CAGD(2) | Bezier曲线

1. 曲线的表示

1.1. 隐式表示

曲线隐式表示为$f(x,y)=0$，该方法有诸多局限性：

- 对于同一个x横坐标值对应多个纵坐标值
- 存在一些位置，导数$\dfrac{\mathrm dy}{\mathrm dx}$没有定义
- 关于轴变换非不变

1.2. 参数表示

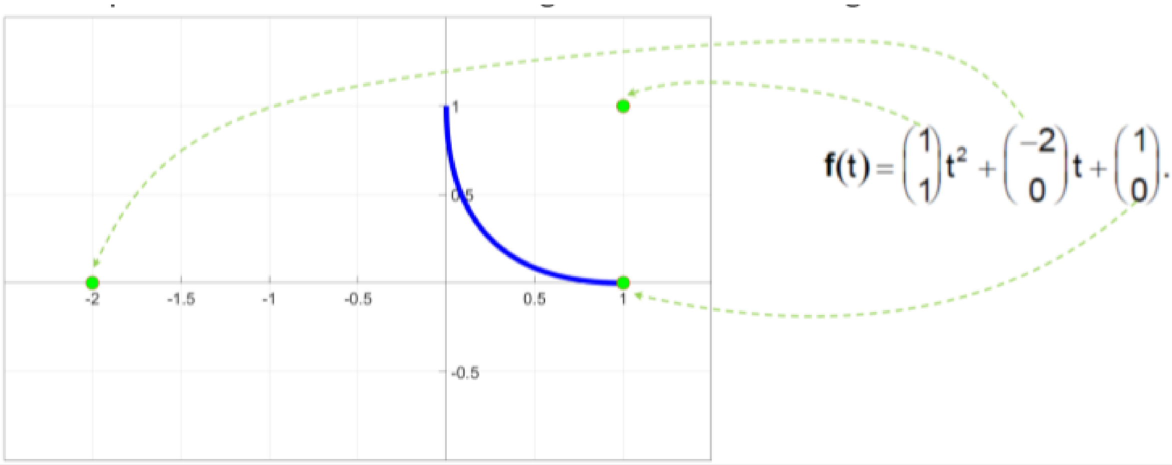
曲线参数表示为$c(t)=(x(t),y(t))$

- 求值方便
- 参数t可作为时间进行插值
- 曲线可以理解为运动粒子的运动轨迹跟踪

2. 曲线建模举例

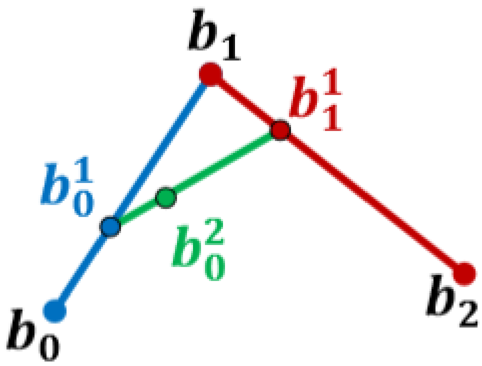
2.1. 用幂函数基进行建模

以抛物线$\pmb f(t)=\pmb at^2+\pmb bt+\pmb c$为例



- 幂函数基的系数缺少直觉上的几何意义

2.2. 一种改进的画法



其中，

- $\pmb b_0^1=(1-t)\pmb b_0+t\pmb b_1$
- $\pmb b_1^1=(1-t)\pmb b_1+t\pmb b_2$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_0^2 &= (1-t)\boldsymbol{b}_0^1+t\boldsymbol{b}_1^1\\
&= (1-t)[(1-t)\boldsymbol{b}_0+t\boldsymbol{b}_1]+t[(1-t)\boldsymbol{b}_1+t\boldsymbol{b}_2]\\
&= (1-t)^2\boldsymbol{b}_0+2t(1-t)\boldsymbol{b}_1+t^2\boldsymbol{b}_2
\end{aligned}
$$

