
实验九 Path Tracing

ID: 58 陈文博

April 27, 2020

1 实验要求

- * 实现路径追踪算法
- * 搭建场景并渲染

2 开发环境

IDE: Microsoft Visual Studio 2019 community

CMake: 3.16.3

Others

3 算法原理

3.1 渲染方程

$$L_o(\mathbf{p}, \omega_o) = L_e(\mathbf{p}, \omega_o) + \int_{\mathcal{H}^2(\mathbf{n}(\mathbf{p}))} f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o) L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \cos \theta_{\omega_i, \mathbf{n}(\mathbf{p})} \omega_i \quad (3.1)$$

参数释义：

- L_o 是出射 radiance
- \mathbf{p} 是渲染点
- ω_i 是入射光方向
- ω_o 是出射光方向
- L_e 是发光 radiance
- $\mathbf{n}(\mathbf{p})$
- $\mathcal{H}^2(\mathbf{n}(\mathbf{p}))$ 是法向 $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ 所在半球
- f_r 是双向散射分布函数 (BRDF)
- L_i 是入射 radiance
- $\theta_{\omega_i, \mathbf{n}(\mathbf{p})}$ 是 ω_i 与 $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ 的夹角

记

$$\int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L = \int_{\mathcal{H}^2(\mathbf{n}(\mathbf{p}))} f_r(\mathbf{p}, \omega_i, \omega_o) L \cos \theta_{\omega_i, \mathbf{n}(\mathbf{p})} \omega_i. \quad (3.2)$$

则

$$L_o(\mathbf{p}, \omega_o) = L_e(\mathbf{p}, \omega_o) + \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \quad (3.3)$$

反射方程为

$$L_r(\mathbf{p}, \omega_o) = \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_i(\mathbf{p}, \omega_i) \quad (3.4)$$

对于 L_i 有关系式

$$L_i(\mathbf{p}, \omega_i) = L_o(raytrace(\mathbf{p}, \omega_i), -\omega_i) \quad (3.5)$$

其中， $raytrace$ 为射线与场景的相交函数

记 $raytrace(\mathbf{p}, \omega_i)$ 为 \mathbf{p}' , 则有

$$L_i(\mathbf{p}, \omega_i) = L_o(\mathbf{p}', -\omega_i) \quad (3.6)$$

如此形成递归

$$L_o(\mathbf{p}, \omega_o) = L_e(\mathbf{p}, \omega_o) + \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_o(\mathbf{p}', -\omega_i) \quad (3.7)$$

将 L_r 展开一次

$$\begin{aligned} L_r(\mathbf{p}, \omega_o) &= \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} (L_e(\mathbf{p}', -\omega_i) + L_r(\mathbf{p}', -\omega_i)) \\ &= \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_e(\mathbf{p}', -\omega_i) + \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_r(\mathbf{p}', -\omega_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

记:

- 直接光 $L_{\text{dir}}(\mathbf{p}, \omega_o)$: $\int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_e(\mathbf{p}', -\omega_i)$
- 间接光 $L_{\text{indir}}(\mathbf{p}, \omega_o)$: $\int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_r(\mathbf{p}', -\omega_i)$

3.2 直接光

$$L_{\text{dir}}(\mathbf{p}, \omega_o) = \int_{\mathbf{p}, \omega_o, \omega_i} L_e(\mathbf{p}', -\omega_i) \quad (3.9)$$

积分中, 对于大部分方向 ω_i , $L_e(\mathbf{p}', -\omega_i) = 0$ (非光源), 所以我们直接在光源所在方向上积分

其中 \mathbf{p} , ω_o 和 ω_i 可用三点确定, 如下图所示

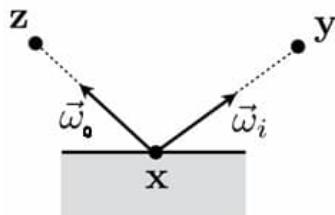


Figure 3.1: 直接光反射图示

图中 x 即为 \mathbf{p} , y 即为 \mathbf{p}'

由几何关系可知

$$\omega_i = \frac{|\cos\theta_{y,x}|}{\|x-y\|^2} A(y) \quad (3.10)$$

其中 $\theta_{y,x}$ 是方向 $x-y$ 与 $n(y)$ 的夹角

引入几何传输项（两点间的“传输效率”）

$$G(x \leftrightarrow y) = V(x \leftrightarrow y) \frac{|\cos\theta_{x,y}| |\cos\theta_{y,x}|}{\|x-y\|^2} \quad (3.11)$$

