对于含有约束的多刚体静力学或动力学问题，如果采用前面矢量力学方法来处理，就会面临需求解的方程数多、未知量多的复杂局面。实际上有些约束力不必求出、也不需列出所有的力学方程。这时候采用分析力学的方法会有很大优势。

矢量力学 ⇨ 分析力学

我们先讨论约束问题。考查三维空间中含有n个质点、k个约束的质点系，它需$3n$-k个独立变量去刻画质点系的状态，即其自由度数为$m=3n-k$个。记第i个质点的位置矢径

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}(x_i \quad y_i \quad z_i)^T, \quad i=1,2,\ldots,n$$

通常约束方程可以表示为下面几种情形

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0,\quad j=1,\ldots,k$$

定常、完整、双面

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,z_n,t)=0 \Longrightarrow$$ 非定常（显含时间t）

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,\dot{x}_l,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0 \Longrightarrow$$ 非完整（含不可积速度约束）

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,z_n,t)\leqslant 0\ (\geqslant 0) \Longrightarrow$$ 单面（不等式约束）

以后除非特别指明，均假定约束是双面的。对于含有n个质点、k个约束的质点系，其自由度数为m=3n-k个，原则上可以通过求解约束代数方程（完整、双面约束），最后归结为可用m个独立变量去刻画它的瞬时状态，这些独立变量记作**广义坐标** $q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)^T$，质点系每一质点的位置可表示为

$$x_i=x_i(q_1,q_2,\ldots,q_m,t),\ y_i=y_i(q_1,q_2,\ldots,q_m,t),\ z_i=z_i(q_1,q_2,\ldots,q_m,t)$$

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_m,t),\quad i=1,2,\ldots,n$$

考查约束所容许的“无限小”位移

$$f_j(\dots,x_i,y_i,z_i,\dots,t)=0$$

$$f_j(\dots,x_i+\triangle x_i,y_i+\triangle y_i,z_i+\triangle z_i,\dots,t+\triangle t)=0$$

利用Taylor展开，保留线性主部（略去高阶小量），得到微分形式

$$\frac{\partial f_j}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right)=0$$

考虑“时间凝固”的位移增量（**等时变分**）

$$\mathrm{d}t\ \Rightarrow\ 0,\quad (\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i)\ \Rightarrow\ (\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

其中

$(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i)$　　满足约束条件的位移微分

$(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$　　满足约束条件的位移等时变分

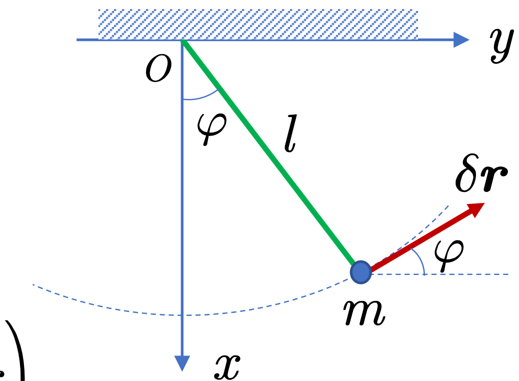
如果约束是定常的，位移微分与位移等时变分是一致的。通常真实运动产生的位移称为**实位移**，它既满足动力学微分方程和初始条件，又满足约束方程，"无限小"的实位移常记成位移**微分**；仅满足约束方程的位移称为约束**容许位移**，在同一时刻两个"无限小"容许位移之差可称为**虚位移**，实际上就是位移**等时变分**。"微分"与"变分"看起来很相似，变分具有类似的微分规则，但变分基本上是工程技术研究人员引入的概念。

由独立广义坐标的变分（虚位移）引起位置矢径的增量（变分）

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\ldots, q_l + \delta q_l, \ldots, t) - \boldsymbol{r}_i(\ldots, q_l, \ldots, t)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \underbrace{O(\|\delta q\|^2)}_{\to 0} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

例10.1 单摆



圆周运动，只有一个自由度，摆锤坐标满足约束方程

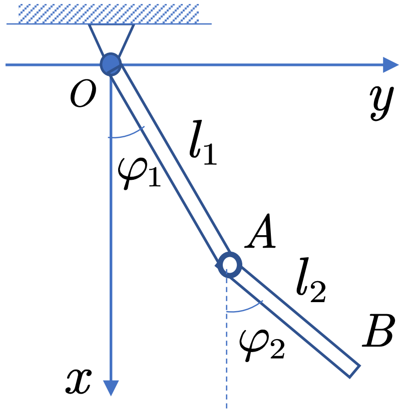
$$f(x,y)=x^2+y^2-l^2=0$$

作变分、得虚位移条件 $x\delta x+y\delta y=0$

若取x为广义坐标，则虚位移矢量 $\delta\boldsymbol{r}=(\delta x,\delta y)=\left(\delta x,-\dfrac{x}{y}\delta x\right)$

