

信号与图像处理基础

Wavelet Analysis

中国科学技术大学 自动化系

曹 洋





主要内容

1. 小波介绍

1.1 小波简史

1.2 小波概念

1.3 小波分析

1.4 小波定义

2. 哈尔函数

2.1 哈尔基函数

2.2 哈尔小波函数

2.3 函数的规范化

2.4 哈尔基的结构

3. 哈尔小波变换

4. 二维哈尔小波变换

4.1 二维小波变换举例

4.2 二维小波变换方法

5. 图像多分辨率表示

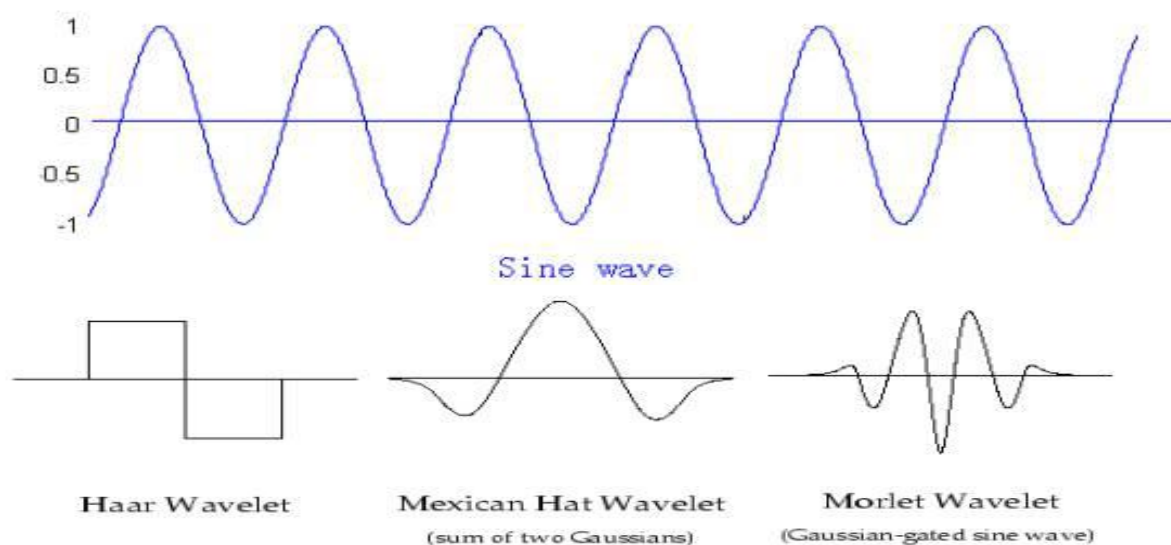
6. 小波变换的多分辨率分析特性

7. 小波变换在图像边缘检测中的应用

8. 小波变换在图像去噪中的应用

1. 小波介绍

- 小波(wavelet)是什么
 - 在有限时间范围内变化且其平均值为零的数学函数
 - 具有有限的持续时间和突变的频率和振幅
 - 在有限的时间范围内，它的平均值等于零



1. 小波介绍(续1)

- 部分小波

- 许多数缩放函数和小波函数以开发者的名字命名，例如，
 - Moret小波函数是Grossmann和Morlet在1984年开发的
 - db6缩放函数和db6小波函数是Daubechies开发的

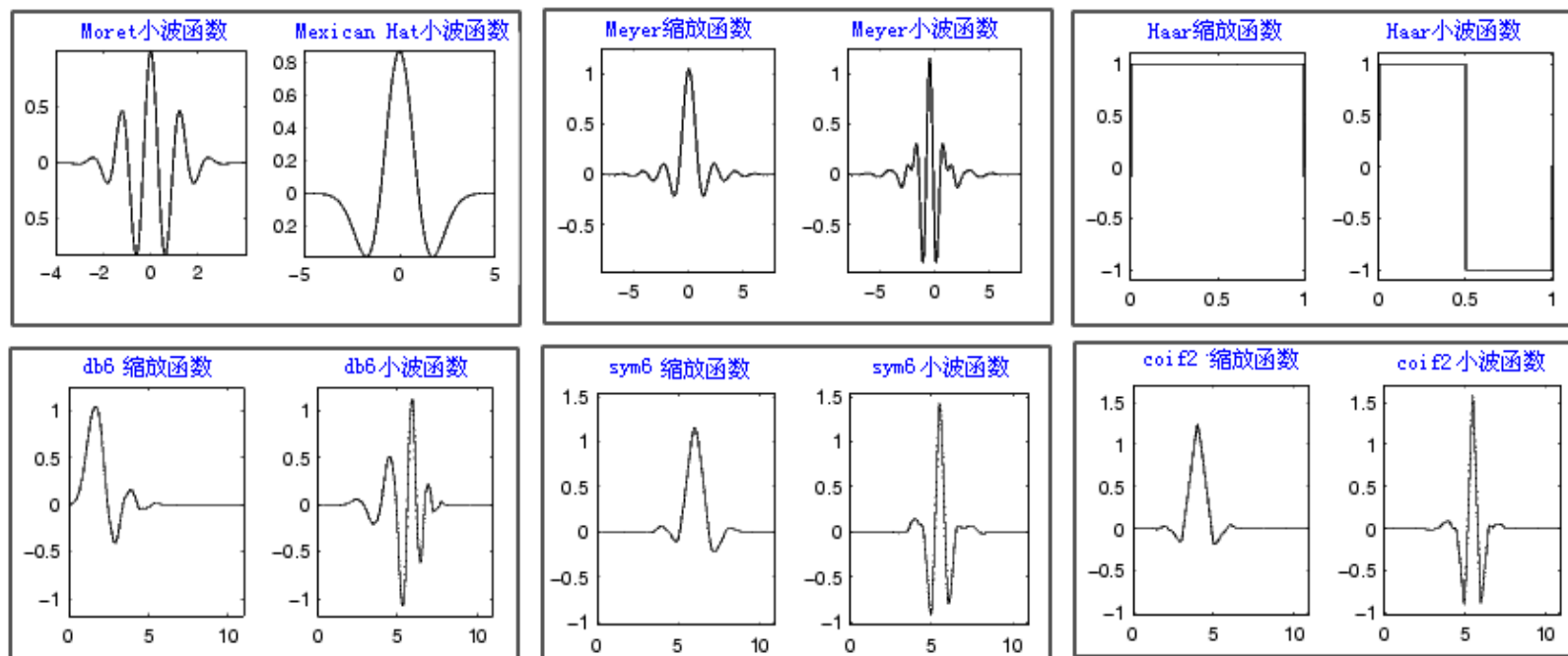
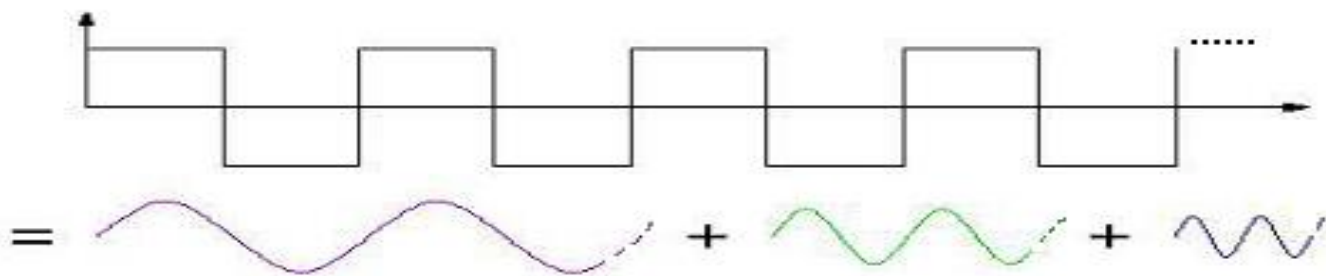


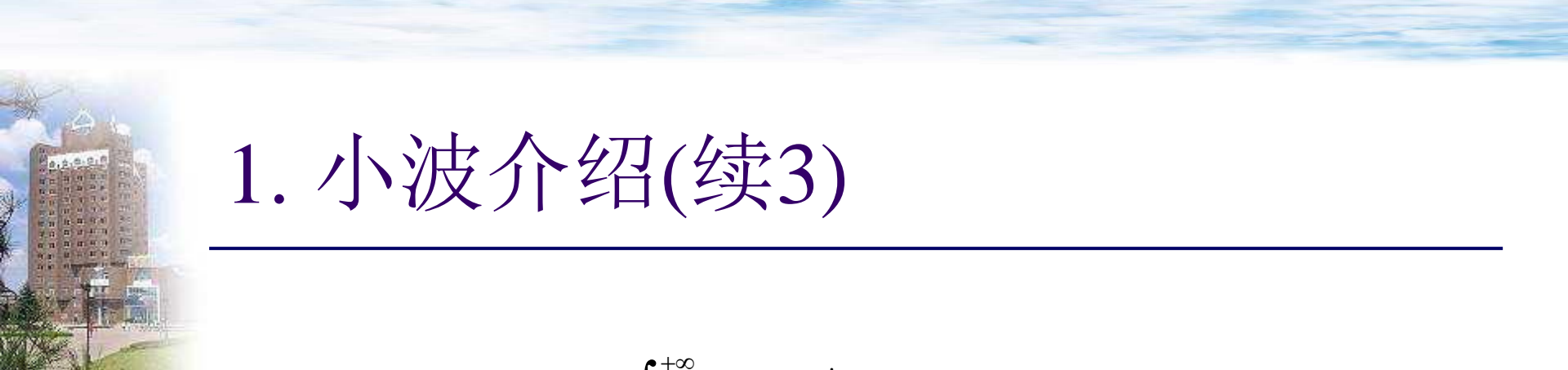
图7-1 正弦波与小波——部分小波

1. 小波介绍(续2)

■ 小波简史

- 小波变换 (wavelet transform) 是什么
 - 老课题：函数的表示方法
 - 新方法：Fourier - Haar - wavelet transform
- 1807: Joseph Fourier
 - 傅立叶理论指出，一个信号可表示成一系列正弦和余弦函数之和，叫做傅立叶展开式





1. 小波介绍(续3)

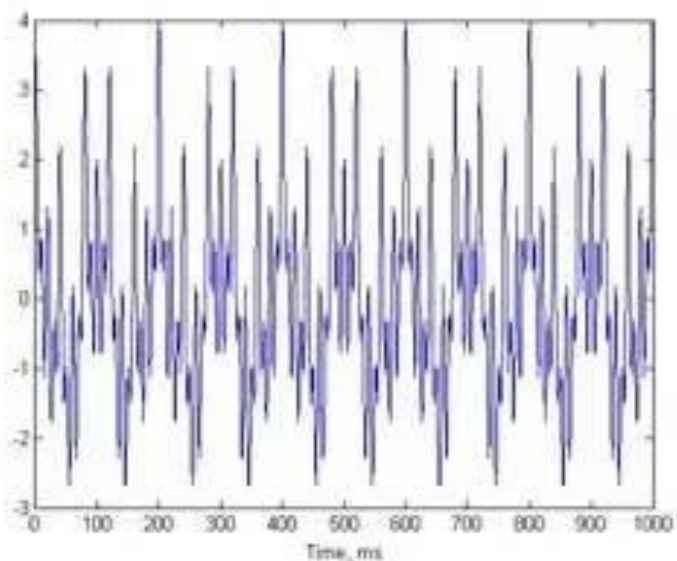
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

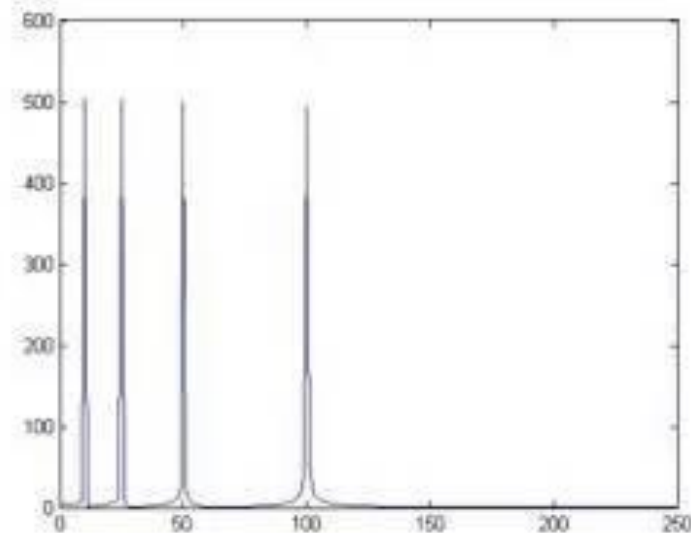
where $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$

- 只有频率分辨率而没有时间分辨率
- 可确定信号中包含哪些频率的信号，但不能确定具有这些频率的信号出现在什么时候
- 丢失了信号的时频域的局部特性，而这正是非平稳信号最重要的性质

1. 小波介绍(续3)



FFT
→



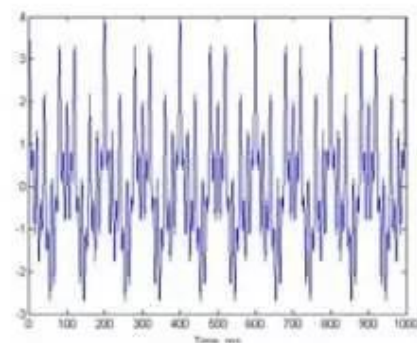
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) + \cos(2\pi \cdot 50t) + \cos(2\pi \cdot 100t)$$

10, 25, 50, 100Hz

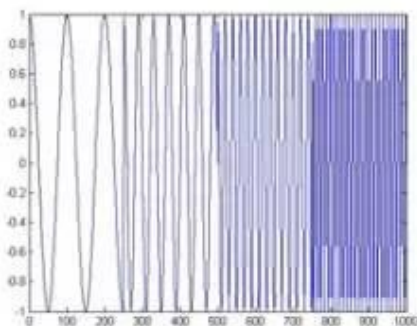
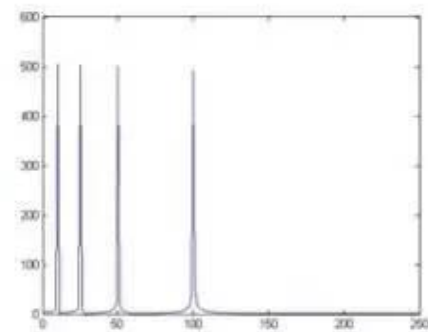
电子工程专辑



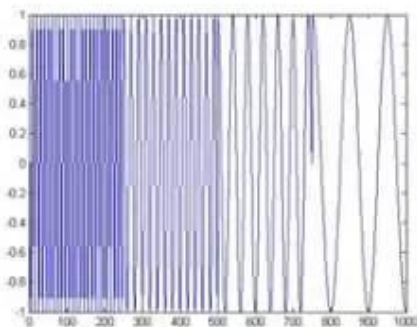
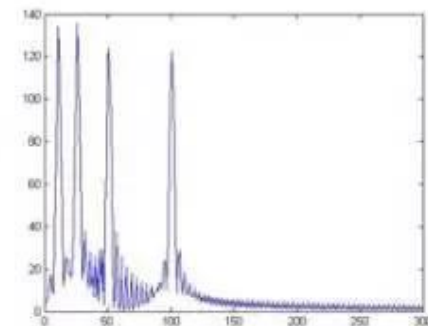
1. 小波介绍(续3)



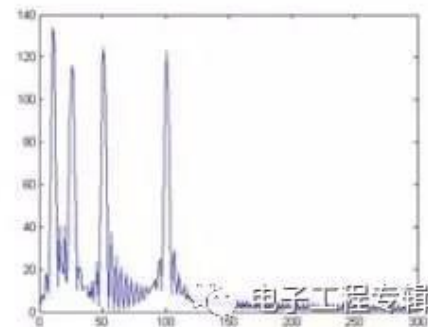
FFT



FFT



FFT



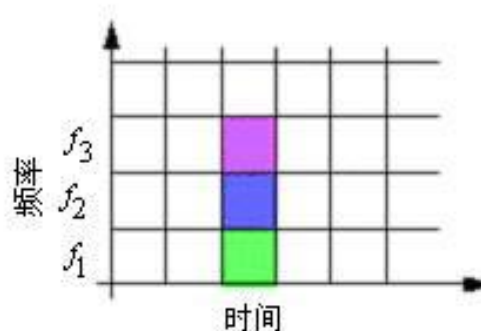
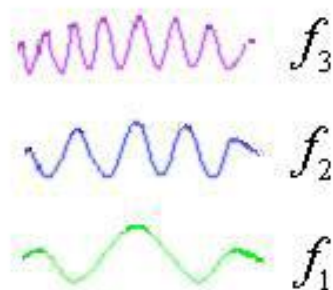
1. 小波介绍(续4)

- 1945: Gabor
 - 开发了STFT (short time Fourier transform)

$$STFT(\tau, \omega) = \int s(t) g(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

where: $s(t)$ = signal

$g(t)$ = windowing function

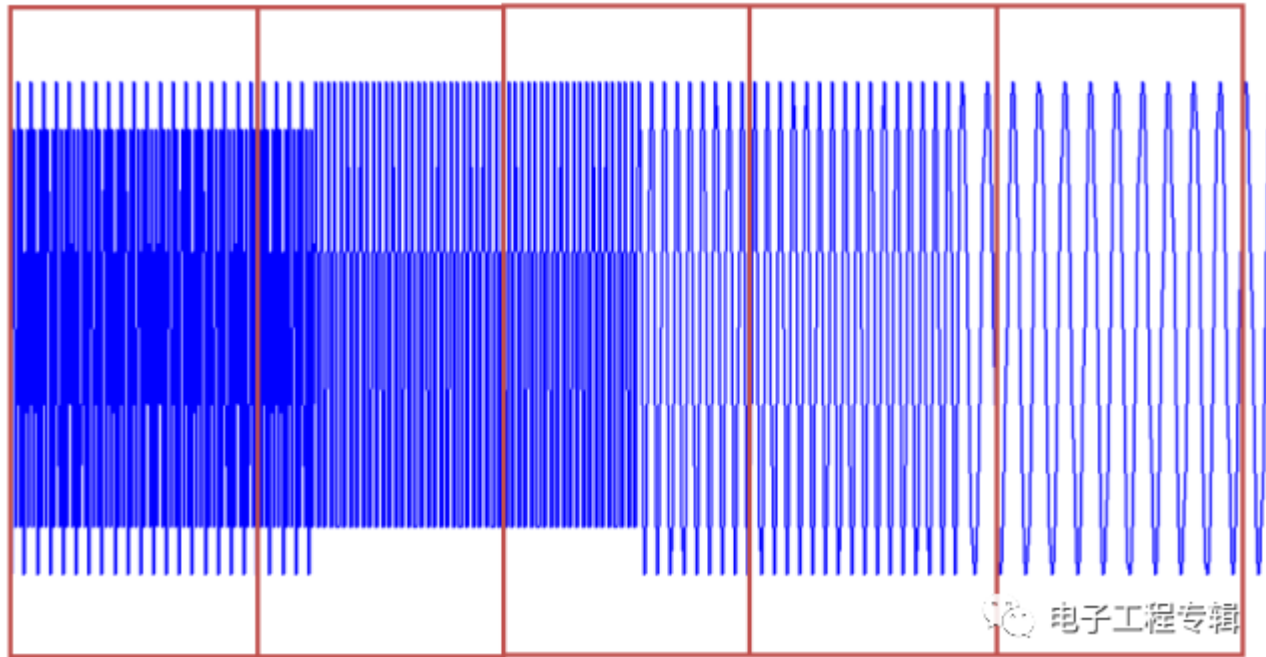


STFT的时间-频率关系图



1. 小波介绍(续4)