其中 $V(x \leftrightarrow y)$ 是可见性函数，当 x 和 y 之间无阻隔时为 1，否则为 0

G 是对称函数，即 $G(x \leftrightarrow y) = G(y \leftrightarrow x)$

故有

$$L_{\text{dir}}(x \rightarrow z) = \int_A f_r(y \rightarrow x \rightarrow z) L_e(y \rightarrow x) G(x \leftrightarrow y) A(y)$$

其中积分域 A 为场景中所有的面积，但只有光源处 $L_e(y \rightarrow x) \neq 0$

记光源数 N_e ，场景中的光源集为 $\{L_{e_i}\}_{i=1}^{N_e}$ ，对应的区域集为 $\{A(L_{e_i})\}_{i=1}^{N_e}$ ，则可写为

$$L_{\text{dir}}(x \rightarrow z) = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{A(L_{e_i})} f_r(y \rightarrow x \rightarrow z) L_e(y \rightarrow x) G(x \rightarrow y) A(y)$$

3.3 间接光

递归求解：

$$L_r(p, \omega_o) = \int_{p, \omega_o, \omega_i} L_e(p', -\omega_i) + \int_{p, \omega_o, \omega_i} L_r(p', -\omega_i) \quad (3.12)$$

3.4 蒙特卡洛积分与重要性采样

用采样的方法计算积分，方差与积分域 D 的维度无关

X 为连续随机变量， F 为随机变量函数： $F = g(X), X \sim p(x)$

F 的期望： $E[F] = \int_D g(x) p(x) dx$

F 的估计： $F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \xrightarrow{N} E[Y]$

f 与 g 的关系: $g(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$

代入 F 的估计式: $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \xrightarrow{N} \int_D f(x) dx$

方差: $V[F_N] = \frac{1}{N} V\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] \sim O(\frac{1}{N})$

为了缩小误差, 除了增加样本数量, 还可以缩小 $V[\frac{f(x)}{p(x)}]$

重要性采样

若 $p(x) = \frac{f(x)}{\int_D f(x) dx}$, 则

$$V\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] = V\left[\frac{1}{\int_D f(x) dx}\right] \quad (3.13)$$

只要 $p(x)$ 和 $f(x)$ 的形状接近, 那么方差就会比较小, 比如 $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) \approx c$, 而 $g(x)$ 积分可求, 则可取 $p(x) = \frac{g(x)}{\int_D g(x) dx}$

3.5 计算渲染方程

我们要计算的是如下积分

$$L_r(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = L_{\text{dir}} + L_{\text{indir}} \quad (3.14)$$

右侧积分式需要递归

利用蒙特卡洛积分可将积分转成采样

$$\begin{aligned} L_{\text{dir}}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}) &\approx \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{f_r(\mathbf{y}_i^{(j)} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}) L_e(\mathbf{y}_i^{(j)} \rightarrow \mathbf{x}) G(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_i^{(j)})}{p(\mathbf{y}_i^{(j)})} \\ L_{\text{indir}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_o) &\approx \sum_{k=1}^N \frac{f_r(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_i^{(k)}, \boldsymbol{\omega}_o) L_r(\mathbf{p}'^{(k)}, -\boldsymbol{\omega}) \cos \theta_{\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{n}(\mathbf{p})}}{p(\boldsymbol{\omega}_i^{(k)})} \end{aligned} \quad (3.15)$$

L_{dir} 在各光源区域采样

对于 L_{indir} 则半球采样

采样个数皆为 1 ($N_i = 1$ ($i = 1, \dots, N_e$), $N = 1$)

3.6 环境光贴图重要性采样



$$p(\vec{\omega}_i) \propto L_{\text{env}}(\vec{\omega}_i)$$

Alias Method

Alias Method

Operation

算法利用一个概率表 U_i 和一个别名表 K_i (for $1 \leq i \leq n$)，进行以下操作：

1. 生成一个 $[0, 1)$ 的随机数 x
2. 设 $i = \lfloor x \rfloor + 1$ 和 $y = nx + 1 - i$ ，使得 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 和 $y \in [0, 1)$
3. 如果 $y < U_i$ ，返回 i
4. 否则，返回 K_i