若取φ为广义坐标，则有 $\delta\boldsymbol{r}=\delta(l\cos\varphi,l\sin\varphi)=(-l\sin\varphi,l\cos\varphi)\delta\varphi$

例10.2 二自由度连杆



取两杆对铅垂线的二个偏角为广义坐标，点B的坐标为

$$x_B=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2$$

$$y_B=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2$$

对上式变分，得点B的虚位移为 $\delta x_B=-l_1\delta\varphi_1\sin\varphi_1-l_2\delta\varphi_2\sin\varphi_2$

$$\delta y_B=l_1\delta\varphi_1\cos\varphi_1+l_2\delta\varphi_2\cos\varphi_2$$

现在探讨力在虚位移上做的功。设由n个质点组成的质点系中第i个质点上有作用力F_i，则所有力在相应虚位移上作的元功之和（总虚功）为

$$\delta W=\sum_i \delta W_i=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

用**广义坐标**变分来表示

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j\triangleq\sum_{j=1}^{m}Q_j\delta q_j$$

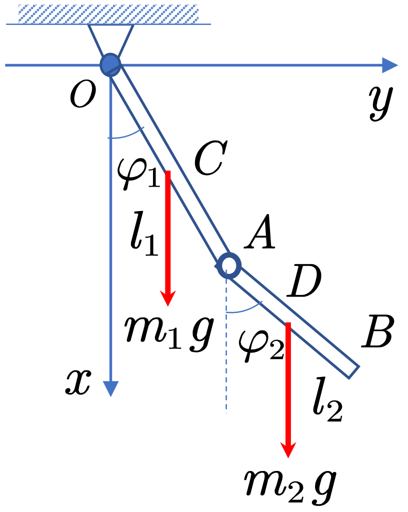
广义力

其中**广义力**为

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},\quad j=1,2,\ldots,m$$

广义力的量纲取决于广义坐标的量纲，广义力乘以广义坐标的量纲总归是功的量纲。

例10.3 对于例10.2的二铰接杆，取铅垂线的二个偏角为广义坐标，求由杆的重力引起的广义力



均质杆的重心C, D的坐标（杆中点）为

$$x_C = (l_1/2)\cos\varphi_1$$

$$y_C = (l_1/2)\sin\varphi_1$$

$$x_D = l_1\cos\varphi_1 + (l_2/2)\cos\varphi_2$$

$$y_D = l_1\sin\varphi_1 + (l_2/2)\sin\varphi_2$$

则可计算虚功

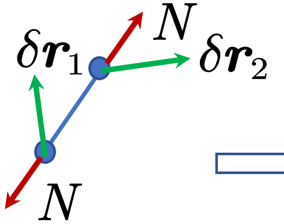
$$\delta W = m_1 g\delta x_C + m_2 g\delta x_D = m_1 g(-(l_1/2)\delta\varphi_1\sin\varphi_1) + m_2 g(-l_1\delta\varphi_1\sin\varphi_1 - (l_2/2)\delta\varphi_2\sin\varphi_2)$$

对应的广义力分别为

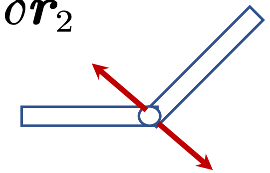
$$Q_1 = -m_1 g\frac{l_1}{2}\sin\varphi_1 - m_2 g l_1\sin\varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g\frac{l_2}{2}\sin\varphi_2$$

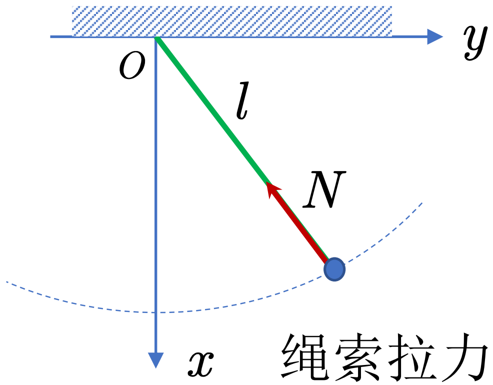
现在考查约束力做功的问题。实际上许多约束力在约束容许位移上不做功，或者因约束力成对出现，做的总功（做功之和）为零。

