《计算机辅助几何设计》作业 4

ID 号: 01　　姓名: 陈文博

2020 年 10 月 16 日

1．证明：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 是任一被插值函数，$S(x)$ 是自然插值三次样条函数（端点条件均为二阶导数为 0），则有

$$\int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x \leq \int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{1}$$

式中等号仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时成立

构造函数 $g(x) = f(x) - S(x)$，设插值节点为 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$，则 $g(t_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$，且满足：

$$\begin{aligned}\int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x &= \int_a^b [g''(x) + S''(x)]^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [g''(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b g''(x) S''(x) \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2}$$

其中，由于 $S(x)$ 是自然三次样条函数，因此 $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$，且 $S'''(x)$ 在

$[t_i,t_{i+1}]$ 之间为常数，设为 s_i，则有

$$\begin{aligned}
\int_a^b g''(x)S''(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g''(x)S''(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} S''(x)\mathrm{d}(g'(x)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(S''(x)g'(x)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}}(S'''(x)g''(x))\Big)\mathrm{d}x \\
&= S''(t_n)g'(t_n) - S''(t_0)g'(t_0) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(S'''(x)g''(x))\Big)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} s_i g''(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} s_i(g'(t_i) - g'(t_{i+1}) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f''(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_a^b [g''(x)+S''(x)]^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [g''(x)]^2\mathrm{d}x + \int_a^b [S''(x)]^2\mathrm{d}x \quad \geq \int_a^b [S''(x)]^2\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4}$$

当且仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时，$g(x) \equiv 0$，等号成立

2．证明：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ **是任一被插值函数，**$S_f(x)$ **是带有斜率边界条件的插值三次样条函数，**$S(x)$ **是与** $S_f(x)$ **具有相同分割的任一三次样条函数，则有**

$$\int_a^b [f''(x) - S_f(x)]^2\mathrm{d}x \leq \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

构造 $g(x) = S_f(x) - S(x)$，设插值节点为 $a < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，则有 $g(t_i) = 0(i = 0,1,\cdots,n)$，且满足：

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2\mathrm{d}x &= \int_a^b [f''(x) - S_f''(x) + g''(x)]^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [f''(x) - S_f''(x)]^2\mathrm{d}x + \int_a^b [g''(x)]^2\mathrm{d}x - 2\int_a^b g''(x)[f''(x) - S_f''(x)]\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6}$$

其中，由于 $S_f(x)$ 是带有斜率边界条件得插值三次样条函数，因此 $S_f'(t_0)-f'(t_0)=S_f'(t_n)-f'(t_n)=0$，且 $S_f'''(x)$ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 之间为常数，$S'''(x)$ 亦是如此，故 $g'''(x)=S_f'''(x)-S'''(x)$ 同样满足在 $[t_i,t_{i+1}]$ 之间为常数，设为 g_i，则有：

$$
\begin{aligned}
\int_a^b g''(x)[f''(x)-S_f''(x)]\mathrm{d}x =& \sum_{i=0}^{n-1}\left([f'(x)-S_f'(x)]g''(x)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}+\int_{t_i}^{t_{i+1}}[f'(x)-S_f'(x)]g'''(x)\mathrm{d}x\right)\\
=&[f'(t_n)-S_f'(t_n)]g''(t_n)-[f'(t_0)-S_f'(t_0)]g''(t_0)\\
&+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[f'(x)-S_f'(x)]g'''(x)\mathrm{d}x\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[f'(x)-S_f'(x)]g'''(x)\mathrm{d}x\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[f'(x)-S_f'(x)]g_i\mathrm{d}x\\
=&g_n[f'(t_n)-S_f'(t_n)]-g_0[f'(t_0)-S_f'(t_0)]=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

故

$$
\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b[f''(x)-S_f''(x)]^2\mathrm{d}x+\int_a^b[g''(x)]^2\mathrm{d}x\geq\int_a^b[f''(x)-S_f''(x)]^2\mathrm{d}x \tag{8}
$$

当且仅当 $S(x)\equiv S_f(x)$ 时，$g(x)\equiv 0$ 时，等号成立

3. 实现 3 次 Bezier 样条曲线的交互式生成程序

原理说明：

设控制点序列为 $k_0,k_1,\cdots,k_n$,节点序列 $t_0,t_1,\cdots,t_n$,节点差值序列设为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$，其中 $\Delta_i=t_i-t_{i-1}$

由控制点插值，有：

$$b_{3j} = k_j \tag{9}$$

为满足 C^1 连续性条件，有：

$$\frac{b_{3j} - b_{3j-1}}{t_j - t_{j-1}} = \frac{b_{3j+1} - b_{3j}}{t_{j+1} - t_j} \Rightarrow \Delta_{j+1} b_{3j-1} - (\Delta_j + \Delta_{j+1}) b_{3j} + \Delta_j b_{3j+1} = 0 \tag{10}$$