Table Generation 为了生成别名表，先初始化 $U_i = np_i$ ，与此同时，将表条目分为三类：

- overfull: $U_i > 1$
- under full: $U_i < 1$ 且 K_i 未初始化
- exactly full: $U_i = 1$ 或 K_i 已初始化

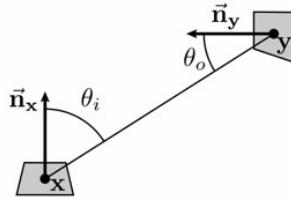
如果 $U_i = 1$, 则永远不会参考相应的值 K_i , 它并不重要, 但 $K_i = i$ 的值是合理的只要表条目未达到 exactly full, 重复以下步骤:

1. 任意选择一个 overfull 条目 $U_i > 1$ 和一个 underfull 条目 $U_j < 1$
(若其中一个存在, 另外一个则必然存在)
2. 通过设定 $K_j = i$, 将条目 j 中未使用的空间分配给结果 i
3. 通过更改 $U_i = U_i - (1 - U_j) = U_i + U_j - 1$, 从条目 i 中删除分配的空间
4. 条目 j 当前达到 exactly full
5. 根据 U_i 的新值将条目 i 分配给适当的类别

生成别名表后, 可采用离散的像素, 相关概率关系如下

$$\begin{aligned}
 \int_I p_{\text{img}}(i, j) di dj &= \int_{\Theta} p_{\text{img}}(\theta, \phi) \left| \frac{\partial(i, j)}{\partial(\theta, \phi)} \right| d\theta d\phi \\
 &= \int_A p_{\text{img}}(A) |\det J_A \Theta| \left| \frac{\partial(i, j)}{\partial(\theta, \phi)} \right| dA \\
 &= \int_{\Omega} p_{\text{img}}(\omega_i) \left| \frac{dA}{d\omega_i} \right| |\det J_A \Theta| \left| \frac{\partial(i, j)}{\partial(\theta, \phi)} \right| d\omega_i \\
 &= \int_{\Omega} p(\omega_i) d\omega_i
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中



$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d\omega_i}{dA} \right| &= \frac{|\cos \theta_o|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = \frac{1}{R^2} \\
 |\det J_A \Theta| &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \\
 \left| \frac{\partial(i, j)}{\partial(\theta, \phi)} \right| &= \frac{wh}{2\pi^2}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

