数字图像处理
Digital Image Processing

刘利刚

lgliu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~lgliu

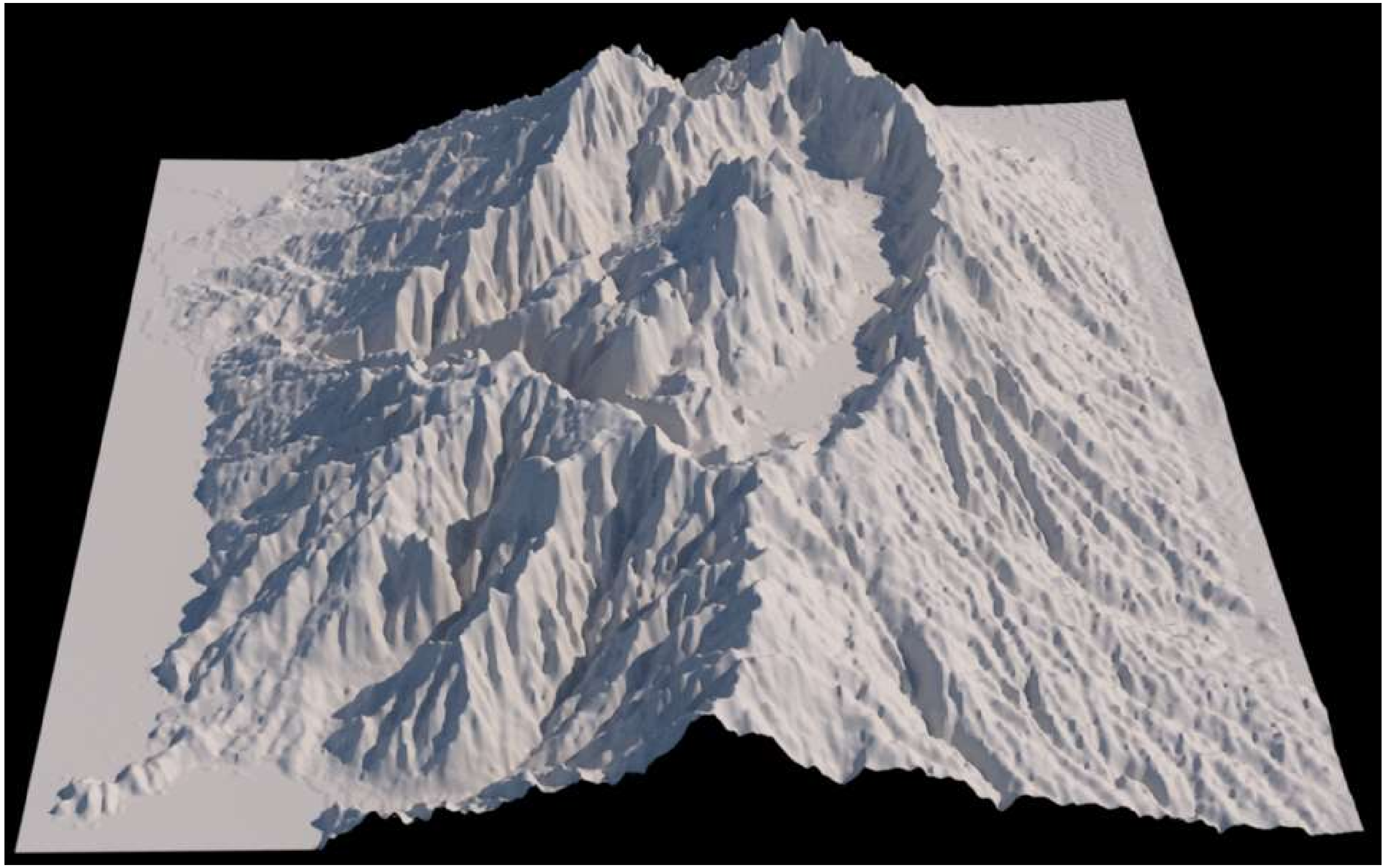
Graphics&Geometric Computing Lab @USTC

Image as A Function

Fitting: Interpolation and Approximation

Gray Images

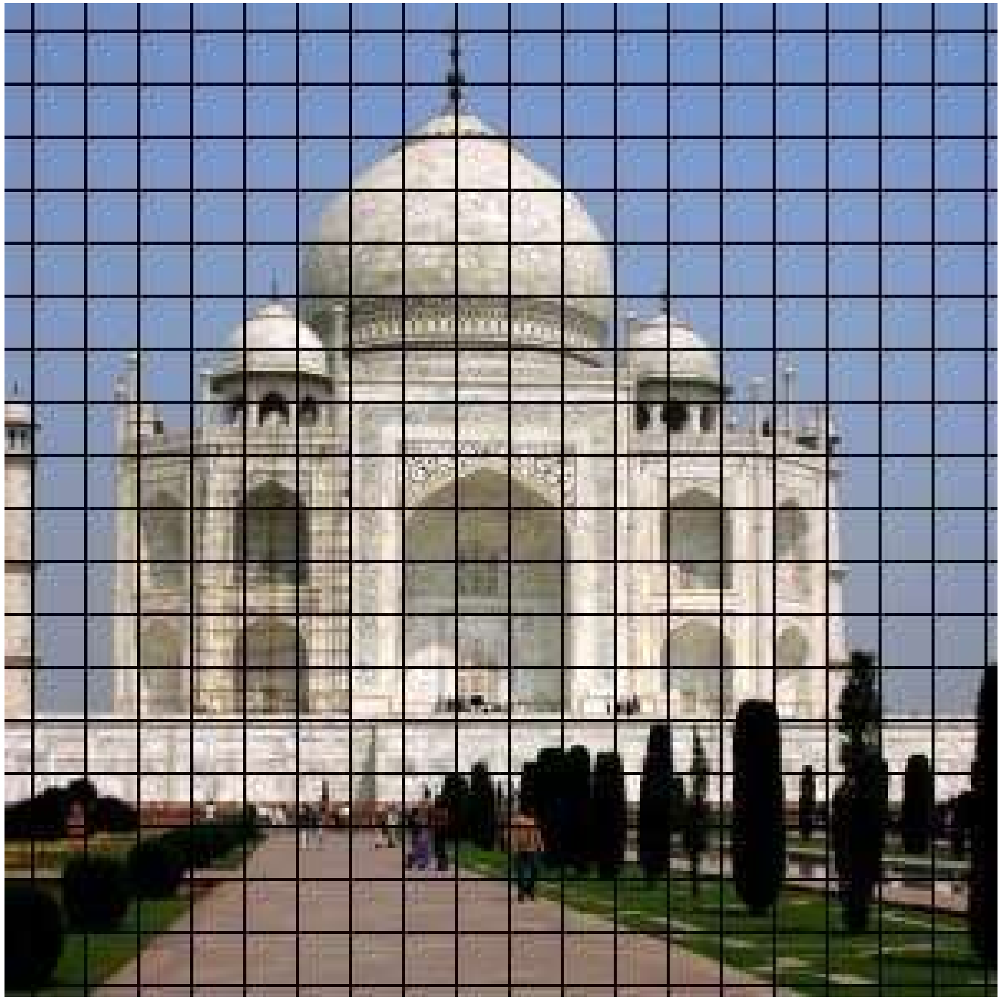
- A function (height field) over 2D domain



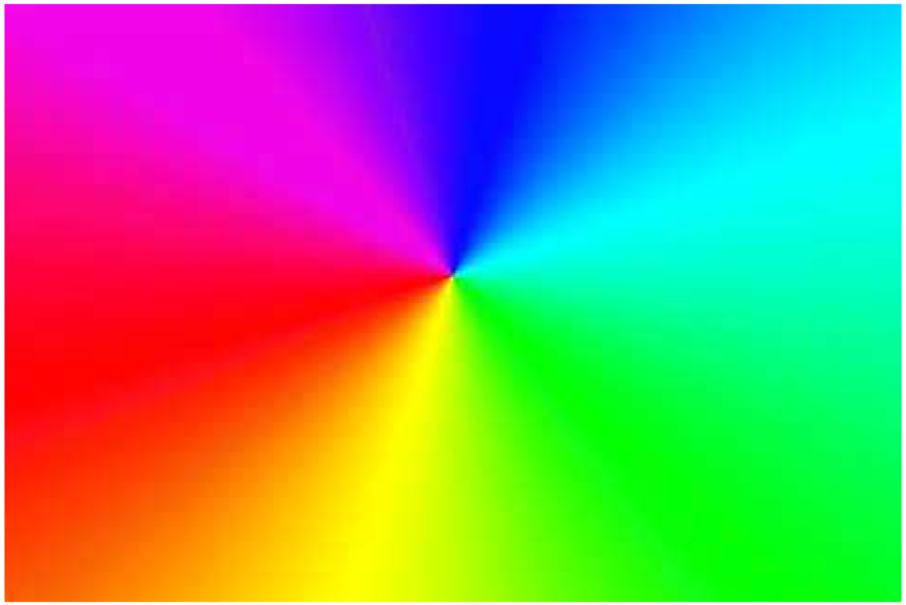
Color Images

- Vector function over 2D domian

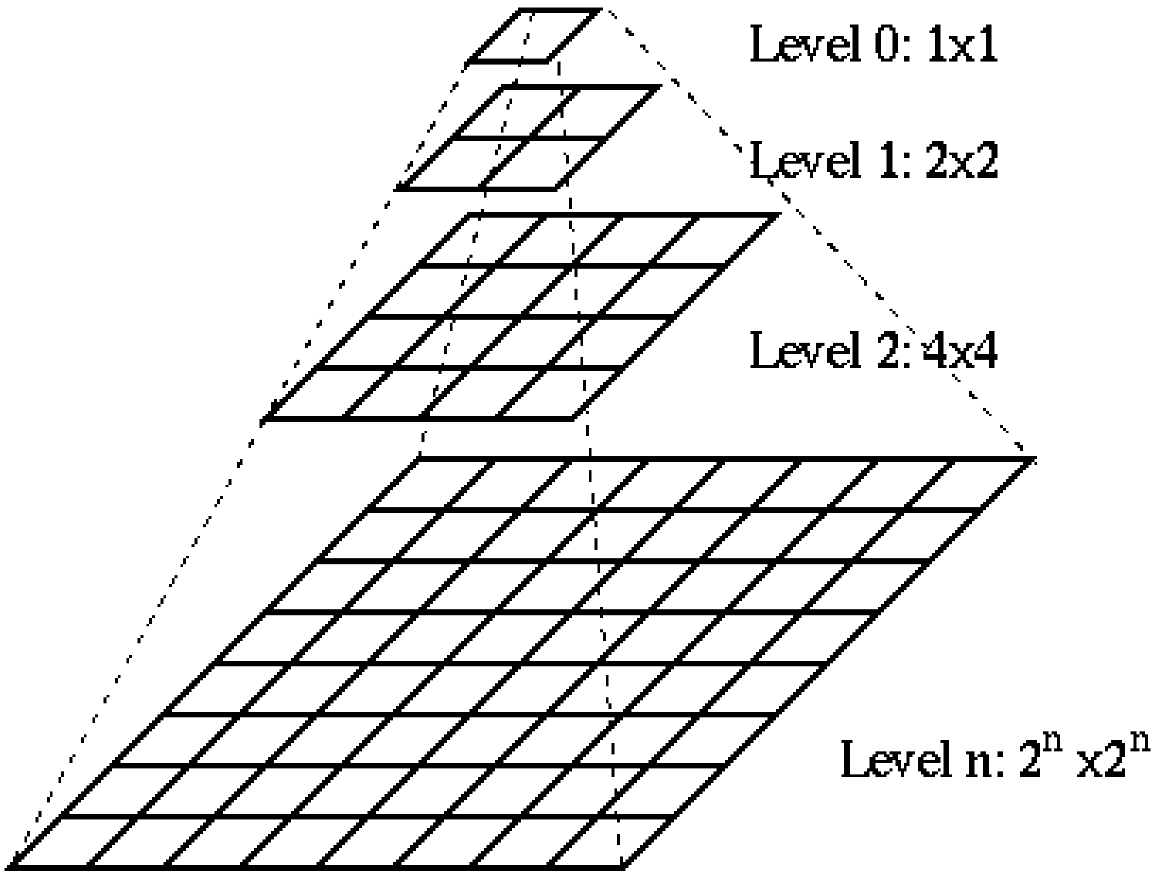
Image: Discrete Sampling



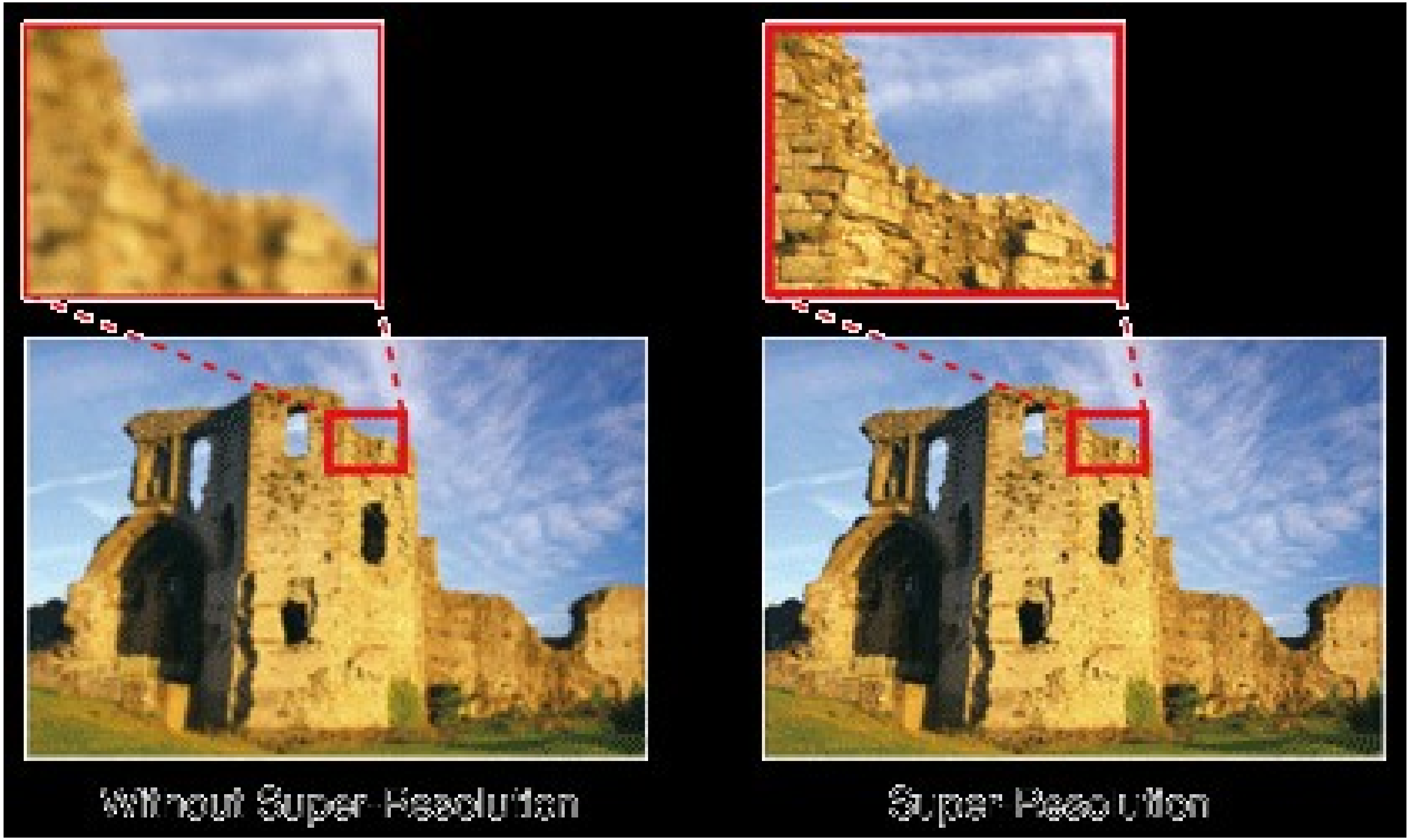
Gradient (梯度)



Downsampling



Upsampling (Super-resolution)

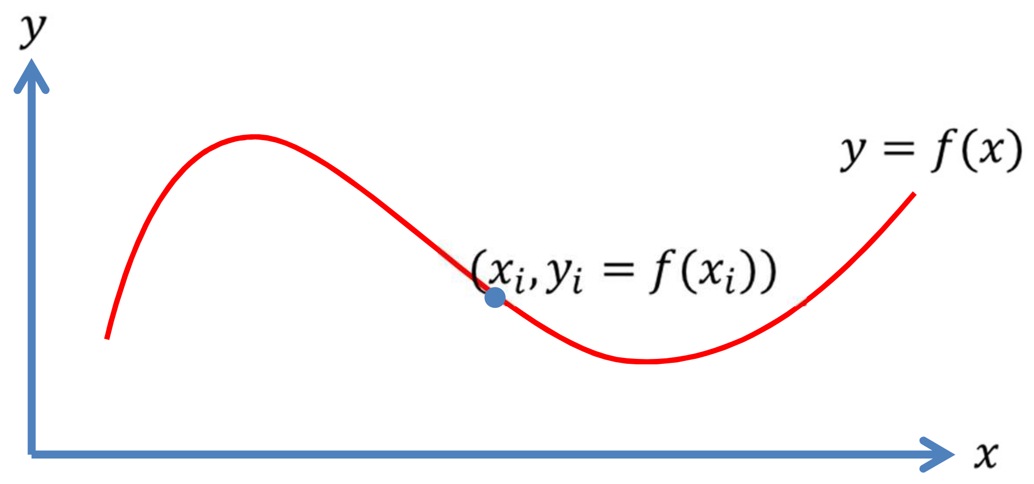


函数插值（拟合）

详细可参考：
https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr （P2-P4三节课程视频）
http://staff.ustc.edu.cn/~lgliu/Courses/GAMES102_2020/default.html

函数 (Function)

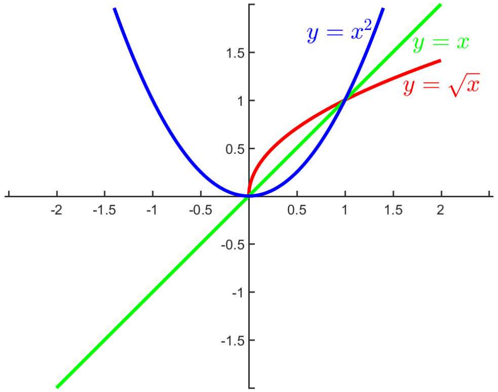
- 非空实数集之间的映射称为（一元）函数$y = f(x)$，或变换
- 函数的图像（函数的可视化）：所有有序对$(x, f(x))$组成的集合



