

Master 1 de Physique Fondamentale
Magistère de Physique Fondamentale (Mag2)
2018-2019

Cours d'Optique (deuxième partie)

J. LEYGNIER

MILIEUX ANISOTROPES - POLARISATION D'UNE ONDE - LAMES À RETARD

Table des matières

4	MILIEUX ANISOTROPES - POLARISATION D'UNE ONDE - LAMES À RETARD	95
4.1	Milieux isotropes et milieux anisotropes	96
4.2	Propagation d'une onde dans un milieu anisotrope	98
4.3	Milieux anisotropes biaxes et uniaxes	100
4.3.1	Définitions	100
4.3.2	Propagation dans un milieu uniaxe	101
4.3.3	Structure de l'onde extraordinaire	102
4.4	Polarisation de la lumière et intensité lumineuse	104
4.4.1	Polarisation de la lumière	104
4.4.2	Intensité lumineuse	106
4.4.3	Lumière naturelle	107
4.5	Polariseurs	108
4.5.1	Polariseur idéal	108
4.5.2	Intensité transmise par un polariseur - Loi de Malus	108
4.5.3	Interprétation physique	109
4.5.4	Exemples de dispositifs polariseurs	110
4.6	Modification de la polarisation d'une onde à la traversée d'une lame anisotrope	112
4.6.1	Lame anisotrope - Lignes neutres	112
4.6.2	Déphasage acquis à la traversée d'une lame anisotrope uniaxe	113
4.6.3	Lame demi-onde et lame quart-d'onde	114
4.7	Exemples d'utilisation	115
4.8	Annexes : Forme des ondes se propageant dans un milieu anisotrope	117
4.8.1	Position du problème	117
4.8.2	Système d'équations	117
4.8.3	Contraintes sur la vitesse de phase de l'onde et sur son type de polarisation	119
4.8.4	Détermination des directions de polarisation (ellipsoïde des indices)	119
4.8.5	Justification de l'utilisation géométrique de l'ellipsoïde des indices	121

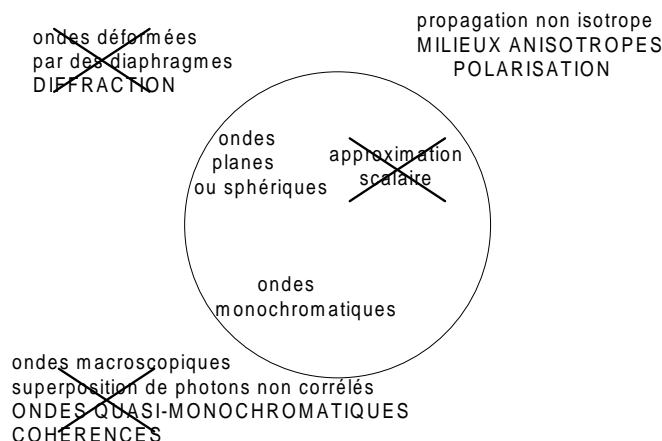
Chapitre 4

MILIEUX ANISOTROPES - POLARISATION D'UNE ONDE - LAMES À RETARD

En observant un objet à travers un cristal de quartz, on voit se former deux images décalées latéralement et nettes simultanément. Intercaler un polariseur permettrait d'éteindre l'une, ou bien par rotation de cet instrument d'un quart de tour d'éteindre la seconde. C'est un phénomène appelé double réfraction de l'onde lumineuse dans le cristal, qui ne peut s'interpréter qu'en traitant la lumière comme une onde électromagnétique vectorielle avec une propagation régie par les équations de Maxwell. Dans ce contexte apparaît la notion de polarisation de la lumière. Les particularités de la propagation de la lumière dans le quartz et plus généralement dans les milieux anisotropes sont exploitées dans de très nombreux dispositifs optiques, en particulier dans les lasers ou les systèmes de télécommunication.



Les ondes lumineuses considérées dans ce chapitre seront des ondes planes homogènes et monochromatiques, on négligera tout effet de diffraction.



4.1 Milieux isotropes et milieux anisotropes

Une onde de pulsation ω se propage dans un milieu matériel (diélectrique homogène sans charges ni courants, qui n'absorbe pas l'énergie de l'onde¹).

- \vec{E} exerce sur chaque électron du milieu une force qui le fait osciller ; il y a une légère séparation des charges + et -.
- sur un petit volume $d\tau$ apparaît un dipôle oscillant de moment dipolaire $\vec{P} d\tau$ (par définition du vecteur polarisation \vec{P} du milieu).
- le rayonnement émis par ce dipôle vient s'ajouter à l'onde incidente et produit une onde résultante qu'on voit se propager à la vitesse $\frac{c_0}{n}$. Ce processus microscopique est à l'origine de la notion d'indice optique d'un milieu.

1. On précise les propriétés physiques du matériau :

- diélectrique : il ne renferme pas de charges mobiles comme les conducteurs.
- homogène : les propriétés sont invariantes par translation dans l'espace.
- transparent : une onde qui le traverse ne subit pas de pertes d'énergie.
- non magnétique.
- linéaire : si les champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créent respectivement les polarisations \vec{P}_1 et \vec{P}_2 , alors $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ crée la polarisation $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$.

- isotrope ou anisotrope.

* un milieu est isotrope si les effets microscopiques de polarisation sont liés au champ électrique appliqué \vec{E} avec une proportionnalité indépendante de la direction de \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

où χ_e est la susceptibilité diélectrique du matériau.²

* un milieu est anisotrope si l'organisation géométrique des atomes et la nature des liaisons chimiques font qu'un électron se déplace plus facilement dans certaines directions que dans d'autres. Dans ce cas, le milieu acquiert une polarisation plus ou moins forte selon l'orientation de \vec{E} avec :

$$\begin{cases} P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z) \\ P_y = \epsilon_0 (\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z) \\ P_z = \epsilon_0 (\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \vec{E} = \epsilon_0 \vec{\chi} \vec{E}$$

avec des coefficients χ_{ij} non tous égaux. Le vecteur \vec{P} n'est généralement pas colinéaire à \vec{E} .

Le vecteur déplacement électrique \vec{D} est défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \vec{\chi}) \vec{E} = \vec{\epsilon} \vec{E}$$

où $\vec{\epsilon}$ est le tenseur permittivité diélectrique totale du milieu.

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Dans un milieu transparent non magnétique, on peut montrer que $\vec{\epsilon}$ est réel et symétrique donc diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles et positives. On les note $\epsilon_0 n_X^2$, $\epsilon_0 n_Y^2$ et $\epsilon_0 n_Z^2$. Les **axes propres** $X Y Z$ de $\vec{\epsilon}$ définissent les **axes principaux du cristal**. Pour la suite, on se placera dans ce référentiel avec les notations :

$$\begin{pmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}$$

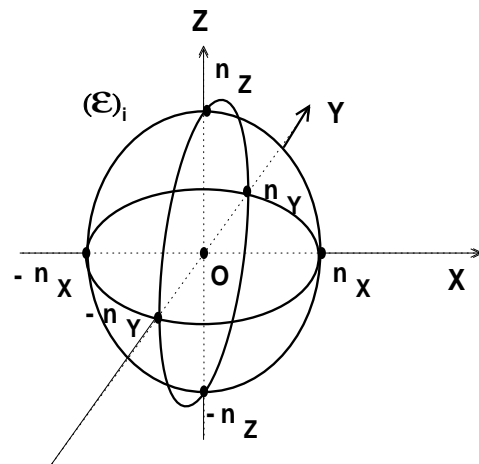
Les propriétés physiques d'un matériau sont caractérisées par les valeurs de n_X , n_Y , n_Z .

Introduction d'un outil mathématique.

On aura dans la suite à manipuler l'équation $\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{Z^2}{n_Z^2} = 1$, avec les propriétés géométriques suivantes :

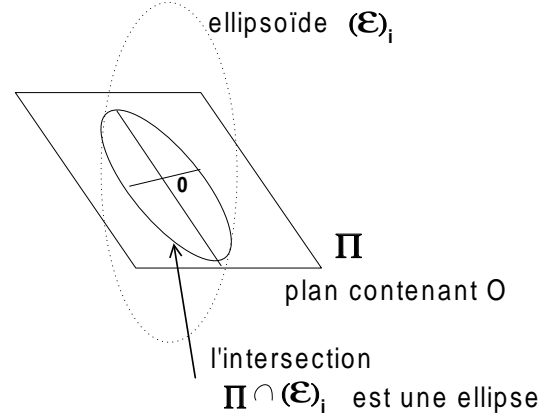
- dans l'espace à trois dimensions, c'est l'équation d'une surface symétrique par rapport au point $O(0,0,0)$. C'est une sphère lorsque $n_X = n_Y = n_Z$.
- elle coupe les axes OX , OY , OZ respectivement en $\pm n_X$, $\pm n_Y$, $\pm n_Z$.
- c'est une courbe mathématique appelée 'ellipsoïde', on désignera celle ci comme "l'ellipsoïde des indices" (\mathcal{E}_i).

Images d'un ellipsoïde : ballon de rugby.



2. Cette quantité est réelle pour un matériau transparent. Pour un milieu absorbant, la relation précédente devra être écrite entre les amplitudes complexes pour traduire un possible déphasage entre \vec{P} et \vec{E} . Ce phénomène traduit physiquement que les charges du milieu n'arrivent pas à se déplacer suffisamment vite pour suivre instantanément les oscillations du champ électrique. Il en résulte ce qu'on appelle la dispersion, c'est à dire une réponse du matériau fonction de la fréquence de l'onde, et l'absorption avec transfert d'énergie de l'onde vers la matière

- soit un plan Π passant par O . L'intersection $\Pi \cap (\mathcal{E}_i)$ est une ellipse



4.2 Propagation d'une onde dans un milieu anisotrope

Soit une onde plane monochromatique de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et de vitesse de phase v_φ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \begin{cases} E_{0X} \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_X \right) \\ E_{0Y} \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_Y \right) \\ E_{0Z} \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_Z \right) \end{cases}$$

Elle se propage sans déformation dans le milieu si elle est solution des équations de Maxwell, avec de plus la condition $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ imposée par le matériau. On peut montrer³ :

* pour \vec{u} donné, il existe des solutions $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{D})$ non nulles seulement pour deux valeurs de v_φ , notés v'_φ, v''_φ . On leur associe $n' = \frac{c_0}{v'_\varphi}$ et $n'' = \frac{c_0}{v''_\varphi}$, réels qui s'interprètent comme les indices optiques vus par ces ondes solutions pour leur propagation dans le matériau.

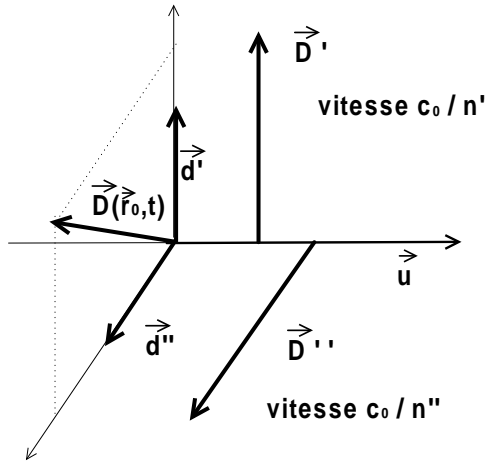
* Les vecteurs déplacements des ondes solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{D}'(\vec{r}, t) &= D' \vec{d}' \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c_0/n'} \right) + \psi' \right) \text{ avec } \vec{d}' \text{ unitaire et } \vec{d}' \perp \vec{u} \\ \vec{D}''(\vec{r}, t) &= D'' \vec{d}'' \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c_0/n''} \right) + \psi'' \right) \text{ avec } \vec{d}'' \text{ unitaire et } \vec{d}'' \perp \vec{u}, \vec{d}'' \perp \vec{d}' \end{aligned}$$

\vec{d}' et \vec{d}'' seront déterminés en fonction de \vec{u} et de n_X, n_Y, n_Z .

