Bezier样条

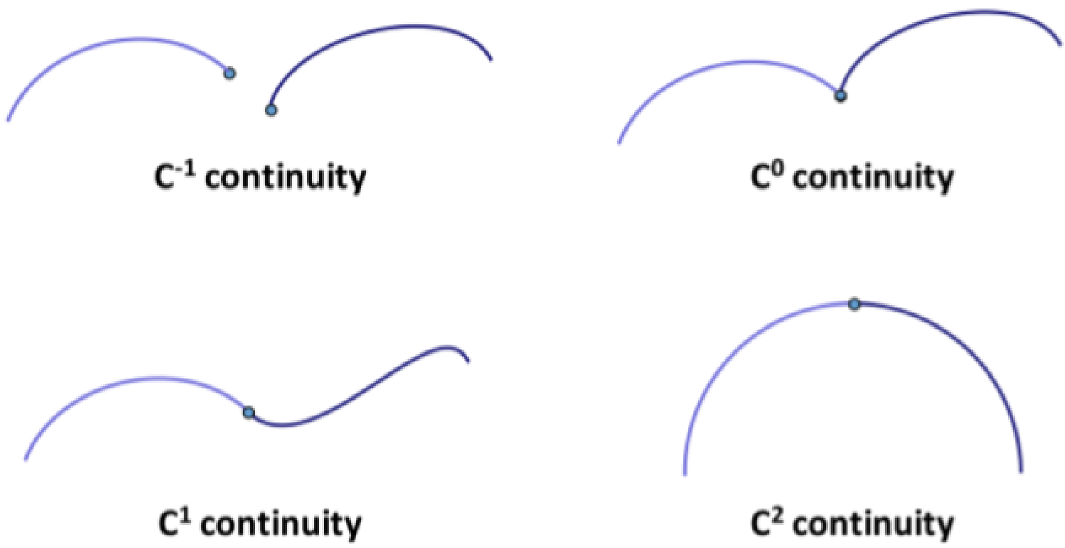
1. 参数与几何连续性

1.1. 参数连续性

- 连接曲线——连续性
  - 给定两条曲线

$$\boldsymbol{x}_1(t) \text{ over } [t_0, t_1]$$
$$\boldsymbol{x}_2(t) \text{ over } [t_1, t_2]$$

  - 若$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$在t_1处的0阶到r阶导数向量均重合，则$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{x}_2$在t_1处C^r连续
- 常见的参数连续性：
  - C^0：位置变化连续（position varies continuously）
  - C^1：一阶导数在交界处连续（First derivative is continuous across junction）
    - 速度向量相同
  - C^2：二阶导数在交界处连续（Second derivative is continuous across junction）
    - 加速度向量相同



1.2. 几何连续性

- 曲线的几何连续性
  - 给定两条曲线

$$\boldsymbol{x}_1(t) \text{ over } [t_0, t_1]$$
$$\boldsymbol{x}_2(t) \text{ over } [t_1, t_2]$$

  - 若$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$能够以某种方式重新参数化使得在t_1处C^r连续，则$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$在t_1处G^r连续
- 常见的几何连续性
  - $G^0 = C^0$：位置变化连续性（连接性）（position varies continuously）
  - G^1：切线方向变化连续性（相同切线）（ tangent direction varies continuously ）
    - 正则化切线变化连续
    - 等价于曲线能够重新参数化到C^1
    - 等价于单位速度参数化为C^1
  - G^2：曲率变化连续性（相同切线与曲率）（curvature varies continuously）

- 等价于曲线能够重新参数化到C^2
- 等价于单位速度参数化为C^2

1.3. 参数连续性 vs 几何连续性

参数连续性C^r	**几何连续性**G^r
$C^0, C^1, \cdots$连续	曲线本身是否光滑
在该曲线上运动的粒子是否有光滑的轨迹？（位置、速度、加速度）	独立于参数化方式
取决于参数化方式	与建模更相关（曲线设计）
应用：动画（物体移动、摄像头轨迹）	

2. Bezier样条参数化

2.1. Bezier样条曲线的局部和全局参数

- 给定
  - $\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_n$
  - $\boldsymbol{y}(u)$：间隔$[0,1]$之间的Bezier曲线
  - $\boldsymbol{x}(t)$：间隔$[t_i, t_{i+1}]$之间的Bezier曲线
- 设置$u(t) = \dfrac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$
- 结果：$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(u(t))$

局部参数u从0变化到1，全局参数t从t_i变化到t_{i+1}

2.2. Bezier样条曲线的导数

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \dot{\boldsymbol{y}}(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{y}}(u(t))}{t_{i+1} - t_i} \\
\ddot{\boldsymbol{x}}(t) &= \ddot{\boldsymbol{y}}(u(t)) \cdot (\dot{u}(t))^2 + \dot{\boldsymbol{y}}(u(t)) \cdot \ddot{u}(t) = \frac{\ddot{\boldsymbol{y}}(u(t))}{(t_{i+1} - t_i)^2} \\
&\cdots \\
\boldsymbol{x}^{[n]}(t) &= \frac{\boldsymbol{y}^{[n]}(u(t))}{(t_{i+1} - t_i)^n}
\end{aligned}
$$