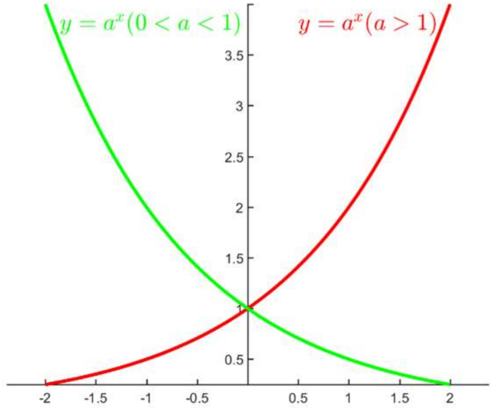
$f: R^1 \to R^1$

一元函数

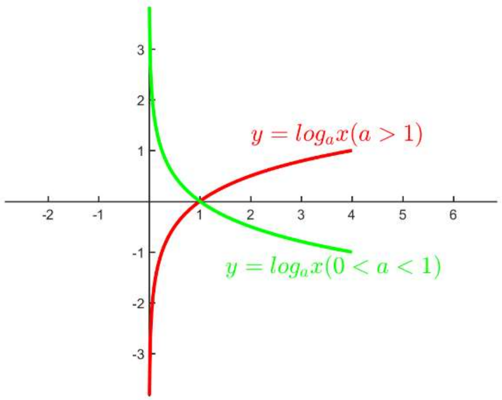
- 有哪些函数？
  - 幂函数
  - 三角函数
  - 对数函数
  - 指数函数
  - 三角函数
  - 反三角函数
  - …



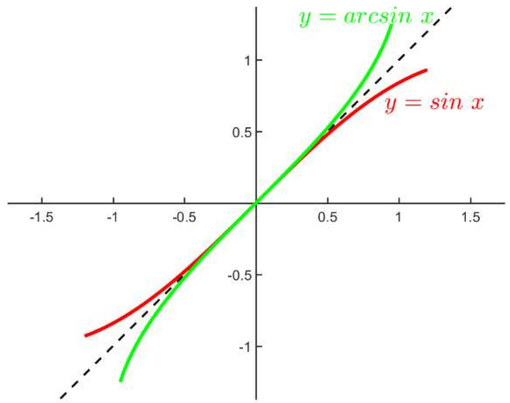
幂函数



指数函数



对数函数



(反)三角函数

函数的集合（函数空间）

- 用若干简单函数（“基函数”）线性组合张成一个函数空间
  - $L = span\{f_1, f_2, \dots, f_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \mid a_i \in R\}$
  - 每个函数就表达（对应）为n个实数，即系数向量$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

幂基 $\{x^k, k = 0,1,\dots,n\}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k x^k$$

多项式函数空间

三角函数基

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

三角函数空间

空间的完备性：这个函数空间是否可以表示（逼近）任意函数？

赋范空间

- 内积诱导范数、距离
  - $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$
- 度量空间：可度量函数之间的距离
  - *Lp*范数
- 赋范空间+完备性=巴拿赫空间
- 内积空间（无限维）+完备性=希尔伯特空间

万能逼近定理：Weierstrass逼近定理

- 定理1：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近
- 定理2：闭区间上周期为2π的连续函数可用三角函数级数一致逼近

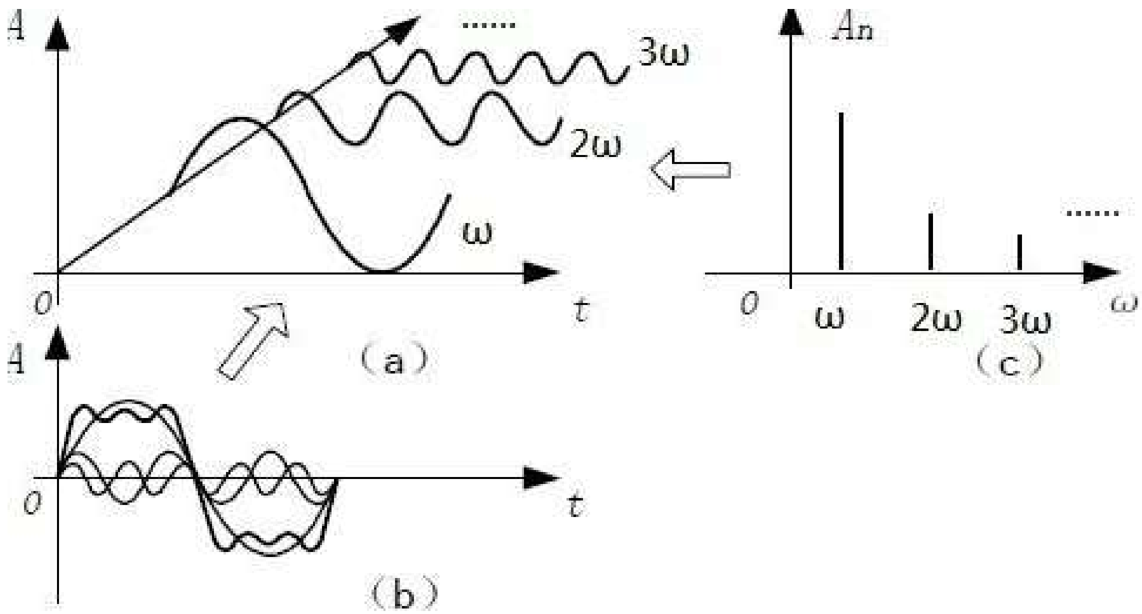
对 $[a,b]$上的任意连续函数g，及任意给定的$\varepsilon > 0$，必存在n次代数多项式$f(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k x^k$，使得

$$\min_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

傅里叶级数

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)]$$

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(n\omega t + \psi_n)}$$



更复杂的函数：函数复合

$$\overbrace{x \xrightarrow{f_0} x^1 \xrightarrow{f_1} x^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x^k \xrightarrow{f_k} y}^{f}$$

$$f = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0$$

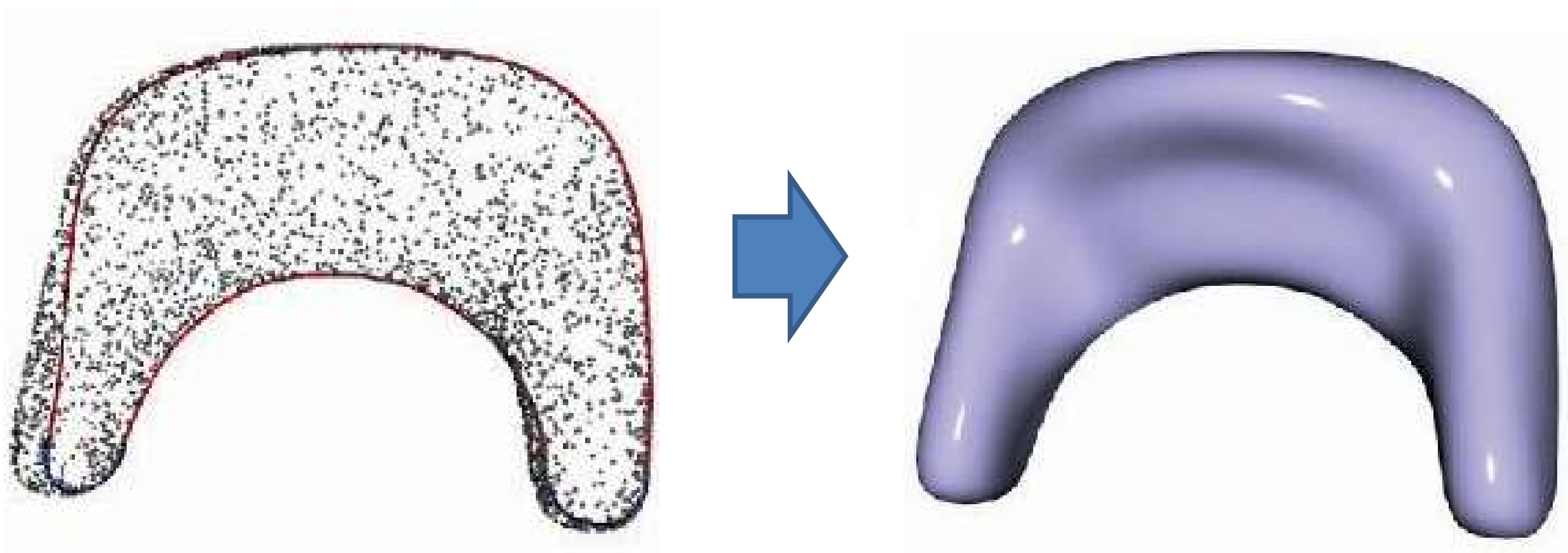
$$\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} \qquad f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$$

问题：如何求满足要求的函数？

- 大部分的实际应用问题
  - 可建模为：找一个映射/变换/函数
  - 输入不一样、变量不一样、维数不一样
- 如何找函数的三步曲：
  - 到哪找？
    - 确定某个函数集合/空间
  - 找哪个？
    - 度量哪个函数是好的/“最好”的
  - 怎么找？
    - 求解或优化：不同的优化方法与技巧，既要快、又要好…
- 【注】这里先暂时限定为单变量的函数形式

曲线/曲面拟合问题

- 输入：一些型值（采样）点集
- 输出：一条拟合这些点集的曲线/曲面

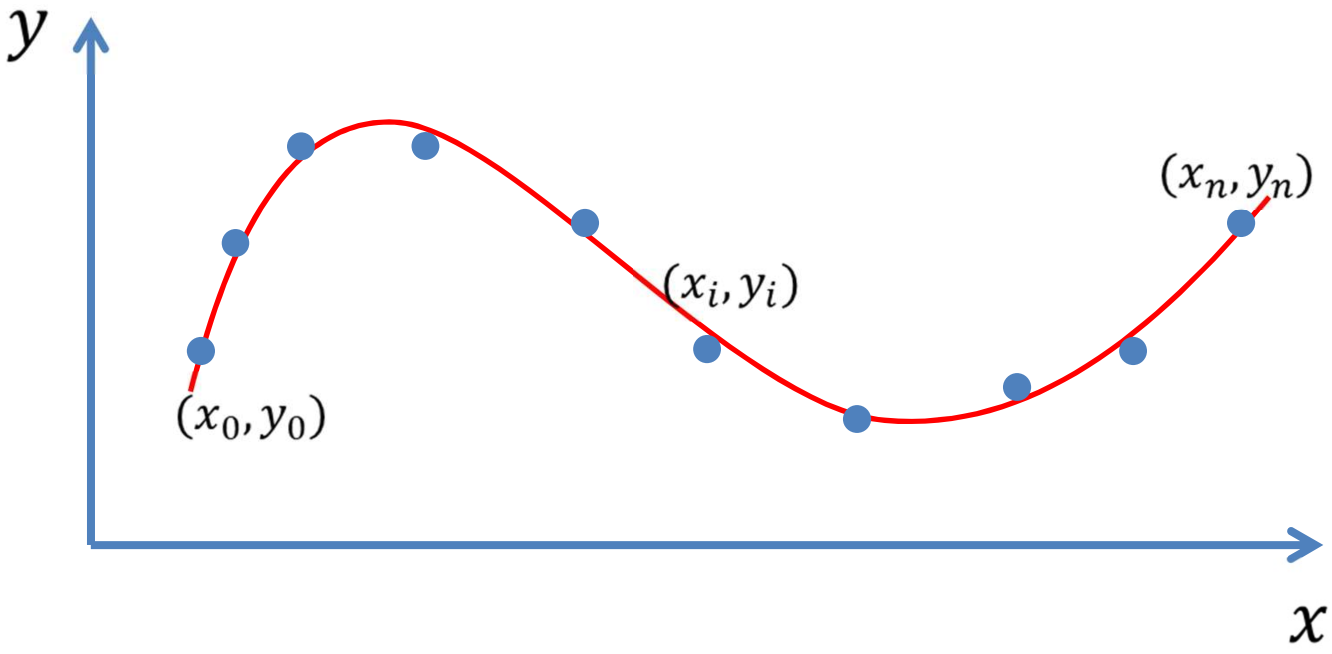


采样点云　　光滑曲面

数据拟合

拟合(Fitting)问题

- 输入：一些观察的数据点
- 输出：反映这些数据规律的函数 $y = f(x)$



$$x \in R^1, y \in R^1$$

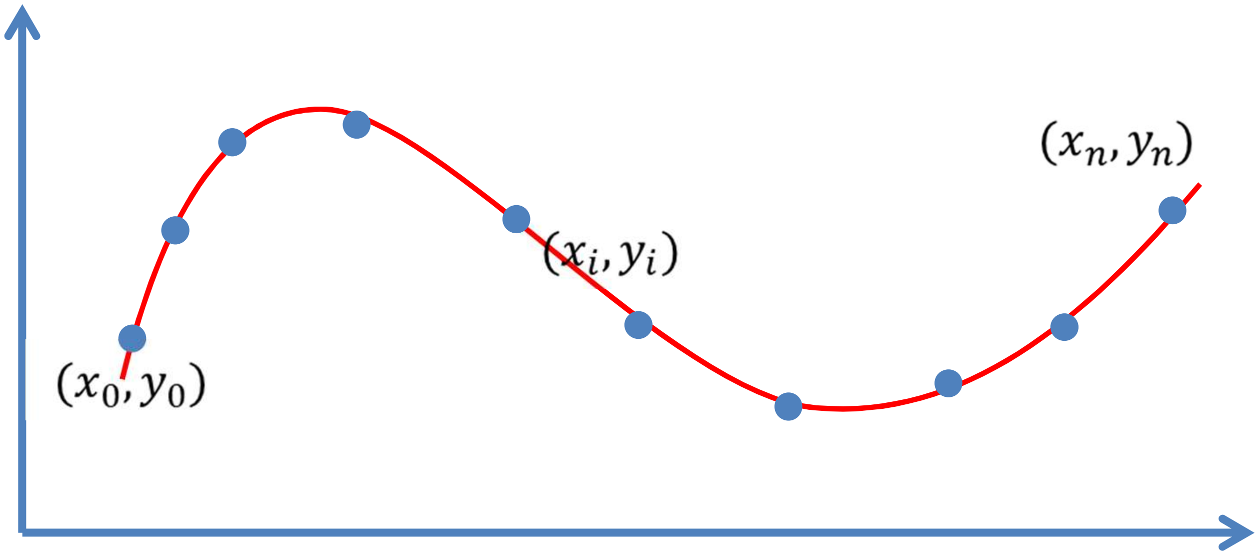
1. 到哪找？

- 选择一个函数空间
  - 线性函数空间$A = span\{B_0(x), \dots, B_n(x)\}$
    - 多项式函数$span\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
    - RBF函数
    - 三角函数
- 函数表达为
  - $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k(x)$
  - 求$n+1$个系数$(a_0, \dots, a_n)$

待定系数

2. 找哪个？

- 目标1：函数经过每个数据点（**插值**）
  - $y_i = f(x_i), i = 0,1, \ldots, n$



3. 怎么找？

- 目标1：每个数据点都要插值（零误差）
  - $y_i = f(x_i), i = 0,1,\ldots,n$
- 联立，求解线性方程组：
  - $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k(x_i) = y_i, i = 0,1,\ldots,n$
    - 求解$(n+1)\times(n+1)$线性方程组
    - n次Langrange插值多项式
  - 病态问题：系数矩阵条件数高时，求解不稳定

Lagrange插值函数

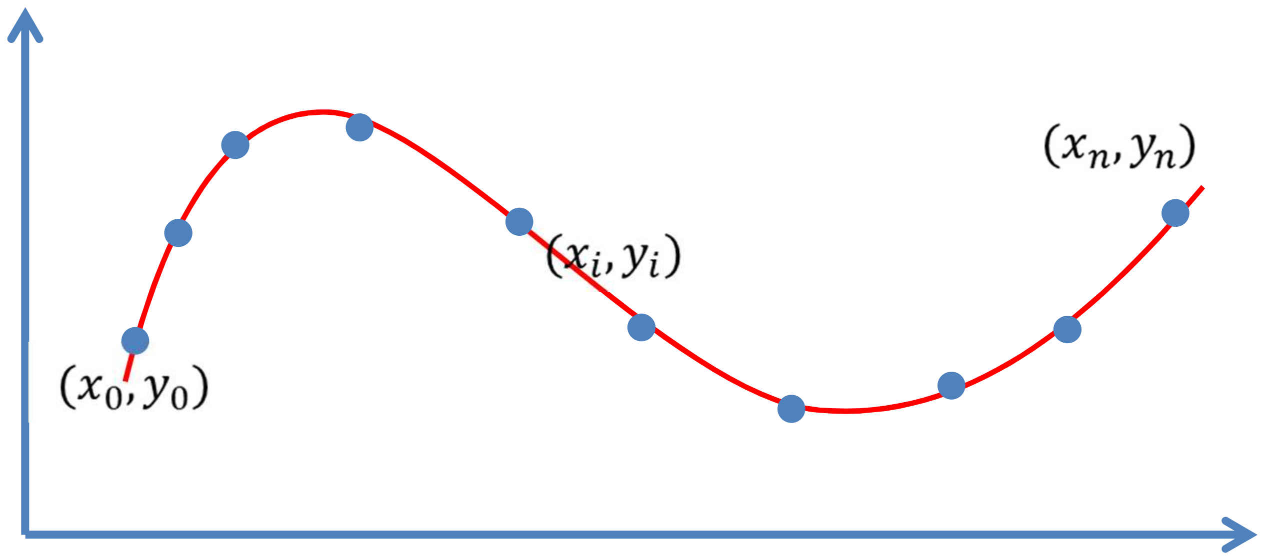
- 插值n+1个点、次数不超过n的多项式是存在而且是唯一的
  - （ n+1个变量，n+1个方程）

$$p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

插值函数的自由度 ＝ 未知量个数 － 已知量个数

2-2. 找哪个？

- 目标2：函数尽量靠近数据点（逼近）
  - $min \sum_{i=0}^{n}(y_i - f(x_i))^2$



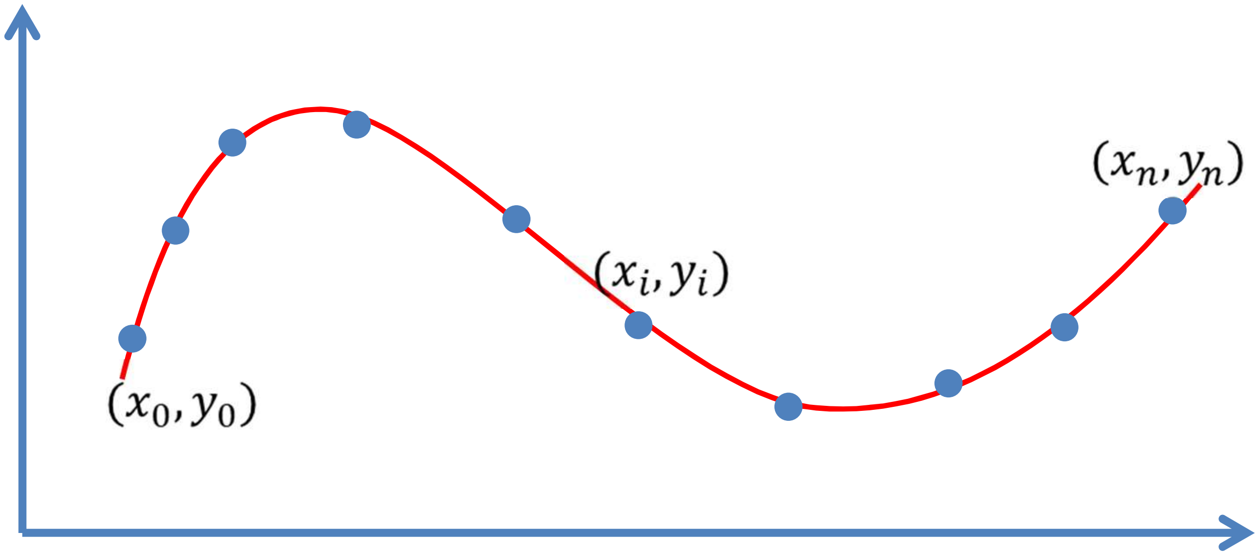
3-2. 怎么找？

- 目标2：函数尽量靠近数据点（逼近）
  - $\min \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2$
- 对各系数求导，得法方程（线性方程组）
  - $AX = b$

最小二乘法

- 问题：
  - 点多，系数少？
  - 点少，系数多？

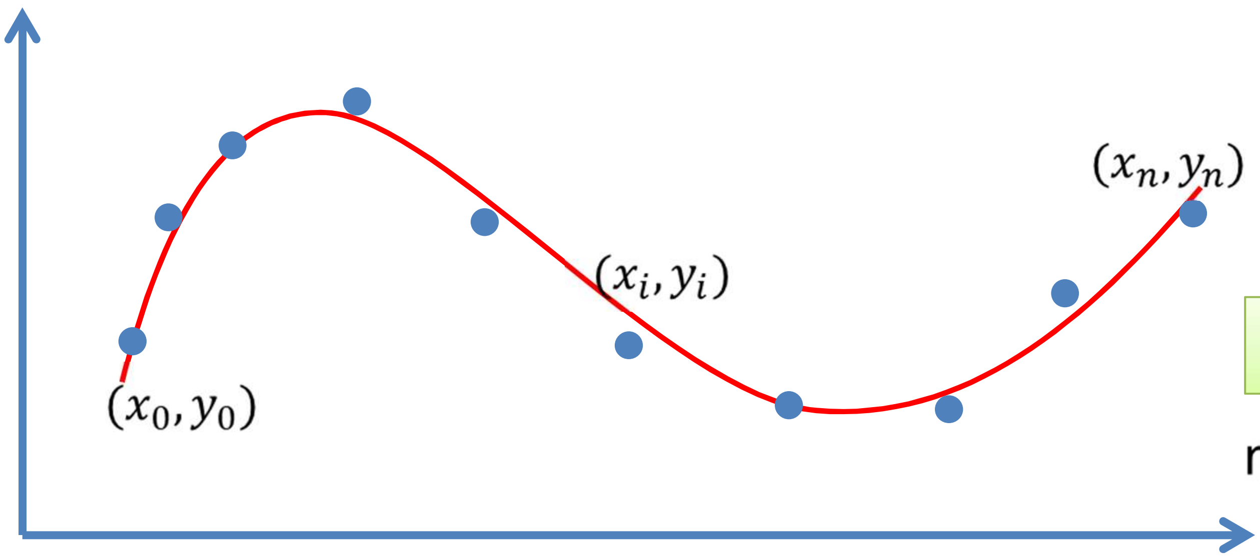
Recap：拟合--插值或逼近



零误差

插值

$y_i = f(x_i)$



最小平方误差

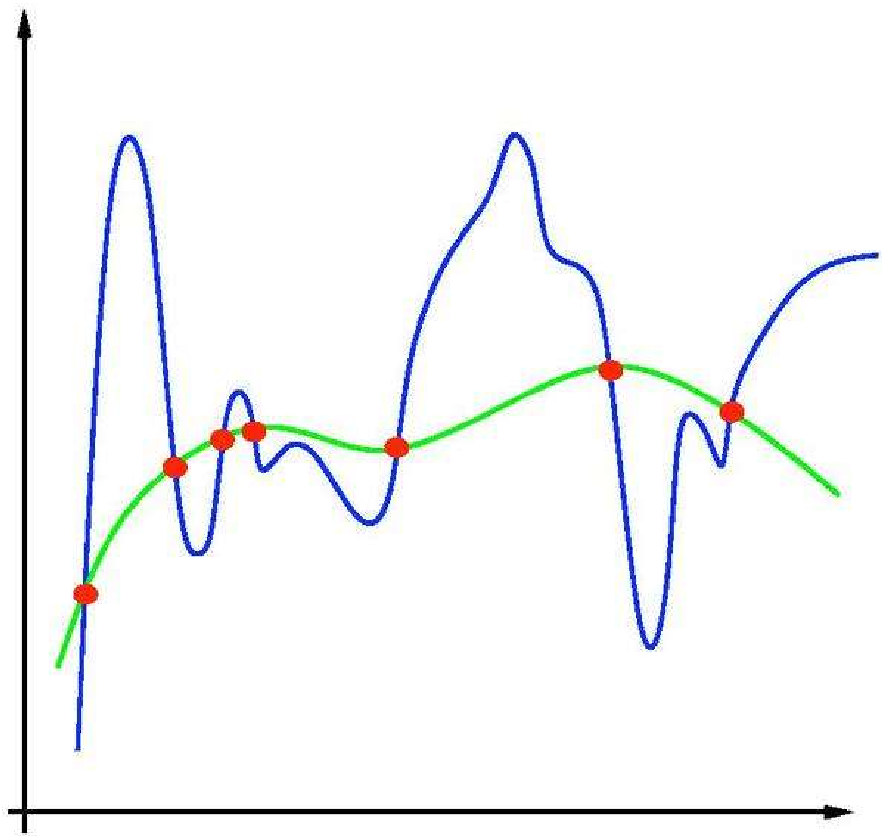
（最小二乘拟合）

逼近

$\min \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2$

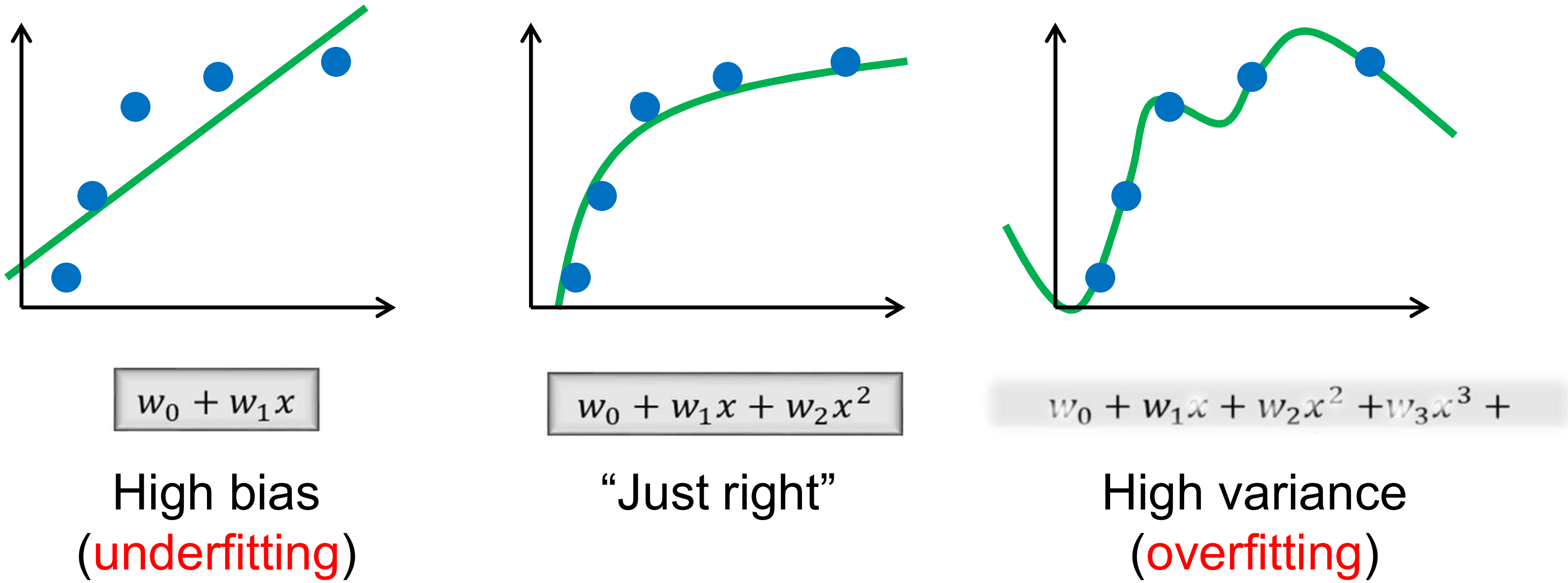
Overfitting（过拟合）

- 误差为0，但是拟合的函数并无使用价值！



欠拟合或过拟合

- 如何选择合适的基函数？



- 需要根据不同的应用与需求，不断尝试（不断"调参"）

避免过拟合的常用方法

$$y = \sum_{i=0}^{n} w_i B_i(x)$$

- 数据去噪
  - 剔除训练样本中噪声
- 数据增广
  - 增加样本数，或者增加样本的代表性和多样性
- 模型简化
  - 预测模型过于复杂，拟合了训练样本中的噪声
  - 选用更简单的模型，或者对模型进行裁剪
- 正则约束
  - 适当的正则项，比如方差正则项、稀疏正则项

岭回归正则项

- 选择一个函数空间
  - 基函数的线性表达 $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i B_i(x)$$

- 最小二乘拟合

$$\min_W \|Y - XW\|^2$$

- Ridge regression （岭回归）

$$\min_W \|Y - XW\|^2 + \mu \boxed{\|W\|_2^2}$$

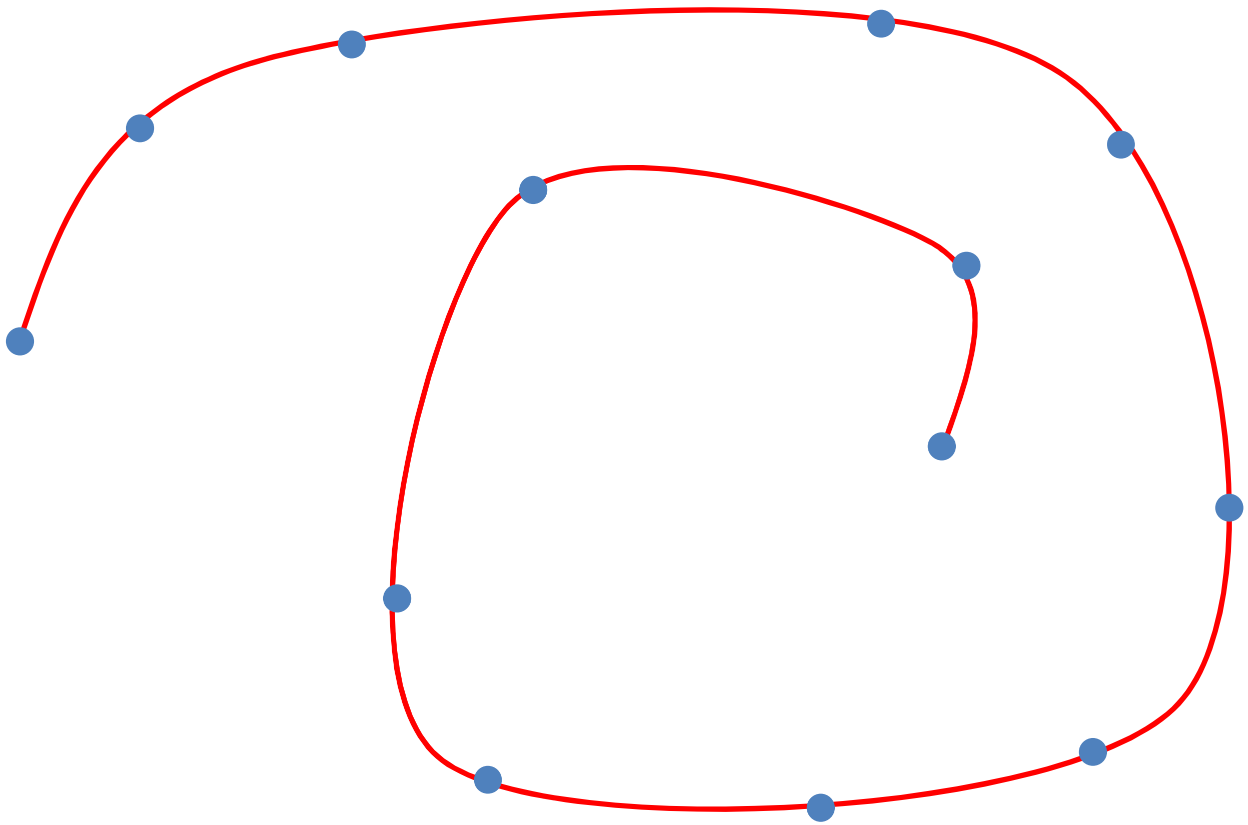
稀疏学习：稀疏正则化

- 冗余基函数（过完备）
- 通过优化来选择合适的基函数
  - 系数向量的L_0模（ 非0元素个数）尽量小
  - 挑选（“学习”）出合适的基函数

$$\min_{\alpha}\|Y-XW\|^2+\mu\|W\|_0$$

$$\min_{\alpha}\|Y-XW\|^2,\quad \text{s.t.}\ \|W\|_0\le\beta$$

思考：非函数型的曲线拟合？



求拟合函数：应用驱动

- 大部分的实际应用问题
  - 可建模为：找一个映射/变换/函数
  - 输入不一样、变量不一样、维数不一样
- 三步曲方法论：
  - 到哪找？
    - 确定某个函数集合/空间
  - 找哪个？
    - 度量哪个函数是好的/“最好”的
  - 怎么找？
    - 求解或优化：不同的优化方法与技巧，既要快、又要好…

数据拟合的方法论

- 到哪找?
  - 确定函数的表达形式（函数集、空间）$L = span\{b_0(x), \dots, b_n(x)\}$
  - 待定基函数的组合系数（求解变量）$f_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_i b_i(x)$

f由待定系数$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$确定

- 找哪个?
  - 优化模型（最小化问题）
    - 能量项 = 误差项 + 正则项
  - 统计模型、规划模型...
- 怎么找?
  - 求解误差函数的驻点（导数为0之处）
  - 转化为系数的方程组
    - 如果是欠定的（有无穷多解），则修正模型
      - 改进/增加各种正则项：Lasso、岭回归、稀疏正则项...
      - 返回修改模型

1. 多项式插值

多项式插值定理

定理：若 x_i 两两不同，则对任意给定的 y_i，存在唯一的次数至多是 n 次的多项式 p_n，使得 $p_n(x_i) = y_i \ i = 0, \cdots, n$。

证明：在幂基 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 下待定多项式 p 的形式为：

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

由插值条件 $p(x_i) = y_i, i = 0, \cdots, n$，得到如下方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

如果基函数选取不一样，方程组的系数矩阵不同

系数矩阵为 **Vandermonde** 矩阵，其行列式非零，因此方程组有唯一解。

技巧1：构造插值问题的通用解

- 构造插值问题的通用解
  - 给定$n+1$个点$\{(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)\}$，寻找一组次数为$n$的多项式基函数$l_i$使得
$$l_i(x_j)=\begin{cases}1,若i=j\\0,若i\neq j\end{cases}$$
  - 插值问题的解为：
$$P(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

一般形式

- 怎么计算多项式$l_i(x)$?
  - n阶多项式，且有以下n个根

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

  - 故可表示为

$$\begin{aligned} &l_i(x) \\ &= C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \\ &= C_i\prod_{j\neq i}(x-x_j) \end{aligned}$$

  - 由$l_i(x_i)=1$可得

$$1 = C_i\prod_{j\neq i}(x_i-x_j) \Rightarrow C_i = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

技巧1：构造插值问题的通用解

- 最终多项式基函数为

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

- 多项式$l_i(x)$被称为拉格朗日多项式

技巧2：更方便的求解表达

- Newton插值：具有相同“导数”（差商）的多项式构造（*n*阶Taylor展开）

定义:

一阶差商:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

k 阶差商:

设 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 互不相同，$f(x)$ 关于 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 的 k 阶差商为:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

所以 Newton **插值多项式**表示为:

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

多项式插值存在的问题

- 系统矩阵稠密
- 依赖于基函数选取，矩阵可能病态，导致难于求解（求逆）

Courtesy of Renjie Chen

病态矩阵示例

- 考虑二元方程组
  - 解为(1,1)

$$\begin{aligned} x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\ 0.667x_1 + 0.333x_2 &= 1 \end{aligned}$$

- 对第二个方程右边项扰动0.001
  - 解为$(0,3)$

$$\begin{aligned} x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\ 0.667x_1 + 0.333x_2 &= 0.999 \end{aligned}$$

- 对矩阵系数进行扰动
  - 解为$(2,-1)$

$$\begin{aligned} x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\ 0.667x_1 + 0.334x_2 &= 1 \end{aligned}$$

病态问题

- 输入数据的细微变化导致输出(解)的剧烈变化

- 将线性方程看成直线（超平面）
  - 当系统病态时，直线变为近似平行
  - 求解（即直线求交）变得困难、不精确

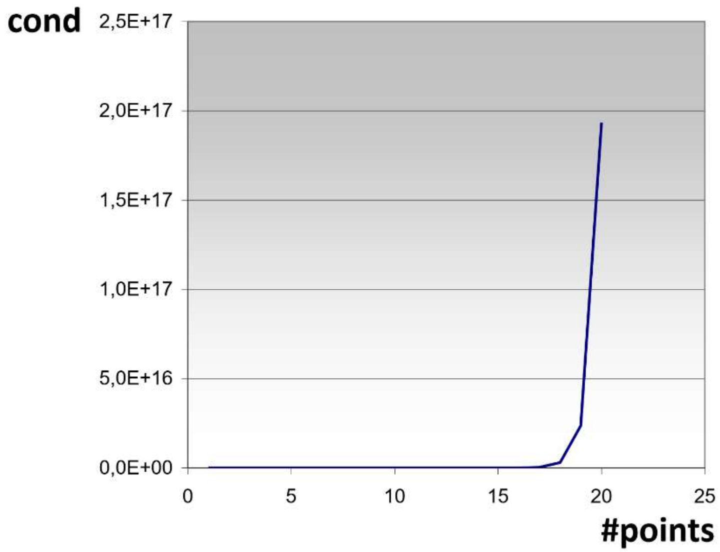
矩阵条件数

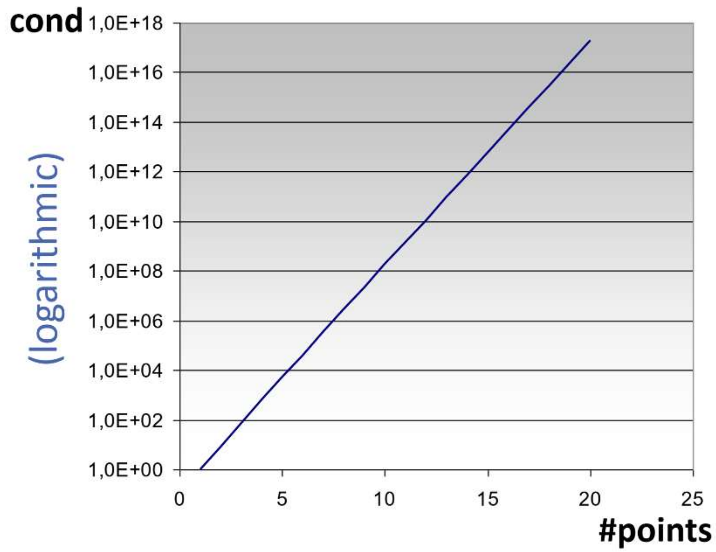
$$\kappa_2(A) = \frac{\max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

