

《计算机辅助几何设计》作业1

作业要求：

Input: 已知平面内 n 个点 $\overline{P}_j(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, n$

Output: 拟合这些点的函数

要求: 实现不同的拟合方法，并进行比较。输入点集可以进行交互式鼠标指定，或者其他方法生成

原理

插值型拟合方法

设基函数集合为 $\{\varphi_i(x)\}(i = 1, 2, \dots)$ ，插值方程表示为：

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

对输入数据点 $(x_i, y_j)(i = 1, 2, \dots, n)$ ，拟合方程表示为：

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

即：

$$A\alpha = y$$

插值拟合参数即为

$$\alpha = A^{-1}y$$

幂基

$$B_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

拟合方程：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i B_i(x)$$

Gauss基

$$g(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu = x_1, x_2, \dots, x_n, \quad i = 1, \dots, n$$

拟合方程：

$$f(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i g_i(x)$$

逼近型拟合方法

设基函数集合为 $\{\varphi_i(x)\}(i = 1, 2, \dots)$, 拟合方程表示为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

对输入数据点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, n)$, 最小二乘法求解:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} E(x) &= \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x_i))^2 \\ &= (A\alpha - \mathbf{y})^T (A\alpha - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T A\alpha + \alpha^T A^T A\alpha \end{aligned}$$

最小解满足:

$$A^T A\alpha = A^T \mathbf{y} \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$$

幂基

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i B_i(x)$$

其中, $m < n$

傅里叶基

$$f(x) = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i F_i(x)$$

其中, $m < n$, 且

$$F_{2i-1}(x) = \sin(2i\pi x) \quad F_{2i} = \cos(2i\pi x)$$

思考题

(1) 变量比方程多, 如何加约束条件?

可以考虑取输入 $\{y_i\}$ 的均值, 即

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

相当于把曲线沿 y 轴方向平移到各个点 y 方向均值为零处, 可以实现 y 方向的平移不变性

(2) 常数项 b_0 也可以改为一个低次 (比如2次或3次) 的多项式, 相应也要加约束条件

拟合方程:

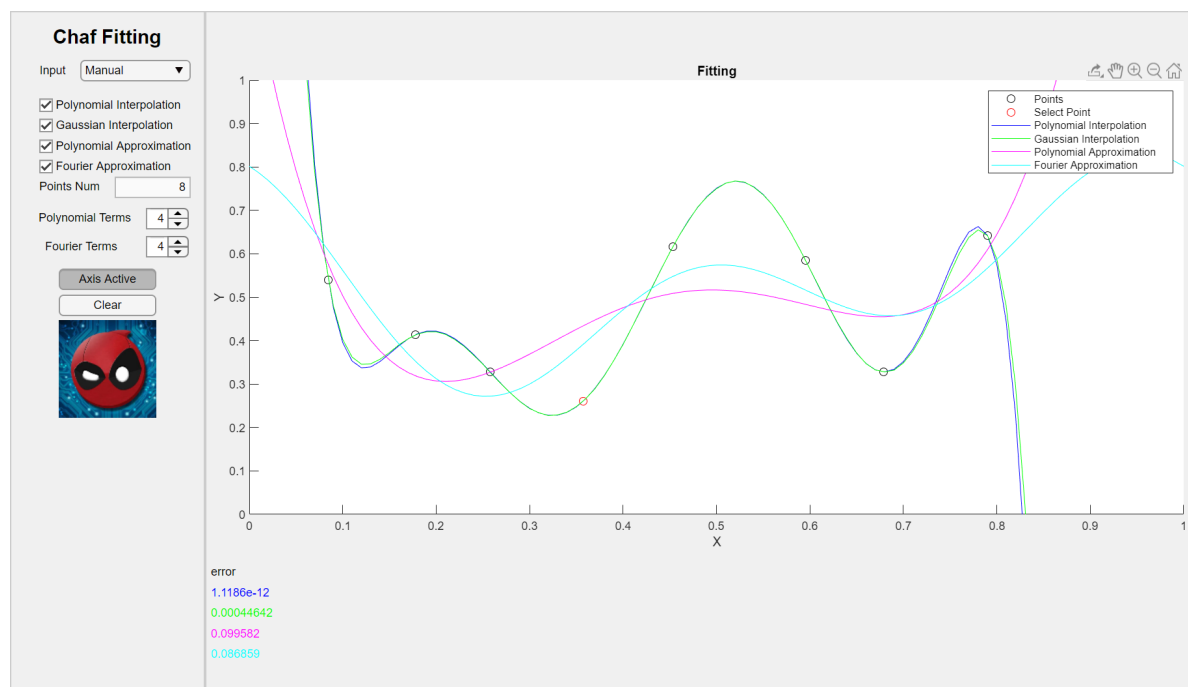
$$f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k + \sum_{i=1}^n b_i g_i(x)$$

可以先对多项式部分 $f'(x) = p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ 做逼近拟合, 然后再对下面拟合方程进行插值拟合:

$$f(x) - p(x) = \sum_{i=1}^n b_i g_i(x)$$

得到最终结果

结果分析



- 误差
 - 插值拟合误差接近于0（计算精度）
 - 逼近拟合存在一定的误差（基函数次数越高且 $m < n$ ，拟合误差越小）
- 通过数据点
 - 插值拟合经过所有数据点
 - 逼近拟合一般不经过所有数据点（当 $m = n - 1$ 时退化为插值拟合，此时经过所有数据点）
- 震荡问题
 - 插值拟合两端震荡明显，内部平稳
 - 幂基逼近拟合较为平稳
 - 傅里叶基逼近总以一定频率震荡

程序说明

- **Input**：可选择自动生成数据点模式和手动输入模式
- **Polynomial/Fourier Terms**：幂基/傅里叶基逼近拟合的阶数选择
- **error**：四种拟合方式的误差，颜色一一对应，误差计算公式：

$$\text{err} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

- **Clear**：清除所有数据和画布
- 自动生成模式
 - 修改Points Num输入框生成随机数据点
 - 勾选四种不同拟合方式进行拟合
 - 可以动态调整相关参数
- 手动输入模式
 - 出现 **Axis Active** 按钮，当该按钮按下时，可以和坐标系交互；取消时，将锁定坐标系，无法编辑数据点
 - 交互方式：

- 在坐标系空白处单击鼠标左键添加数据点
- 勾选四种不同拟合方式进行拟合
- 鼠标左键单击已有数据点将选定数据点（变成红色），可按住拖动进行位置编辑
- 键盘 `Delete` 键将删除选定点
- 可以动态调整相关参数