2.3. Bezier曲线

$$
\boldsymbol{f}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \boldsymbol{p}_i
$$

- $\{0,1\}$之间的函数值

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(0) &= \boldsymbol{p}_0 \\
\boldsymbol{f}(1) &= \boldsymbol{p}_1
\end{aligned}
$$

- $\{0,1\}$之间的一阶导数向量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}'(0) &= n[\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0] \\
\boldsymbol{f}'(1) &= n[\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_{n-1}]
\end{aligned}
$$

- $\{0,1\}$之间的二阶导数向量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}''(0) &= n(n-1)[\boldsymbol{p}_2 - 2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_0] \\
\boldsymbol{f}''(1) &= n(n-1)[\boldsymbol{p}_n - 2\boldsymbol{p}_{n-1} + \boldsymbol{p}_{n-2}]
\end{aligned}
$$

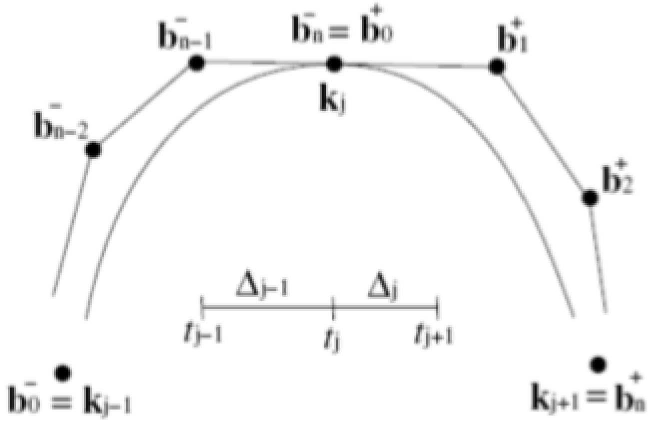
2.4. Bezier样条曲线的特殊情况

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t_i) &= \frac{n(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0)}{t_{i+1} - t_i} \\
\dot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \frac{n(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1})}{t_{i+1} - t_i} \\
\ddot{\boldsymbol{x}}(t_i) &= \frac{n(n-1)(\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_0)}{(t_{i+1} - t_i)^2} \\
\ddot{\boldsymbol{x}}(t_{i+1}) &= \frac{n(n-1)(\boldsymbol{b}_n - 2\boldsymbol{b}_{n-1} + \boldsymbol{b}_{n-2})}{(t_{i+1} - t_i)^2}
\end{aligned}
$$

2.5. Bezier样条的一般情况

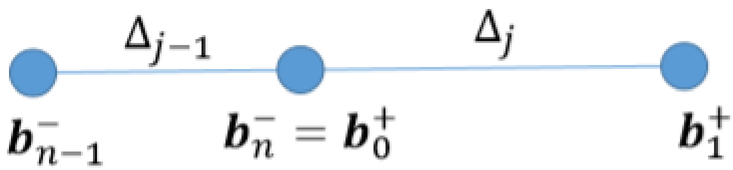
- 连接Beizer曲线
  - 给定两条n阶Bezier曲线：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_{j-1} = \boldsymbol{b}_0^-, \boldsymbol{b}_1^-, \cdots, \boldsymbol{b}_n^- &= \boldsymbol{k}_j \\
\boldsymbol{k}_j = \boldsymbol{b}_0^+, \boldsymbol{b}_1^+, \cdots, \boldsymbol{b}_n^+ &= \boldsymbol{k}_{j+1}
\end{aligned}
$$



- 要求：$\boldsymbol{k}_j$处C^1连续
- $\boldsymbol{b}_{n-1}^-, \boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{b}_1^+$不共线且

$$\frac{\boldsymbol{b}_n^- - \boldsymbol{b}_{n-1}^-}{t_j - t_{j-1}} = \frac{\boldsymbol{b}_1^+ - \boldsymbol{b}_0^+}{t_{j+1} - t_j}$$



4. Bezier样条阶数

4.1. 可选的方案

- $d = 0$，分段常数（piecewise constant）：不光滑
- $d = 1$，分段线性（piecewise linear）：不够光滑
- $d = 2$，分段二次（piecewise quadratic）：二阶导数为常数，不够灵活
- $d = 3$，分段三次（piecewise cubic）：计算机图形学应用中常用的阶数