则

$$p(\omega_i) = \frac{wh}{2\pi^2 \sin \theta} p_{\text{img}}(i, j) \tag{3.18}$$

4 设计难点与解决

4.1 计算 BRDF 时入射光未归一化出现计算出错

出错图像：



Figure 4.1: 无归一化

4.2 未考虑光源出射光方向

面光源只朝一个方向出射光线，需要判断法向与返回光源的光线夹角排除从背部返回的光线，出错图像：

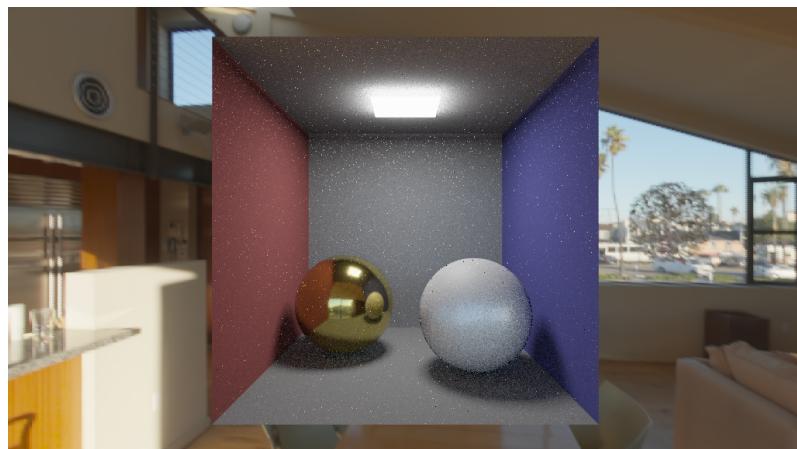
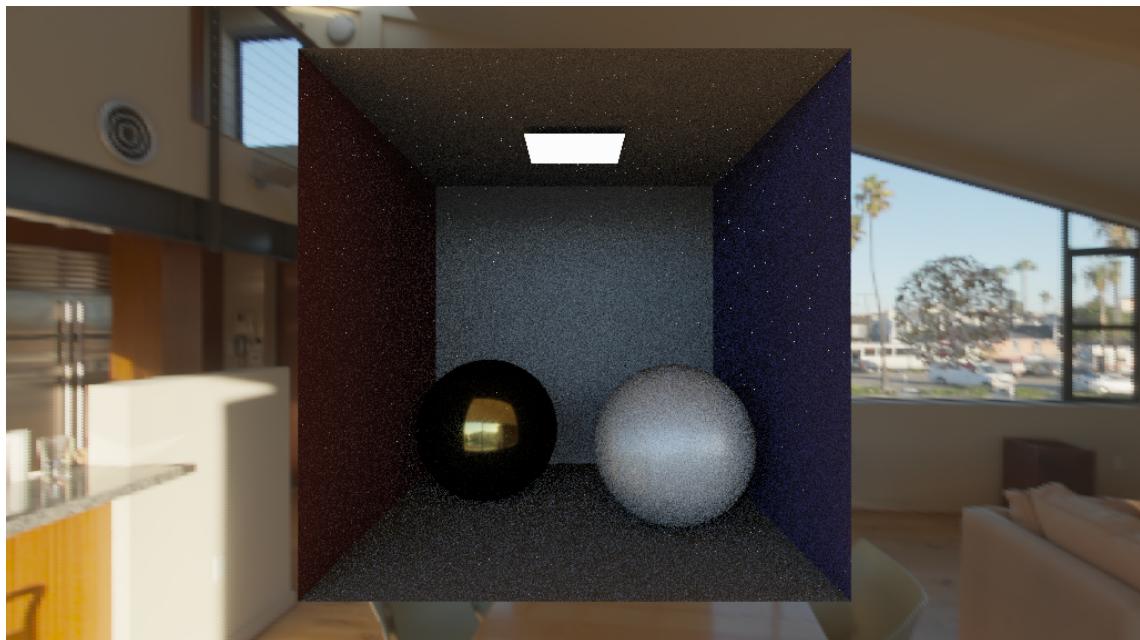