根据具体问题，可将单面约束作为双面约束处理，如单摆只要不出现摆绳缩短的情形。



刚性约束
（距离不变）


铰链约束



绳索拉力

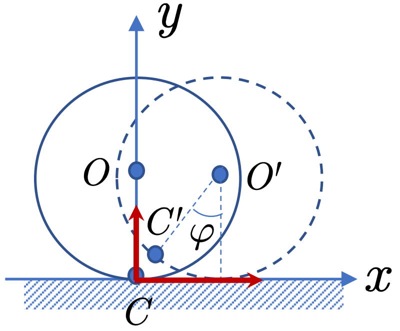
纯滚动（只滚不滑）约束力不做功

半径为R的轮子与地面接触点C的坐标为

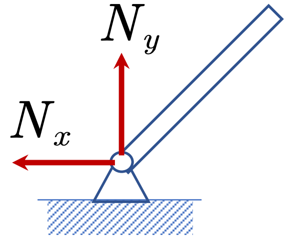
$$\begin{cases} x_C = R\varphi - R\sin\varphi \\ y_C = R - R\cos\varphi \end{cases}$$

其中转角 φ 为广义坐标，求变分

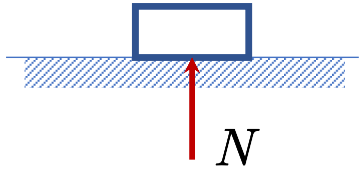
$$\begin{cases} \delta x_C \mid_{\varphi=0} = (1-\cos\varphi)R\delta\varphi \mid_{\varphi=0} = 0 \\ \delta y_C \mid_{\varphi=0} = \sin\varphi R\delta\varphi \mid_{\varphi=0} = 0 \end{cases}$$



纯滚动约束



固定铰链约束



光滑地面支承力

纯滚动约束力总虚功 $\delta W = N_x \cdot \delta x_C + N_y \cdot \delta y_C = 0$

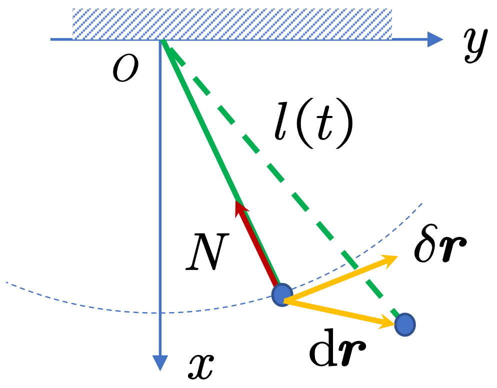
纯滚动时轮地接触点瞬时速度为零（无滑动），轮心位移及速度为

$$x_O = R\varphi,\ v_O = R\omega$$

理想约束：质点系所受的约束力在任意虚位移上做功之和为零，即

$$\sum_i \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

前面提到的光滑铰链约束、光滑地面约束、绳索约束、纯滚动约束都是理想约束。



在定常约束下，实位移也是虚位移之一。对于非定常约束，如变长度单摆，其虚位移（等时变分）保持与拉力垂直，所做虚功为零，而实位移完全可能不与拉力垂直，所做实功不一定为零。变长度单摆约束仍然是理想约束。

虚位移（虚功）原理　具有定常、理想约束的质点系**保持静止**的充要条件是：所有**主动力**在质点系任何虚位移上所做的**总虚功**（虚功之和）**为零**。

证明 必要性：含有n个质点组成的质点系保持静止，满足力系平衡条件

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{0},\quad i=1,2,\ldots,n$$

其中$\boldsymbol{F}_i$为第i个质点上的主动力，而$\boldsymbol{N}_i$为约束力。

上式两边同乘第i个质点上的虚位移，并求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i}_{0}=0$$

由于约束是理想的，即得主动力总虚功为零：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$

充分性：采用反证法，设主动力总虚功为零，但质点系由静止进入运动。这样质点系动能由零增为大于零，即有动能定理

$$\mathrm{d}T=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

其中位移微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 为实位移，因约束是定常的（实际上，若为非定常，只要虚位移能取到实位移即可），实位移可作为虚位移之一，现取变分 $\delta\boldsymbol{r}_i=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$，$i=1,2,\ldots,n$，而理想约束虚功之和为零，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