4.2. 三次样条

4.2.1. 三次分段多项式

- 我们可以在不固定整个曲线的二阶导数的情况下获得C^2连续性（？）
- C^2连续性在直觉上很重要
  - 运动：连续的位移、速度和加速度

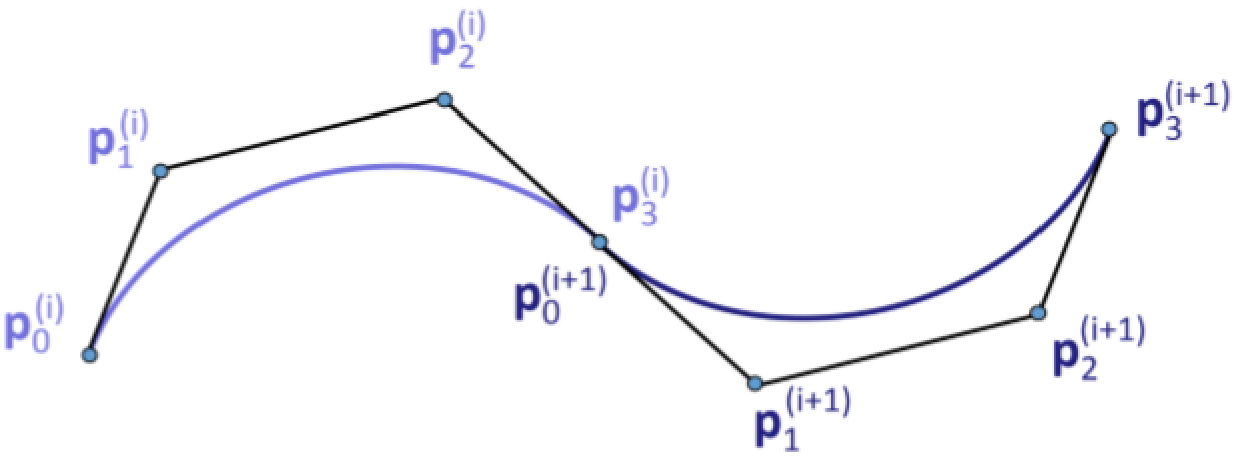
    非连续的加速度是可察觉的（物体、摄像机运动）
  - 可以看到二阶阴影不连续（反射性的物体）
- 在所有点集内插得到的C^2曲线中（满足相同的始末状态），分段三次曲线拥有最小的积分加速度（即所能获得的最光滑的曲线）

4.2.3. 应用

- 三次Bezier曲线被广泛使用
- 更高阶的Bezier曲线较少使用（某些CAD/CAM应用）
- 典型的："points&handles"接口
- 四种模式
  - 不连续（两条曲线）
  - C^0连续（两个点重合）
  - G^1连续（切向连续）
    - 处理点指向同一方向，但长度不同
  - C^1连续
    - 处理点有对称向量
- C^2的限制更大：通过k_i进行控制

