《计算机辅助几何设计》作业1

1. 证明题

1.1. 证明：一条空间Bezier曲线为平面曲线的充要条件是其控制顶点共面

充分性：

控制顶点共面，则存在两个不共线的共面向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$使得

$$\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v}$$

所以Bezier曲线表示为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)(\alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{u}\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\alpha_i + \boldsymbol{v}\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\beta_i \\
&= \alpha' \boldsymbol{u} + \beta' \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{f}(t)$与$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$共面，即为平面曲线

必要性：

假设控制顶点不共面，且空间Bezier曲线为平面曲线，则有

$$\boldsymbol{f}(t) = \alpha' \boldsymbol{u} + \beta' \boldsymbol{v}$$

且

$$\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v} + \gamma_i \boldsymbol{w}$$

其中，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{w}$不共面，α_i，β_i和γ_i均不恒为0，Bezier曲线的基函数和形式为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)(\alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v} + \gamma_i \boldsymbol{w}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\alpha_i \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\beta_i \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\gamma_i \boldsymbol{w}
\end{aligned}$$

欲使Bezier曲线为平面曲线，则应有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\gamma_i = 0$$

而$b_i(t)$不恒为0，故$\gamma_i \equiv 0$，即$\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v}$，因此控制点依然共面

综上所述，一条空间Bezier曲线为平面曲线的充要条件是其控制顶点共面

1.2. 证明：一条Bezier曲线的弧长不大于其控制多边形的周长

设Bezier曲线方程为$\boldsymbol{f}(t)$，曲线弧长为L，多边形周长为C，则Bezier曲线弧长为：

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \left\| \boldsymbol{f}'(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{(n-1)}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \right\| \mathrm{d}t \\ &\le n \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\| \cdot \int_0^1 B_i^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

由Bernstein基函数的导数性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_i^{(n)}(t) = n\Big[B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t)\Big]$$

0到1积分有：

$$B_i^{(n)}(1) - B_i^{(n)}(0) = n\Big[\int_0^1 B_{i-1}^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 B_i^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t\Big] = 0$$

以此类推有：

$$\int_0^1 B_0^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 B_1^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t = \cdots = \int_0^1 B_{n-1}^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

故

$$L \le \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\| = C$$

证毕

1.3 圆弧不能用Bezier曲线精确表示

假设Bezier曲线能够精确表示圆，设圆心为$\boldsymbol{c}$，半径为R，则对相应Bezier曲线$\boldsymbol{f}(t)$，有

$$\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c}\| = R$$

其中，

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^i$$

Bernstein基函数为多项式函数，故$\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c}\| \not\equiv \mathrm{const}$，假设不成立

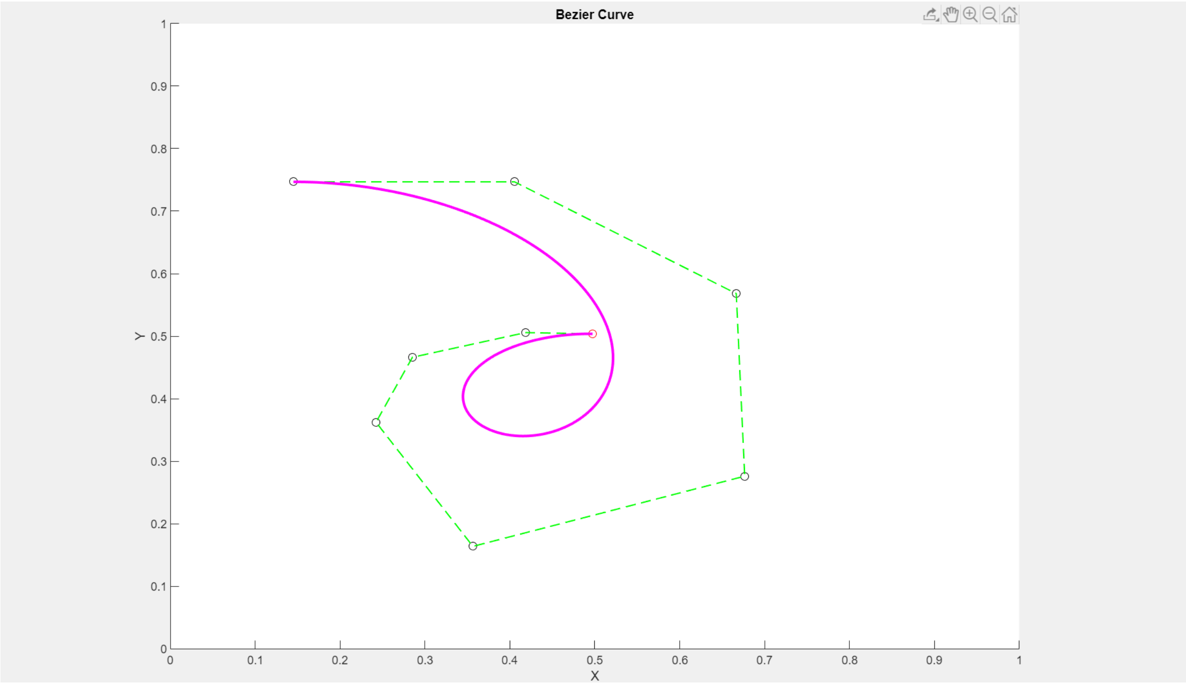
因此，圆弧不能用Bezier曲线精确表示

1.4. 试求n次Bezier曲线及其控制点首末顶点与原点所围成的区域（如下图灰色区域）的面积（用控制顶点的坐标表达）

设Bezier曲线方程为$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{f}'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i \right) \times \left(n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \right) \mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) C_n^i C_{n-1}^j \int_0^1 t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \int_0^1 C_{2n-1}^{i+j} t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \int_0^1 B_{i+j}^{2n-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)
\end{aligned}
$$

2. 程序说明



- 鼠标左键单击空白处添加控制点
- 鼠标左键单击已有控制点选定点
- 键盘`delete`按键删除选定控制点