- 等于最大特征值和最小特征值之间比例
- 条件数大意味着基元之间有太多相关性

矩阵条件数

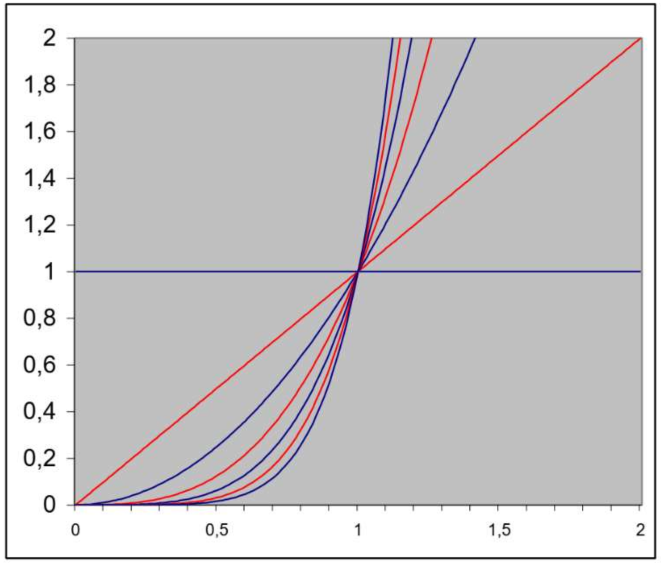
- 多项式插值问题是病态的
  - 对于等距分布的数据点x_i，范德蒙矩阵的条件数随着数据点数n呈指数级增长 （多项式的最高次数为$n-1$）





为什么？

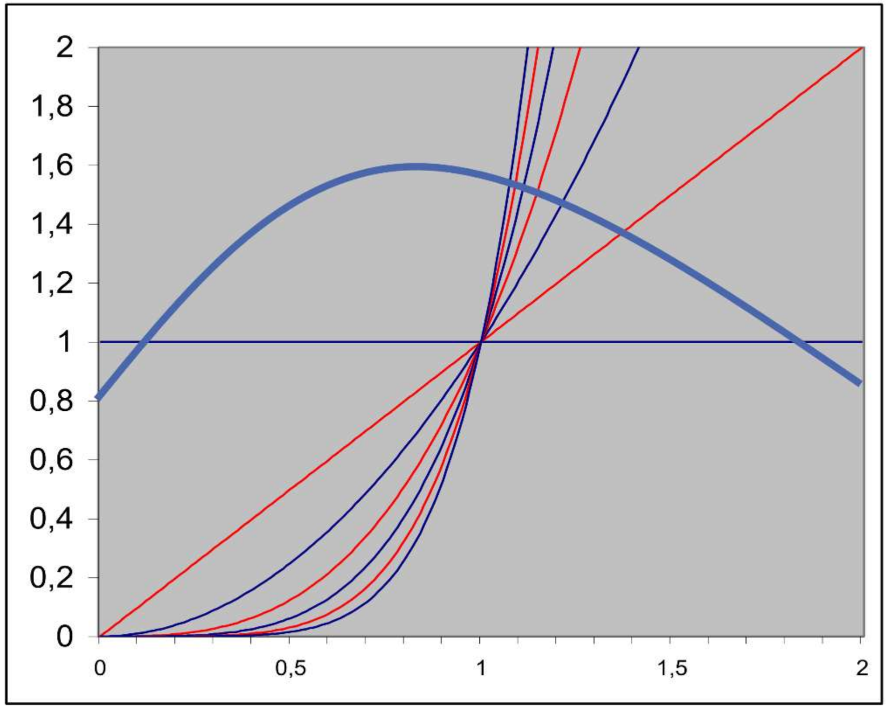
- 幂（单项式）函数基
  - 幂函数之间差别随着次数增加而减小
  - 不同幂函数之间唯一差别为增长速度(x^i比x^{i-1}增长快)



幂(单项式) 函数

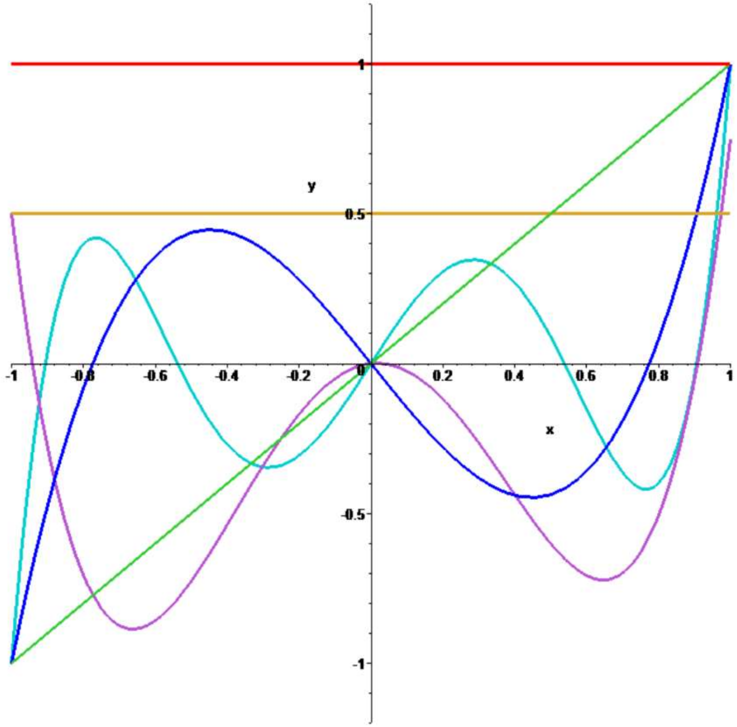
函数互相抵消

- 单项式：
  - 从左往右
  - 首先常函数1主宰
  - 接着x增长最快
  - 接着x^2增长最快
  - 接着x^3增长最快
  - …
- 趋势
  - 好的基函数一般需要系数交替
  - 互相抵消问题

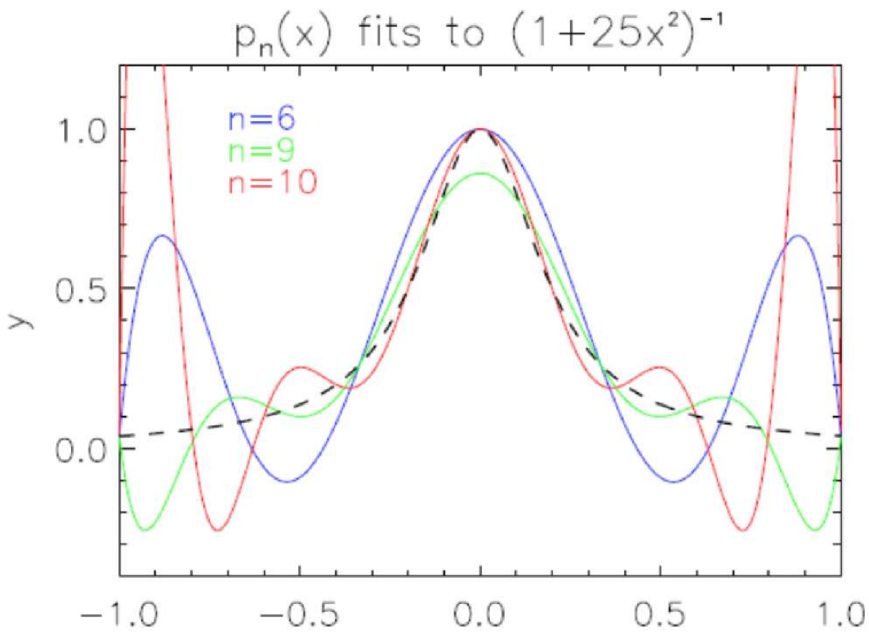


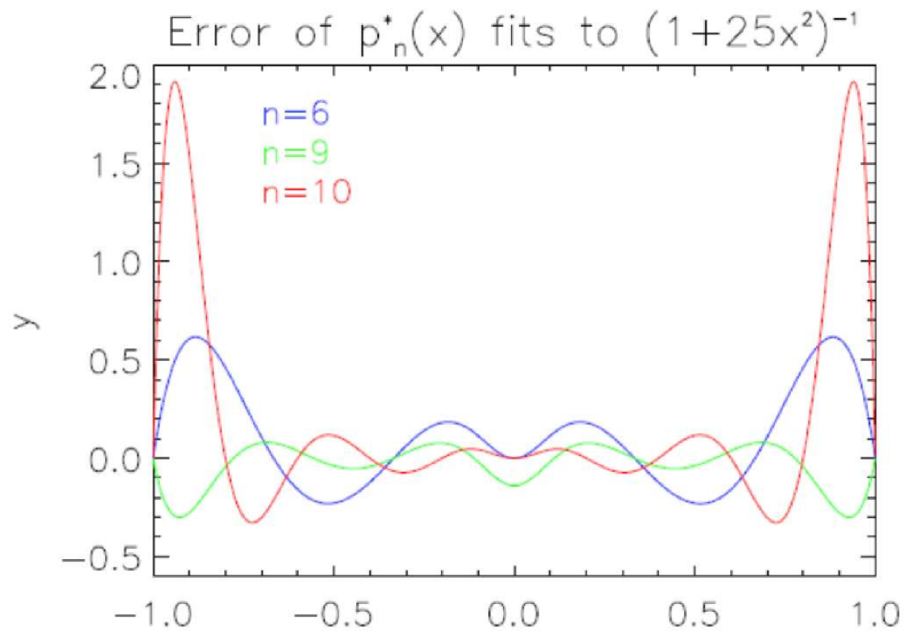
解决方法

- 使用正交多项式基
- 如何获得？
  - Gram-Schmidt正交化



多项式插值结果好吗？





振荡(龙格Runge)现象和对插值点数的高度敏感性

观察$n = 9$(10个数据点)和$n = 10$(11个数据点)的差别

结论

- 多项式插值不稳定
  – 控制点的微小变化可导致完全不同的结果

- 振荡(Runge)现象
  – 多项式随着插值点数(可以是细微)增加而摆动

➡需要更好的基函数来做插值
  – Bernstein基函数？
  – 分片多项式？

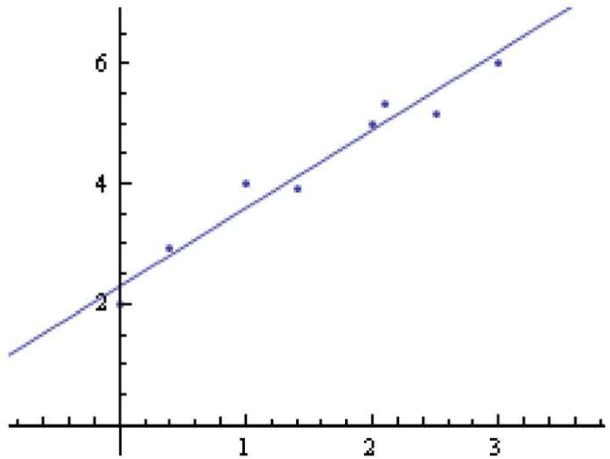
2. 多项式逼近

为什么逼近？

- 数据点含噪声、outliers等
- 更紧凑的表达
- 计算简单、更稳定

最小二乘逼近

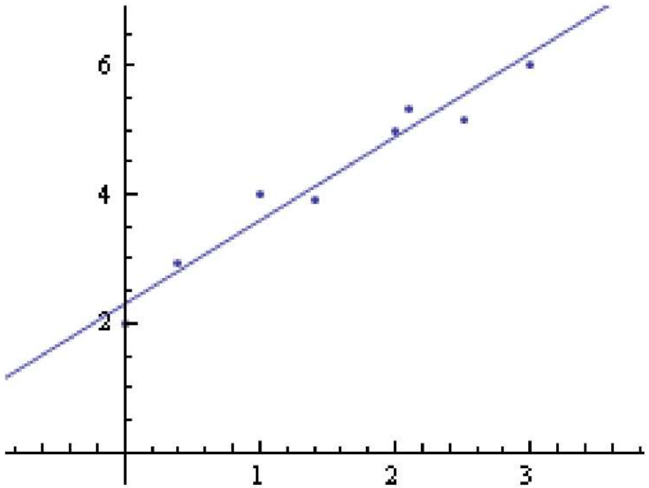
- 逼近问题
  - 给定一组线性无关的连续函数集合$B = \{b_1, \dots b_n\}$和一组结点$\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$，其中$m > n$
  - 在B张成空间中哪个函数$f \in span(B)$对结点逼近最好？
  - 示例：给定一组点，找到最佳逼近的线性函数
  - 怎么定义“最佳逼近”?



最佳逼近的定义

- 最小二乘逼近

$$\underset{f\in span(B)}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{m}\left(f\left(x_j\right)-y_j\right)^2$$



$$\sum_{j=1}^{m}\left(f\left(x_j\right)-y_j\right)^2=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\left(x_j\right)-y_j\right)^2$$

$$=(M\lambda-y)^T(M\lambda-y)$$

$$=\lambda^T M^T M\lambda-y^T M\lambda-\lambda^T M^T y+y^T y$$

$$=\lambda^T M^T M\lambda-2y^T M\lambda+y^T y$$

$$M=\begin{pmatrix} b_1(x_1) & \dots & b_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1(x_m) & \dots & b_n(x_m) \end{pmatrix}$$

求解

- 关于λ的二次多项式

$$\lambda^T M^T M\lambda - 2y^T M\lambda + y^T y$$

- 法方程
  – 最小解满足

$$M^T M\lambda = M^T \mathrm{y}$$

- 提示
  – 最小化二次目标函数 $x^T Ax + b^T x + c$
  – 充分必要条件: $2Ax = -b$

3. 函数空间及基函数

为什么用多项式？

- 易于计算，表现良好，光滑，…
- 稠密性与完备性：表达能力足够！
  - **魏尔斯特拉斯Weierstrass定理**：令f为闭区间$[a,b]$上任意连续函数，则对任意给定ε，存在n和多项式P_n使得

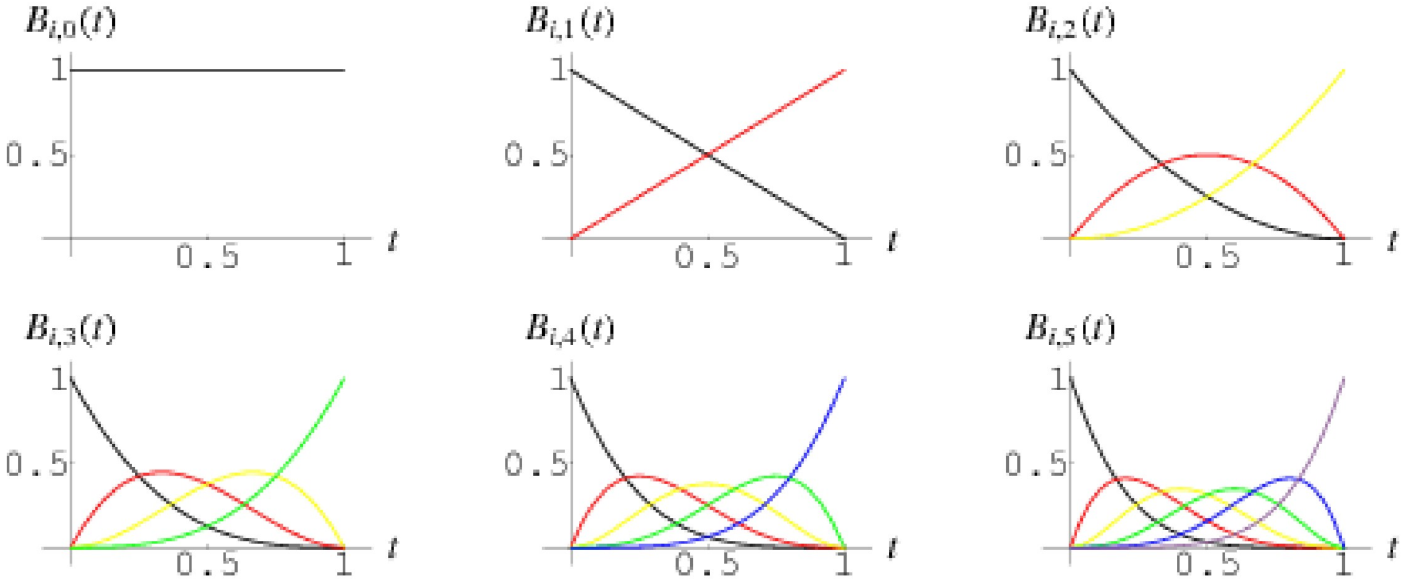
$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$$

  - Weierstrass只证明了存在性，未给出多项式

用Bernstein多项式做逼近

- 伯恩斯坦Bernstein给出了构造性证明（强大!）
  - 对$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$区间上任意连续函数$f(x)$和任意正整数n，以下不等式对所有$x \in [0,1]$成立
    $$|f(x) - B_n(f,x)| < \frac{9}{4} m_{f,n}$$
  - $m_{f,n} = \underset{y_1,y_2\in[0,1]\text{且}|y_1-y_2|<\frac{1}{\sqrt{n}}}{\text{lower upper bound}} |f(y_1) - f(y_2)|$
  - $B_n(f,x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right) b_{n,j}(x)$，其中$x_j$为$[0,1]$上等距采样点
  - $b_{n,j} = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$为**Bernstein多项式**

