自动控制原理

中国科学技术大学
工业自动化研究所
吴刚

2019年10月

第六章

线性反馈系统稳定性

目录

习题

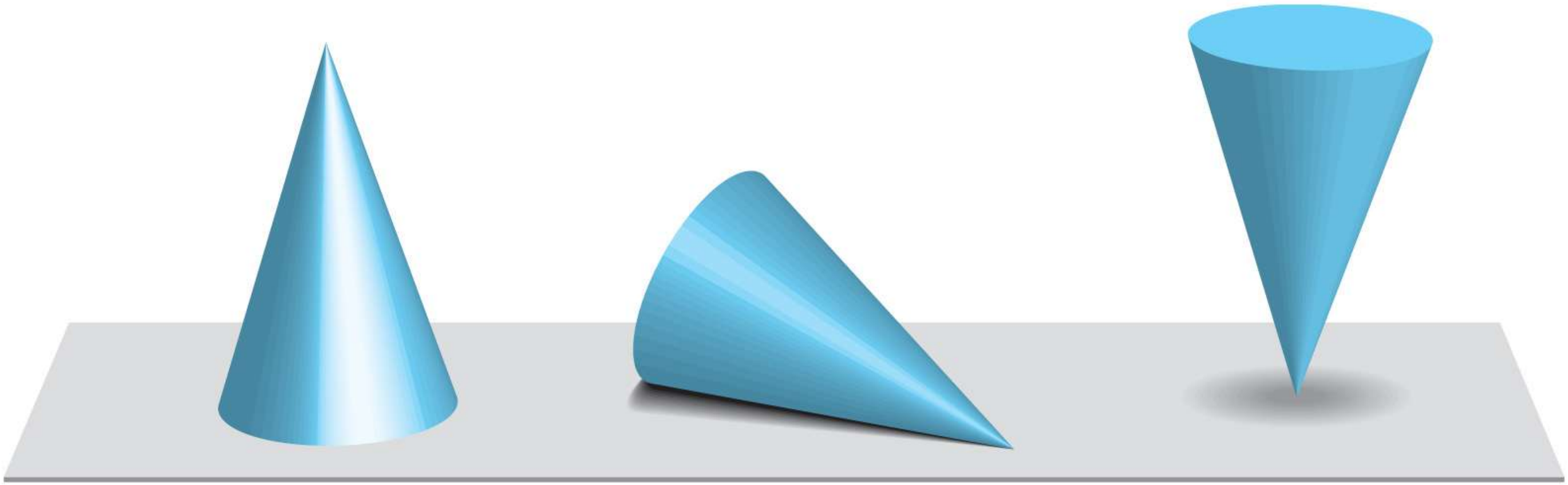
- **Skills Checks：** 全部
- **Exercises：E6.4、E6.6、E6.11、E6.18、E6.22、E6.26**
- **Problems：P6.3、P6.4、P6.8、P6.16、P6.20**
- **Advanced Problems：AP6.3**
- **Design Problems：CDP6.1、DP6.2、DP6.3**
- 作业说明：题目中要求高阶特征方程根的用**MATLAB**求解，在作业本上直接写出答案即可，另外要求画曲线和稳定区域的请用**MATLAB**作图，并集中在一起打印，贴到作业本上。

6.1　稳定性的概念

- 稳定是对自动控制系统最重要、最基本的要求
- 稳定性**stability**是控制工程、控制理论最重要的问题
- 分析、设计控制系统时，首先要考虑稳定性
- 不稳定系统，受到外部或内部扰动时，系统偏离原来的平衡工作点，并随时间推移而发散，即使扰动消失后，也不可能恢复原来的平衡状态
- 李雅普诺夫**A. M. Ляпунов (Lyapunov)**是常微分方程运动稳定性理论的创始人，**1892**年他的博士论文《运动稳定性的一般问题》奠定了常微分方程稳定性的理论基础

6.1 稳定性的概念

- 麦克风–功放–扬声器系统
- 稳定**stable**、不稳定**unstable**、临界稳定**critical stable**
- 绝对稳定性**absolute stability**
- 相对稳定性**relative stability**



稳定　　不确定　　不稳定

6.1 稳定性的概念

塔科马市纽约湾海峡悬索桥Tacoma Narrows Bridge，位于美国华盛顿州普吉特海湾地区的塔科马市，全长1.6公里。

第一座桥1938年开始建造，1940年7月1日通车，1940年11月7日倒塌，现在使用的是1950年重建的桥梁。

当时共有两个设计方案，第一个方案由克拉克·埃德里奇提出，桥面设计厚度7.6米；另一个方案由曾经参与设计金门大桥的设计师之一里昂·莫伊塞弗提出，为了降低造价，桥面设计厚度2.4米，成本从1100万美元降至800万美元。从经济角度考虑，采用了莫伊塞弗方案。

6.1　稳定性的概念

通车仅几个星期，桥面便开始出现上下摆动。人们安装了摄影机，以便观测摆动。大风时，桥面摆动幅度甚至可达1.5米。许多人慕名驾车而来，感受振荡的刺激。后来桥面波动幅度不断增加，工程技术人员试图加建钢缆、液压缓冲装置降低波动，但不成功。

在持续数月的摆动下，桥梁最终于1940年11月7日倒塌。当天早上，海峡上的侧风发生变化，桥面的上下摆动突然停止，出现左右的扭摆。有两人被困在桥上，后来逃离现场。桥面在几分钟内陆续崩塌。倒塌过程被人们拍摄记录。


优酷

6.1　稳定性的概念

华盛顿州政府没有得到保险公司的赔偿，因为本该付给保险公司的保险费全部被保险经纪侵吞。

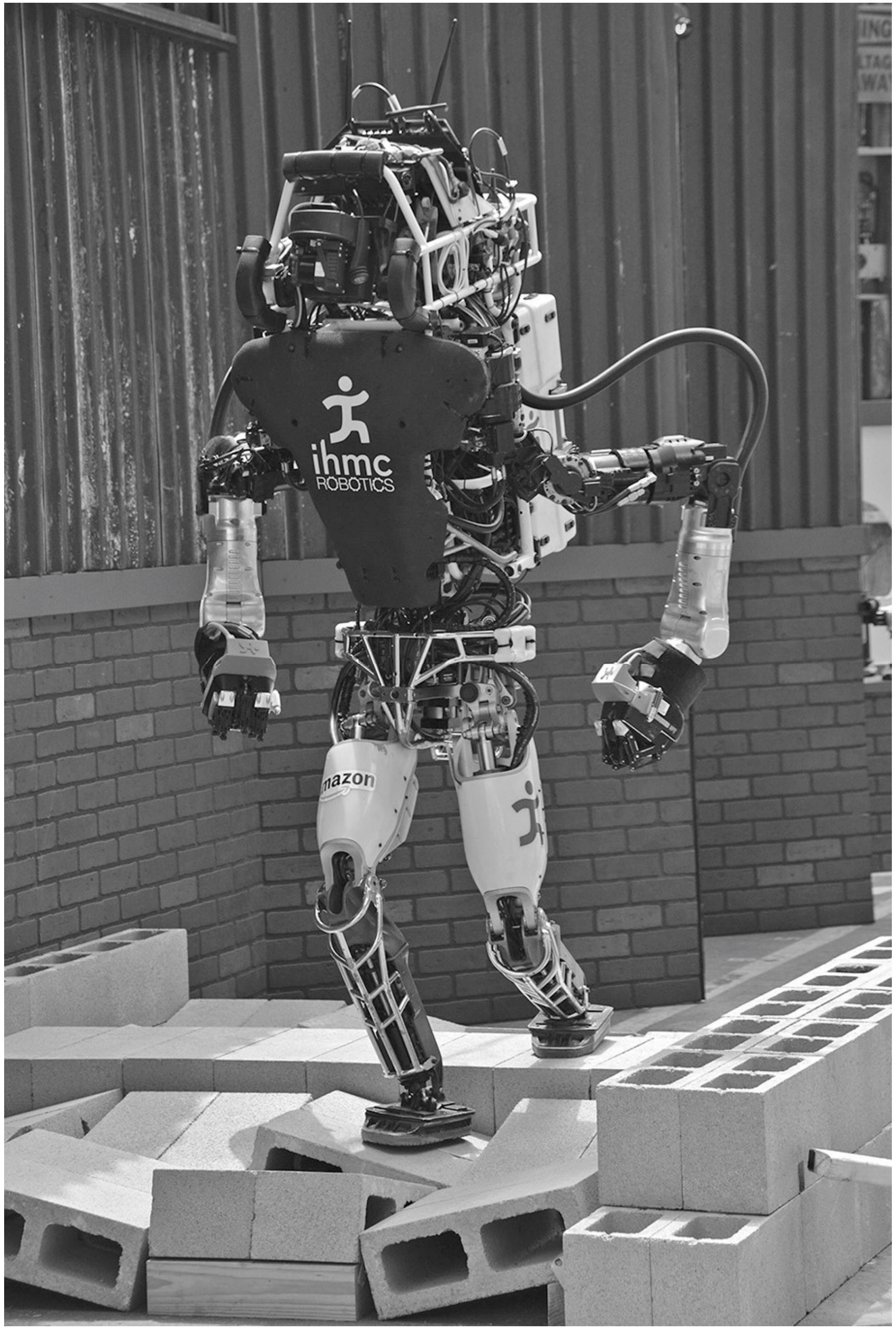
调查显示，原设计为了追求美观、省钱，桥面厚度不足，使用物料过轻，造成发生共振的破坏频率比较低，与海峡上自然风的频率接近，从而受到强风吹袭引起共振而不停摆动。

新桥的厚度增至10米，并在路面上加入气孔，使空气可在路面上穿越。新桥于1950年10月14日启用，两车道改为四车道，是目前全美第五长的悬索桥。

1998年在原桥东面加建一座新桥，是塔科馬海峡第三条悬索桥。

韩国汉城一个39层的购物中心，12层有20人跳跆搏Tae Bo，大楼摇晃10分钟，购物中心疏散两天。

专家研究认为，是剧烈运动引起的机械共振。



美国国防高级研究计划局**DARPA**举办的**2015**年机器人挑战赛上，佛罗里达的人类与机器认知研究所**IHMC**展示的能够直立行走的拟人机器人。显然，它本质上是不稳定的，必须通过闭环控制使其稳定。

6.1 稳定性的概念

- 线性定常系统输入信号$r(t)=0$时（零输入响应），在任何初始条件下，当$t\to\infty$时，系统输出及各阶导数都为0，即：

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=0$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t)=0$$

$$\vdots$$

$$\lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t)=0$$

则称该系统是渐近稳定的

6.1 稳定性的概念

- 假定**n**阶系统有一对共轭复极点，一个**k**重实极点，其余为单实极点；**y(0)=1**，$\dot{y}(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$；系统零输入响应：

$$y(t)=(b_1\cos\beta t+b_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+\left(\sum_{i=0}^{k-1}c_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}A_i e^{-p_i t}$$

$$\dot{y}(t)=(d_1\cos\beta t+d_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{k-1}e_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}-p_i A_i e^{-p_i t}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t)=(f_1\cos\beta t+f_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{k-1}g_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}(-p_i)^{n-1}A_i e^{-p_i t}$$