\vec{D}' (\vec{D}'') est à tout instant colinéaire à \vec{d}' (\vec{d}''). C'est par définition une onde polarisée rectiligne avec la direction de polarisation \vec{d}' (\vec{d}'').

3. Les propriétés des ondes solutions admises dans ce paragraphe sont démontrées en annexe.



Conséquence physique :

Une onde possède en \vec{r}_0 la direction de propagation \vec{u} et le vecteur déplacement $\vec{D}(\vec{r}_0, t) \perp \vec{u}$. Puisque \vec{d}' et \vec{d}'' perpendiculaires entre eux dans le plan perpendiculaire à \vec{u} en constituent une base, on peut décrire \vec{D} comme la somme de ses projections sur \vec{d}' et \vec{d}'' :

$$\vec{D}(\vec{r}_0, t) = \underbrace{(\vec{D}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{d}') \vec{d}'}_{\vec{D}'} + \underbrace{(\vec{D}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{d}'') \vec{d}''}_{\vec{D}''}$$

où \vec{D}' et \vec{D}'' se propagent sans déformation avec les vitesses de phase $\frac{c_0}{n'}$ et $\frac{c_0}{n''}$. Ces deux vitesses sont différentes donc \vec{D} elle-même se déforme ^a.

a. Les deux composantes sont chacune solution d'une équation de propagation donc se propagent sans déformation, mais ils s'agit de deux équations différentes puisque faisant intervenir des vitesses de propagation distinctes. L'onde résultante n'est donc pas solution d'une équation de propagation ce qui justifie pourquoi elle se déforme en traversant le milieu

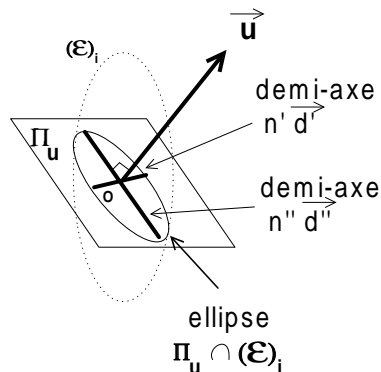
Une onde quelconque se décompose en deux ondes se propageant chacune avec des caractéristiques différentes. On montrera qu'elles sont souvent associées à deux rayons lumineux distincts. Ce milieu est appelé "biréfringent".

* Détermination de n' , \vec{d}' , n'' et \vec{d}'' .

Le milieu est caractérisé par les paramètres n_X , n_Y et n_Z tels que

$$\begin{pmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}$$

Soit (\mathcal{E}_i) l'ellipsoïde des indices associé, son équation est $\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{Z^2}{n_Z^2} = 1$, son centre est en O . On peut montrer (voir annexes §4.8.4 et 4.8.5) que les équations de Maxwell justifient les propriétés géométriques suivantes :



Soit le plan (Π_u) passant par O et perpendiculaire à \vec{u} . Son intersection avec l'ellipsoïde des indices (\mathcal{E}_i) constitue une ellipse notée $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ dont les demi-axes correspondent aux vecteurs $n' \vec{d}'$ et $n'' \vec{d}''$.

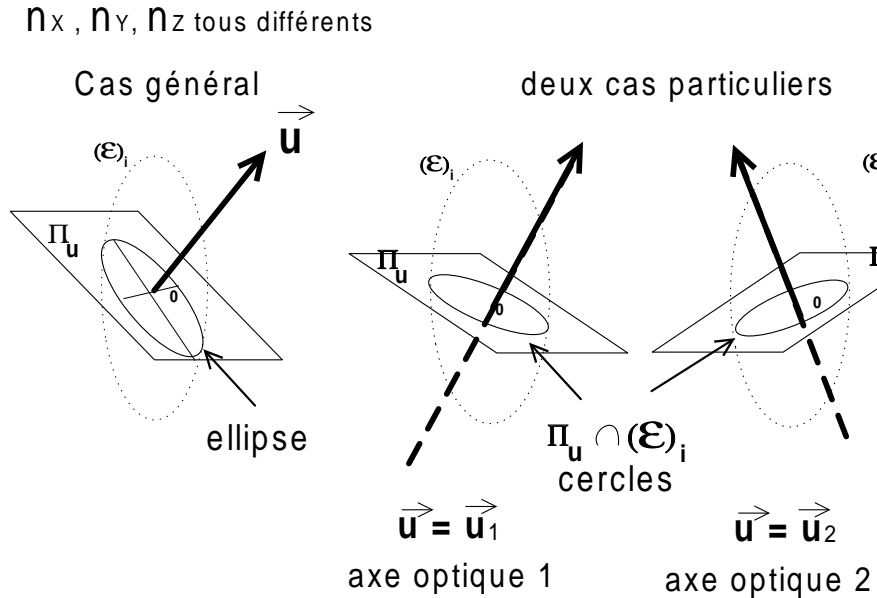
Conséquences pratiques :

- l'orientation des axes de $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ définit les vecteurs unitaires \vec{d}' et \vec{d}''
- les demi-longueurs de ces axes valent n' , n'' .

4.3 Milieux anisotropes biaxes et uniaxes

4.3.1 Définitions

On considère un milieu pour lequel les coefficients n_X , n_Y et n_Z ont trois valeurs distinctes. Les propriétés générales d'un ellipsoïde font qu'il existe deux directions de \vec{u} pour lesquelles l'intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ forme un cercle. Ces directions de propagation particulières sont appelées **axes optiques du cristal**, il s'agit d'un **milieu anisotrope biaxe**. Les axes optiques ne coïncident en général pas avec ceux du référentiel $OXYZ$ où le tenseur $\vec{\epsilon}$ est diagonal.

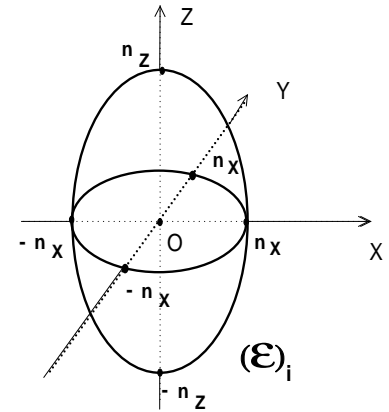


Lorsque $n_X = n_Y \neq n_Z$, l'ellipsoïde est à symétrie de révolution autour de OZ . L'intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ forme un cercle uniquement pour \vec{u} orienté suivant OZ . Les deux axes optiques se rejoignent dans ce cas sur l'axe OZ , ce milieu est **anisotrope uniaxe**.

Remarque : pour une direction de propagation \vec{u} parallèle à un axe optique, l'intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ forme un cercle donc une onde peut se propager sans déformation quelle que soit sa polarisation.

$$n_Z \neq n_X = n_Y$$

ellipsoïde
de révolution
d'axe OZ



Lorsque $n_X = n_Y = n_Z$, le milieu est isotrope. (\mathcal{E}_i) est une sphère de rayon n , $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ est un cercle de rayon n donc toute onde se propage sans déformation en voyant un indice optique indépendant de la direction de propagation.

C'est le type de symétrie du cristal, la présence d'un champ magnétique ou électrique extérieur, mais aussi d'éventuelles contraintes mécaniques qui déterminent si un cristal est anisotrope uniaxe ou biaxe, ou bien s'il est isotrope⁴.

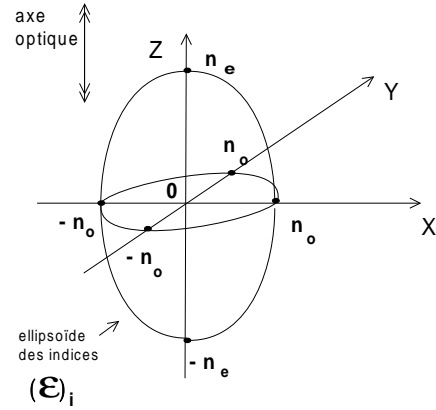
4. Exemple : certains liquides plongés dans un champ électrique de l'ordre du kV/cm acquièrent les propriétés optiques d'un milieu anisotrope uniaxe (effet Kerr), avec des applications pour les commutateurs optiques ultra-rapide (temps de coupure de l'ordre de la nanoseconde)

Certains cristaux uniaxes aux surfaces desquels est appliquée une différence de potentiel acquièrent les propriétés d'un matériau anisotrope biaxe où les indices sont fonctions de l'orientation du champ appliqué (effet Pockels)

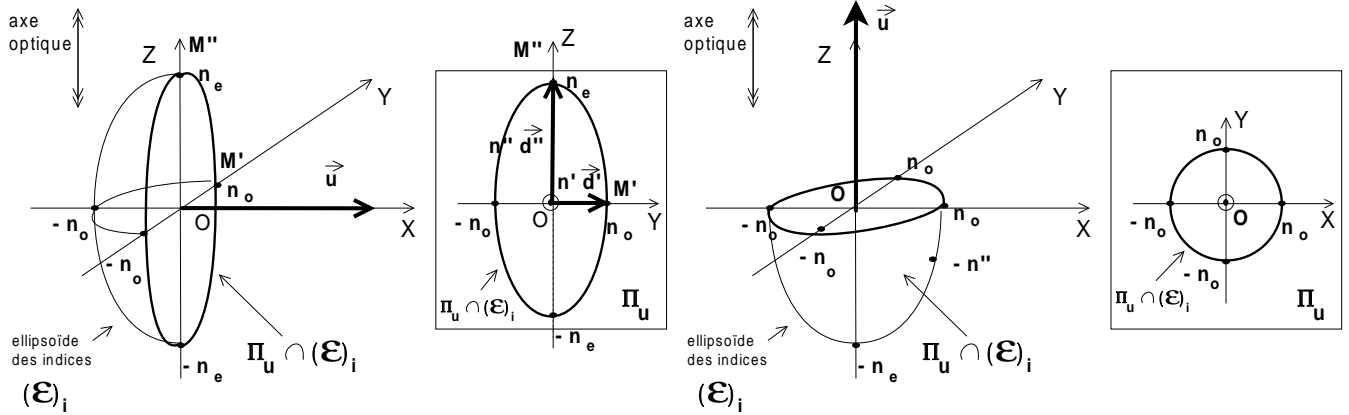
4.3.2 Propagation dans un milieu uniaxe

Les milieux uniaxes constituent un cas particulier souvent rencontré. On note $n_X = n_Y = n_o$ (indice ordinaire) et $n_Z = n_e \neq n_o$ (indice **extraordinaire principal**). Par convention, le milieu est uniaxe positif si $n_e > n_o$ et uniaxe négatif si $n_e < n_o$.

L'ellipsoïde des indices possède l'équation $\frac{X^2+Y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} = 1$.



Soit dans le matériau anisotrope uniaxe une direction de propagation \vec{u} donnée. L'objectif est de déterminer les directions de polarisations \vec{d}' et \vec{d}'' des ondes solutions et les indices optiques n' et n'' associés.



* Cas particulier 1 : $\vec{u} = \vec{e}_X$.

Le plan Π_u perpendiculaire à \vec{u} est le plan $(O, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$, d'équation $X = 0$.

$\Pi_u \cap (\mathcal{E})_i$ est l'ellipse d'équation $\frac{Y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} = 1$. Ses axes sont suivant OZ et OY , avec $n' \vec{d}'(0, n_o, 0)$ et $n'' \vec{d}''(0, 0, n_e)$ où \vec{d}', \vec{d}'' sont unitaires.

$\vec{d}' = \vec{e}_Y$, $n' = n_o$, $\vec{d}'' = \vec{e}_Z$, $n'' = n_e$.

L'onde polarisée suivant Y se propage sans déformation en voyant l'indice optique n_o .

Celle polarisée suivant l'axe optique OZ voit l'indice n_e .

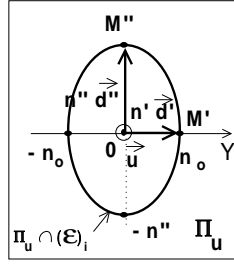
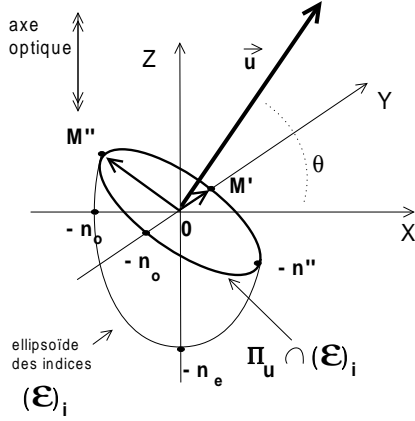
* Cas particulier 2 : $\vec{u} = \vec{e}_Z$.

le plan Π_u perpendiculaire à \vec{u} est le plan $(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y)$.

L'intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E})_i$ est un cercle d'équation $\frac{X^2+Y^2}{n_o^2} = 1$ donc $n' = n'' = n_o$.

Dans ce cas particulier, toutes les orientations de \vec{d}' et $\vec{d}'' \perp \vec{u}$ conviennent pour l'onde solution. On retrouve cette propriété chaque fois que \vec{u} est orienté selon l'axe optique, que le milieu soit uniaxe ou biaxe.

* Cas général (graphe pour $n_e > n_o$).



On considère une onde dont la direction de propagation $\vec{u}(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ dans le plan OXZ forme l'angle θ avec OX^a . Soit Π_u le plan orthogonal à \vec{u} en O . Le schéma ci-contre représente la coupe de l'ellipsoïde des indices par le plan Π_u . L'intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ est une ellipse d'axes parallèles à $\vec{d}'(0, 1, 0)$ et à $\vec{d}'' = \vec{u} \wedge \vec{d}'$, de demi-longueurs $OM' = n_o$ et $OM'' = n''$ respectivement.

Les démonstrations réalisées au 4.8.4 justifient qu'une onde de direction de polarisation \vec{d}' (\vec{d}'') traverse sans déformation le milieu anisotrope avec la direction de propagation \vec{u} , en voyant l'indice optique n_o (n'').

a. Le cas général passe du cas particulier 1 au cas particulier 2 lorsque θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, comme si le plan Π_u basculait d'une position à l'autre en tournant autour de l'axe OY .

Le graphe montre que n'' est intermédiaire entre n_o et n_e . Fonction de θ , il est en général différent de l'indice extraordinaire principal n_e . L'onde voyant n_o indépendamment de θ est appelée 'onde ordinaire', la seconde 'onde extraordinaire'.

La construction géométrique déduite des équations de Maxwell montre que :

- une onde polarisée rectilignement selon $\vec{d}'(0, 1, 0)$ ou $\vec{d}'' = \vec{u} \wedge \vec{d}'$ se propage sans déformation suivant $\vec{u}(\cos \theta, 0, \sin \theta)$.
- elle voit l'indice optique n_o ('onde ordinaire') ou $n'' = OM''$ fonction de θ ('onde extraordinaire').

Formulation équivalente (indépendante du référentiel) :

les positions des points M' et M'' sur le graphe à 3 dimensions précédent montrent que :

- la polarisation de l'onde ordinaire est perpendiculaire au plan défini par \vec{u} et l'axe optique.
- celle de l'onde extraordinaire est perpendiculaire à \vec{u} dans le plan $(\vec{u}, \text{axe optique})$.

4.3.3 Structure de l'onde extraordinaire

On détermine maintenant pour cet exemple la valeur de n'' et la structure de l'onde extraordinaire au point $\vec{r} = 0$. Les composantes des vecteurs \vec{u} , \vec{d}' et \vec{d}'' dans le référentiel X, Y, Z s'écrivent $\vec{u}(\cos \theta, 0, \sin \theta)$, $\vec{d}'(0, 1, 0)$, et

$$\vec{d}'' = \vec{u} \wedge \vec{d}' = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$* \text{ Par construction, } \vec{D}'' = \|\vec{D}''\| \vec{d}'' \cos(\omega t + \psi'') = \begin{vmatrix} -\|\vec{D}''\| \sin \theta \\ 0 \\ \|\vec{D}''\| \cos \theta \end{vmatrix} \cos(\omega t + \psi'')$$

* Indice optique n'' : le point M'' défini par $\vec{OM}'' = n'' \vec{d}'' \equiv (-n'' \sin \theta, 0, n'' \cos \theta)$ appartient à l'ellipsoïde des indices donc ses composantes vérifient

$$\frac{(-n'' \sin \theta)^2}{n_o^2} + \frac{(n'' \cos \theta)^2}{n_e^2} = 1$$

$$\text{d'où } n'' = \left(\frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-1/2}$$

* Champ électrique : les composantes de \vec{E}'' se déduisent de celles de \vec{D}'' par la relation $\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \vec{E}$,

$$\text{d'où } \vec{E}'' = \begin{vmatrix} -\frac{\|\vec{D}''\|}{\epsilon_0} \sin \theta / n_o^2 \\ 0 \\ \frac{\|\vec{D}''\|}{\epsilon_0} \cos \theta / n_e^2 \end{vmatrix} \cos(\omega t + \psi''). \text{ On note que } \vec{E}'' \text{ est dans le plan perpendiculaire à } \vec{d}'(0, 1, 0).$$

* Champ magnétique : la relation $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ entraîne pour une onde plane homogène de vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c_0}{n}$ l'écriture $-i n \frac{\omega}{c_0} \vec{u} \wedge \vec{B} = i \mu_0 \omega \vec{D}$. En simplifiant puis multipliant vectoriellement par \vec{u} , il vient :

$$-\frac{n}{c_0} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{u} \wedge \vec{D}$$

$$-\frac{n}{c_0} \left((\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{u} - \vec{B} \right) = \mu_0 \vec{u} \wedge \vec{D} \quad \text{avec} \quad \vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{c_0}{n} \vec{u} \wedge \vec{D}$$

$(\vec{B}, \vec{u}, \vec{D})$ forme donc un trièdre direct. On applique cette relation à l'onde extraordinaire :

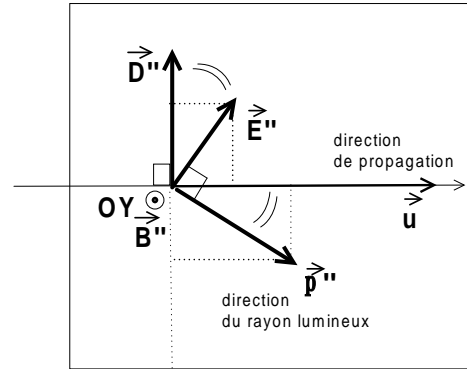
$$\begin{aligned} \vec{B}'' &= \mu_0 \frac{c_0}{n''} (\vec{u} \wedge \vec{D}'') \cos(\omega t + \psi'') \\ &= \mu_0 \frac{c_0}{n''} \|\vec{D}''\| (\vec{u} \wedge \vec{d}'') \cos(\omega t + \psi'') \\ &= \mu_0 \frac{c_0}{n''} \|\vec{D}''\| (-\vec{d}') \cos(\omega t + \psi'') \end{aligned}$$

* La direction du rayon lumineux correspond à celle du transport de l'énergie lumineuse (flux de photons, flux d'énergie électromagnétique). Il est établi dans les cours d'électromagnétisme que c'est la direction du vecteur de Poynting $\vec{p} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ (milieu non magnétique).

Pour l'onde associée à n'' , il vaut

$$\vec{p}'' = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}'' \wedge \vec{B}''$$

Tout comme \vec{D}'' , \vec{B}'' et \vec{u} , les vecteurs \vec{E}'' , \vec{B}'' et \vec{p}'' forment un trièdre direct. Le schéma montre que \vec{p}'' et le rayon lumineux forment avec \vec{u} le même angle que \vec{E}'' avec \vec{D}'' .



On précise l'expression du vecteur de Poynting de l'onde extraordinaire :

$$\vec{p}'' = \frac{1}{\mu_0} \frac{\|\vec{D}''\|}{\epsilon_0} \cos(\omega t + \psi'') \times \begin{vmatrix} -\sin \theta / n_o^2 \\ 0 \\ \cos \theta / n_e^2 \end{vmatrix} \wedge \mu_0 \frac{c_0}{n''} \|\vec{D}''\| \cos(\omega t + \psi'') \times \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{c_0}{n'' \epsilon_0} \|\vec{D}''\|^2 \begin{vmatrix} \cos \theta / n_e^2 \\ 0 \\ \sin \theta / n_o^2 \end{vmatrix} \cos^2(\omega t + \psi'')$$

Sauf dans les cas particuliers $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, le vecteur de Poynting \vec{p}'' et donc le rayon lumineux ne sont pas colinéaires à la direction de propagation $\vec{u}(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ de la phase de l'onde.

Remarque 1 :

Pour l'onde ordinaire, des calculs analogues conduisent à

$$\vec{D}' = D' \vec{d}' \cos(\omega t + \psi')$$

$$\vec{B}' = \mu_0 \frac{c_0}{n_o} D' \vec{u} \wedge \vec{d}' \cos(\omega t + \psi') = \mu_0 \frac{c_0}{n_o} D' \begin{vmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \cos(\omega t + \psi') \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \mu_0 \frac{c_0}{n_o} D' \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix} \cos(\omega t + \psi')$$

$$\vec{E}' = \frac{D'}{\epsilon_0 n_o^2} \vec{d}' \cos(\omega t + \psi')$$

$$\vec{p}' = \frac{1}{\mu_0} \frac{D'}{\epsilon_0 n_o^2} \cos(\omega t + \psi') \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \mu_0 \frac{c_0}{n_o} D' \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix} \cos(\omega t + \psi') = \frac{c_0}{\epsilon_0 n_o^3} D'^2 \begin{vmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{vmatrix} \cos^2(\omega t + \psi') \quad \text{donc} \quad \vec{p}' = \frac{c_0}{\epsilon_0 n_o^3} D'^2 \cos^2(\omega t + \psi') \vec{u}$$

Le rayon lumineux de l'onde ordinaire est bien colinéaire à la direction de propagation. L'onde ordinaire se comporte exactement comme dans un milieu isotrope d'indice optique n_o .

Remarque 2 : pour un milieu anisotrope biaxe, il n'existe pas de méthode analytique simple pour déterminer n' et n'' : il faut résoudre numériquement l'équation de Fresnel (Cf §4.8.2 et 4.8.3) puis résoudre le système (4.3) donnant les composantes de \vec{E} et en déduire celles de \vec{D} et \vec{B} .

4.4 Polarisation de la lumière et intensité lumineuse

4.4.1 Polarisation de la lumière

On considère dans ce paragraphe des milieux isotropes, avec donc $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ colinéaire à \vec{E} .

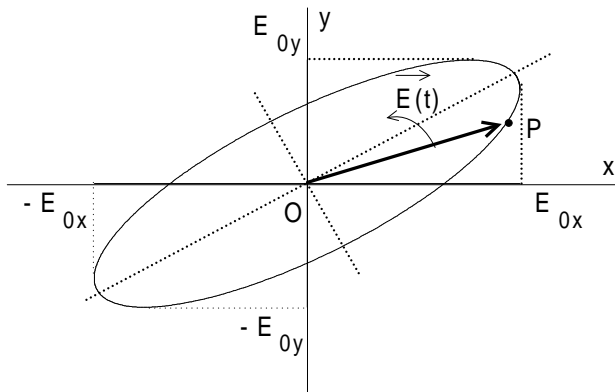
Soit une onde plane monochromatique homogène de vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z = k \vec{e}_z$. Les composantes de \vec{E} peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \psi_x) \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \psi_y) \\ E_z(z, t) = 0 \end{cases}$$

E_{0x} , E_{0y} , ψ_x et ψ_y sont des constantes réelles. Pour une onde plane homogène, \vec{E} est par définition uniforme sur les surfaces d'onde d'équation $z = \text{cte}$, donc indépendant des variables x et y . La composante $E_z(z, t)$ est nulle puisque \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation.