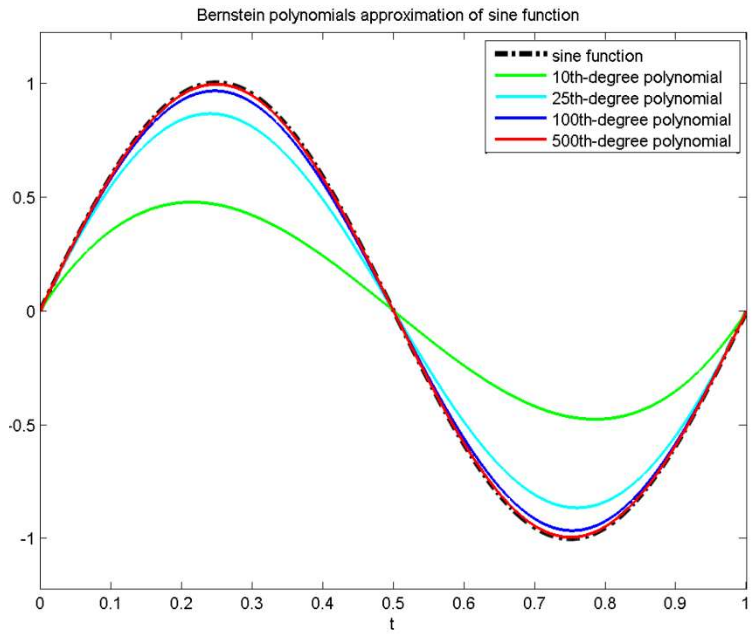
Bernstein多项式



- $b_{0,0}(x) = 1$
- $b_{0,1}(x) = 1 - x, \quad b_{1,1} = x$
- $b_{0,2}(x) = (1-x)^2, \ b_{1,2} = 2x(1-x), \quad b_{2,2} = x^2$
- $b_{0,3}(x) = (1-x)^3, \ b_{1,3} = 3x(1-x)^2, \ b_{2,3} = 3x^2(1-x), \quad b_{3,3} = x^3$
- $b_{0,4}(x) = (1-x)^4, \ b_{1,4} = 4x(1-x)^3, \ b_{2,4} = 6x^2(1-x)^2, \ b_{3,4} = 4x^3(1-x), \quad b_{4,4} = x^4$

用Bernstein多项式做逼近

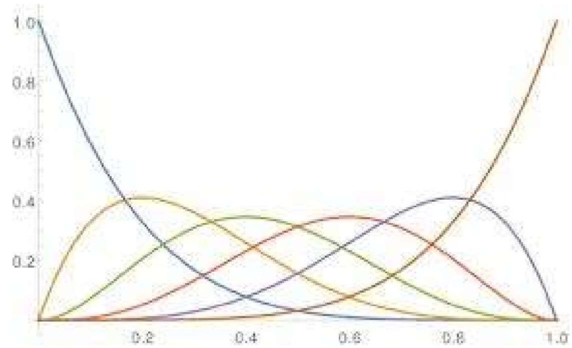
- Bernstein基函数的良好性质：非常好的几何意义！
  - 正性、权性（和为1）→凸包性
  - 变差缩减性
  - 递归线性求解方法
  - 细分性
  - …
- Bernstein多项式逼近示例
  - 逼近结果优秀
  - 需要高阶

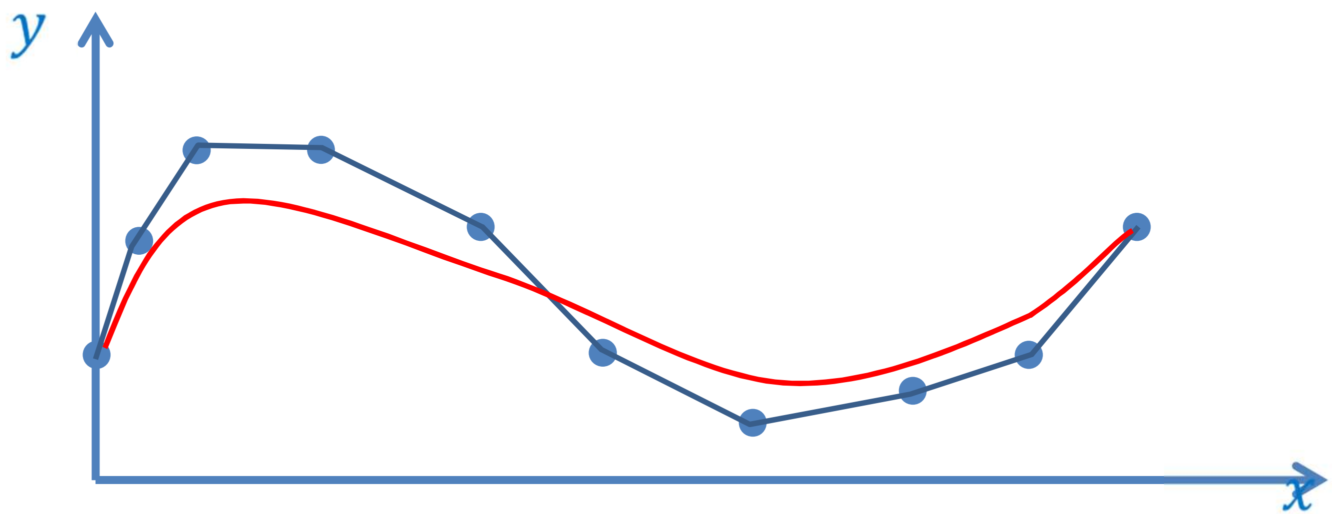


丰富的理论：CAGD课程

关于Bernstein函数…

- $B_n(f,x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,j}(x)$
- 两种观点：
  - 几何观点、代数观点





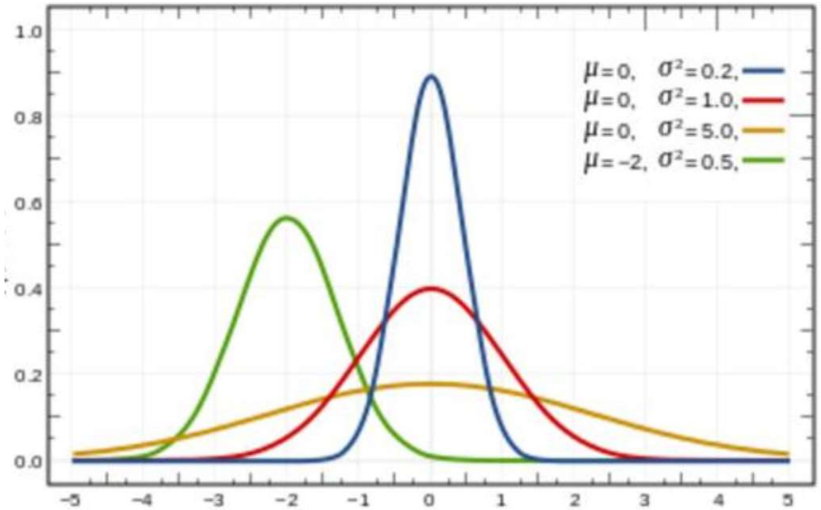
丰富的理论：CAGD课程

4. RBF函数插值/逼近

Gauss函数

- 两个参数：均值μ，方差σ

$$g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- 几何意义：
  - 均值μ：位置
  - 方差σ：支集宽度
- 不同均值和方差的Gauss函数都线性无关
  - 有什么启发？

RBF函数拟合

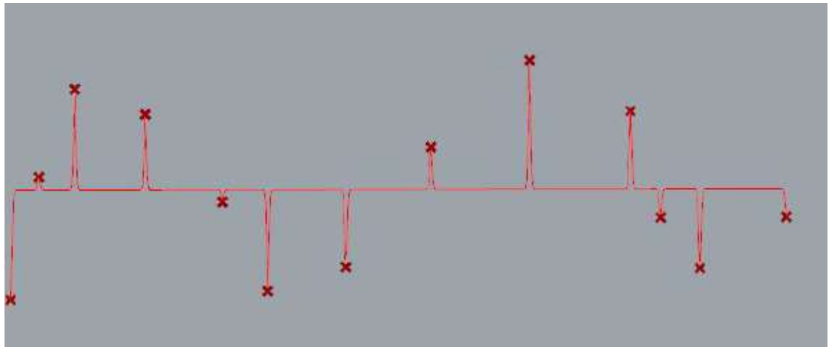
- RBF函数

$$f(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i g_i(x)$$

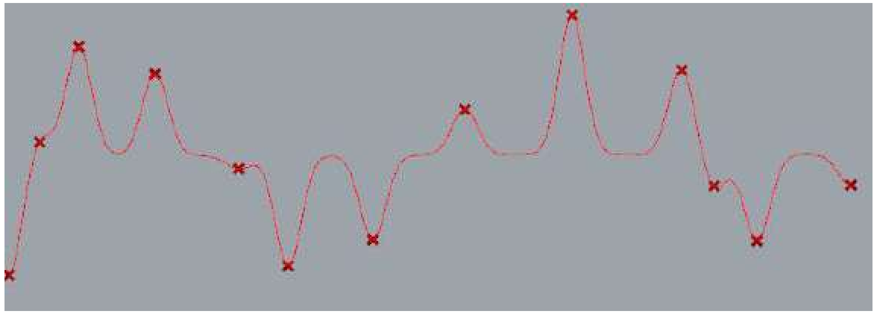
- 方法

- 原因

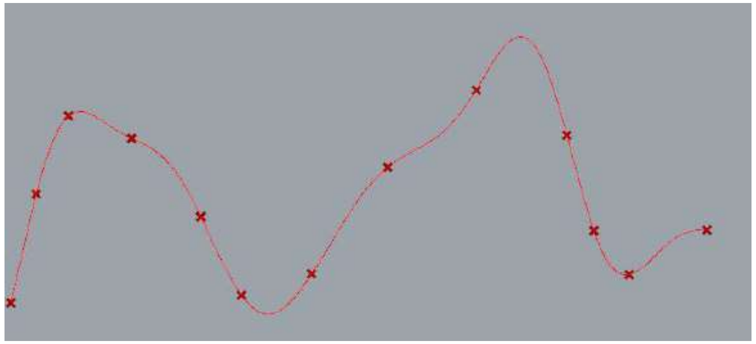
讨论：现象



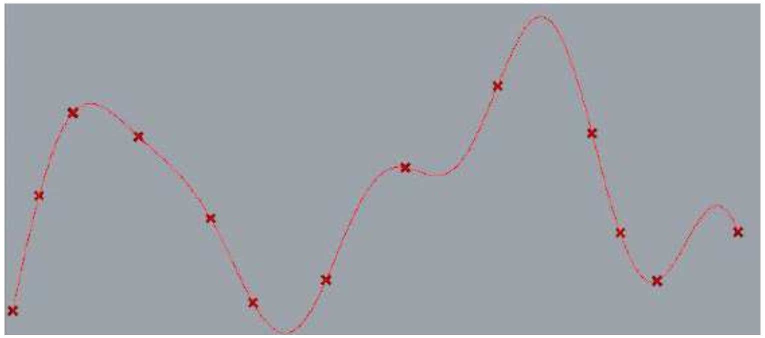
$\sigma = 0.1$



$\sigma = 1$

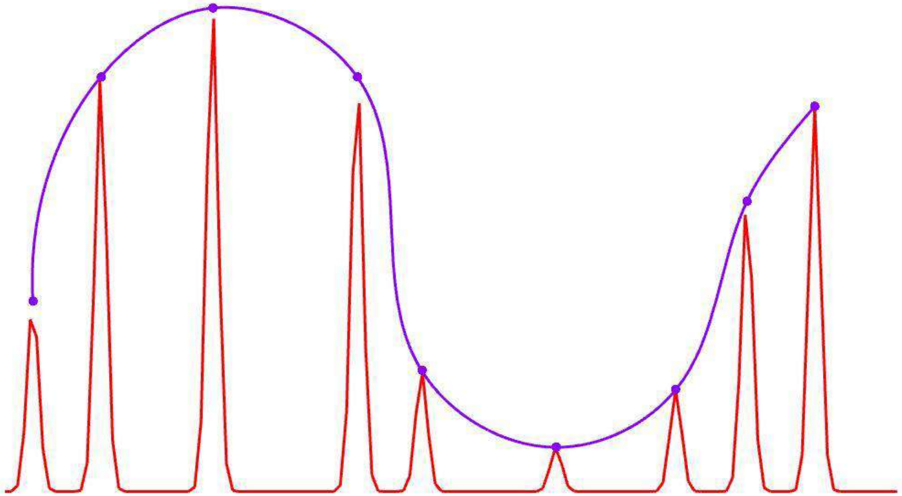


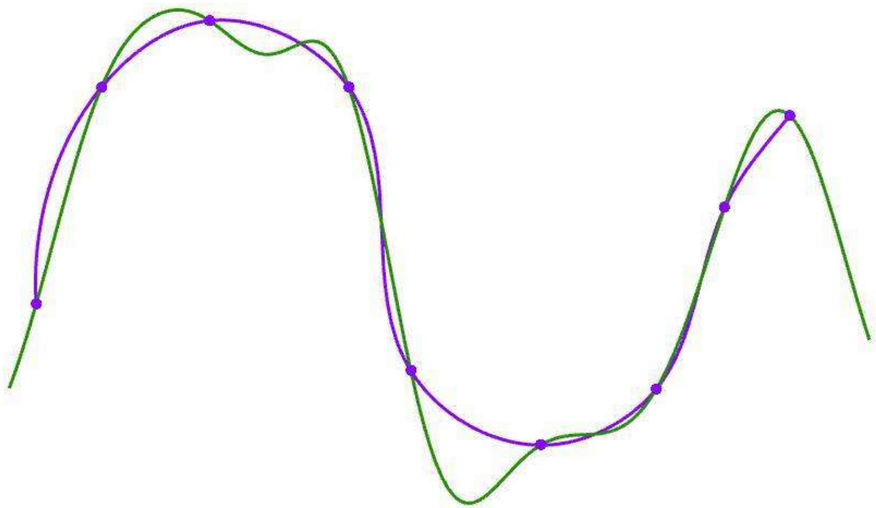
$\sigma = 5$



$\sigma = 10$

讨论：现象



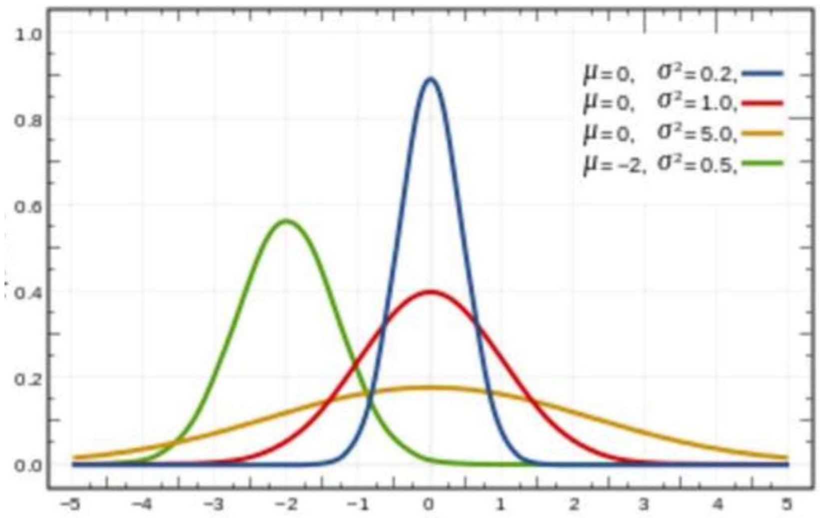


思考：

- 均值μ和方差σ是否可以一起来优化？

$$g_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x)=b_0+\sum_{i=1}^{n}b_i g_i(x)$$



- 问题？

多元函数

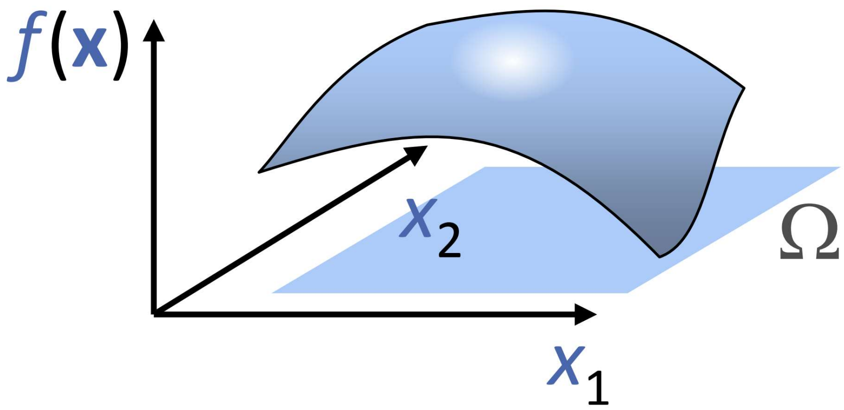
多元函数（多变量）

- 多个变量的函数

$$f: R^n \to R^1 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to y$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 例子：二元函数$z = f(x, y), (x, y) \in [0,1] \times [0,1]$



二元函数的基函数构造

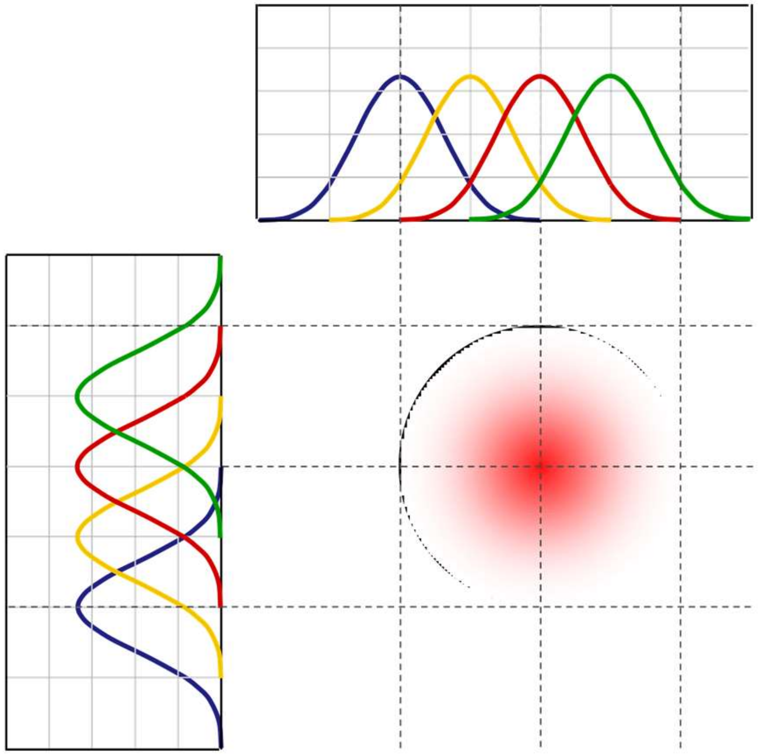
- 方法：张量积形式，即用两个一元函数的基函数的相互乘积来定义
- 比如：二次二元多项式函数$z=f(x,y)$的基函数 $\{1,x,y,x^2,xy,y^2\}$

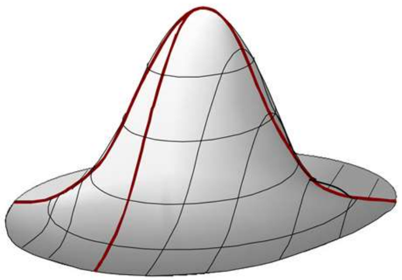
	1	x	x^2
1	1	x	x^2
y	y	xy	x^2y
y^2	y^2	xy^2	x^2y^2

三次张量积多项式

	1	u	u^2	u^3
1	1	u	u^2	u^3
v	v	vu	vu^2	vu^3
v^2	v^2	v^2u	v^2u^2	v^2u^3
v^3	v^3	v^3u	v^3u^2	v^3u^3

三次张量积函数





张量积基函数

	$b_1(u)$	$b_2(u)$	$b_3(u)$	$b_4(u)$
$b_1(v)$	$b_1(v)b_1(u)$	$b_1(v)b_2(u)$	$b_1(v)b_3(u)$	$b_1(v)b_4(u)$
$b_2(v)$	$b_2(v)b_1(u)$	$b_2(v)b_2(u)$	$b_2(v)b_3(u)$	$b_2(v)b_4(u)$
$b_3(v)$	$b_3(v)b_1(u)$	$b_3(v)b_2(u)$	$b_3(v)b_3(u)$	$b_3(v)b_4(u)$
$b_4(v)$	$b_4(v)b_1(u)$	$b_4(v)b_2(u)$	$b_4(v)b_3(u)$	$b_4(v)b_4(u)$

多元函数的张量积定义

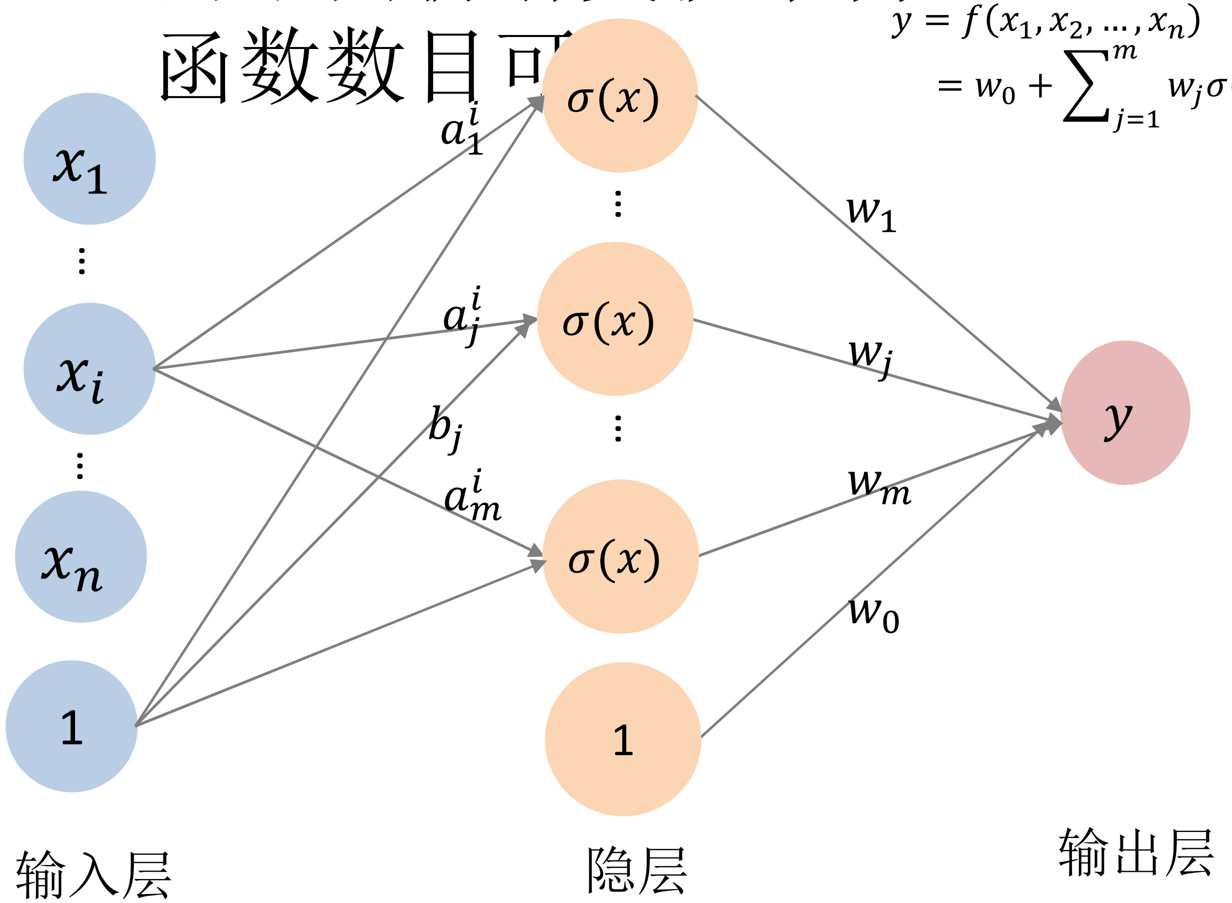
- 优点：定义简单，多个一元基函数的乘积形式
- 不足：
  - 随着维数增加，基函数个数急剧增加，导致变量急剧增加（求解系统规模急剧增加，求解代价大）

	1	x	x^2
1	1	x	x^2
y	y	xy	x^2y
y^2	y^2	xy^2	x^2y^2

多元函数的神经网络表达 $f:\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\to y$

- 用一个单变量函数 $\sigma(x)$ （称为激活函数）的不同仿射变换来构造“基函数”：基函数数目可

$$y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$=w_0+\sum_{j=1}^{m} w_j\sigma(a_j^1x_1+\cdots a_j^ix_i+\cdots+a_j^nx_n+b_j)$$



向量值函数

向量值函数（多个应变量）

- 先看单变量的： $f: R^1 \rightarrow R^m$ $\quad x \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

- 看成多个单变量函数，各个函数独立无关
  - 一般会用同样的基函数（共享基函数）

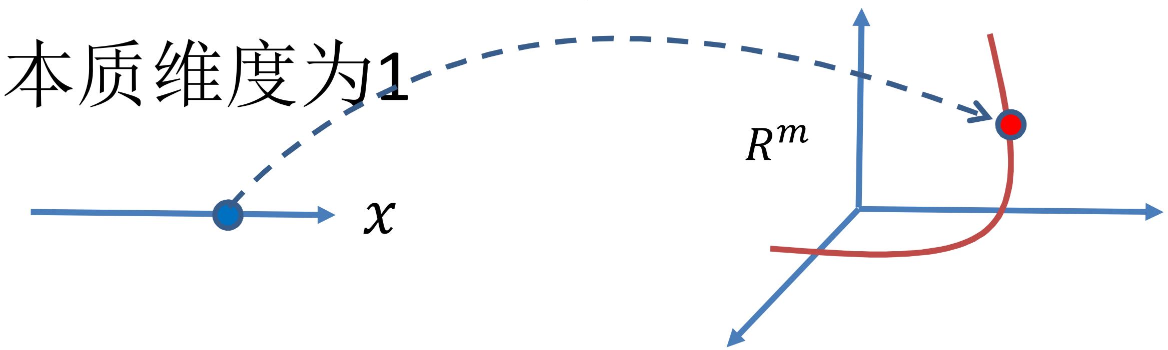
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

向量值函数（多个应变量）

$$f: R^1 \to R^m$$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

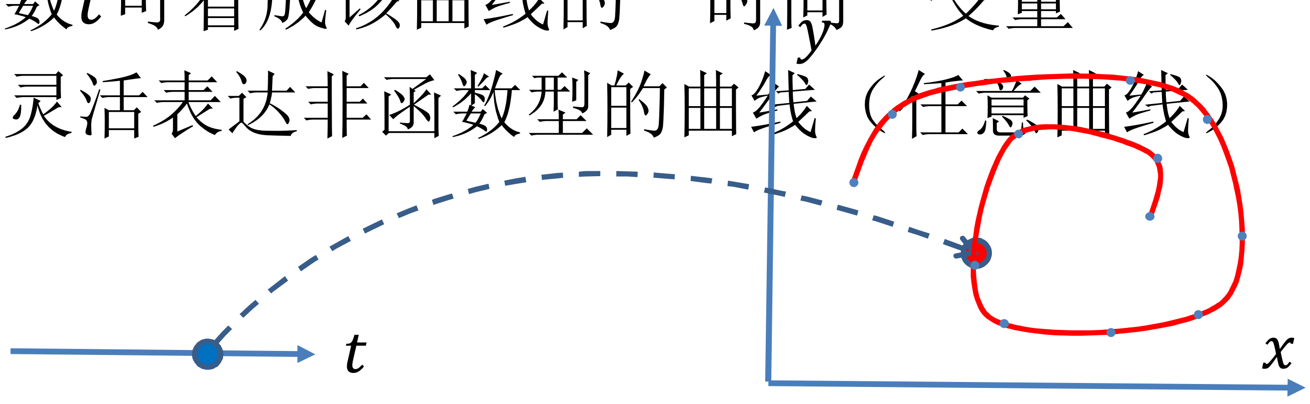
- 几何解释：
  - 一个实数$x \in R^1$映射到m维空间R^m的一个点，轨迹构成R^m的一条“曲线”
  - 本质维度为1



特例：平面参数曲线

$$f: R^1 \to R^2 \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

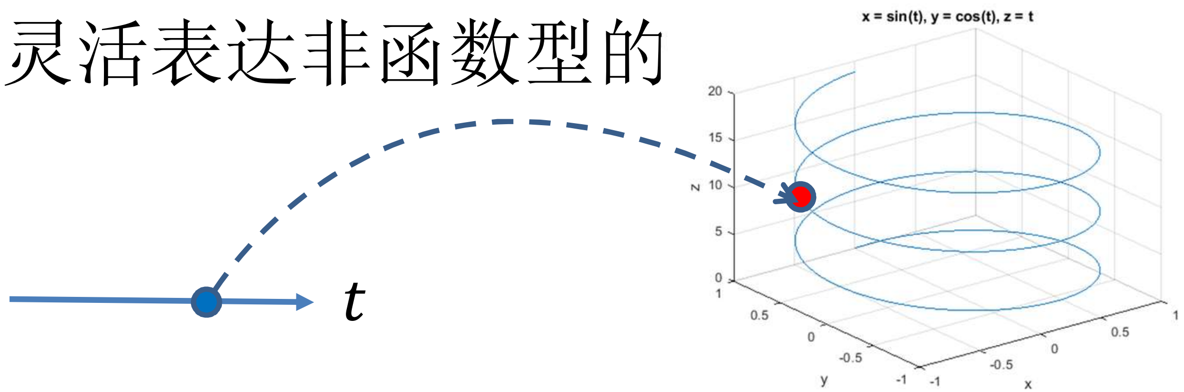
- 几何解释：
  - 一条曲线由一个变量参数t决定，也称为单参数曲线
  - 参数t可看成该曲线的“时间”变量
  - 可灵活表达非函数型的曲线（任意曲线）



特例：空间参数曲线

$$f: R^1 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

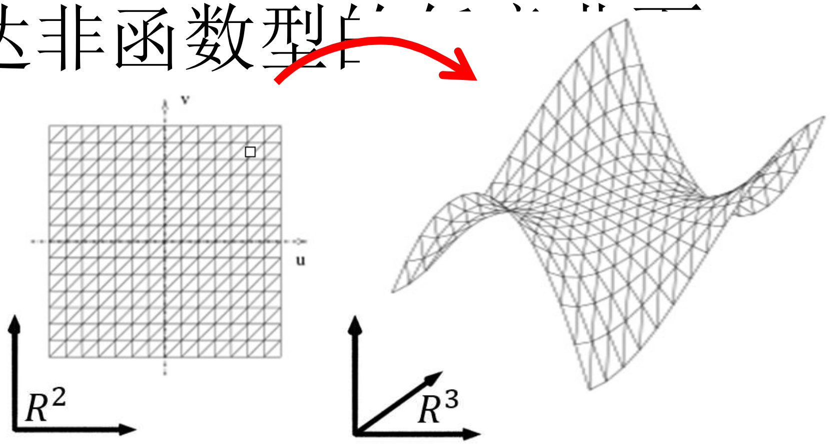
- 几何解释：
  - 一条曲线由一个变量参数t决定，也称为单参数曲线
  - 参数t可看成该曲线的“时间”变量
  - 可灵活表达非函数型的 ）



特例：参数曲面

$$f: R^2 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

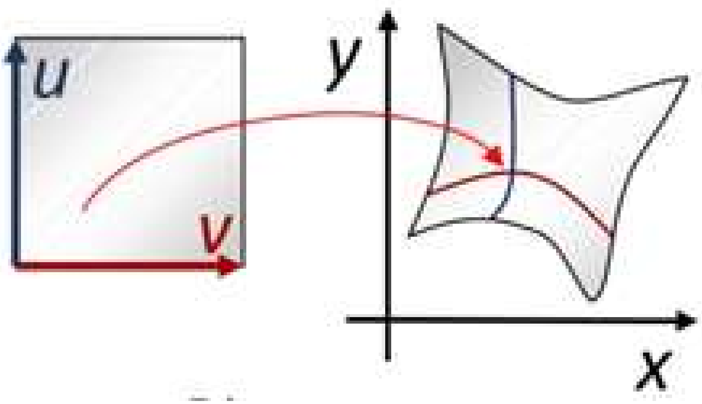
- 几何解释：
  - 一张曲面由两个参数(u,v)决定，也称为双参数曲面
  - 可灵活表达非函数型



特例：二维映射

$$f: R^2 \to R^2 \qquad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

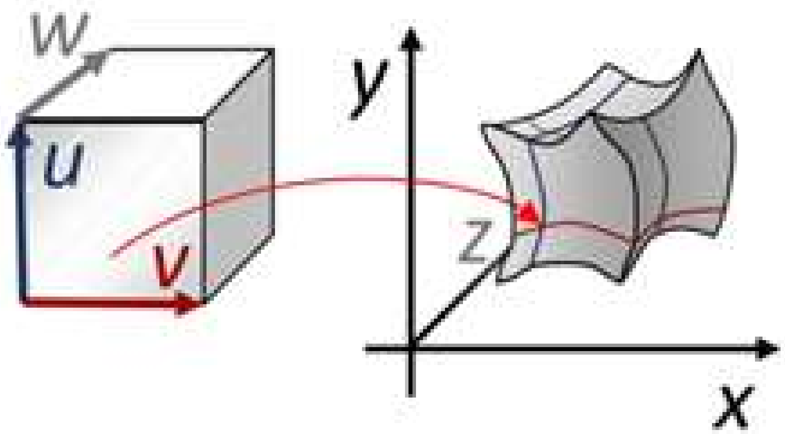
- 几何解释：
  - 二维区域之间的映射
  - 可看成特殊的曲面（第三个维度始终为0）
  - 应用：图像变形



特例：二维映射

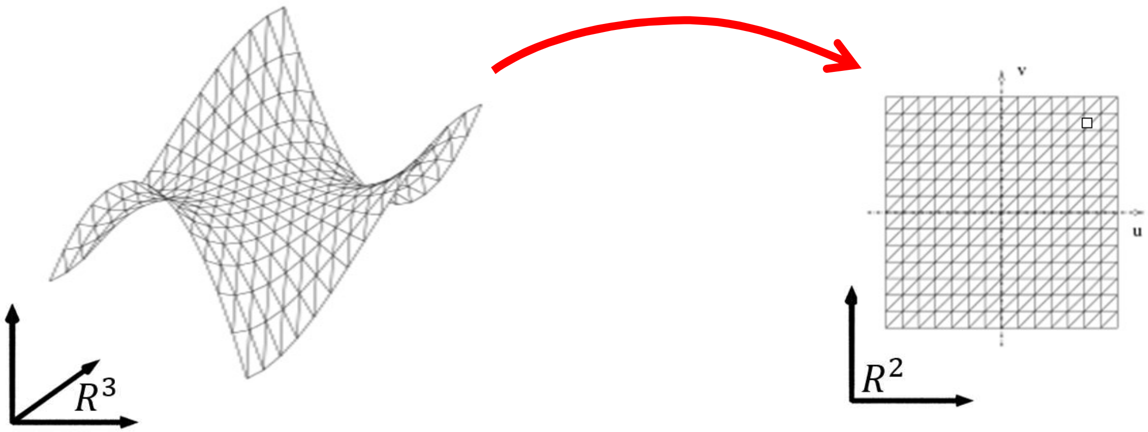
$$f: R^3 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad (u,v,w) \in [0,1]^3$$

- 几何解释：
  - 三维体区域之间的映射
  - 应用：体形变、体参数化



特例：降维映射（低维投影）

$$f: R^3 \to R^2$$



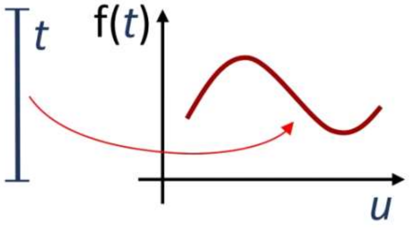
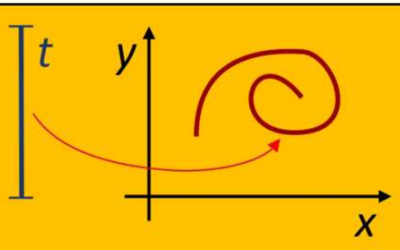
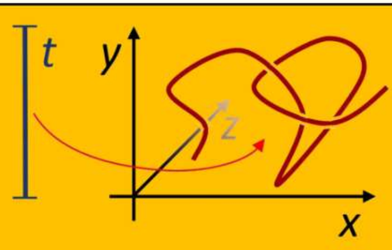
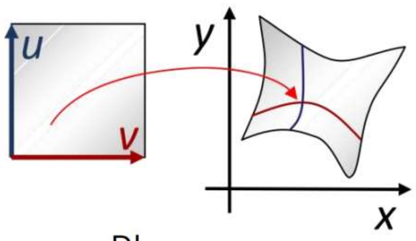
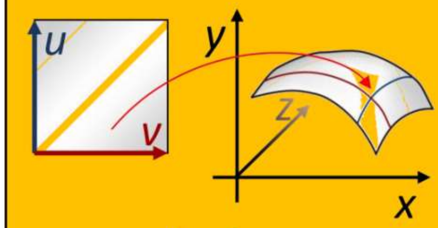
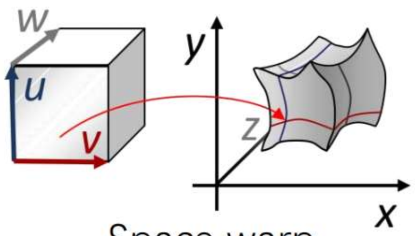
- 降维映射一般有信息丢失
  – 丢失的信息大部分情况下不可逆，即无法恢复