6.1 稳定性的概念

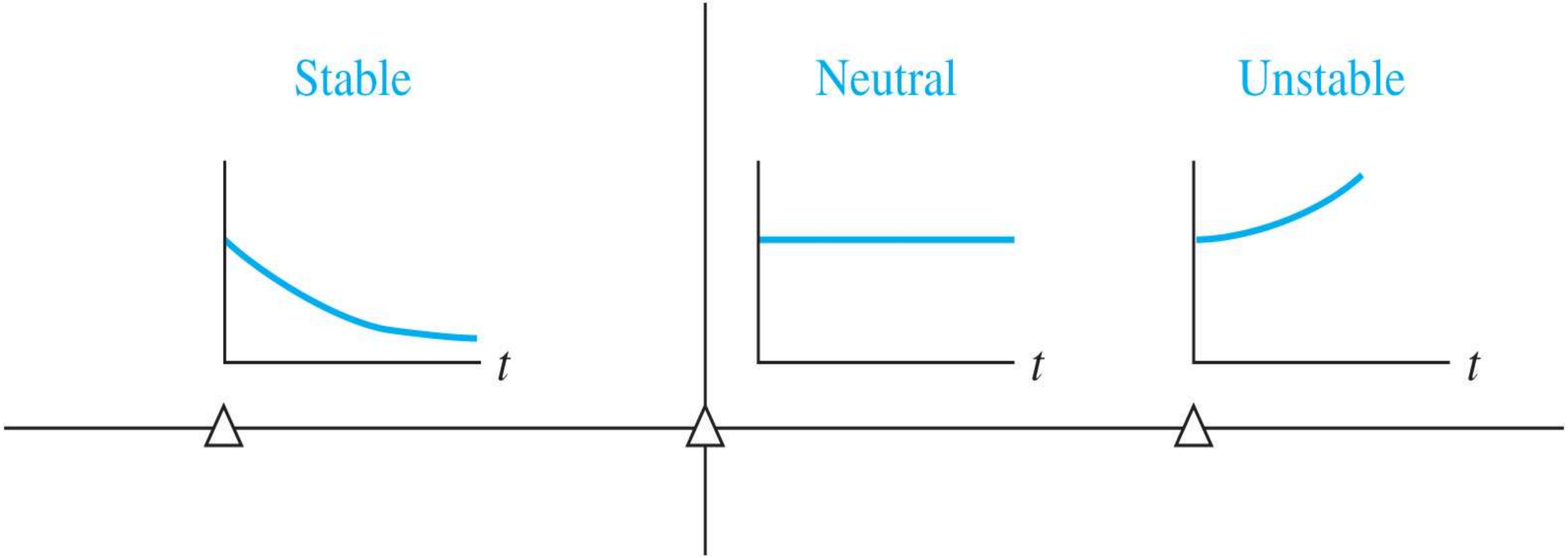
- 如果系统特征方程的根都具有负实部，则有：

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t)=\ldots\ldots=\lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t)=0$$

则系统渐近稳定

- 线性定常系统渐近稳定的充分必要条件：系统全部极点都位于开左半S平面，即系统特征方程的根都具有负实部
- 特征方程至少有一个根具有正实部，$t\to\infty$时，系统输出及各阶导数都趋于无穷大，系统不稳定
- 特征方程至少有一个根具有零实部，其余都具有负实部，当$t\to\infty$时，系统输出趋于常数或等幅振荡(一对虚极点)，系统临界稳定

6.1 稳定性的概念



***S*平面极点位置与线性定常系统渐近稳定性的关系**

6.1 稳定性的概念

- 线性定常系统在零初始条件下，有界输入产生的输出响应也是有界的，则称为有界输入有界输出稳定系统(BIBO稳定系统)。
- 线性定常系统BIBO稳定，指在零初始条件下：

$$y(0)=\dot{y}(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0 \text{（零状态响应）}$$

- 如果输入信号有界：

$$\underset{0<t<\infty}{|r(t)|} \le k_1 < \infty$$

- 则输出信号也有界：

$$\underset{0<t<\infty}{|y(t)|} \le k_2 < \infty$$

6.1　稳定性的概念

- 线性定常系统**BIBO**稳定的充分必要条件是：系统传递函数全部极点都位于开左半S平面
- **BIBO**稳定只表明系统对输出而言是稳定的，并不能保证系统内部所有状态都是稳定的。**BIBO**稳定反应了系统外部特性
- 系统传递函数中可能出现零极点对消
- 渐近稳定性反应了系统内在特性，因为：

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t)=\ldots\ldots=\lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t)=0$$

- 而$y(t)$，$\dot{y}(t)$，…，$y^{(n-1)}(t)$表示系统的所有状态，故渐近稳定性表明系统内部所有状态都是稳定的
- 渐近稳定系统是**BIBO**稳定的，反之不一定成立

6.1 稳定性的概念

- 不稳定系统的特征方程至少有一个根位于右半S平面，系统的输出对任何输入都是不稳定的。
- 如果特征方程有一对共轭根在虚轴上，而其他根均位于左半平面，则系统在有界的输入下，其稳态输出保持振荡；当输入为正弦波，且正弦波的角频率等于虚轴上根的幅值时，其输出变成无界的。系统称为临界稳定系统。
- 例如，若闭环系统的特征方程为：

$$(S+10)(S^2+16)=0$$

- 系统就是临界稳定的，如果系统由角频率$\omega=4$的正弦信号所激励，则其输出变成无界的

6.1　稳定性的概念

- 研究系统稳定性主要有三种方法：
  - 复频域法(s域)
  - 频域法($j\omega$域)
  - 时域法

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 通过系统极点或特征方程的根判断稳定性，需要求解特征方程，比较麻烦。如果只需要判别系统是否稳定，有没有简便方法，不用求解方程？
- ***Routh-Hurwitz***稳定性判据不用求解系统特征方程即可确定系统稳定性
- 系统特征根(极点)为$-r_i$，则系统特征方程为：

$$q(S)=0$$

$$=a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0$$

$$=a_n(S+r_1)(S+r_2)\ldots(S+r_n)$$

- 系统稳定，所有极点为负实部，所有r_i为正实部

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$
\begin{aligned}
q(S) &= a_n(S+r_1)(S+r_2)\ldots(S+r_n) \\
&= a_n S^n + a_n(r_1+r_2+\ldots+r_n)S^{n-1} + \\
&\qquad + a_n(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3+\ldots)S^{n-2} + \\
&\qquad + a_n(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_2r_5+\ldots)S^{n-3} + \ldots \\
&\qquad + a_n r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \\
&= a_n S^n + a_n(\text{所有根之和})S^{n-1} + \\
&\qquad + a_n(\text{所有根两两乘积之和})S^{n-2} + \\
&\qquad + a_n(\text{所有根三三乘积之和})S^{n-3} + \ldots \\
&\qquad + a_n(\text{所有根乘积}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 必要条件：如果系统稳定，特征方程不缺项(不能有系数为0)，各项的系数同号
- 不满足，肯定不稳定；满足，不一定稳定

$$q(S)=S^3+S^2+2S+8$$

$$=(S+2)(S^2-S+4)$$

$$=(s+2)\left(s-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)\left(s-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$$

- 所有系数都同号，也不缺项(没有系数为0)，但共轭复极点的实部为+0.5，是一对右半S平面的不稳定极点，系统不稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 一阶、二阶系统，特征方程所有系数同号，且不缺项(没有系数为0)，则系统稳定
- 三阶系统，特征方程所有系数同号、不缺项(没有系数为0)，且：

  $$a_1a_2>a_0a_3$$

  则系统稳定
- 高阶系统怎么办？

6.2　Routh-Hurwitz稳定性判据

- ***Routh-Hurwitz***稳定性判据是判断线性系统稳定性的充分必要条件

- 将特征方程按阶次由高到低排列：

$$q(S)=a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0$$

$$=0$$

- 系数组成阵列或顺序表，构造***Routh***表的表头：

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

6. 2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➢ 计算*Routh*表的下一行:

$$
\begin{array}{l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots
\end{array}
$$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➢ 计算*Routh*表的其他行：

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & f_{n-1} & f_{n-2} & & \\
s^1 & g_{n-1} & & & \\
s^0 & h_{n-1} & & &
\end{array}
$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$h_{n-1} = -\frac{1}{g_{n-1}}\begin{vmatrix} f_{n-1} & f_{n-2} \\ g_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{f_{n-1}\times 0 - g_{n-1}f_{n-2}}{g_{n-1}}$$

$$= f_{n-2}$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- ***Routh-Hurwitz*判据**：
  - 特征方程正实部根的个数等于***Routh***阵列第一列符号的变化次数。
  - 系统稳定的充分必要条件是，***Routh***阵列第一列中所有系数具有相同符号，且不能为**0**。
- 计算***Routh***阵列时，为了简化计算，可以用一个正数除任一行中的各个数字，而不影响最后的稳定性判断结果

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- ***Routh***阵列第一列的构成，分为4种不同情况：
  - 首列中没有元素为零
  - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素非零
  - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零
  - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零，且在虚轴上有重根

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➢ 情形1：首列中没有元素为零

➢ 例6.1 二阶系统，特征多项式：

$$q(S)=a_2S^2+a_1S+a_0$$

➢ *Routh*阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$b_1=-\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{a_2\times 0-a_0a_1}{a_1}$$

$$=a_0$$

➢ 如果系统稳定，要求a_2、a_1、a_0(b_1)同号

➢ 二阶系统稳定，要求所有系数全为正或全为负

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **例6.2** 三阶系统，特征多项式：

  $q(S)=a_3S^3+a_2S^2+a_1S+a_0$，*Routh*阵列：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & b_1 & \\
s^0 & c_1 &
\end{array}
\qquad
b_1=-\frac{a_3a_0-a_1a_2}{a_2}
\qquad
c_1=-\frac{a_2\cdot 0-a_0b_1}{b_1}=a_0
$$

- 系统稳定，要求a_3、a_2、b_1、$a_0(c_1)$同号
- b_1、a_2同号，$-(a_3a_0-a_1a_2)>0$，则$a_1a_2>a_3a_0$
- a_3、a_0同号，$a_1a_2>a_3a_0>0$，则a_1、a_2同号
- 三阶系统稳定的充分必要条件是特征多项式各个系数同号，并且$a_1a_2>a_3a_0$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 考虑特征多项式：

$$q(s)=s^3+s^2+2s+24=\left(s-1+j\sqrt{7}\right)\left(s-1-j\sqrt{7}\right)(s+3)$$

- 所有系数存在（非**0**），并且同号（正值），特征多项式满足系统稳定的必要条件。***Routh***阵列：

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 1 & 24 \\
s^1 & -22 & \\
s^0 & 24 &
\end{array}$$

