理论力学总复习

复习大纲

- [x] 物体机械运动的基本规律
    - [x] 物体运动的描述
    - [x] 惯性定律和伽利略相对性原理
    - [x] 牛顿运动定律和力的独立作用原理
    - [x] 物体的相互作用描述
    - [x] 物体的动力学描述
    - [x] 作用与反作用定律
    - [x] 守恒定律
    - [x] 量纲与单位制
- [x] 刚体运动学基础
    - [x] 约束和约束方程
    - [x] 自由度和广义坐标
    - [x] 刚体的平动
    - [x] 刚体的定轴转动
    - [x] 动点的速度合成定理
    - [x] 动点的加速度合成定理
- [x] 刚体的平面运动
    - [x] 刚体平面运动方程
    - [x] 基点法
    - [x] 速度投影定理
    - [x] 瞬心

- [x] 刚体绕平行轴转动的合成
- [x] 刚体的定点运动和一般运动
  - [x] 刚体定点运动、欧拉角
  - [x] 欧拉位移定理和转动瞬轴
  - [x] 角速度和刚体上的速度分布
  - [x] 角加速度和刚体上的加速度分布
  - [x] 刚体绕相交轴转动的合成
  - [x] 刚体的一般运动
- [ ] 动力学基本定理
  - [x] 内力和外力
  - [x] 主动力和约束反力
  - [x] 分离体与受力分析
  - [x] 动量定理
  - [ ] 质心运动定理
  - [ ] 动量矩定理
  - [ ] 力系的功
  - [ ] 动能定理
  - [ ] 柯尼希定理
  - [ ] 保守系统
- [ ] 刚体静力学
  - [ ] 等效力系与力系简化
  - [ ] 静力学分析
  - [ ] 摩擦力
- [ ] 刚体动力学
  - [ ] 矢量力学
  - [ ] 刚体定点运动
  - [ ] 刚体一般运动
  - [ ] 非惯性系动力学
- [ ] 达朗伯原理
- [ ] 虚位移原理
- [ ] 拉格朗日/哈密顿力学

1. 物体机械运动的基本规律

1.1. 物体运动的描述

1.1.1. 描述运动的两种方法

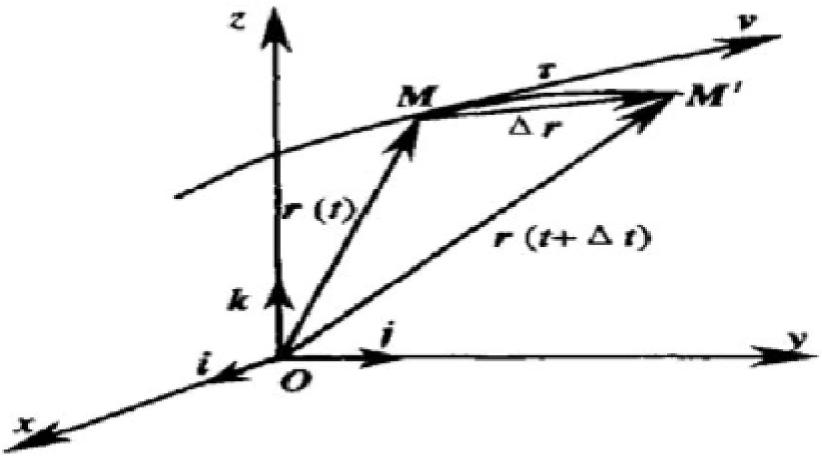
拉格朗日方法

拉格朗日方法是一种随体方法.观察者在确定研究对象后，自始至终跟随这一对象来描述其空间位形的变化。它通过对物体中各个质点运动状态的研究，达到对物体整体运动的了解

欧拉方法

欧拉方法是连续介质力学中采用的方法.观察者并不随体去考察连续介质中各个质点的运动，而是在固定的空间位置上，考察在不同瞬时经过该空间位置的质点的运动特征 。 它通过各个空间局部位置上的研究达到对整个介质运动的了解

1.1.1. 描述物体运动的特征量



在一确定坐标系中表示物体位置的固定矢量称为**矢径。**当动点的位置随时间变化时，其矢径$\boldsymbol{r}$也是时间t的连续的矢量函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

上式对于确定的瞬时t给出了动点在空间确定的位置，所以它描述了整个运动过程中动点空间位置的变化规律，称为动点的**运动方程。**其矢端曲线(即在某一时间间隔内矢径的端点在空间画出的曲线)给出动点在空间走过的路程，即**轨迹**，所以该式也是动点**轨迹的参数方程**

设经过时间间隔Δt之后，动点的位置为点M'，相应的矢径为$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则动点的**位移**可以表示为$\overrightarrow{MM'}$，即

$$\overrightarrow{MM'}=\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

动点实际走过的**路程**为：

$$\Delta s=\widehat{MM'}$$

以$\boldsymbol{\tau}$表示动点轨迹曲线在点M的单位切向量，则近似有：

$$\Delta\boldsymbol{r}\approx\Delta s\cdot\boldsymbol{\tau}$$

定义动点在瞬时t的瞬时**速度**矢量为：

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

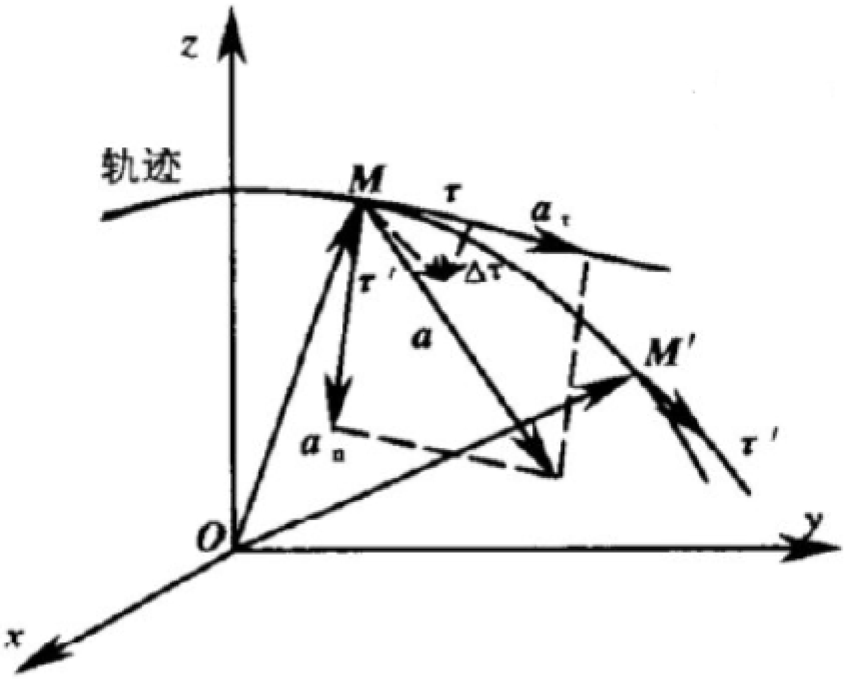
由定义可知，速度$\boldsymbol{v}$是一矢量，是矢径对时间的一阶导数，易知

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

速度大小

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

为路程对时间的变化率，速度的方向代表了动点在这一瞬时的运动方向



定义动点在瞬时t的瞬时加速度矢量（简称**加速度**）为：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

速度可表示为：$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}$

由于在曲线运动中速度方向也不断改变，对上式求导得：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

第一项表示仅仅是速度大小的变化对加速度的贡献，第二项则表示仅仅是速度方向的变化对加速度的贡献，它可以写成

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$$

如果用$\boldsymbol{n}$表示主法线上指向轨迹内凹方向的单位矢量，则可写出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$$

最后可得加速度表达式：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

记

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau},\quad \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{a}_\tau$沿动点轨迹的切线方向，其大小等于速度大小对时间的变化率，称为**切向加速度**

$\boldsymbol{a}_n$沿动点轨迹的主法线，指向曲率中心，其大小代表速度矢量方向改变的快慢程度，称为**法向加速度**

加速度的大小：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_{\tau}^{2}+a_{n}^{2}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^{2}+\left(\frac{v^{2}}{\rho}\right)^{2}}$$

直角坐标中的运动描述

对于直角坐标系$Oxyz$，动点的矢径可以写成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

其中$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$分别为x，y，z轴上的单位矢量，由定义有

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{a}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\end{cases}$$

速度分量：

$$v_x=\dot{x}\quad v_y=\dot{y}\quad v_z=\dot{z}$$

速度大小：

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

加速度分量：

$$a_x=\ddot{x}\quad a_y=\ddot{y}\quad a_z=\ddot{z}$$

加速度大小：

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

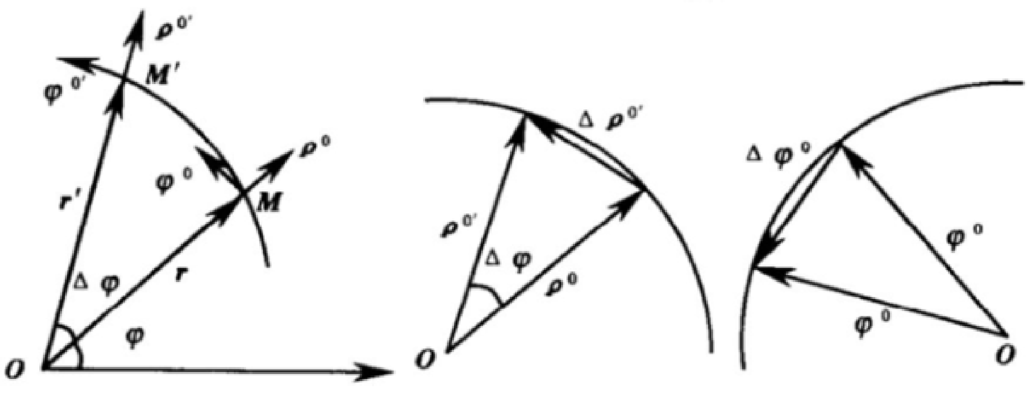
切向加速度：

$$a_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

法向加速度：

$$a_n\frac{v^2}{\rho}=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{\rho}$$

极坐标下的运动描述



(a) (b) (c)

在极坐标中，动点的位置由独立变量极径ρ和极角φ表示，动点的运动方程为

$$\rho=\rho(t)\quad\varphi=\varphi(t)$$

以ρ^0表示径向单位矢量，于是矢径$\boldsymbol{r}$可写成

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\rho}^0$$

将$\boldsymbol{\rho}^0$顺着φ角增加的方向逆时针转过90°，得到横向单位矢量$\boldsymbol{\varphi}^0$，$\boldsymbol{\rho}^0$和$\boldsymbol{\varphi}^0$组成一个正交的动标架，分析它们的变化规律：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}\varphi}$$

其中，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\boldsymbol{\rho}^0(\varphi+\Delta\varphi)-\boldsymbol{\rho}^0(\varphi)}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\rho}^0}{\Delta\varphi}$$

从图中可以看出，当$\Delta\varphi\to 0$时，$\Delta\boldsymbol{\rho}^0$的极限方向垂直于$\boldsymbol{\rho}^0$，在图示情况下于$\boldsymbol{\varphi}^0$的方向一致，其大小为

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\rho}^0}{\Delta\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\right| = 1$$

最后得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{\rho}^0$$

设$\boldsymbol{k}$为曲线所在平面的单位法向量，则

$$\boldsymbol{\varphi}^0 = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho}^0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}^0}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{\rho}^0 = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{\varphi}^0$$

因此，极坐标下速度的表达式：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\boldsymbol{\rho}^0) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\rho}^0 + \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^0}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0 + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0$$

记径向速度$v_\rho = \dot{\rho}$，横向速度$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$，速度大小为：

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2}$$

加速度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0 + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0) \\ &= \ddot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0 + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 + \dot{\rho}\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 + \rho(\ddot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 - \dot{\varphi}^2\boldsymbol{\rho}^0) \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{\rho}^0 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^0\end{aligned}$$

记径向加速度$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$，横向加速度$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\ddot{\varphi}$

极坐标下加速度大小为：

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2}$$

1.2. 惯性定律和伽利略相对性原理

1.2.1. 惯性定律

惯性定律

物体在不受外力作用时的运动状态必定是匀速直线运动或静止

惯性参考系

一定存在着这样的参考系，相对于它，所有不受外力作用的物体都保持匀速直线运动或静止

1.2.2. 伽利略相对性原理

所有的惯性系都是等价的、平权的，在一个惯性系中所能看到的种种力学现象，在另一惯性系中必定也能无任何差别地看到

1.3. 牛顿运动定律和力的独立作用原理

1.3.1. 牛顿运动定律

物体动量的变化与作用力成正比，并发生在力的作用线。数学表达式如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}$$

特别地，若不考虑质量的变化，则

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

牛顿运动定律只适用于惯性系。

1.3.2. 力的独立作用原理

同时施加在某一质点上的各个力彼此是独立无关的，由力的作用所产生的各个加速度也是彼此独认的，只是该质点表现出的最终运动形式(它的加速度)由各个力单独作用于质点时所产生的那些加速度的矢量和来决定。数学表达式如下：

$$m\boldsymbol{a}=m\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

1.4. 物体的相互作用描述

1.4.1. 力

力的定义

力是物体间的相互作用，是物体机械运动状态发生变化的原因

力的作用效应

力的作用效应可分为外部效应和内部效应两种。外部效应表现为运动状态的改变，内部效应表现为变形和内力的改变

力的性质

1. 凡是真实的力，有受力者必有施力者，反之亦然。
2. 力是物体的相互作用，必然成对出现。
3. 确定一个力，必须确定它的大小、方向和作用点（力的三要素）

1.4.2. 冲量

冲量描述力在作用时间过程中的积累效果，取一微小时间间隔$\mathrm{d}t$，以$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$表示力$F$的元冲量，记作$d\boldsymbol{S}$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t$$

在有限的时间间隔$(t_2 - t_1)$内，变力F对时间的积累效果为

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t$$

$\boldsymbol{S}$称为力$\boldsymbol{F}$在时间间隔$t_2 - t_1$内的冲量

1.4.3. 功

功描述力对物体作用沿移动距离的积累效果，可用力F与受力质点经过的弧元$\mathrm{d}s$的乘积来表示，称为力F在弧元$\mathrm{d}s$上的元功，记作占δW，即

$$\delta W = F \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{d}s = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

功为标量

合力之功定理

设$\boldsymbol{R}$为作用在同一受力质点上诸力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$的合力，即

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

则合力$\boldsymbol{R}$在受力质点的无限小位移$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$上的元功为

$$\delta W = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i$$

上式说明合力$\boldsymbol{R}$在无限小位移上的元功等于各分力元功之代数和

因此，合力$\boldsymbol{R}$在有限路程$\widehat{M_1 M_2}$的功为

$$W_R = \int_{\widehat{M_1 M_2}} \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\widehat{M_1 M_2}} \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

上式说明合力在有限路程上的功等于各分力在同一路程上功的代数和

功率

用功率这一物理量来度量做功的速率，即

$$P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

功率与速度、加速度等物理量一样，是一瞬时概念。一个力在做功过程中，在不同的瞬时可以具有不同的功率。

$$P = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

力的功率等于该力与受力质点速度的标量积

1.5. 物体的动力学描述

1.5.1. 质量

惯性质量

牛顿运动定律中出现的质量，是一个反映物体反抗外加的作用力，保持其原来运动状态的物理量

引力质量

万有引力定律中出现的质量，则是一个反映物体之间互相吸引作用的物理量

可以证明，惯性质量和引力质量是相等的

1.5.2. 动量

动量是一个表征物体传递机械运动能力的物理量，定义物体的质量与速度之积为该物体的动量，即：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

动量$\boldsymbol{p}$是一矢量，它的方向始终与物体速度方向一致

动量定理

微分形式的动量定理：

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t$$

上式表明物体动量的增量等于作用在物体上力的元冲量

积分形式的动量定理：

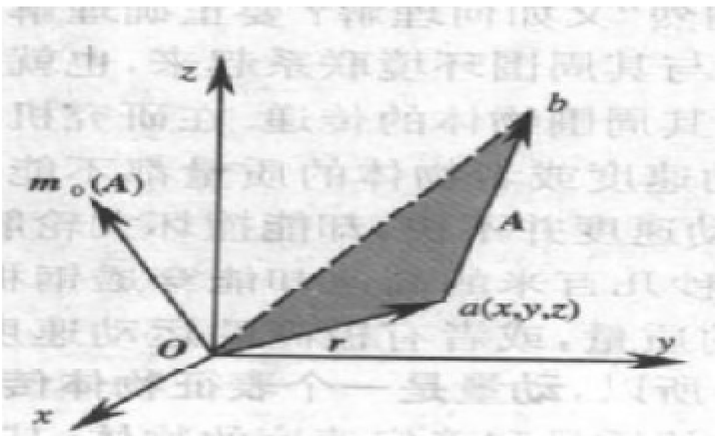
$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t$$

得：

$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{S}$$

说明，在时间间隔$(t - t_0)$内，物体动量的变化等于作用在物体上的力在同一时间间隔内的冲量

1.5.3. 动量矩



动量矩是表征转动物体传递机械运动能力的物理量。物体对于O点的动量矩定义为：

$$\boldsymbol{m}_o(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

表明物体对于某点O的动量矩对时间的一阶导数等于作用力对同一点之矩

1.5.4. 动能

通过牛顿运动定律，可以把动能和功联系起来：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

动能定理的微分形式：

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

令$T=\frac{1}{2}mv^2$，表示动能

$$\mathrm{d}T=\delta W$$

说明了平动物体动能的微分等于作用在物体上的元功

动能定理的积分形式：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

说明物体在一般路程上动能的变化，等于作用在该物体上的力在同一段路程上所做的功

1.6. 作用与反作用定律

力是成对出现的，通常我们称这一对力中的一个为作用力，另一个为反作用力。牛顿第三定律指出任何两物体彼此之间的相互作用永远相等，且各自指向对方。

1.7. 守恒定律

1.7.1. 动量守恒定律

若合外力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=0$$

即：

$$m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$$

表明在不受任何力作用的情况下，物体的动量是一常矢量，由运动的初始条件决定，即物体在运动过程中始终保持其初始时所具有的动量

1.7.2. 动量矩守恒定律

若$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$$

即：

$$\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$$

表明作用在物体上所有的力对空间某点的力矩为零时，物体对该点的动量矩是一常矢量，由运动的初始条件决定，即物体在运动过程中始终保持其初始时所具有的动量矩

1.7.3. 机械能守恒定律

保守力

仅是物体位置的函数，而且它们的功只与受力物体在运动过程中初、终位置有关，而与受力物体经过的具体路径无关

机械能守恒

物体在保守力的作用下，其动能和势能之和，即机械能，是守恒的。若记物体的势能为V，动能为T，则

$$T + V = c$$

若物体在保守力作用下，其动能和势能可以相互转换，但总值不变，由运动的初始条件决定

1.8. 量纲与单位制

物理量之间并不是互相独立毫无联系的。只要从所有可能的物理量中选择少数几个，对它们的单位作独立规定，再利用其他物理量与这几个物理量之间的关系便可导出所有物理量的单位。这几个被选出来作独立规定单位的物理量叫做**基本量**，而其他的物理量称为导出量或派生量，不同的基本量的选取就构成了不同的**单位制**。

我们给度量物理量的单位的种类起了个名称，叫做量纲。一般地，我们用符号$[L]$,$[M]$,$[T]$分别表示长度、质量和时间三种量纲。导出的量纲可以用基本量的某一组合来表示

2. 刚体运动学基础

2.1. 约束和约束方程

由运动学分析就能确定的对物体各部分相对位移和相对速度的限制称为**约束**，其中对物体相对位移的限制又称为**几何约束**，对物体相对速度的限制又称为**运动约束**。由约束规定的方程称为**约束方程**

2.1.1. 柔索约束和刚性约束

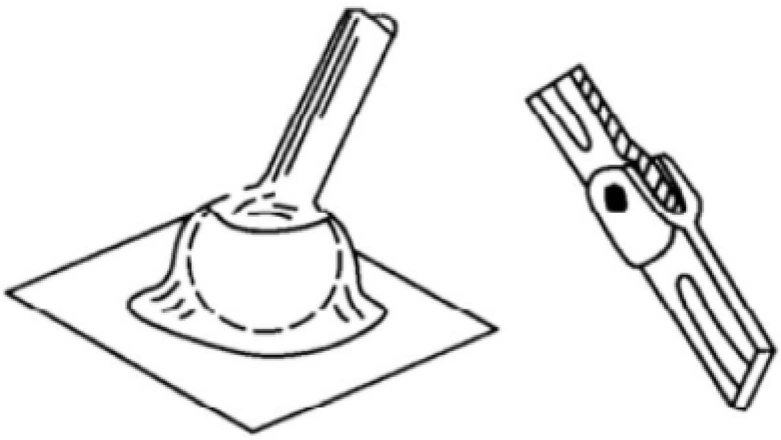
柔索约束是钢索、链条和皮带等物体的抽象化模型，柔索约束的特征是不能伸长。如A,B之间的约束，约束方程是不等式：

$$(x_A - x_b)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \leq l^2$$

如将A,B间改用刚性杆连接，则A,B间约束为刚性约束。刚性约束的特征是两点间距离不变，约束方程是等式：

$$(x_A - x_b)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2$$

当AB是刚性杆时，如果点A能在以点B为球心，以AB为半径的球面上运动，则称点B对杆AB的约束为球铰链;如果点A只能在某个平面内沿圆周运动，则点B对杆AB的约束称为柱铰链



（a）球铰链　　（b）柱铰链

如果AB的运动被限制在Oyz平面内，则约束方程为：

$$(y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2$$

2.1.2. 线、面接触约束

物体间的接触约束可以是点约束，线约束和面约束。

轨道对轮心E和F的约束方程为：

$$z_E = z_F = r(\text{车轮半径})$$

轨道对车轮的接触点C, D的约束方程为：

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_D = \mathbf{0}$$

对于由n个质点组成的质点系，约束方程的一般形式为：

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n; t) \leq 0$$

2.1.3. 约束的分类

约束方程中显含时间t的约束称为**非稳定约束**，不显含时间t的约束称为**稳定约束**；

带不等号的方程表示的约束称为**单面约束**，带等号的方程表示的约束称为**双面约束**；

将几何约束和可以积分成方程$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n; t) \leq 0$形式的运动约束称为**完整约束**，不能积分成前述方程形式的运动约束称为**非完整约束**

2.2. 自由度和广义坐标

在完整约束的条件下，确定质点系位置的独立坐标的个数N称为该质点系的**自由度**数

凡是足以确定质点系位置的N个独立的参数$q_1, q_2, \cdots, q_N$都称为质点系的**广义坐标**

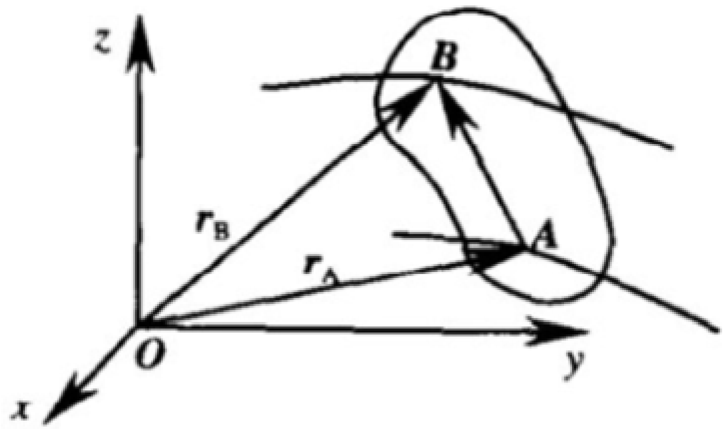
质点系中各质点的矢径$\boldsymbol{r}_i$可以用广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_N$表示为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_N; t), i = 1, 2, \cdots, n$$

刚体的自由度：

- 刚体是特殊的质点系，各质点之间都存在着刚性约束。如果刚体没有受到其他物体的约束，称为自由刚体。
- 自由刚体有六个自由度，需要六个广义坐标来描述其位置，并且，刚体上任意三个不共线的点的位置就可以完全确定该刚体的位置。
- 如果刚体还受到其他物体的K个独立的完整约束的限制，则自由度将减少为$6 - k$个

2.3. 刚体的平动



刚体的**平动**是刚体运动中最简单的形式，其特征是：在运动中，刚体上任一直线始终平行于其初始位置

在刚体上任取两点A,B，有：

$$\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{r}_A+\overrightarrow{AB}$$

为求速度，对上式两边对t求导，得：

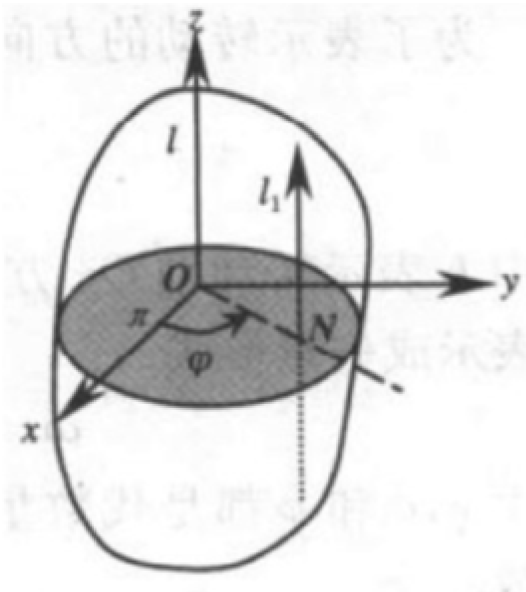
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$