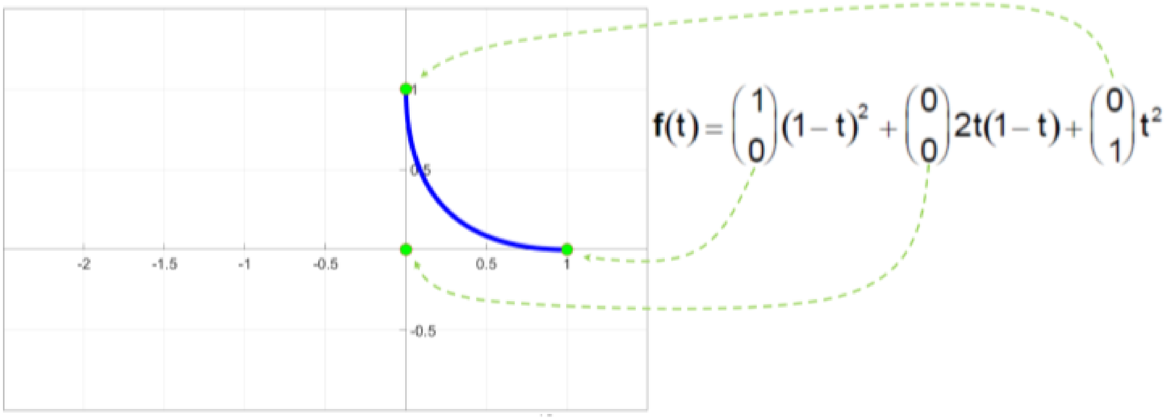
以之前的例子

$$
\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}
$$

转为上述形式：

$$
\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-t)^2+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}2t(1-t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t^2
$$

在图上表示为



- 各系数均有相应的几何意义
- 更多直觉上的曲线操作

对于四个控制点，同样有：

$$\boldsymbol{p}_0^0(t)=\boldsymbol{p}_0,\quad \boldsymbol{p}_1^0(t)=\boldsymbol{p}_1,\quad \boldsymbol{p}_2^0(t)=\boldsymbol{p}_2,\quad \boldsymbol{p}_3^0(t)=\boldsymbol{p}_3$$

第一次迭代：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0^1&=(1-t)\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_1^1&=(1-t)\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{p}_2^1&=(1-t)\boldsymbol{p}_2+t\boldsymbol{p}_3\end{aligned}$$

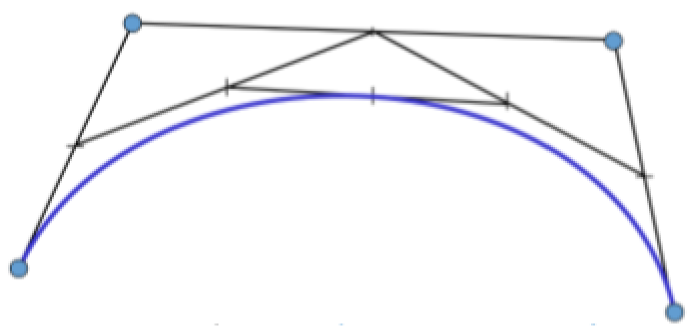
第二次迭代：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0^2&=(1-t)^2\boldsymbol{p}_0+2t(1-t)\boldsymbol{p}_1+t^2\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{p}_1^2&=(1-t)^2\boldsymbol{p}_1+2t(1-t)\boldsymbol{p}_2+t^2\boldsymbol{p}_3\end{aligned}$$

最终得到的曲线方程：

$$\boldsymbol{c}(t)=(1-t)^3\boldsymbol{p}_0+3t(1-t)^2\boldsymbol{p}_1+3t^2(1-t)\boldsymbol{p}_2+t^3\boldsymbol{p}_3$$

3. De Casteljau算法



3.1. 动机

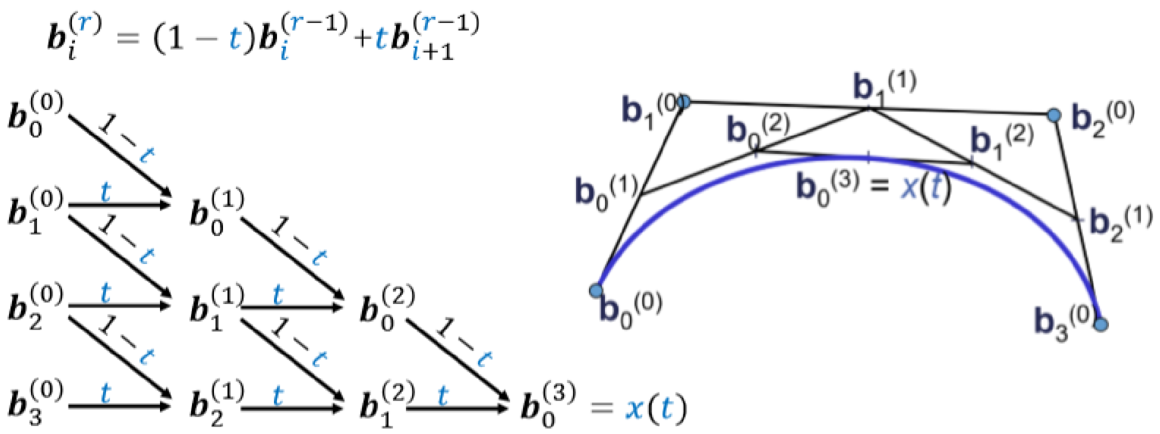
- 对给定t计算$\pmb x(t)$
    - 按比例$t:(1-t)$平分控制多边形
    - 用线连接新点（相邻线段）
    - 用相同比例进行插值
    - 迭代，直到只剩下一个点

3.2. 算法描述

- 输入点：$\pmb b_0,\pmb b_1,\cdots,\pmb b_n\in\mathbb R^3$
- 输出曲线：$\pmb x(t),t\in [0,1]$
- 对给定t进行点$\pmb x(t)$的几何构造

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}_i^0(t)=\boldsymbol{b}_i, \quad i=0,\cdots,n \\
&\boldsymbol{b}_i^r(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_i^{r-1}(t)+t\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}(t) \\
&r=1,\cdots,n \quad i=0,\cdots,n-r
\end{aligned}
$$

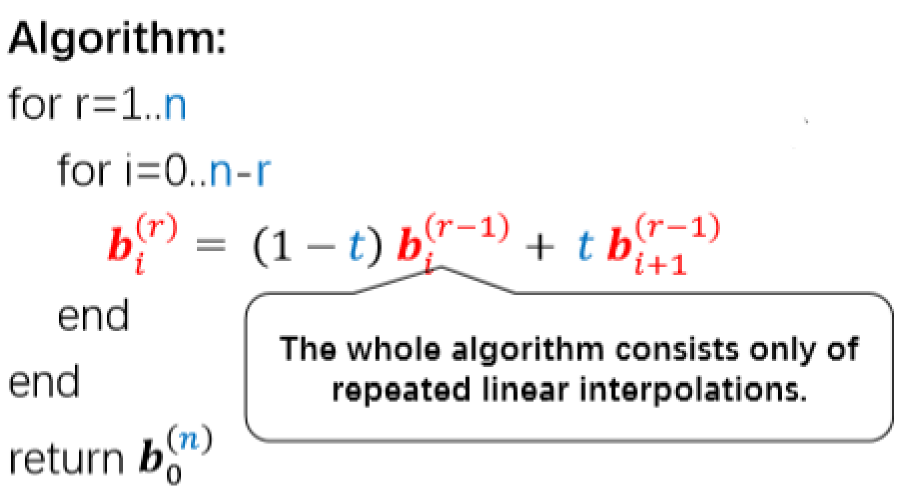
- 最后，$\pmb b_0^n(t)$为所找的曲线点$\pmb x(t)$在参数值t的取值



所有系数可写为下三角矩阵：

$$
\begin{array}{lllllll}
\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{b}_0^0 & & & & & & \\
\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_1^0 & \boldsymbol{b}_0^1 & & & & & \\
\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_2^0 & \boldsymbol{b}_1^1 & \boldsymbol{b}_0^2 & & & & \\
\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_3^0 & \boldsymbol{b}_2^1 & \boldsymbol{b}_1^2 & \boldsymbol{b}_0^3 & & & \\
\quad\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
\boldsymbol{b}_{n-1}=\boldsymbol{b}_{n-1}^0 & \boldsymbol{b}_{n-2}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{b}_0^{n-1} & \\
\boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{b}_n^0 & \boldsymbol{b}_{n-1}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{b}_1^{n-1} & \boldsymbol{b}_0^n=\boldsymbol{x}(t)
\end{array}
$$