- 首列中出现**2**次符号变化，可以判断***q*(*s*)**有**2**个根在右半***S***平面，系统不稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **情形2：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素非零。** ***Routh***阵列中有**1**个元素为**0**，用小正数ε代替它，补全阵列后再令ε趋于零

特征多项式：$q(S)=S^5+2S^4+2S^3+4S^2+11S+10$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & \\
s^2 & c_1 & 10 & \\
s^1 & d_1 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$c_1 = -\frac{12-4\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon}+4$$

$$d_1 = -\frac{10\varepsilon-6c_1}{c_1} \to 6$$

- ***Routh***阵列首列两次变号，系统不稳定，有两个根位于右半***S***平面

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **例6.3** 不稳定系统

  特征多项式：$q(S)=S^4+S^3+S^2+S+K$

  *Routh*阵列：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & K \\
s^3 & 1 & 1 & \\
s^2 & \varepsilon & K & \\
s^1 & c_1 & & \\
s^0 & K & &
\end{array}
$$

$$c_1=-\frac{K-\varepsilon}{\varepsilon}=-\frac{K}{\varepsilon}+1\to-\frac{K}{\varepsilon}$$

- $K>0$，首列两次变号，两个不稳定根，不稳定
- $K<0$，首列一次变号，一个不稳定根，不稳定
- $K=0$，特征多项式缺项，不稳定，但根的情况呢？

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **情形3：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零**
- 情形3包括：
  - 某行仅有一个元素，该元素为零
  - 某行所有元素都为零
- 此时多项式包含关于S平面原点对称的奇异值，即出现$(S+\sigma)(S-\sigma)$或$(S+j\omega)(S-j\omega)$的因子
- 采用辅助多项式$U(s)$解决这个问题。辅助多项式$U(s)$中各项的系数对应于*Routh*阵列中零元素的前一行，各项的阶次都为偶数次，其阶次表示了成对出现的对称根的数目

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 三阶系统特征多项式，K为可调的环路增益：

$$q(S)=S^3+2S^2+4S+K$$

- *Routh*阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & -\dfrac{K-8}{2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

- $0<K<8$时，首列符号不变，系统稳定
- $K>8$时，首列符号变化两次，系统有两个不稳定特征根，系统不稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- K=8时，第三行仅有一个元素，且为0。辅助多项式$U(s)$是全零元素行的前一行，即：

$$U(S)=2S^2+KS^0$$

$$=2S^2+8$$

$$=2(S^2+4)$$

$$=2(S+j2)(S-j2)$$

- K=8时，系统临界稳定，虚轴上有两个根
- 辅助多项式$U(s)$是特征多项式的因子，以$U(s)$除$q(s)$，得：

6.2　Routh-Hurwitz稳定性判据

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}s+1 \\ \hline
2s^2+8 & s^3+2s^2+4s+8 \\
 & \underline{s^3 \qquad\quad +4s} \\
 & \qquad 2s^2 \qquad +8 \\
 & \qquad 2s^2 \qquad +8
\end{array}
$$

- 当K=8时，特征多项式的因式分解为：

$$q(S)=(\tfrac{1}{2}S+1)(2S^2+8)=(S+2)(S+j2)(S-j2)$$

- 临界稳定系统的响应会出现持续振荡，实践中往往无法接受

6. 2　Routh-Hurwitz稳定性判据

- 辅助多项式$U(s)$对s求导，用得到的多项式的系数代替全为零那一行的系数，按规则继续计算
- 系统特征多项式：

$$q(S)=S^5+2S^4+25S^3+50S^2+24S+48=0$$

$$\begin{array}{c|lll} s^5 & 1 & 25 & 24 \\ s^4 & 2 & 50 & 48 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

- 第三行全为0，取前一行构造辅助多项式：

$$U(S)=2S^4+50S^2+48$$

6.2　Routh-Hurwitz稳定性判据

- 对$U(s)$求导，用所得多项式系数代替第三行系数：

$$\dot{U}(s) = 8s^3 + 100s$$

s^5	1	25	24
s^4	2	50	48
s^3	8（2）	100（25）	
s^2	25	48	
s^1	$\frac{529}{25}$		
s^0	48		

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 首列没有变号，所以没有正实部的根

$$U(S)=2S^4+50S^2+48$$
$$=2(S^4+25S^2+24)$$
$$=2(S^2+1)(S^2+24)$$

- 特征方程有：

一个实数根$S_1=-2$

两对共轭虚根$S_{2,3}=\pm j$、$S_{4,5}=\pm j2\sqrt{6}$

- 系统临界稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **情形4：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零，且在虚轴上有重根**
- 特征方程在虚轴上有单根(一对虚根)，系统既不是稳定的，也不是不稳定的，称为临界稳定，具有不衰减的正弦模态
- 虚根是重根，系统响应有$t\sin(\omega t+\varphi)$的形式，响应发散，系统不稳定。***Routh-Hurwitz*判据不能发现这种形式的不稳定**

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 系统特征多项式：

$$q(S)=(S+1)(S+j)(S-j)(S+j)(S-j)$$
$$=S^5+S^4+2S^3+2S^2+S+1$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 1 \\
s^4 & 1 & 2 & 1 \\
s^3 & \varepsilon & \varepsilon & \\
s^2 & 1 & 1 & \\
s^1 & \varepsilon & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- $\varepsilon \to 0$，首列元素没有变号，容易错误判定系统临界稳定。而系统冲激响应$t\sin(t+\varphi)$随时间增大
- 与S^4行对应的辅助多项式为：$S^4+2S^2+1=(S^2+1)^2$
- 与S^2行对应的辅助多项式为：S^2+1
- 特征方程虚轴上有重根

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **例6.4**　虚轴上有根的五阶系统
- 特征多项式：

$$q(S)=S^5+S^4+4S^3+24S^2+3S+63$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 4 & 3 \\
s^4 & 1 & 24 & 63 \\
s^3 & -20 & -60 & \\
s^2 & 21 & 63 & \\
s^1 & 0 & &
\end{array}$$

6.2　Routh-Hurwitz稳定性判据

- 辅助多项式为：

$$U(S)=21S^2+63$$
$$=21(S^2+3)$$
$$=21(S+j\sqrt{3})(S-j\sqrt{3})$$

- $U(s)$在虚轴上有2个根。

- 为检验特征多项式的其他根，用特征多项式除以辅助多项式，得：

$$\frac{q(s)}{s^2+3}=s^3+s^2+s+21$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 对新的多项式，建立*Routh*阵列：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 1 & 21 \\
s^1 & -20 & 0 \\
s^0 & 21 & 0
\end{array}
$$

- 首列元素出现2次变号，说明系统特征多项式还有两个根位于右半*S*平面，因而系统不稳定的。
- 计算可得，位于右半平面的根为：

$s=+1\pm j\sqrt{6}$

6.2　Routh-Hurwitz稳定性判据

- **例6.5**　焊接控制

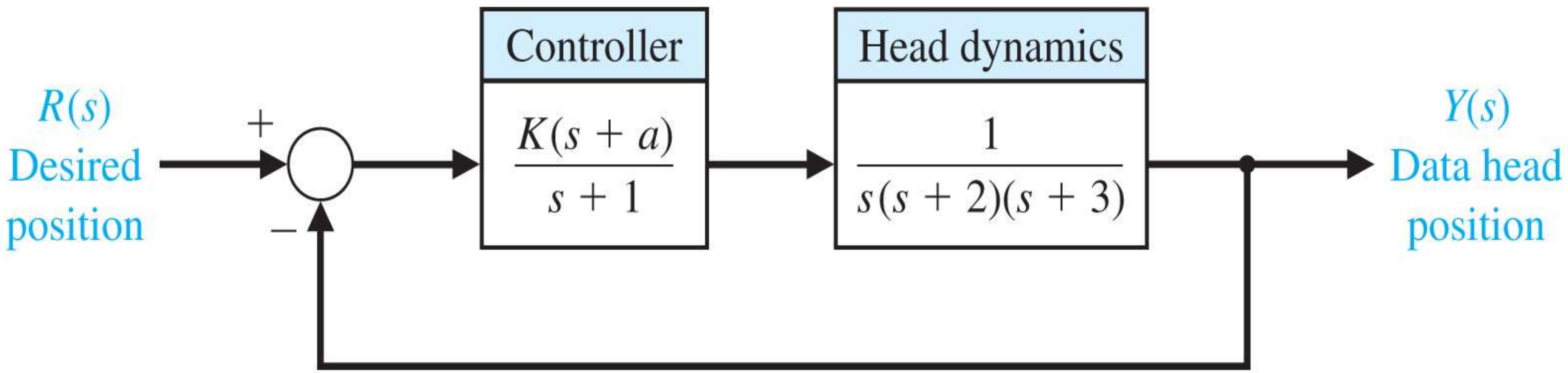
焊接机器人在汽车厂广泛应用，焊接头定位系统需要快速、精确的响应

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➢ 确定使系统稳定的*K*和*a*的范围。系统特征方程：

$$1+G(s)=1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=0$$

$$q(S)=S(S+1)(S+1)(S+1)+K(S+a)$$
$$=S^4+6S^3+11S^2+(K+6)S+Ka$$
$$=0$$



6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & Ka \\ s^3 & 6 & K+6 & \\ s^2 & b_3 & Ka & \\ s^1 & c_3 & & \\ s^0 & Ka & & \end{array}$$