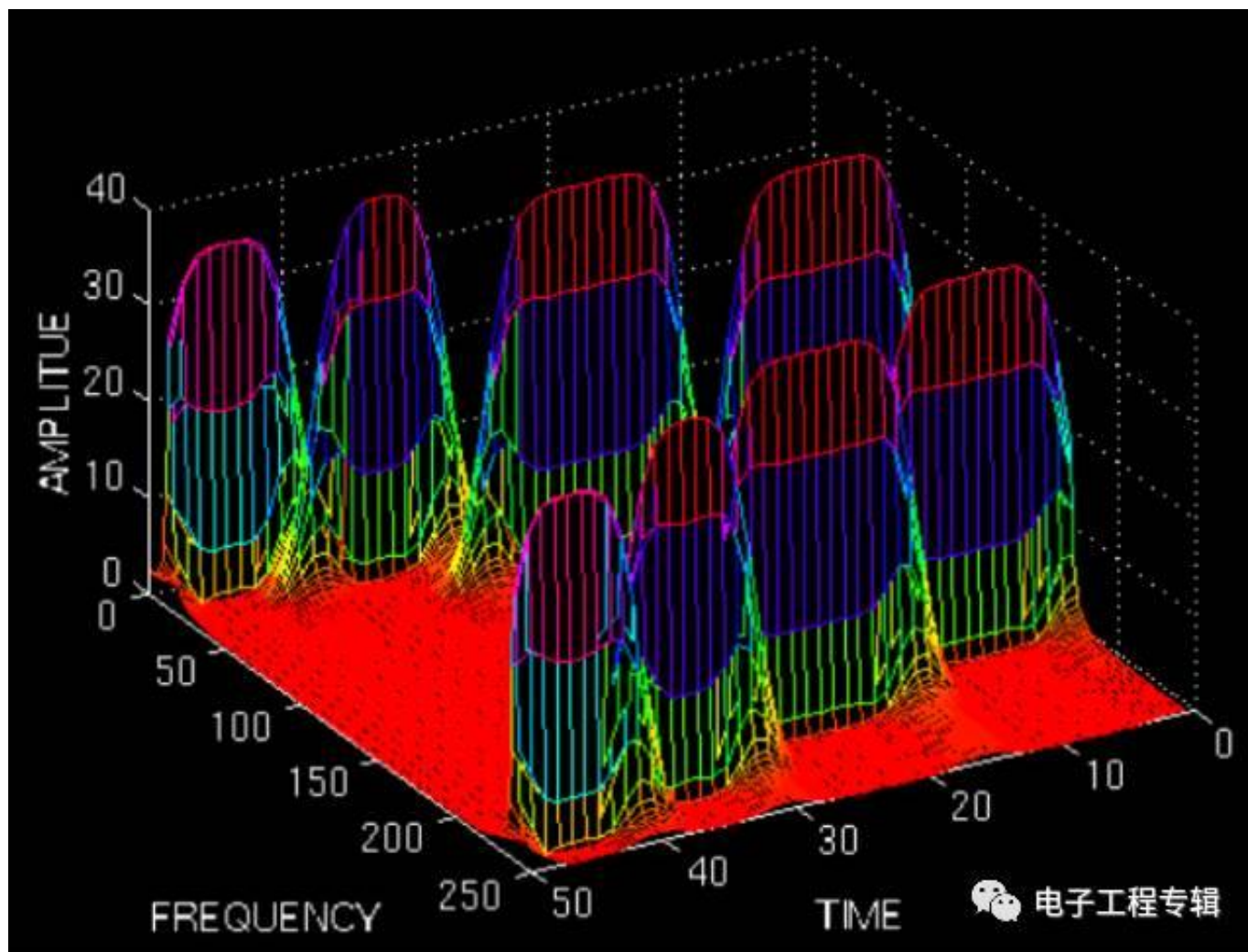
- 1945: Gabor
 - 开发了STFT (short time Fourier transform)





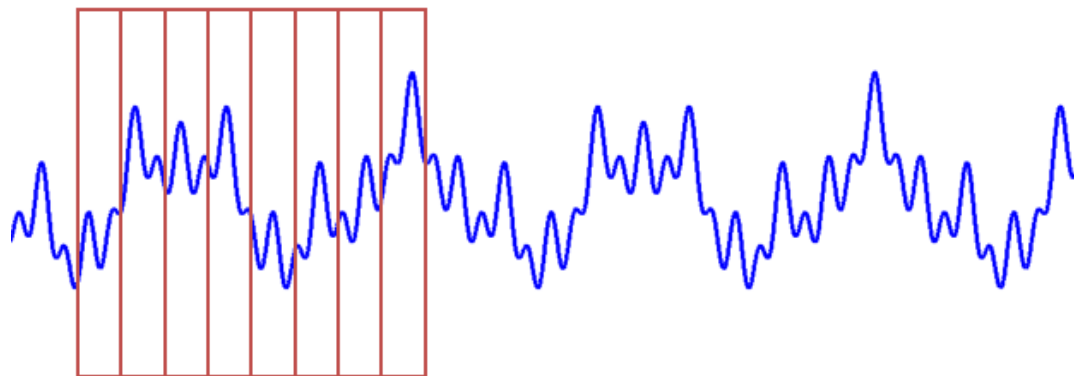
1. 小波介绍(续4)

此图片引自
“小波导论”

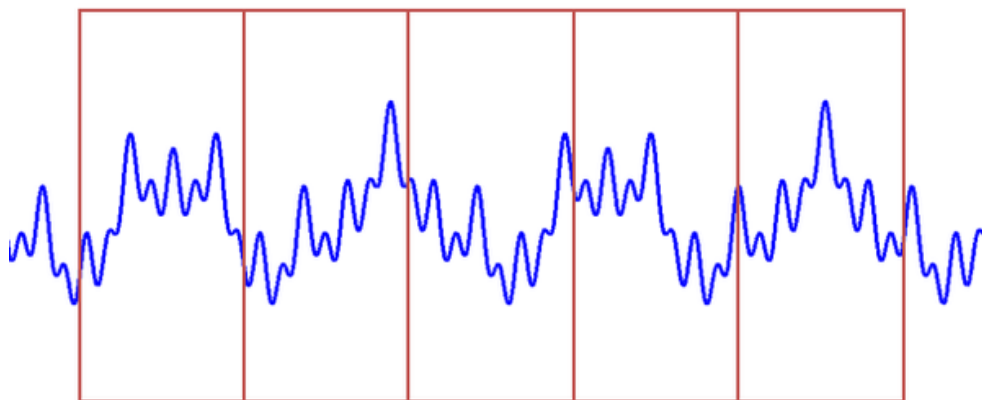




1. 小波分析(续4)



框太窄 → 频率分辨率差



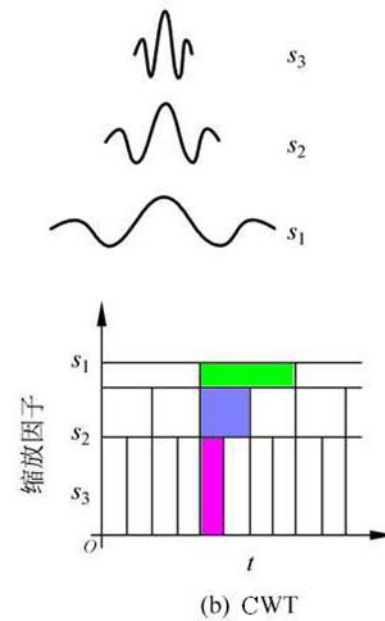
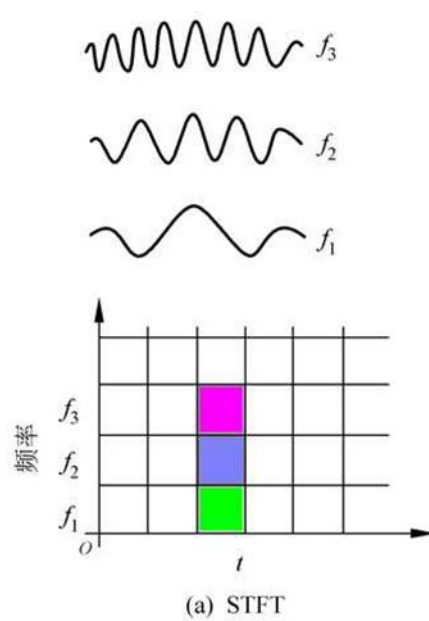
框太宽 → 时间分辨率差

STFT存在一个问题，
我们应该用多宽的窗
函数？



1. 小波分析(续4)

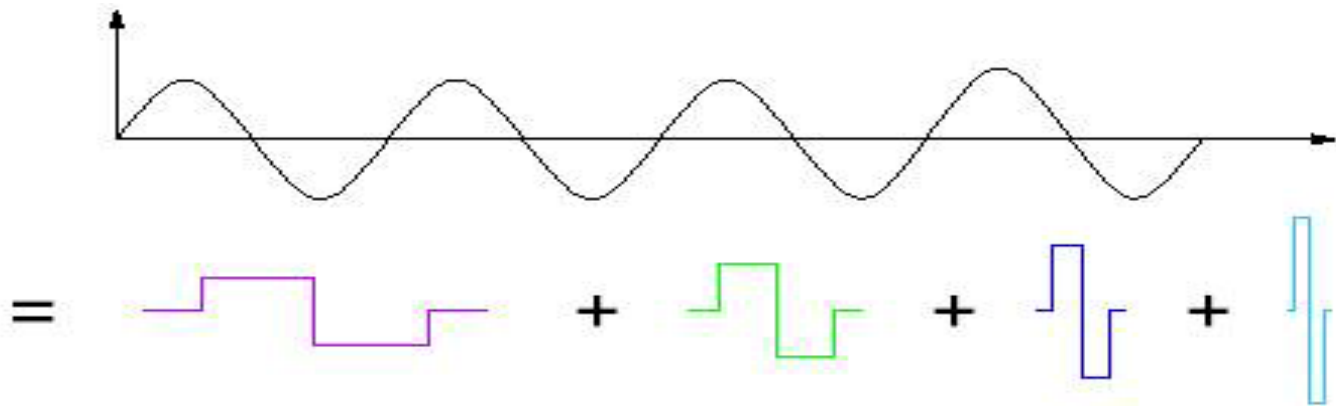
解决方案：
可变窗口





1. 小波介绍(续5)

- 1909: Alfred Haar
 - Alfred Haar对在函数空间中寻找一个与傅立叶类似的基非常感兴趣。1909年他发现并使用了小波，后来被命名为哈尔小波(Haar wavelets)





1. 小波介绍(续6)

- 1980: Morlet
 - 20世纪70年代, 在法国石油公司工作的年轻地球物理学家Jean Morlet提出小波变换 (wavelet transform, WT)的概念。
 - 20世纪80年代, 开发了连续小波变换 (continuous wavelet transform, CWT)
- 1986: Y.Meyer
 - 法国科学家Y.Meyer与其同事创造性地构造出具有一定衰减性的光滑函数, 用于分析函数
 - 用缩放(dilations)与平移(translations)均为 $2^j(j \geq 0$ 的整数)的倍数构造了 $L^2(R)$ 空间的规范正交基, 使小波分析得到发展



1. 小波介绍(续7)

- 1988: Mallat算法
 - 法国科学家Stephane Mallat提出多分辨率概念，从空间上形象说明小波的多分辨率的特性，并提出了正交小波的构造方法和快速算法，称为Mallat算法
 - 该算法统一了在此之前构造正交小波基的所有方法，其地位相当于快速傅立叶变换在经典傅立叶分析中的地位



1. 小波介绍(续8)

- 小波理论与工程应用
 - Inrid Daubechies于1988年最先揭示了小波变换和滤波器组(filter banks)之间的内在关系, 使离散小波分析变成为现实。
 - Ronald Coifman和Victor Wickerhauser等著名科学家在把小波理论引入到工程应用方面做出了极其重要贡献。
 - 在信号处理中, 自从Stephane Mallat和Inrid Daubechies发现滤波器组与小波基函数有密切关系之后, 小波分析在信号(如声音和图像)处理中得到极其广泛的应用, 有着“数字显微镜”的美誉。



1. 小波介绍(续5)

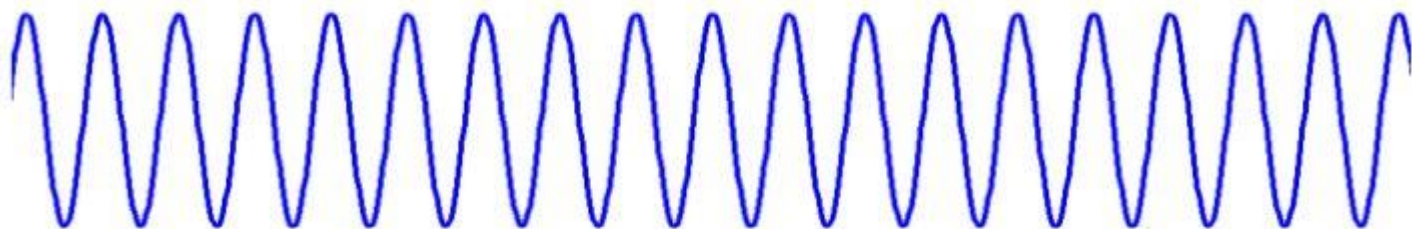
傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-i\omega t} dt$$

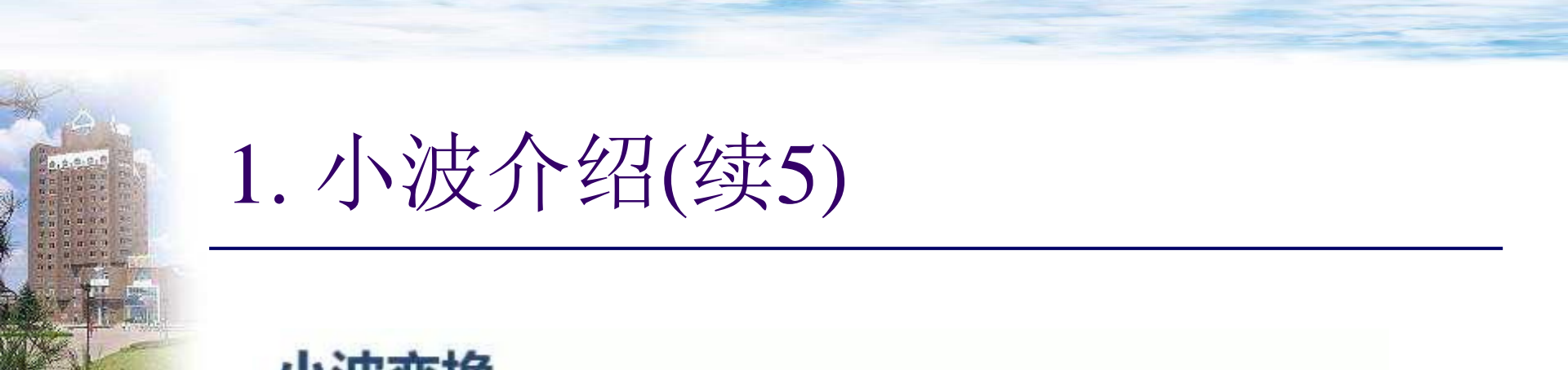
原信号



基函数



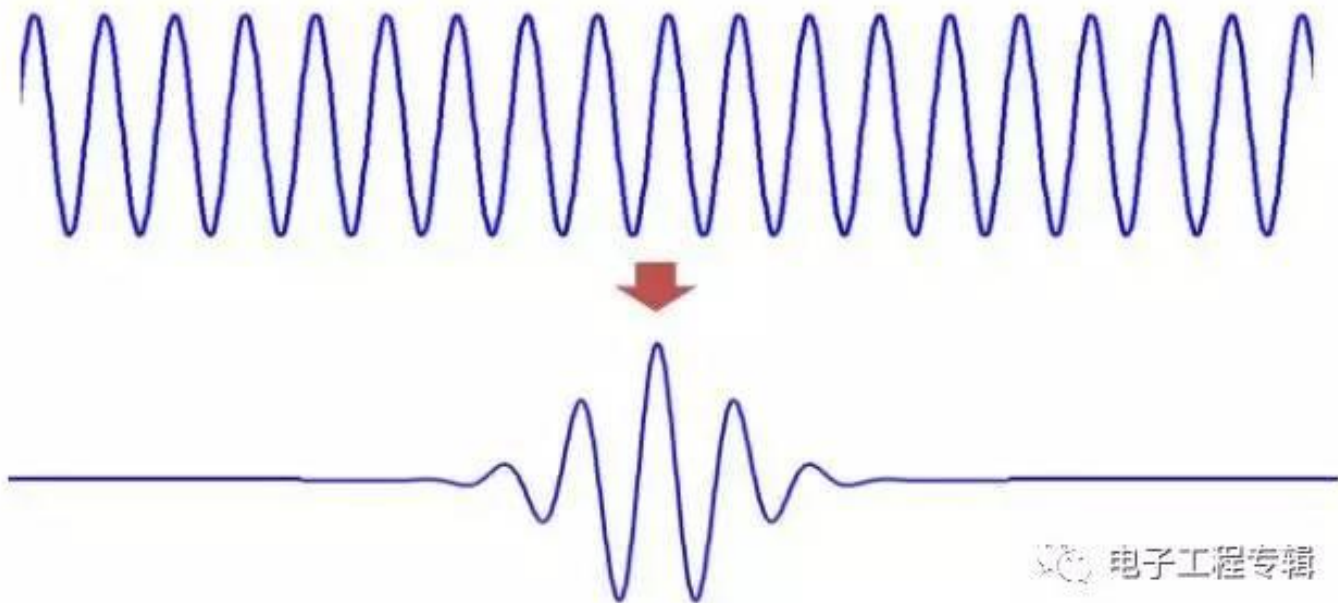
铺满了整个时域



1. 小波介绍(续5)

小波变换

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-iwt} dt \quad \rightarrow \quad WT(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$





1. 小波介绍(续5)

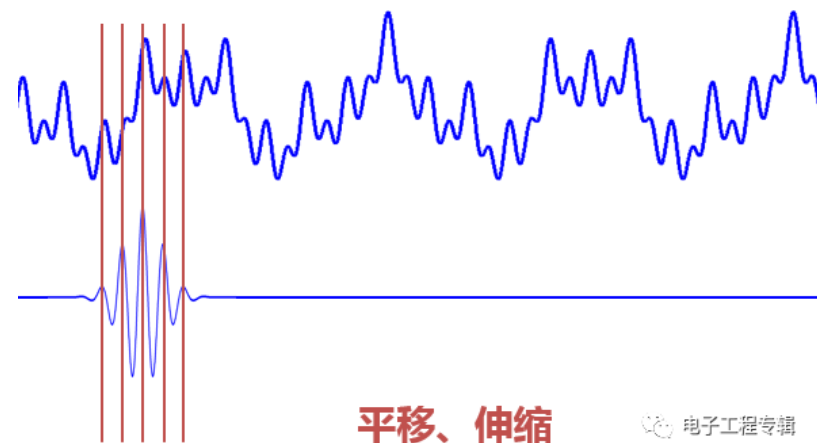
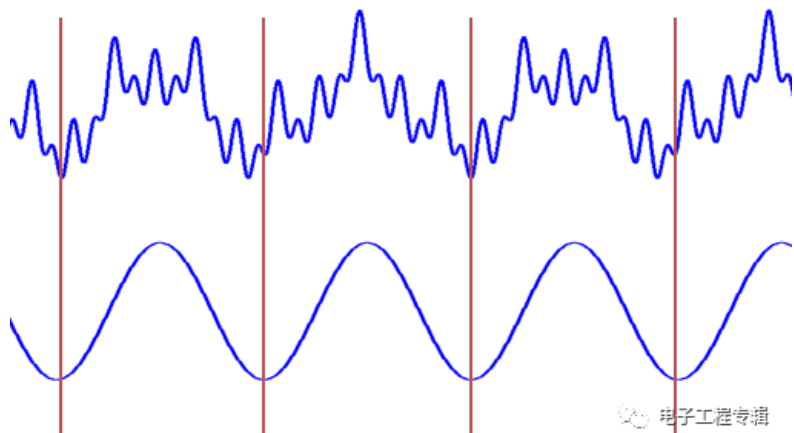
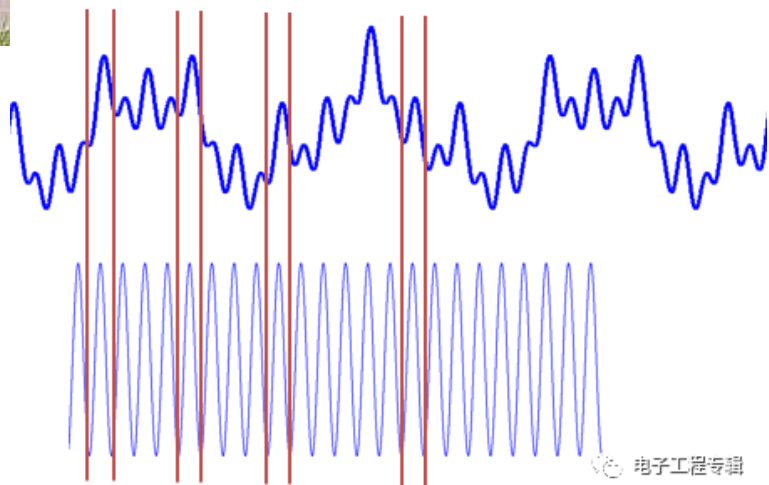
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-i\omega t} dt$$

傅里叶变换只有一个变量 ω ， 对应频率上的变化。

$$WT(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) dt$$

小波变换有两个变量，尺度 a 和平移 τ ，分别控制小波的伸缩和平移。尺度对应频率上的变化，平移对应时间上的变化。

1. 小波介绍(续5)