一般映射

$$f: R^n \rightarrow R^m$$

- 如果$n < m$，为低维到高维的映射（高维的超曲面，n维流形曲面），本征维度为n
- 如果$n > m$，为降维映射
  - 一般信息有损失
  - 如果R^n中的点集刚好位于一个m维（或小于m）的流形上，则映射可能是无损的，即可以被恢复的

低维空间之间的函数

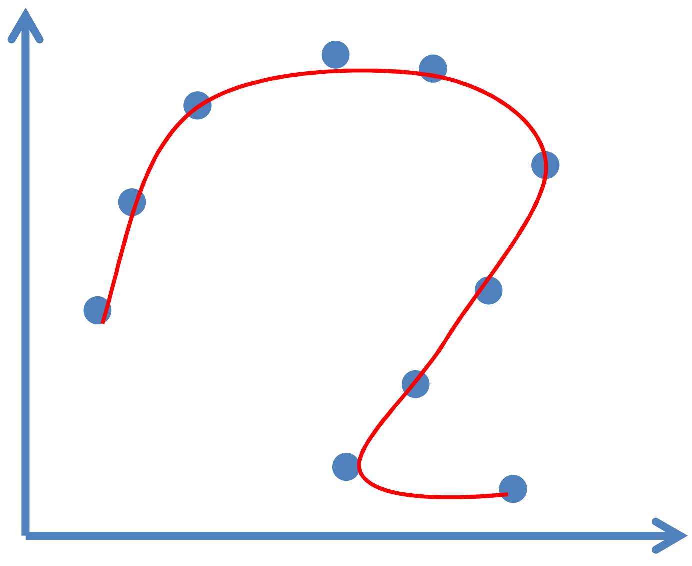
	Output: 1D	Output: 2D	Output: 3D
Input: 1D	 Function graph	 Plane curve	 Space curve
Input: 2D		 Plane warp	 Surface
Input: 3D			 Space warp

曲线拟合

曲线拟合问题

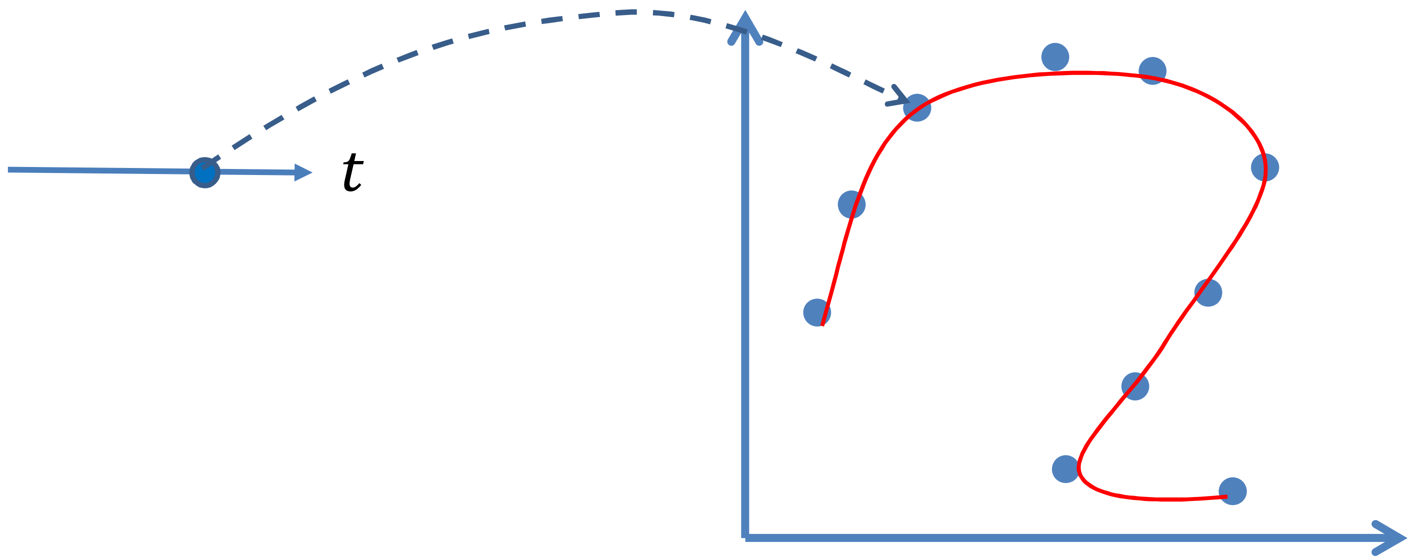
- 输入：给定平面上系列点$(x_i, y_i), i = 1,2, \dots, n$
- 输出：一条参数曲线，拟合这些点

$$f: R^1 \to R^2 \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [0,1]$$



应该怎么做？

曲线拟合问题



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

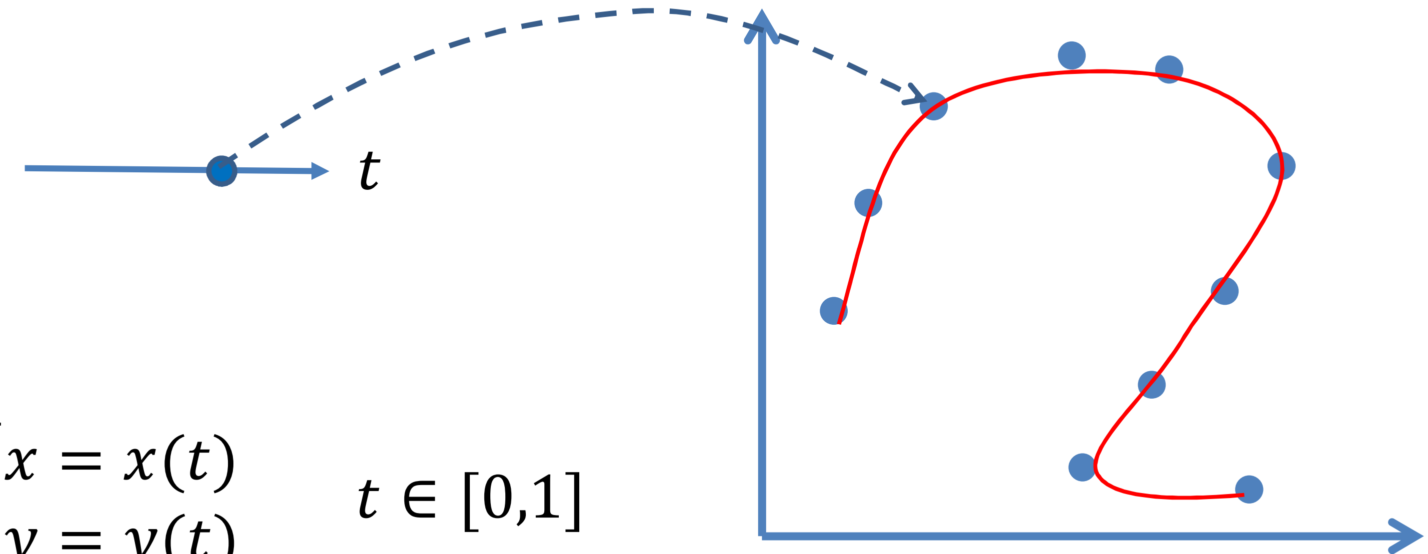
矢量符号化表达：

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- 问题：对数据点(x_i, y_i)，对应哪个参数t_i？
- 误差度量：$E = \sum_{i=1}^{n} \left\| \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}_i\|^2$

参数化问题

- 求数据点所对应的参数：一个降维的问题！



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

- 然后极小化误差度量：$E = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}_i\|^2$

点列的参数化

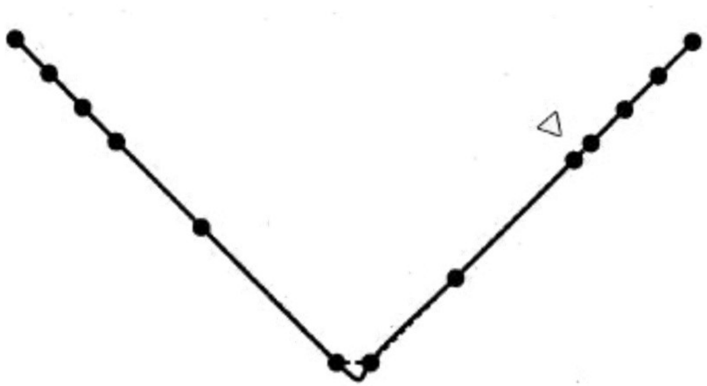
- Equidistant (uniform) parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \text{const}$
  - e.g. $t_i = i$
  - Geometry of the data points is not considered
- Chordal parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|$
  - Parameter intervals proportional to the distances of neighbored control points

点列的参数化

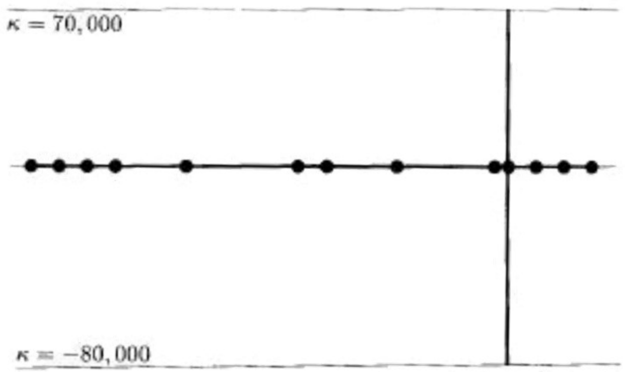
- Centripetal parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \sqrt{\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|}$
- Foley parameterization
  - Involvement of angles in the control polygon
  - $t_{i+1} - t_i = \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\| \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\frac{\widehat{\alpha}_i \|\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_{i-1}\|}{\|\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_{i-1}\| + \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|} + \frac{3}{2}\frac{\widehat{\alpha}_{i+1} \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|}{\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\| + \|\boldsymbol{k}_{i+2} - \boldsymbol{k}_{i+1}\|}\right)$
  - with $\hat{\alpha}_i = \min\left(\pi - \alpha_i, \frac{\pi}{2}\right)$
  - and $\alpha_i = \mathrm{angle}(\boldsymbol{k}_{i-1}, \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_{i+1})$