$$b_3 = -\frac{(K+6) - 6\times 11}{6} = -\frac{K-60}{6}$$

$$c_3 = -\frac{6Ka - b_3(K+6)}{b_3}$$

$b_3>0$ → $K<60$

$c_3>0$ → $(K-60)(K+6)+36Ka<0$

$Ka>0$ → $K>0$，$a>0$（$K<0$，$a<0$正反馈，舍弃）

$0<K<60$

$$0 < a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K}$$

如果**$K=40$**，则**$0<a<0.639$**

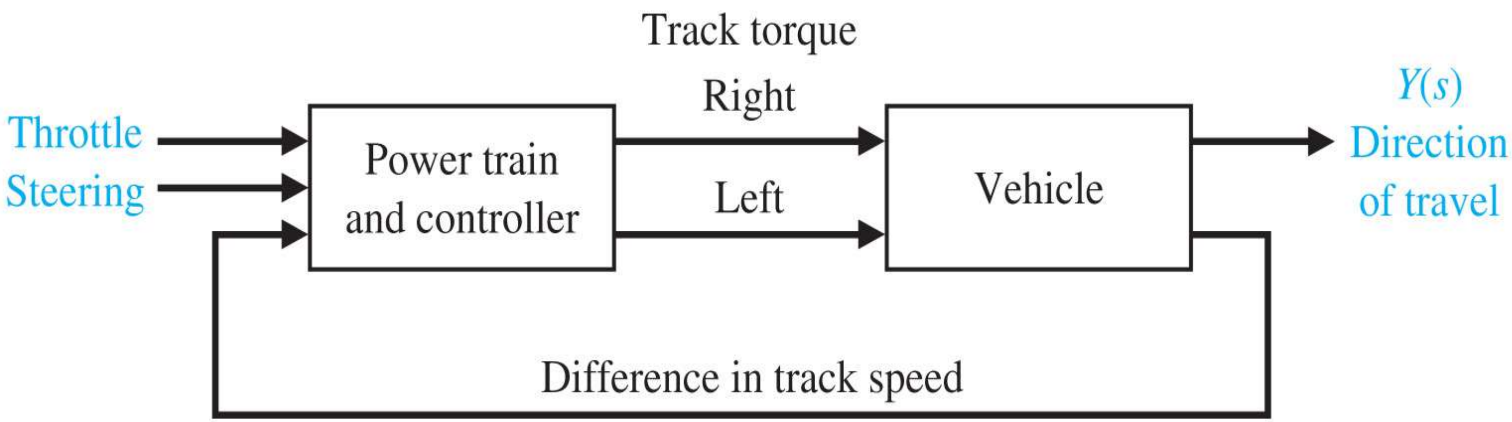
6.3 反馈控制系统相对稳定性(略)

6.4　状态变量系统的稳定性(略)

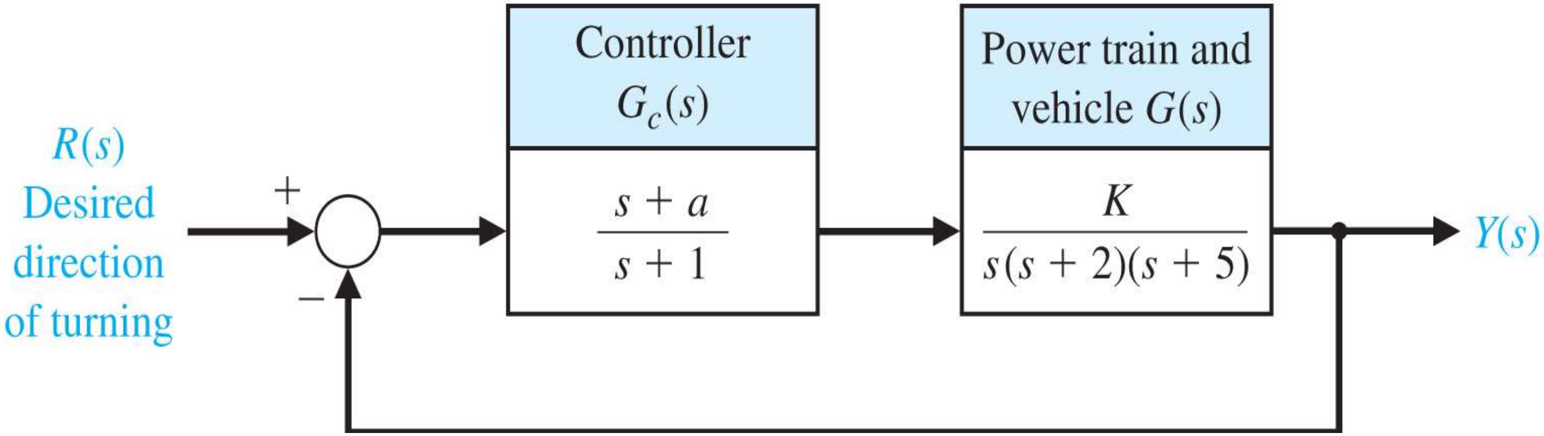
6.5 设计实例

➢ 例6.10　履带车转弯控制

转弯时，履带车的两组履带以不同速度运行



双履带车转弯控制系统



方框图

6.5 设计实例

- 设计目标：选择参数K和a使系统稳定，对斜坡输入的稳态误差小于或等于指令幅度的24%

- 反馈系统特征方程：

$$1+G_cG(s)=0$$

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+5)},\quad G_c(s)=\frac{s+a}{s+1}$$

$$1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=0$$

$$S(S+1)(S+2)(S+5)+K(S+a)=0$$

$$S^4+8S^3+17S^2+(K+10)S+Ka=0$$

6.5 设计实例

➢ ***Routh*阵列：**

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 17 & Ka \\
s^3 & 8 & K+10 & 0 \\
s^2 & b_3 & Ka & \\
s^1 & c_3 & & \\
s^0 & Ka & &
\end{array}
$$

$$b_3=-\frac{(K+10)-8\times17}{8}=-\frac{K-126}{8}$$

$$c_3=-\frac{8Ka-b_3(K+10)}{b_3}$$

➢ 要求系统闭环稳定，则首列元素不变号，有：

$$\boldsymbol{b_3>0 \quad \rightarrow \quad K<126}$$

$$\boldsymbol{c_3>0 \quad \rightarrow \quad (K+10)(K-126)+64Ka<0}$$

$$\boldsymbol{Ka>0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} K>0\text{、}a>0 \\ K<0\text{、}a<0\text{（系统正反馈，舍弃）} \end{cases}}$$

6.5 设计实例

$$\begin{cases} 0 < K < 126 \\ 0 < a < \dfrac{(K+10)(126-K)}{64K} \end{cases}$$

➢ 对斜坡输入$\boldsymbol{r(t)=At}$，$\boldsymbol{t>0}$，系统稳态误差为：

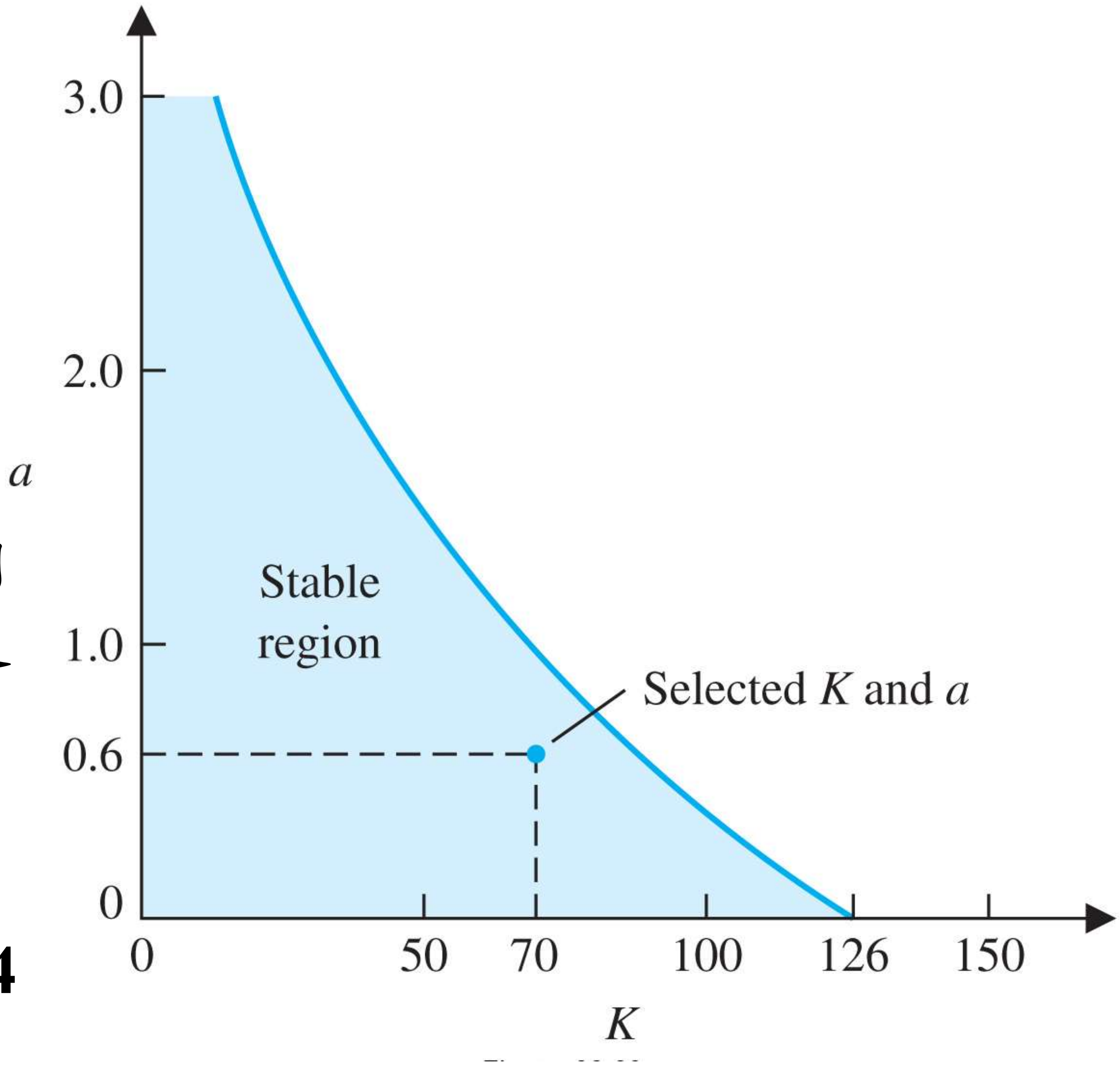
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_cG = \lim_{s\to 0} s\frac{s+a}{s+1}\frac{K}{s(s+2)(s+5)} = \frac{Ka}{10}$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{10A}{Ka} \le 24\%A \quad \Rightarrow \quad Ka \ge 41.67$$