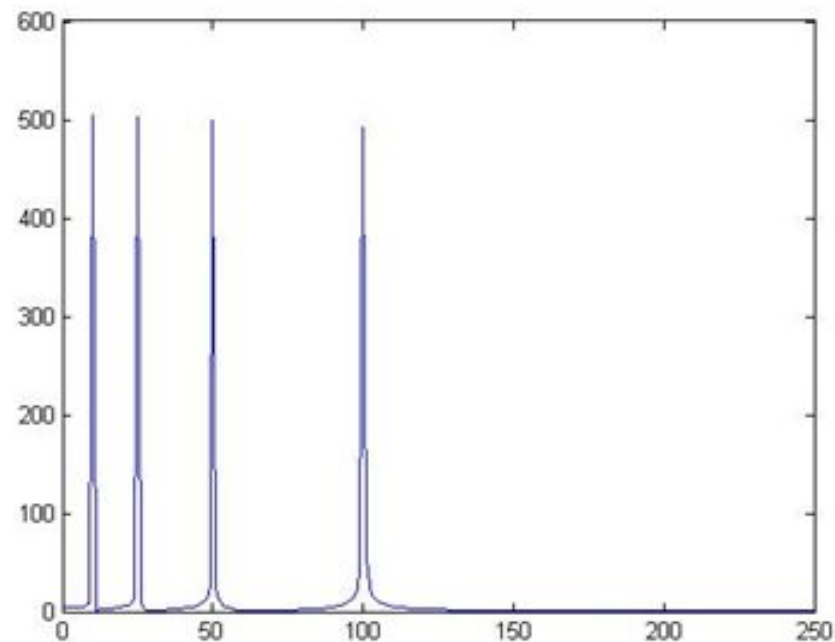
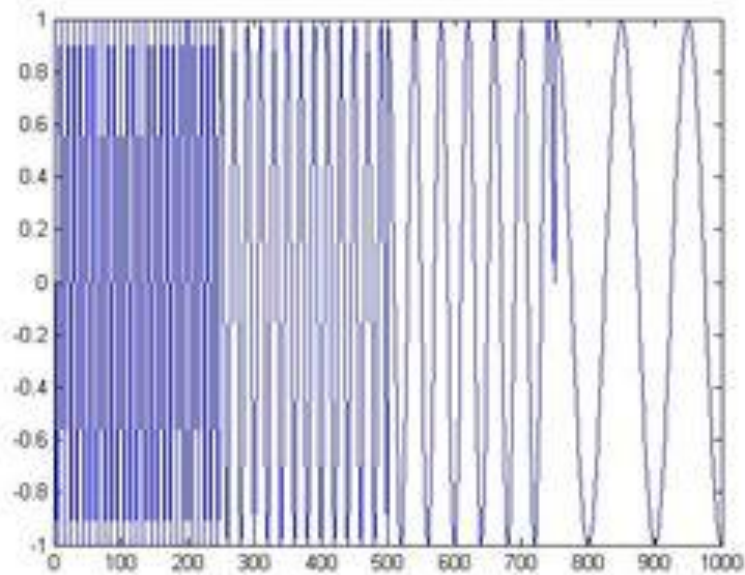


平移、伸缩

电子工程专辑



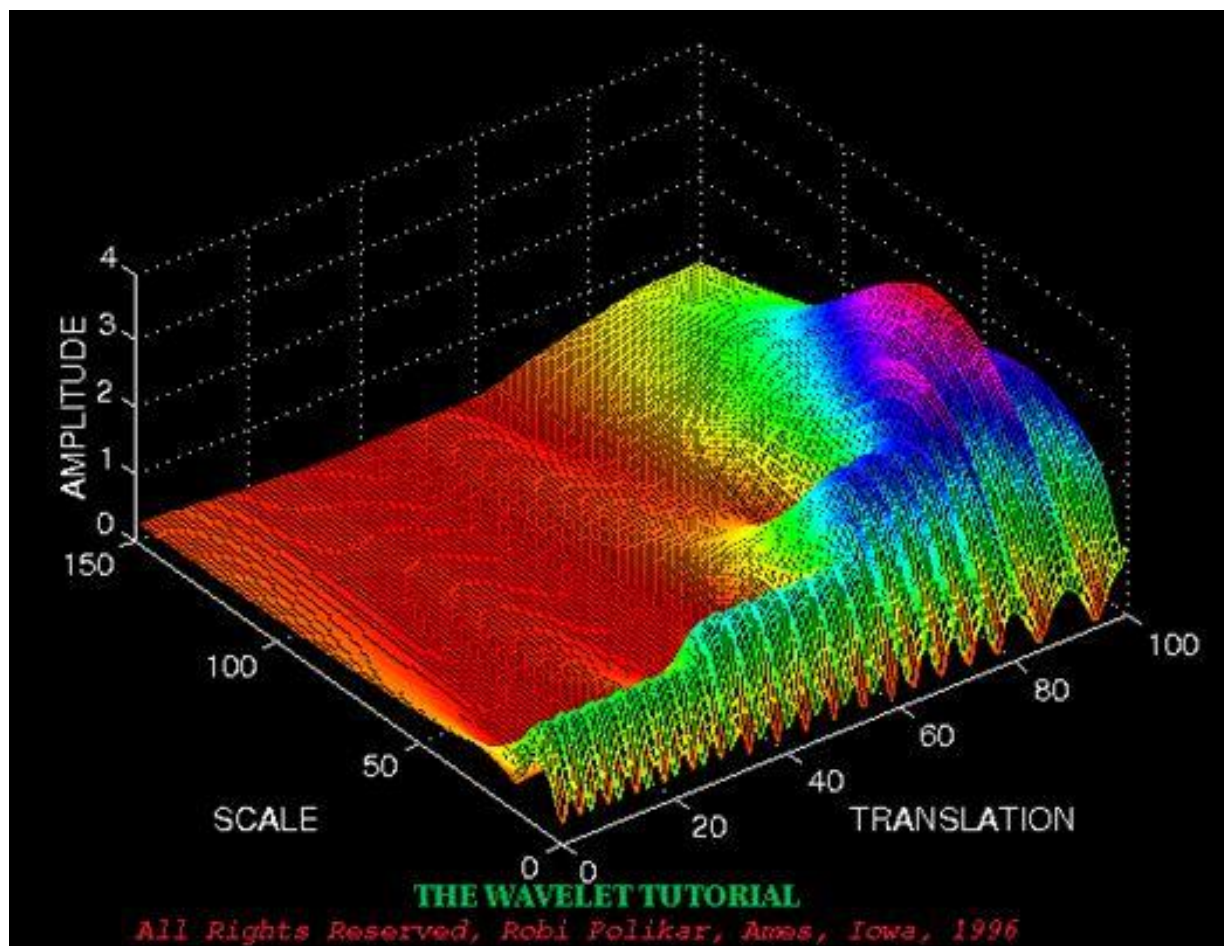
1. 小波介绍(续5)



傅里叶变换变换可以得到时域信号的频域谱。

1. 小波介绍(续5)

此图片引自
“小波导论”



小波变换不仅可以得到频域谱，而且可以得到时域谱。



1. 小波介绍——小波分析

- 小波分析/小波变换

变换目的是获得时间和频率域之间的相互关系

- 小波变换

- 对一个函数在空间和时间上进行局部化的一种数学变换
 - 通过平移母小波(mother wavelet)获得信号的时间信息
 - 通过缩放母小波的宽度(或称尺度)获得信号的频率特性
 - 对母小波的平移和缩放操作是为计算小波的系数，这些系数代表局部信号和小波之间的相互关系
- 对比傅立叶变换
 - 提供了频率域的信息，但丢失了时间域的局部化信息

- 小波分析中常用的三个基本概念

- 连续小波变换
- 离散小波变换
- 小波重构



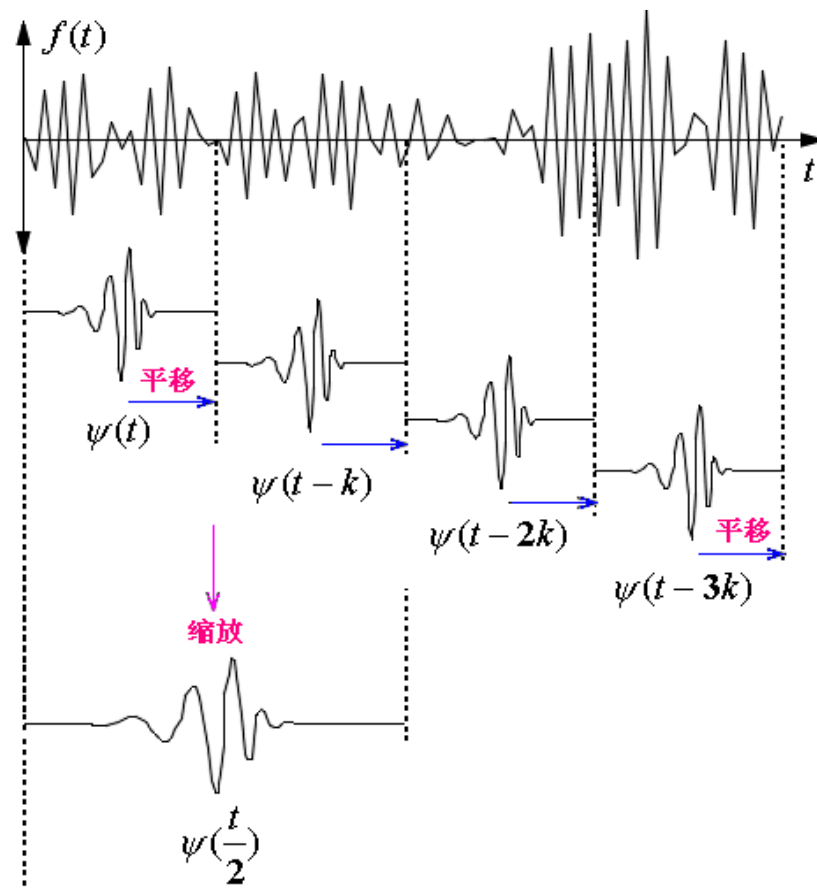
1. 小波介绍——小波分析(续1)

- 连续小波变换(continuous wavelet transform, CWT)
 - 傅立叶分析
 - 用一系列不同频率的正弦波表示一个信号
 - 一系列不同频率的正弦波是傅立叶变换的基函数
 - 小波分析
 - 用母小波通过移位和缩放后得到的一系列小波表示一个信号
 - 一系列小波可用作表示一些函数的基函数
 - 凡能用傅立叶分析的函数都可用小波分析
 - 小波变换可理解为用经过缩放和平移的一系列函数代替傅立叶变换用的正弦波
 - 用不规则的小波分析变化激烈的信号比用平滑的正弦波更有效，或者说对信号的基本特性描述得更好

1. 小波介绍——小波分析(续2)

• CWT的变换过程示例，见右图，可分如下5步

1. 小波 $\psi(t)$ 和原始信号 $f(t)$ 的开始部分进行比较
2. 计算系数 C ——该部分信号与小波的近似程度； C 值越高表示信号与小波相似程度越高
3. 小波右移 k 得到的小波函数为 $\psi(t-k)$ ，然后重复步骤1和2，……直到信号结束
4. 扩展小波，如扩展一倍，得到的小波函数为 $\psi(t/2)$
5. 重复步骤1~4



连续小波变换的过程



1. 小波介绍——小波分析(续3)

- 连续小波变换用下式表示

$$C(scale, position) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(scale, position, t)dt$$

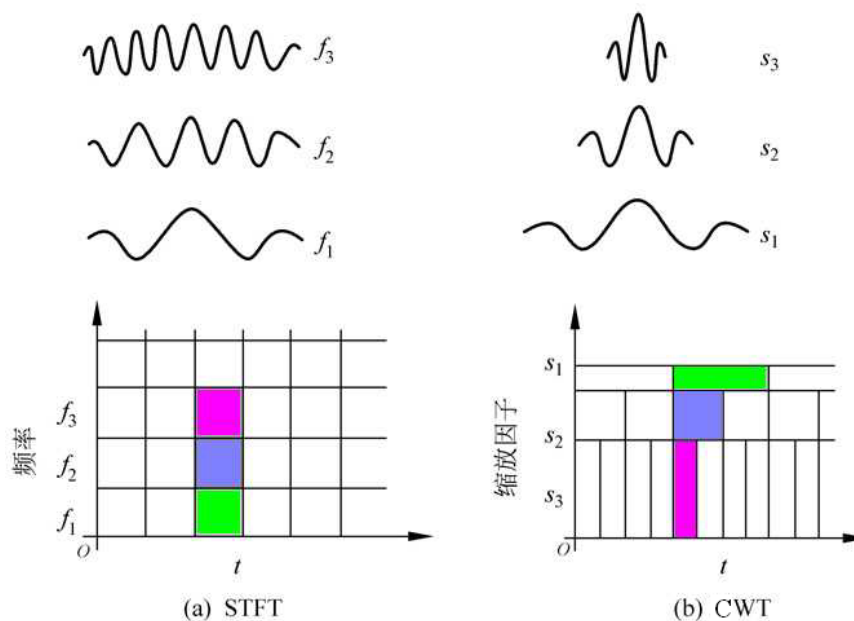
- 该式含义：小波变换是信号 $f(t)$ 与被缩放和平移的小波函数 ψ 之积在信号存在的整个期间里求和
- CWT变换的结果是许多小波系数 C ，这些系数是缩放因子(scale)和位置(position)的函数

■ 离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)

- 用小波的基函数(basis functions)表示一个函数的方法
 - 小波的基函数序列或称子小波(baby wavelets)函数是由单个小波或称为母小波函数通过缩放和平移得到的
 - 缩放因子和平移参数都选择 2^j ($j > 0$ 的整数)的倍数，这种变换称为双尺度小波变换(dyadic wavelet transform)

1. 小波介绍——小波分析(续4)

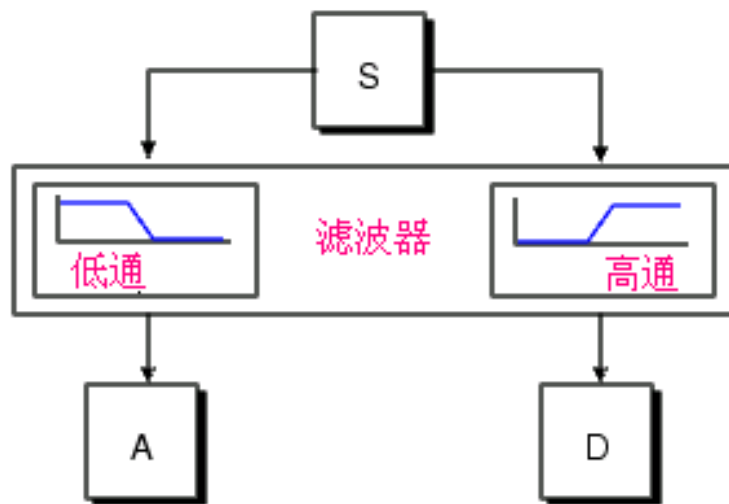
- DWT得到的小波系数、缩放因子和时间关系
 - 图(a)是20世纪40年代使用Gabor开发的短时傅立叶变换(short time Fourier transform, STFT)得到的
 - 图(b)是20世纪80年代使用Morlet开发的小波变换得到的



离散小波变换分析图

1. 小波介绍——小波分析(续5)

- 执行DWT的有效方法
 - 用Mallat在1988年开发的滤波器，称为Mallat算法
 - DWT的概念见下图。S表示原始的输入信号；通过两个互补的滤波器产生A和D两个信号



双通道滤波过程

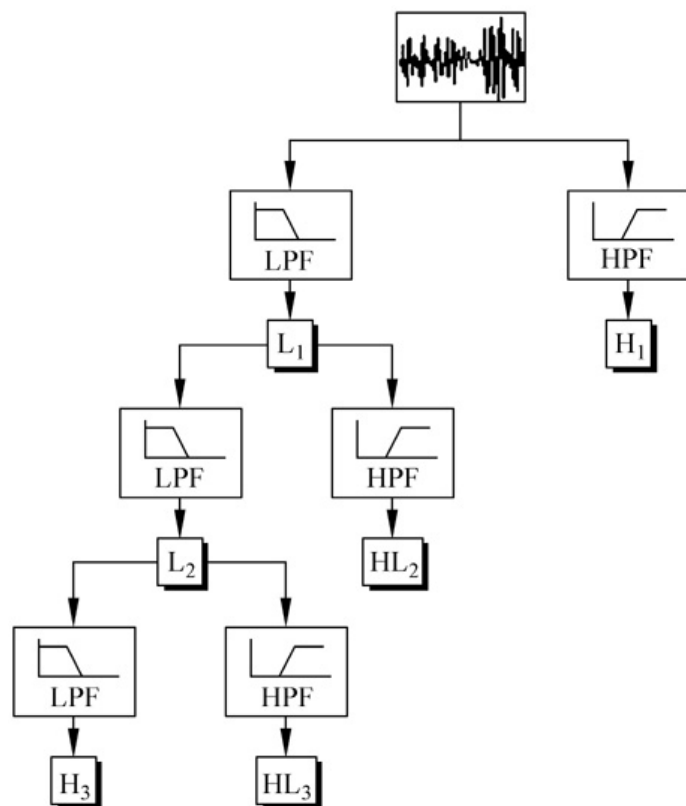
- A表示信号的近似值 (approximations), 大的缩放因子产生的系数, 表示信号的低频分量
- D表示信号的细节值 (detail), 小的缩放因子产生的系数, 表示信号的高频分量



1. 小波介绍——小波分析(续6)

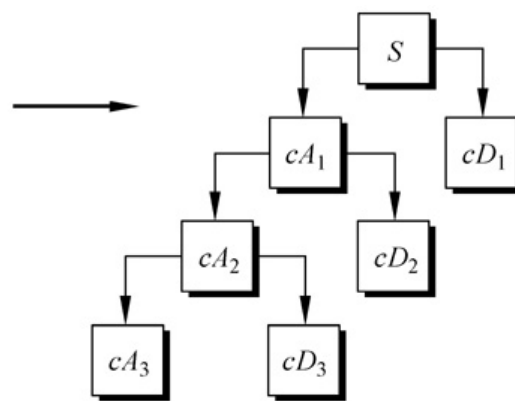
- 小波分解树与小波包分解树
 - 由低通滤波器和高通滤波器组成的树
 - 原始信号通过一对滤波器进行的分解叫做一级分解。信号的分解过程可以迭代，即可进行多级分解。
 - 小波分解树(wavelet decomposition tree)
 - 用下述方法分解形成的树：对信号的高频分量不再继续分解，而对低频分量连续进行分解，得到许多分辨率较低的低频分量。
 - 小波包分解树(wavelet packet decomposition tree)
 - 用下述方法分解形成的树：不仅对信号的低频分量连续进行分解，而且对高频分量也进行连续分解，这样不仅可得到许多分辨率较低的低频分量，而且也可得到许多分辨率较低的高频分量。

1. 小波介绍——小波分析(续7)

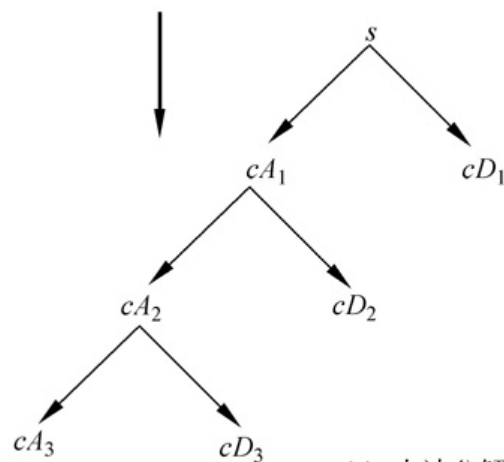


LPF: 低通滤波器
HPF: 高通滤波器

(a) 信号分解



(b) 系数结构

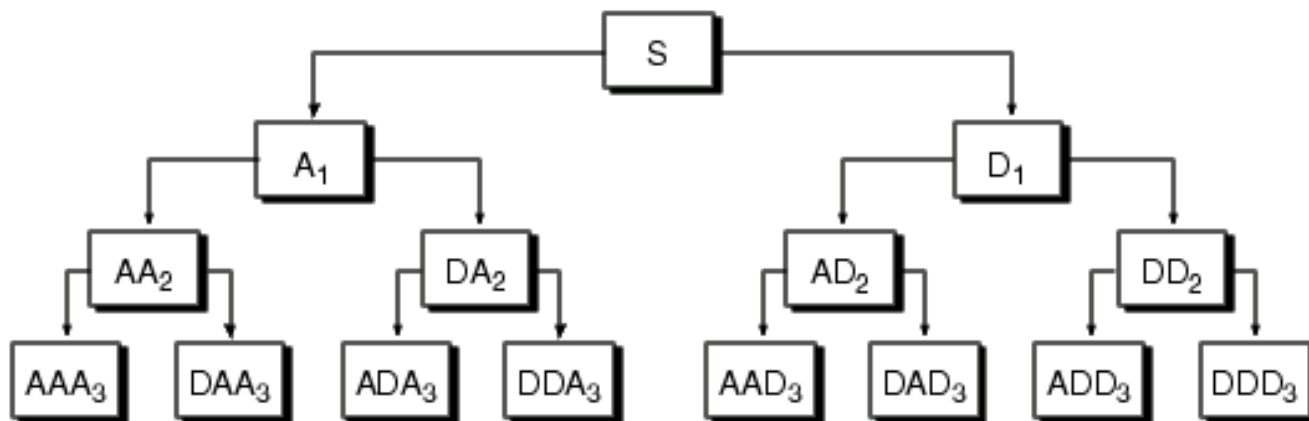


(c) 小波分解树

小波分解树

1. 小波介绍——小波分析(续8)

$$S = A_1 + AAD_3 + DAD_3 + DD_2$$

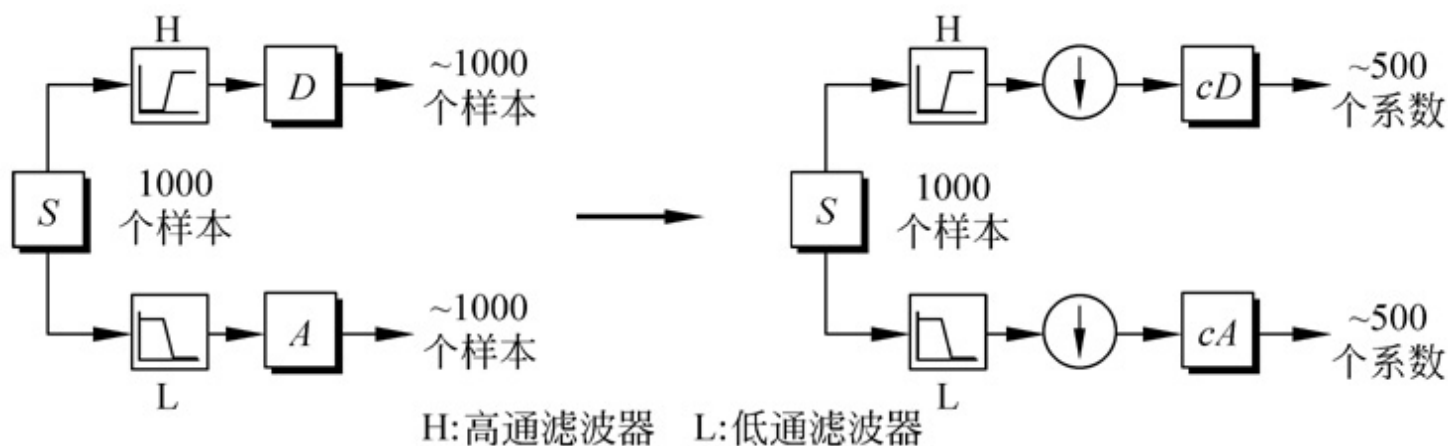


三级小波包分解树

1. 小波介绍——小波分析(续9)

注意：在使用滤波器对真实的数字信号进行变换时，得到的数据将是原始数据的两倍

- 例如，如果原始信号的数据样本为1000个，通过滤波之后每一个通道的数据均为1000个，总共为2000个。于是，根据尼奎斯特(Nyquist)采样定理就提出了采用降采样(downsampling)的方法，即在每个通道中每两个样本数据中取一个，得到的离散小波变换的系数(coefficient)分别用 cD 和 cA 表示。



降采样过程

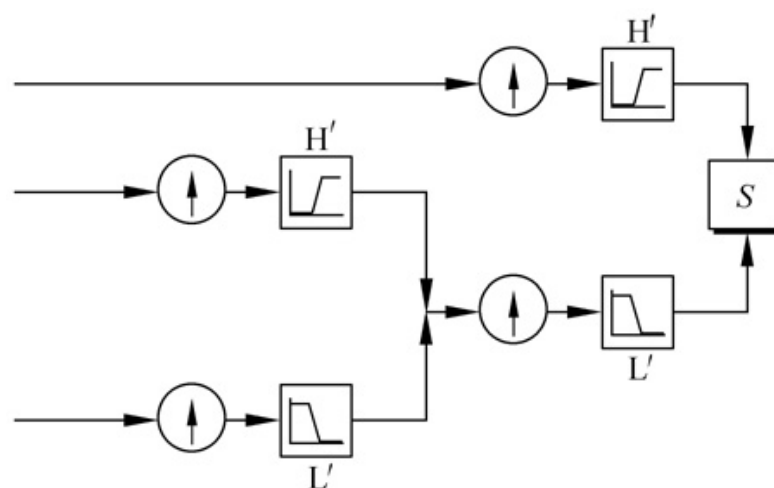


1. 小波介绍——小波分析(续10)

- 小波重构
 - 重构概念
 - 把分解的系数还原成原始信号的过程叫做小波重构(wavelet reconstruction)或合成(synthesis), 数学上叫做逆离散小波变换(inverse discrete wavelet transform, IDWT)
 - 两个过程
 - 在使用滤波器做小波变换时包含滤波和降采样(downsampling)两个过程, 在小波重构时也包含升采样(upsampling)和滤波两个过程.
 - 升采样是在两个样本数据之间插入“0”, 目的是把信号的分量加长.

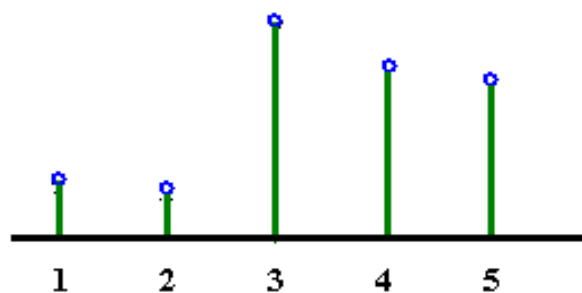


1. 小波介绍——小波分析(续11)

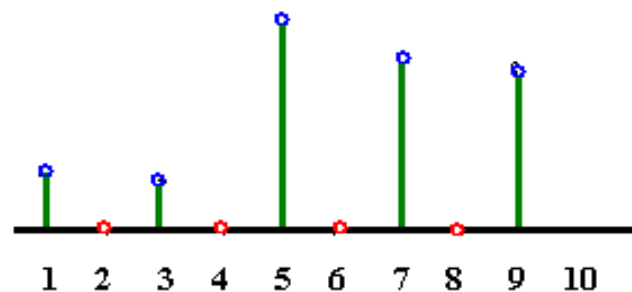


小波重构方法

H': 高通滤波器 L': 低通滤波器



(a) 降采样信号



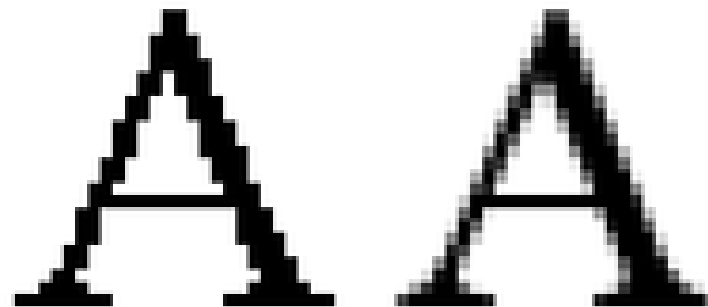
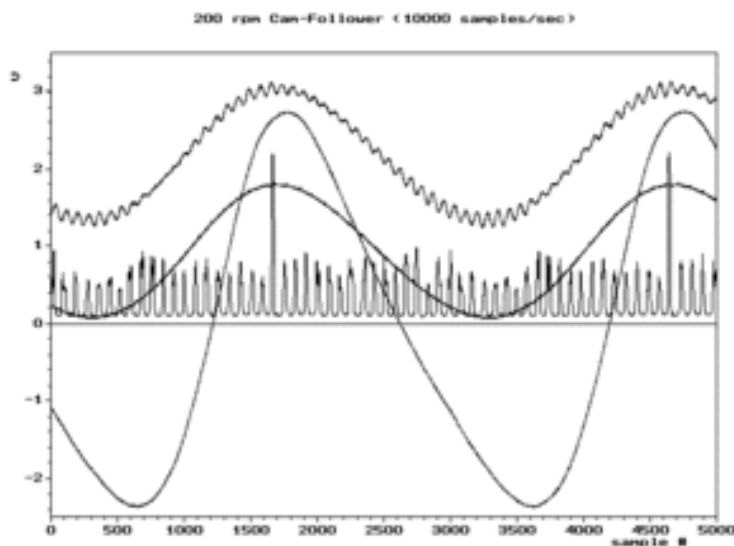
(b) 升采样信号

升采样的方法

1. 小波介绍——小波分析(续12)

- 重构滤波器

- 滤波器关系到能否重构出满意的原始信号。在信号的分解期间，降采样会引进畸变，这种畸变叫做混叠(aliasing)。这就需要在分解和重构阶段精心选择关系紧密但不一定一致的滤波器才有可能取消这种混叠

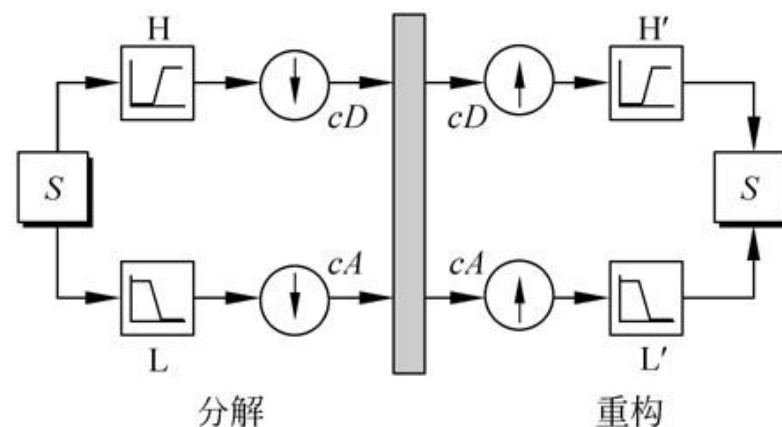


1. 小波介绍——小波分析(续12)

• 重构滤波器

- 滤波器关系到能否重构出满意的原始信号。在信号的分解期间，降采样会引进畸变，这种畸变叫做混叠(aliasing)。这就需要在分解和重构阶段精心选择关系紧密但不一定一致的滤波器才有可能取消这种混叠

➤ 低通分解滤波器(L)和高通分解滤波器(H)以及重构滤波器(L'和H')构成一个系统，这个系统叫做正交镜像滤波器(quadrature mirror filters, QMF)系统，如右图所示



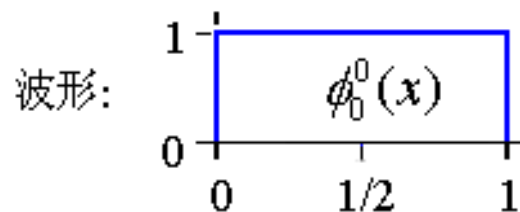
正交镜像滤波器系统

2. 哈尔函数

• 2.1 哈尔基函数

- 基函数是一组线性无关的函数，可以用来构造任意给定的信号，如用基函数的加权和表示
- 哈尔基函数(Haar basis function)
 - 定义在半开区间 $[0, 1)$ 上的一组分段常值函数(piecewise-constant function)集
 - 生成矢量空间 V^0 的常值函数

$$V^0: \phi_0^0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

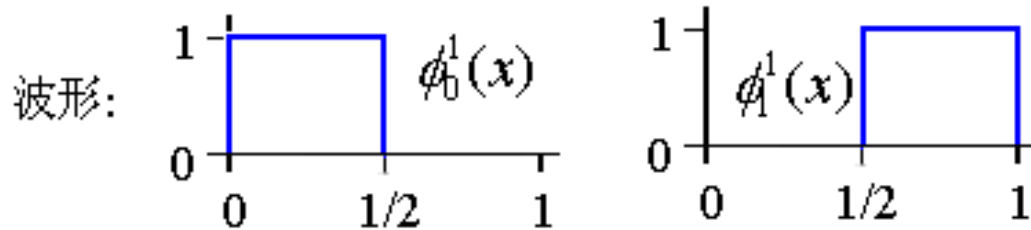


2. 哈尔函数(续1)

- 生成矢量空间 V^1 的常值函数

$$V^1: \phi_0^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

$$\phi_1^1(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



2. 哈尔函数(续2)

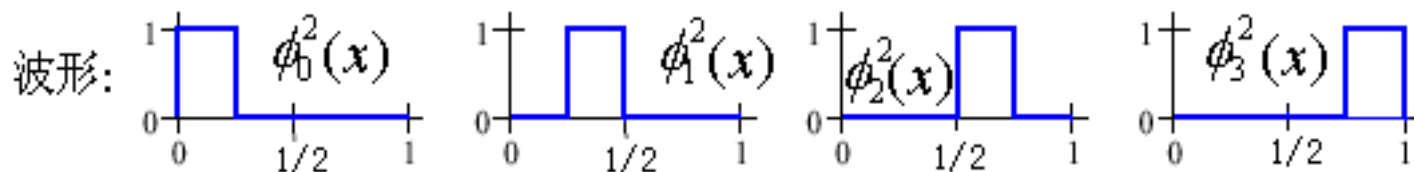
- 生成矢量空间 V^2 的常值函数

$$\phi_0^2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_1^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_2^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_3^2(x) = \begin{cases} 1, & 3/4 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



- 可按照以上方法继续定义哈尔基函数和由它生成的矢量空间 V^j, \dots



2. 哈尔函数(续3)

- 为了表示矢量空间中的矢量，每一个矢量空间都需要定义一个基(basis)，哈尔基定义为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 为生成矢量空间而定义的基函数也叫做尺度函数(scaling function)。哈尔基尺度函数定义为

$$\phi_i^j(x) = \phi(2^j x - i), \quad i = 0, 1, \dots, (2^j - 1)$$

- 其中， j 为尺度因子，使函数图形缩小或放大
 i 为平移参数，使函数沿 x 轴方向平移

2. 哈尔函数(续4)

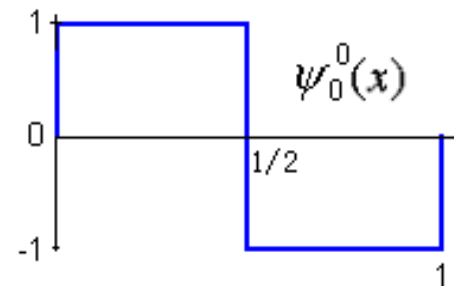
- 2.2 哈尔小波(函数)

- 最古老和最简单的小波，定义为

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{当 } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 生成矢量空间 W^0 的哈尔小波

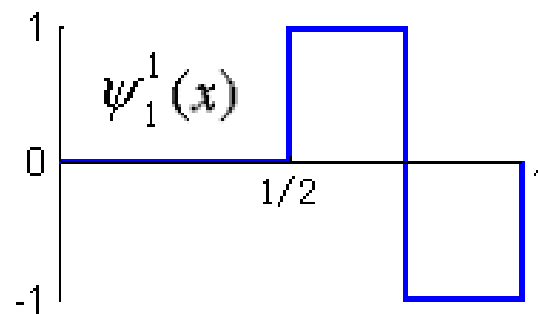
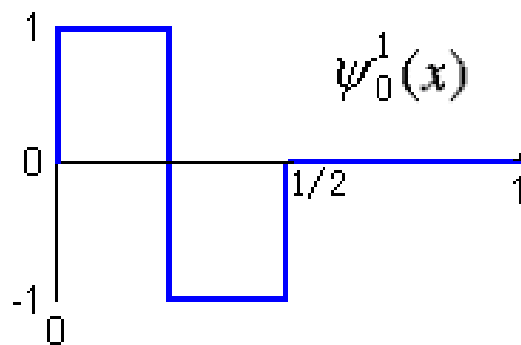
$$\psi_0^0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



2. 哈尔函数(续5)

- 生成矢量空间 W^1 的哈尔小波

$$\psi_0^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/4 \\ -1 & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \psi_1^1(x) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq x < 3/4 \\ -1 & 3/4 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



2. 哈尔函数(续6)

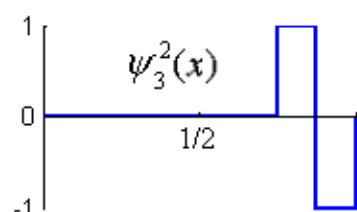
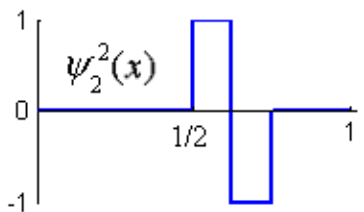
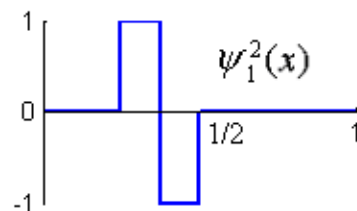
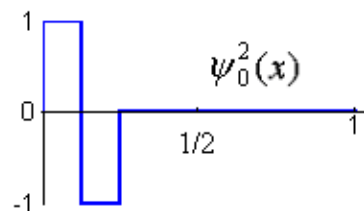
- 生成矢量空间 W^2 的哈尔小波

$$\psi_0^2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/8 \\ -1 & 1/8 \leq x < 2/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\psi_1^2(x) = \begin{cases} 1 & 2/8 \leq x < 3/8 \\ -1 & 3/8 \leq x < 4/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\psi_2^2(x) = \begin{cases} 1 & 4/8 \leq x < 5/8 \\ -1 & 5/8 \leq x < 6/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\psi_3^2(x) = \begin{cases} 1 & 6/8 \leq x < 7/8 \\ -1 & 7/8 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$





3. 哈尔小波变换

- 求有限信号的均值和差值
 - 假设有一幅分辨率只有4个像素 P_0 、 P_1 、 P_2 、 P_3 的一维图像，对应的像素值分别为

[9 7 3 5]

计算该图像的哈尔小波变换系数

- **步骤1:** 求均值(averaging)。计算相邻像素对的平均值，得到一幅分辨率比较低的新图像，它的像素数目变成了2个，即新的图像的分辨率是原来的1/2，相应的像素值为

[8 4]



3. 哈尔小波变换(续1)

- **步骤2:** 求差值(differencing)。为能从2个像素组成的图像重构由4个像素组成的原始图像，就需要存储一些图像的细节系数(detail coefficient)
 - 方法是把像素对的第一个像素值减去这个像素对的平均值，或者使用这个像素对的差值除以2

原始图像用两个均值和两个细节系数表示为

$$[8 \ 4 \ 1 \ -1]$$

- **步骤3:** 重复步骤1和2，把由第一步分解得到的图像进一步分解成分辨率更低的图像和细节系数。其结果，整幅图像表示为

$$[6 \ 2 \ 1 \ -1]$$

3. 哈尔小波变换(续2)

表1 哈尔变换过程

分辨率	平均值	细节系数
4	[9 7 3 5]	
2	[8 4]	[1 -1]
1	[6]	[2]

- 把由4个像素组成的一幅图像用一个平均像素值和三个细节系数表示，这个过程称为哈尔小波变换(Haar wavelet transform)，也称哈尔小波分解(Haar wavelet decomposition)。这个概念可以推广到使用其他小波基的变换
- 特点：(1) 变换过程中没有丢失信息，因为能够从所记录的数据中重构出原始图像。(2) 对这个给定的变换，可从所记录的数据中重构出各种分辨率的图像。(3) 通过变换之后产生的细节系数的幅度值比较小，为图像压缩提供了一种途径，如去掉微不足道的系数

3. 哈尔小波变换(续3)

- 哈尔小波变换

- 在例1中的求均值和差值的过程实际上就是一维小波变换的过程，现在用数学方法重新描述哈尔小波变换

- $I(x)$ 图像用 V^2 中的哈尔基表示

$$I(x) = 9\phi_0^2(x) + 7\phi_1^2(x) + 3\phi_2^2(x) + 5\phi_3^2(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 9 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_0^2(x) \\ & + 7 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_1^2(x) \\ & + 3 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_2^2(x) \\ & + 5 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_3^2(x) \end{aligned}$$

3. 哈尔小波变换(续4)

- $I(x)$ 图像用 V^1 和 W^1 中的函数表示
生成 V^1 矢量空间的基函数为 $\phi_0^1(x)$ 和 $\phi_1^1(x)$ ，生成矢量空间 W^1 的小波函数为 $\psi_0^1(x)$ 和 $\psi_1^1(x)$ ， $I(x)$ 可表示为

$$I(x) = c_0^1 \phi_0^1(x) + c_1^1 \phi_1^1(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$\begin{aligned}
 I(x) = & 8 \times \text{[Step Function]} \phi_0^1(x) \\
 & + 4 \times \text{[Step Function]} \phi_1^1(x) \\
 & + 1 \times \text{[Wavelet Function]} \psi_0^1(x) \\
 & + -1 \times \text{[Wavelet Function]} \psi_1^1(x)
 \end{aligned}$$

3. 哈尔小波变换(续5)

- $I(x)$ 图像用 V^0 、 W^0 和 W^1 中的函数表示
生成矢量空间 V^0 的基函数为 $\phi_0^0(x)$ ，生成矢量空间 W^0 的小波函数为 $\psi_0^0(x)$ ，生成矢量空间 W^1 的小波函数为 $\psi_0^1(x)$ 和 $\psi_1^1(x)$ ， $I(x)$ 可表示为

$$I(x) = c_0^0 \phi_0^0(x) + d_0^0 \psi_0^0(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 6 \times \text{[rectangle]} \phi_0^0(x) \\ & + 2 \times \text{[step function]} \psi_0^0(x) \\ & + 1 \times \text{[step function]} \psi_0^1(x) \\ & + -1 \times \text{[step function]} \psi_1^1(x) \end{aligned}$$