即：$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_B$

再对t求导得：$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_B$

刚体的平动问题归结为该刚体上任一点的运动问题

2.4. 刚体的定轴转动



刚体在运动中，其上有两点固定，这种运动形式称为**定轴转动**。过两固定点的直线称为固定轴。

刚体定轴转动时只有一个自由度，仅需一个广义坐标即可描述其位置

如图，l为固定转动轴，过l上任一点O作l的垂平面π。在平面π上作一直线ON，以ON相对于Ox轴转过的角度φ为广义坐标，则式

$$\varphi=\varphi(t)$$

描写了刚体位置随时间的变化，称为刚体定轴转动的运动方程。

刚体定轴转动的快慢程度可以用角度φ的变化速率来描述，定义：

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

为**瞬时角速度**，简称**角速度**，定义角速度ω随时间的变化速率为角加速度，记为ε，即

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}$$

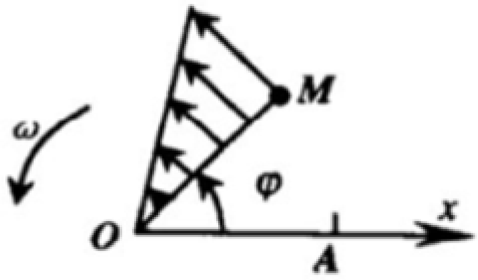
角速度的量纲是$[T]^{-1}$，单位是弧度/秒(rad/s)，角加速度得量纲是$[T]^{-2}$，单位是弧度/秒^2

为了表示转动的方向，按照右手定则将转角记做$\boldsymbol{\varphi}=\varphi\boldsymbol{k}$

其中$\boldsymbol{k}$表示转动轴Oz方向的单位矢量，则角速度和角加速度亦可表示成矢量形式

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\ddot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

现在给出π上各点的速度和加速度分布

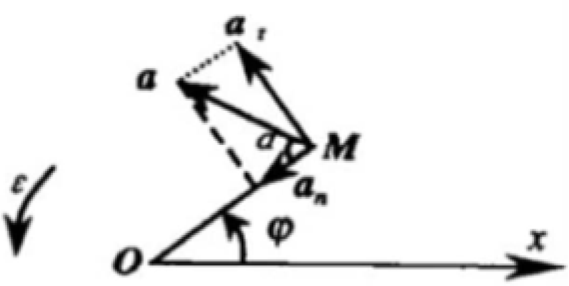


任取一点M，设M到定点O的距离为r，采用弧坐标，则点M的运动方程为

$$s=r\varphi(t)$$

则速度为：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\dot{\varphi}(t)=r\omega$$



切向加速度a_r和法向加速度a_n为

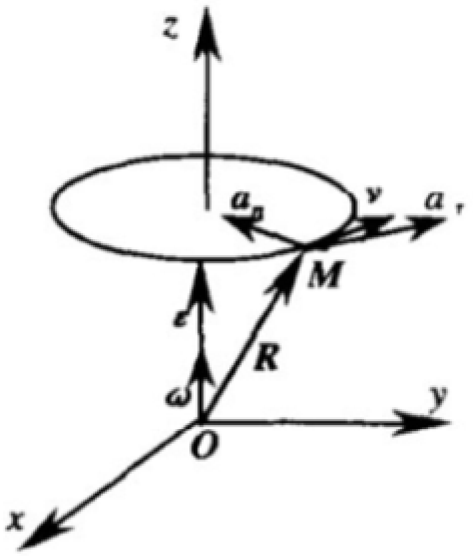
$$a_r=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\dot{\omega}=r\varepsilon,\quad a_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2r$$

加速度大小

$$a=\sqrt{a_r^2+a_n^2}=r\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

方向

$$\tan\alpha=\frac{a_r}{a_n}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}$$



如果用矢量$\boldsymbol{\omega}$来表示角速度，则点M的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

其中$\boldsymbol{R}$为M点的矢径

加速度为

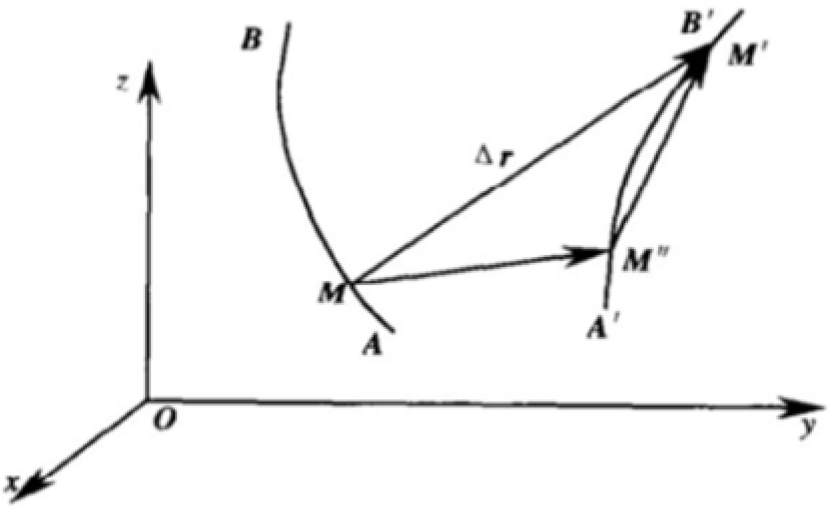
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon} \times R$为切向加速度，$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$为法向加速度

2.5. 动点的速度合成定理

动点相对于定参考系（简称定系）的运动称为**绝对运动**；动点相对于动参考系（简称动系）的运动称为**相对运动**。在所考虑的瞬时，假想将动点“冻结”在动参考系上，动系携带着被“冻结”的动点所作的运动称为**牵连运动**。

动点在定参考系中的轨迹、速度和加速度分别称为**绝对轨迹**、**绝对速度**和**绝对加速度**。动点在动参考系中的轨迹、速度和加速度分别称为**相对轨迹**、**相对速度**和**相对加速度**。在所考虑的瞬时，与动点相重合的动参考系上那一点的速度和加速度称为**牵连速度**和**牵连加速度**



设一刚性曲线段$\widehat{AB}$相对于定坐标系$Oxyz$是运动的，并有一动点M沿$\widehat{AB}$作相对运动。在瞬时t，曲线段的位置为$\widehat{AB}$，动点在M处。经过时间间隔Δt后，曲线段运动至点M'

动点M的绝对位移$\Delta \boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM''}+\overrightarrow{M''M'}$

位移$\overrightarrow{MM''}$称为牵连位移，即在所考虑的瞬时，与动点相重合的动参考系上那一点的位移称为动点的牵连位移

上式两边同除Δt并求极限：

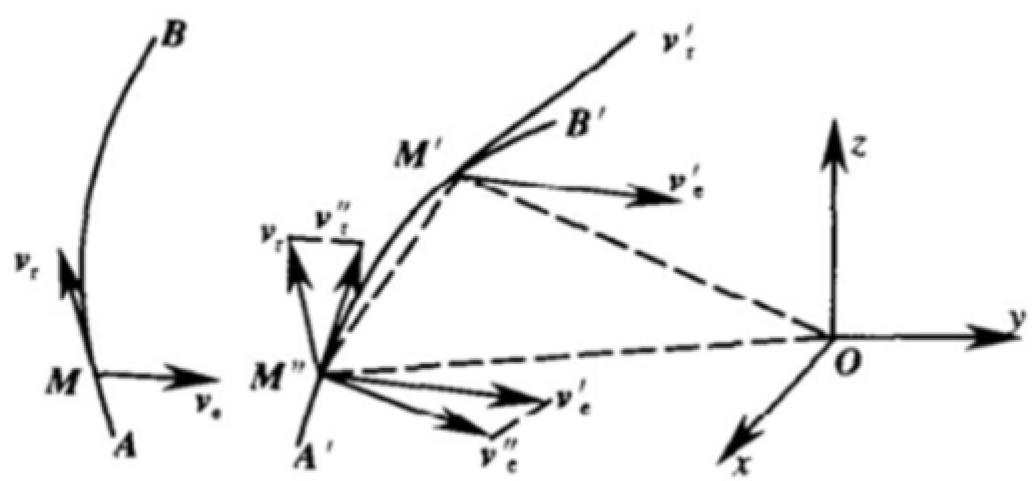
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{MM''}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{M''M'}}{\Delta t}$$

上式左边是动点M的绝对速度$\boldsymbol{v}_a$，右边第一项是牵连速度$\boldsymbol{v}_e$，第二项是其相对速度$\boldsymbol{v}_r$

动点M的绝对速度等于其牵连速度与相对速度之矢量和。这就是**速度合成定理**，即：

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

2.6. 动点的加速度合成定理



设一刚性曲线段L相对于定坐标系$Oxyz$是运动的，在瞬时t曲线段的位置为$\widehat{AB}$，动点M沿曲线L作相对运动。在瞬时t，M的相对速度和牵连速度分别为$\boldsymbol{v}_r$和$\boldsymbol{v}_e$.经过时间间隔Δt后，曲线段运动到$\widehat{A'B'}$位置，动点M运动到M',这时其相对速度和牵连速度分别为$\boldsymbol{v}_r'$和$\boldsymbol{v}_e'$

在瞬时t和$t+\Delta t$,动点M的绝对速度分别是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_a&=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\\ \boldsymbol{v}_a'&=\boldsymbol{v}_e'+\boldsymbol{v}_r'\end{aligned}$$

因此，动点M绝对速度改变量为

$$\Delta\boldsymbol{v}_a=(\boldsymbol{v}_e'-\boldsymbol{v}_e)+(\boldsymbol{v}_r'-\boldsymbol{v}_r)$$

根据定义，相对运动是动点相对于动参考系的运动，所以在曲线段上看到相对运动中相对速度的改变量为

$$\Delta\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}_r'-\boldsymbol{v}_r''$$

相对加速度为：

$$\boldsymbol{a}_r=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_r'-v_r''}{\Delta t}$$

相对速度改变量

当动参考系L作平动时，$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}_r'-\boldsymbol{v}_r''$，当动参考系$L$作定轴转动，在瞬时$t$角速度为$\boldsymbol{\omega}$时，

$$
\boldsymbol{v}_r'' - \boldsymbol{v}_r = (\boldsymbol{\omega}\Delta t) \times \boldsymbol{v}_r
$$

所以

$$
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_r'' - \boldsymbol{v}_r}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r
$$

牵连加速度为：

$$
\boldsymbol{a}_e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_e'' - v_e}{\Delta t}
$$

当动参考系L作平动时，$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_e''$，当动参考系$L$作定轴转动，在瞬时$t + \Delta t$角速度为$\boldsymbol{\omega}'$时，由定轴转动的速度分布公式得：

$$
\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_e'' = \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OM'} - \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OM''} = \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{M''M'}
$$

所以有

$$
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_e''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\omega}' \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M''M'}}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r
$$

由上，动点M的绝对加速度为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_e' - \boldsymbol{v}_e''}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_e'' - \boldsymbol{v}_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_r' - \boldsymbol{v}_r''}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_r'' - \boldsymbol{v}_r}{\Delta t} \\
&= \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r
\end{aligned}
$$

记$\boldsymbol{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$，称为科氏加速度，则

$$
\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_k
$$

称为动点的加速度合成定理，即任何瞬时动点的绝对加速度等于该瞬时其牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和；科氏加速度等于动参考系角速度和动点相对速度的矢量积的两倍

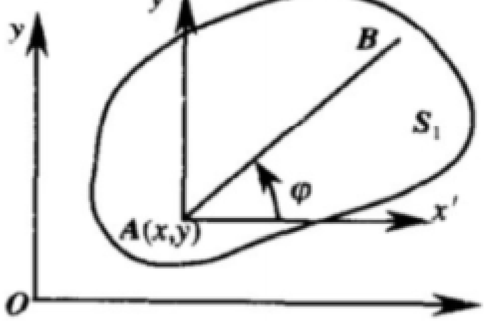
3. 刚体的平面运动

3.1. 刚体平面运动方程

3.1.1. 平面运动的概念

刚体在运动过程中，其上任何一点M与参考系中的某一固定平面π的距离保持不变，称该刚体作平面平行运动，简称**平面运动**。刚体平面运动只有三个自由度。

3.1.2. 刚体平面运动的运动方程



三个广义坐标通常取法如下：平面图形上任意点A的两个坐标x和y，以及过A点在平面图形S_1内的任一直线AB与某固定轴之夹角φ。刚体平面运动的运动方程为

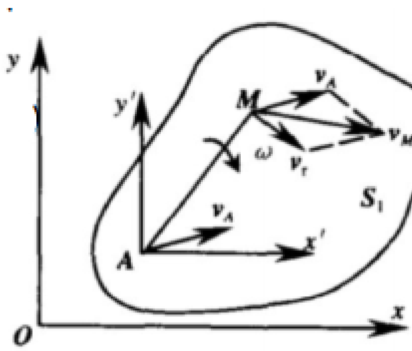
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

以坐标原点引进一个动坐标系$Ax'y'$,使其Ax'轴和Ay'轴分别与固定坐标系O_{xyz}的O_x轴和O_y轴保持平行。这个动坐标系称为**平动坐标系**，点A称为**基点**。于是平面图形S_1的运动就可以看作是跟随基点A的平动和相对于坐标系$Ax'y'$，定轴转动的合成。

在任何时间间隔内，平面图形相对于平动系的转角$\Delta\varphi$与基点的选择无关

3.2. 基点法

3.2.1. 分析平面图形速度分布的基点法



引进基点平动系后，刚体平面运动分解为跟随基点的平动和绕基点的转动。由速度合成定理，平面图形上任一点M的速度为

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

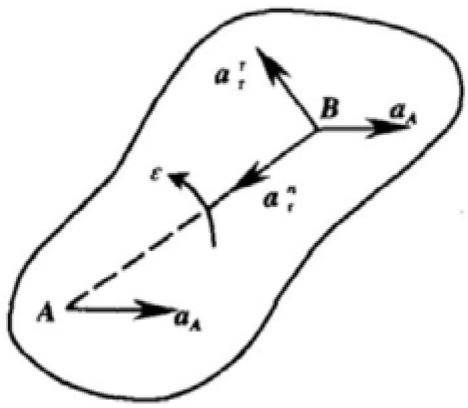
其中牵连速度$\boldsymbol{c}_c$是与M点重合的动坐标系上那一点的速度

现在，动坐标系是平动系，因此动系上任意点的速度都等于基点A的速度$\boldsymbol{v}_A$，所以$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v}_A$。$M$点相对于基点平动系作圆周运动，故$\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}$，故

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM})$$

即：平面图形上任一点M的速度等于基点A给出的牵连速度和绕基点A的相对速度$\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}$的矢量和

3.2.1. 分析平面图形加速度分布的基点法



在引进基点平动系之后，平面运动分解为跟随基点的平动与绕基点的转动

由加速度合成定理，平面图形上任一点B的绝对加速度为

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_k$$

由于动坐标系作平动，$\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

若选平面图形上A为基点，则$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A$。设平面图形绕基点的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，角速度为$\boldsymbol{\varepsilon}$，则根据定轴转动中加速度分布公式，点$B$的相对加速度可以分为两项：相对切向加速度$\boldsymbol{a}_r^\tau$相对法相加速度$\boldsymbol{a}_r^n$

其中，

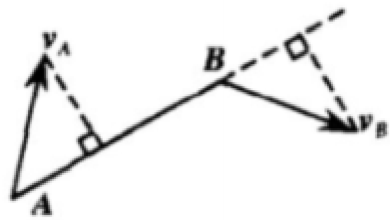
$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_r^\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} \\ \boldsymbol{a}_r^n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \end{cases}$$

故

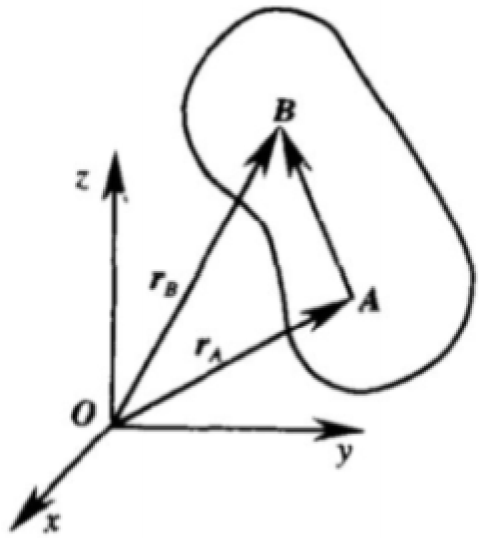
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB})$$

3.3. 速度投影定理

平面图形在运动中，任意两点沿它们连线方向的相对速度必定为零，即两点的速度在两点连线方向的投影必定相同，才能保证两点距离不变，如图所示：



证明如下



设坐标系O_{xyz}如图所示。刚体上任意两点A和B的矢径分量分别为$\boldsymbol{r}_A$和$\boldsymbol{r}_B$，则刚性约束条件为

$$(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) \cdot (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = l^2 = const$$

上式对时间t求导得

$$(\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A)(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = 0$$

因

$$(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = \overrightarrow{AB}$$

故

$$\boldsymbol{v}_B \cdot \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}_A \cdot \overrightarrow{AB}$$

即：刚体在运动中任意两点的速度矢量在这两点连线方向的投影相等

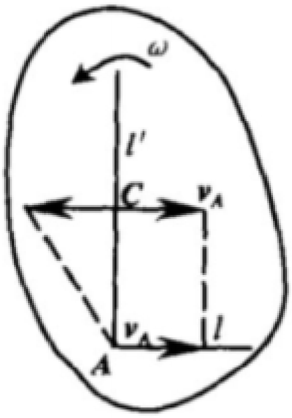
3.4. 瞬心

3.4.1. 速度瞬心

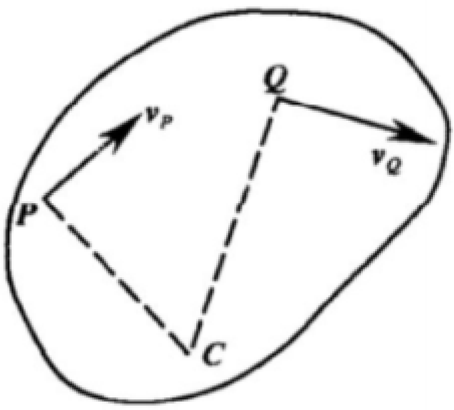
在平面图形的运动中，任何瞬时只要转动角速度$\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$，平面图形上总存在一点$C$，其速度$\boldsymbol{v}_c = \mathbf{0}$，称点C为平面图形的瞬时速度中心。简称**速度瞬心**

求解方法

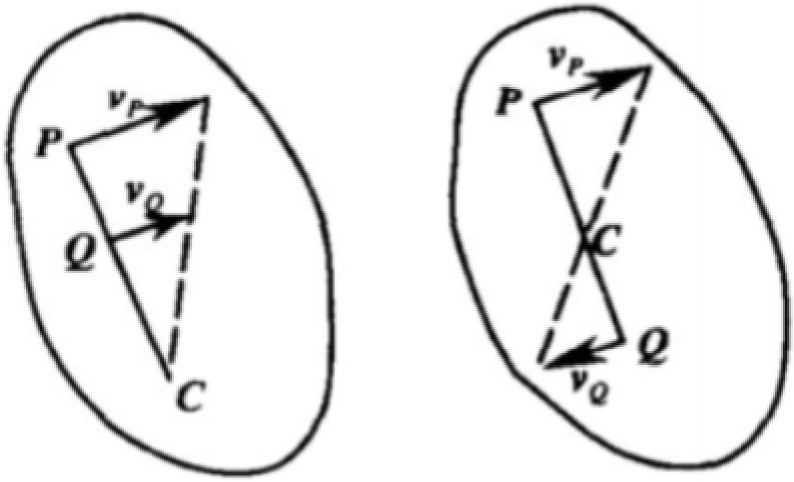
1. 已知图形角速度$\boldsymbol{\omega}$的大小和转动方向，以及图形上任一点A的速度$\boldsymbol{v}_A$，可以在图形上作一条射线Al，使Al与$\boldsymbol{v}_A$重合，将Al顺着$\boldsymbol{\omega}$的转动方向以A为中心转过90°，到达Al'。在Al'上找一点C，使得$AC = v_A/\omega$，则点C即为图形的速度瞬心



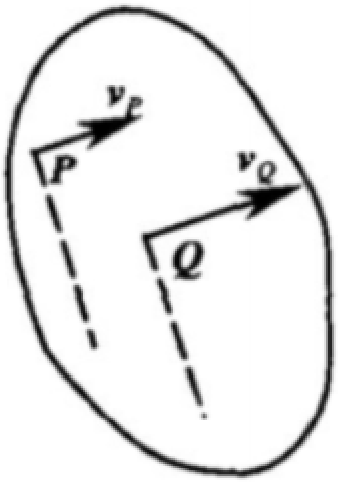
2. 已知图形上任意两点的速度方向，且他们不平行，过这两点分别作速度矢量的垂线，这两条垂线的交点C即为速度瞬心



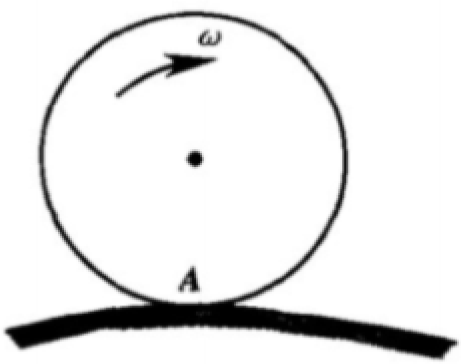
3. 已知图形上任意两点的速度方向平行，且垂直于这两点的连线，则还必须知道这两点的速度大小。连接这两点速度矢量的终点，该连线或其延长线与这两点的连线或其延长线的交点C即为速度瞬心



4. 已知图形上任意两点的速度平行且相等，方向亦相同，则瞬心在无穷远处。说明图形作瞬时平动

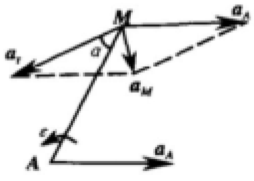


5. 刚体在一固定曲面上作无滑滚动，由于刚体上与曲面之接触点C相对于曲面速度为零，所以A点即为速度瞬心

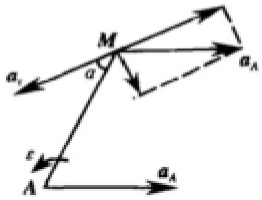


3.4.2. 加速度瞬心

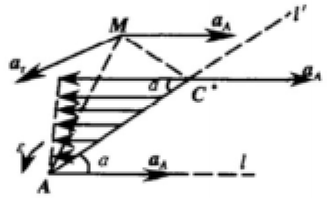
在平面图形的运动中，任何瞬时只要转动角速度$\boldsymbol{\omega}$和角加速度ε不全为零，在平面图形上总存在一点C^*，其加速度$\boldsymbol{a}_{C^*}=\mathbf{0}$。平面图形的加速度分布相当于图形以角速度$\boldsymbol{\omega}$和角加速度$\boldsymbol{\epsilon}$绕点$C^*$转动时的加速度分布。称点$C^*$为瞬时加速度中心，简称加速度瞬心



(a)



(b)



(c)

采用基点法后，平面图形上任意一点M的加速度由下式给出：

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_r$$

其中

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB})$$

$\boldsymbol{a}_r$大小

$$a_r = |\overrightarrow{AM}| \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad \tan\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

只要每一瞬间图形的角速度和角加速度确定了，$\boldsymbol{a}_r$的大小和方向就是确定的，如图所示，将$\boldsymbol{a}_A$所在直线Al的转动方向ε旋过α角，到达Al'位置。在Al'直线上的所有点的相对加速度$\boldsymbol{a}_r$于基点加速度$\boldsymbol{a}_A$共线。只要此瞬间$\boldsymbol{\varepsilon}$与$\boldsymbol{\omega}$不全为零，总可以在直线Al'找到一点C^*，使

$$\boldsymbol{a}_{C^*} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

该点在直线Al'上$\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{a}_A$所指的一侧，有

$$|\overrightarrow{AC^*}| = \frac{\boldsymbol{a}_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

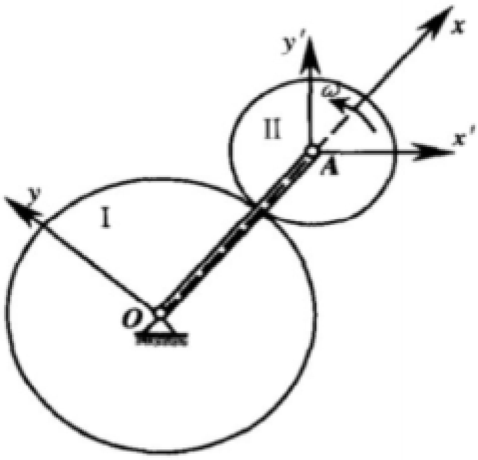
解出

$$\boldsymbol{a}_A = -\boldsymbol{a}_r = -[\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC^*} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC^*})]$$