若取：$\boldsymbol{Ka=42}$

有：$\boldsymbol{e_{SS}=23.8\%A<24\%A}$

6.5　设计实例



在稳定区域内有一系列满足 Ka=42的参数组合，如：

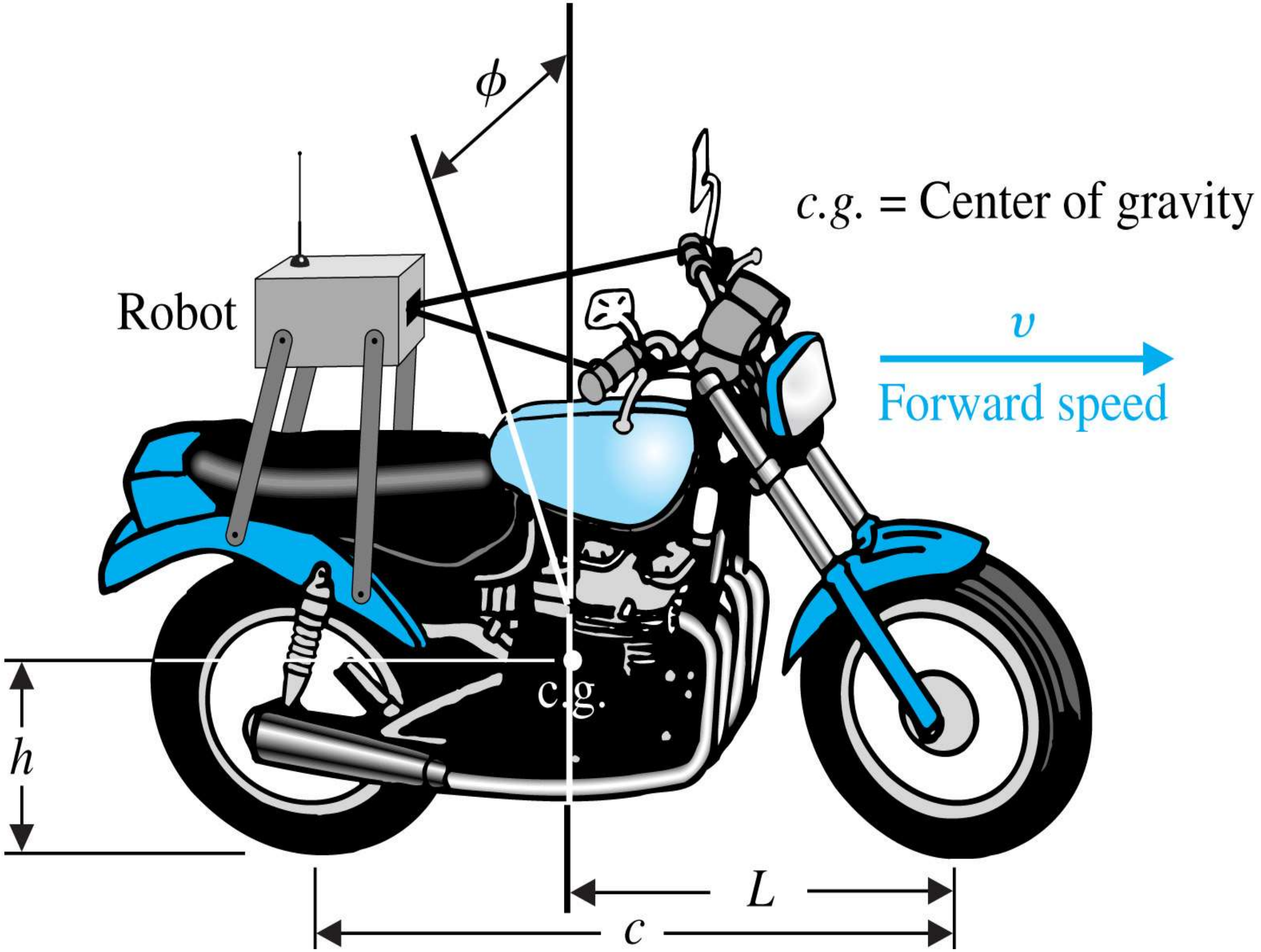
K=70、a=0.6

K=50、a=0.84

6.5 设计实例

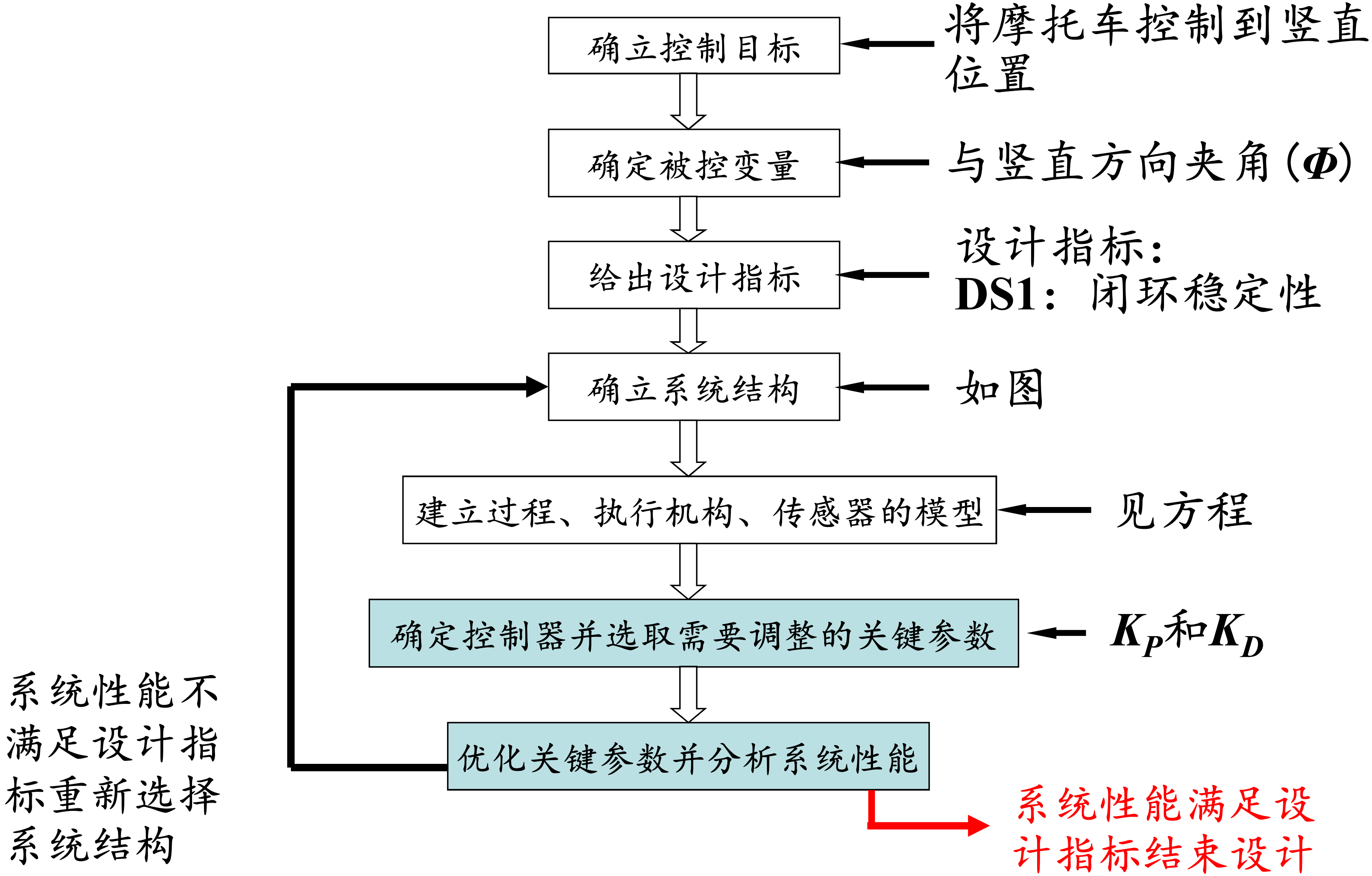
- **例6.11** 机器人控制的摩托车

摩托车以恒定的前进速度v直线运动，$\boldsymbol{\Phi}$表示摩托车对称面与竖直方向的夹角，期望角度为0º



6.5 设计实例

➢ 机器人控制的摩托车控制系统设计过程中的要素



6.5　设计实例

- **控制目标**：将摩托车控制在竖直位置，出现扰动时保持规定位置
- **被控变量**：摩托车位置与竖直方向的夹角Φ
- **设计指标**：**DS1**：闭环系统必须稳定
- **系统结构**：摩托车、机器人、控制器、反馈测量元件
- **系统模型**：
  - 摩托车模型：

$$G(s)=\frac{1}{s^2-\alpha_1},\quad \text{极点} s=\pm\sqrt{\alpha_1},\quad \alpha_1=\frac{g}{h}, g=9.8\mathrm{m/s^2}$$