5. Bezier样条的连续性

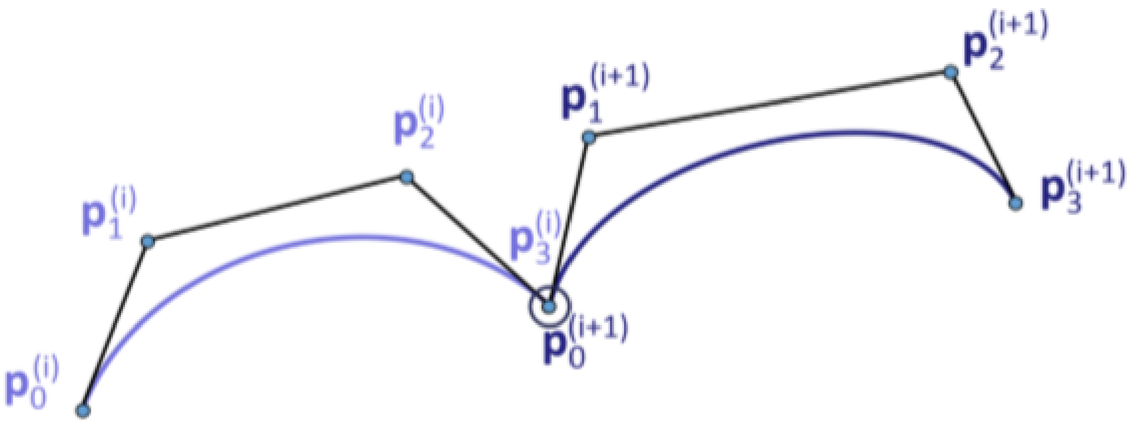
5.1. Bezier样条连续性规则



连接多条曲线段，需要确定使曲线有C^{-1}, C^0，C^1，C^2连续性的控制点约束

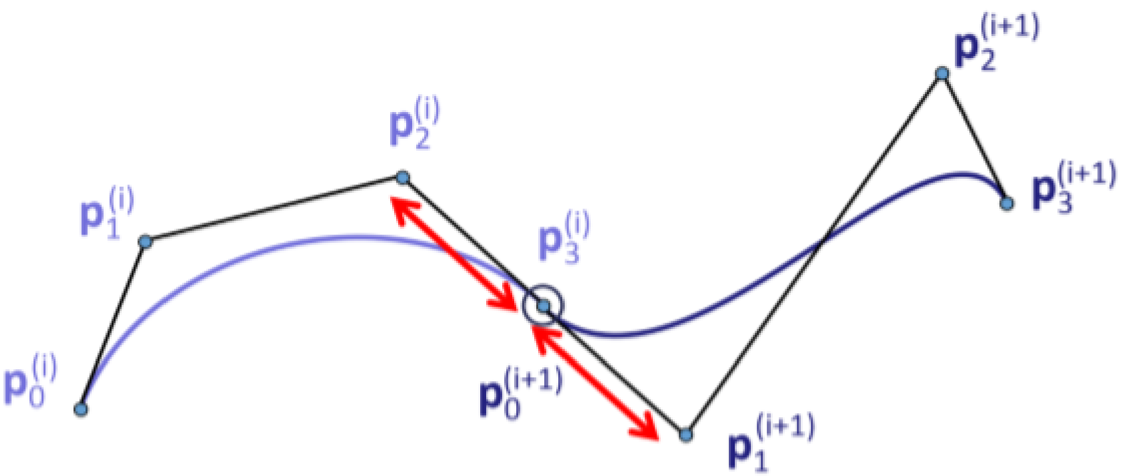
C^0**连续性**

- 每个样条线段内插第一个和最后一个控制点
- 相邻线段的点必须重合以获得C^0连续性



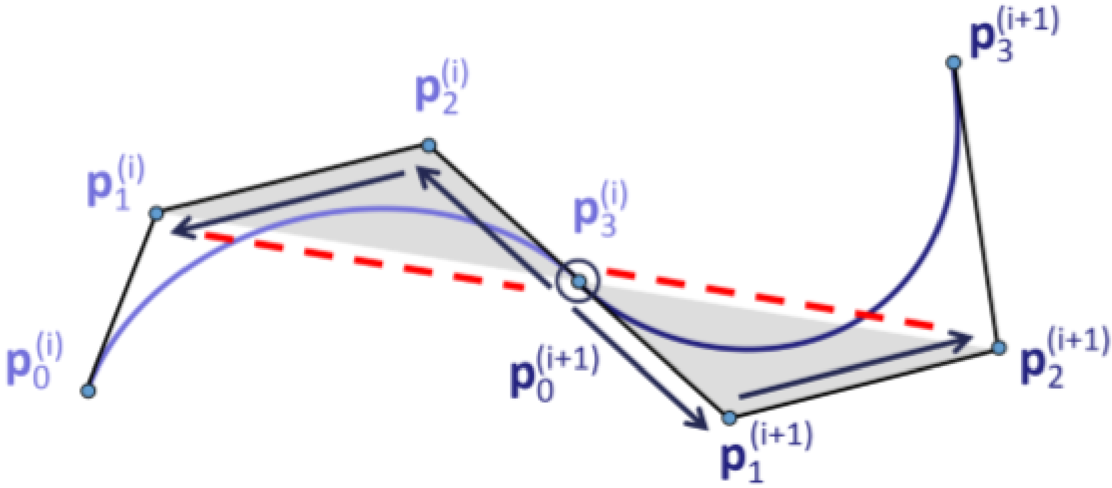
C^1**连续性**

- 切向量与向量差$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_{n-1}$成正比
- 这些向量应相同以满足C^1连续性



C^2连续性

- $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$向量与$\boldsymbol{p}_2-2\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_0$和$\boldsymbol{p}_n-2\boldsymbol{p}_{n-1}+\boldsymbol{p}_{n-2}$成正比
- 切线必须相同
- 下示阴影三角形必须相似



G^1连续性

能够被参数化为C^1，只需按切线向量长度的比率增加第二个曲线段的速度

6. Bezier样条曲线

6.1. 在某点处C^2连续

要求：在$\boldsymbol{k}_j$处C^2连续

- C^1意味着

$$\frac{\boldsymbol{b}_n^- - \boldsymbol{b}_{n-1}^-}{t_j - t_{j-1}} = \frac{\boldsymbol{b}_1^+ - \boldsymbol{b}_0^+}{t_{j+1} - t_j}$$

- C^2意味着

$$\frac{\boldsymbol{b}_n^- - 2\boldsymbol{b}_{n-1}^- + \boldsymbol{b}_{n-2}^-}{(t_j - t_{j-1})^2} = \frac{\boldsymbol{b}_2^+ - 2\boldsymbol{b}_1^+ + \boldsymbol{b}_0^+}{(t_{j+1} - t_j)^2}$$

- 令

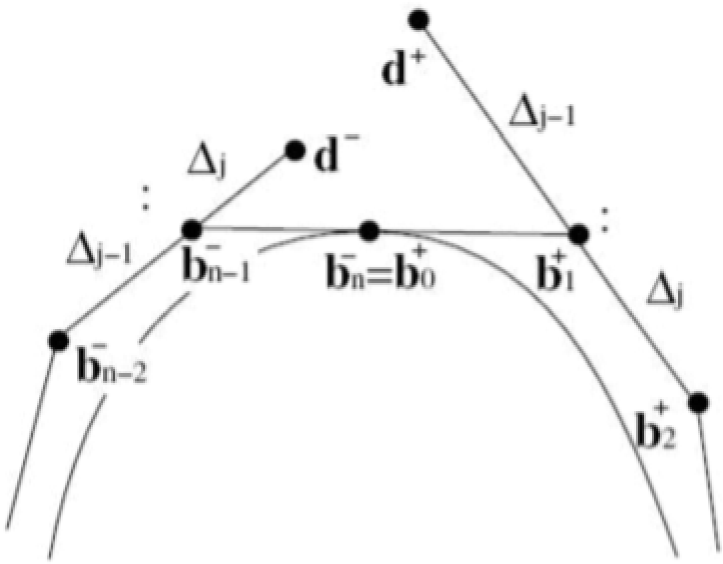
$$\boldsymbol{d}^- = \boldsymbol{b}_{n-1}^- + \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}(\boldsymbol{b}_{n-1}^- - \boldsymbol{b}_{n-2}^-)$$