On s'intéresse à l'évolution temporelle de la direction du vecteur $\vec{E}(z, t)$, arbitrairement en $z = 0$.

Les composantes $E_x(0, t)$ et $E_y(0, t)$ oscillent sinusoïdalement dans le plan $z = 0$ mais atteignent leurs extremums à des instants généralement différents : l'extrémité P du vecteur $\vec{OP} = \vec{E}(0, t)$ décrit une ellipse au cours du temps. Par définition, cette onde a **une polarisation elliptique**.



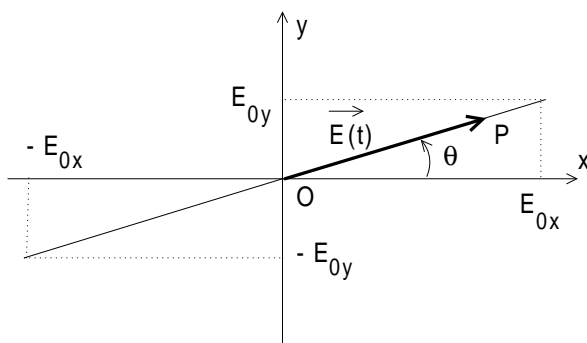
La direction des axes de l'ellipse, le rapport de leurs longueurs et le sens de parcours avec le temps sont déterminés par le rapport des amplitudes E_{0x}/E_{0y} et la différence de phase $\psi_y - \psi_x$.

Le point P effectue un tour complet sur un intervalle de temps égal à la période de l'onde.

Pour des ondes visibles, $\lambda = 0,6 \mu\text{m} \rightarrow T = \frac{\lambda}{c_0} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$.

Cas particuliers :

* Polarisation rectiligne (ellipse avec un petit axe de longueur nulle) : la direction de \vec{E} reste constante au cours du temps. Les composantes E_x et E_y atteignent leurs extremums au même instant ce qui impose $\psi_y = \psi_x$ (π).



graphe correspondant à $\psi_y = \psi_x$ (2π)

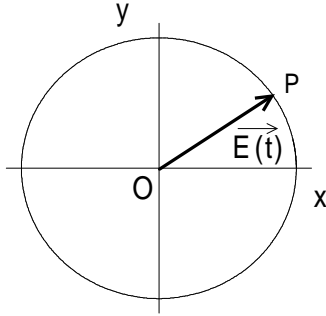
L'angle θ que forme la direction de \vec{E} avec Ox vérifie

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{E_{0y}}{E_{0x}} & \text{si } \psi_y = \psi_x \ (2\pi) \\ \text{ou } \tan \theta &= -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} & \text{si } \psi_y = \psi_x + \pi \ (2\pi) \end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{E} et \vec{D} gardent en tout point et à tout instant une même direction qui constitue la **direction de polarisation de l'onde**.^a

a. qu'on veillera à ne pas confondre avec la direction de propagation \vec{u}

* Polarisation circulaire (ellipse avec deux axes de même longueur) : au cours du temps, l'extrémité P de $\vec{OP} = \vec{E}(0, t)$ décrit un cercle :



les paramètres doivent pour cela vérifier

$$\begin{cases} E_{0x} &= E_{0y} \\ \psi_y &= \psi_x \pm \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

En considérant par convention une onde lumineuse de propageant vers l'observateur, la polarisation est circulaire gauche si l'observateur voit tourner \vec{E} dans le sens trigonométrique, et circulaire droite dans le cas inverse.

Le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique pour $\psi_y = \psi_x - \frac{\pi}{2} (2\pi)$ (polarisation circulaire gauche) et dans le sens inverse pour $\psi_y = \psi_x + \frac{\pi}{2} (2\pi)$ (polarisation circulaire droite), comme justifié par l'exemple suivant : à $t = \frac{-\psi_x}{\omega} \Leftrightarrow \omega t + \psi_x = 0$, le champ électrique pointe la direction :

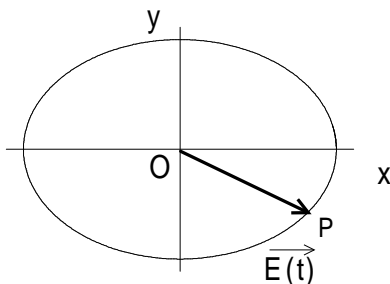
$$\vec{E} \begin{cases} E_x(0, t) &= E_{0x} \cos(0) &= E_{0x} \\ E_y(0, t) &= E_{0x} \cos(\pm \frac{\pi}{2}) &= 0 \end{cases}$$

Après un quart de période, $t = \frac{-\psi_x}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \Leftrightarrow \omega t + \psi_x = \frac{\pi}{2}$ et le champ électrique pointe la direction :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x(0, t) &= E_{0x} \cos(\frac{\pi}{2}) &= 0 \\ E_y(0, t) &= E_{0x} \cos(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}) &= \mp E_{0x} \end{cases}$$

Le sens dans lequel a été effectué le quart de tour donne le sens de parcours du cercle (ou d'une ellipse).

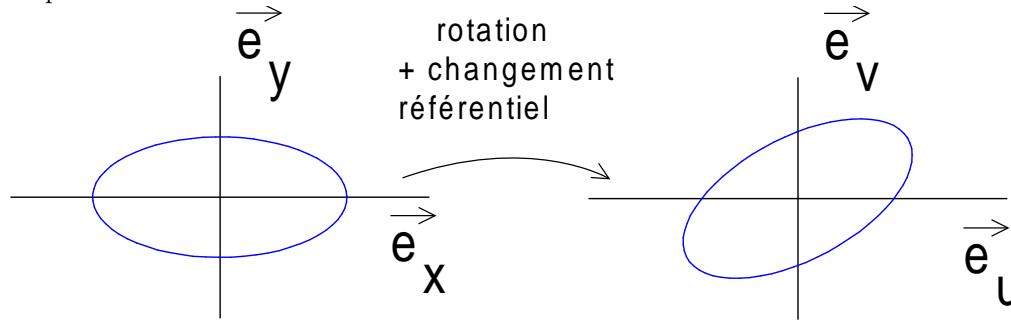
* Polarisation elliptique d'axes Ox Oy :



Pour $\psi_y = \psi_x + \frac{\pi}{2} (\pi)$ et $E_{0x} \neq E_{0y}$, l'extrémité de \vec{E} parcourt une ellipse dont les axes sont Ox et Oy .

Inversement, l'ellipse a pour axes Ox et Oy seulement si le déphasage $\psi_y - \psi_x$ vaut $\pm \pi/2$ modulo 2π .

Remarque importante : on illustre ici que pour une ellipse donnée, la valeur de $\psi_y - \psi_x$ dépend du référentiel dans lequel l'équation est écrite. Les figures suivantes représentent une ellipse dont l'équation est écrite dans le référentiel (\vec{e}_x, \vec{e}_y) de ses axes (figure de gauche). Le déphasage entre ses composantes vaut $\frac{\pi}{2}$. La même ellipse est représentée à droite dans le référentiel (\vec{e}_u, \vec{e}_v) construit par rotation de $\frac{\pi}{4}$ de (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Pour cette même ellipse, le déphasage des composantes possède alors une valeur différente.



Equation dans \vec{e}_x, \vec{e}_y :

$$\begin{cases} E_x(0, t) = 2 \cos(\omega t) \\ E_y(0, t) = \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

Equation dans \vec{e}_u, \vec{e}_v

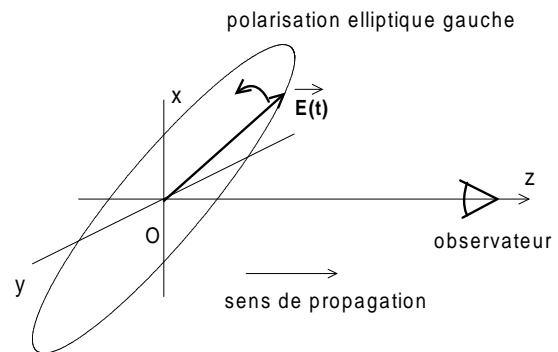
$$\begin{cases} E_u(0, t) = 1,8028 \cos(\omega t + 0,281) \\ E_v(0, t) = 1,323 \cos(\omega t - 0,714) \end{cases}$$

déphasage : $\pi/2 = 1,571$ rad.

déphasage : 0,995 rad

On retiendra que pour une ellipse associée à un déphasage quelconque, il suffira d'écrire les composantes dans le référentiel de ses axes pour se ramener à $\psi_y - \psi_x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Remarque : en généralisation de ce qui a été présenté pour le cas circulaire, la polarisation sera 'gauche' ou 'droite' selon le sens de rotation $\vec{E}(0, t)$ vu par un observateur **voyant venir l'onde vers lui**.



4.4.2 Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse est physiquement définie comme la puissance lumineuse moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ au niveau d'une surface d'onde, par unité de surface⁵. Il a été établi dans le cours d'électromagnétisme la relation :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \left\langle \int \int_{\text{surface}} \vec{p} \cdot d\vec{S} \right\rangle$$

où \vec{p} représente le vecteur de Poynting ; la notation $\langle \rangle$ signifie valeur moyenne sur le temps.⁶

Conséquence physique à retenir : l'énergie lumineuse (le nombre de photons $\times h\nu$) traversant pendant la durée Δt une surface $S \perp \vec{e}_z$ sur laquelle I est uniforme et constante vaut $I S \Delta t$.

Ces définitions vont être appliquées au cas d'une onde plane se propageant selon \vec{e}_z . Ses surfaces d'onde sont les

5. C'est à dire l'énergie moyenne traversant une surface d'onde par unité de temps et par unité de surface

6. Les équations de Maxwell permettent de montrer que la variation temporelle de l'énergie contenue dans un volume fermé correspond au flux du vecteur de Poynting à travers sa surface, par construction du vecteur de Poynting. En considérant une onde plane homogène se propageant suivant Oz et le volume du demi-espace limité par le plan $z = z_0$, on déduit que l'énergie traversant ce plan par unité de temps correspond d'une part au flux du vecteur de Poynting à travers ce plan, d'autre part à la puissance lumineuse au niveau de ce plan.

plans $\perp \vec{e}_z$. Le vecteur de Poynting est construit tel que $\vec{p} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ avec :

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 c_0}{n} \vec{e}_z \wedge \vec{D} & (\text{relations établies au §4.3.3.}) \\ \vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E} & (\text{milieu isotrope}) \\ \mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1 & c = \frac{c_0}{n}. \end{cases}$$

Il vient $\vec{p} = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{e}_z$.

On déduit l'intensité (flux moyenné dans le temps à travers une surface unitaire $d\vec{S} = dS \vec{e}_z = \vec{e}_z$) :

$$\begin{aligned} & \text{flux de } \vec{p} \text{ à travers le plan } \perp \vec{e}_z \\ & \text{par unité de surface} \\ I &= \langle \vec{p} \cdot \vec{e}_z \rangle \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle (\vec{E} \cdot \vec{E}) \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - kz + \psi_x) + E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kz + \psi_y) \rangle \\ &= \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\mu_0 c} \end{aligned}$$

Remarque 1 : pour ces calculs, on ne peut pas utiliser les représentations complexes des champs à cause du terme $(\vec{E} \cdot \vec{E})$, parce que le produit des parties réelles est différent de la partie réelle du produit.

