《计算机辅助几何设计》作业 32

ID 号: 01　　姓名: 陈文博

2020 年 10 月 15 日

1. 证明：以下曲线为弧长参数曲线

$$\gamma(t)=\Big(\frac{(1+t)^{3/2}}{3},\frac{(1-t)^{3/2}}{3},\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) \tag{1}$$

其中 $-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$

由

$$\gamma'(t)=\Big(\frac{(1+t)^{1/2}}{2},-\frac{(1-t)^{1/2}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \tag{2}$$

有

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{1}{4}(1+t)+\frac{1}{4}(1-t)+\frac{1}{2}}=1 \tag{3}$$

因此，曲线 $\gamma(t)$ 为弧长参数曲线

2. 计算以下两条参数曲线的曲率 $\kappa(t)$

$$\begin{aligned} c_1(t)&=(t,t^2)\\ c_2(t)&=(\cos t,t,\sin t)\end{aligned} \tag{4}$$

易知曲线 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 均不是弧长参数曲线，故曲率

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \tag{5}$$

又，

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= (1, 2t) \\ c_1''(t) &= (0, 2) \\ c_2'(t) &= (-\sin t, 1, \cos t) \\ c_2''(t) &= (-\cos t, 0, -\sin t) \end{aligned} \tag{6}$$

代入得到

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= \frac{2}{(4t^2+1)^{3/2}} \\ \kappa_2(t) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

3. 证明以下曲线是平面曲线

$$c(t) = \Big(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\Big) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} c'(t) &= \big(1 - \frac{1}{t^2}, 1, -\frac{1}{t^2}\big) \\ c''(t) &= \Big(\frac{2}{t^3}, 0, \frac{2}{t^3}\Big) \\ c'''(t) &= \Big(-\frac{6}{t^4}, 0, -\frac{6}{t^4}\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

计算挠率：

$$\tau(t) = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} = 0 \tag{10}$$

由于曲线挠率恒为零，故该曲线为平面曲线

4. **当半径为 r 的“动圆”沿着半径为 R 的“定圆”的外侧无滑动地滚动时，动圆圆周上地一定点 p 所描绘地点的轨迹，叫做外摆线。计算外摆线的参数曲线，并画出当 $r=1$，$R=3$ 时的曲线形状**

设动圆与定圆的切点为 q，q 的轨迹方程为：

$$q(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \tag{11}$$

动圆圆心轨迹方程

$$O'(\theta) = ((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta) \tag{12}$$

由曲线速度相同可得外摆线的参数曲线方程：

$$c(\theta) = ((R+r)\cos\theta + r\cos\frac{R+r}{r}\theta, (R+r)\sin\theta + r\sin\frac{R+r}{r}\theta) \tag{13}$$

当 $r=1$，$R=3$ 时，曲线的形状为：

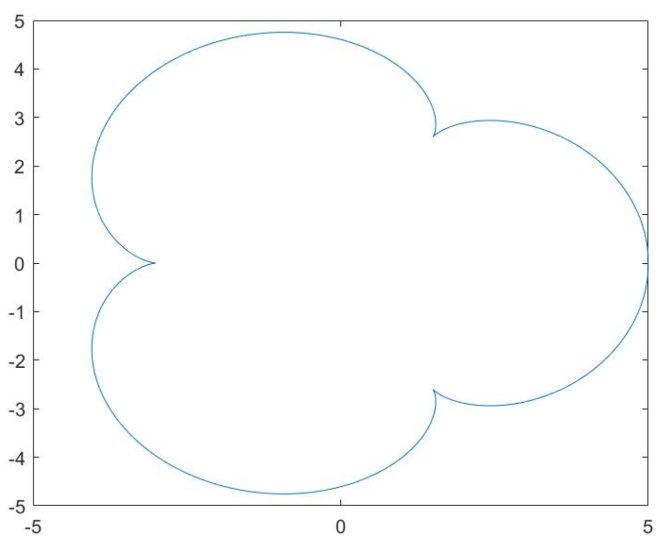

图 1:

5. 渐屈线是曲线上密切圆圆心的轨迹。特别的，Frenet 标架为 $\{e_1(t), e_2(t)\}$ 的平面 Frenet 曲线 $c : D \to \mathbb{R}^2$ 可由以下参数曲线 $\eta : D \to \mathbb{R}^2$ 表示

$$\eta(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} e_2(t) \tag{14}$$

编写程序画出椭圆的渐屈线及下图中标记点的密切圆

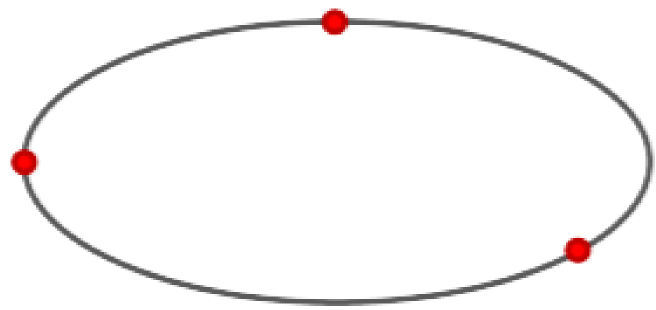

图 2:

原理说明：

椭圆参数方程：

$$c(t) = (a\cos t, b\sin t) \tag{15}$$

曲线求导：

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-a\sin t, b\cos t) \\ c''(t) &= (-a\cos t, -b\sin t) \end{aligned} \tag{16}$$

Frenet 标架：

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-a\sin t, b\cos t) \\ e_2(t) &= c''(t) - (c''(t), e_1) \cdot e_1 \end{aligned} \tag{17}$$

椭圆曲率：

$$\kappa(t) = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \tag{18}$$

椭圆渐屈线方程：

$$\eta(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} e_2(t) \tag{19}$$

对于点 (x, y) 处的密切圆，将 $\cos t = x/a$ 和 $\sin t = y/b$ 代入以上方程得到曲率 κ 和向量 e_2，密切圆方程为：

$$f(t) = (x - 1/\kappa * \cos t, y - 1/\kappa * \sin t) \tag{20}$$

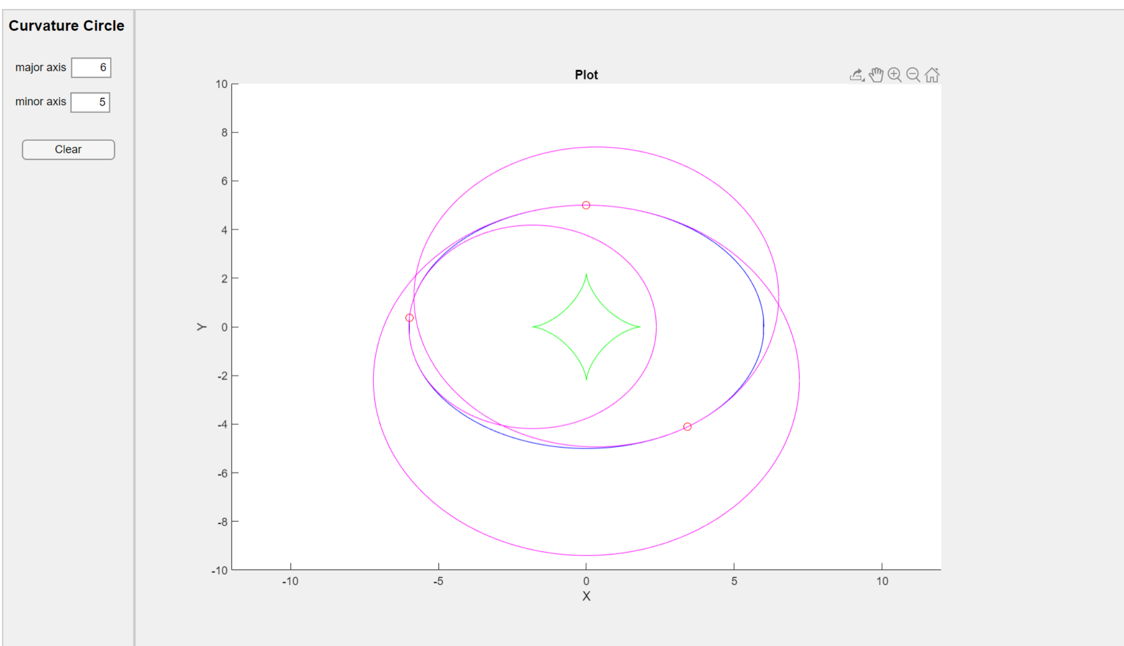

图 3: