第七章习题课

- 状态反馈不改变系统的能控性（证明）。状态反馈可任意配置系统闭环极点的充要条件是系统能控。若系统不能控，则进行能控性分解，能控子系统可以任意配置，不能控部分无法改变。
- 状态反馈不改变传递函数的零点（会改变能观性）。
- $u = r - kx$ 求 k，使用待定系数法或者标准型法。
- 状态观测器：渐近状态观测器存在的充要条件是系统能检测。系统能观只是渐近状态观测器存在的充分条件。
- 分离定理：状态观测器的引入，不影响状态反馈配置的系统特征值；状态反馈的引入，不影响状态观测器的特征值。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-bk & bk \\ 0 & A-lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

- 系统（1.1）的闭环传递函数 $\hat{g}_f(s) = c(sI - A + bk)^{-1} b$，也就是等于未加观测器时系统的传递函数。为什么？在计算传递函数时，所有初始状态都假设为 0，$x(0) = \hat{x}(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t)$ for all t.有没有状态观测器无影响。
- 降维状态观测器设计：龙伯格观测器设计步骤、李雅普诺夫方程法设计步骤。

第七章作业题

7.1 将下面动态方程等价变换成两种能控规范型动态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

方法 1：求出 $g(s)$，然后直接写出能控标准型。方法 2：利用变换矩阵，求出能控标准型。

解：先求传递函数为 $G(s)=\dfrac{2s^2+3s+1}{s^3+3s^2+5s+5}$

下友型能控标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -5 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}x$$

右友型能控标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}x$$

或者利用变换矩阵：$\bar{A}=PAP^{-1}$，$\bar{B}=PB$，$\bar{C}=CP^{-1}$ 。$\det(A)=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$

下友型：

$$P^{-1}=Q=\left[b, Ab, A^2b\right]\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 1\\ \alpha_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

上友型：

$$P^{-1}=Q=\left[b, Ab, A^2b\right]\begin{bmatrix}1 & \alpha_2 & \alpha_1\\ 0 & 1 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

左友型：

$$P^{-1}=Q=\left[b, Ab, A^2b\right]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

右友型：

$$P^{-1}=Q=\left[b, Ab, A^2b\right]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.3 试用状态反馈法将 7.1 中 a 组动态方程的特征值安排为 $-2\pm 2j,-4$。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

解：1.待定系数法：

$M_c=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$，系统能控

令 $u=r-kx,k=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$，则

$$A-bk=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-2k_1 & -2-2k_2 & -2-2k_3\\ 0 & -1 & 1\\ 1-k_1 & -k_2 & -1-k_3\end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A+bk)=s^3+(3+2k_1+k_3)s^2+(5+2k_1+k_2+4k_3)s+(5-2k_1+3k_2+3k_3)$$

要求 $\det(sI-A+bk)=(s+4)(s+2-j2)(s+2+j2)=s^3+8s^2+24s+32$，

故 $\begin{cases}3+2k_1+k_3=8\\ 5+2k_1+k_2+4k_3=24\\ 5-2k_1+3k_2+3k_3=32\end{cases}\quad => k=\begin{bmatrix}1.5 & 8 & 2\end{bmatrix}$

2.构造法：

$\det(sI-A)=s^3+3s^2+5s+5$，$\alpha=\begin{bmatrix}5 & 5 & 3\end{bmatrix}$，$\bar{\alpha}=\begin{bmatrix}32 & 24 & 8\end{bmatrix}$，

$\bar{k}=\bar{\alpha}-\alpha=\begin{bmatrix}27 & 19 & 5\end{bmatrix}$，$k=\bar{k}\bullet P$，其中 $P^{-1}=M_cM_{c1}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$k=\begin{bmatrix}1.5 & 8 & 2\end{bmatrix}$。

7.7 设系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

问能否求出状态反馈行向量 K 使得闭环系统的特征值为

a)-2 -2 -1 -1　　b) -2 -2 -2 -1　　c) -2 -2 -2 -2

解: 第一种方法: 设置状态反馈行向量 K, 利用待定系数法分别进行三种给定特征值下的 K 。根据能否求出 K 即可得到答案。

第二种方法：计算 M_c，求出 M_c 的秩为 3，进行能控性分解，得到那个不能控子空间的极点是-1，所以系统的极点中**必然含有一个-1**，其他的 3 个状态能控，可以根据需要任意配置极点的位置。所以答案是 a、b 两种情况可以而 c 不可以。

Remark: 系统不能控部分特征值完全属于期望闭环特征值, 则必存在状态反馈行向量 K 实现指定期望极点配置。

7.11 用两种不同的方法求 7.1 (a) 动态方程的三维状态观测器，要求观测器的特征值为-2，-2，-3。

解：首先判断系统的能观性：$M_o=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$，满秩，故系统能观（充分条件）。(不能忘)

方法一：待定系数法：设 $L=[l_1,l_2,l_3]^T$，则

$$A-Lc=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}-[l_1,l_2,l_3]^T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}^T$$

