CAGD(1) | 插值与逼近

1. 插值

1.1. 插值问题的描述

1.1.1. 问题的一般形式

- 寻找定义域$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$，值域$\mathbb{R}$上的函数$f : \Omega \to \mathbb{R}$
- 基函数集合：$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$，$b_i : \Omega \to \mathbb{R}$
- 将f表示为基函数的线性组合

$$f_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_i b_i(x)$$

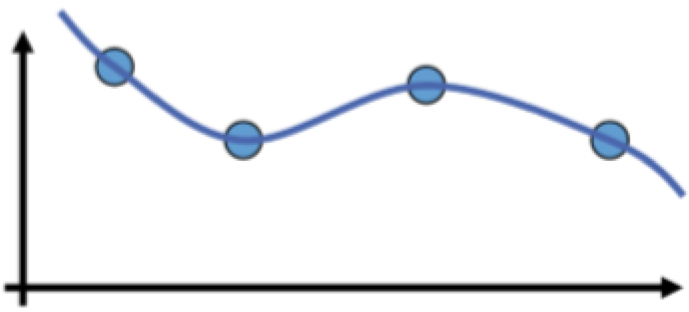
其中，f由$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$唯一确定

- 函数值$\{(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$，$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$
- 目标找到λ使得$f_\lambda(x_i) = y_i$对所有i成立

1.1.2. 插值问题应用举例

最简单的光滑曲线曲面建模问题：

- 给定曲线或曲面上的一组点
- 选择一组可张成合适函数空间的基函数
  - 光滑基函数
  - 任意线性组合也为光滑函数
- 找到一个线性组合能够使得曲线或曲面能插值给定点



1.2. 插值问题的求解

构造线性方程组：

- 在数据点x_i上计算基函数：

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i(x_i) = y_i$$

- 写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} b_1(x_1) & \cdots & b_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_n) & \cdots & b_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.2.1. 多项式插值示例

- 使用多项式基$B = \{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1}\}$
- 求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.2.2. 多项式插值存在的问题

- 系统矩阵稠密
- 依赖于基函数选取，矩阵可能病态，导致难以求解（求逆）

病态问题

- 输入数据的细微变化导致输出（解）的剧烈变化
- 将线性方程看成直线（超平面）
  - 当系统病态时，直线编程近似平行
  - 求解（即直线求交）变得困难、不精确
- 举例：
  - 考虑二元方程组

    $x_1 + 0.5x_2 = 1.5$ 和 $0.667x_1 + 0.333x_2 = 1$

    解为$(1, 1)$
  - 对第二个方程右边项扰动0.001

    $x_1 + 0.5x_2 = 1.5$ 和 $0.667x_1 + 0.333x_2 = 0.999$

    解为$(0, 3)$
  - 对矩阵系数进行扰动

    $x_1 + 0.5x_2 = 1.5$ 和 $0.667x_1 + 0.334x_2 = 0.999$

    解为$(2, -1)$

1.2.3. 矩阵条件数

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

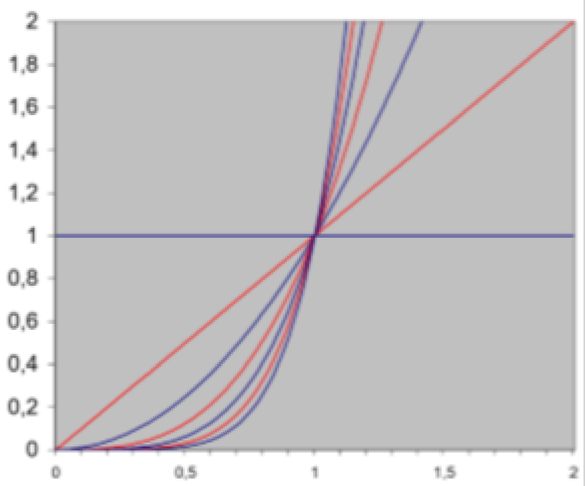
- 等于最大特征值和最小特征值之间的比例
- 条件数大意味着基元之间有太多相关性

考虑多项式插值

- 多项式插值问题是病态的
  - 对于等距分布的数据点x_i，范德蒙矩阵的条件数随着数据点数n呈指数级增长（多项式最高次数为$n-1$）

原因：

- 幂（单项式）函数基



- 幂函数之间差别随次数增加而减小
- 不同幂函数之间唯一差别为增长速度

1.2.4. 函数互相抵消

- 对于单项式函数基，从左到右，首先由常函数1主宰，接着x增长最快，接着x^2增长最快，接着x^3增长最快...
- 好的基函数一般需要系数交替以达到函数的互相抵消