为满足 C^2 连续性条件，有：

$$\frac{b_{3j} - 2b_{3j-1} + b_{3j-2}}{(t_j - t_{j-1})^2} = \frac{b_{3j+2} - 2b_{3j+1} + b_{3j}}{(t_{j+1} - t_j)^2} \tag{11}$$

同样可以表示为：

$$\Delta_{j+1}^2 b_{3j-2} - 2\Delta_{j+1}^2 b_{3j-1} + (\Delta_{j+1}^2 - \Delta_j^2) b_{3j} + 2\Delta_j^2 b_{3j+1} - \Delta_j^2 b_{3j+2} = 0 \tag{12}$$

其中，$\{\Delta_i\}$ 有三种取法：

- $\Delta_i = \text{const}$
- $\Delta_i = \|k_{i+1} - k_i\|$
- $\Delta_i = \sqrt{\|k_{i+1} - k_i\|}$

对边界条件，有两种取法：

- 自然边界条件

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{b_2 + b_0}{2} \\ b_{3n-1} &= \frac{b_{3n} + b_{3n-2}}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

- Bessel 边界条件

同时，对闭合曲线，无需选择边界条件

最后可组合成线性方程组形式：

$$Ax = b \tag{14}$$

其中，x 和 b 为 $3n+1$ 维向量，A 为 $(3n+1)\times(3n+1)$ 的分块对角矩阵，将含有 k_i 的项全部移入 b 中，则 A 仅与 Δ_i 有关，得到逆矩阵后在控制点数量不增加的情况下，即使控制点位置变化也只需进行矩阵乘法即可得到新解而无需重复进行矩阵求逆，从而能够更加高效地实现实时顶点编辑

实现效果：

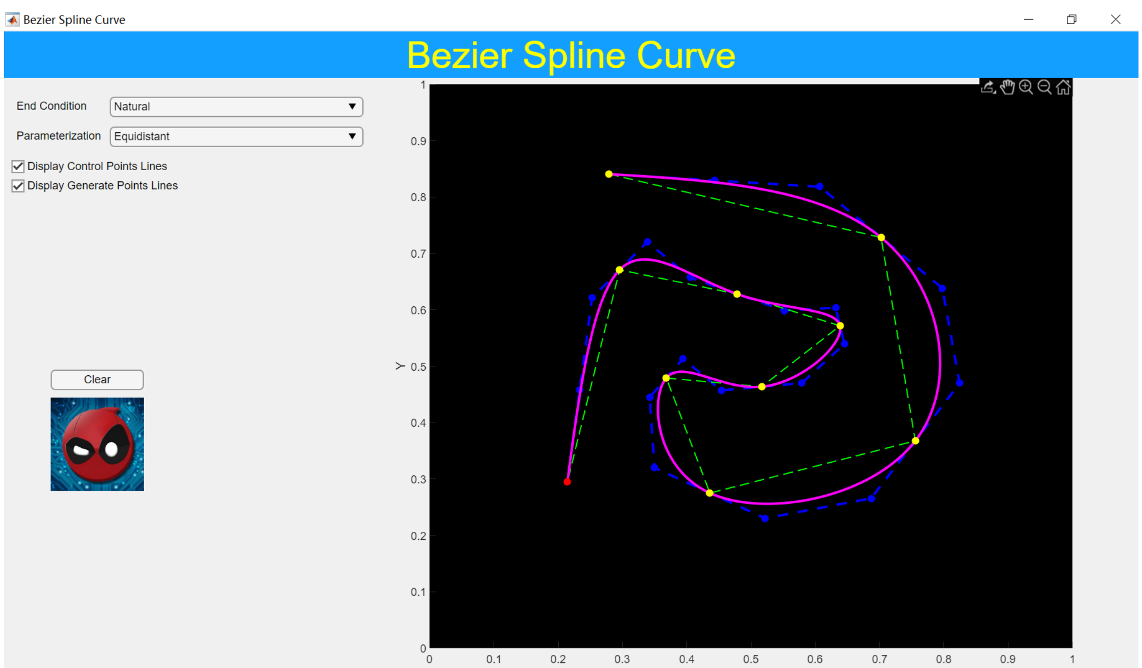

图 1:

交互说明：

- 鼠标左击坐标区空白处添加控制点
- 鼠标左击坐标区内已有的点选定该点
- 选定点可以进行按住拖动编辑位置，也可按”delete” 键进行删除
- 当选定点为端点且与另外一个端点足够近时将自动吸附，切换为闭合曲线模式
- 可通过左边相关选定框进行参数设置