可得：$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I - A + Lc) \\ &= \lambda^3 + (l_1 + l_2 + 3)\lambda^2 + (2l_1 - l_3 + 5)\lambda + 2l_1 + l_2 - 3l_3 + 5 \end{aligned}$$

且由题可得给出的特征值为-2，-2，-3 故目标特征多项式为：

$f_\lambda = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$

故可解得：$l_1 = 6, l_2 = -2, l_3 = 1$

$L = [6, -2, 1]^T$

故所求的状态观测器为：$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - Lc)\hat{x} + bu + Ly \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$ 要写出。

方法二：构造法

$(A - Lc)^T = A^T - c^T L^T$ 与 $A - bk$ 结构相似，故可用书中的公式配置（公式位置：课本第 249 页）

A^T 的特征多项式为：

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 5$$

目标特征多项式为：

$f_\lambda = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$

故 $k_1 = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 4 \end{bmatrix}$，$M_{CC}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, P^{-1} = M_C M_{CC}^{-1}$

故 $k = L^T = k_1 \times P = [6, -2, 1]$

故：$L = [6, -2, 1]^T$

所求的状态观测器为：$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - Lc)\hat{x} + bu + Ly \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

7.12 求 7.1（a）中动态方程的降维观测器，要求特征值-2、-3。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

解：

$M_o=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$，满秩，故系统能观

书上方法

取$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},Q=P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$\overline{A}=PAQ=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$，$\overline{b}=Pb=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$

$\overline{c}=cQ=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

故 $A_{22}=-1$ ， $A_{21}=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}$ ， $A_{12}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ， $A_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ ，

$$\dot{\hat{x}}_1=\left(A_{11}-LA_{21}\right)\hat{x}_1+\left(A_{12}y+B_1u\right)+L\left(\dot{y}-A_{22}y-B_2u\right)$$

$$A_{11}-LA_{21}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2l_1 & 1+l_1\\ -1+2l_2 & -1+l_2\end{bmatrix}$$

$\det(sI-A_{11}+LA_{21})=s^2+(2-2l_1-l_2)s-l_1-3l_2+2=(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$，

故$L=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$，将以上结果分别带入下式：

$$z=\hat{x}_1-Ly\Rightarrow z=\left(A_{11}-LA_{21}\right)z+\left(B_1-LB_2\right)u+\left[\left(A_{11}-LA_{21}\right)L+A_{12}-LA_{22}\right]y$$

$$\hat{x}=P^{-1}\begin{bmatrix}I & L\\ O & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix}$$

李雅普诺夫方程法：

取$F=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$，$L=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，则（F，L）能控。

解李雅普诺夫方程：

$TA - FT = Lc$

可得$T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$P = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 非奇异。

所以 2 维状态观测器：$\dot{z} = Fz + TBu + Ly, \hat{x} = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \cdots\cdots$

7.13 对传递函数

$$g(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

设原系统为 3 阶能观标准型系统，进行状态反馈，使其传递函数变为：

$$\bar{g}(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)},$$

并求状态反馈向量为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$时，满足题目要求的系统实现。

解： 原系统的右友型能观标准型实现：

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，因为$M_C$ 满秩，所以系统能控。引入：

$u = r - kx, k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

$$\det(sI - A + bk) = s^3 + (2 - 2k_1 + k_2 + k_3)s^2 + (2k_1 + 5k_2 + k_3 - 5)s + (16k_1 + 2k_2 - 2k_3 - 6)$$
$$= s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

故$k = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 & 5.5 \end{bmatrix}$

4. $k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$时，求实现

方法 1：设系统实现为(A, B, C)，对其进行线性变换为$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$。

其中$\bar{A} = PAP^{-1}$，$\bar{B} = PB$，$\bar{C} = CP^{-1}$，则$k = \bar{k}P$，其中$\bar{k} = \begin{bmatrix} 18 & 21 & 5 \end{bmatrix}$显然 P 有无穷多个解。

方法 2：直接给出 $\bar{g}(s)$ 的一个实现，根据状态反馈下**闭环系统**状态空间方程反解出 (A,B,C)。

7.14. 证明：$(n-r)$ 维状态观测器仍具有分离特性。分离性可以理解为特征值具有分离性：状态观测器的引入，不影响状态反馈配置的系统特征值；状态反馈的引入，不影响状态观测器的特征值。

证明：令 $P=\begin{bmatrix} c \\ P_{n-r} \end{bmatrix}, Q=P^{-1}=\begin{bmatrix} Q_r & Q_{n-r} \end{bmatrix}$，$\bar{A}=PAQ, \bar{b}=Pb, \bar{c}=cQ, \bar{x}=Px$，

则 $\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_a \\ \dot{\bar{x}}_b \end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{B}_a \\ \bar{B}_b \end{bmatrix}u$，按书上方法进行降维观测。