Remarque 2 : soit une onde plane monochromatique de direction de propagation \vec{e}_z et polarisée rectiligne selon \vec{e}_x . On compare la description en $z = 0$ par son champ électrique vectoriel à celle donnée à l'approximation scalaire.

description vectorielle	approximation scalaire
$\vec{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$	$s(z, t) = A_0 \cos(\omega t - kz)$
$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{0x}^2$	$= \frac{\mathcal{A} e^{-ikz} e^{i\omega t} + \mathcal{A}^* e^{ikz} e^{-i\omega t}}{2}$ $I = \mathcal{A} \mathcal{A}^*$

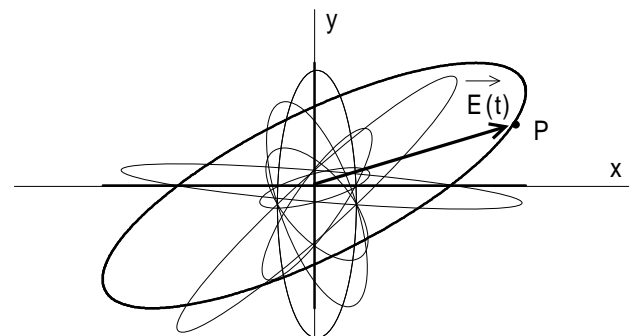
Les deux approches sont analogues si l'onde vectorielle est polarisée rectiligne et si l'amplitude de la vibration lumineuse est reliée au champ électrique par $A_0 = \frac{E_{0x}}{\sqrt{2\mu_0 c}}$.

4.4.3 Lumière naturelle

En général, une source émet une onde pour laquelle ψ_x, ψ_y, E_{0x} et E_{0y} varient rapidement : la direction et l'amplitude de \vec{E} changent de manière aléatoire au cours du temps et on ne peut pas définir l'état de polarisation de la lumière. Il reste cependant la relation $\langle E_{0x}^2 \rangle = \langle E_{0y}^2 \rangle$ pour que l'intensité associée aux champs de polarisation suivant Ox et Oy soient égales. Ce type de lumière est dit lumière naturelle.

Le caractère fixe ou variable des quantités ψ_x, ψ_y, E_{0x} et E_{0y} est à considérer en rapport avec le temps caractéristique de mesure du détecteur utilisé pour évaluer l'intensité (Cf Chap. 'Cohérences').

Interprétation physique : P fait quelques tours d'une ellipse (un tour complet est effectué en une période $\frac{2\pi}{\omega}$) puis passe aléatoirement à une autre.

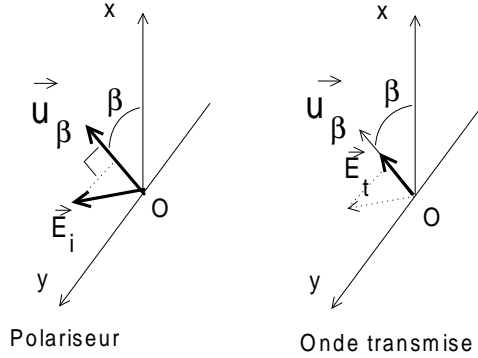


Lumière naturelle

4.5 Polariseurs

4.5.1 Polariseur idéal

Un polariseur idéal est un dispositif optique situé dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation \vec{e}_z et transmettant uniquement la **projection du champ électrique \vec{E}_i sur la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}_\beta(\cos \beta, \sin \beta, 0)$** . La direction de \vec{u}_β est appelée direction passante du polariseur.



La lumière transmise est polarisée rectiligne dans la direction de \vec{u}_β . Le champ électrique de cette onde s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_\beta) \vec{u}_\beta \\ \text{avec } (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_\beta) &= E_{ix} \cos \beta + E_{iy} \sin \beta \\ \text{d'où } \vec{E}_t &\begin{cases} (E_{ix} \cos \beta + E_{iy} \sin \beta) \cos \beta \\ (E_{ix} \cos \beta + E_{iy} \sin \beta) \sin \beta \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4.5.2 Intensité transmise par un polariseur - Loi de Malus

Une onde polarisée \vec{E}_i est envoyée sur un polariseur ($z = 0$, direction passante $\vec{u}_\beta(\cos \beta, \sin \beta)$).

$$\vec{E}_i(0^-, t) \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t + \psi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t + \psi_y) \end{cases} \xrightarrow{\text{polariseur}} \vec{E}_t(0^+, t) = (\vec{E}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_\beta) \vec{u}_\beta$$

L'intensité de l'onde incidente s'écrit :

$$I_i = \frac{1}{\mu_0 c} \langle (\vec{E}_i(t))^2 \rangle = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\mu_0 c}$$

Celle de l'onde transmise vaut :

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle \vec{E}_t^2(0^+, t) \rangle \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle (\vec{E}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_\beta)^2 \underbrace{\vec{u}_\beta \cdot \vec{u}_\beta}_{=1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \langle (\vec{E}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_\beta)^2 \rangle &= \langle (E_{0x} \cos(\omega t + \psi_x) \cos \beta + E_{0y} \cos(\omega t + \psi_y) \sin \beta)^2 \rangle \\ &= E_{0x}^2 \cos^2 \beta \langle \cos^2(\omega t + \psi_x) \rangle + E_{0y}^2 \sin^2 \beta \langle \cos^2(\omega t + \psi_y) \rangle \\ &\quad + 2 E_{0x} E_{0y} \cos \beta \sin \beta \langle \cos(\omega t + \psi_x) \cos(\omega t + \psi_y) \rangle \end{aligned}$$

sachant que $\langle \cos^2(\omega t + \psi_x) \rangle = \frac{1}{2}$ et

$$\langle \cos(\omega t + \psi_x) \cos(\omega t + \psi_y) \rangle = \frac{1}{2} [\langle \cos(2\omega t + \psi_x + \psi_y) \rangle + \langle \cos(\psi_x - \psi_y) \rangle] = \frac{\cos(\psi_x - \psi_y)}{2}$$

d'où pour cette onde polarisée

$$I_t = \frac{E_{0x}^2 \cos^2 \beta}{2\mu_0 c} + \frac{E_{0y}^2 \sin^2 \beta}{2\mu_0 c} + \frac{2E_{0x} E_{0y} \cos \beta \sin \beta \cos(\psi_x - \psi_y)}{2\mu_0 c}$$

Remarque : pour une polarisation circulaire, $E_{0x} = E_{0y}$ et $\cos(\psi_x - \psi_y) = 0$ donc $I_t = \frac{E_{0x}^2 \cos^2 \beta}{2\mu_0 c} + \frac{E_{0y}^2 \sin^2 \beta}{2\mu_0 c} = \frac{E_{0x}^2}{2\mu_0 c}$ à comparer à $I_i = \frac{2E_{0x}^2}{2\mu_0 c}$. L'intensité transmise correspond à la moitié de l'intensité incidente quel que soit β .

Remarque : on reprend les raisonnements précédents pour de la lumière naturelle :

$$\begin{aligned} \langle (\vec{E}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_\beta)^2 \rangle &= \langle E_{0x}^2 \cos^2 \beta \cos^2(\omega t + \psi_x) \rangle + \langle E_{0y}^2 \sin^2 \beta \cos^2(\omega t + \psi_y) \rangle \\ &\quad + 2 \langle E_{0x} E_{0y} \cos \beta \sin \beta \cos(\omega t + \psi_x) \cos(\omega t + \psi_y) \rangle \end{aligned}$$

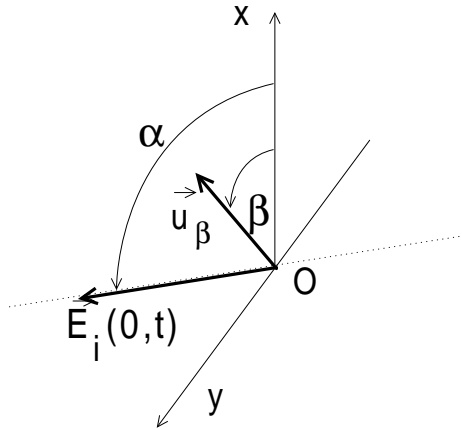
Par définition, E_{0x} est fixe à l'échelle de la période T et aléatoirement variable à une échelle de temps plus longue. En moyenne sur une période T , on a $E_{0x}^2 \cos^2(\omega t + \psi_x) = \frac{(E_{0x})^2}{2}$ d'où pour une moyenne sur un temps beaucoup plus long $\langle E_{0x}^2 \cos^2(\omega t + \psi_x) \rangle = \langle \frac{(E_{0x})^2}{2} \rangle$. On a la même propriété pour E_{0y} , avec de plus par définition de la lumière naturelle l'égalité $\langle (E_{0y})^2 \rangle = \langle (E_{0x})^2 \rangle$.

Enfin, E_{0x} , E_{0y} , ψ_x et ψ_y varient aléatoirement au cours du temps donc le dernier terme de la somme est nul. Il reste

$$\langle (\vec{E}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_\beta)^2 \rangle = \frac{\langle E_{0x}^2 \cos^2 \beta \rangle}{2} + \frac{\langle E_{0y}^2 \sin^2 \beta \rangle}{2} = \frac{\langle E_{0x}^2 \rangle}{2} = \frac{\langle E_{0y}^2 \rangle}{2}$$

Le polariseur ne transmet donc que la moitié de l'intensité naturelle incidente, indépendamment de β .

La 'loi de Malus' exprime l'intensité transmise pour une onde incidente de polarisation rectiligne. Soit en $z = 0$ un polariseur de direction passante $\vec{u}_\beta(\cos \beta, \sin \beta)$.



L'onde incidente est polarisée rectilignement suivant la direction \vec{u}_α formant avec l'axe Ox l'angle α , on l'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(0, t) &= E_0 \cos \omega t \vec{u}_\alpha \\ I_i &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle (\vec{E}_i(t))^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \end{aligned}$$

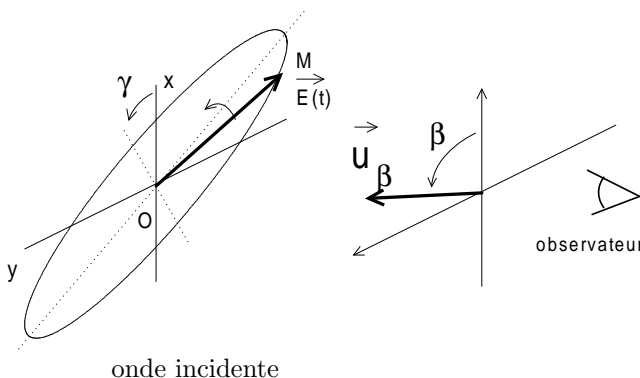
L'intensité transmise se déduit des résultats du paragraphe précédent pour $\psi_y = \psi_x = 0$, $E_{0x} = E_0 \cos \alpha$ et $E_{0y} = E_0 \sin \alpha$ et vaut :

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{2\mu_0 c} (E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + E_0^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2E_0^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 \\ &= I_i \cos^2(\alpha - \beta) \quad \text{'Loi de Malus'} \end{aligned}$$

L'intensité transmise est nulle lorsque \vec{u}_α est perpendiculaire à \vec{u}_β . Cette propriété est souvent utilisée pour vérifier expérimentalement qu'une onde possède une polarisation rectiligne.