代入得

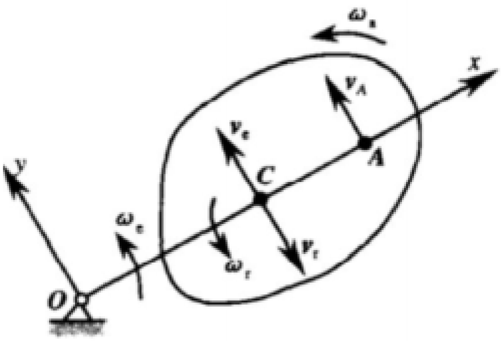
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_M &= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_r \\
&= -[\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC^*} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC^*})] + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM})] \\
&= -[\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{C^*M} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{C^*M})]
\end{aligned}$$

3.5. 刚体绕平行轴转动的合成



在曲柄OA上建立转动坐标系O_{xy}，如图所示。齿轮II的运动可以看作相对于O_{xy}的定轴转动及O_{xy}绕轴O的转动的合成。设动系转动角速度为$\boldsymbol{\omega}_e$，称为**牵连角速度**。设齿轮II相对于动系的转动角速度为$\boldsymbol{\omega}_r$，称为**相对角速度**。图形的角速度又称为绝对角速度，记为$\boldsymbol{\omega}_a$

1. 设$\boldsymbol{\omega}_e$，$\boldsymbol{\omega}_r$都沿逆时针方向，如下图所示。



在OA连线上总可以找到平面图形上的一点C，它相对于O_{xy}的速度$\boldsymbol{v}_t$与他的牵连速度$\boldsymbol{v}_e$大小相对，方向相反，有

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

所以点C即为该瞬时平面图形得速度瞬心。按$\boldsymbol{v}_e$和$\boldsymbol{v}_t$的定义

$$v_e = \omega_e \cdot OC, \quad v_r = \omega_r \cdot AC$$

由于$v_e = v_t$，故有

$$\omega_e \cdot OC = \omega_r \cdot AC$$

平面图形角速度

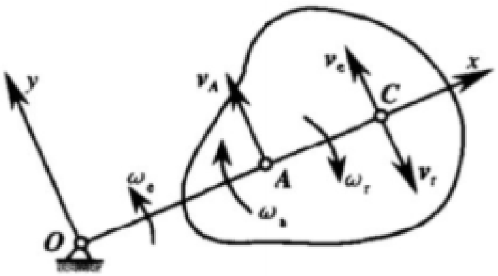
$$\omega_a = \frac{v_A}{AC} = \frac{\omega_e(OC + AC)}{AC}$$

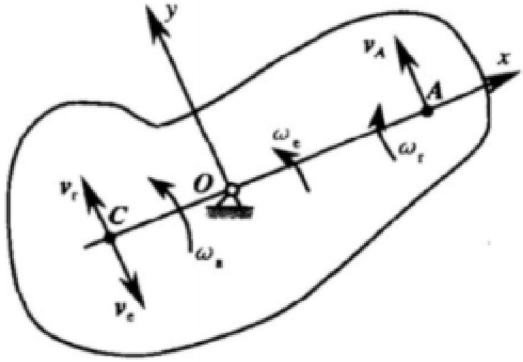
联立得到

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r$$

说明绕平行轴同向转动时，平面图形的角速度等于牵连速度与相对角速度之和，其转动方向与牵连角速度（或相对角速度）相同

2. 设$\boldsymbol{\omega}_e$沿逆时针方向，$\boldsymbol{\omega}_r$反之





这时平面图形的速度瞬心在OA延长线上，点C的位置取决于ω_e/ω_r。当$OC > AC$时，$\omega_e < \omega_r$，当$OC < AC$时，$\omega_e > \omega_r$，平面图形加速度：

$$\omega_a = \frac{v_A}{AC} = \frac{\omega_e \cdot OA}{AC}$$

在上述两种情况下，$OA = |OC - AC|$，所以

$$\omega_a = |\omega_e - \omega_r|$$

说明绕平行轴反向转动时，平面图形角速度等于牵连角速度与相对角速度之差。其转向与较大的角速度相同

在绕平行轴反向转动时，若$\omega_e = \omega_r$得

$$\omega_a = |\omega_e - \omega_r| = 0$$

可见这时平面图形的角速度为零，即刚体作平动。角速度大小相等，转动方向相反的两个转动的组合称为转动偶

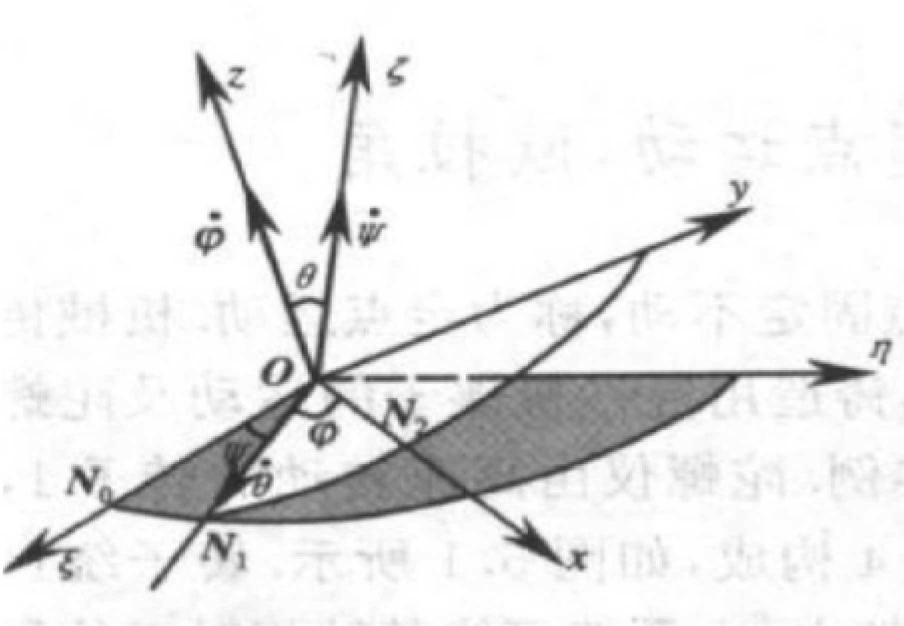
4. 刚体的定点运动和一般运动

4.1. 刚体定点运动、欧拉角

4.1.1. 定点运动

刚体在运动过程中有一个点固定不动，称为定点运动

4.1.2. 欧拉角



选取三个转角ψ，θ和φ为广义坐标，来描述这样的刚体定点运动，通常称为**欧拉角**

以O为原点，建立坐标系$O\xi\eta\zeta$，再取一个固定再刚体上的坐标系$Oxyz$，设$t=0$时两坐标系完全重合。坐标系$Oxyz$绕$O\zeta$转过角ψ，称为**进动角**。这时，轴Ox上的点N_0到达N_1位置，ON_1称为节线。坐标系$Oxyz$再绕ON_1轴转过角θ，称为**章动角**。这时轴Oz与$O\zeta$不再重合，夹角即为θ。最后系$Oxyz$再绕轴Oz转过角φ，称为**自转角**

轴Ox离开节线ON_1，转过角φ到达ON_2。只要任一瞬时的ψ，θ和φ确定了，则刚体在空间的相对位置即被唯一地确定。因此：

$$\psi=\psi(t)\quad\theta=\theta(t)\quad\varphi=\varphi(t)$$

就是刚体定点运动的**运动方程**

4.2. 欧拉位移定理和转动瞬轴

具有一个固定点的刚体的任意有限位移，可以绕通过固定点的某轴一次转动来完成，该结论称为**欧拉位移定理**，而该轴称为**转动瞬轴**

4.3. 角速度和刚体上的速度分布

在定轴转动情况下，定义角速度矢量沿固定转动轴，方向由右手定则确定：

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{k}$为固定轴方向的单位矢量。根据欧拉位移定理同样可定义

$$\boldsymbol{\omega}^*=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

为时间间隔Δt内的平均角速度，其方向沿OG轴，并符合右手定则，当Δt趋于零时，OG轴趋于转动瞬轴OC，因此

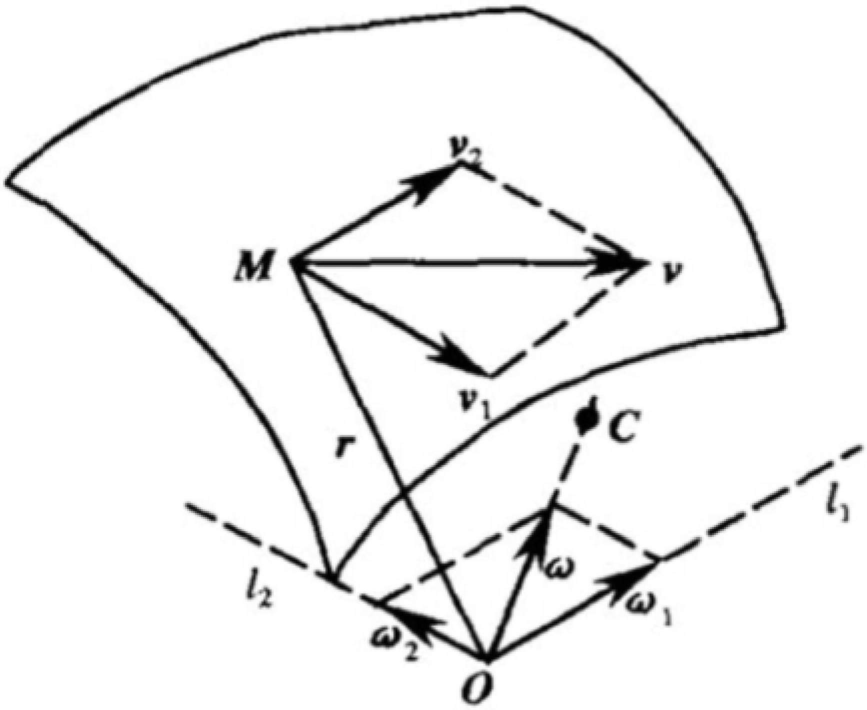
$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

定义为刚体定点运动的瞬时角速度，它从固定点O画出，沿转动瞬轴OC，方向满足右手定则

设某瞬时，刚体的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，由刚体定轴转动的概念，球面图形上任一点M的速度为：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

其中$\boldsymbol{r}$是点M的矢径，$\boldsymbol{v}$在过点M的球面的切平面上，上式给出了刚体定点运动的速度分布。



4.4. 角加速度和刚体上的加速度分布

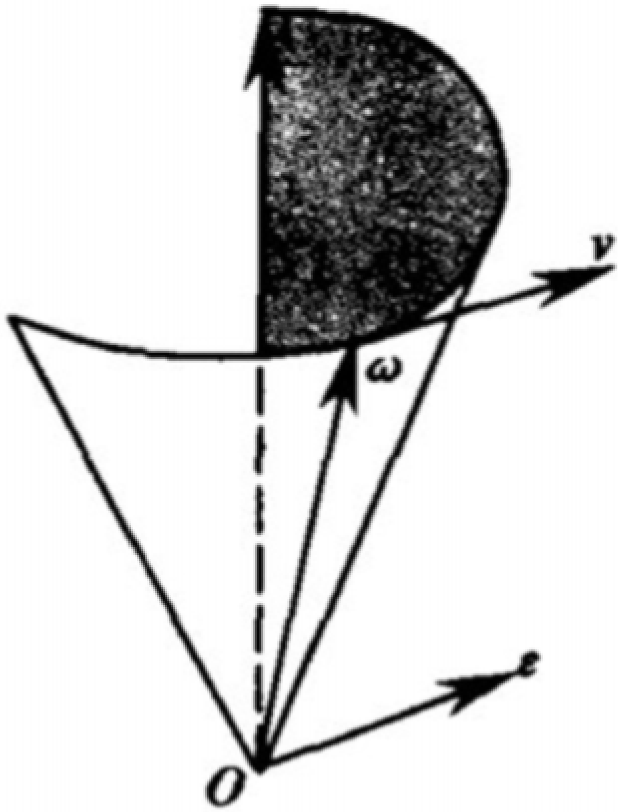
刚体作定点运动时，定义角速度$\boldsymbol{\omega}$随时间的变化率为瞬时角加速度，即