  和

$$\boldsymbol{d}^+ = \boldsymbol{b}_1^+ - \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}(\boldsymbol{b}_2^+ - \boldsymbol{b}_1^+)$$

  则有：

  C^2连续性$\Leftrightarrow$ C^1连续性$+\boldsymbol{d}^- = \boldsymbol{d}^+$

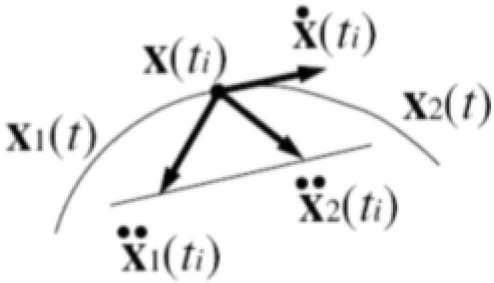


6.2. 曲线的G^2连续性

一般情况下的G^2连续性（对所有类型的曲线）

- 给定
  - $\boldsymbol{x}_1(t)$和$\boldsymbol{x}_2(t)$满足
  - $\boldsymbol{x}_1(t_i) = \boldsymbol{x}_2(t_i) = \boldsymbol{x}(t_i)$
  - $\dot{\boldsymbol{x}}_1(t_i) = \dot{\boldsymbol{x}}_2(t_i) = \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)$
- 满足在$t = t_i$处G^2连续的条件是：

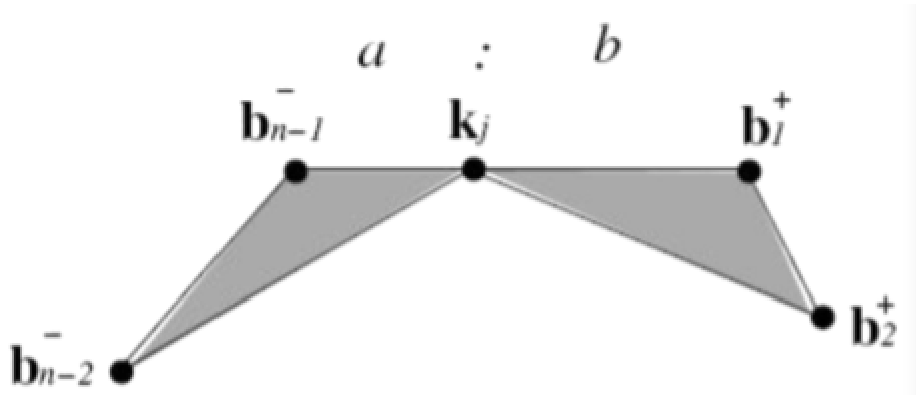
$$\ddot{\boldsymbol{x}}_2(t_i) - \ddot{\boldsymbol{x}}_1(t_i) \parallel \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)$$



6.3. 某点的G^2连续性

- 要求：曲线在点$\boldsymbol{k}_j$处G^2连续
- G^1连续
- $\boldsymbol{b}_{n-2}^-, \boldsymbol{b}_{n-1}^-, \boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{b}_1^+, \boldsymbol{b}_2^+$五个向量共面
- 且面积

$$\frac{\mathrm{area}(\boldsymbol{b}_{n-2}^-, \boldsymbol{b}_{n-1}^-, \boldsymbol{k}_j)}{\mathrm{area}(\boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{b}_1^+, \boldsymbol{b}_2^+)} = \frac{a^3}{b^3}$$



