



达朗伯原理: 用静力学的力系平衡条件来处理动力学问题

前面我们通过引入假想的惯性力,可以在非惯性系中研究对象的动力学,这里将特别研究在非惯性系中相对静止的物体。

考查质量为m之质点的动力学方程

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}$$

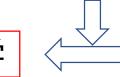
其中F为主动力,N为被动力(约束力), 定义惯性力

$$S = -ma$$

则有力系平衡方程

$$F + N + S = 0$$

惯性力



静力学





对于由n个质点组成的质点系,其达朗伯原理为

$$F_k + N_k + S_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n$$

这里 $S_k = -m_k a_k$ 是第k个质点的惯性力。注意,这里达朗伯引入的惯性力,不能在同一的非惯性坐标架中描述,可称之为**达朗伯惯性力**。

对于一般刚体运动,可通过质点系力平衡方程相加和力矩平衡方程相加,消除内力影响只留下外约束力,刚体达朗伯原理表示为

$$oldsymbol{R}_F + oldsymbol{R}_N + oldsymbol{R}_S = oldsymbol{0}$$
 $oldsymbol{L}_{FO} + oldsymbol{L}_{NO} + oldsymbol{L}_{SO} = oldsymbol{0}$

其中惯性力主矢和惯性力主矩分别为

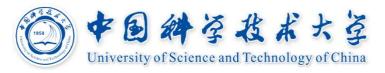
$$oldsymbol{R}_S = -rac{\mathrm{d}oldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \quad oldsymbol{L}_{SO} = -rac{\mathrm{d}oldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}$$

这里0为固定点(取矩)

动量变化率

动量矩变化率





而对质心C取矩的刚体运动达朗伯原理为

$$oldsymbol{R}_F + oldsymbol{R}_N + oldsymbol{R}_S = oldsymbol{0}$$
 $oldsymbol{L}_{FC} + oldsymbol{L}_{NC} + oldsymbol{L}_{SC} = oldsymbol{0}$

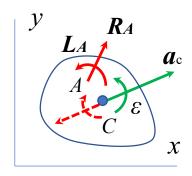
这里惯性力主矢和惯性力主矩分别为

$$oldsymbol{R}_S = -Moldsymbol{a}_c, \quad oldsymbol{L}_{SC} = -rac{\mathrm{d}oldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t} = -rac{\widetilde{\mathrm{d}}oldsymbol{H}_c}{\mathrm{d}t} - oldsymbol{\omega} imes oldsymbol{H}_c$$

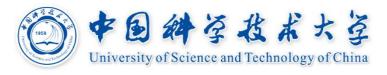
特别地,平面运动刚体的惯性力主矢和惯性力主矩分别为

$$oldsymbol{R}_S = -Moldsymbol{a}_c = -M(\ddot{x}_c \ \ddot{y}_c \ 0), \quad oldsymbol{L}_{SC} = -(0 \ 0 \ J_c arepsilon)^T$$

其中 $\varepsilon = \dot{\omega}$ 为角加速度







考查三维空间作一般运动的刚体,如果刚体所受的外力(包括主动力与被动力)在点A简化成主矢 R_A 与主矩 L_A ,在质心C处有惯性力 R_S 和惯性力矩 L_SC ,则"平衡方程"为

$$\left\{ egin{aligned} oldsymbol{R}_A + oldsymbol{R}_S &= oldsymbol{0} \ \overrightarrow{CA} imes oldsymbol{R}_A + oldsymbol{L}_A + oldsymbol{L}_{SC} &= oldsymbol{0} \end{aligned}
ight.$$

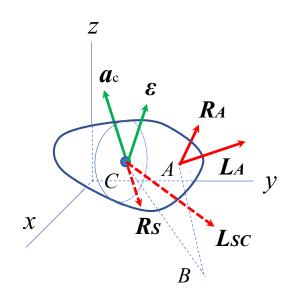
其中力矩方程是对质心C取矩的

如果对另一点B取矩,将有

$$\overrightarrow{BA} \times \mathbf{R}_A + \overrightarrow{BC} \times \mathbf{R}_S + \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_{SC}$$

$$= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \times \mathbf{R}_A + \overrightarrow{BC} \times \mathbf{R}_S + \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_{SC}$$

$$= \overrightarrow{BC} \times (\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_S) + \overrightarrow{CA} \times \mathbf{R}_A + \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_{SC} = \mathbf{0}$$



可见对"平衡"力系来说,对任一点B取矩与对质心C取矩是等价的,这与我们之前的认知是一致的。所以将动力学问题转化为静力学问题在取矩点上是方便的。