一个例子

- Examples: Uniform parameterization



Curve

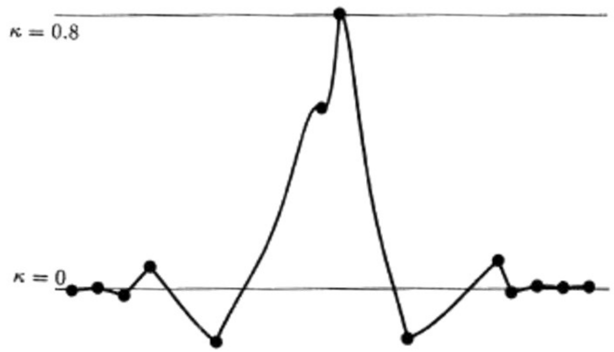


Curvature plot

一个例子

- Examples: Chordal parameterization

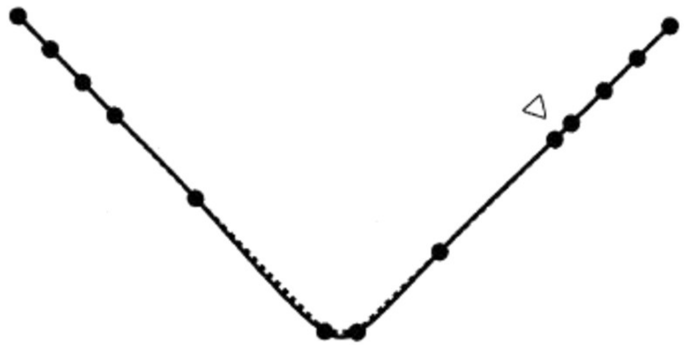
Curve



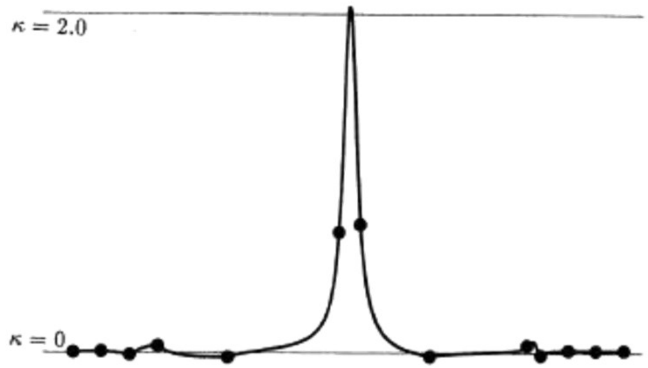
Curvature plot

一个例子

- Examples: Centripetal parameterization



Curve

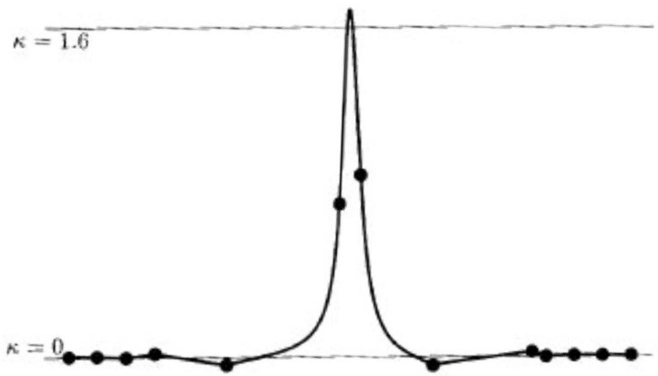


Curvature plot

一个例子

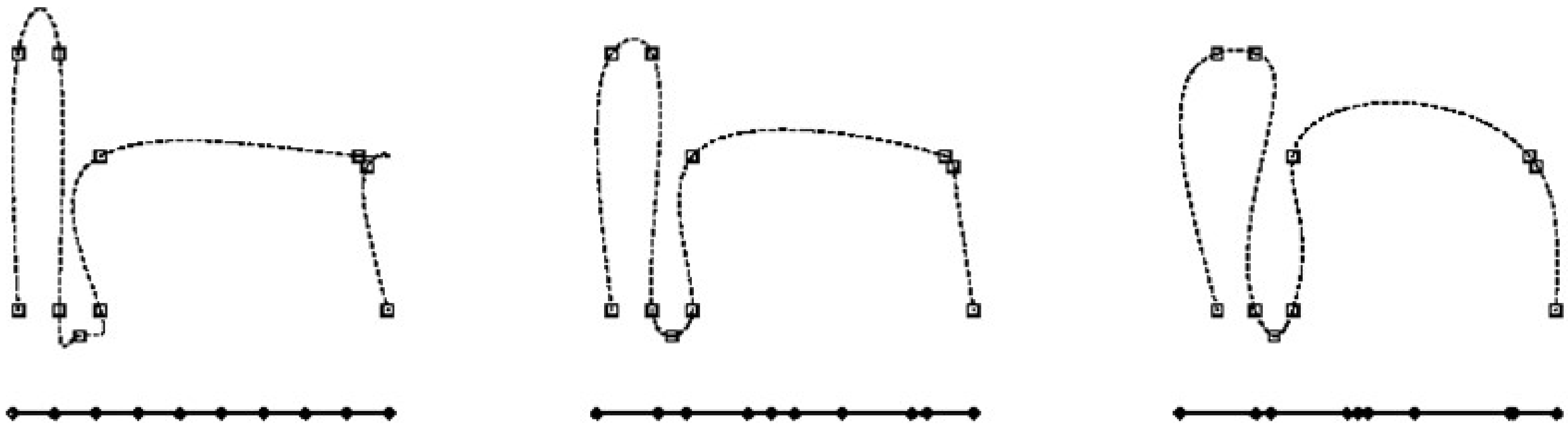
- Examples: Foley parameterization

Curve



Curvature plot

另一个例子

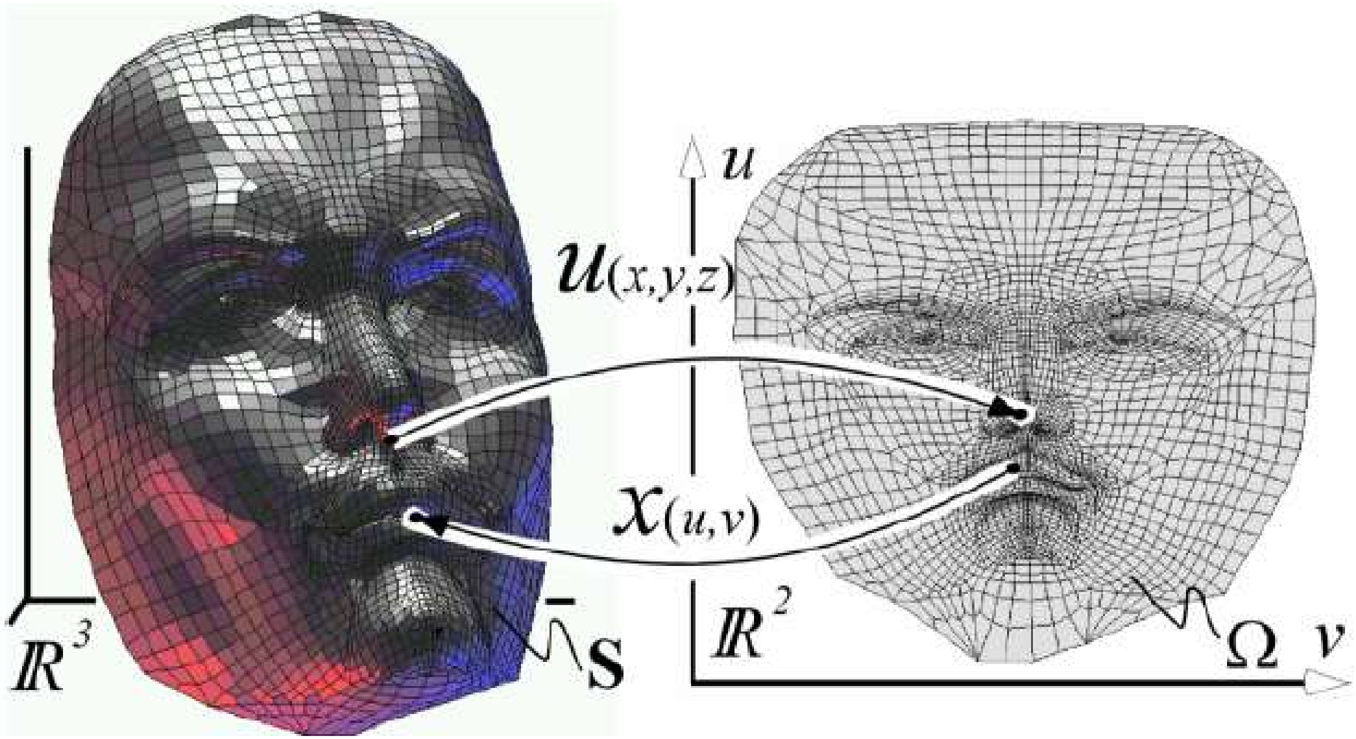


uniform　chord length　centripetal

点的参数化对曲线拟合的影响很大，需要好的参数化！

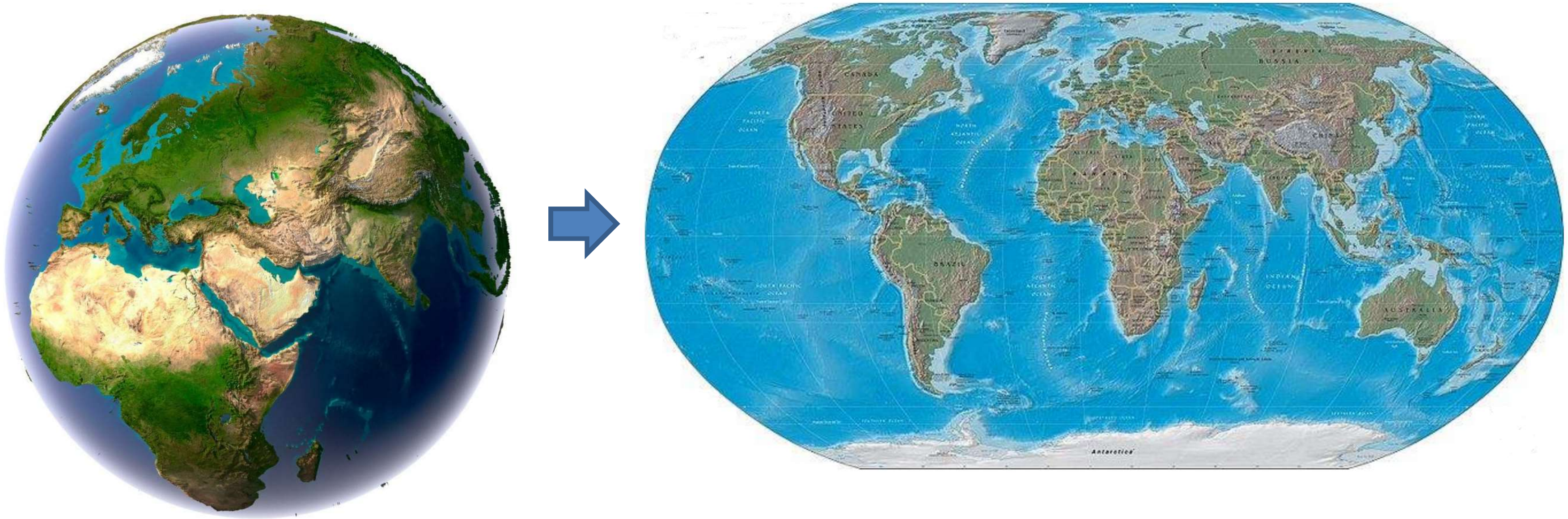
曲面参数化

- 三维的点找二维的参数：一个降维的问题！



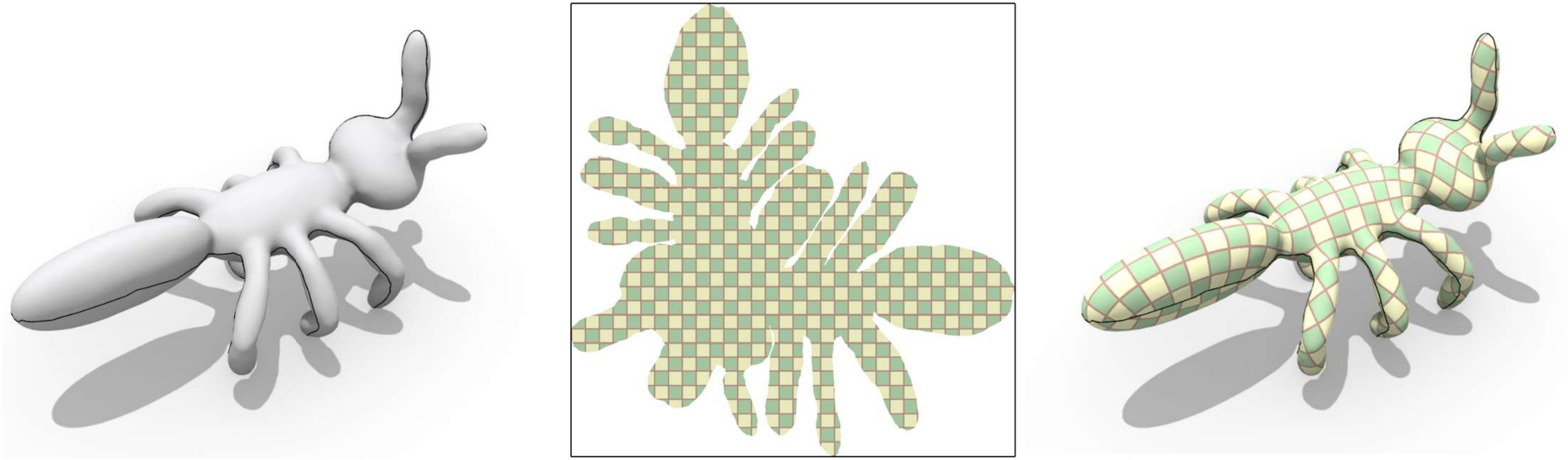
曲面参数化的应用

- 地图绘制（地理学）



曲面参数化的应用

- 纹理映射



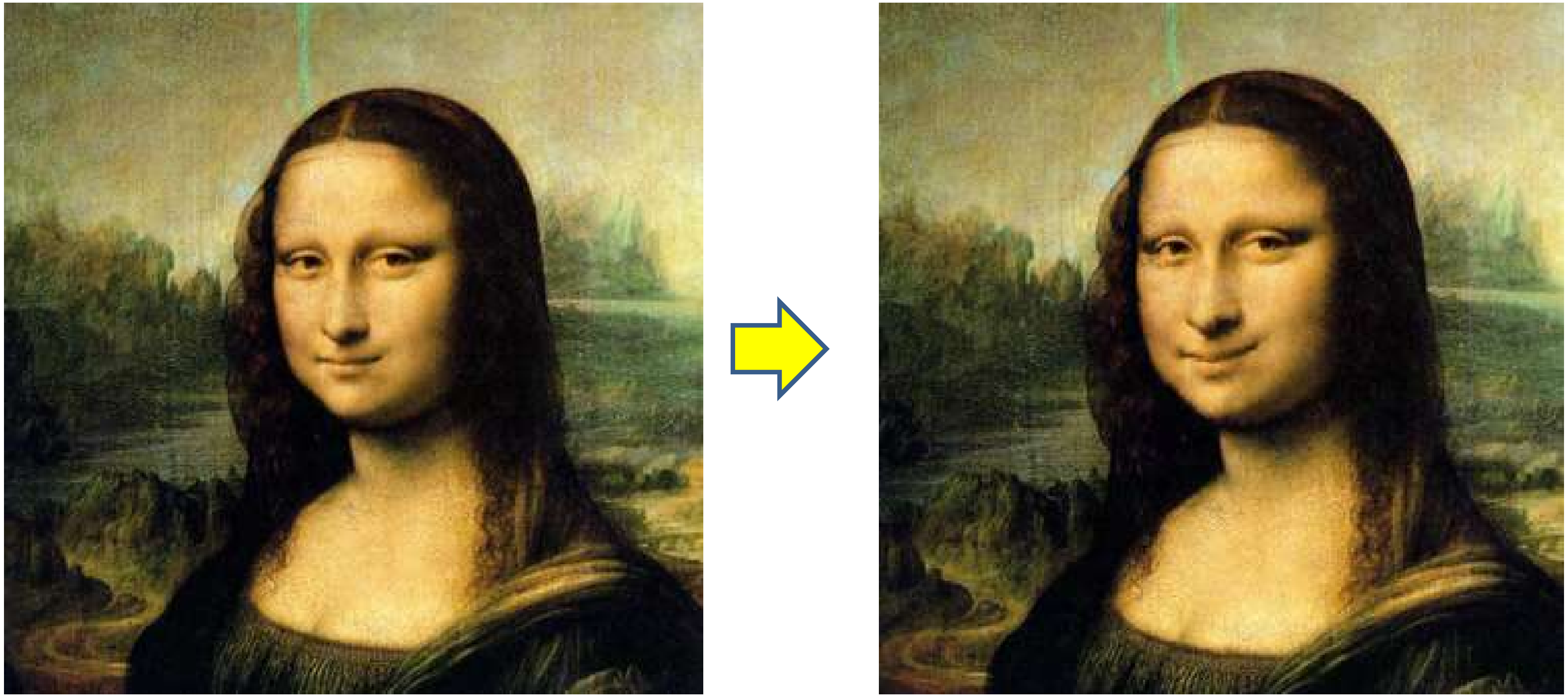
Recap: Interpolation

- Nearest neighborhood
- Bicubic
- Spline
- Thin plate spline
- …

Image Warping

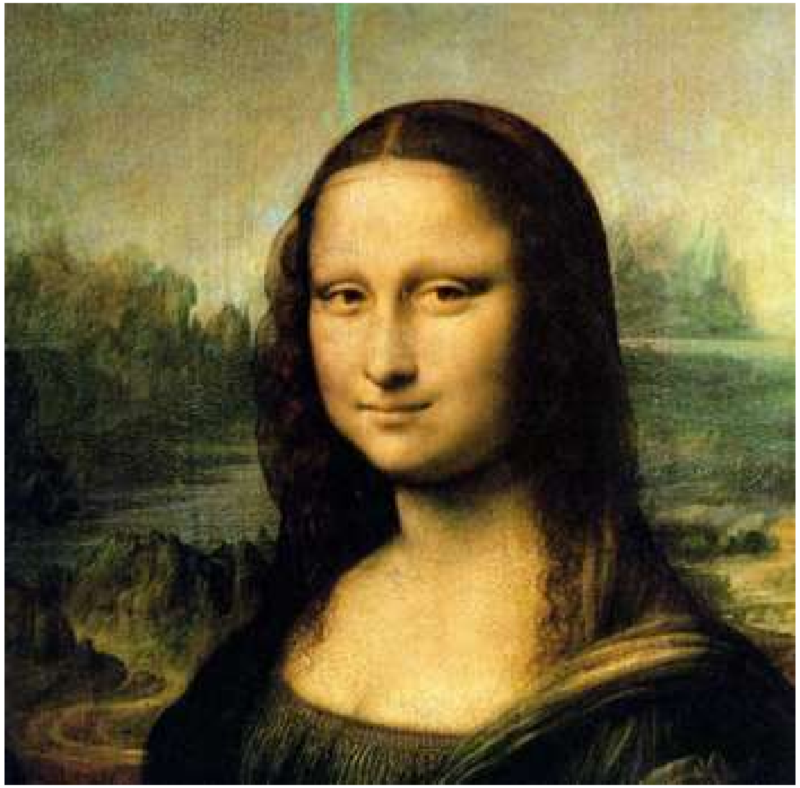
图像变形

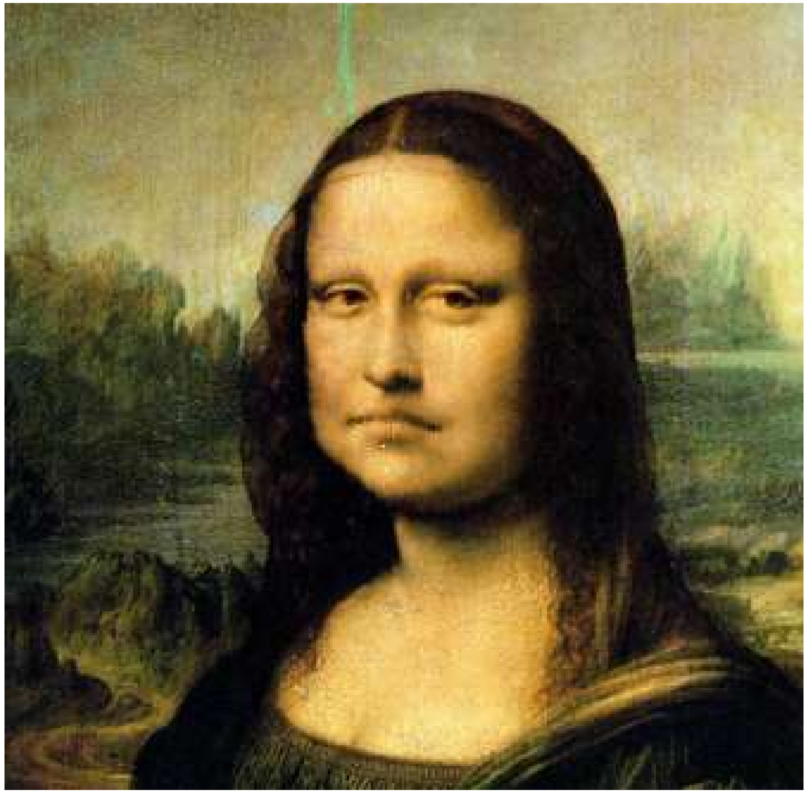
- 特定效果的变形



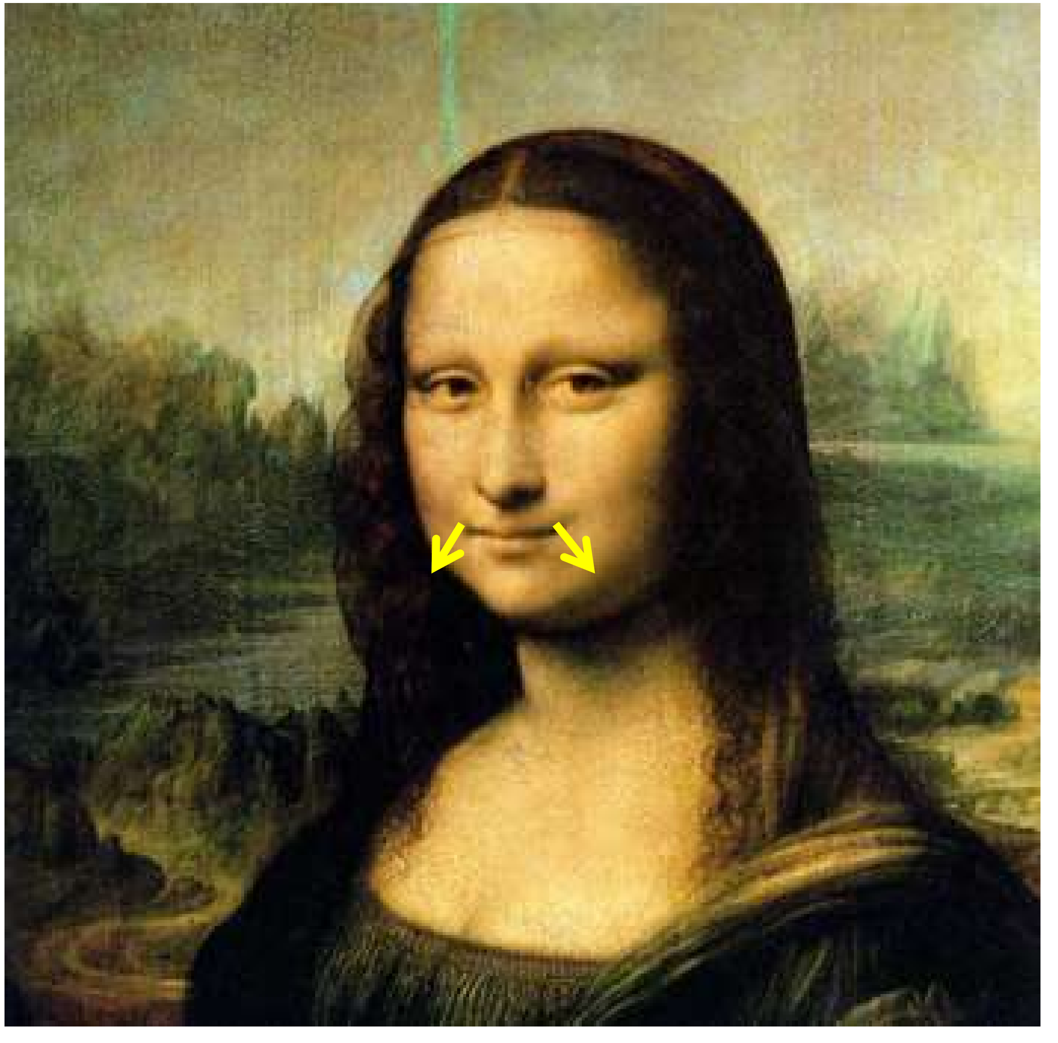
图像变形

- 特定效果的变形





用户交互



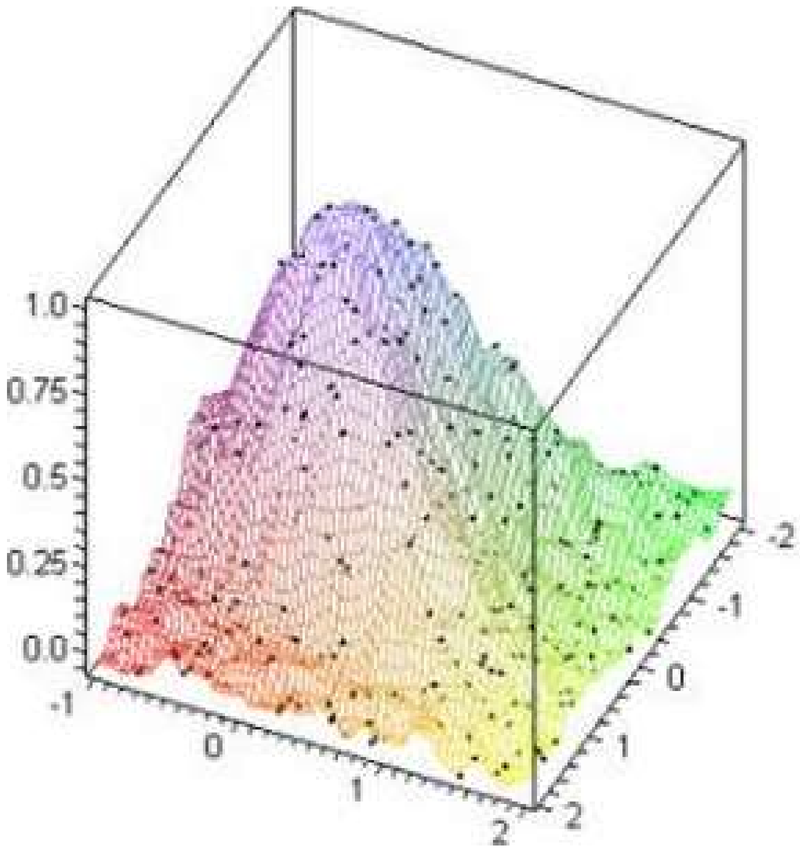
Demo

如何做到的？


0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

数学原理

- 散乱点插值



Thanks!