Figure 4.2: 算进从背部射入的光线会在光源附近产生一片亮区域

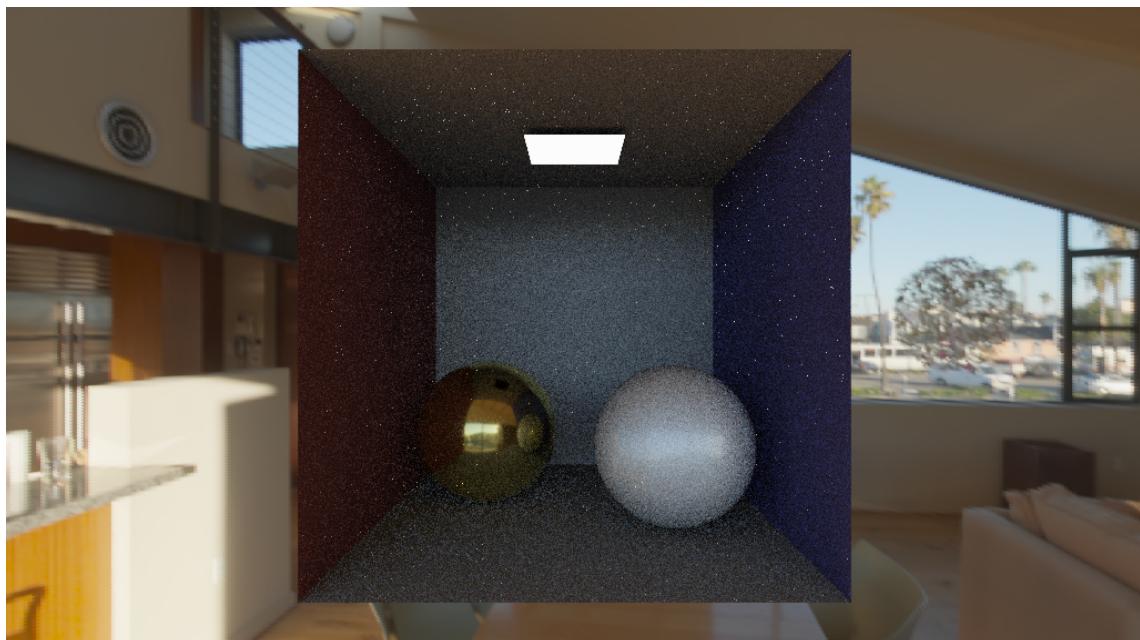
5 实验效果

5.1 标准场景测试

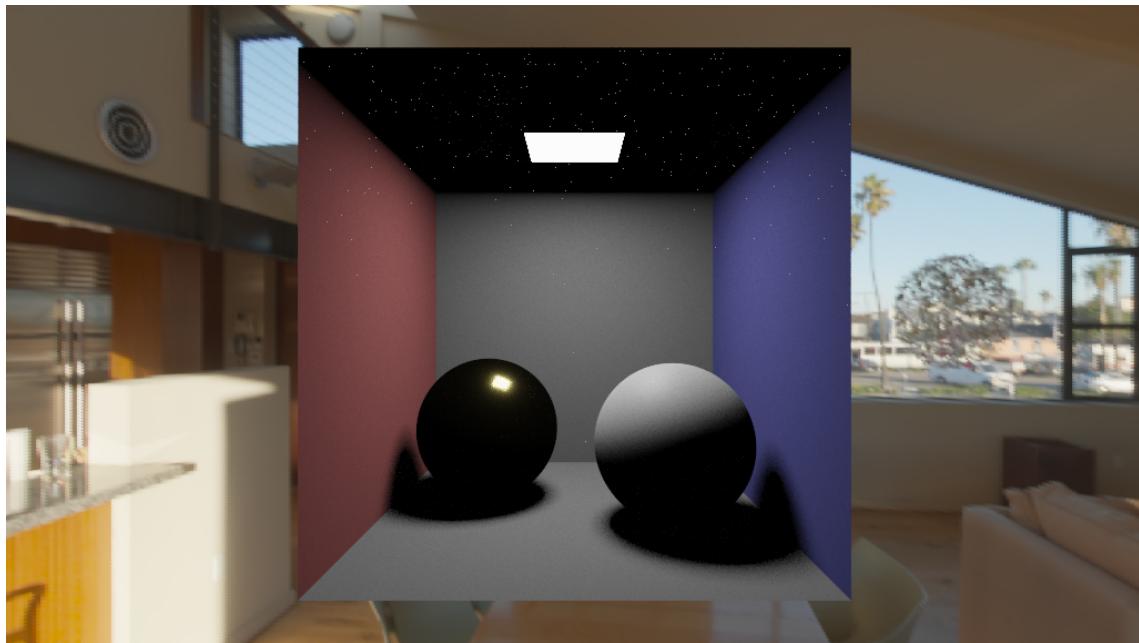
5.1.1 直接环境光



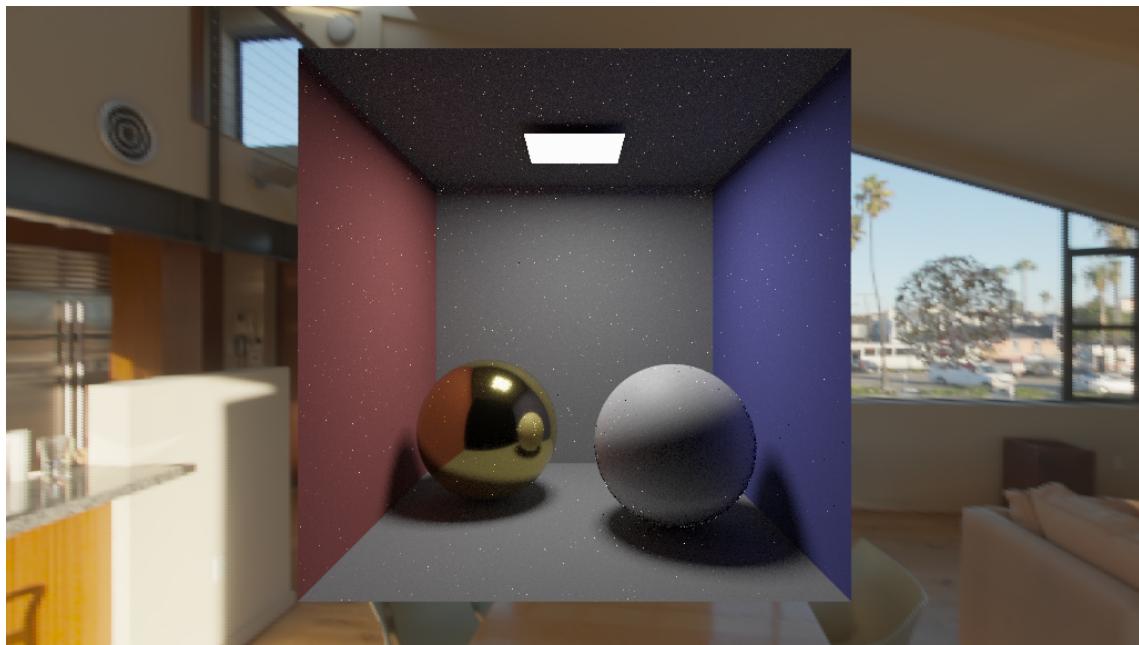