伪代码：



3.3. De Casteljau算法性质

- 包含点$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n$的多边形称为**Bezier多边形**
- 点$\pmb b_i$称为**Bezier点**（控制点）
- 由Bezier点$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n$和De Casteljau算法所定义的曲线称为Bezier曲线
- De Casteljau算法是数值稳定的，因为只使用了凸组合
- De Casteljau算法复杂度
  - 时间复杂度$O(n^2)$
  - 空间复杂度$O(n)$
  - 其中n为Bezier点的数量
- **Bezier曲线的性质**
  - 给定Bezier点$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n$和Bezier曲线$\pmb x(t)$
  - Bezier曲线是n阶多项式曲线
  - 端点$\pmb x(0)=\pmb b_0,\pmb x(1)=\pmb b_n$插值，其余的Bezier点仅仅是大致的近似值
  - 凸包性质：
    - Bezier曲线完全在其Bezier多边形的凸包内部
  - 变化减少
    - 没有直线与Bezier曲线的交点比Bezier多边形多
  - Bezier点的影响：全局但伪局部
    - 全局：移动Bezier点会改变整个曲线的形状
    - 伪局部：点$\pmb b_i$对$x(t)$在$t=\dfrac{i}{n}$有最大的影响
  - 仿射不变性
    - Bezier曲线和Bezier多边形在仿射变换下不变
  - 仿射参数变换不变性
  - 对称性
    - 以下两条Bezier曲线重合，它们仅在相反的方向上移动：

$$\pmb{x}(t)=[\pmb{b}_0,\cdots,\pmb{b}_n] \quad \pmb{x}'(t)=[\pmb{b}_n,\cdots,\pmb{b}_0]$$

  - 线性精确
    - 当$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n$共线时，Bezier曲线为线段
  - 重心组合下的不变性

4. Bezier曲线

Bezier曲线表示为基函数组合：

$$\pmb{x}(t)=\sum_{i=0}^{n}\pmb{B}_i^n(t)\cdot b_i$$

4.1. 期望特性

- 对基底的要求：
  - 良好性质的曲线
    - **光滑**的基函数
  - **局部控制**（或者至少半局部）
    - 紧致的基函数

- **仿射不变性**
    - 对控制点或曲线进行仿射变换$\pmb x=A\pmb x+b$应该有相同的效果
    - 例如：旋转、平移
    - 否则交互式编辑曲线将非常困难
- **凸包性质**
    - 曲线处于其控制点的凸包内
    - 至少能够避免奇怪的震荡
- 优点
    - 计算优势（递归相交测试）
    - 更多可预测的行为

4.2. 仿射不变性

- 仿射变换：$\pmb x\rightarrow A\pmb x+\pmb b$

4.2.1. 线性不变性

Bezier曲线的线性不变性是显然的，Bezier曲线表示为基函数的线性组合：

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i=\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\begin{pmatrix} p_i^{(x)} \\ p_i^{(y)} \\ p_i^{(z)} \end{pmatrix}$$

因此

$$A(\boldsymbol{f}(t))=A\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n} b_i(t)(A\boldsymbol{p}_i)$$

4.2.2. 平移不变性

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(t)(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i+\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(t)+\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\Big)\boldsymbol{b}$$

- 为了满足平移不变性，基函数的和应恒为1
- 这也称为"partition of unity property"，单位划分性质
- $\pmb b_i$是控制点$\pmb p_i$的“仿射组合”
- 该性质对建模非常重要

4.3. 凸包性质

- **凸组合**
    - 点集$\{\pmb p_1,\cdots,\pmb p_n\}$的一个凸组合为如下形式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{p}_i \text{ with} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1 \text{ and } \forall i=1,\cdots,n:0\leq\lambda_i\leq 1$$

    - 所有允许的凸组合的集合形成点集的凸包
        - 凸包是包含所有点集$\{\pmb p_1,\cdots,\pmb p_n\}$以及集合中两个元素之间的每条完整连线的最小集合
- 相应地
    - 如果我们有性质：

$$\forall t\in\Omega:\sum_{i=1}^{n} b_i(t)=1 \text{ and } \forall t\in\Omega,\forall i:b_i(t)\geq 0$$

所构造地曲线/曲面将满足：

    - 仿射不变性（平移，线性映射）
    - 限制在控制点的凸包中
  - 推论：曲线将有**linear precision**（线性精确）
    - 当所有控制点共线时，曲线为直线段
    - 具有平面控制点的曲面也将是平面
- 凸包性质在实践中十分有用
  - 避免不良震荡
    - 被限制在凸包内，不像多项式插值
  - 线性精确性质比较直观（用户友好）
  - 可用于快速范围检查
    - 相交测试可以先对凸包进行，然后再对物体进行
    - 递归相交算法与细分规则结合使用