4. 二维哈尔小波变换

- 用小波对图像进行变换的两种方法

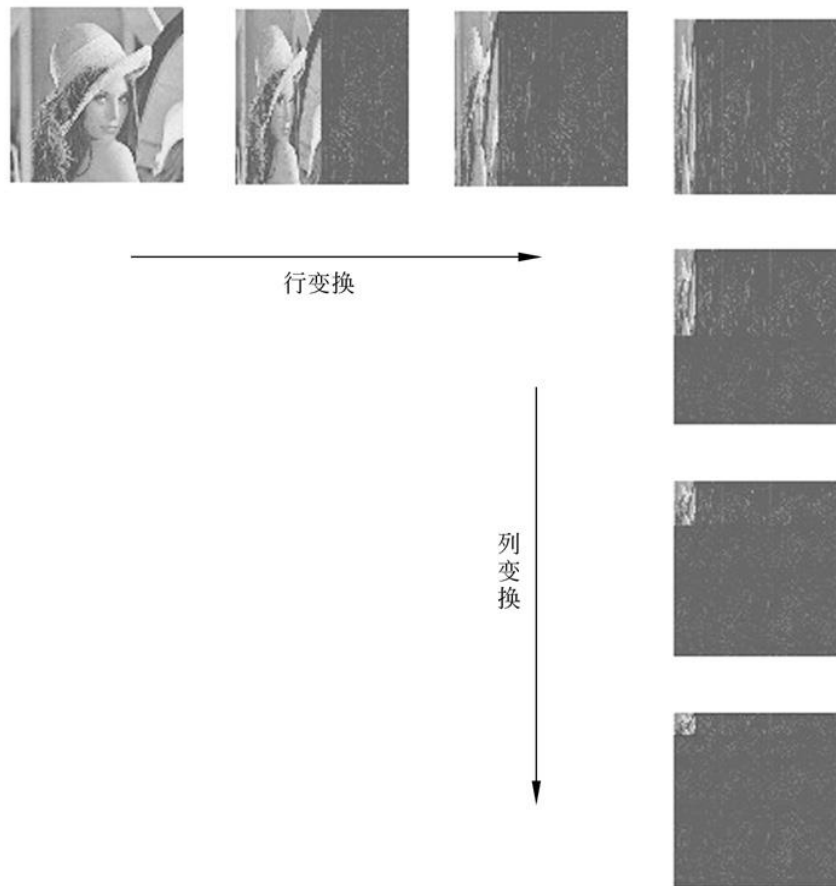
- 标准分解(standard decomposition)

- 首先使用一维小波对图像每一行的像素值进行变换，产生每一行像素的平均值和细节系数，然后使用一维小波对这个经过行变换的图像的列进行变换，产生这个图像的平均值和细节系数
 - 分解的过程如下：

```
procedure StandardDecomposition(C: array [1 . . h, 1 . . w] of reals)
  for row 1 to h do
    Decomposition(C [row, 1 . . w])
  end for
  for col 1 to w do
    Decomposition(C [1 . . h, col])
  end for
end procedure
```




4. 二维哈尔小波变换(续1)



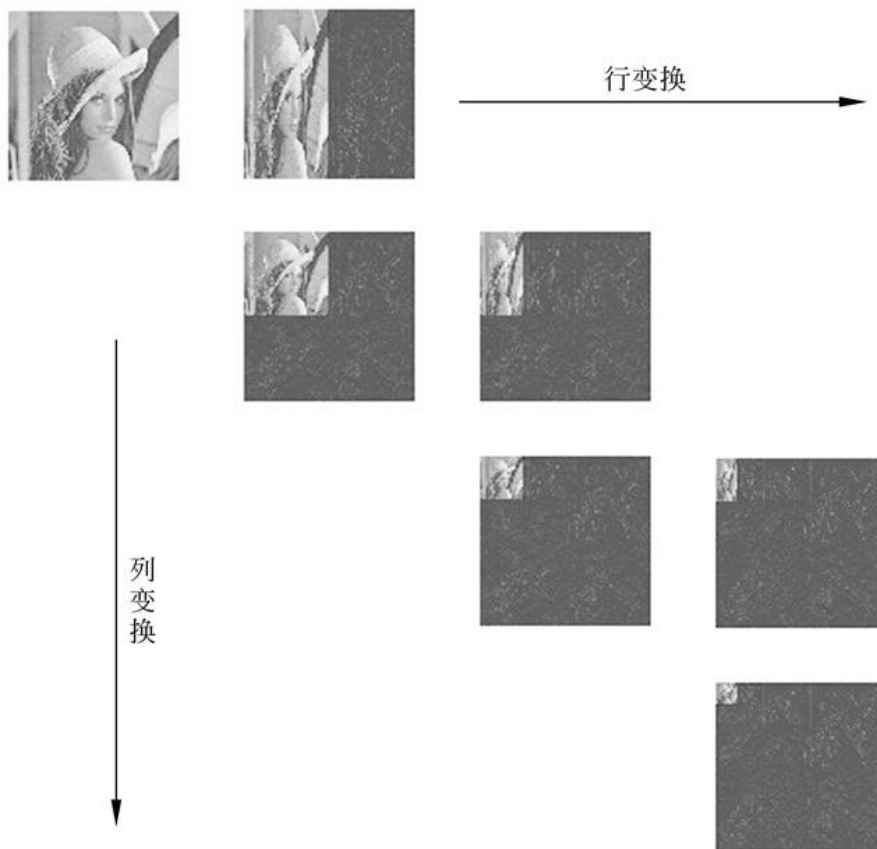
图像的标准分解方法



4. 二维哈尔小波变换(续2)

- 非标准分解(nonstandard decomposition)
 - 用一维小波交替地对每一行和每一列像素值进行变换。
 - 对每一行计算像素对的均值和差值，然后对每一列计算像素对的均值和差值
 - 对包含均值的1/4像素计算行和列的均值和差值，依此类推
-  **procedure** *NonstandardDecomposition*(*C*: array[1...*h*, 1...*h*] of reals)
 - $C \leftarrow C/h$ (normalize input coefficients)
 - while** $h > 1$ **do**
 - for** row 1 **to** h **do**
 - DecompositionStep*(*C* [row, 1... h])
 - end for**
 - for** col 1 **to** h **do**
 - DecompositionStep*(*C* [1... h , col])
 - end for**
 - $h \leftarrow h/2$
 - end while**
- end procedure**

4. 二维哈尔小波变换(续3)

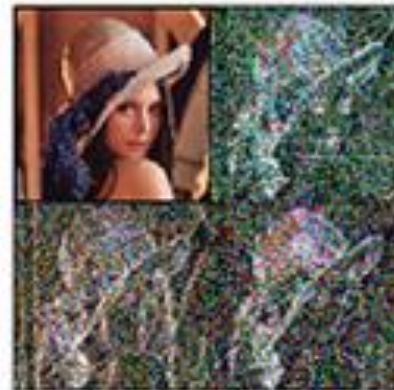


图像的非标准分解方法

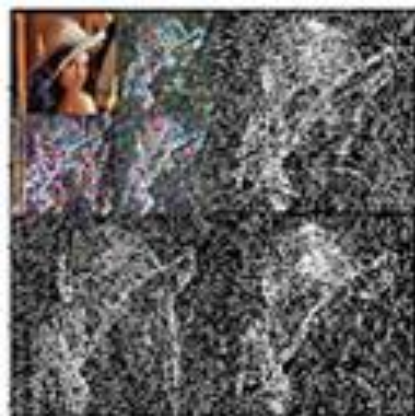
4. 二维哈尔小波变换(续4)



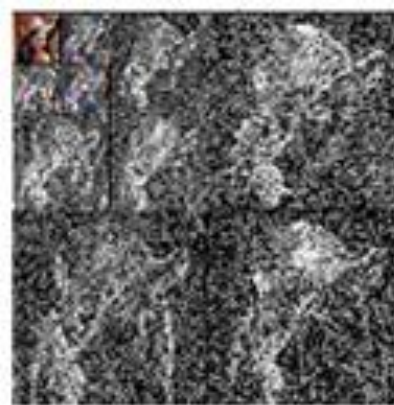
(a) 原始图像



(b) 1/4分辨率图像



(c) 1/16分辨率图像

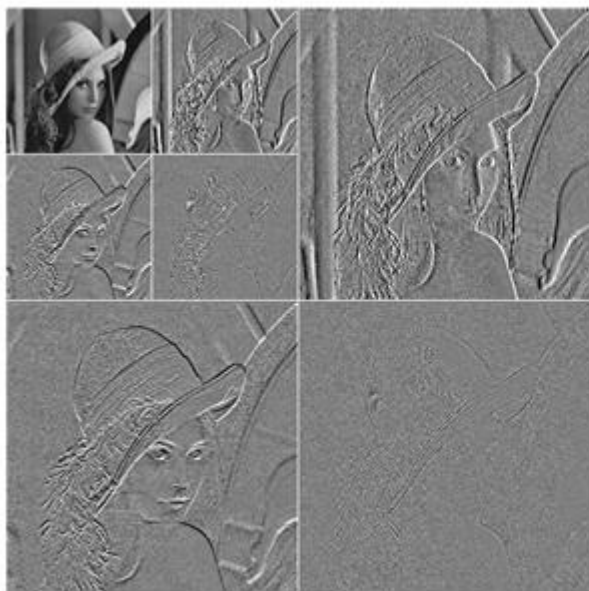


(d) 1/64分辨率图像

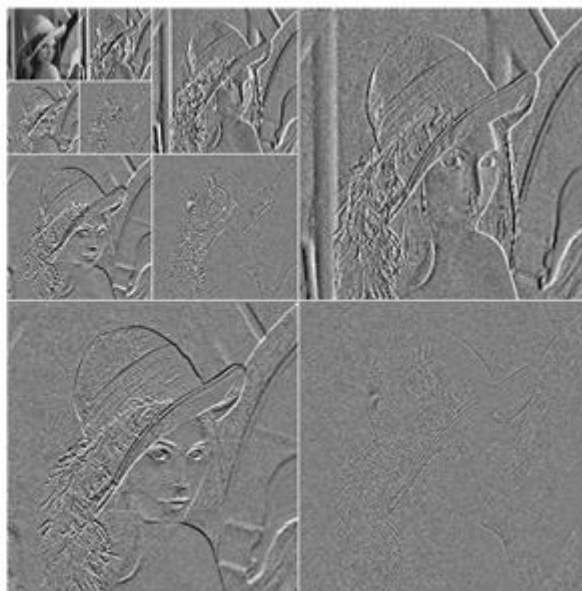
使用小波分解产生多种分辨率图像

4. 二维哈尔小波变换(续5)

灰度图



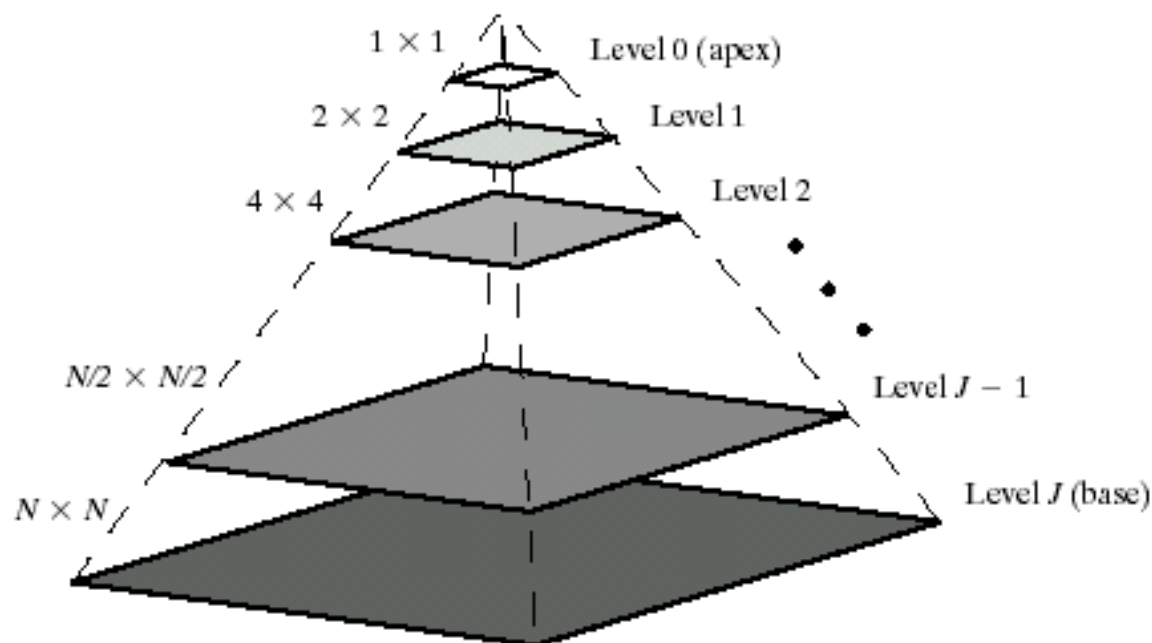
(c) 1/16分辨率图像



(d) 1/64分辨率图像

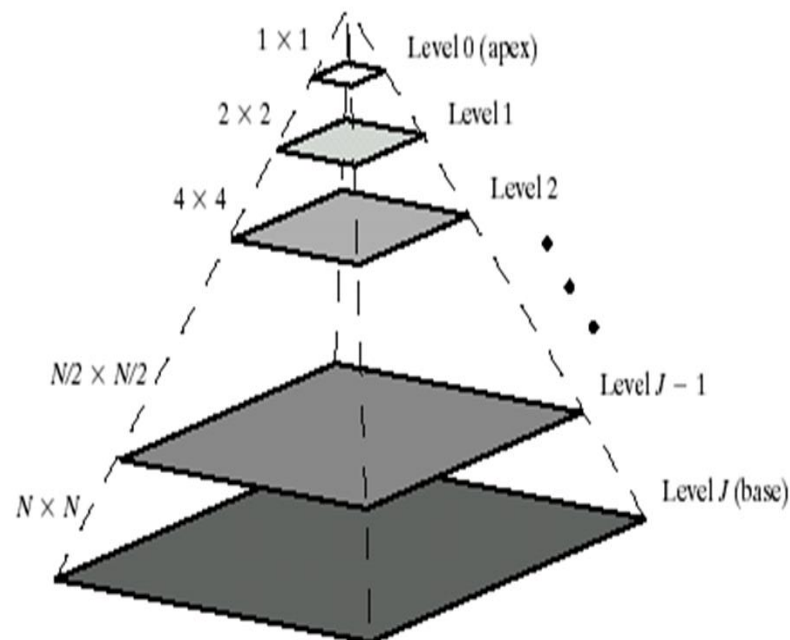
5. 图像多分辨率表示

图像金字塔就是一系列以金字塔形状排列的分辨率逐步降低的图像的集合。



5. 图像多分辨率表示(续1)

金字塔的底部是待处理的图像的高分辨率表示，顶部是低分辨率的近似。设图像大小为 $N \times N = 2^J \times 2^J$ ，则金字塔一共具有 J 级。则中间第 j 级的大小为 $2^j \times 2^j$ ，其中 $0 \leq j \leq J$ 。通常我们只使用其中的 P 级来构建原始图像的金字塔。





5. 图像多分辨率表示(续2)

金字塔的构建

Step 1: 计算输入图像的低一级的分辨率近似值。这可以通过对输入图像进行滤波操作，并进行2倍的下采样。可以采用多种滤波器，如邻域平均（可生成平均值金字塔），高斯低通滤波器（可生成高斯金字塔）。输出就为 $j-1$ 层的低分辨率近似值。

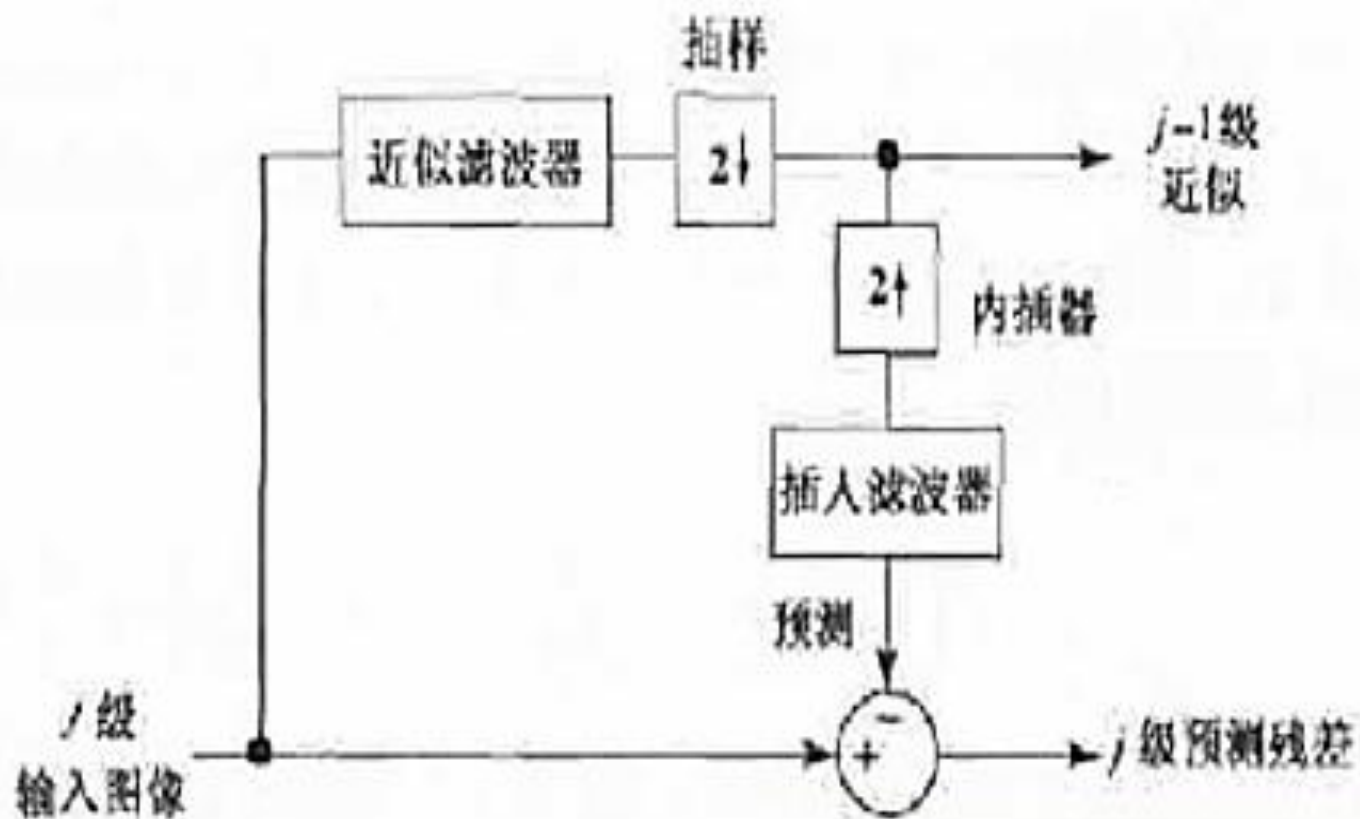


5. 图像多分辨率表示(续3)

Step 2: 对上一步的输出进行2倍内插（上采样），并进行滤波处理，作为j级图像的预测值。

Step 3: 计算步骤2的预测值和步骤1的输入之间的差异，作为j级预测残差图像，可用于后续原始图像的重建。

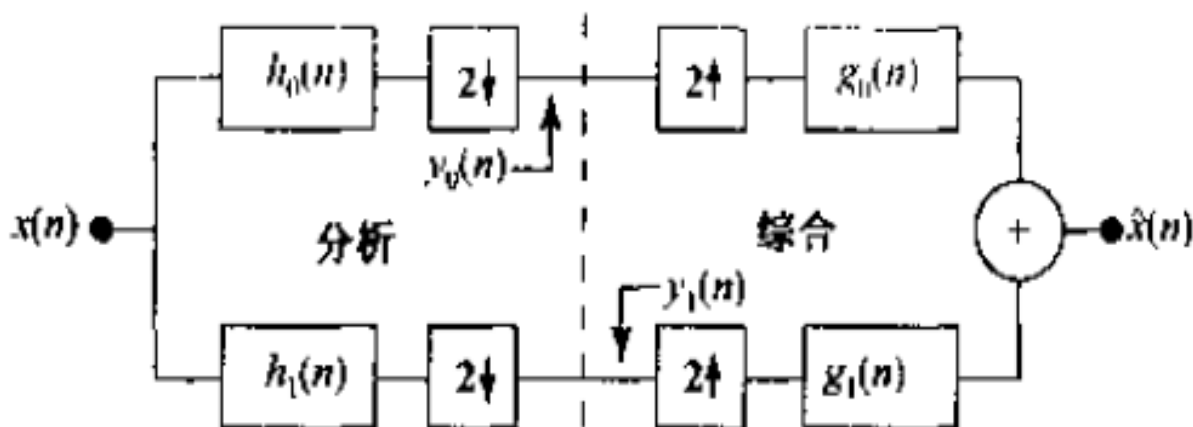
5. 图像多分辨率表示(续4)



5. 图像多分辨率表示(续5)

