《计算机辅助几何设计》作业 2

ID 号: 01　　姓名: 陈文博

2019 年 10 月 12 日

1. 证明：一条空间 Bézier 曲线为平面曲线的充要条件是其控制顶点共面。

充分性：

控制顶点共面，则存在两个不共线的共面向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 使得

$$\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v} \tag{1}$$

所以 Bezier 曲线表示为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)(\alpha_i\boldsymbol{u} + \beta_i\boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{u}\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\alpha_i + \boldsymbol{v}\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\beta_i \\
&= \alpha'\boldsymbol{u} + \beta'\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{2}
$$

故 $\boldsymbol{f}(t)$ 与 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 共面，即为平面曲线

必要性：

假设控制顶点不共面，且空间 Bezier 曲线为平面曲线，则有

$$
\boldsymbol{f}(t) = \alpha'\boldsymbol{u} + \beta'\boldsymbol{v} \tag{3}
$$

且

$$
\boldsymbol{p}_i = \alpha_i\boldsymbol{u} + \beta_i\boldsymbol{v} + \gamma_i\boldsymbol{w} \tag{4}
$$

其中，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 不共面，α_i，β_i 和 γ_i 均不恒为 0，Bezier 曲线的基函数和形式为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\boldsymbol{p}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)(\alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v} + \gamma_i \boldsymbol{w}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\alpha_i \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\beta_i \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\gamma_i \boldsymbol{w}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

欲使 Bezier 曲线为平面曲线，则应有

$$
\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\gamma_i = 0 \tag{6}
$$

而 $b_i(t)$ 不恒为 0，故 $\gamma_i \equiv 0$，即 $\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{u} + \beta_i \boldsymbol{v}$，因此控制点依然共面

综上所述，一条空间 Bezier 曲线为平面曲线的充要条件是其控制顶点共面

2. 证明：一条 Bézier 曲线的弧长不大于其控制多边形的周长。

设 Bezier 曲线方程为 $\boldsymbol{f}(t)$，曲线弧长为 L，多边形周长为 C，则 Bezier 曲线弧长为：

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \left\| \boldsymbol{f}'(t) \right\| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left\| n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{(n-1)}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \right\| \mathrm{d}t \\
&\le n \sum_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\| \cdot \int_0^1 B_i^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{7}
$$

由 Bernstein 基函数的导数性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^{(n)}(t)=n\Big[B_{i-1}^{(n-1)}(t)-B_i^{(n-1)}(t)\Big] \tag{8}$$

0 到 1 积分有：

$$B_i^{(n)}(1)-B_i^{(n)}(0)=n\Big[\int_0^1 B_{i-1}^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 B_i^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t\Big]=0 \tag{9}$$

以此类推有：

$$\int_0^1 B_0^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 B_1^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t=\cdots=\int_0^1 B_{n-1}^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{n} \tag{10}$$

故

$$L\leq\sum_{i=0}^{n-1}\|\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i\|=C \tag{11}$$

证毕

3. 证明：圆弧不能用 Bézier 曲线精确表示。

假设 Bezier 曲线能够精确表示圆，设圆心为 $\boldsymbol{c}$，半径为 R，则对相应 Bezier 曲线 $\boldsymbol{f}(t)$，有

$$\|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{c}\| = R \tag{12}$$

其中，

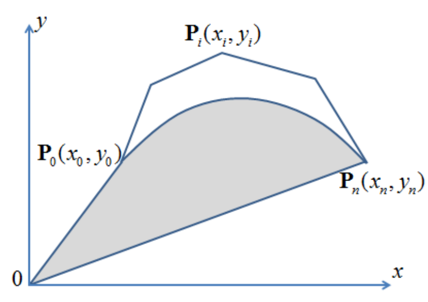
$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i \tag{13}$$

$$B_i^n(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i(1-t)^i \tag{14}$$

Bernstein 基函数为多项式函数，故 $\|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{c}\| \not\equiv \text{const}$，假设不成立

因此，圆弧不能用 Bezier 曲线精确表示

4. 试求平面 n 次 Bézier 曲线及其控制顶点首末顶点与原点所围成的区域（如下图灰色区域）的面积（用控制顶点的坐标来表达）。



设 Bezier 曲线方程为 $\boldsymbol{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{f}'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i \right) \times \left(n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \right) \mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) C_n^i C_{n-1}^j \int_0^1 t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \int_0^1 C_{2n-1}^{i+j} t^{i+j}(1-t)^{2n-1-(i+j)}\mathrm{d}t \\
&= n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \int_0^1 B_{i+j}^{2n-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{C_n^i C_{n-1}^j}{C_{2n-1}^{i+j}} \boldsymbol{p}_i \times (\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)
\end{aligned} \tag{15}
$$

5. 编写程序实现使用 Bézier 曲线来拟合平面点列。

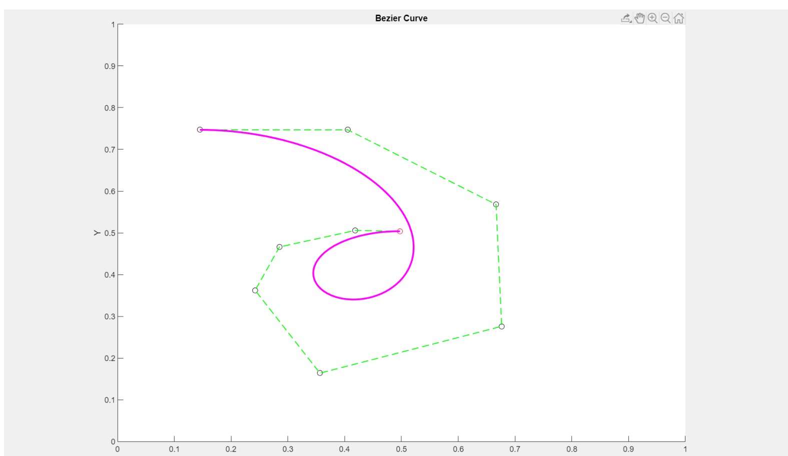


图 1:

- 鼠标左键单击空白处添加控制点
- 鼠标左键单击已有控制点选定点

- 键盘“delete”按键删除选定控制点