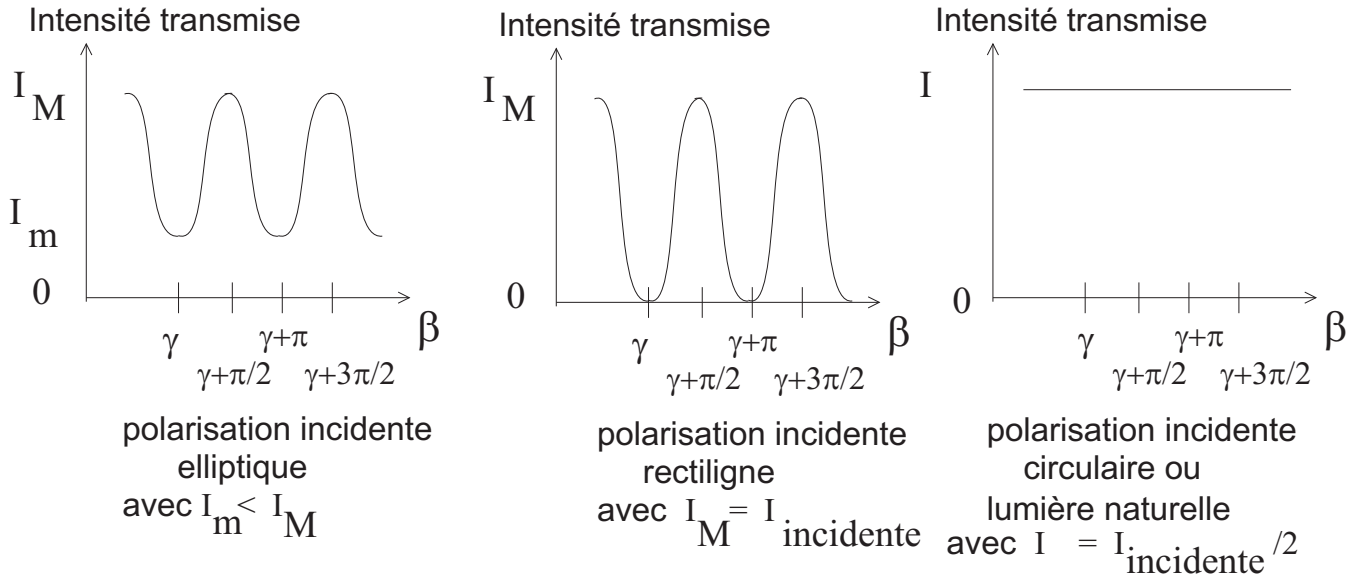
Remarque : \vec{E}_i et \vec{u}_β forment entre eux l'angle $\alpha - \beta$ donc on peut écrire directement que le champ électrique transmis, projection de \vec{E}_i sur \vec{u}_β , est proportionnel à $E_0 \cos(\alpha - \beta)$ d'où le même résultat pour l'intensité transmise.

4.5.3 Interprétation physique



La polarisation de l'onde incidente est elliptique. Le petit axe de l'ellipse forme l'angle γ avec Ox . La direction passante \vec{u}_β du polariseur forme l'angle β avec Ox .

L'intensité transmise par le polariseur est la valeur moyenne de la projection $(\vec{E}(t) \cdot \vec{u}_\beta)^2$. Elle passe par les extremums I_M et I_m quand \vec{u}_β est orienté selon le grand ou le petit axe de l'ellipse. On en déduit les variations qualitatives de l'intensité transmise en fonction de l'angle β selon la polarisation de l'onde incidente.



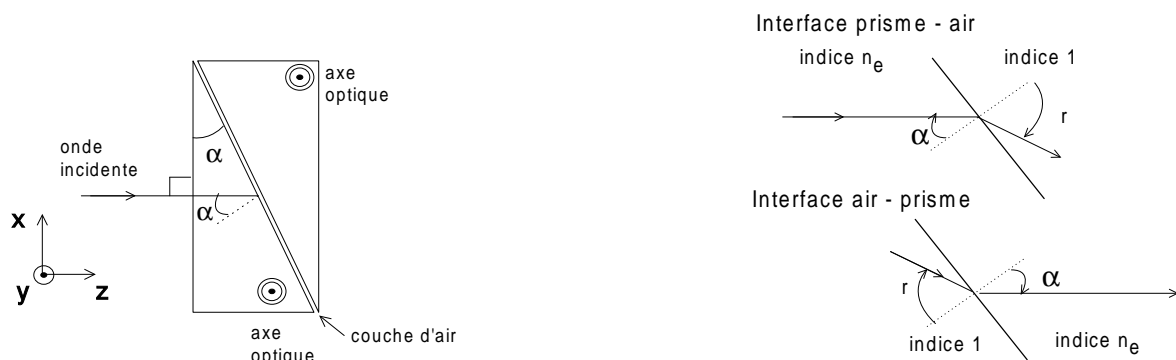
4.5.4 Exemples de dispositifs polariseurs

Polaroïds

Certains matériaux anisotropes appelés dichroïques ne sont pas transparents et absorbent beaucoup plus efficacement l'une des deux ondes polarisées transmises. En ajustant leur épaisseur, on atténue presque totalement le faisceau ayant la mauvaise polarisation tout en faisant passer la quasi totalité de la puissance transportée par l'autre. La lumière transmise est donc polarisée rectilignement. Les polariseurs polaroïd fonctionnent sur ce principe et sont très utiles tant que l'on ne recherche pas une excellente transmission ou une polarisation rectiligne très pure. Ils ont été inventés en 1938 et sont très pratiques d'utilisation parce qu'ils se présentent sous forme de feuilles de plastique que l'on découpe à volonté. Par contre, ils sont dégradés par de fortes puissances lumineuses.

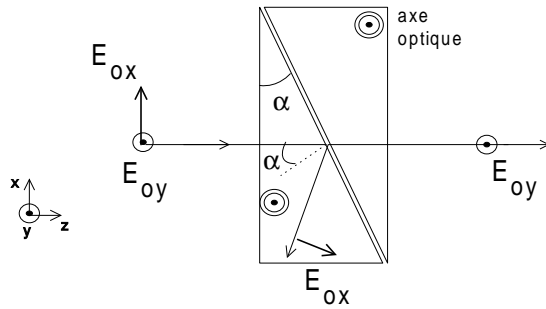
Polariseurs à prismes anisotropes

On considère un ensemble de deux prismes en calcite (CaCO_3 , $n_o = 1.6584$, $n_e = 1.4864$ pour $\lambda = 589.3 \text{ nm}$) séparés par une mince couche d'air. L'axe optique est parallèle à la face d'entrée et perpendiculaire au plan de la figure.



La composante E_{0y} du champ incident est polarisée parallèlement à l'axe optique et constitue l'onde extraordinaire. Elle se propage dans le premier prisme en voyant l'indice n_e puis arrive sur l'interface prisme 1-air avec l'angle d'incidence α . Ce rayon est réfracté dans la direction r vérifiant $n_e \sin \alpha = 1 \sin r$. Le rayon entre dans le prisme 2 avec un angle α_2 vérifiant $1 \sin r = n_e \sin \alpha_2$ donc égal à α . Il arrive en incidence normale sur la face de sortie du prisme dont il ressort parallèle au rayon incident.

La composante E_{0x} du champ incident est polarisée perpendiculairement à l'axe optique (onde ordinaire). Elle se propage dans le premier prisme en voyant l'indice n_o . En construisant le prisme pour que $\alpha = 40$ degrés, on a $n_o \sin \alpha = 1,066$ et il n'existe aucun angle vérifiant $n_o \sin \alpha = 1 \sin r$. Ce rayon est donc totalement réfléchi sur la face de sortie du prisme 1, aucune lumière n'est transmise dans le prisme 2. Pour la composante E_{0y} , $n_e \sin \alpha = 0,96$ et la plus grande partie de la lumière est transmise par le système de prismes. La symétrie du dispositif fait que le rayon transmis est parallèle au rayon incident.



Ce dispositif, appelé polariseur de Glan-Taylor ou de Glazebrook, transmet un faisceau polarisé rectilignement avec une direction de polarisation parallèle à l'axe optique du prisme. Par rapport à un polaroïd, il présente les avantages suivants :

- excellente transparence pour l'onde transmise
- la composante bloquée est déviée, et ne provoque pas d'échauffement du matériau (dans un polaroïd, l'énergie bloquée est dissipée sous forme de chaleur dans le polariseur ce qui peut le dégrader dans le cas d'un faisceau intense)

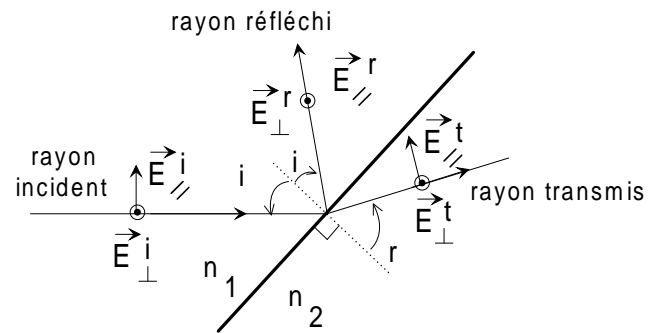
Dispositifs utilisant l'incidence de Brewster

Soit une onde arrivant sur le plan de séparation entre deux milieux isotropes d'indices n_1 et n_2 . Les relations de continuité des champs d'une onde électromagnétique (équations de Maxwell) permettent de calculer les coefficients de réflexion et de transmission de l'intensité au niveau de l'interface. Lorsque l'onde n'est pas en incidence normale, l'efficacité de sa réflexion dépend de sa nature vectorielle. On définit le plan d'incidence comme celui contenant le rayon incident et la normale à l'interface puis on décompose l'onde incidente en une composante polarisée parallèlement au plan d'incidence, et une composante polarisée perpendiculairement à ce même plan.

Les coefficients de réflexion pour l'intensité de chacune de ces deux composantes s'écrivent

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(i - r)}{\tan^2(i + r)} \quad R_{\perp} = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}$$

où i et r sont les angles que forment les rayons incidents et réfractés avec la normale.



On constate que $R_{\parallel} = 0$ (dénominateur infini) pour les valeurs particulières i_B et r_B vérifiant

$$i_B + r_B = \pi/2 \Leftrightarrow n_1 \sin i = n_2 \sin \frac{\pi}{2} - i \Leftrightarrow \tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ou} \quad \tan r_B = \frac{n_1}{n_2}$$

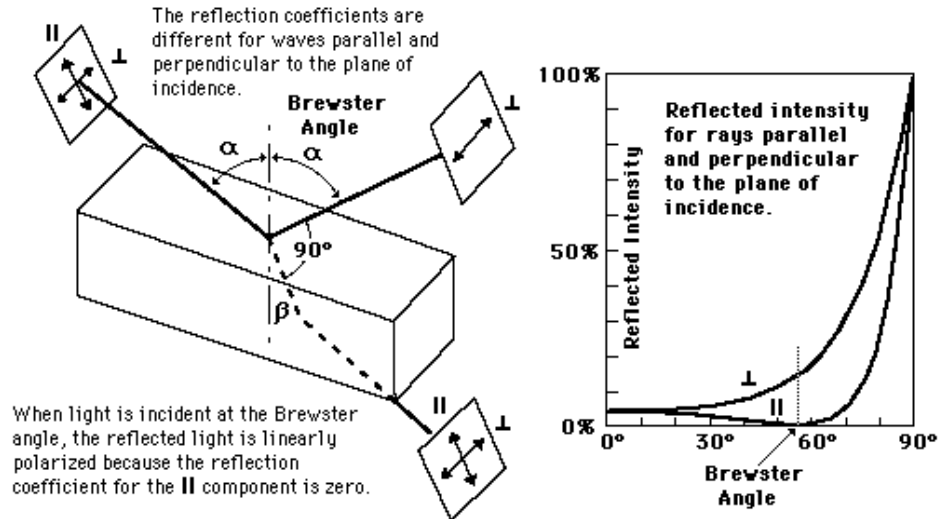
C'est l'incidence de Brewster. Pour l'intensité lumineuse associée à la direction de polarisation parallèle au plan d'incidence, le facteur de réflexion vaut 0 et le facteur de transmission vaut 1.

