5-5 给定一阶系统

$$\dot{x}(t)=u(t), \quad x(1)=3$$

性能指标

$$J=x^2(5)+\int_1^5 \frac{1}{2}u^2(t)\mathrm{d}t$$

试求最优控制 $u^*(t)$ 和最优性能指标 J^*。

- 解：依据题意：$A=0, B=1, F=1, Q=0, R=1/2$;

  代入 $Riccati$ 方程得出：$\dot{P}(t)=2P^2(t)$,边界条件为$P(5)=1$;

  · $Riccati$ 方程的求解：

  $$\dot{P}(t)=2P^2(t)\Rightarrow -\frac{\dot{P}(t)}{P^2(t)}=-2\Rightarrow \frac{d\frac{1}{P(t)}}{dt}=-2.$$

  两边积分再代入边界条件求得$P(t)=\frac{1}{11-2t}$.

  最优控制$u^*(t)=\frac{-2x(t)}{11-2t}$. 最优性能指标为：$J^*=x^T(1)P(1)x(1)=1$.

注：当以性能指标表达式带有1/2来算时，在最优指标上也要加上1/2；认为性能指标表达式不带1/2来算时，在最优指标上不要加上1/2。不要混用。

$$J=\boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]dt \qquad J^*=\boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

5-6 已知一阶系统状态方程

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}x(t)+u(t)$$

当 $t_0=0$ 时，$x(t_0)=2$；当 $t_f=1$ 时，$x(t_f)$ 自由。性能指标

$$J=5x^2(1)+\frac{1}{2}\int_0^1[2x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

试求最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

- 解：根据系统的动态方程和性能指标，得出：$A=-\frac{1}{2}, B=1, F=5, Q=1, R=\frac{1}{2}$.

  代入 $Riccati$ 方程得出：$\dot{P}(t)=2P^2(t)+P(t)-1$，边界条件为：$P(1)=5$

  · $Riccati$ 方程的求解：

  $$2\dot{P}(t)=P^2(t)+P(t)-1\Rightarrow \frac{\dot{P}(t)}{P(t)-0.5}-\frac{\dot{P}(t)}{P(t)+1}=3\Rightarrow \frac{d \quad ln(P(t)-0.5)}{dt}-\frac{d \quad ln(P(t)+1)}{dt}=3.$$

  两边做积分：$ln\frac{P(t)-0.5}{P(t)+1}=3t+C\Rightarrow \frac{P(t)-0.5}{P(t)+1}=C_1e^{3t}$.代入边界条件求得：$P(t)=\frac{2+3e^{3t-3}}{4-3e^{3t-3}}$.

  因此最优控制律为：$u^*(t)=-2x(t)=\frac{4+6e^{3t-3}}{-4+3e^{3t-3}}$.

  代入动态方程求得最优轨线：$x^*(t)=-1.24exp\{\int_0^t \frac{12+9e^{3\tau-3}}{8-6e^{3\tau-3}}d\tau\}$.

5.9 解：

这是一个无限时间定常状态调节器问题。

$$A=-\frac{1}{T}, B=1, Q=q, R=r.$$

$Q=D^T*D$，$D=\sqrt{q}$，易见，{A，B}能控，{A，D}能观；

因而存在唯一的最优控制 $u^*(t)=-R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$，

其中 $\bar{P}$ 满足 $\bar{P}A+A^T\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=0$，

解这个黎卡提方程，得到：$\bar{P}=-\frac{r}{T}+\sqrt{\left(\frac{r}{T}\right)^2+rq}$

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\bar{P}x(t)=-\left(\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}-\frac{1}{T}\right)x(t),$$

代入状态方程，得到：$\dot{x}(t)=-\frac{1}{T}x(t)+u(t)=-\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}x(t)$

解此方程，得到：$x^*(t)=e^{-t\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}}x_0$

最优控制：$u^*(t)=\left(\frac{1}{T}-\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}\right)x^*(t)=\left(\frac{1}{T}-\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}\right)e^{-t\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}}x_0$

$$q=\frac{1}{x_m^2},\quad r=\frac{1}{u_m^2},\quad \frac{q}{r}=\frac{u_m^2}{x_m^2}$$

当 $\frac{q}{r}=\frac{u_m^2}{x_m^2}$ 比较大，$\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}$ 比较大，$x^*(t)$ 会更快地趋于零，但反馈系数 $\sqrt{\frac{1}{T^2}+\frac{q}{r}}-\frac{1}{T}$ 也会比较大，即需要消耗更多的控制能量。