5.1.2 直接 + 间接环境光



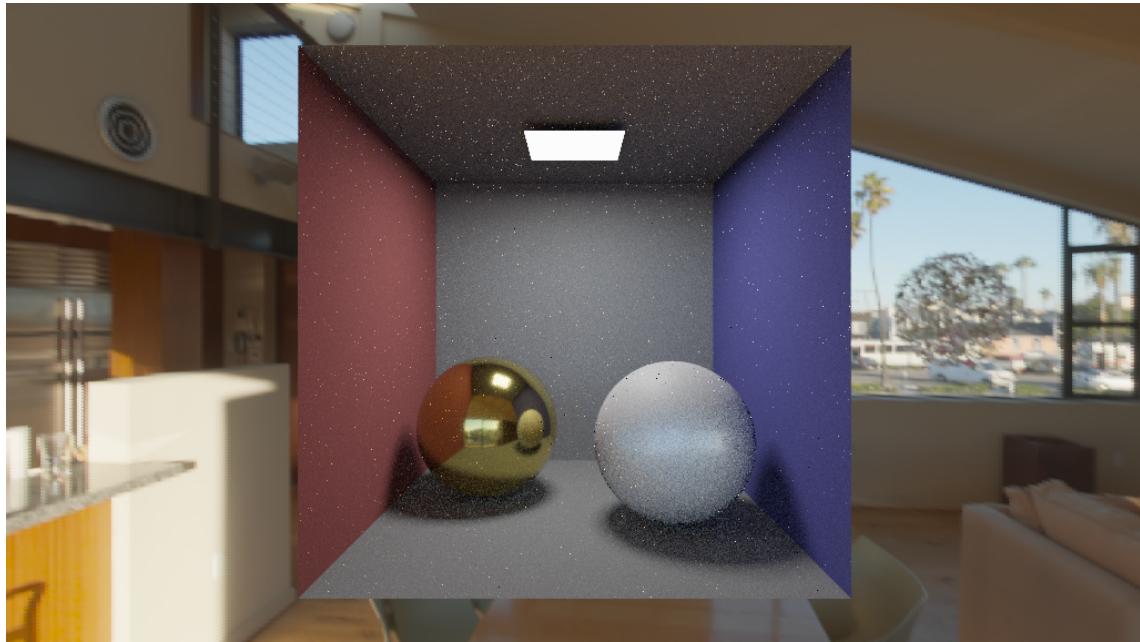
5.1.3 直接面光源



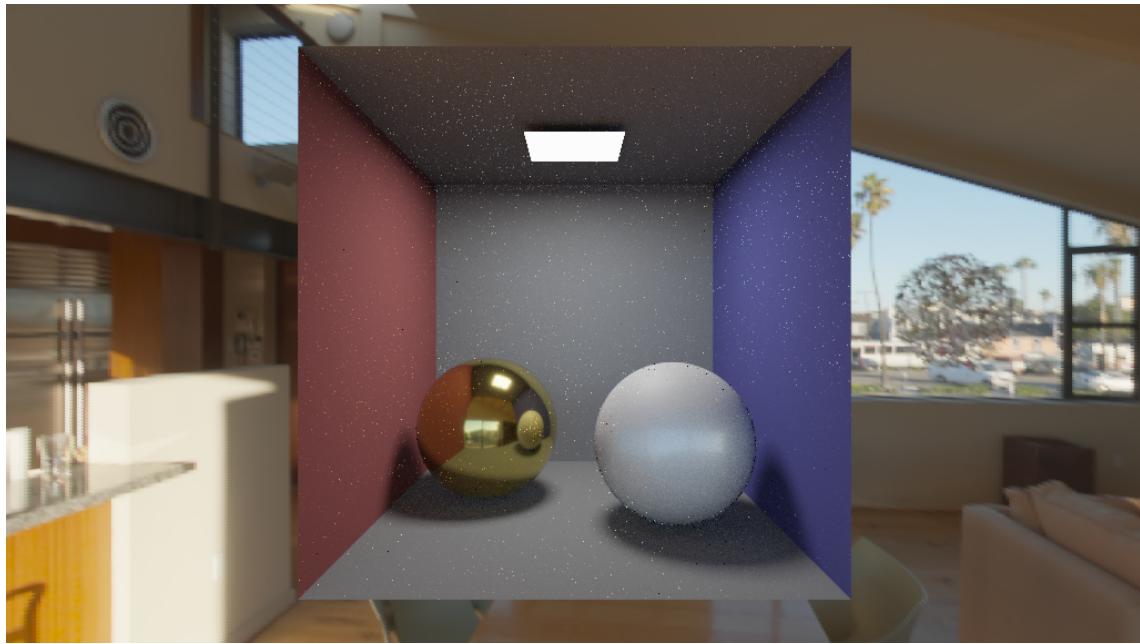
5.1.4 直接 + 间接面光源



5.1.5 最终渲染结果 $128spp$