On prend l'exemple d'une lame à faces parallèles d'indice n placée dans l'air (indice 1). En incidence de Brewster les facteurs de réflexion et de transmission valent :

- Intensité associée à la polarisation parallèle au plan d'incidence : $T_{\parallel} = 1, R_{\parallel} = 0$
- Intensité associée à la polarisation perpendiculaire au plan d'incidence : $T_{\perp} = \frac{16n^4}{(1+n^2)^4} = 0,71$ pour $n = 1,52, R_{\perp} = 1 - T_{\perp}$

Un faisceau de lumière naturelle traversant une pile de p lames transparentes à faces parallèles est transmis avec un facteur de transmission 1 pour la composante polarisée dans le plan d'incidence et $T^p \rightarrow 0$ pour l'autre composante. Ce dispositif constitue un polariseur efficace mais volumineux⁷.

7. Ce système est utilisé dans le TP 'Effet Brossel' pour de la lumière proche Ultra Violet, afin d'isoler la lumière émise avec une polarisation donnée et par conséquent correspondant à la désexcitation des atomes de mercure entre des niveaux quantiques bien identifiés



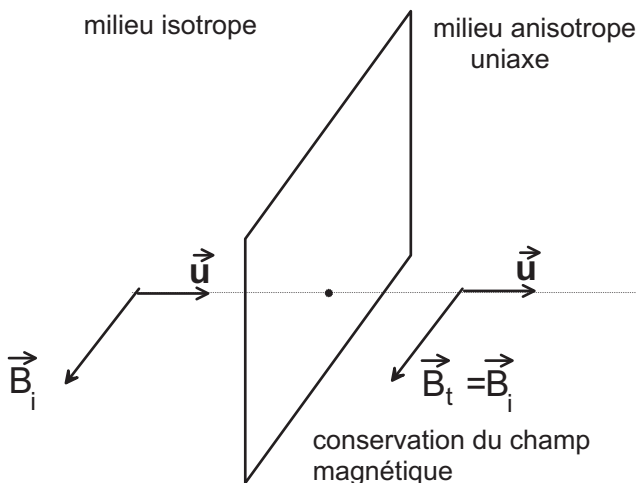
4.6 Modification de la polarisation d'une onde à la traversée d'une lame anisotrope

4.6.1 Lame anisotrope - Lignes neutres

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur e , taillée dans un milieu anisotrope, qu'on éclaire par une onde plane de direction de propagation \vec{u} .

Les équations de Maxwell écrites au niveau d'une interface diélectrique justifient la conservation de la composante tangentielle de \vec{u} , et celle du vecteur champ magnétique \vec{B} .

On raisonnera désormais pour une onde en incidence normale. La composante de \vec{u} tangentielle à l'interface est nulle avant la lame donc le reste à l'intérieur puis après la lame. L'onde conserve la même direction de propagation \vec{u} .



Utilisons la conservation de \vec{B} à la traversée de la face d'entrée pour analyser le comportement du vecteur déplacement à l'interface vide-milieu anisotrope.

A l'intérieur, seules deux ondes peuvent se propager sans déformation avec la direction de propagation \vec{u} , et leurs vecteurs déplacement sont orientés suivant \vec{d}' ou \vec{d}'' . Chacune est solution des équations de Maxwell avec ses champs vérifiant $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ d'où :

- avant la lame (n supposé égal à 1) : $\mu_0 \omega \vec{D} = -\frac{\omega}{c_0} \vec{u} \wedge \vec{B}$

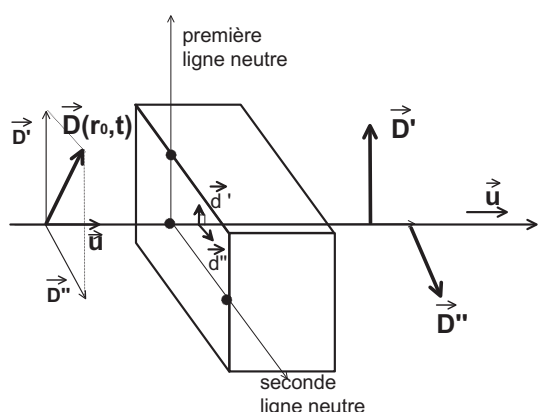
- dans la lame :

$\mu_0 \omega \vec{D}' = -n' \frac{\omega}{c_0} \vec{u} \wedge \vec{B}$ et $\mu_0 \omega \vec{D}'' = -n'' \frac{\omega}{c_0} \vec{u} \wedge \vec{B}$ pour des valeurs spécifiques n' ou n'' de n .

Les quantités \vec{u} et \vec{B} restant inchangées à l'entrée dans la lame, les produits vectoriels précédents justifient que l'onde qui aura à l'intérieur le vecteur déplacement suivant \vec{d}' doit posséder avant la lame une direction de polarisation \vec{d}' . Le même raisonnement s'applique pour la face de sortie ou pour une onde incidente polarisée suivant \vec{d}'' .

Les directions de \vec{d}' et \vec{d}'' définissent les **lignes neutres** de la lame anisotrope. Une onde incidente polarisée suivant ces directions traversera la lame sans déformation en voyant les indices optiques n' ou n'' avec deux temps de traversée $\frac{n' e}{c_0}$ ou $\frac{n'' e}{c_0}$ généralement différents.

Pour la suite, on écrira les composantes du champ incident dans le référentiel $(Oxyz)$ constitué par ces lignes neutres et $\vec{e}_z = \vec{u}$, afin de déduire simplement le temps de traversée de chacune. Des valeurs distinctes de n' et n'' font que les composantes acquièrent au passage de la lame un décalage temporel, d'où en général une déformation de l'onde.



On retiendra les éléments suivants :

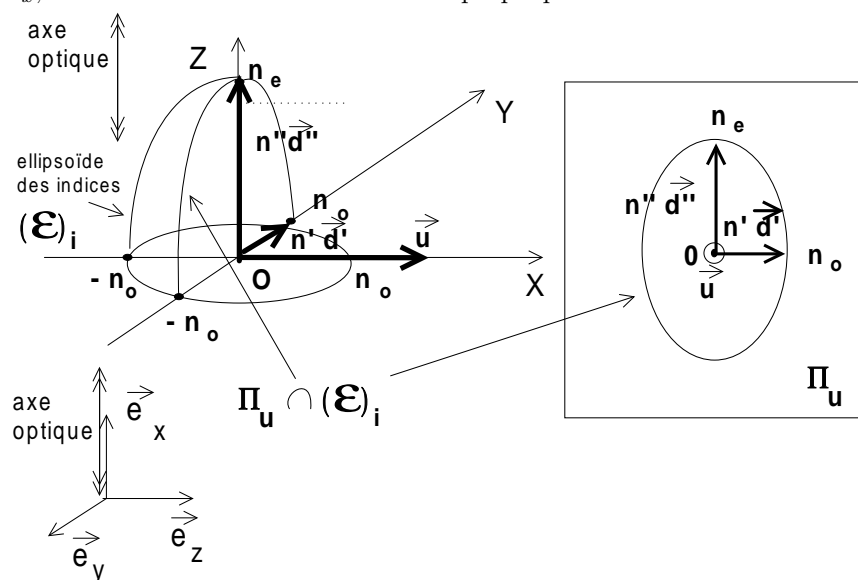
- lame anisotrope, entre $z = 0$ et $z = e$.
- onde plane monochromatique en incidence normale.

Propriétés :

- pour une incidence normale, la direction de propagation \vec{u} reste inchangée à la traversée de la face d'entrée ou de sortie de la lame.
- une onde incidente avec \vec{E} et \vec{D} orientés selon \vec{d}' (resp. \vec{d}'') traverse la lame sans déformation. Elle possède après la lame la même polarisation rectiligne.
- Pour un vecteur déplacement \vec{D} de l'onde incidente quelconque dans le plan perpendiculaire à \vec{u} , ses projections sur les directions \vec{d}' et \vec{d}'' (les lignes neutres de la lame) traversent le système sans déformation mais avec des temps de parcours distincts $\frac{n'e}{c_0}$ et $\frac{n''e}{c_0}$. On va montrer qu'en général cela modifie la polarisation de l'onde résultante.

4.6.2 Déphasage acquis à la traversée d'une lame anisotrope uniaxe

L'onde se propageant suivant \vec{e}_z éclaire la lame en incidence normale. Ce matériau est uniaxe d'axe optique selon \vec{e}_x , la lame est donc taillée avec l'axe optique parallèle à la face d'entrée.



Transposer les notations du §4.3.2 montre que les directions des lignes neutres sont \vec{e}_x et \vec{e}_y associées respectivement aux indices n_e et n_0 . Une onde de polarisation rectiligne suivant \vec{e}_x (resp. \vec{e}_y) traverse la lame sans déformation en voyant l'indice n_e (resp. n_0).

Formulation plus synthétique

hyp :

- milieu anisotrope uniaxe, axe optique suivant \vec{e}_x
- onde en incidence normale donc de direction de propagation $\vec{u} = \vec{e}_z$ dans le matériau.

Propriétés :

- onde ordinaire : $\vec{d}_o \perp \text{plan}(\underbrace{\vec{u}}_{\vec{e}_z}, \underbrace{\text{axe optique}}_{\vec{e}_x})$, on prend $\vec{d}_o = \vec{e}_y$.
- onde extraordinaire : $\vec{d}_e \in \text{plan}(\vec{u}, \text{axe optique})$ et $\vec{d}_e \perp \vec{u}$, on prend $\vec{d}_e = \vec{e}_x$. On a $\vec{u} \perp \text{axe optique}$ (cas particulier 1 du §4.3.2) et dans ce cas l'onde extraordinaire voit l'indice $n'' = n_e$.
- les lignes neutres de cette lame sont donc Ox et Oy , associées respectivement aux indices optiques n_e et n_o .

On écrit les composantes de \vec{E} à l'entrée puis à la sortie de la lame, dans le référentiel des lignes neutres. La composante E_x pénètre dans la lame en $z = 0$ puis se propage jusqu'à $z = e$ en voyant l'indice n_e . Le champ E_x en $z = e$ reproduit donc celui en $z = 0$ avec un retard $\frac{n_e e}{c_0}$. Pour la composante E_y , l'indice vu est n_o et le retard $\frac{n_o e}{c_0}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(0, t) \\ E_y(0, t) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} E_{0x} \cos(\omega t + \psi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t + \psi_y) \end{array} \right. \quad \text{lame} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x(e, t) \\ E_y(e, t) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} E_{0x} \cos(\omega(t - \frac{n_e e}{c_0}) + \psi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega(t - \frac{n_a e}{c_0}) + \psi_y) \end{array} \right.$$

Pour simplifier l'écriture, on définit t' par $\omega t' = \omega(t - \frac{ne e}{c_0}) + \psi_x \Leftrightarrow \omega t = \omega t' + \omega \frac{ne e}{c_0} - \psi_x$ (changement de l'origine

des temps). On peut écrire

$$\begin{cases} E_x(e, t') &= E_{0x} \cos \omega t' \\ E_y(e, t') &= E_{0y} \cos(\omega t' + \omega \frac{n_e e}{c_0} - \psi_x - \omega \frac{n_o e}{c_0} + \psi_y) \\ &= E_{0y} \cos(\omega t' + \psi_y - \psi_x + \Delta\psi) \end{cases}$$

La différence de phase entre les composantes E_y et E_x passe de $\psi_y - \psi_x$ à l'entrée de la lame à $\psi_y - \psi_x + \Delta\psi$ à sa sortie, avec $\Delta\psi = \omega \frac{(n_e - n_o) e}{c_0}$. La polarisation d'une onde est donc en général modifiée à la traversée de cette lame.