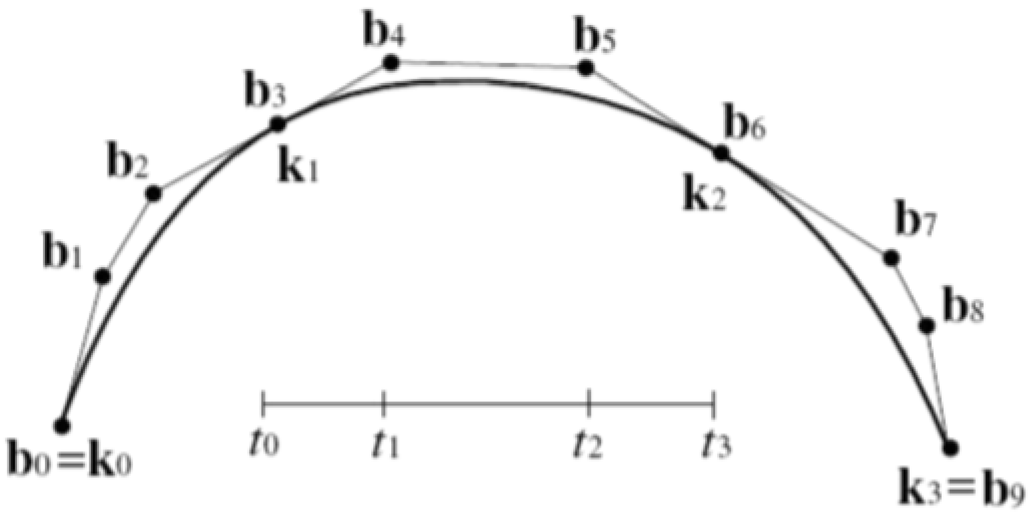
7. C^2三次Bezier样条曲线

7.1. 三次Bezier样条曲线

- 给定

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_0,\cdots,\boldsymbol{k}_n &\in \mathbb{R}^3 \\
t_0,\cdots,t_n &\in \mathbb{R} \\
t_i < t_{i+1} &\text{ for } i = 0,\cdots,n_1
\end{aligned}
$$

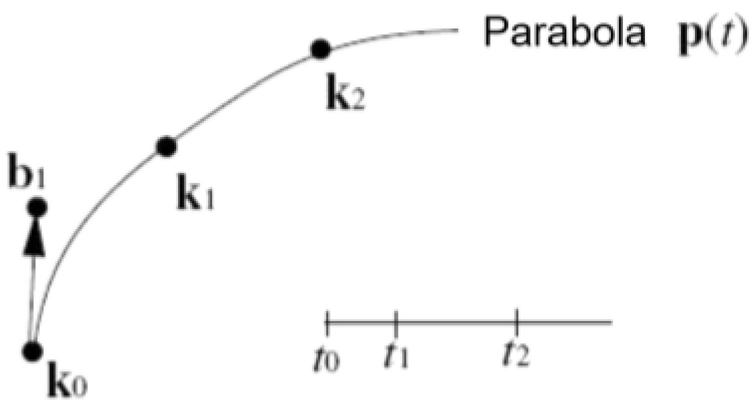
- 目标：插值C^2连续分段三次Bezier样条曲线的Bezier点$\boldsymbol{b}_0,\cdots,\boldsymbol{b}_{3n}$
- 例子：



  - $3n+1$未知点
  - $\boldsymbol{b}_{3i} = \boldsymbol{k}_i$，$i = 0,\cdots,n$，共$n+1$个方程
  - 点$\boldsymbol{k}_i$处C^1连续，$i = 1,\cdots,n-1$，共$n-1$个方程
  - 点$\boldsymbol{k}_i$处C^2连续，$i = 1,\cdots,n-1$，共$n-1$个方程
  - 两个结束条件方程

7.2. 结束条件

7.2.1. Bessel end condition



- $\boldsymbol{k}_0$处的切向量等价于插值$\{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\}$的抛物线在$\boldsymbol{k}_0$处的切向量
- 抛物线插值$\{\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\}$

$$
\boldsymbol{p}(t) = \frac{(t_2-t)(t_1-t)}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}\boldsymbol{k}_0 + \frac{(t_2-t)(t-t_0)}{(t_2-t_1)(t_1-t_0)}\boldsymbol{k}_1 + \frac{(t_0-t)(t_1-t)}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)}\boldsymbol{k}_2
$$

- 插值抛物线导数

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t_0) = -\frac{(t_2 - t_0) + (t_1 - t_0)}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)}\boldsymbol{k}_0 + \frac{(t_2 - t_0)}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)}\boldsymbol{k}_1 - \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}\boldsymbol{k}_2$$

- $\boldsymbol{b}_1$的位置

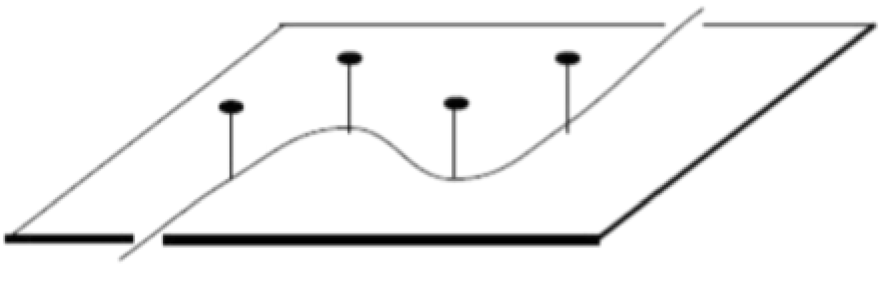
$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_0 + \frac{t_1 - t_0}{3}\dot{\boldsymbol{p}}(t_0)$$