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$$

设转动瞬轴方向上的单位矢量为$\boldsymbol{\omega}_0$，则上式可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\boldsymbol{\omega}_0)\\&=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\omega}_0+\omega\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

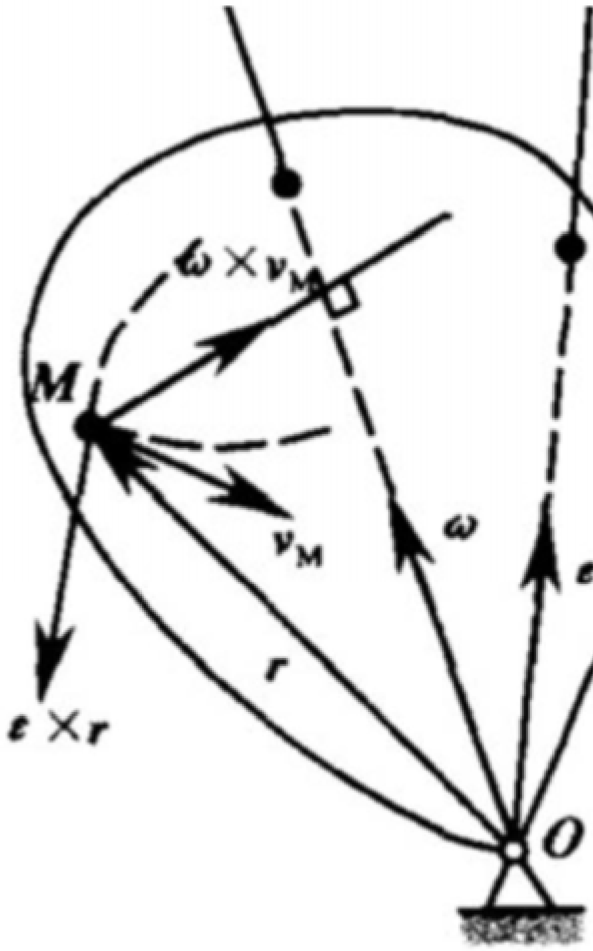
角加速度矢量可用角速度矢量的端点的速度表示，在定点运动过程中，$\boldsymbol{\omega}$将画出一个锥面，$\boldsymbol{\epsilon}$沿$\boldsymbol{\omega}$端点的轨迹曲线的切线方向，并通过固定点O，一般情况下$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{\epsilon}$不共线



刚体作定点运动时，刚体上任一点M的加速度为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

其中$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$指向转动瞬轴，故$\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r}$称为转动加速度，$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$称为向轴加速度



4.5. 刚体绕相交轴转动的合成

当刚体绕两个相交轴转动时，刚体的瞬时角速度等于它分别绕这两个轴转动的角速度的矢量和，即

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$$

推广到绕多个共点轴转动的情况，即

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\cdots+\boldsymbol{\omega}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\omega}_i$$

如果用欧拉角表示刚体的瞬时角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\psi}}+\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

设$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$为动坐标系$Oxyz$各个坐标轴上的单位矢量，则

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi)\boldsymbol{j}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\boldsymbol{k}$$

欧拉运动学方程：

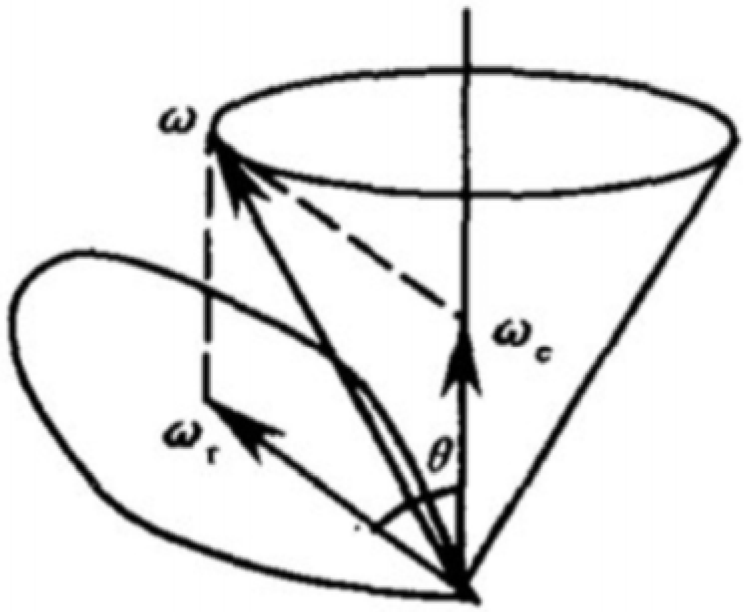
$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\end{cases}$$

规则进动

刚体以匀角速度$\boldsymbol{\omega}_r$绕自转轴自转，此轴又以匀角速度$\boldsymbol{\omega}_e$绕某固定轴(该轴与自转轴相交)公转，且这两轴夹角θ为常值，刚体瞬时角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega}_r$$

由于θ，ω_r，ω_e均为常数，$\boldsymbol{\omega}$大小也为常数，且$\boldsymbol{\omega}$与固定轴的夹角保持常值



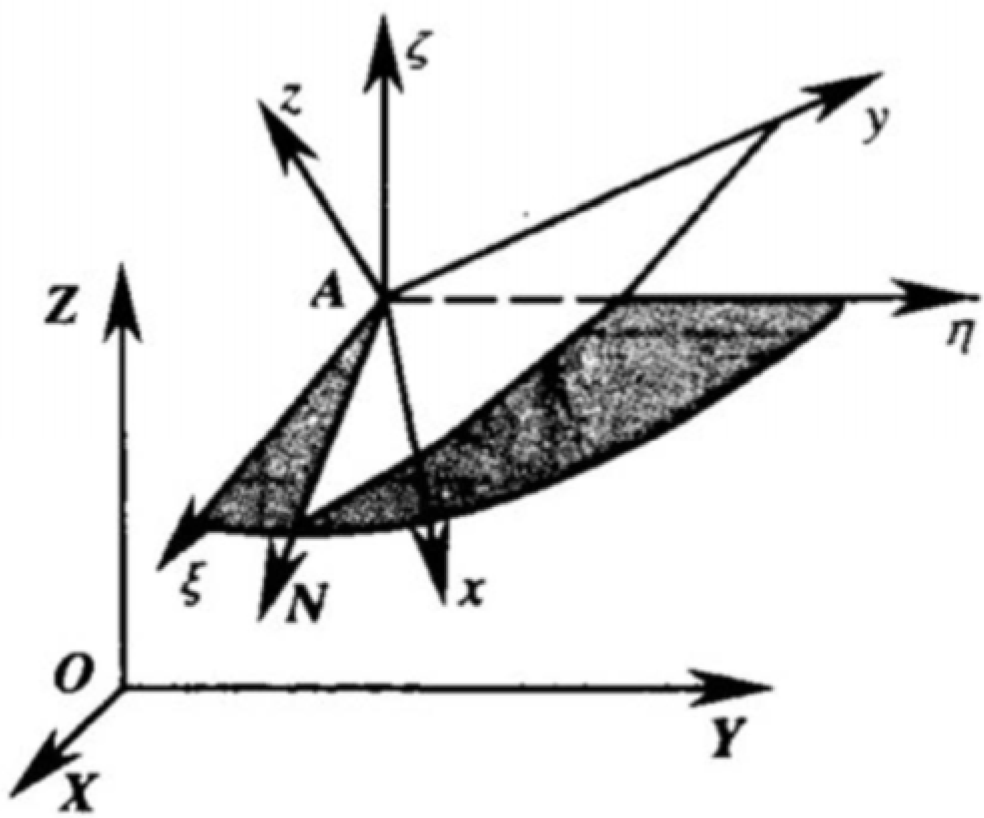
$\boldsymbol{\omega}$所在的之间即为转动瞬轴，它以$\boldsymbol{\omega}_e$绕固定轴转动，因此$\boldsymbol{\omega}$矢量将画出一个正圆锥，矢量端形成圆锥的底面圆

刚体的角速度

$$\boldsymbol{\epsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{\omega}_r)=\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{\omega}_r$$

刚体规则进动时，其角加速度矢量等于其公转角速度与自转加速度的矢积

4.6. 刚体的一般运动



自由刚体有6个自由度，需选取6个广义坐标来描述其空间的相对位置，一般采用基点法研究自由刚体的运动

在刚体上任意选取基点A，建立基点平动系$A\xi\eta\zeta$和固定在刚体上的坐标系$Axyz$，刚体的一般运动分解为随基点平动系的平动与相对于基点平动系的定点运动两部分

x_A，y_A和z_A来表示基点A的坐标，刚体相对于基点平动系作定点运动的三个欧拉角ψ，θ和φ来描述刚体的转动，则方程组

$$\left.\begin{aligned}x_A=x_A(t),\quad \psi=\psi(t),\\ y_A=y_A(t),\quad \theta=\theta(t),\\ z_A=z_A(t),\quad \varphi=\varphi(t),\end{aligned}\right\}$$

即为刚体一般运动的运动方程。

当选取的基点不同时，随基点平动的规律也不同，但可证明刚体相对于基点的瞬时角速度与基点选择无关

一般运动刚体上的速度分布：

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM}$$

其中，牵连速度等于基点A的速度$\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{v}_A$，$M$点的相对速度$\boldsymbol{v}_r$是刚体相对于基点平动系作定点运动时，刚体上$M$点的速度$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM}$

M点的牵连加速度等于基点A的加速度$\boldsymbol{a}_A$，相对加速度$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{\epsilon}\times\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，由于动系平动，科氏加速度$\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$，故$M$点的加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_M&=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\\&=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM})\end{aligned}$$

5. 动力学基本定理

5.1. 内力和外力

如果研究对象是质点系，则作用在质点系上的力可以分为内力和外力两类：

- 内力是质点系内部各质点之间的相互作用力
- 外力是质点系以外的物体对质点系的作用力。

内力的两个特点：

- 成对出现
- 主矢和主矩皆为零

其中，内力的主矢$\boldsymbol{R}$是所有内力的矢量和

$$\boldsymbol{R}^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ji}^{(i)}$$

内力的主矩是所有内力对某一点力矩的矢量和

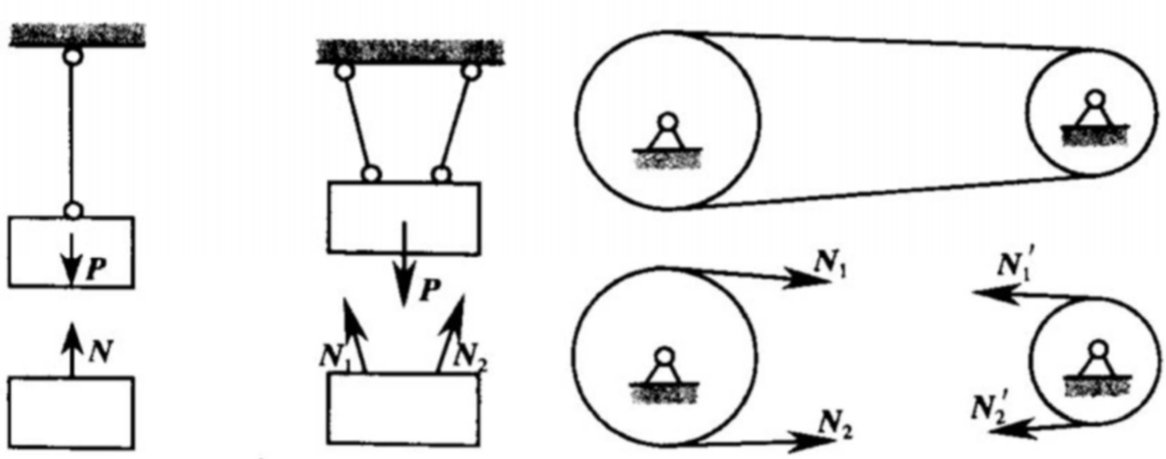
$$\boldsymbol{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)})$$

5.2. 主动力和约束反力

当物体沿着约束所能阻碍地方向有运动趋势时，它就具有改变物体运动状态地作用，就对该物体有力地作用，这种性质地力称为**约束反力**，约束反力以外的力统称为**主动力**

