$$

$$= [\boldsymbol{M}(T) - \boldsymbol{M}(0)]\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}(T)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}(e^{AT} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$$

【例3-11】（本校2007年硕士研究生招生考试试题）对线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

若$\boldsymbol{A}$非奇异，证明：系统在零初态条件下的单位阶跃响应是

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}(e^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$$

证明：系统的状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}u(t-\tau)d\tau$$

当初态为零且输入为单位阶跃信号时

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}d\tau$$

对时间求微分并与状态方程联立

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

因此（注意后一等号），当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，系统的输出响应是

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{-1}(e^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$$

第三章 状态空间方程的解

§ 3.1 矩阵指数

§ 3.2 状态空间方程的解

§ 3.3 预解矩阵及频域求解

§3.1 预解矩阵及频域求解

（自学）

习题：p123-127（118-121）

3.7，3.8，3.9

3.11，3.12，3.13，3.14(ab)

补1：证明：

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} t\right) = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

补2：对$n\times n$矩阵A，证明：对所有自然数k

$$A^k = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{k,m} A^m$$