状态反馈 $u=r-k\hat{x}=r-kQ\hat{\bar{x}}=r-kQ_r\hat{\bar{x}}_a-kQ_{n-r}\hat{\bar{x}}_b=r-kQ_r\bar{x}_a-kQ_{n-r}\hat{\bar{x}}_b$，

则有：

$$\dot{\bar{x}}_a=\bar{A}_{aa}\bar{x}_a+\bar{A}_{ab}\bar{x}_b+\bar{B}_a u=(\bar{A}_{aa}-\bar{B}_a kQ_r)\bar{x}_a+\bar{A}_{ab}\bar{x}_b-\bar{B}_a kQ_{n-r}\hat{\bar{x}}_b+\bar{B}_a r$$

$$\dot{\bar{x}}_b=\bar{A}_{ba}\bar{x}_a+\bar{A}_{bb}\bar{x}_b+\bar{B}_b u=(\bar{A}_{ba}-\bar{B}_b kQ_r)\bar{x}_a+\bar{A}_{bb}\bar{x}_b-\bar{B}_b kQ_{n-r}\hat{\bar{x}}_b+\bar{B}_b r$$

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u=\bar{A}\bar{x}-\bar{B}kQ\hat{\bar{x}}+\bar{B}r=\bar{A}\bar{x}-\bar{B}kQ\bar{x}+\bar{B}kQ\bar{x}-\bar{B}kQ\hat{\bar{x}}+\bar{B}r$$
$$=(\bar{A}-\bar{B}kQ)\bar{x}+\bar{B}kQ(\bar{x}-\hat{\bar{x}})+\bar{B}r$$

令 $\tilde{\bar{x}}_b=\bar{x}_b-\hat{\bar{x}}_b$，则 $\bar{x}-\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix} 0_r \\ \tilde{\bar{x}}_b \end{bmatrix}$，

于是 $\dot{\bar{x}}=(\bar{A}-\bar{B}kQ)\bar{x}+\bar{B}kQ(\bar{x}-\hat{\bar{x}})+\bar{B}r=(\bar{A}-\bar{B}kQ)\bar{x}+\bar{B}kQ_{n-r}\tilde{\bar{x}}_b+\bar{B}r$

而因为

$$\dot{\hat{\bar{x}}}=(\bar{A}_{bb}-L\bar{A}_{ab})\hat{\bar{x}}_b+Ly_b+\begin{bmatrix} \bar{A}_{ba} & \bar{B}_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_a \\ u \end{bmatrix}$$
$$=(\bar{A}_{ba}-\bar{B}_b kQ_r)\bar{x}_a+L\bar{A}_{ab}\bar{x}_b+(\bar{A}_{bb}-L\bar{A}_{ab}-\bar{B}_b kQ_{n-r})\hat{\bar{x}}_b+\bar{B}_b r$$

故 $\dot{\tilde{\bar{x}}}_b=\dot{\bar{x}}_b-\dot{\hat{\bar{x}}}_b=(\bar{A}_{bb}-L\bar{A}_{ab})\tilde{\bar{x}}_b$

于是$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}_b\end{bmatrix}_{(2n-r)\times 1}=\begin{bmatrix}\bar{A}-\bar{B}kQ & \bar{B}kQ_{n-r}\\ 0_{(n-r)\times n} & \bar{A}_{bb}-L\bar{A}_{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \tilde{x}_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}\\ 0_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}r$

则$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}_b\end{bmatrix}_{(2n-r)\times 1}=\begin{bmatrix}A-Bk & BkQ_{n-r}\\ 0_{(n-r)\times n} & \bar{A}_{bb}-L\bar{A}_{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}r$

故状态反馈参数设计和观测器参数设计可以分别独立完成，具有分离特性。

补充习题：LTI 系统输出反馈、状态反馈、输出内反馈下**闭环系统**状态空间方程和传递函数。

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

1. 输出反馈：$u=v-Hy$

$$\begin{cases}\dot{x}=\left[A-BH\left(1+DH\right)^{-1}C\right]x+\left[B-BH\left(1+DH\right)^{-1}D\right]v\\ y=\left(1+DH\right)^{-1}Cx+\left(1+DH\right)^{-1}Dv\end{cases},$$

$$\hat{G}(s)=\left(1+DH\right)^{-1}C\left[sI-A+BH\left(1+DH\right)^{-1}C\right]^{-1}\left[B-BH\left(1+DH\right)^{-1}D\right]+\left(1+DH\right)^{-1}D$$

2. 状态反馈：$u=v-Kx$

$$\begin{cases}\dot{x}=\left(A-BK\right)x+Bv\\ y=\left(C-DK\right)x+Dv\end{cases}$$

$$\hat{G}(s)=\left(C-DK\right)\left(sI-A+BK\right)^{-1}B+D$$

3. 输出内反馈：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Ly\\ y=Cx+Du\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=\left(A+LC\right)x+\left(B+LD\right)u\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

$$\hat{G}(s)=C\left(sI-A-LC\right)^{-1}\left(B+LD\right)+D$$