- h是摩托车重心距地面高度，摩托车不稳定

6.5 设计实例

■ 机器人控制器模型：

$$G_c(s)=\frac{\alpha_2+\alpha_3 s}{\tau s+1}$$

$$\alpha_2=\frac{v^2}{hc},\quad \alpha_3=\frac{vL}{hc}$$

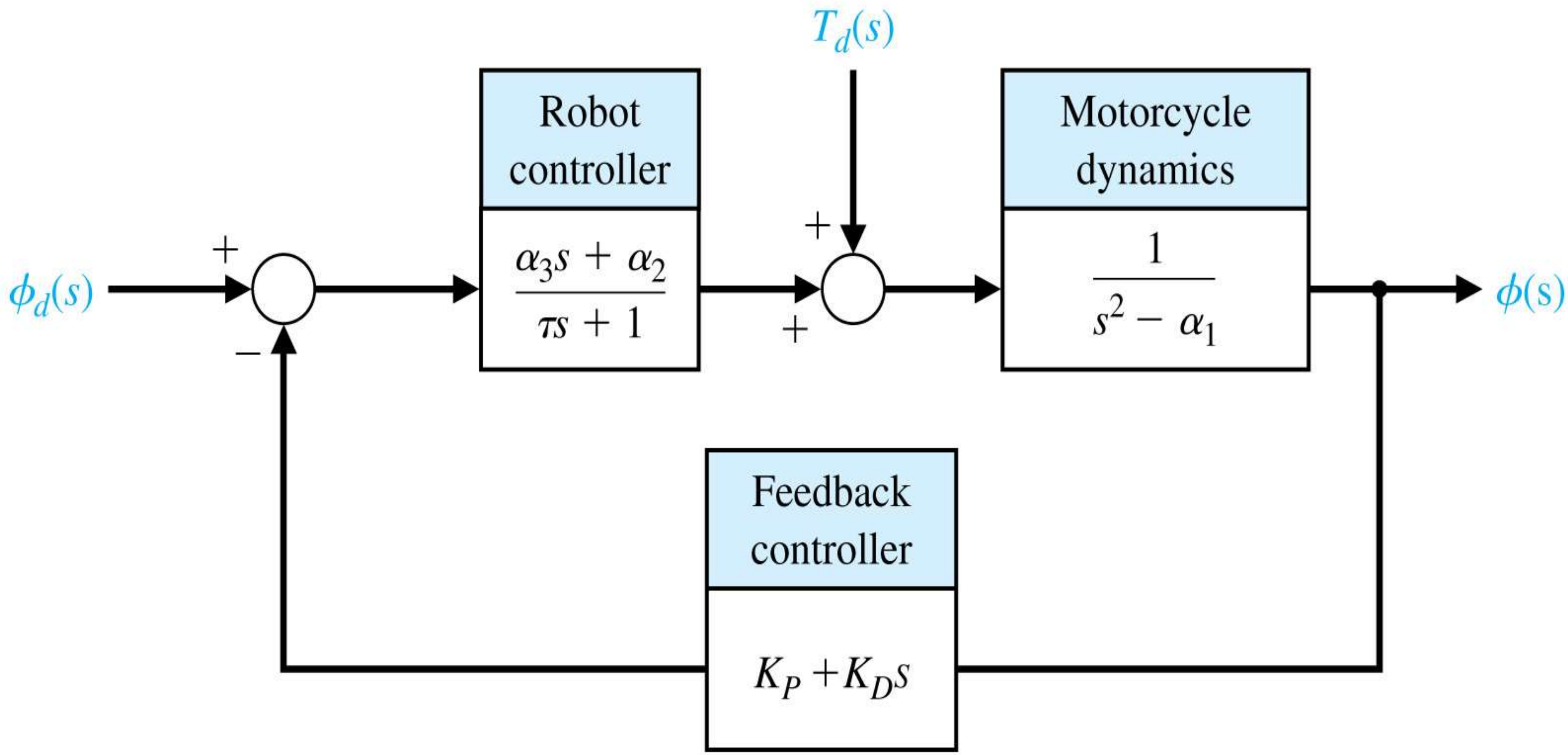
v：摩托车前进速度；

c：前后轮的轴距；

L：前轮轮轴与摩托车重心之间的水平距离；

τ：机器人控制器的时间常数，它代表机器人控制器的响应速度，τ越小响应速度越快

6.5 设计实例



机器人控制摩托车反馈控制系统方框图

6.5 设计实例

- 选择关键调整参数：反馈增益K_P和K_D
- 采用*Routh-Hurwitz*判据分析闭环系统稳定性
- 闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)}$$

$$= \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{q(s)}$$

$$q(S) = \tau S^3 + (1 + K_D\alpha_3)S^2 + (K_D\alpha_2 + K_P\alpha_3 - \tau\alpha_1)S + K_P\alpha_2 - \alpha_1$$

$$= 0$$

6.5 设计实例

物理参数	
τ	0.2 s
α_1	9 $1/s^2$
α_2	2.7 $1/s^2$
α_3	1.35 $1/s$
h	1.09 m
v	2.0 m/s
L	1.0 m
c	1.36 m

6.5 设计实例

*Routh*阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & \tau & K_D\alpha_2+K_P\alpha_3-\tau\alpha_1 \\ s^2 & 1+K_D\alpha_3 & K_P\alpha_2-\alpha_1 \\ s^1 & a & \\ s^0 & K_P\alpha_2-\alpha_1 & \end{array}$$

$$a=-\frac{\tau\left(K_P\alpha_2-\alpha_1\right)-\left(K_D\alpha_2+K_P\alpha_3-\tau\alpha_1\right)\left(1+K_D\alpha_3\right)}{1+K_D\alpha_3}$$

➢ 系统稳定，要求首列元素不变号，因为$\boldsymbol{\tau}$**>0**，有：

$$K_D>-\frac{1}{\alpha_3}=-0.74$$

$$a>0$$

$$K_P>\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=3.33$$

6.5 设计实例

➢ 选择：

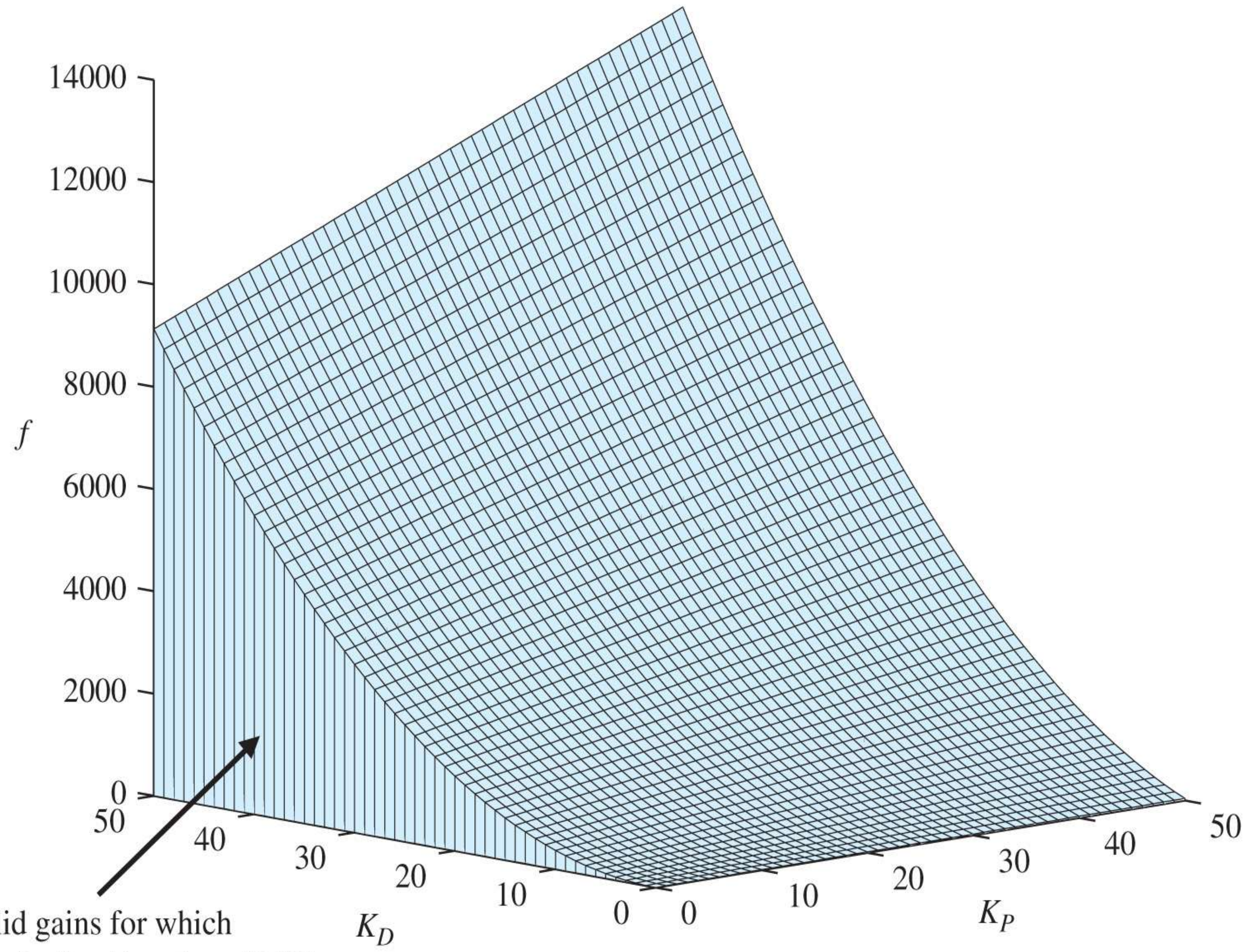
$$\begin{cases} K_P > 3.33 \\ K_D > 0 > -\dfrac{1}{\alpha_3} = -0.74 \\ \alpha_2\alpha_3K_D^2 + \left(\alpha_2 - \tau\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2K_P\right)K_D + \left(\alpha_3 - \tau\alpha_2\right)K_P = f > 0 \end{cases}$$

➢ 选择$\boldsymbol{K_P}$**=10**、$\boldsymbol{K_D}$**=5**时，闭环系统稳定，闭环极点：

$$\boldsymbol{S_1 = -35.2477}$$

$$\boldsymbol{S_2 = -2.4674}$$

$$\boldsymbol{S_3 = -1.0348}$$



Valid gains for which
$f > 0$. See Equation. (6.33).