子带编码

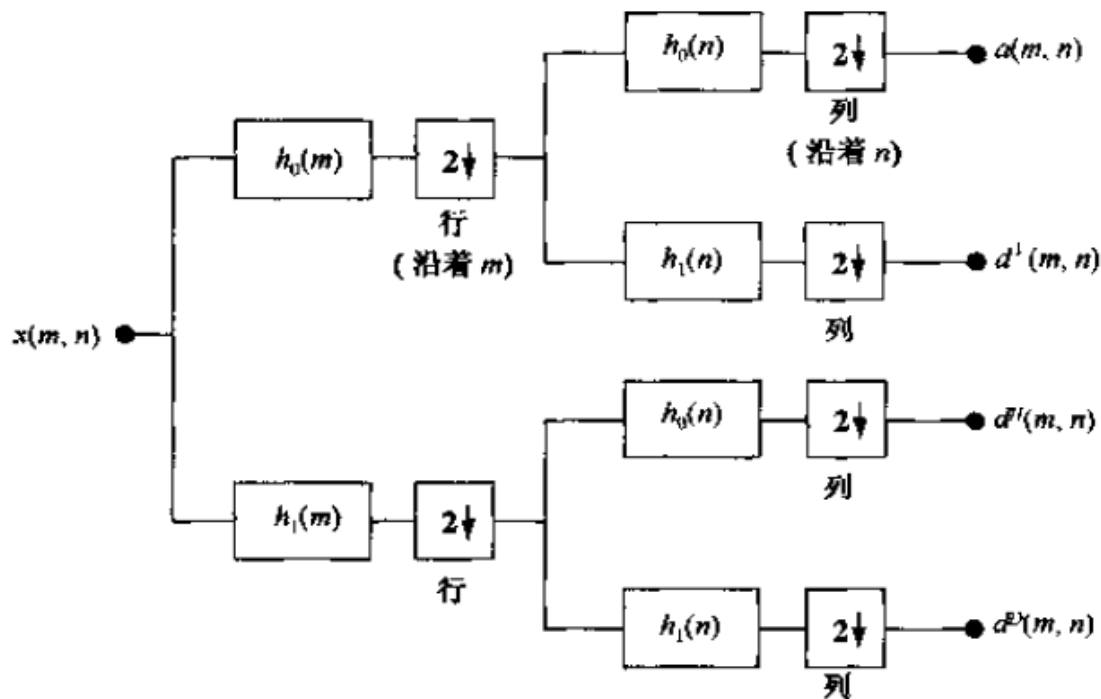
- 在子带编码中，一幅图像被分解成为一系列限带宽量的集合，称为子带，它们可以重组在一起无失真地重建原始图像。



- 系统的输入是一个一维的带限时间离散信号 $x(n), n=0,1,2,\dots$; 输出序列 $\hat{x}(n)$ 是通过学习分析滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 将 $x(n)$ 分解成 $y_0(n)$ 和 $y_1(n)$ 然后再通过综合滤波器 $g_0(n)$ 和 $g_1(n)$ 综合得到的。

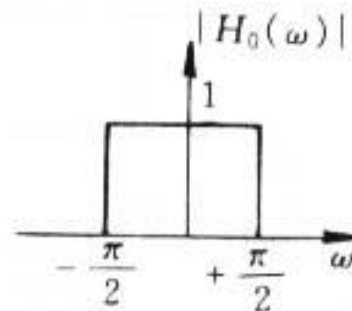
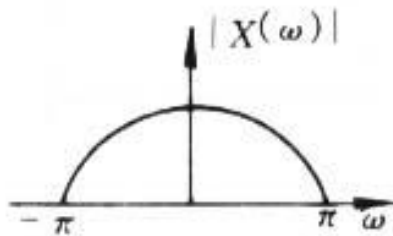
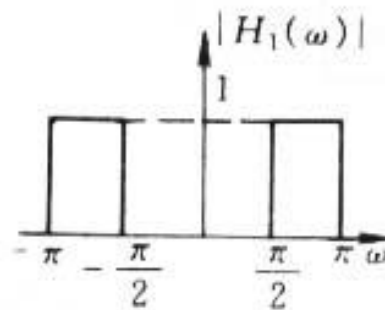
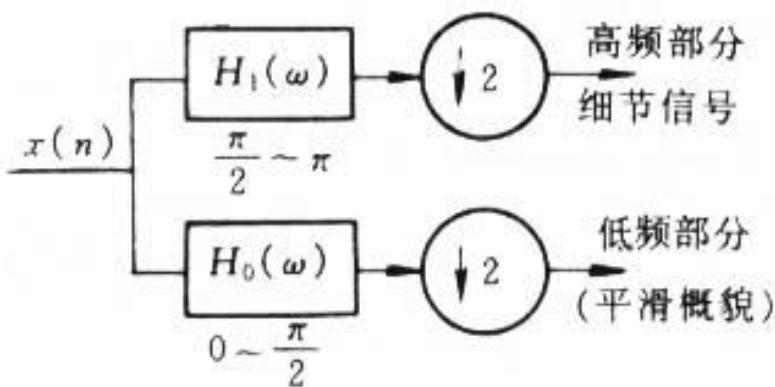
5. 图像多分辨率表示(续6)

- 一维滤波器也可以推广到二维可分离滤波器，可分离滤波器首先应用于某一维(如垂直向)，再应用于另一维(如水平向)，滤波后的输出结果包括 $a(m, n)$, $d^v(m, n)$, $d^h(m, n)$, $d^d(m, n)$ ，分别称为近似值、垂直细节、水平细节和对角线细节



6. 小波变换的多分辨分析特性

多分辨分析是小波分析中最重要的概念之一，它将一个函数表示为一个低频成分与不同分辨率下的高频成分，并且多分辨分析能提供一种构造小波的统一框架，提供函数分解与重构的快速算法。



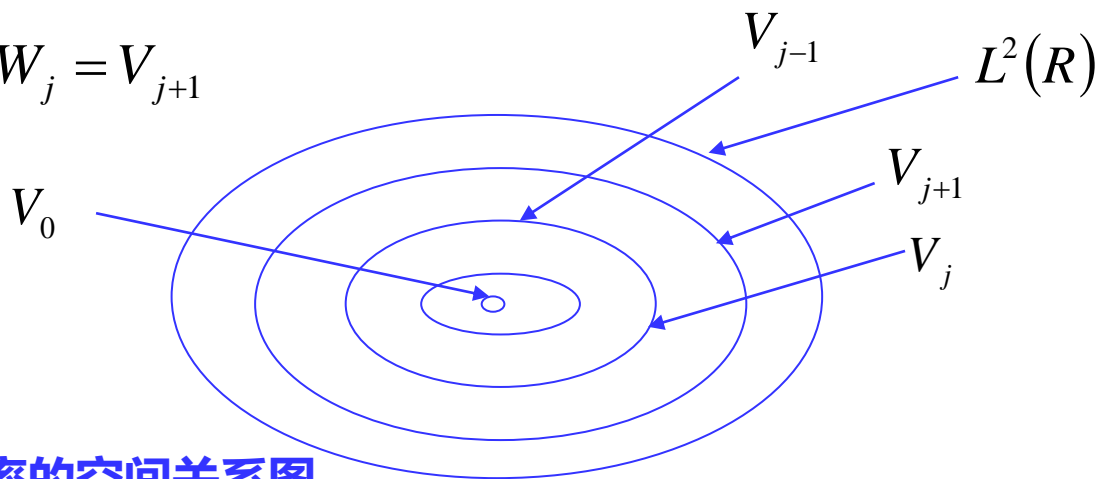
6. 小波变换的多分辨率分析特性

$L^2(\mathbb{R})$ 是一个无限维向量空间，称为平方可积空间，将 $L^2(\mathbb{R})$ 用它的子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 表示，其中 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为尺度空间， $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为小波空间。

尺度空间的递归嵌套关系： $\{0\} \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$

小波空间 W_j 是 V_j 和 V_{j+1} 之间的差，即 $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ ，它捕捉由 V_j 逼近 V_{j+1} 时丢失的信息。推出：

$$V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_j = V_{j+1}$$



多分辨率的空间关系图

双尺度函数

若 ϕ 是尺度函数，它生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的多分辨率分析 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ，则必然存在系数序列 $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ，使得以下尺度关系成立：

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad \sum_k h_0(k) = \sqrt{2}$$

这就是双尺度方程，必须满足下列条件：

$$\sum_k h_0(k) = \sqrt{2} \quad \sum_k h_0(k) h_0(k + 2l) = \delta(l)$$

定义函数 $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 为尺度函数，若其经过整数平移和 k 尺度 j 上的伸缩，得到一个尺度和位移均可变化的函数集合：

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \phi(2^{-j}t - k)$$



双尺度函数

若 $\psi(t)$ 为小波函数, 则

$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 构成双尺度函数, 其基本性质是:

$$\phi(2^{-j}t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2^{-j+1}t - k) \quad \sum_n h_k = \sqrt{2}$$

$$\psi(2^{-j}t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2^{-j+1}t - k) \quad \sum_n g_k = 0$$

双尺度方程的频域表示为

$$\sqrt{2}\phi(2\omega) = H(\omega)\phi(\omega)$$

$$\sqrt{2}\psi(2\omega) = G(\omega)\phi(\omega)$$

离散小波变换

- 如果设定 $a = 2^{-j}, b = k2^{-j}, j, k \in \mathbb{Z}$ 则

$$\psi_{2^{-j}, k2^{-j}}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

- 对于任意函数 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ 定义相应的离散小波变换为:

$$WT_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{j, k}(t)} dt, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

- 如果这时 $\psi_{j, k}$ 构成空间 $L^2(-\infty, +\infty)$ 的一组规范正交基, 对于任一函数 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ 的反演式为展开式:

$$f(t) = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} WT_f(j, k) \psi_{j, k}(t)$$



二进小波及二进小波变换

- 在连续小波变换中，令参数 $a = 2^j, j \in \mathbb{Z}$, 而参数 b 仍取连续值，则有二进小波：

$$\psi_{2^j, b}(t) = 2^{-j/2} \psi \left[2^{-j} (t - b) \right]$$

- 这时， $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的二进小波变换定义为

$$WT_f(2^j, b) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left[2^{-j} (t - b) \right] dt$$



二进小波及二进小波变换

表1 哈尔变换过程

分辨率	平均值	细节系数
4	[9 7 3 5]	
2	[8 4]	[1 -1]
1	[6]	[2]

- 把由4个像素组成的一幅图像用一个平均像素值和三个细节系数表示，这个过程称为哈尔小波变换(Haar wavelet transform)，也称哈尔小波分解(Haar wavelet decomposition)。这个概念可以推广到使用其他小波基的变换
- 特点：(1) 变换过程中没有丢失信息，因为能够从所记录的数据中重构出原始图像。(2) 对这个给定的变换，可从所记录的数据中重构出各种分辨率的图像。(3) 通过变换之后产生的细节系数的幅度值比较小，为图像压缩提供了一种途径，如去掉微不足道的系数

二进小波及二进小波变换

- 哈尔小波变换

- 在例1中的求均值和差值的过程实际上就是一维小波变换的过程，现在用数学方法重新描述哈尔小波变换

- $I(x)$ 图像用 V^2 中的哈尔基表示

$$I(x) = 9\phi_0^2(x) + 7\phi_1^2(x) + 3\phi_2^2(x) + 5\phi_3^2(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 9 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_0^2(x) \\ & + 7 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_1^2(x) \\ & + 3 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_2^2(x) \\ & + 5 \times \begin{array}{c} \text{---} \uparrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \phi_3^2(x) \end{aligned}$$

二进小波及二进小波变换

- $I(x)$ 图像用 V^1 和 W^1 中的函数表示
生成 V^1 矢量空间的基函数为 $\phi_0^1(x)$ 和 $\phi_1^1(x)$ ，生成矢量空间 W^1 的小波函数为 $\psi_0^1(x)$ 和 $\psi_1^1(x)$ ， $I(x)$ 可表示为

$$I(x) = c_0^1 \phi_0^1(x) + c_1^1 \phi_1^1(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 8 \times \text{[Step Function]} \phi_0^1(x) \\ & + 4 \times \text{[Step Function]} \phi_1^1(x) \\ & + 1 \times \text{[Step Function]} \psi_0^1(x) \\ & + -1 \times \text{[Step Function]} \psi_1^1(x) \end{aligned}$$

二进小波及二进小波变换

- $I(x)$ 图像用 V^0 、 W^0 和 W^1 中的函数表示
生成矢量空间 V^0 的基函数为 $\phi_0^0(x)$ ，生成矢量空间 W^0 的小波函数为 $\psi_0^0(x)$ ，生成矢量空间 W^1 的小波函数为 $\psi_0^1(x)$ 和 $\psi_1^1(x)$ ， $I(x)$ 可表示为

$$I(x) = c_0^0 \phi_0^0(x) + d_0^0 \psi_0^0(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

$$\begin{aligned} I(x) = & 6 \times \text{[rectangle]} \phi_0^0(x) \\ & + 2 \times \text{[step down]} \psi_0^0(x) \\ & + 1 \times \text{[step up]} \psi_0^1(x) \\ & + -1 \times \text{[step down]} \psi_1^1(x) \end{aligned}$$

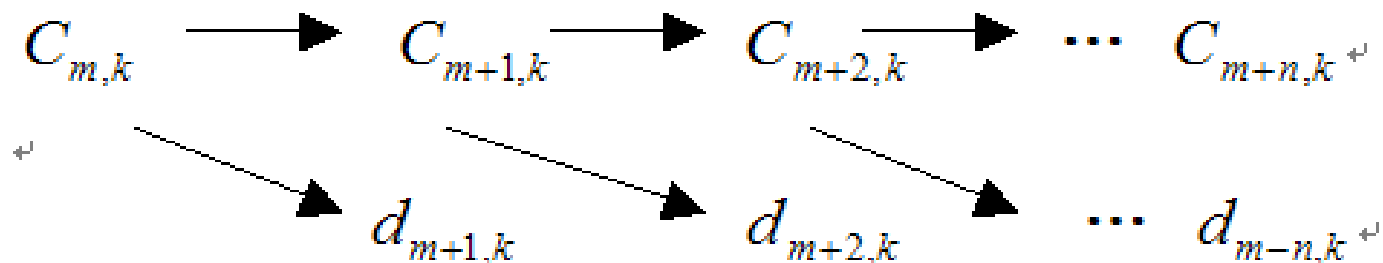


Mallat算法与塔式分解

系数分解的快速算法:

$$C_{j,k} = \sum_m h(m-2k)C_{j-1,m}$$

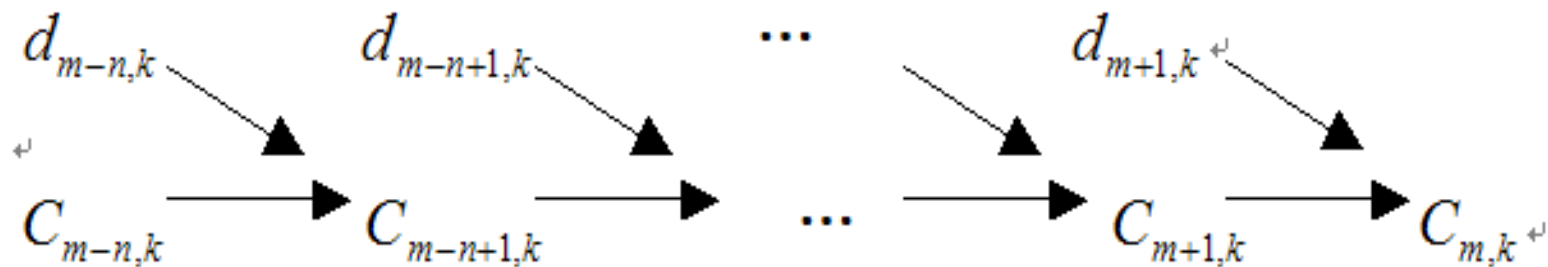
$$d_{j,k} = \sum_m g(m-2k)d_{j-1,m}$$



Mallat算法与塔式分解

系数重构的快速算法:

$$C_{j-1,k} = \sum_m C_{j,m} h(m-2k) + \sum_m d_{j-1,m} g(m-2k)$$





二维图像的小波变换实现

- 假定二维尺度函数可分离，则有
$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$
- 其中 $\varphi(x)$ 、 $\varphi(y)$ 是两个一维尺度函数。若 $\psi(x)$ 是相应的小波，那么下列三个二维基本小波：

$$\psi_{(x,y)}^1 = \varphi(x)\psi(y)$$

$$\psi_{(x,y)}^2 = \psi(x)\varphi(y)$$

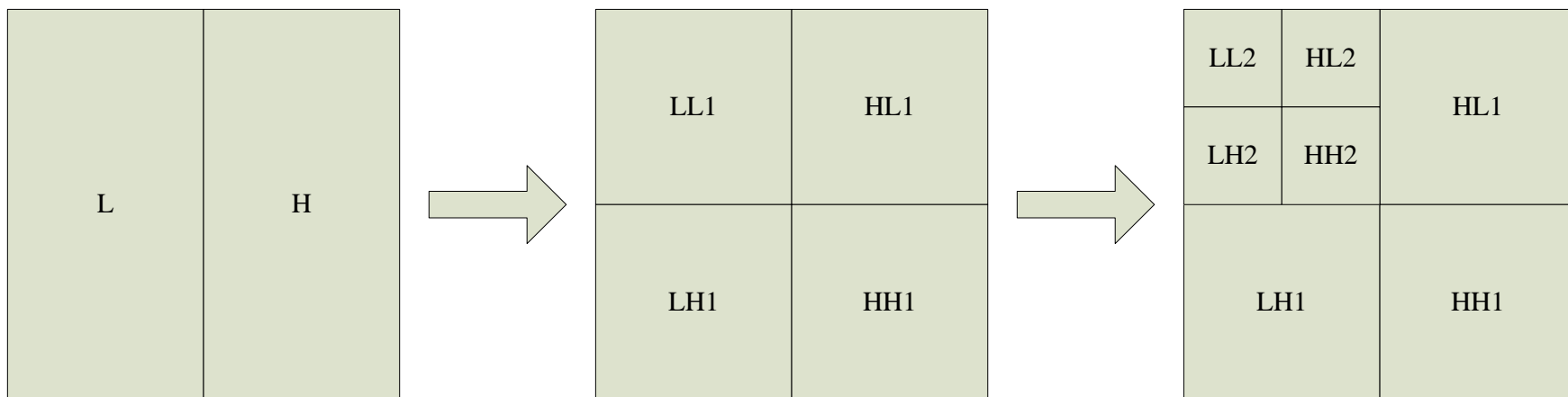
$$\psi_{(x,y)}^3 = \psi(x)\psi(y)$$

与 $\varphi(x, y)$ 一起就建立了二维小波变换的基础。

图像的小波变换实现

1. 正变换

图像小波分解的正变换可以依据二维小波变换按如下方式扩展，在变换的每一层次，图像都被分解为4个四分之一大小的图像。





图像的小波变换实现

- 在每一层，四个图像中的每一个都是由原图像与一个小波基图像的内积后再经过在 x 和 y 方向都进行二倍的间隔抽样而生成。对于第一个层次($j=1$)可写成：

$$A_2^0(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \varphi(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^1(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^1(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^2(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^2(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^3(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^3(x - 2m, y - 2n) \rangle$$



图像的小波变换实现

将上式内积改写成卷积形式，则得到离散小波变换的Mallat算法的通用公式：

$$A_{2^{j+1}}^0(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) h(x - 2m) h(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^1(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) h(x - 2m) g(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^2(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) g(x - 2m) h(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^3(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) g(x - 2m) g(y - 2n)$$

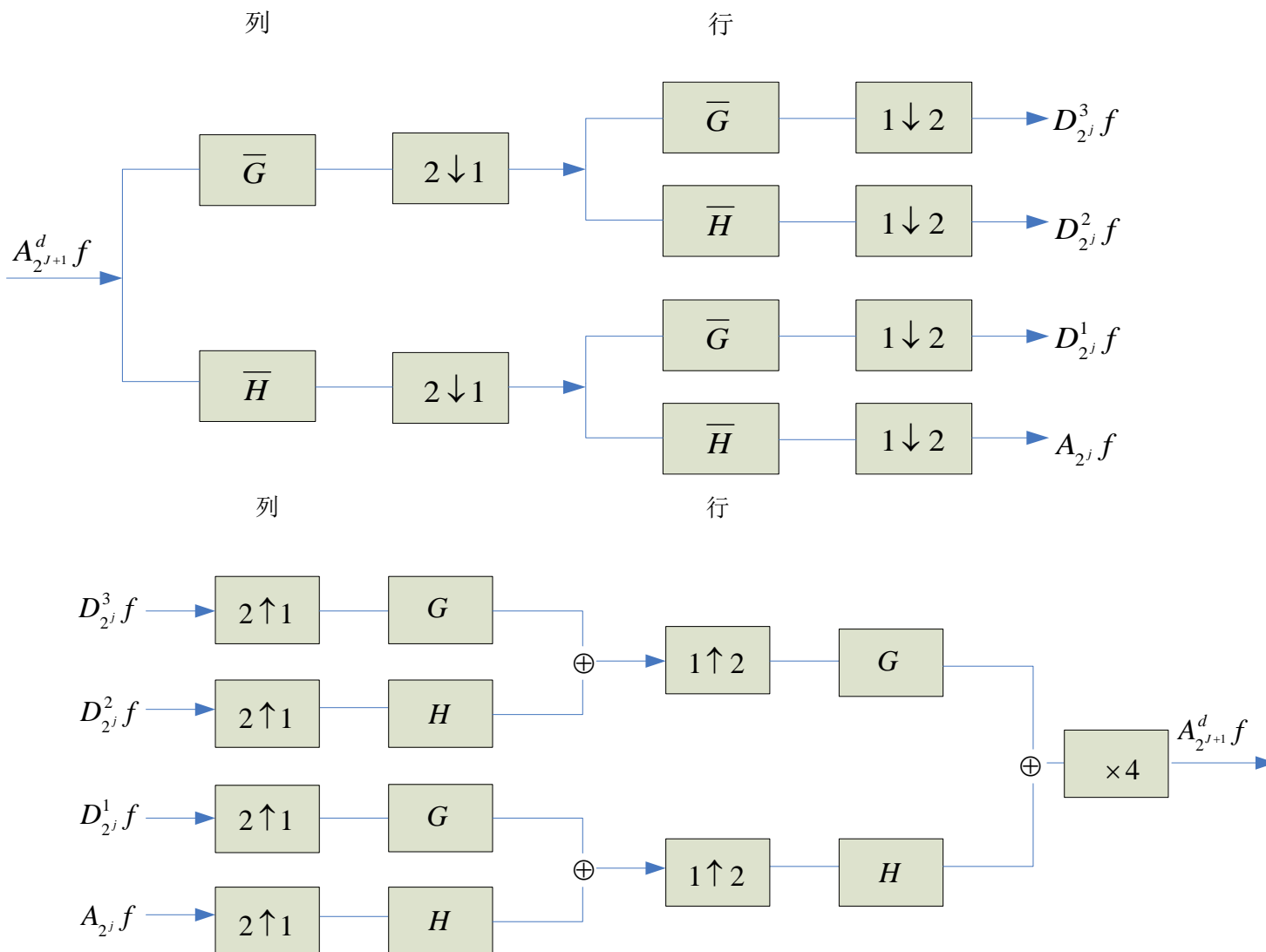


图像的小波变换实现

2. 逆变换

- 在每一层(如最后一层)都通过在每一列的左边插入一列零来增频采样前一层的4个阵列(即4个分解图像);
- 接着用重构低通滤波器 h 和重构高通滤波器 g 来卷积各行, 再成对地把这几个的阵列加起来;
- 然后通过每行上面再插入一列零来将刚才所得两个阵列(图像)的大小增频采样为 $N \times N$;
- 再用 h 和 g 与这两个阵列的每列进行卷积。这两个阵列的和就是这一层次重建的结果。

Mallat二维多分辨率分解与重构





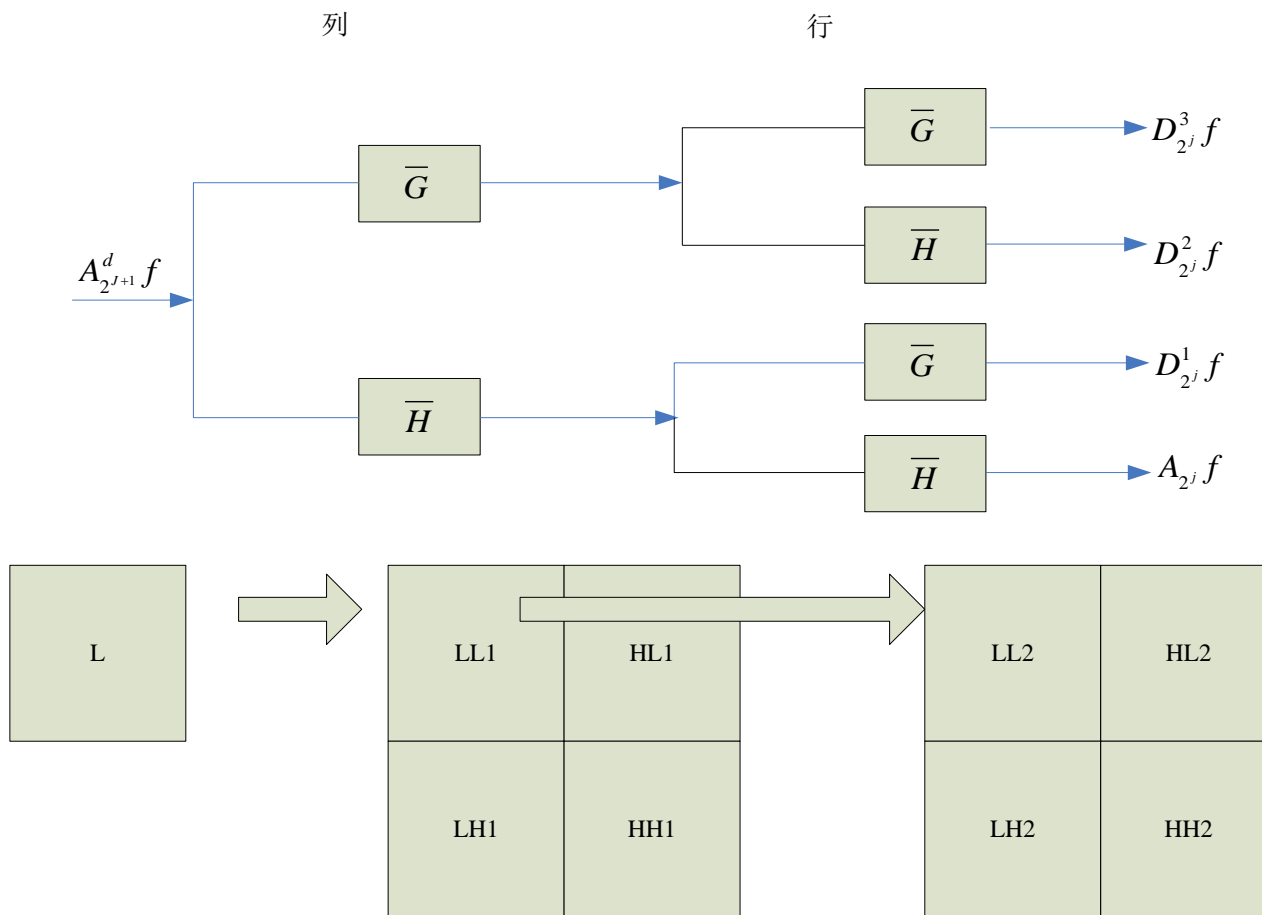
Mallat快速塔式分解





图像的小波变换实现

多孔算法



多孔算法的分解实验



7. 小波变换在图像边缘检测中的应用

边缘像素实质上是局部图像范围内灰度的急剧变化点(奇异点), 图像边缘就是二维图像中奇异点的集合。边缘点在频域表现为高频信号, 而图像噪声也多为高频信号, 这使得两者难以区分。边缘检测的目的就是既要将高频信号从图像中分离出来, 又要区分边缘与噪声, 准确地标定边缘的位置。



7.1 小波多尺度局部模极大值边缘检测的原理

假设 $\theta(x, y)$ 是二维平滑函数，且满足 $\iint \theta(x, y) dx dy \neq 0$
可把它沿 x, y 两个方向上的导数作为基本小波：

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \quad \Psi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}$$

$$\Psi_a^{(1)}(x, y) = \frac{1}{a^2} \Psi^{(1)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \quad \Psi_a^{(2)}(x, y) = \frac{1}{a^2} \Psi^{(2)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

对于一幅图像 $f(x, y)$ ，其小波变换为：

$$\begin{bmatrix} W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \\ W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \end{bmatrix} = 2^j \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) * \theta_a(x, y)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) * \theta_a(x, y)] \end{bmatrix} = 2^j \text{grad} [f(x, y) * \theta_a(x, y)]$$

7.1 小波多尺度局部模极大值边缘检测的原理

整个图像的二进小波变换即矢量：

$$\begin{bmatrix} W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \\ W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \end{bmatrix} = W_T f(2^j, x, y)$$

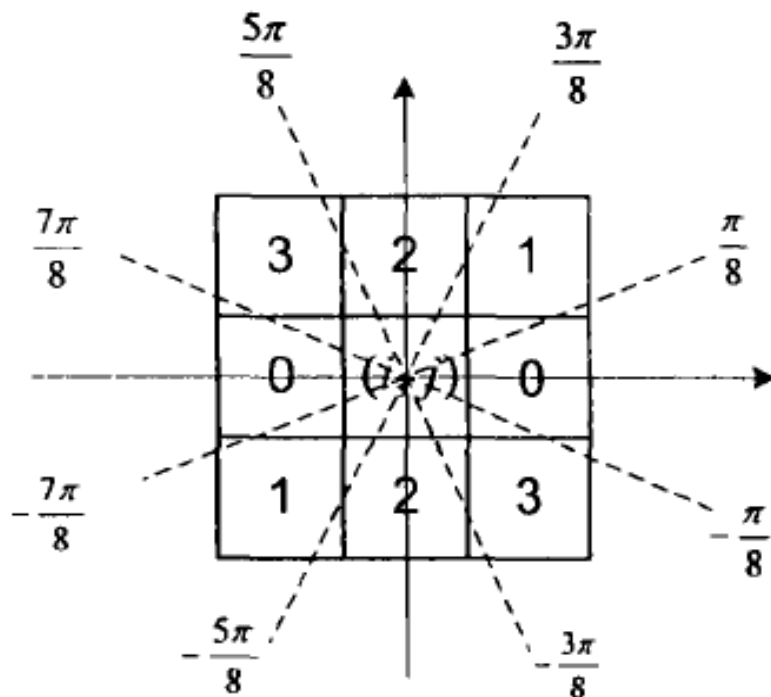
模值为： $\sqrt{\left| W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \right|^2 + \left| W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \right|^2}$

相角为： $Af_{2^j}(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left| W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \right|}{\left| W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \right|}$



7.2 小波多分辨率边缘检测的具体实现

搜寻模极大值：

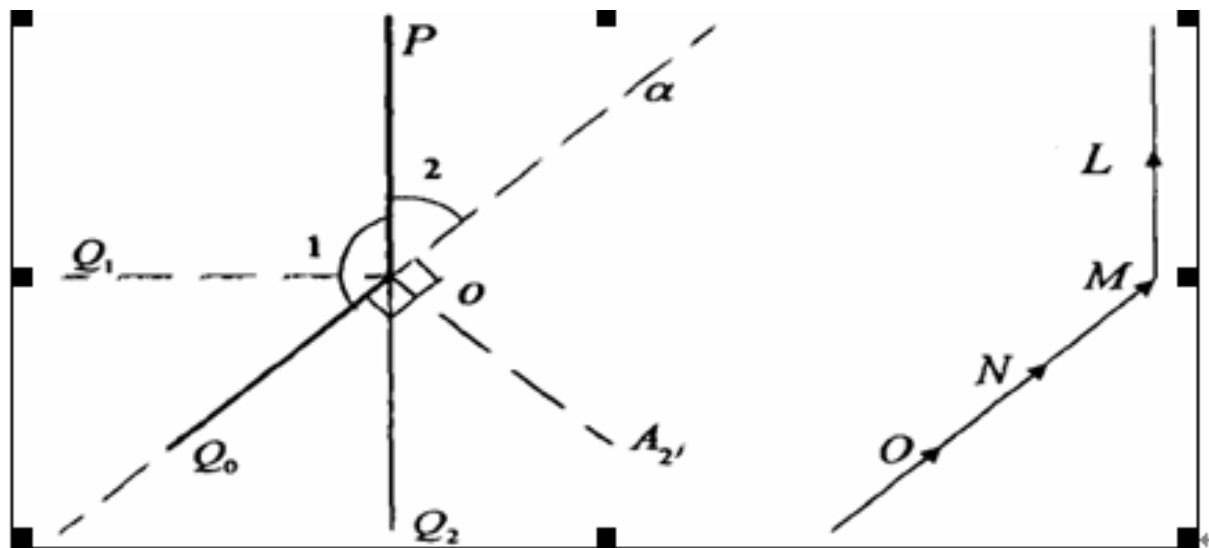


7.2 小波多分辨率边缘检测的具体实现

边缘点的链接：

边缘跟踪算法的四个约束条件：

- a) “方向不变性” 原则；
- b) 角度平滑条件；
- c) 幅值最邻近条件；
- d) “互认” 原则。



小波变换模极大值的多尺度综合方法

具体步骤：

- ①求出各尺度的模图像簇 $Mf(x, y)$ 和相角图像簇 $Af(x, y)$ ；
- ②对各尺度的边缘图像进行阈值处理；
- ③将相角 $Af_{2^j}(x, y)$ 按8方向量化，求出 $Mf_{2^j}(x, y)$ 在不同方向的局部模极大值点；
- ④由粗到细的边缘链接：对经过阈值处理的最粗分辨率级上的模极大值开始，链接模极大值图像中模值相近，相角相似的非零像素点，删除长度小于链长阈值的边缘链，得到大尺度下单像素宽的图像边缘 $E_{2^j}(x, y)$ ；

- ⑤针对尺度 j 的每一个边缘像素，搜索 $j-1$ 尺度下以这点为中心的 3×3 邻域，将该邻域内出现的所有可能边缘点均标记为候选边缘点，得到 $j-1$ 尺度下的候选边缘点图像 $H^{j-1}(x, y)$ 非候选边缘点标记为零；
- ⑥将 $j-1$ 尺度下的候选边缘点图像 $H^{j-1}(x, y)$ 中模值相近，相角相似的非零像素点链接，删除长度小于阈值的边缘链，得到 $j-1$ 尺度下单像素宽的图像边缘 $E_{2^{j-1}}(x, y)$ ；
- ⑦重复步骤⑤，⑥，直到 $j=1$ 为止，边缘图像即为综合后形成的边缘图像，也就是我们最终所要得到的边缘图像。



7.3 小波函数的选取

在实际边缘检测中，小波函数的选取直接关系到边缘检测的结果，小波变换相当于对图像进行带通滤波，在一定程度上减少了噪声对图像的影响，但同时也去掉了一些模糊边缘。这就要求寻找一种具有好的去噪特性同时又能精确地提取边缘的小波函数，而且这种小波在满足Canny准则的同时应具有有限紧支撑特性。在关于边缘提取的文献中，主要采用的是正交小波，双正交小波和B样条小波作为边缘提取的小波函数。通常选取高斯函数作为平滑函数。三次B样条函数已很接近高斯函数，能满足大多数的应用，而它的紧支性优于高斯函数。在有噪声环境下进行边缘检测时，需要平衡噪声抑制能力与边缘定位精度，此时三次B样条函数是最优的。



7.4 自适应阈值选取

选择一个窗口在小波系数上滑动，窗口大小可以取 32×32 或 16×16 ，将尺度下小于阈值 T_0 的梯度值置为0，自适应阈值为：

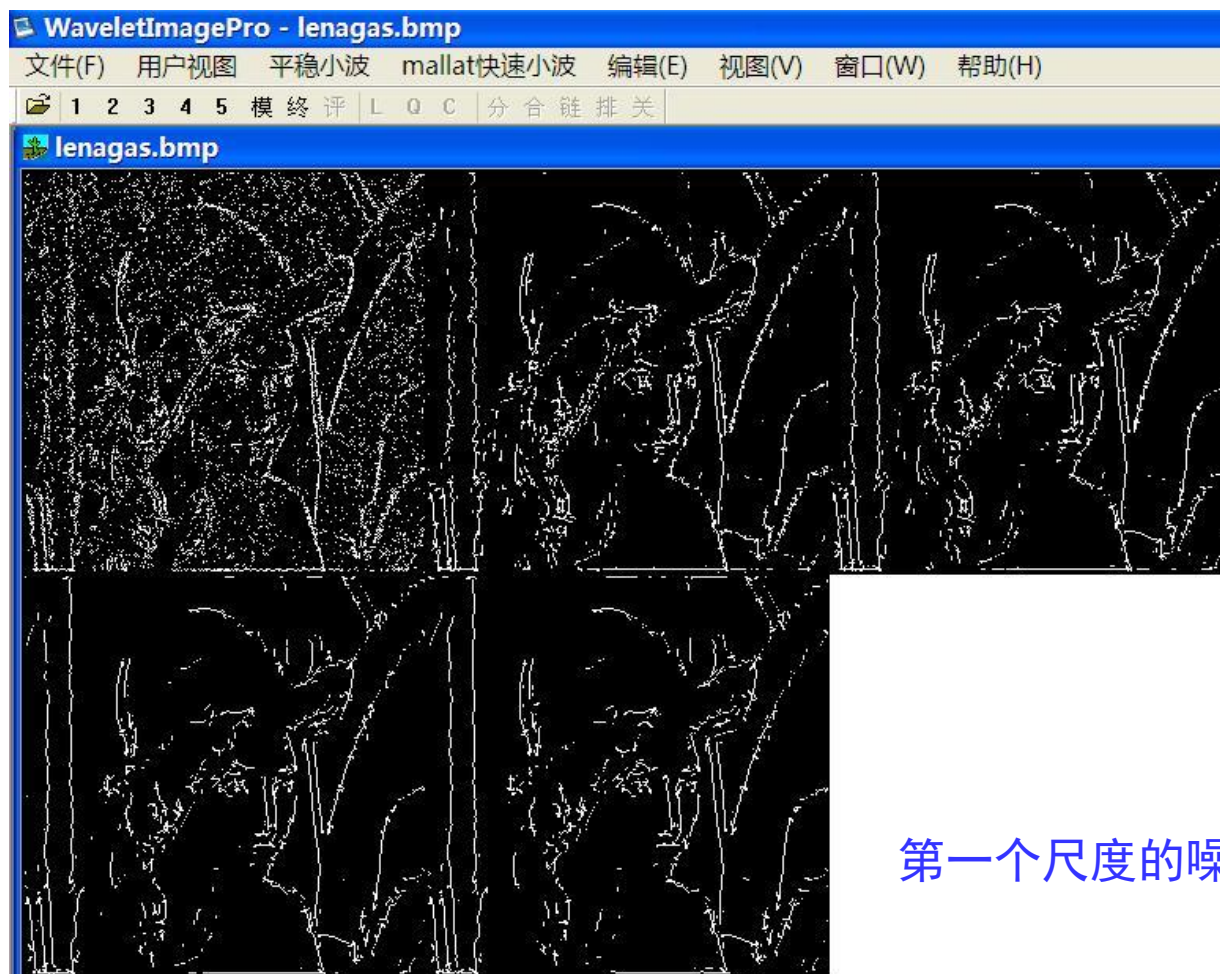
$$T_n = T_0 + \frac{\alpha_0}{N} \sum_{i,j} Mf_{i,j}$$