4.4. Bezier曲线的多项式描述

- 给定$(n+1)$个控制点$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n$
- 目标：Bezier曲线$\pmb x(t)$，其中$t\in[0,1]$
- 定义$n+1$个基函数，通过其线性组合来描述一个Bezier曲线

$$B_0^n(t),\cdots,B_n^n(t) \text{ over } [0,1]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\cdot \boldsymbol{b}_i$$

4.4.1. Bernstein基函数

Bernstein基函数：$B=\{B_0^{(n)},B_1^{(n)},\cdots,B_n^{(n)} \}$

- n次Bernstein基函数

$$B_i^{(n)}(t)=\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$$

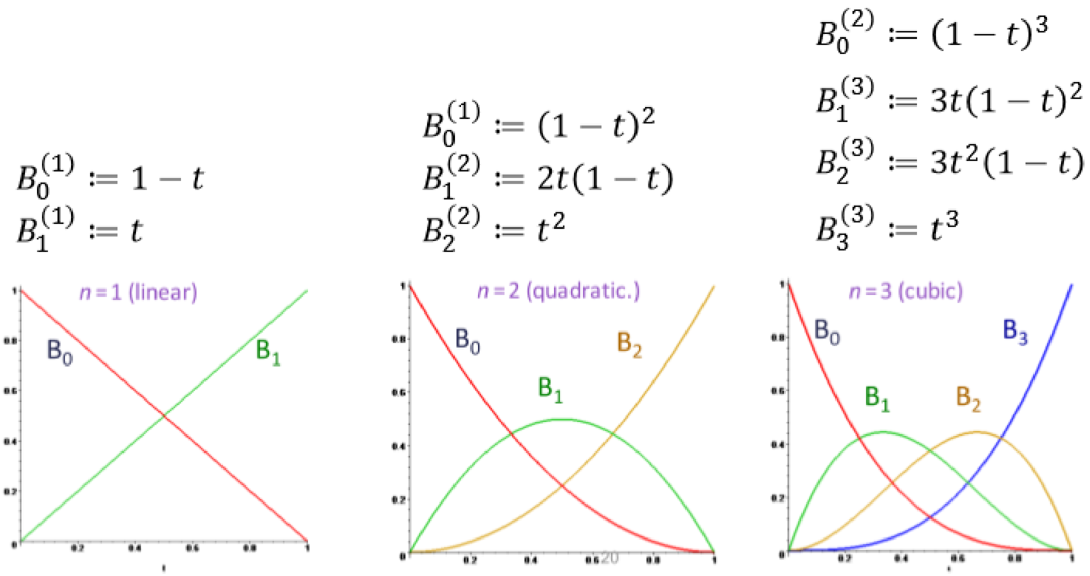
  其中，二项式系数

$$\binom{n}{i}=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-i)!!} & \text{for } 0\le i\le n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

  杨氏三角：

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

  前三组Bernstein基函数



4.4.2. Bernstein基函数的性质

$$B=\{B_0^{(n)},B_1^{(n)},\cdots,B_n^{(n)}\},\quad B_i^{(n)}=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$$

光滑性

基函数为n次多项式——显然光滑

局部控制

每个基函数$B_i^{(n)}$在$t=\dfrac{i}{n}$处取最大值——对该处有最大影响

凸包性质和仿射不变性

组合数的性质：

$$\sum_{i=0}^{n}B_i^{(n)}(t)=(t+(1-t))^n=1$$

递归计算特性

$$B_i^n(t):=(1-t)B_i^{(n-1)}(t)+tB_{i-1}^{(n-1)}(1-t)$$
$$\text{with } B_0^0(t)=1, B_i^n(t)=0 \text{ for } i\notin\{0,\cdots,n\}$$

对称性

$$B_i^n(t)=B_{n-i}^n(1-t)$$

非负性

$$B_i^{(n)}(t)\geq 0 \text{ for } t\in[0,\cdots,1]$$

$$B_i^{(n)}(t)>0 \text{ for } 0<t<1$$

$$B_0^{(n)}(0)=1,\quad B_1^{(n)}(0)=\cdots=B_n^{(n)}(0)=0$$
$$B_0^{(n)}(1)=\cdots=B_{n-1}^{(n)}=0,\quad B_n^{(n)}(1)=1$$