5.10 解：这是一个**无限时间定常状态调节器**问题。

令 $x=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$，则：$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u=Ax+Bu$

$Q=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=D^T*D$；$D=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$，R=1

容易验证：{A，B}能控，{A，D}能观；

因而存在唯一的最优控制，$u^*(t)=-R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$

其中 $\bar{P}$ 满足，$\bar{P}A+A^T\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=0$

解这个黎卡提方程，得到：$\bar{P}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}-1 & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$，

最优控制为：$u^*(t)=-R^{-1}B^T\bar{P}x(t)=-\begin{bmatrix}\sqrt{3}-1 & 1\end{bmatrix}x(t)$

5-18 设一阶系统方程为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+u(t)$$

性能指标

$$J=\int_0^\infty e^{2\alpha t}[u^2(t)+bx^2(t)]dt$$

式中 a,b,α 为常数，b 和 α 非负。试求最优闭环系统特征值 λ，并用图解方法表示 λ 随 a、b 和 α 变化时的情况。

5.18 解：本题类型是具有给定稳定裕度的状态调节器。PPT49 页开始给出了这类的解法。

题目条件给出 $A=a,B=1,Q=b,R=1$ 。$H^TH=Q$ 得到 $H=\sqrt{b}$。

分别验证 $\{A,B\}$ 的能控性和 $\{A,H\}$ 的能观性：$rank(M_c)=rank(M_o)=1$ 。

因此 $\{A,B\}$ 能控，$\{A,H\}$ 能观。得到黎卡提方程：

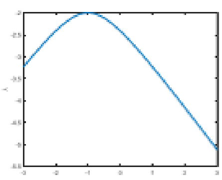
$$\bar{P}(A+\alpha I)+(A^T+\alpha I)\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=0$$

代入条件得到：$p^2-2(a+\alpha)p-b=0,(p>0)$。解得：$p=(a+\alpha)+\sqrt{(a+\alpha)^2+b}$

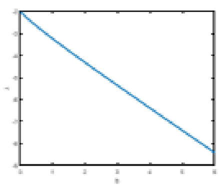
最优轨线：$\dot{x}(t)=(A-BR^{-1}B^Tp)x(t)=-[\alpha+\sqrt{(a+\alpha)^2+b}]x(t)$ 。

因此特征值 $\lambda=-[\alpha+\sqrt{(a+\alpha)^2+b}]$。

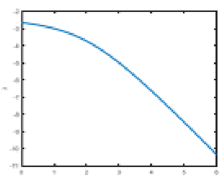
λ 随 a 变化:



λ 随 b 变化:



λ 随 α 变化:



5.20 证：$V(x)=x^T\bar{P}x$

$\dot{V}(x)=\dot{x}^T\bar{P}x+x^T\bar{P}\dot{x}$
$=x^T(A-BR^{-1}B^T\bar{P})^T\bar{P}x+x^T\bar{P}(A-BR^{-1}B^T\bar{P})x$
$=x^T(A^T\bar{P}+\bar{P}A-2\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P})x$

而 $\bar{P}$ 满足式（5-103）$\bar{P}(A+\alpha I)+(A^T+\alpha I)\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q=0$

故有：$\bar{P}A+A^T\bar{P}-\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}=-Q-2\alpha\bar{P}$

所以：$\dot{V}(x)=-x^T(\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q+2\alpha\bar{P})x$，

其中 $\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}$ 和 Q 半正定，$\bar{P}$ 正定，故 $(\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}+Q+2\alpha\bar{P})$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定，从而最优闭环系统（5-104）是渐近稳定的。

5.22 离散系统状态调节器（PPT 例题 5.8）

由题意知，$x_1(k+1)=x_2(k)$，所以性能指标可以写成 $J=\sum_{k=0}^{2}[x_2^2(k)+u^2(k)]$

所以有：$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, R=1$

① 令 k=N=3 得，$p(3)=F=\underline{0}$

② 令 k=2 得：

$$z_1(2)=Q(2)+A^T(2)p(3)A(2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad z_2(2)=B^T(2)p(3)A(2)=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$$

$$z_3(2)=R(2)+B^T(2)p(3)B(2)=1 \quad 得：\quad \begin{aligned}&k(2)=z_3^{-1}(2)z_2(2)=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\\&p(2)=z_1(2)-z_2^T(2)k(2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