其中， T_0 为阈值初值， α_0 为比例系数， N 为采样点数。根据 T_0 和 α_0 的大小来决定窗口内均值对阈值的作用。



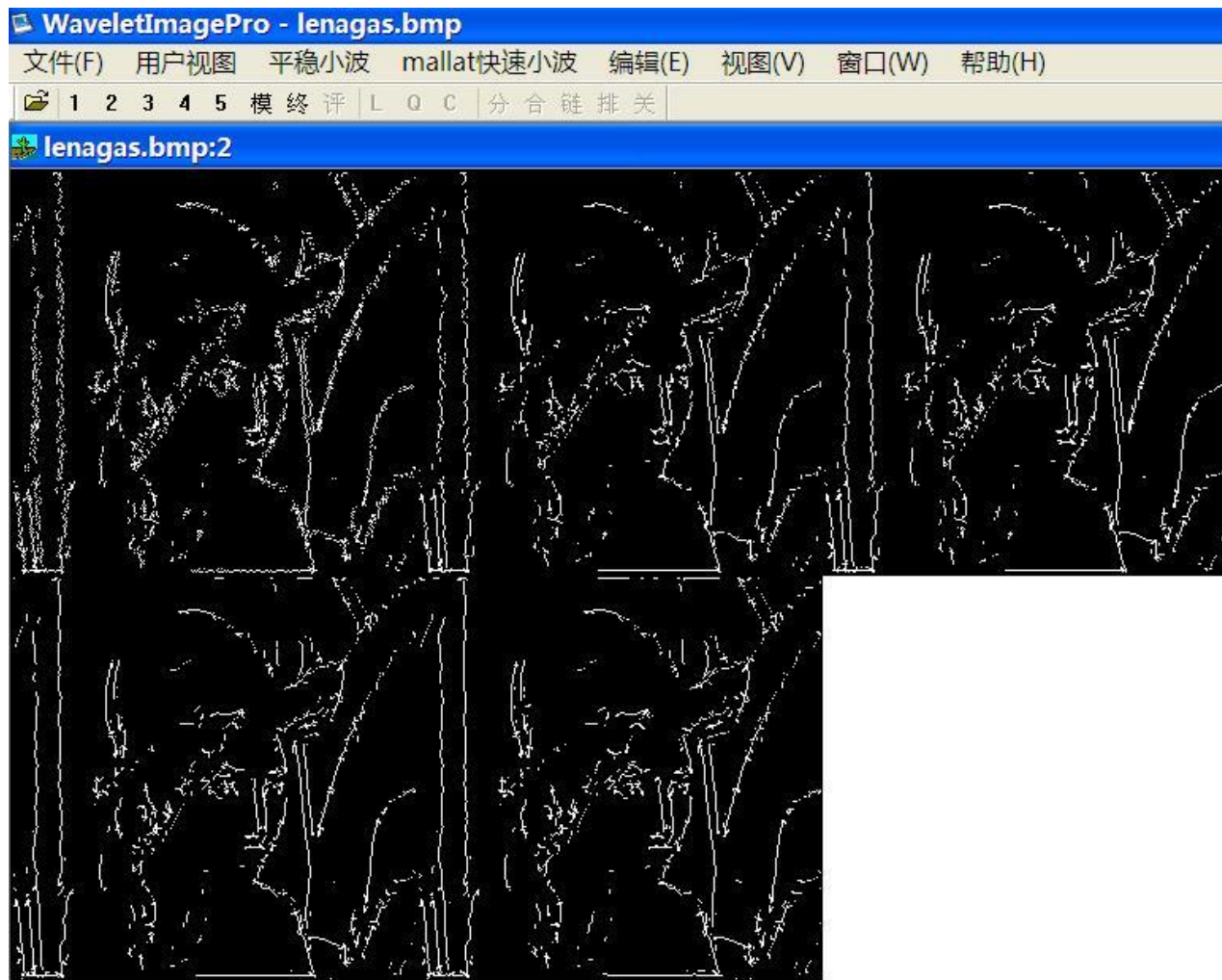
7.5 实验结果（一）

五个尺度的模极大值提取

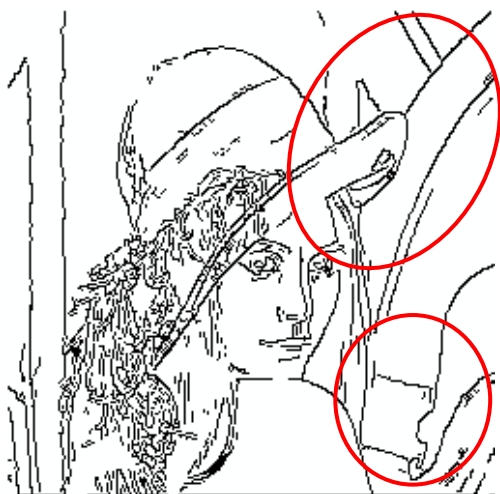


第一个尺度的噪声很多

多尺度链接后的模极大值



实验二：阈值的选取对边缘检测结果影响的实验



用固定阈值在一阶尺度提取的边缘



用自适应阈值在一阶尺度提取的边缘



用固定阈值在二阶尺度提取的边缘



用自适应阈值在二阶尺度提取的边缘

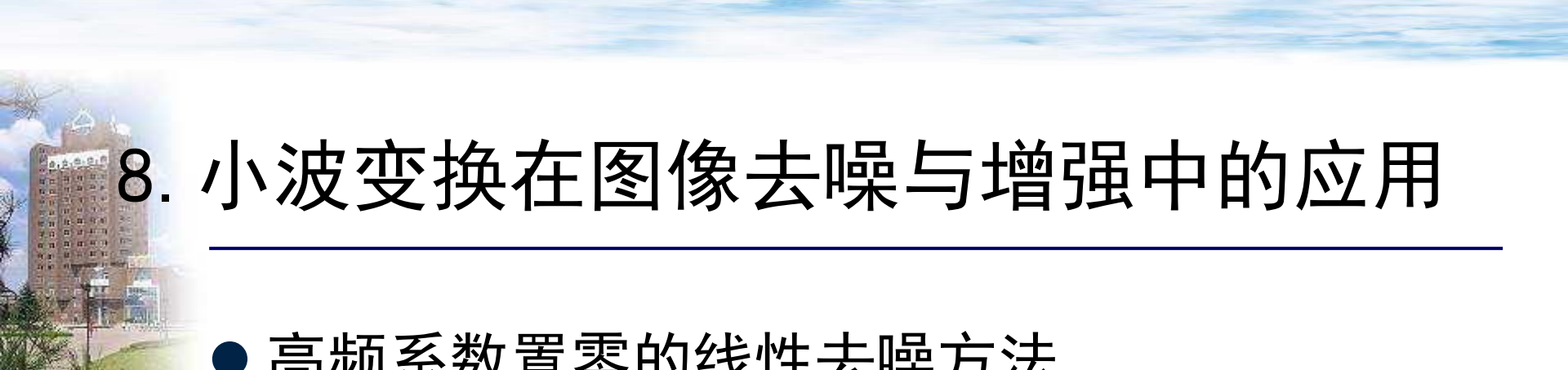
实验三：基于三次B样条小波的边缘检测实验

	抑制噪声方面 (加入均值为0，方差为0.001的高斯噪声)	提取边缘能力方面 (对比度为2%的低对比度边缘)	计算量方面 (基于双DSP平台)
Roberts	最差，无法分离边缘与噪声	最差，边缘定位不准确	1.34ms
Sobel	性能优于Roberts	优于Roberts	1.62ms
拉普拉斯高斯算子	优于Roberts和Sobel，能部分检测出边缘	效果优于Roberts和Sobel	2.69ms
小波模极大值方法	优于上面三种方法，能检测出主要边缘	很好，少部分提取的不准确	18.9ms
小波多尺度综合方法	效果最好，检测出的边缘受噪声影响很小	最好，几乎能提取出全部微弱边缘信息	59.2ms



小 结

- 由于小波变换具有多分辨分析特性和时频局部化能力，在边缘检测、去噪和图像增强等方面都具有很强的优势；
- 更适合用来检测受噪声污染严重的模糊图像和低对比度图像，尤其对微弱目标，它首先能抑制噪声、增强对比度，然后利用多尺度的模极大值方法有效检测出目标边缘，从而实现3%对比度下的目标精确定位；
- 这种算法要进行多尺度运算，所以计算量很大。

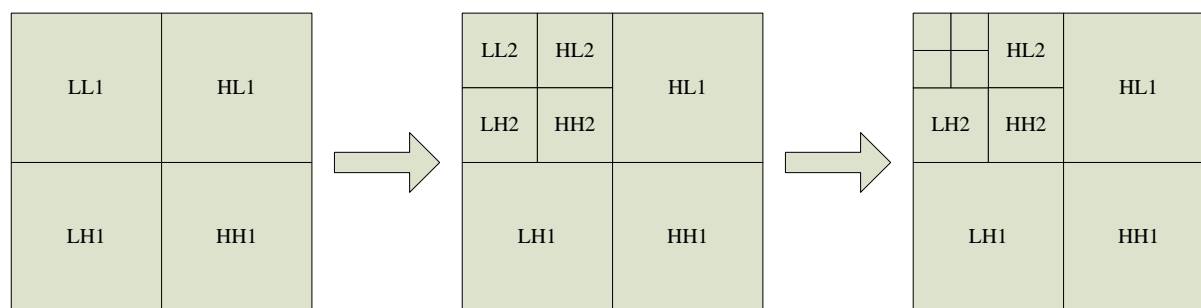


8. 小波变换在图像去噪与增强中的应用

- 高频系数置零的线性去噪方法
- 小波系数硬阈值去噪方法
- 小波系数软阈值去噪方法
- 小波系数自适应阈值去噪方法
- 基于小波模极大值的去噪方法
- 基于信号奇异性的去噪方法
- 基于小波系数相关性的去噪方法
- 基于小波变换的图像增强方法

8.1 高频系数置零去噪

1. 对噪声图像进行二维离散小波分解，分解层数一般取2或3层，分解过程如下图。
2. 对每一层的高频系数LH，HL，HH，置零。
3. 对小波系数进行重构。



这是最简单的利用小波变换性质的去噪方法。



8.2 基于小波硬阈值的去噪方法

1. 首先将图像信号求小波变换。
2. 除了最粗尺度信号外，将各细节信号作阈值处理，当某位置小波变换值大于阈值时，保留原值，否则置零。即

$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} W^i y_{j,(k,l)}, & |W^i y_{j,(k,l)}| \geq \lambda \\ 0, & |W^i y_{j,(k,l)}| < \lambda \end{cases}$$

3. 利用小波变换重构，求出信号的滤波值。



8.3 基于小波软阈值的去噪方法

1. 首先对图像信号进行小波变换，得出带有噪声的小波系数。
2. 将各细节信号作阈值处理，当某位置小波变换值大于阈值时，作下面运算，下式中 $\text{sgn}(x)$ 代表符号函数

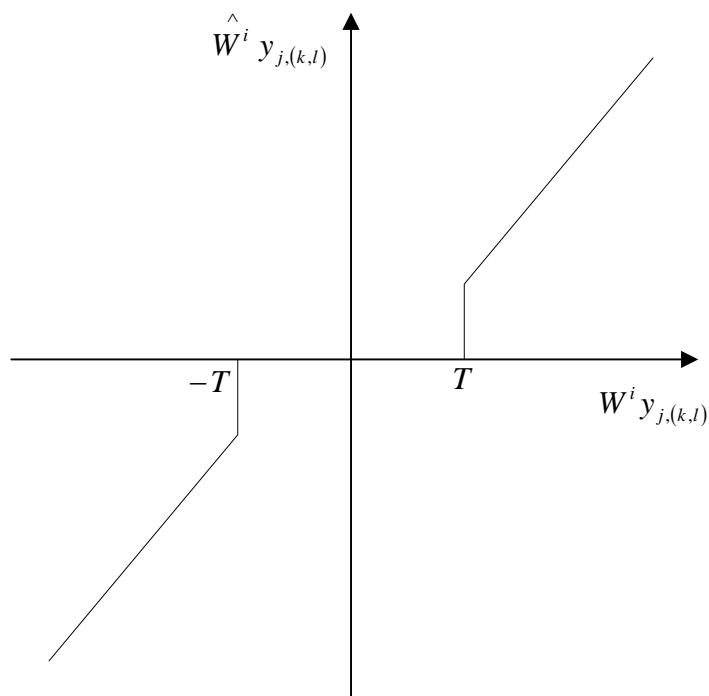
$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} \text{sgn}(W^i y_{j,(k,l)}) * [|W^i y_{j,(k,l)}| - \lambda], & |W^i y_{j,(k,l)}| \geq \lambda \\ 0, & |W^i y_{j,(k,l)}| < \lambda \end{cases}$$

否则置零。

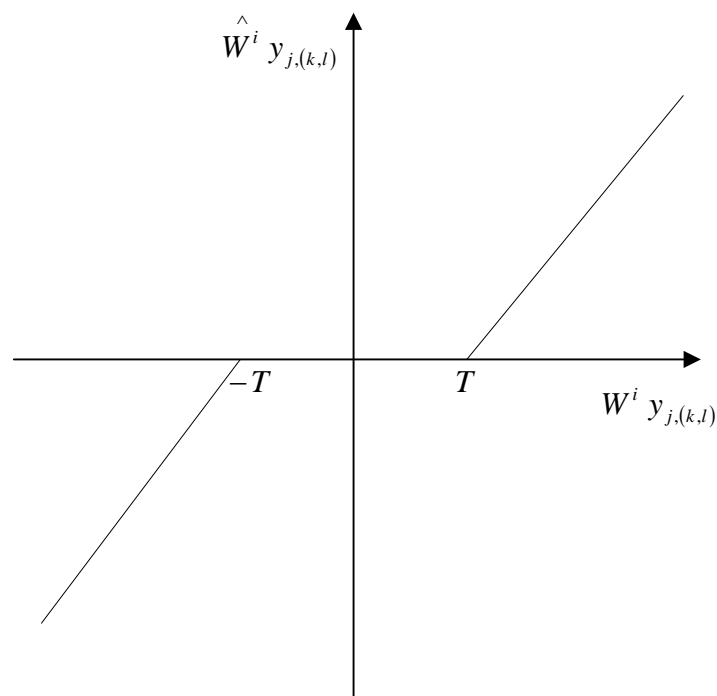
3. 利用小波变换重构，求出信号的滤波值。

8.3 基于小波软阈值的去噪方法

软硬阈值滤波器



硬阈值去噪滤波器



软阈值去噪滤波器



8.4 非线性软阈值去噪方法

$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} W^i y_{j,(k,l)} - \frac{\lambda}{2^j} & W^i y_{j,(k,l)} > \lambda \\ 0 & W^i y_{j,(k,l)} \leq \lambda \\ W^i y_{j,(k,l)} + \frac{\lambda}{2^j} & W^i y_{j,(k,l)} < -\lambda \end{cases}$$



8.4 非线性软阈值去噪方法

阈值选取

1. $T = \sigma \sqrt{2 \log n}$
2. $T = 0.3 \sigma \sqrt{2 \log n}$
3. $T = \sigma \sqrt{\frac{2 \log(n)}{n}}$
4. $T = 3\sigma$

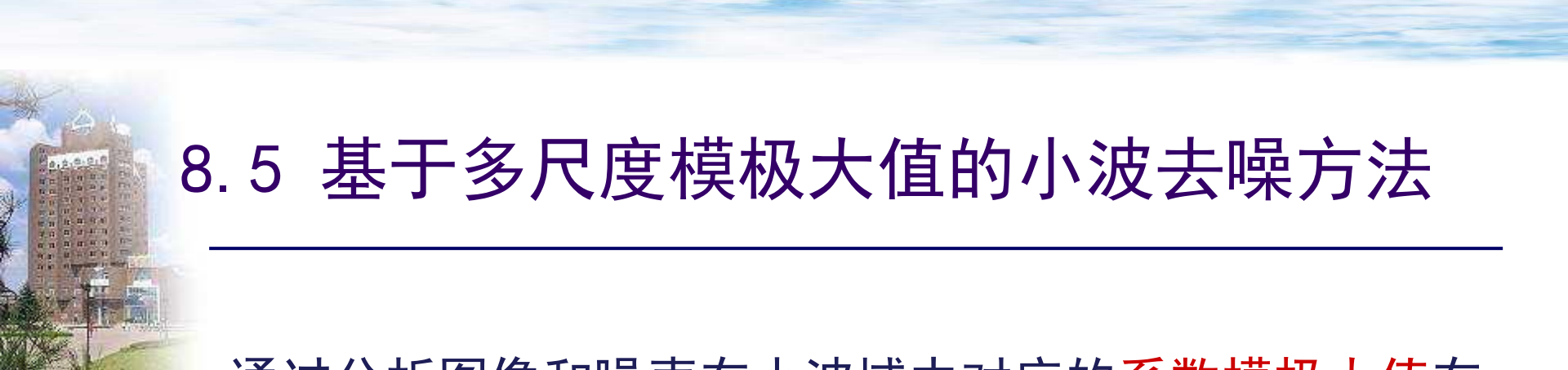
其中，噪声方差的估计为 $\sigma = MAD/0.6745$ ， MAD 为图像中位值， n 为信号采样点数。



对含有高斯噪声的Lena图像利用硬阈值法、软阈值法和自适应阈值法去噪后实验结果

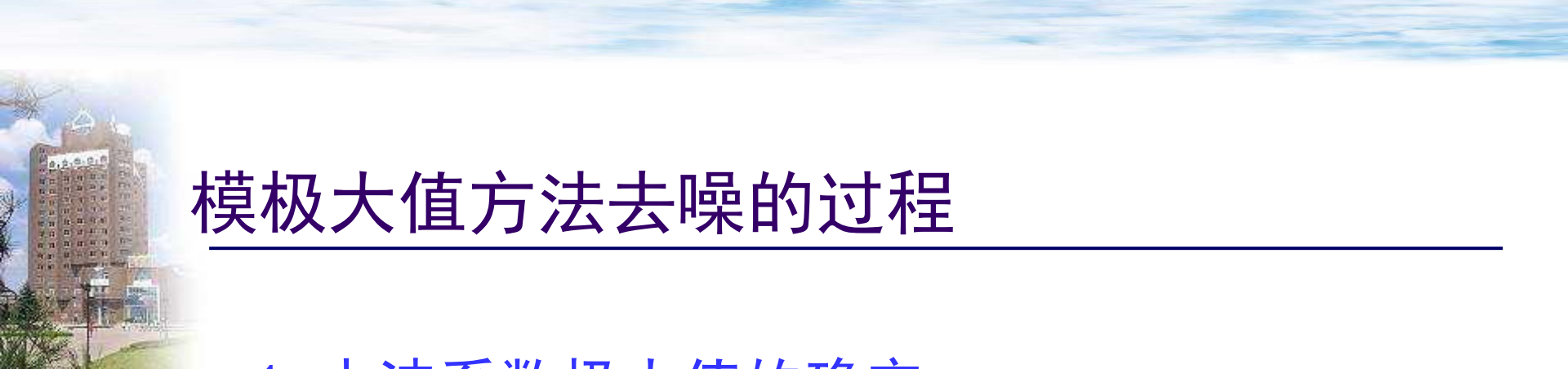
基于小波变换阈值方法去噪的不足

- (1) 只适合高斯白噪声的去噪，对椒盐噪声效果不明显。原因在于阈值法保留的是大于阈值的小波系数，而椒盐噪声在图像上表现为或者是灰度值特别大的白像素，或者特别小的黑像素，椒盐噪声的小波系数都很大，所以不能用阈值分离出来。
- (2) 阈值方法的去噪效果依赖于信噪比的大小，它特别适合信噪比高的图像去噪。
- (3) 在图像信号不连续点处会有伪吉普斯现象。
- (4) 阈值方法的关键在于阈值的选取，而选择一种普适性很好的阈值选取方法是很困难的，事实上，人们已经证明在均方误差意义上阈值方法能得到原始图像信号的最优估计，然而在实际应用中还是需要根据具体的情况和经验来对一些阈值进行改进。



8.5 基于多尺度模极大值的小波去噪方法

通过分析图像和噪声在小波域中对应的**系数模极大值**在不同尺度上的分布情况，来研究图像和噪声的突变点在不同尺度上的**传递特性**。在从低到高的分解尺度中，图像突变点对应的小波系数极大值具有传递性，而噪声突变点不具有这种传递性。根据这一性质，在确定出各尺度小波系数极大值的基础上，由粗到精的跟踪不同尺度上的小波系数极大值，并依据其不同尺度间的传递性，识别信噪属性，剔除噪声部分对应的小波系数极大值，从而抑制噪声，提高图像质量。



模极大值方法去噪的过程

1. 小波系数极大值的确定
2. 图像极大值跟踪
3. 噪声极大值滤除

模极大值多尺度链接方法对高斯噪声 图像去噪的实验结果



对含有高斯噪声（ $\sigma^2 = 0.01$ ）的Lena图像利用多尺度模极大值链接方法去噪后图像

模极大值多尺度链接方法对椒盐噪声 图像去噪的实验结果



对含有椒盐噪声（ $\sigma^2 = 0.005$ ）的图像利用多尺度模极大值链接方法去噪后图像

基于多尺度模极大值奇异性对椒盐噪声的去噪实验结果



含有椒盐噪声的图像、均值滤波去噪图像、中值滤波去噪图像、硬阈值去噪图像、软阈值去噪图像和模极大值奇异性去噪图像的实验结果对比

模极大值多尺度链接方法对混和噪声图像的去噪实验



含有高斯和椒盐混合噪声图像、硬阈值去噪图像、软阈值去噪图像、自适应阈值去噪图像、中值滤波去噪图像和模极大值多尺度链接去噪图像



8.6 基于小波系数相关性的去噪方法

信号与噪声的小波变换在各尺度下的不同传播特性表明，信号的小波变换在各尺度间有较强的相关性，而且在边缘处具有很强的相关性；而噪声的小波变换在各尺度间确没有明显的相关性，而且噪声的小波变换主要集中在小尺度各层次中。根据信号与噪声的小波变换在不同尺度间的上述不同特点，可以通过将相邻尺度的小波系数直接相乘来增强信号，抑制噪声。由于噪声主要分布在小尺度上，所以这种现象在小尺度上非常明显。



8.6 基于小波系数相关性的去噪方法

定义 $Cor(j, n) = W_{2^j} f(n) \cdot W_{2^{j+1}} f(n)$ 为尺度 j 上 n 点处的相关系数。为使相关系数与小波系数具有可比性，定义规范化相关系数：

其中
$$NCor(j, n) = Cor(j, n) \sqrt{PW(j) / PCor(j)}$$

$$PW(j) = \sum_n W_{2^j} f(n)^2$$

$$PCor(j) = \sum_n Cor(j, n)^2$$

$PW(j)$ 和 $PCor(j)$ 分别表示对应于尺度的小波系数与相关系数的能量。显然，在尺度 j 下，小波系数与规范化相关系数具有相同的能量，这为它们之间提供了可比性。

基于小波系数相关法去噪的实验结果（一）



($\sigma^2 = 0.01$) Lena图像和基于小波系数相关法去噪后的图像



小 结

- 对小波系数使用阈值的去噪方法速度快，实现简单，所以一直被广泛使用在高斯噪声去除上，其中的硬阈值方法容易产生伪吉普斯效应，软阈值方法克服了这个缺点，图像比较平滑，去噪效果也比硬阈值好，而自适应阈值使用的是局部阈值，比软、硬阈值都好。
- 模极大值多尺度链接和小波系数相关去噪两种方法虽然速度都比较慢，但是它们都比阈值方法效果好，对各种噪声效果都比较稳定，特别是对混杂噪声的去除方面。但是在椒盐噪声图像的去噪方面，只有模极大值链接的方法有效果，而且比传统的中值滤波方法要保留更多的边缘信息。在对同时带有高斯噪声和椒盐噪声的图像去噪时，模极大值链接的方法去噪效果非常突出，而且稳定。