导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^{(n)}(t) &= \binom{n}{i}\left(it^{i-1}(1-t)^{n-i}-(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}\right)\\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!}it^{i-1}(1-t)^{n-i}-\frac{n!}{(n-i)!i!}(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}\\
&= n\left[\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-i}-\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-i-1}\right]\\
&= n\Big[B_{i-1}^{(n-1)}(t)-B_i^{(n-1)}(t)\Big]\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}B_i^{(n)}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[B_{i-1}^{(n-1)}(t)-B_i^{(n-1)}(t)\Big]\\
&= n\Big[(n-1)\Big(B_{i-2}^{(n-2)}(t)-B_{i-1}^{(n-2)}(t)\Big)-(n-1)\Big(B_{i-1}^{(n-2)}(t)-B_i^{(n-2)}(t)\Big)\Big]\\
&= n(n-1)\Big[B_{i-2}^{(n-2)}(t)-2B_{i-2}^{(n-2)}(t)+B_i^{(n-2)}(t)\Big]
\end{aligned}
$$

4.5. Bezier曲线的性质

4.5.1. 前面提到过的性质：

- 仿射不变性
- 凸包性质
- 控制点影响性

4.5.2. 导数性质

对于$t\in[0,1]$，有

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{f}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}\boldsymbol{p}_i\\
\Rightarrow \boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{p}_0\quad \boldsymbol{f}(1)=\boldsymbol{p}_1
\end{gathered}
$$

一阶导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(t) &= n\sum_{i=0}^{n-1}\Big[B_{i-1}^{(n-1)}(t)-B_i^{(n-1)}(t)\Big]\boldsymbol{p}_i\\
&= n\Big(\Big[-B_0^{(n-1)}(t)\Big]\boldsymbol{p}_0+\Big[B_0^{n-1}(t)-B_1^{(n-1)}(t)\Big]\boldsymbol{p}_1+\cdots\Big)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(0)=n(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_0)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(1)=n(\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}_{n-1})
\end{aligned}
$$

以此类推，对于边界点$\{0,1\}$，有

对于一阶导数，还有：

高阶导数：

4.6. Bezier曲线升阶（Degree Evaluation）

- 给定：$\pmb b_0,\cdots,\pmb b_n\rightarrow \pmb x(t)$
- 目标：$\overline{\pmb b}_0,\cdots,\overline{\pmb b_n},\overline{\pmb b}_{n+1}\rightarrow \overline{\pmb x}(t)\ \mathrm{with}\ \pmb x=\overline{\pmb x}$
- 解决方法：
- 证明：