Curve: circle of radius 1

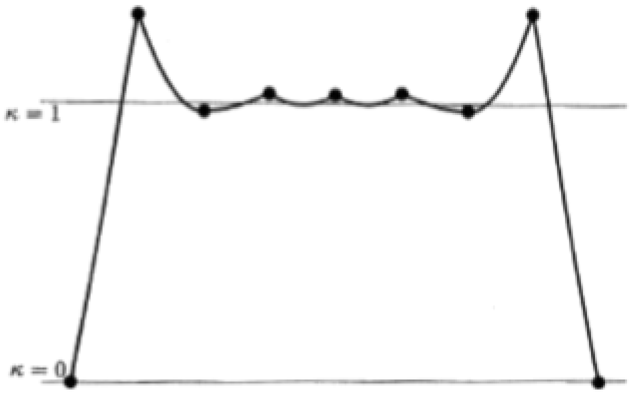
Curvature plot

7.2.2. Natural end condition

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_0}{2}$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t_n) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}_{3n-1} = \frac{\boldsymbol{b}_{3n-2} + \boldsymbol{b}_{3n}}{2}$$



Curve: circle of radius 1



Curvature plot

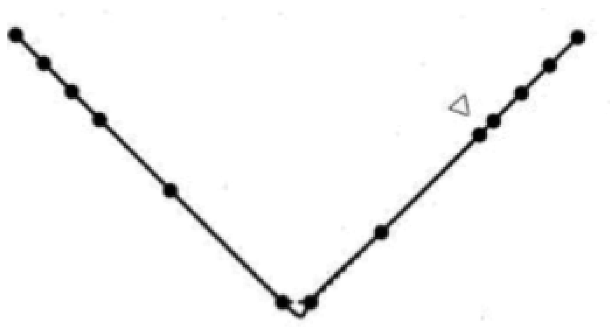
7.3. 参数化

7.3.1. 问题描述

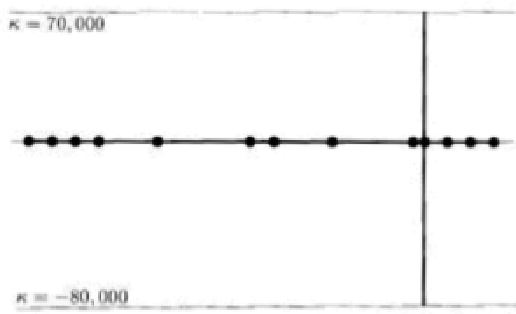
- 给定：控制点$\boldsymbol{k}_0, \cdots, \boldsymbol{k}_n$以及结序列$t_0 < \cdots < t_n$
- 目标：插值曲线
- 问题：通常情况下，结序列未给定，但会影响曲线的走势

7.3.2. Equidistant (uniform) parameterization

- $t_{i+1} - t_i = \text{const}$
- 例如：$t_i = t$
- 不考虑数据点的几何形状



Curve

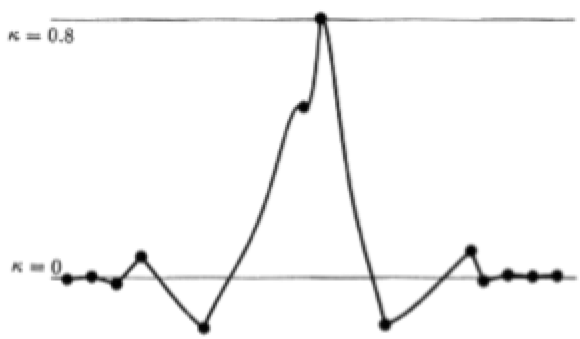


Curvature plot

7.3.3. Chordal parameterization

- $t_{i+1} - t_i = \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|$
- 参数间隔与相邻控制点的距离成正比