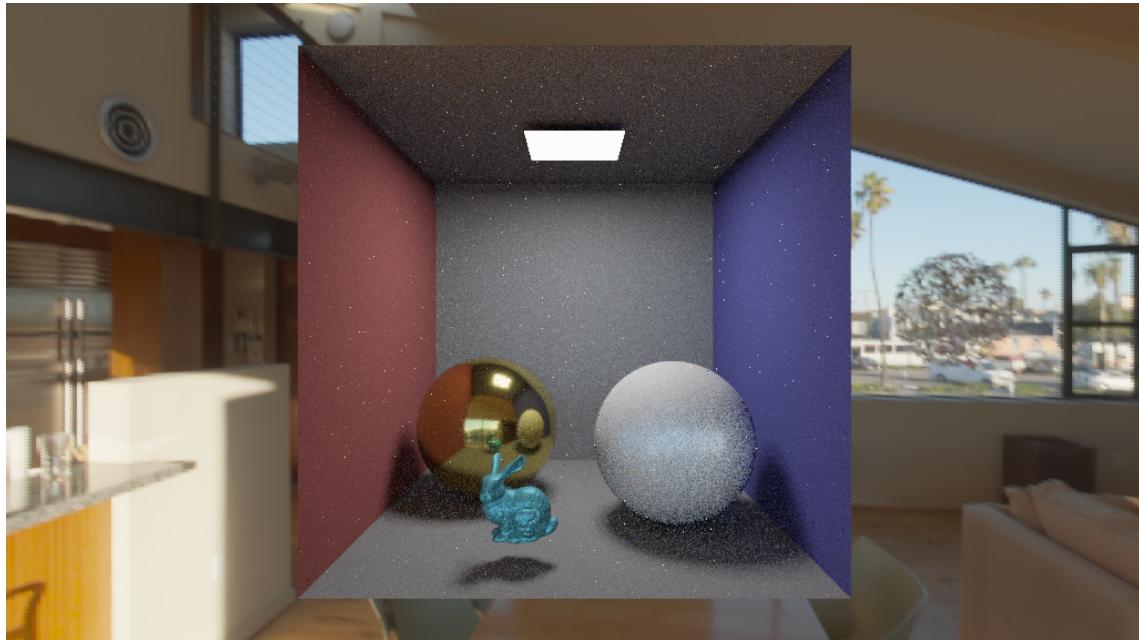


5.1.6 最终渲染结果 $1024spp$

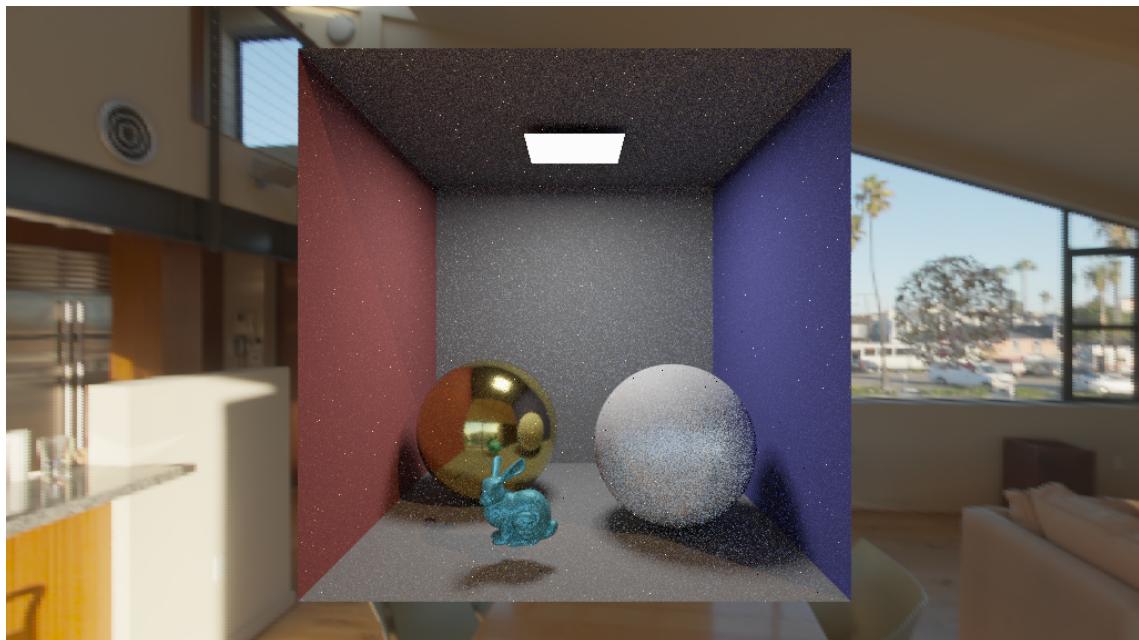


5.2 不同环境光采样方式效果

5.2.1 半球均匀采样 $64spp$



5.2.2 重要性采样 $64spp$