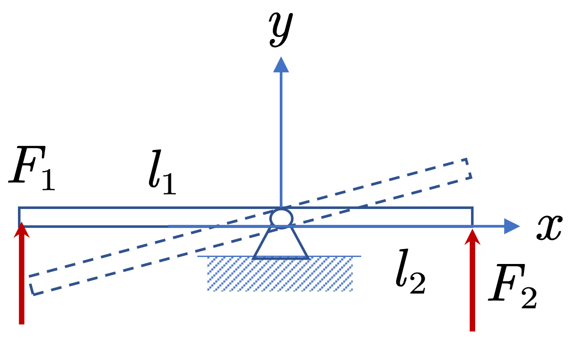
这与主动力虚功之和为零矛盾，得证。

对于定常、完整、理想约束，利用独立广义坐标 $q_1,q_2,\ldots,q_m$ 表述虚位移原理：质点系**保持静止**的条件是**所有广义力为零**

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{m}Q_j\delta q_j\xrightarrow[\delta q_1,\ldots,\delta q_m\text{相互独立}]{\delta W=0}Q_j=0,\ j=1,2,\ldots,m$$

这里“保持静止”是指原先静止并在主动力作用下仍然保持静止，这个条件不可减少，比如光滑地面上一个质点由一绳牵拉做匀速圆周运动（非平衡状态），但总虚功为零。

下面利用虚位移原理解释杠杆原理



考查杠杆在水平位置的平衡，支承点铰链是理想约束，利用虚位移原理

$$\delta W = F_1\delta y_1 + F_2\delta y_2 = 0$$

杠杆具有一个自由度，虚位移在水平位置应满足约束条件

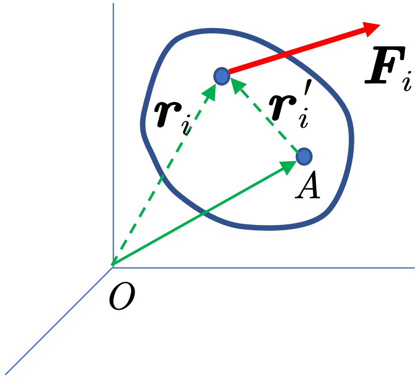
$$\delta y_1/l_1 + \delta y_2/l_2 = 0$$

由此得到熟知的关系

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

由虚位移原理导出刚体平衡方程

刚体作为特殊的质点系，其内力约束为理想约束，设刚体上第i点的主动力与外约束反力的合力为$\boldsymbol{F}_i$，取刚体中某点A为基点，刚体上任一点的“无限小”位移由随基点A的平动和绕基点A的无限小转动合成。刚体为6自由度。



$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_i'$$

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{r}_A + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i'$$

虚功原理给出

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot(\delta\boldsymbol{r}_A + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i') = \left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_A + \left(\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i\right)\cdot\delta\boldsymbol{\varphi} = 0$$

由虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$，$\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的独立性，即得平衡方程 $\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$，$\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$

一个**有势力**（保守力）可以表示为一个标量函数的梯度

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

其中U为**势能函数**

如果质点系中所有主动力均有同一势能函数，则虚功为

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i)$$

$$= -\sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = -\delta U$$

于是有**势能原理**：具有定常、理想约束的质点系在有势力场中保持静止的充要条件是势能函数的一阶变分为零（势能函数取驻值），即 $\delta U = 0$

用广义坐标表示势能函数（完整约束）

$$U=U(q_1,q_2,\dots,q_m)$$

则有 $\delta U=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial U}{\partial q_j}\delta q_j=0 \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial q_j}=0\ \left(Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}\right),\ j=1,2,\dots,m$

于是在有势力场中的虚位移原理（势能原理）可表示为

$$\delta W=0 \iff \delta U=0 \iff \frac{\partial U}{\partial q_j}=0,\ j=1,2,\dots,m$$

有势力场中保持静止（平衡）当且仅当势能取驻值，而**稳定平衡**意味着势能在平衡点取极小值，即在平衡点有

$$\delta U=0,\ \delta^2 U>0$$

这里引入了二阶变分 $\delta^2 U$，而它大于零对应着Hessian矩阵 $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{m\times m}$ 正定。