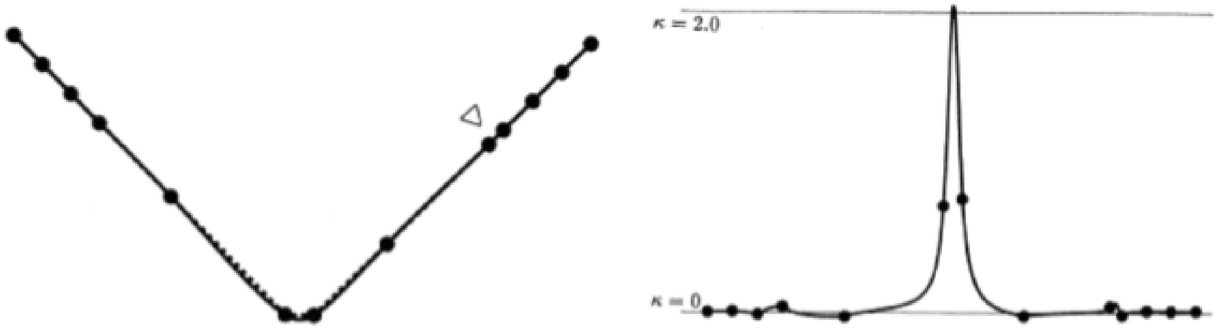
Curve



Curvature plot

7.3.4. Centripetal parameterization

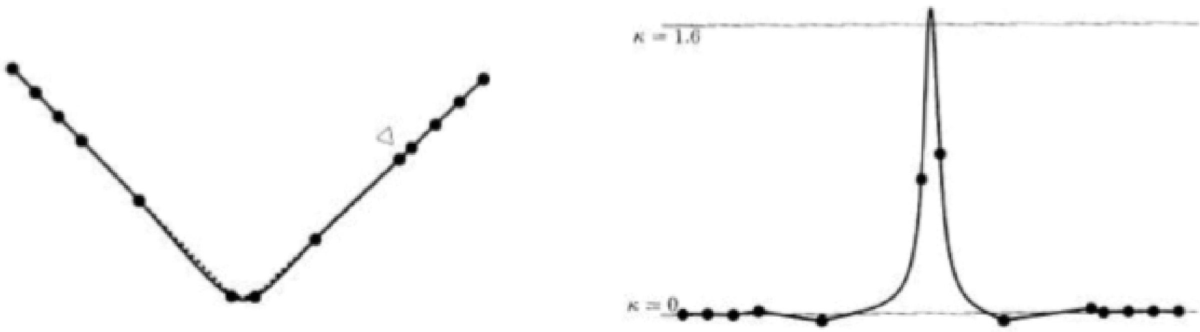
- $t_{i+1} - t_i = \sqrt{\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|}$



Curve Curvature plot

7.3.5. Foley parameterization

- 涉及控制多边形的角度
- $t_{i+1}-t_i=\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|\cdot\left(1+\frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}_i\|\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_{i-1}\|}{\|\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_{i-1}\|+\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|}+\frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}_{i+1}\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|}{\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|+\|\boldsymbol{k}_{i+2}-\boldsymbol{k}_{i+1}\|}\right)$
- 其中，$\hat{\alpha}_i=\min\left(\pi-\alpha_i,\frac{\pi}{2}\right)$
- 且$\alpha_i=\operatorname{angle}(\boldsymbol{k}_{i-1},\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_{i+1})$



Curve Curvature plot

7.3.6. Affine invariant parameterization

- 基于仿射不变距离测度的参数化

7.4. 闭合曲线

7.4.1. 问题描述

- 给定：

  控制点：$\boldsymbol{k}_0,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-1},\boldsymbol{k}_n=\boldsymbol{k}_0$

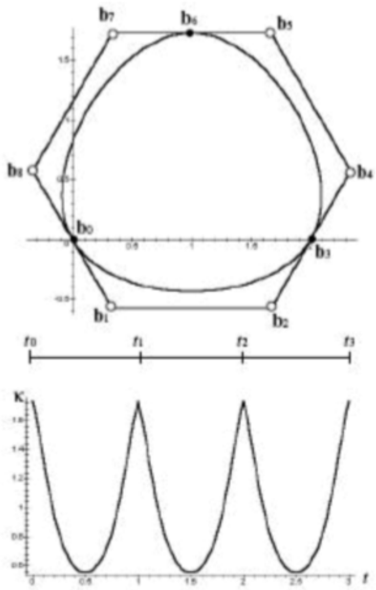
  结序列：$t_0<\cdots<t_n$
- 分段三次曲线的结束条件：

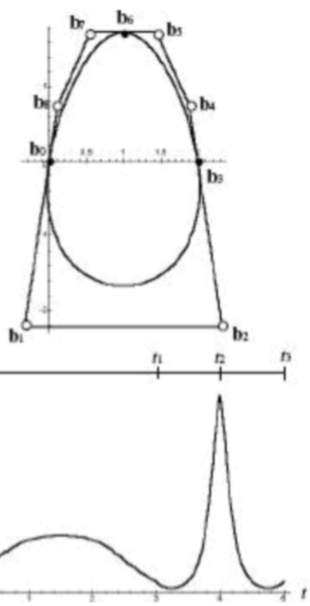
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{x}}(t_n)$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0)=\ddot{\boldsymbol{x}}(t_n)$$

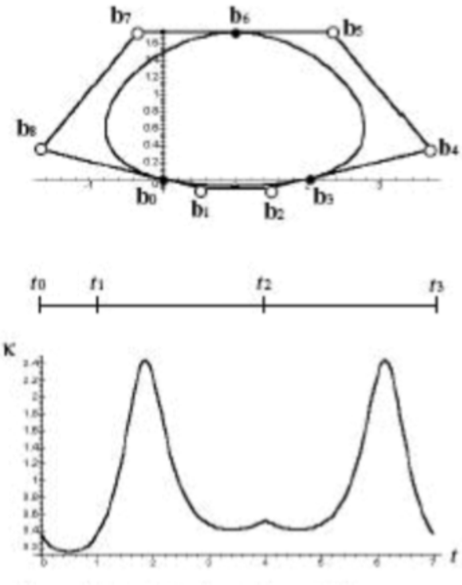
7.4.2. 闭合三次Bezier样条曲线

- C^2连续且曲线闭合
- 闭合曲线的优势：无需选择结束条件
- 例子：

  $n = 3$







b7
b6
b5
b8
b4
b0
b1
b2
b3
t0
t1
t2
t3
κ
t