5.2.1. 柔索

柔索的特点是只能抗拉。当它受拉时，可以阻止物体沿柔索方向离开，才起约束的作用。所以柔索提供的约束反力，其作用线沿柔索，且背向物体，作用在柔索与物体的连接点上

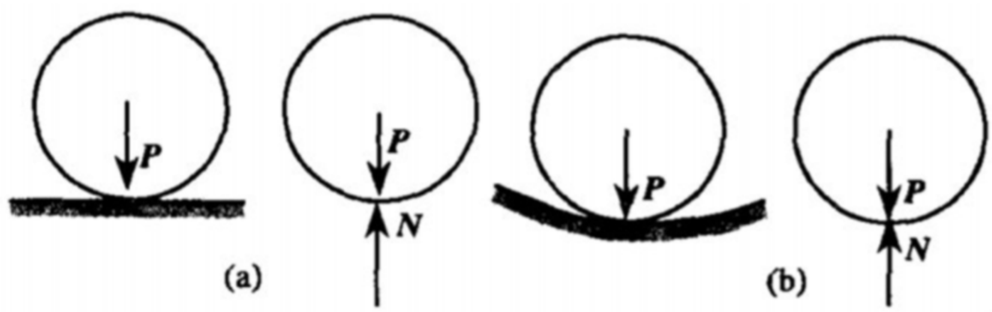


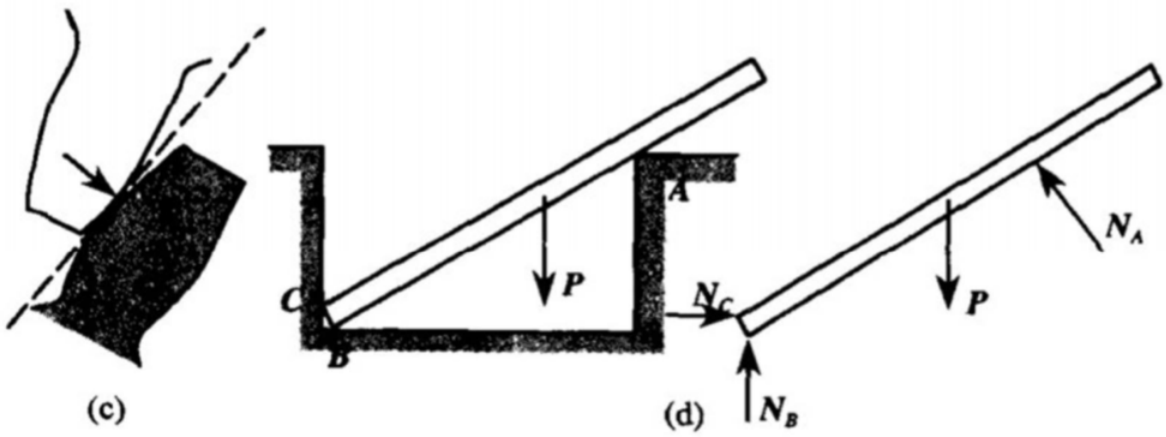
5.2.2. 刚性约束

保持任意两质点之间的距离不变，这种约束既能承受拉伸也能受压，约束反力沿两质点的连线

5.2.3. 光滑表面

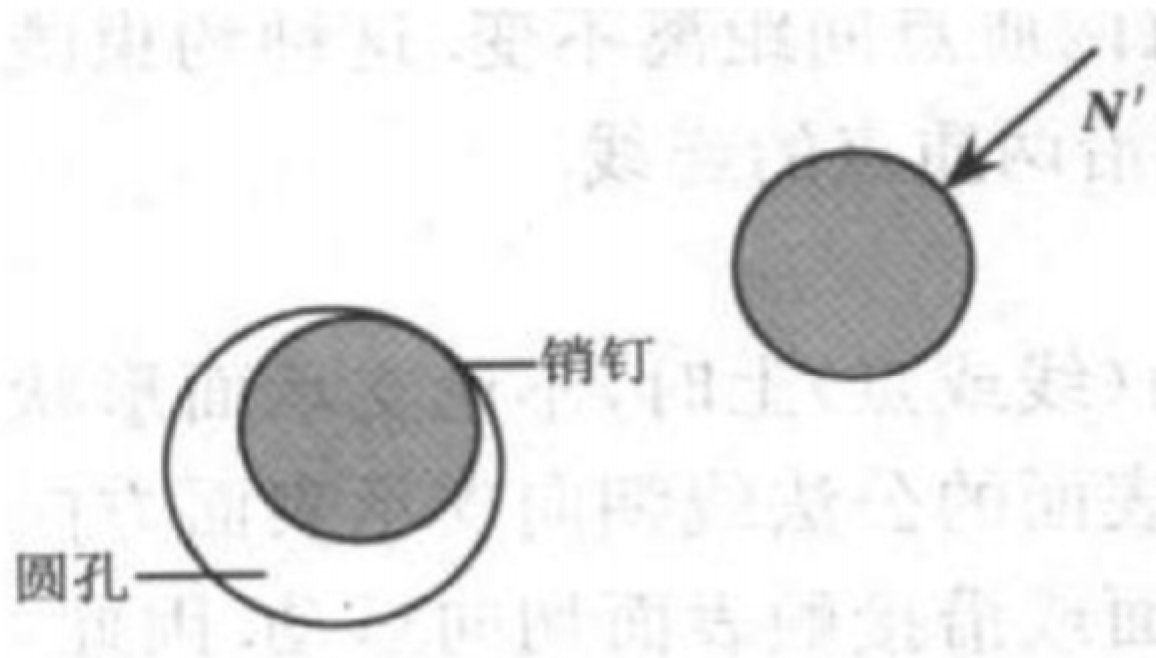
光滑表面提供的约束反力总是过接触点，沿接触表面在该点的公法线方向并指向物体



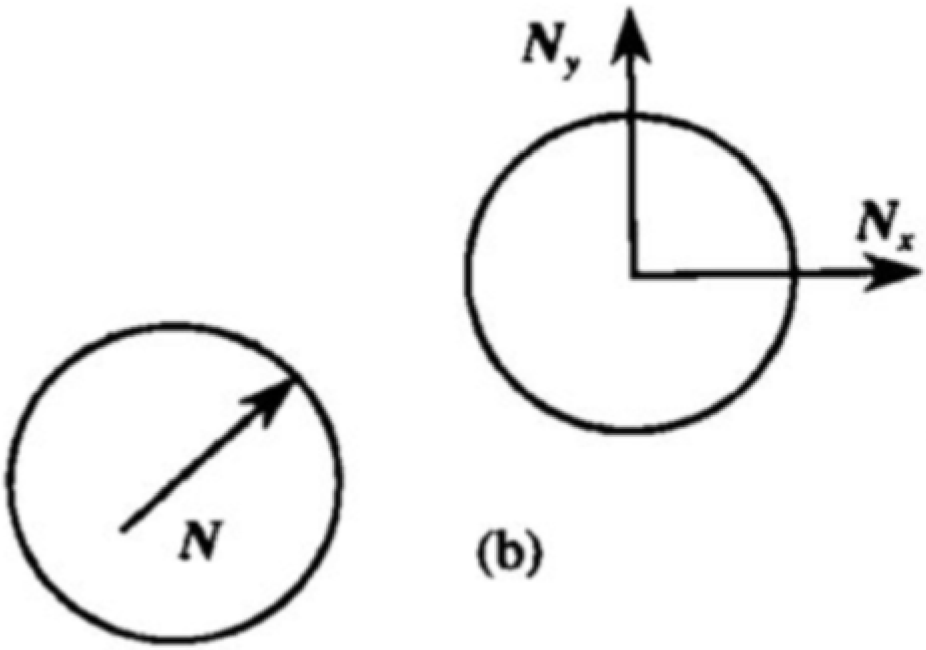


5.2.4. 光滑的圆柱形铰链

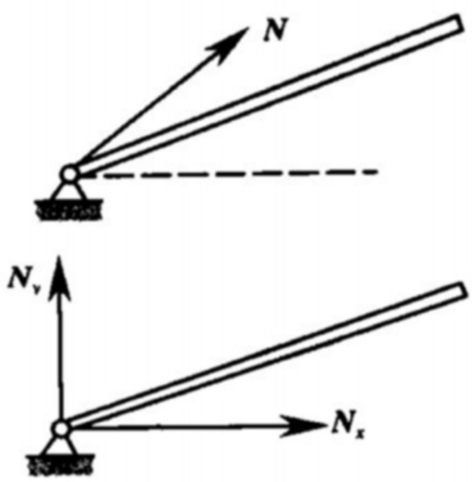
约束反力在与圆柱形孔中心轴线相垂直的平面内，沿圆孔与销钉接触点的公法线

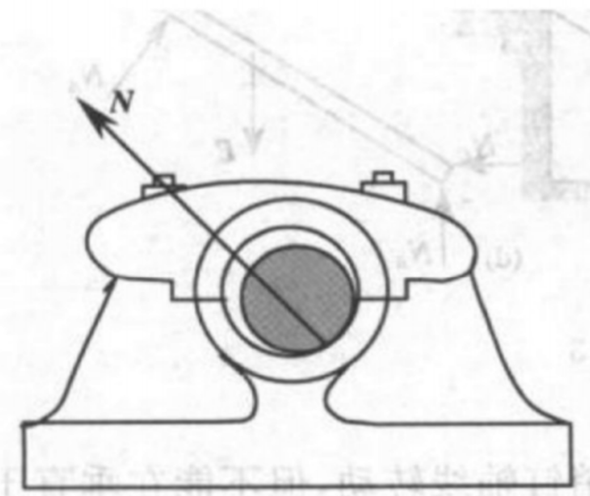


由于作用在零件上的主动力不同，销钉与圆孔的接触点也不同，使得约束反力作用线方向无法确定，一般用经过圆柱形孔中心的两个相互垂直的分量表示



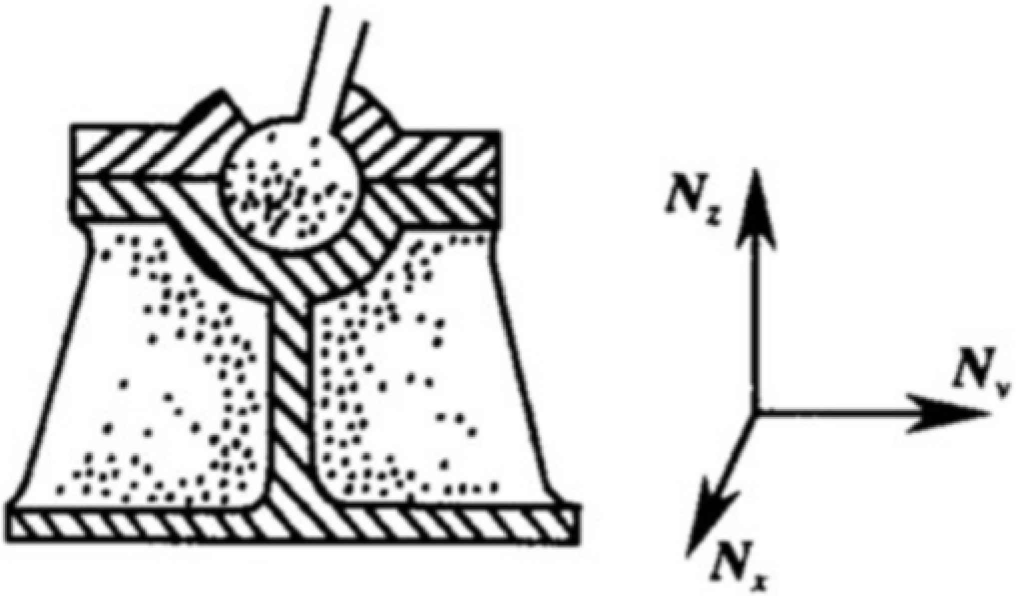
实际圆柱形铰链形式如下：





5.2.5. 球形铰链

在光滑接触条件下，约束反力的作用线必通过球心，通常将约束反力沿坐标轴分解为三个互相正交的分量



5.3. 分离体与受力分析

求解质点系动力学问题的一般步骤：

1. 确定研究对象，取分离体
2. 受力分析
3. 选取坐标系，建立动力学微分方程组
4. 在给定初始条件或边界条件下求解方程

5.4. 动量定理

设一质点系由n个质点组成，其中第i个质点的质量为m_i，瞬时速度为$\boldsymbol{v}_i$，则该质点的动量为$\boldsymbol{p}_i = m_i\boldsymbol{v}_i$，定义质点系的动量为

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i$$

即质点系的动量是系内各质点动量的矢量和

设作用在第i个质点上的合力为$\boldsymbol{F}_i$，则由质点动量定理，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{F}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

共n个方程，将合力$\boldsymbol{F}_i$分为内力和外力两类，外力记作$\boldsymbol{F}_i^{(e)}$，内力记作$\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$，且规定当$j = i$时，$\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)} = \boldsymbol{0}$，表示系内第$j$个质点对第$i$个质点的作用力，可知

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

将上述n个方程相加，由于内力的主矢$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)} = \boldsymbol{0}$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{(e)}$$