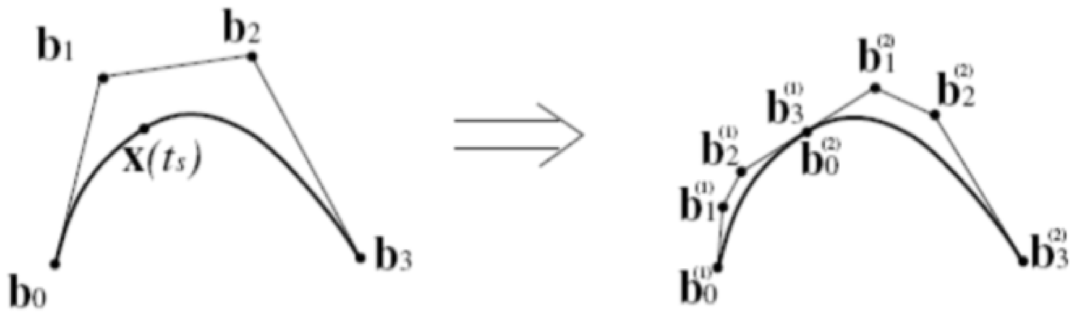
  考虑

  类似地，

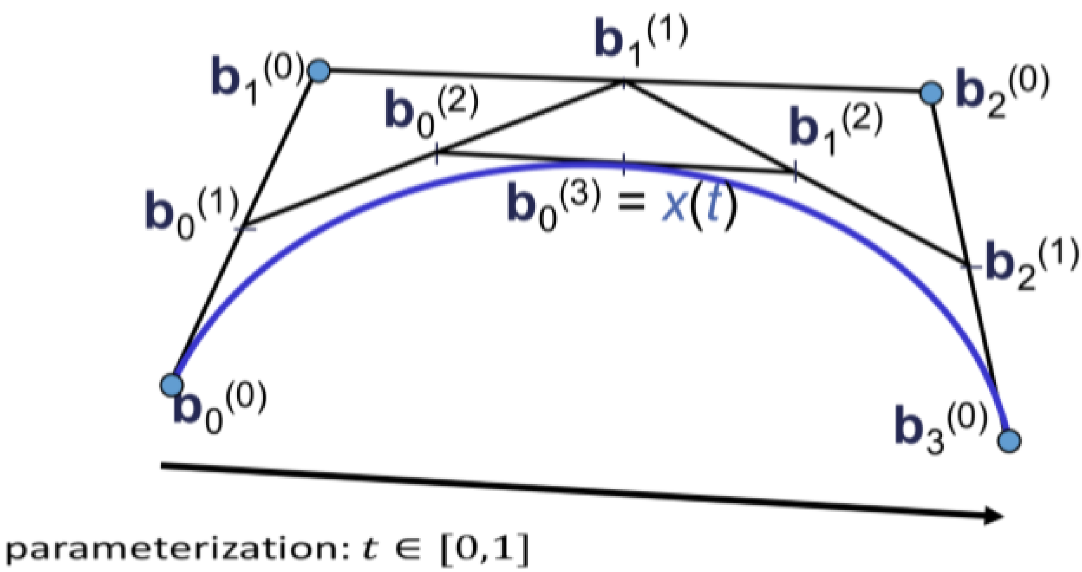
  从而有：

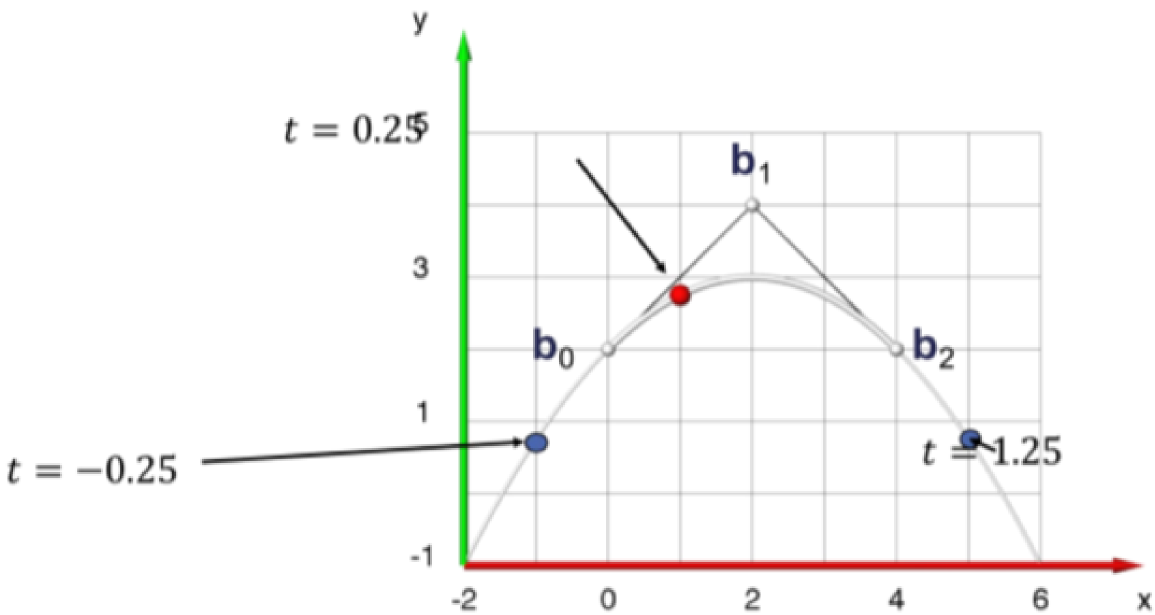
4.7. 细分

- 给定
- 目标
- 解决方法



4.8. 曲线范围





4.9. 矩阵实现

三次Bezier曲线

矩阵形式表示：

导数的矩阵表示：