解决方法：

- 使用正交多项式基
- 正交基获得方法：Gram-Schmidt正交化

1.3. 拉格朗日插值方法

拉格朗日插值方法避免求解线性方程组

1.3.1. 拉格朗日插值的一般形式

- 构造插值问题的通用解
  - 给定$n+1$个点$\{(x_0,y_0),\cdots,(x_n,y_n)\}$，寻找一组次数为$n$的多项式基函数$l_i$使得

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j\\ 0, & \text{若 } i\neq j\end{cases}$$

- 插值问题的解为

$$P(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

1.3.2. 拉格朗日多项式的计算

- n阶多项式，且有以下n个根

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1}\cdots,x_n$$

- 可表示为

$$\begin{aligned}l_i(x)&=C_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)\\&=C_i\prod_{j\neq i}(x-x_j)\end{aligned}$$

- 由$l_i(x_i)=1$，可得

$$1=C_i\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\Rightarrow C_i=\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

- 最终的多项式基函数为

$$l_i(x)=\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

  多项式$l_i(x)$称为**拉格朗日多项式**

1.3.3. 拉格朗日插值 vs 单项式基插值

事实上，给定同一组输入点，利用拉格朗日多项式和利用范德蒙矩阵（单项式基）进行插值所得到的解完全相同

- 假设解不同。记两个解的差别多项式为R_n，R_n阶数至多为n
- 那么$R_n(x_i) = 0$，$i = 0, 1, \cdots, n$，x_i为不同插值点。因此R_n是有$n+1$个根的n阶多项式，因此$R_n = 0$

1.3.4. 多项式插值分析

- 多项式插值不稳定
- 控制点的微小变化可导致完全不同的结果
- 振荡现象：多项式随着插值点数（可以是细微的）增加而摆动

解决方法：

- 使用更好的基函数做插值，例如：分片多项式

2. 逼近

2.1. 动机

2.1.1. 使用逼近的原因

- 数据点含噪声（采样）
- 更紧凑的表达
- 计算简单

2.1.2. 常用的逼近函数

- 多项式
- 有理函数（多项式商）
- 三角函数

2.2. 多项式逼近

2.2.1. 万能逼近定理

又叫Weierstrass定理：

令f为闭区间$[a, b]$上任意连续函数，则对任意给定ε，存在n和多项式P_n使得

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$

Weierstrass只证明了存在性，而未给出多项式

2.2.2. Bernstein多项式逼近

Bernstein多项式构造定理

对$[0, 1]$区间上任意连续函数$f(x)$和任意正整数n，以下不等式对所有$x \in [0, 1]$成立

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \frac{9}{4} m_{f,n}$$

- $m_{f,n} = \underset{y_1, y_2 \in [0,1] \text{且} |y_1 - y_2| < \frac{1}{\sqrt{n}}}{\text{lower upper bound}} |f(y_1) - f(y_2)|$
- $B_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) b_{n,j}(x)$，其中$x_j$为$[0, 1]$上等距采样点
- $b_{n,j} = \binom{n}{j} x^j (1 - x)^{n-j}$为Bernstein多项式

Bernstein多项式逼近特点

- 逼近结果优秀，但需要高阶
- 计算昂贵
- 容易带来误差

2.3. 最小二乘逼近

2.3.1. 逼近问题

- 给定一组线性无关的连续函数集合$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$和一组结点$\{(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)\}$，其中$m > n$
- 在B张成空间中寻找对结点逼近最好的函数$f \in \operatorname{span}(B)$

2.3.2. 最佳逼近的定义

最小二乘逼近

$$\underset{f \in \mathrm{span(B)}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - y_j)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} (f(x_j) - y_j)^2 &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i(x_j) - y_j \Big)^2 \\ &= (M\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{y})^T (M\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{y}^T M\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^T M^T M\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$，$M = \begin{pmatrix} b_1(x_1) & \cdots & b_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_m) & \cdots & b_n(x_m) \end{pmatrix}$

2.3.3. 最小二乘解

- 关于λ的二次多项式

$$\boldsymbol{\lambda}^T M^T M\boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{y}^T M\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}$$

- 最小解满足

$$M^T M\boldsymbol{\lambda} = M^T \boldsymbol{y}$$