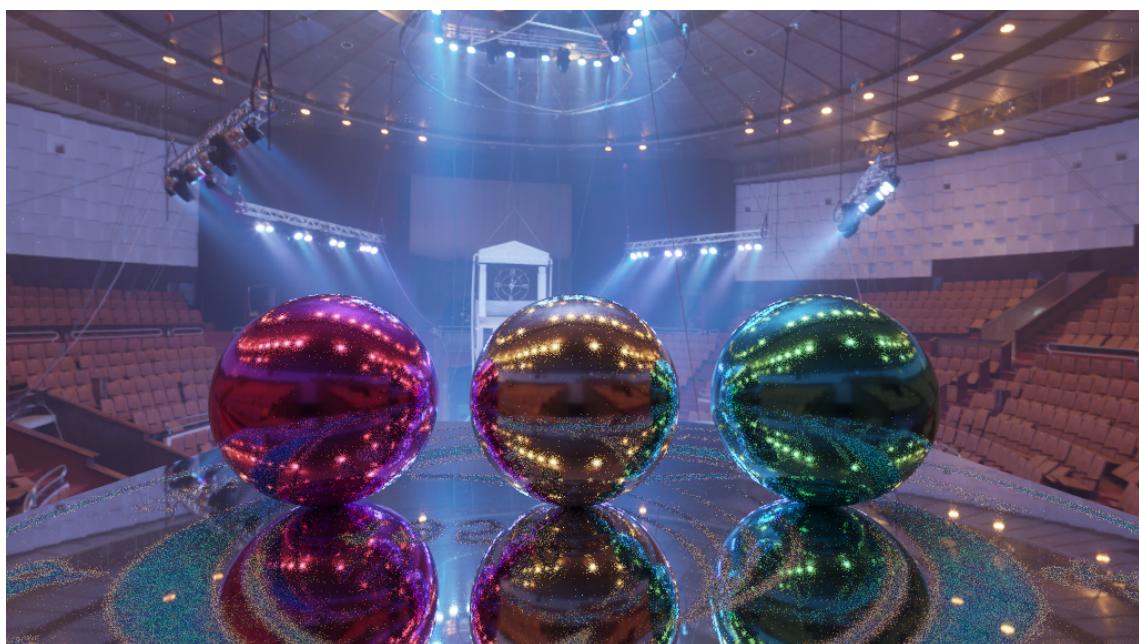
5.3 其他渲染结果

5.3.1 室内



5.3.2 戏剧院

Square 添加 HW8 中的校徽纹理贴图和法向贴图



5.3.3 海滨小镇



5.3.4 雪地



5.3.5 兔子



5.3.6 兔子 & 龙



5.3.7 多物体