6.5　设计实例

- 希望有外部扰动时机器人控制的摩托车保持竖直。从扰动$T_d(s)$到输出$\Phi(s)$的开环传递函数：

$$\frac{\phi(s)}{T_d(s)}=\frac{1}{s^2-\alpha_1}$$

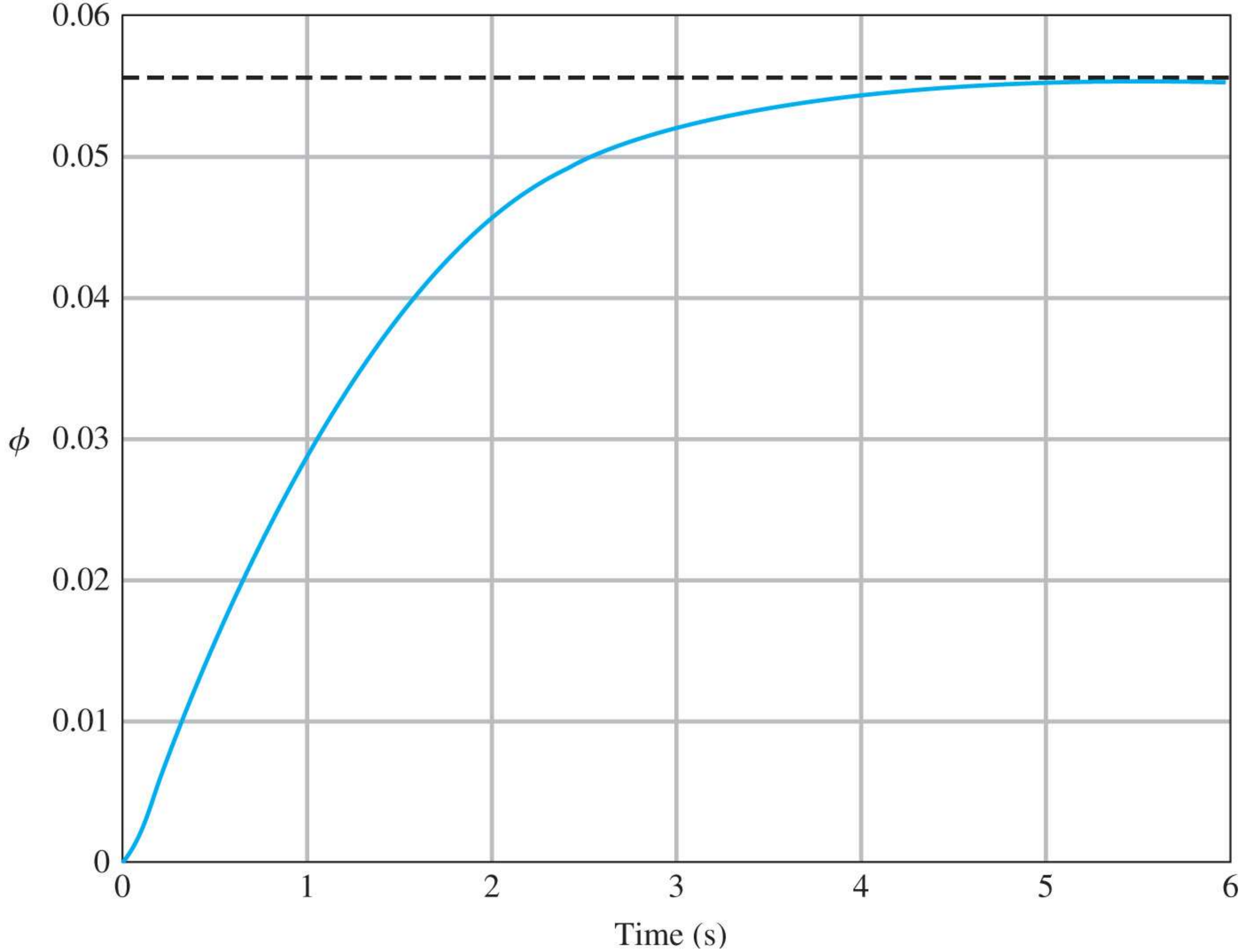
特征方程：$q(s)=s^2-\alpha_1=0$

系统极点：$s_1=-\sqrt{\alpha_1}$，$s_2=+\sqrt{\alpha_1}$

- 存在右半**S**平面极点，系统开环不稳定，任何一点扰动都会使摩托车跌倒
- 采用反馈控制器、机器人控制器，从扰动到输出的闭环传递函数为：

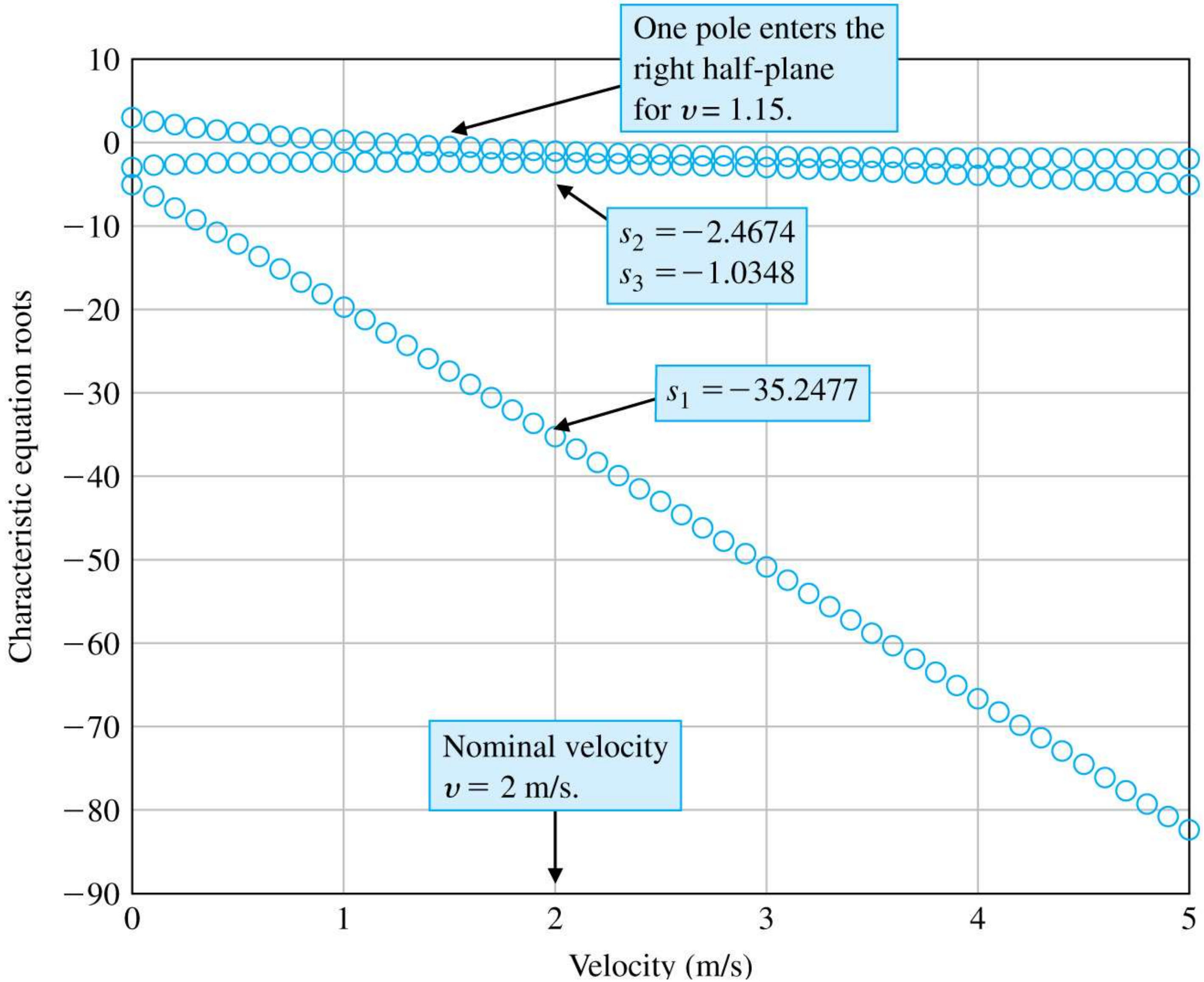
$$\frac{\phi(s)}{T_d(s)}=\frac{\tau s+1}{\tau s^3+(1+K_D\alpha_3)s^2+(K_D\alpha_2+K_P\alpha_3-\tau\alpha_1)s+K_P\alpha_2-\alpha_1}$$

6.5 设计实例



单位阶跃扰动响应，K_P=10，K_D=5

摩托车保持竖直，略有倾斜，Φ=0.055 *rad*=3.18°



K_P**=10**、K_D**=5**时特征方程的根随前进速度v的变化

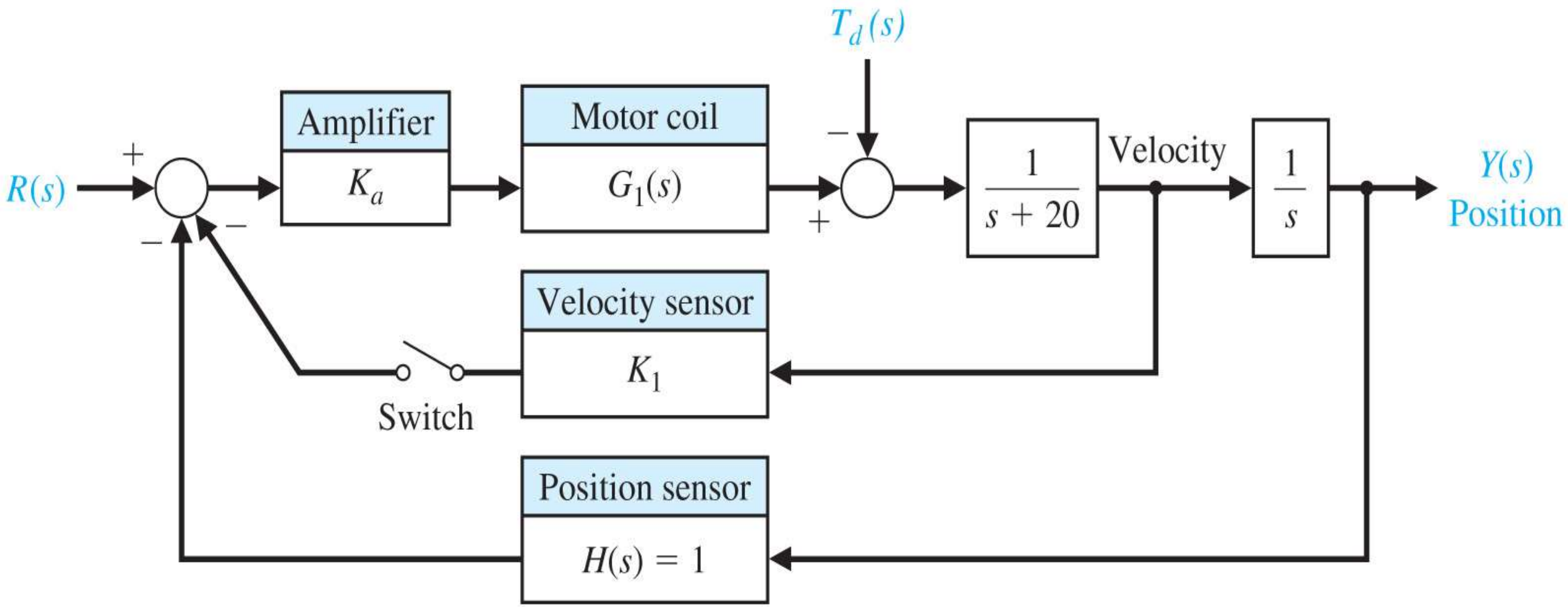
速度增大相对稳定性增加，速度减小稳定性变差

v **=1.15** m/s时，出现一个不稳定根，摩托车不稳定

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性（略）

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

带有可选择的速度反馈的闭环磁盘驱动器读取系统



➢ 没有速度反馈时的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)}$$

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

$$G_1(s)=\frac{5000}{s+1000},\quad G_2(s)=\frac{1}{s(s+20)}$$

- 闭环系统特征方程：

$$1+K_aG_1(S)G_2(S)=0$$

$$1+K_a\frac{5000}{s+1000}\times\frac{1}{s(s+20)}=0$$

$$S(S+20)(S+1000)+5000K_a=0$$

$$S^3+1020S^2+20000S+5000K_a=0$$

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

- ***Routh*阵列：**

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 20000 \\
s^2 & 1020 & 5000K_a \\
s^1 & b_1 & \\
s^0 & 5000K_a &
\end{array}
\qquad
b_1 = -\frac{5000K_a - 1020\times 20000}{1020}
$$