③ 令 k=1 得，

$$z_1(1)=Q(1)+A^T(1)p(2)A(1)=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix},\quad z_2(1)=B^T(1)p(2)A(1)=\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}$$

$$z_3(1)=R(1)+B^T(1)p(2)B(1)=2 \quad 得：\quad \begin{aligned}&k(1)=z_3^{-1}(1)z_2(1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}\\&p(1)=z_1(1)-z_2^T(1)k(1)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

④ 令 k=0 得，

$$z_1(0)=Q(0)+A^T(0)p(1)A(0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-2\\-2&4\end{bmatrix},\quad z_2(0)=B^T(0)p(1)A(0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3&2\end{bmatrix}$$

$$z_3(0)=R(0)+B^T(0)p(1)B(0)=\frac{5}{2} \quad 得：\quad \begin{aligned}&k(0)=z_3^{-1}(0)z_2(0)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&2\end{bmatrix}\\&p(0)=z_1(0)-z_2^T(0)k(0)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}6&-4\\-4&16\end{bmatrix}\end{aligned}$$

计算最优控制 $u^*(t)=\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},0\}$，$J^*=\sum_{k=0}^{2}[x_2^2(k)+u^2(k)]=1.4$

6.8 无限时间最优跟踪问题

解：由题目可知： $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, Q=\frac{1}{2}, R=\frac{1}{2}, y_r(t)=1.$

能控性矩阵：$M_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 10\\ 10 & -10\end{bmatrix}, rank(M_c)=2$

又 $H^TH=C^TQC=\frac{1}{2}C^TC$ 可令 $H=\frac{\sqrt{2}}{2}C, M_o=\begin{bmatrix}H\\ HA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}, rank(M_o)=2$

于是（近似）最优控制存在。

① 黎卡提方程：$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+C^TQC=0$ 解得：$P=\begin{bmatrix}0.229 & 0.050\\ 0.050 & 0.018\end{bmatrix}$

② 伴随向量：$g(t)=\left[PBR^{-1}B^T-A^T\right]^{-1}C^TQy_r(t)=\begin{bmatrix}0.229\\ 0.050\end{bmatrix}$

于是近似最优控制：

$$\hat{u}^*(t)=-R^{-1}B^T\left[Px(t)-g(t)\right]=-x_1(t)-0.358x_2(t)+1$$

2-13 极小值原理

解：由题可知

构造 H：$H=L+\lambda^Tf=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$

正则方程：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{\lambda}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\end{cases}$

可求得 $\begin{cases}\lambda_1(t)=c_1\\ \lambda_2(t)=-c_1t+c_2\end{cases}$

控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$

由上式可得 $u(t)=-\lambda_2=c_1t-c_2$

由状态方程 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，$\dot{x}_2(t)=u(t)$ 可得 $\begin{cases}x_1(t)=\frac{1}{6}c_1t^3-\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4\\ x_2(t)=\frac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3\end{cases}$

（1）$t_f=5$ 时

由边界条件 $x_1(0)=2$，$x_2(0)=1$，$x_1(t_f)=0$，$x_2(t_f)=0$ 可得

$$\begin{cases}c_3=1\\ c_4=2\\ \frac{1}{6}c_1*5^3-\frac{1}{2}c_2*5^2+c_3*5+c_4=0\\ \frac{1}{2}c_1*5^2-c_2*5+c_3=0\end{cases} \text{得} \begin{cases}c_1=\frac{54}{125}\\ c_2=\frac{32}{25}\\ c_3=1\\ c_4=2\end{cases}$$

故 $\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{9}{125}t^3 - \dfrac{16}{25}t^2 + t + 2 \\ x_2(t) = \dfrac{27}{125}t^2 - \dfrac{32}{25}t + 1 \end{cases}$ 有 $\dot{x}_2(t) = \dfrac{54}{125}t - \dfrac{32}{25}$

有最优控制 $u^*(t) = \dfrac{54}{125}t - \dfrac{32}{25}$

（2）若 t_f 自由

由哈密顿函数在最优轨线末端应满足的条件

$$H(t_f) = \frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_f} = 0$$

即 $\lambda_2(t_f) = 0$，从而 $c_2 = c_1 t_f$，代入 $\begin{cases} \dfrac{1}{6}c_1 t_f^{\ 3} - \dfrac{1}{2}c_2 t_f^{\ 2} + t_f + 2 = 0 \\ \dfrac{1}{2}c_1 t_f^{\ 2} - c_2 t_f + 1 = 0 \end{cases}$ 可得 $t_f = -6$

因为时间总为正值，所以此题无解。