交换求导和求和的次序，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

定义外力系的主矢为

$$\boldsymbol{R}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

最终得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R}^{(e)}$$

表明质点系动量对时间的一次导数等于作用于质点系外力系的主矢

注意：

1. 质点系动量定理说明质点系动量的变化只决定于外力的主矢，而与其内力无关
2. 若作用在质点系上的外力系主矢为零，则质点系的总动量不随时间变化
3. 如果质点系外力系的主矢在某一个方向上投影为零，则质点系的动量在该方向上守恒
4. 质点系动量定理的微分形式：

   $$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}^{(e)}\mathrm{d}t$$

   质点系动量定理的积分形式：

   $$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R}^{(e)}\mathrm{d}t$$

5. 动量是该质点的质量与其绝对速度之积

5.5. 质心运动定理

设一质点系由n个质点组成，其中第i个质点的质量为m_i，其矢径为$\boldsymbol{r}_i$，质点系的质心位置为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

式中$\boldsymbol{r}_C$为质心C的矢径，M是质点系的总质量。质心的概念适用于任何质点系，且与外力无关

在直角坐标系中，质心的三个坐标为

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{x}_i}{M} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{y}_i}{M} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{z}_i}{M}$$

对

$$M\boldsymbol{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$$

对时间t求导，得

$$M\boldsymbol{v}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i$$

故

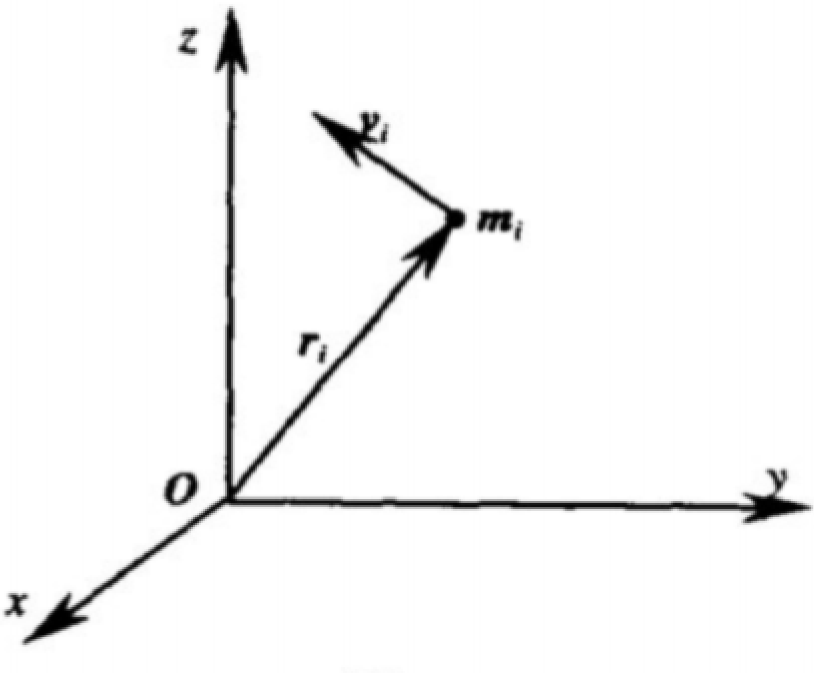
$$M\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{p}_C=\boldsymbol{p}$$

说明设想把质点系得全部质量都集中到质心一个点上，则$M\boldsymbol{v}_C$就是质心的动量，记作$\boldsymbol{p}_C$，质心的动量等于质点系的动量$\boldsymbol{p}$，两边对时间求导一次，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_C}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{R}^{(e)}$$

表明质心得动量变化率等于外力系得主矢

5.6. 动量矩定理



设一质点系由n个质点组成，其中第i个质点的质量为m_i，瞬时速度为$\boldsymbol{v}_i$，矢径为$\boldsymbol{r}_i$，它对固定点O的动量矩为$\boldsymbol{H}_{oi}$，如图所示，有

$$\boldsymbol{H}_{oi}=\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

定义质点系对O点的动量矩为：

$$\boldsymbol{H}_0=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_{oi}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

质点系的动量矩等于系内各质点对同一点动量矩的矢量和

对每一个质点，质点动量矩定理均成立，故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{oi}}{\mathrm{d}t}=m_0(\boldsymbol{F}_i),\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

式中$\boldsymbol{F}_i$为作用在第i个质点上的合力，这些力可分为内力$\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}$和外力$\boldsymbol{F}_o^{(e)}$两类，故：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{oi}}{\mathrm{d}t}&=m_o(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+m_0\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}\right)\\&=m_0(F_i^{(e)})+\sum_{j=1}^{n}m_0\left(\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}\right),\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

将上述n个方程相加，由于内力主矩为零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} m_0(\boldsymbol{F}_{ij}^{(i)}) = 0$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_{oi}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

等式右端为作用在质点系上外力系各个力对O点力矩的矢量和，称为外力系的主矩，记作$\boldsymbol{L}_0^{(e)}$ ，即

$$\sum_{i=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \boldsymbol{L}_0^{(e)}$$

最终可得

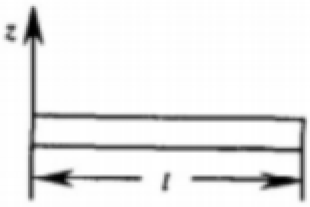
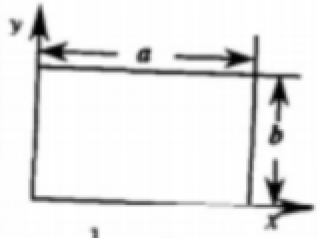
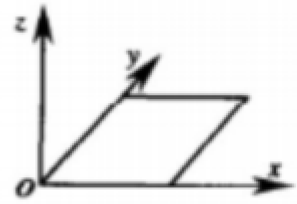
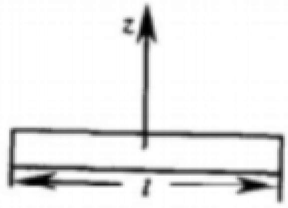
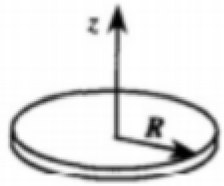
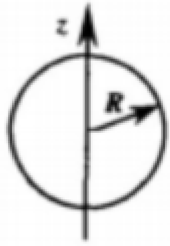
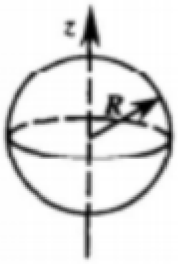
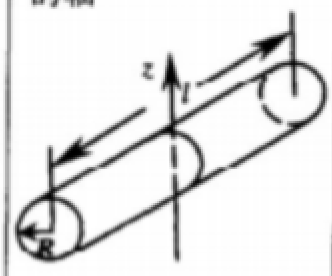
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L}_o^{(e)}$$

说明质点系对于某一固定点O的动量矩$\boldsymbol{H}_0$对时间的一阶导数等于作用在质点系上外力系对同一点的主矩

注意：

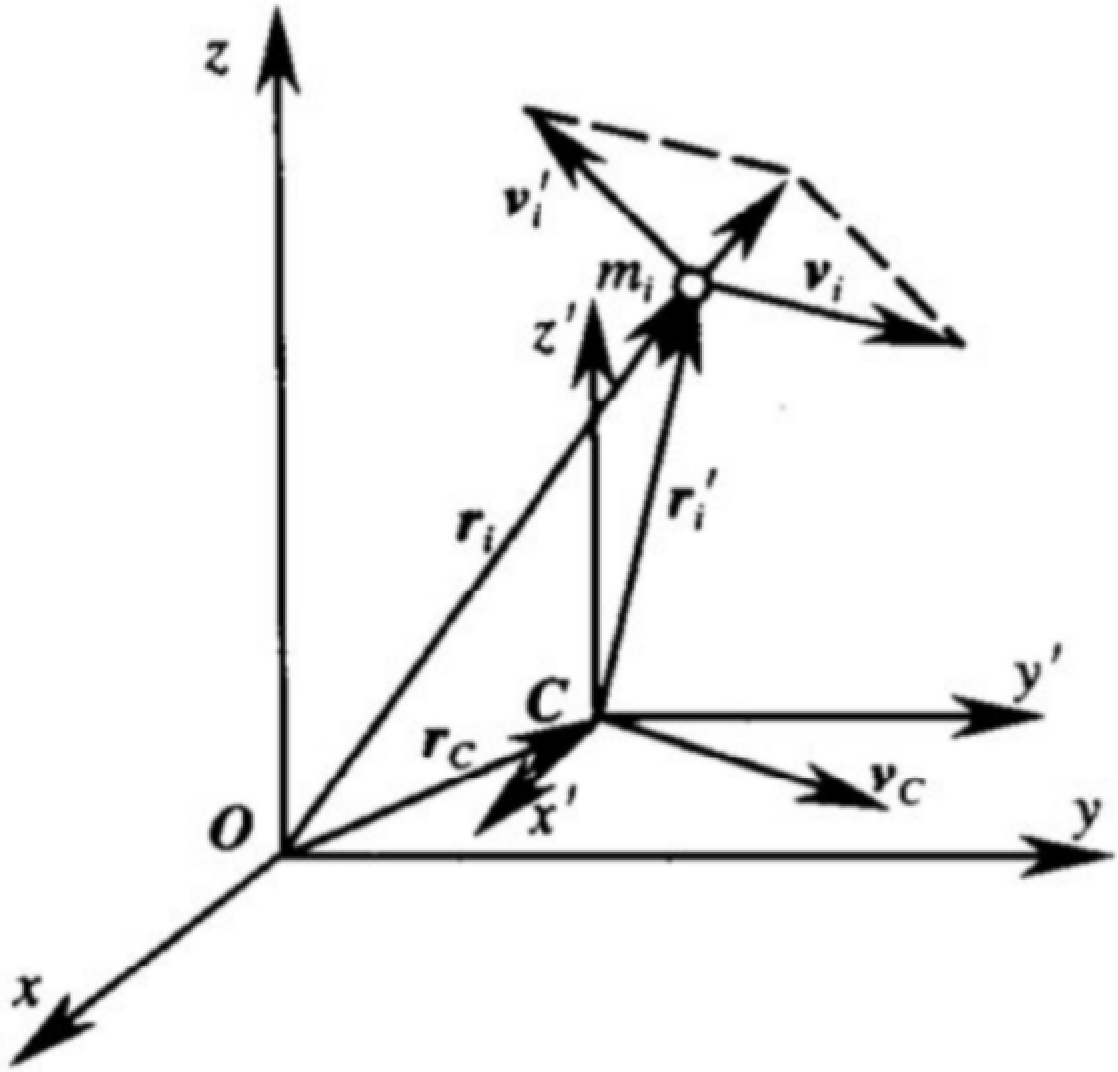
1. 当质点系不受任何外力作用时，质点系总动量矩为一常矢量，即$\boldsymbol{H}_0 = C$，该常矢量由运动的初始条件决定
2. 质点系对固定轴的动量矩定理：
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{z}_i y_i - \dot{y}_i z_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i z_i - \dot{z}_i x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{y}_i x_i - \dot{x}_i y_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \end{cases}$$
3. 质点系所受外力对某一固定点的主矩不为零，但主矩在过该点的某一固定轴上的投影为零，则质点系对此轴的动量矩守恒
4. 动量矩定理微分形式
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{L}_0^{(e)} \cdot \mathrm{d}t$$
动量矩定理积分形式
$$\boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{L}_0^{(e)} \mathrm{d}t$$

表 6.1　几种常见的几何形状的转动惯量和回转半径

均质等截面直杆对于通过端点并垂直于杆的轴  $I_z=\frac{1}{3}Ml^2$ $\rho_z=0.577l$	均质矩形板对通过一边的轴  $I_y=\frac{1}{3}Ma^2$ $I_x=\frac{1}{3}Mb^2$	均质板对于通过 O 点垂直于板平面的轴  $I_z=I_x+I_y$ （对任何形状的板都适用）
均质等截面直杆对于通过质心并垂直于杆的轴  $I_z=\frac{1}{12}Ml^2$ $\rho_z=0.289l$	均质圆板或圆柱对于通过圆心并垂直于板平面的轴  $I_z=\frac{1}{2}MR^2$ $\rho_z=0.707R$	均质圆板对以直径为转轴  $I_z=\frac{1}{4}MR^2$ $\rho_z=0.5R$
均质球体绕其直径  $I_z=\frac{2}{5}MR^2$ $\rho_z=0.632R$	均质圆柱体绕通过质心并垂直于母线的轴  $I_z=\frac{1}{12}MR^2+\frac{1}{4}MR^2$	

* 表中 M 为刚体的质量

质点系相对质心的动量矩定理



5.7. 力系的功

5.8. 动能定理

5.9. 柯尼希定理

5.10. 保守系统