- 闭环系统稳定的条件。为保证闭环稳定，要求：

  $b_1>0 \rightarrow K_a<4080$

  $K_a>0$

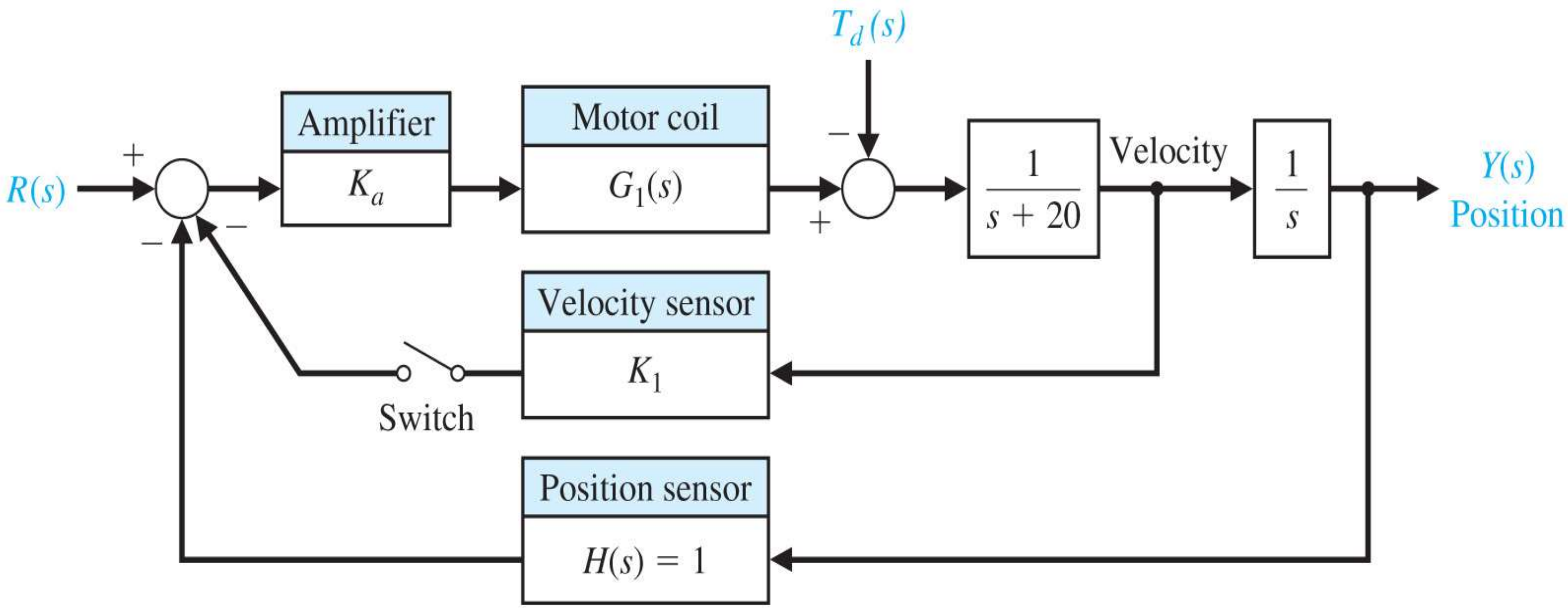
  因而要求：$0<K_a<4080$

- $K_a=4080$时，$b_1=0$，系统临界稳定。由辅助方程：

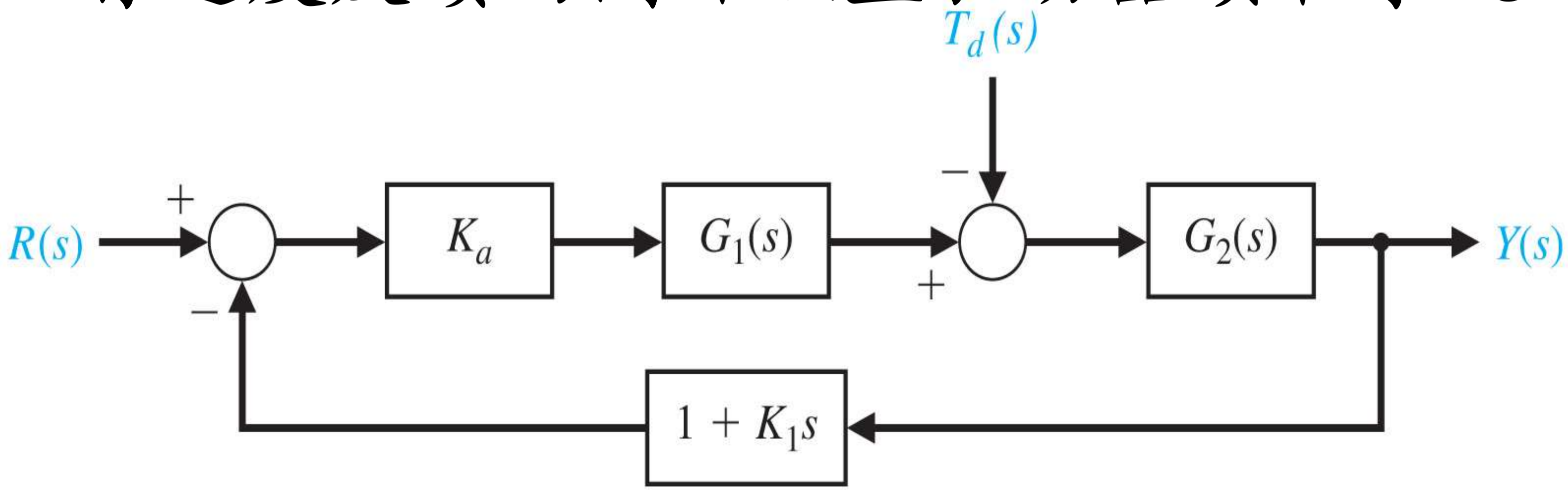
  $1020S^2+5000(4080)=0$，得：$S^2+20000=0$

- 系统在虚轴上有极点$S=\pm j141.4$

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统



有速度反馈的闭环磁盘驱动器读取系统



速度反馈开关闭合时的等价系统

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

- 有速度反馈时的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)H'(s)}$$

- 等价的反馈通道传递函数：$H'(S)=1+K_1S$

- 闭环系统特征方程：$1+K_aG_1(S)G_2(S)H'(S)=0$

$$1+K_a\times\frac{5000}{s+1000}\times\frac{1}{s(s+20)}\times(1+K_1s)=0$$

$$S(S+20)(S+1000)+5000K_a(1+K_1S)=0$$

$$S^3+1020S^2+(20000+5000K_aK_1)S+5000K_a=0$$

6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➢ ***Routh*阵列：**

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 20000+5000K_aK_1 \\
s^2 & 1020 & 5000K_a \\
s^1 & b_1 & \\
s^0 & 5000K_a &
\end{array}
$$

$$b_1=-\frac{5000K_a-\ 1020\times\left(20000+5000K_aK_1\right)}{1020}$$

➢ 为保证闭环系统稳定，要求：

$$\begin{cases} b_1>0 & \Rightarrow \quad K_a\left(1-1020K_1\right)<4080 \\ K_a>0 & \end{cases}$$

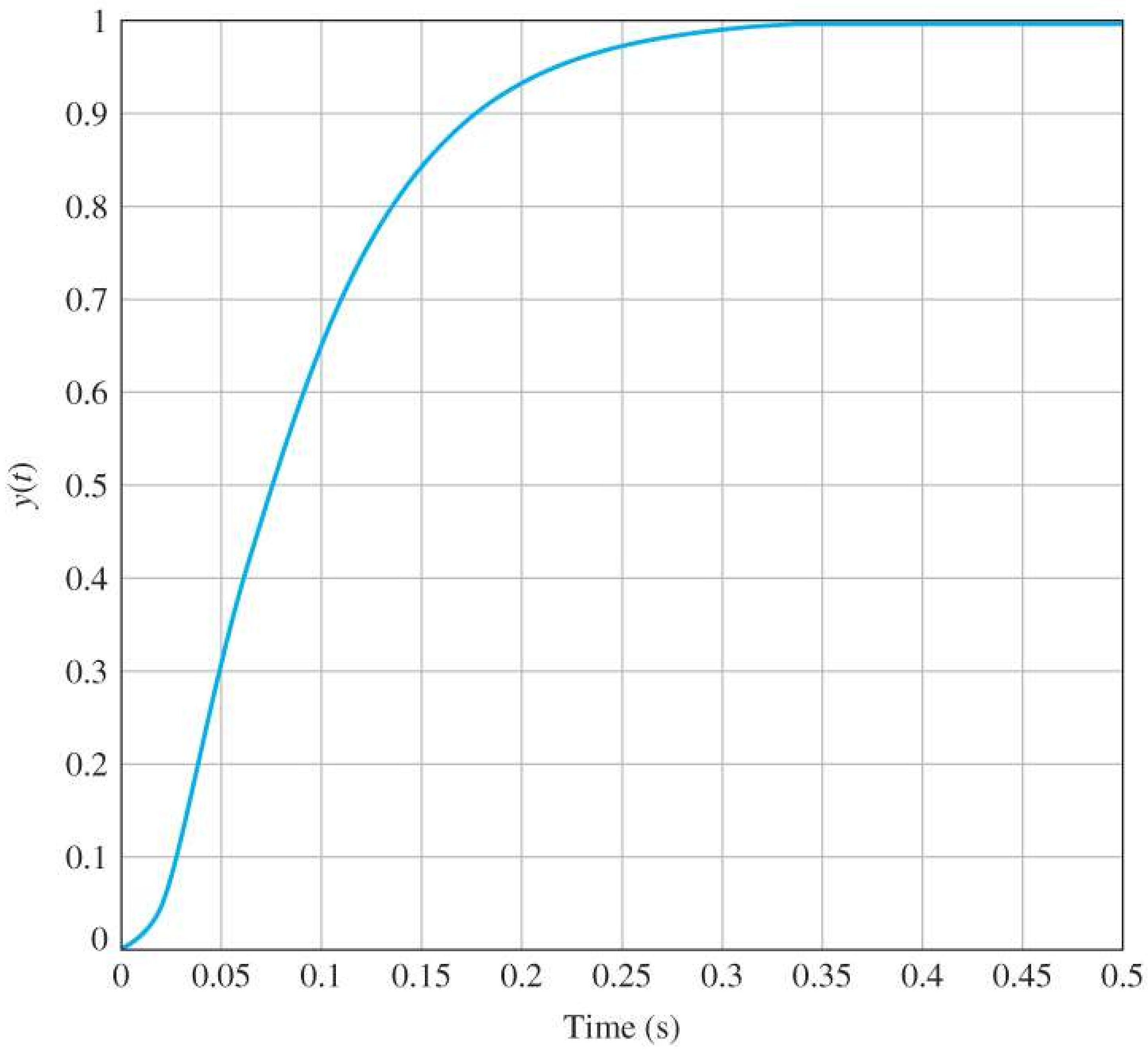
6.7系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

- 在$K_a>0$时，选择K_a、K_1，使$b_1>0$
- 选$K_a=100$，$K_1=0.05$，则系统性能指标为：
  - 百分比超调量0%
  - 2%允许误差的调整时间260 *ms*

性能指标	期望值	实际值
百分比超调量	<5%	0%
调整时间	<250 *ms*	260 *ms*
单位扰动的最大响应	5×10^3	2×10^3

磁盘驱动器系统性能与设计指标的对比

- 需要重新选择K_1以满足调整时间



有速度反馈的系统响应：K_a=100、K_1=0.05

6.8 总结

- 反馈控制系统稳定性
- 有界输入有界输出（**BIBO**）稳定性
- **BIBO**稳定性与系统传递函数极点在***S***平面上位置的关系
- ***Routh-Hurwitz***稳定性判据
- 相对稳定性

THE END