

《计算机辅助几何设计》作业 1

ID 号: 01 姓名: 陈文博

2020 年 10 月 06 日

1 原理

1.1 插值型拟合

设基函数集合为 $\{\varphi_i(x)\}(i = 1, 2, \dots)$, 插值方程表示为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \quad (1)$$

对输入数据点 $(x_i, y_j)(i = 1, 2, \dots, n)$, 拟合方程表示为:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

即:

$$A\alpha = y \quad (3)$$

插值拟合参数即为

$$\boldsymbol{\alpha} = A^{-1}\boldsymbol{y} \quad (4)$$

幂基

$$B_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

拟合方程:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i B_i(x) \quad (6)$$

Gauss 基

$$g(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \mu = x_1, x_2, \dots, x_n, \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

拟合方程:

$$f(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i g_i(x) \quad (8)$$

1.2 逼近型拟合方法

设基函数集合为 $\{\varphi_i(x)\}(i = 1, 2, \dots)$, 拟合方程表示为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \quad (9)$$

对输入数据点 $(x_i, y_j)(i = 1, 2, \dots, n)$, 最小二乘法求解:

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\alpha}} E(x) &= \sum_{i=0}^n (y_i - f(x_i))^2 \\
&= \sum_{i=0}^n (y_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x_i))^2 \\
&= (A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y})^T (A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y}) \\
&= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T A^T A\boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{10}$$

最小解满足：

$$A^T A\boldsymbol{\alpha} = A^T \mathbf{y} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} \tag{11}$$

** 幂基 **

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i B_i(x) \tag{12}$$

其中， $m < n$

** 傅里叶基 **

$$f(x) = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i F_i(x) \tag{13}$$

其中， $m < n$ ，且

$$F_{2i-1}(x) = \sin(2i\pi x) \quad F_{2i} = \cos(2i\pi x) \quad (14)$$

2 思考题

(1) 变量比方程多，如何加约束条件？

可以考虑取输入 $\{y_i\}$ 的均值，即

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (15)$$

相当于把曲线沿 y 轴方向平移到各个点 y 方向均值为零处，可以实现 y 方向的平移不变性

** (2) 常数项 b_0 也可以改为一个低次（比如 2 次或 3 次）的多项式，相应也要加约束条件 **

拟合方程：

$$f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k + \sum_{i=1}^n b_i g_i(x) \quad (16)$$

可以先对多项式部分 $f'(x) = p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ 做逼近拟合，然后再对下面拟合方程进行插值拟合：

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=1}^n b_i g_i(x) \quad (17)$$

得到最终结果

3 结果分析

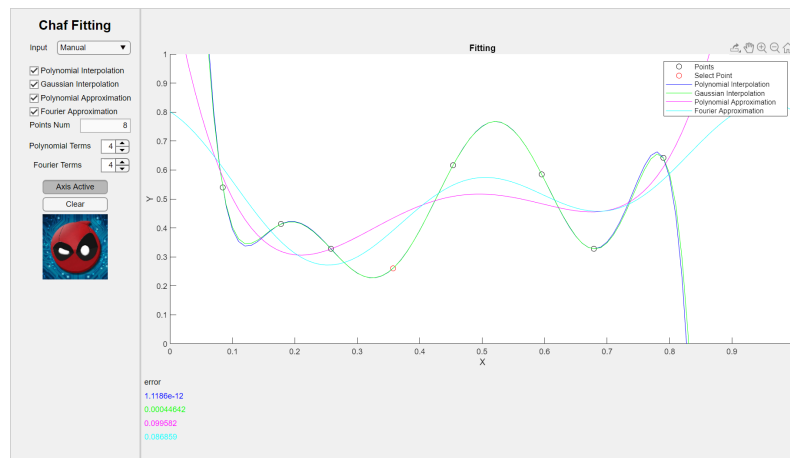


图 1:

- 误差
 - 插值拟合误差接近于 0（计算精度）
 - 逼近拟合存在一定的误差（基函数次数越高且 $m < n$ ，拟合误差越小）
- 通过数据点
 - 插值拟合经过所有数据点
 - 逼近拟合一般不经过所有数据点（当 $m = n - 1$ 时退化为插值拟合，此时经过所有数据点）

- 震荡问题
 - 插值拟合两端震荡明显，内部平稳
 - 幂基逼近拟合较为平稳
 - 傅里叶基逼近总以一定频率震荡

4 程序说明

- Input: 可选择自动生成数据点模式和手动输入模式
- Polynomial/Fourier Terms: 幂基/傅里叶基逼近拟合的阶数选择
- error: 四种拟合方式的误差，颜色一一对应，误差计算公式如下

$$\text{err} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \quad (18)$$

- Clear: 清除所有数据和画布
- 自动生成模式
 - 修改 Points Num 输入框生成随机数据点
 - 修改 Points Num 输入框生成随机数据点
 - 勾选四种不同拟合方式进行拟合
 - 可以动态调整相关参数
- 手动输入模式
 - 出现“Axis Active”按钮，当该按钮按下时，可以和坐标系交互；取消时，将锁定坐标系，无法编辑数据点

– 交互方式:

- * 在坐标系空白处单击鼠标左键添加数据点
- * 勾选四种不同拟合方式进行拟合
- * 鼠标左键单击已有数据点将选定数据点（变成红色），可按住拖动进行位置编辑
- * 键盘“Delete”键将删除选定点
- * 可以动态调整相关参数