Remarque 1 : la modification des phases pour les composantes du champ se décrit aussi simplement uniquement parce que ces composantes sont écrits dans le référentiel des lignes neutres de la lame et peuvent ainsi s'assimiler à deux ondes de polarisation rectiligne voyant les indices n_e et n_o .

Remarque 2 : la lame est taillée avec l'axe optique parallèle à sa face d'entrée pour être dans le cas particulier où le rayon lumineux reste parallèle à la direction de propagation. Dans ce cas, les ondes ordinaire et extraordinaire ne se décalent pas latéralement à la traversée du cristal.

Remarque : ce type de lame introduit un retard pour la phase d'une composante des champs par rapport à la phase de l'autre composante; on l'appelle "lame à retard".

4.6.3 lame demi-onde et lame quart-d'onde

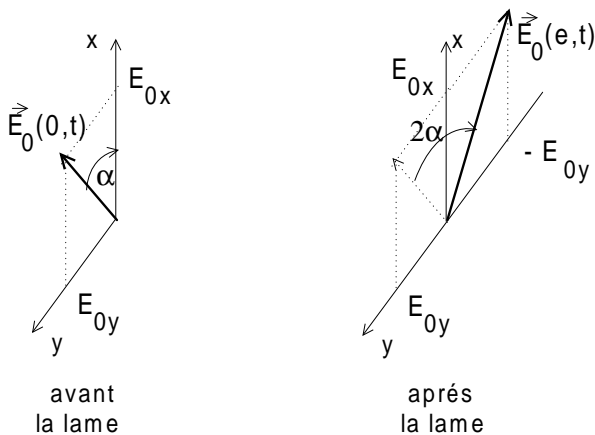
On appelle **lame demi-onde** une lame anisotrope à faces parallèles pour laquelle

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \pi + p 2\pi \Leftrightarrow \omega \frac{(n_e - n_o) e}{c_0} = (2p + 1)\pi \\ &\Leftrightarrow (n_e - n_o) e = (2p + 1) \frac{\pi c_0}{2\pi\nu} = (2p + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ avec } p \text{ entier} \end{aligned}$$

Cette lame augmente le déphasage de π (2π) pour une onde de longueur d'onde λ donnée, elle est aussi appelée lame $\lambda/2$.

Exemple 1 : une onde polarisée rectiligne est envoyée sur une lame demi-onde de lignes neutres Ox, Oy . On détermine la polarisation de l'onde transmise.

$$\begin{cases} E_x(0, t) = E_{0x} \cos \omega t \\ E_y(0, t) = E_{0y} \cos \omega t \end{cases} \xrightarrow{\text{lame demi-onde}} \begin{cases} E_x(e, t') = E_{0x} \cos \omega t' \\ E_y(e, t') = E_{0y} \cos(\omega t' + \pi) \\ = -E_{0y} \cos \omega t' \end{cases}$$



L'onde transmise est toujours polarisée rectiligne mais sa direction de polarisation est symétrique de celle de l'onde incidente par rapport aux lignes neutres de la lame. Cette propriété est très utilisée pour modifier la direction de polarisation d'une onde. Si la direction de polarisation de l'onde incidente forme un angle α avec une ligne neutre, celle de l'onde transmise semble avoir tourné de 2α à la traversée de la lame demi-onde.

Une lame dite **lame quart d'onde** (lame $\lambda/4$) augmente le déphasage de $\pi/2$ (π) :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \frac{\pi}{2} + p\pi \Leftrightarrow \omega \frac{(n_e - n_o) e}{c_0} = (2p + 1) \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow (n_e - n_o) e = (2p + 1) \frac{1}{2} \frac{\pi c_0}{2\pi\nu} = (2p + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ avec } p \text{ entier} \end{aligned}$$

Exemple 2 : on envoie une onde polarisée rectiligne sur une lame quart-d'onde de lignes neutres Ox, Oy . Le champ électrique de l'onde incidente forme un angle α avec l'axe Ox , son amplitude est notée E_0 . On a donc $E_{0x} = E_0 \cos \alpha$

et $E_{0y} = E_0 \sin \alpha$.

$$\begin{cases} E_x(0, t) = E_0 \cos \alpha \cos \omega t \\ E_y(0, t) = E_0 \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \xrightarrow{\text{lame quart-d'onde} \quad \text{lignes neutres } Ox \ Oy} \begin{cases} E_x(e, t') = E_0 \cos \alpha \cos \omega t' \\ E_y(e, t') = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t' \pm \frac{\pi}{2}) \\ = \mp E_0 \sin \alpha \sin \omega t' \end{cases}$$

Le déphasage entre les composantes de l'onde transmise vaut $\pm \frac{\pi}{2}$, il s'agit d'une onde polarisée elliptique avec les axes de l'ellipse correspondant aux axes du repère. Si on a de plus $E_{0x} = E_{0y} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, cette onde est polarisée circulairement.

Une lame quart-d'onde **convenablement orientée** permet de transformer une polarisation rectiligne en une polarisation circulaire. En inversant le raisonnement, on montre que la lame quart-d'onde transforme une polarisation circulaire en polarisation rectiligne et une polarisation elliptique d'axes correspondant aux lignes neutres en une polarisation rectiligne⁸.

Exemple 3 : une onde polarisée rectiligne suivant Ox est envoyée sur une lame demi-onde (ou quart-d'onde) de lignes neutres Ox, Oy .

$$\begin{cases} E_x(0, t) = E_0 \cos \omega t \\ E_y(0, t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{lame demi-onde} \quad \text{lignes neutres } Ox \ Oy} \begin{cases} E_x(e, t') = E_0 \cos \omega t' \\ E_y(e, t') = 0 \end{cases}$$

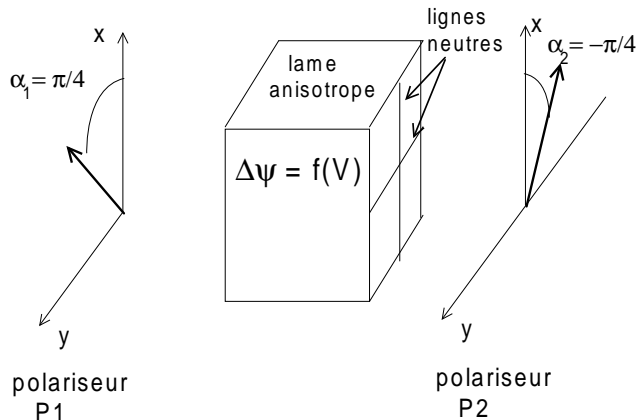
L'onde incidente polarisée rectilignement suivant une ligne neutre traverse la lame sans déformation donc sans modification de sa polarisation.

Remarque : une lame est taillée avec une épaisseur e pour que $(n_e - n_o)e$ produise le déphasage voulu, mais la valeur de $\Delta\psi$ dépend de ω et λ . Une lame demi-onde ou quart-d'onde est construite pour une longueur d'onde d'utilisation bien précise. Ses faces sont souvent traitées antireflet pour cette même longueur d'onde.

4.7 Exemples d'utilisation

Les utilisations des propriétés de polarisation de la lumière sont innombrables, on en cite seulement quelques unes, illustrée précédemment ou bien ci-dessous :

- Polariseurs, séparateurs de faisceau (Cf 4.5.4)
- Dispositifs pour créer ou analyser une polarisation, voir TD 8.
- Modulateurs pour les télécommunications
- Anisotropie induite par des contraintes mécanique : visualisation des contraintes mécaniques dans une maquette en plexiglass
- Mesure des propriétés d'une surface ou d'une couche mince par réflexion et modification de la polarisation d'une onde.
- Optique non linéaire (Cf TP doublage de fréquence).
- Mesures quantiques, contrôle quantique par interaction lumière matière



Une lame anisotrope est placée entre deux polariseurs P_1 et P_2 de directions passant \vec{u} et \vec{v} croisée formant un angle $\pi/4$ avec les lignes neutres de la lame.

L'application d'une tension électrique V modifie les indices optiques n_o et n_e ("effet Pockels"), donc la valeur du déphasage $\Delta\psi = \omega \frac{(n_e - n_o)e}{c_0}$ acquis à la traversée de la lame.

8. On rappelle que le déphasage des composantes d'une ellipse est fonction du référentiel dans lequel ces composantes sont écrites, Cf 4.4.1. Expérimentalement, on peut connaître les directions des lignes neutres d'une lame anisotrope mais aussi déterminer les directions des axes de l'ellipse (Cf TD 8). Il reste à faire tourner la lame dans son plan pour faire coïncider les orientations des axes et des lignes neutres, faire ainsi en sorte que le déphasage des composantes de l'onde incidente soit $\pm \frac{\pi}{2}$, et pouvoir ainsi obtenir après la lame quart d'onde un déphasage 0 ou π c'est à dire une polarisation rectiligne

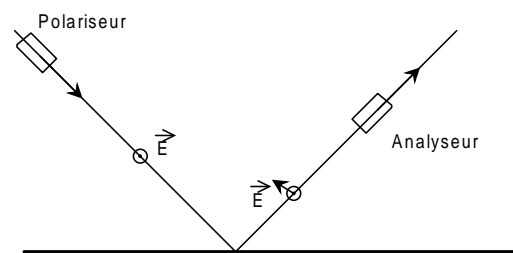
Pour $V = 0$, la lame ne modifie pas la polarisation de l'onde et P_2 arrête totalement la lumière.

Si V est ajusté pour avoir $\Delta\psi = \pi$, la lame joue le rôle d'une lame demi-onde, modifie la direction de l'onde transmise par P_1 pour la rendre parallèle à la direction passante de P_2 , la lumière est intégralement transmise.

Le composant décrit ici peut être réalisé avec un cristal macroscopique et des polariseurs, mais on sait également le réaliser à l'échelle de quelques microns, sur des systèmes opto-électroniques intégrés pouvant traiter le signal arrivant par une fibre optique pour moduler en fonction d'une commande électrique très haute fréquence (GHz) la lumière transmise dans une autre fibre.

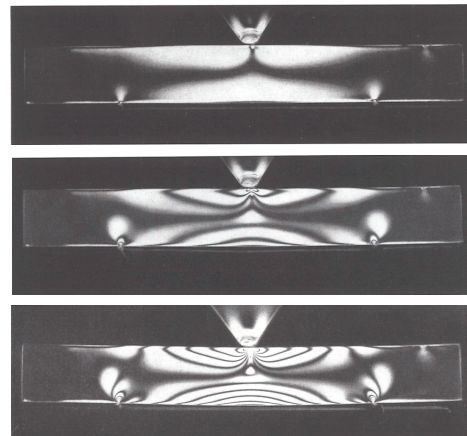
Le même montage sert d'interrupteur optique ultra-rapide pour des lasers. Une tension appliquée au matériau pour le transformer en lame demi-onde permet de tourner de 90 degré la direction de polarisation de l'onde qui arrive sur le second polariseur, pour rendre l'ensemble passant ou bloquant, avec un temps de commutation de quelques nanosecondes.

- mesures physiques non destructives : mesure des propriétés d'une interface par la technique d'ellipsométrie. Une surface est éclairée par une onde polarisée. La mesure précise de la polarisation de l'onde réfléchie conduit à la détermination de propriétés importantes de la surface ou des atomes déposés sur l'interface (susceptibilité diélectrique, épaisseur, nature chimique, orientation des molécules, etc.). On sait mesurer la modification d'une direction de polarisation au millièème de degrés près, les mesures d'ellipsométrie sont extrêmement précises.



- visualisation des contraintes mécaniques dans une maquette en plexiglass

Le plexiglass est isotrope. Soumis à des contraintes mécaniques, une maquette devient anisotrope (support en bas sur les bords de la poutre, pointe appuyant au centre de la face supérieure). L'observation entre polariseur et analyseur croisés met en évidence les zones d'égale contrainte, pour des pressions modérées (en haut) à plus fortes (en bas).

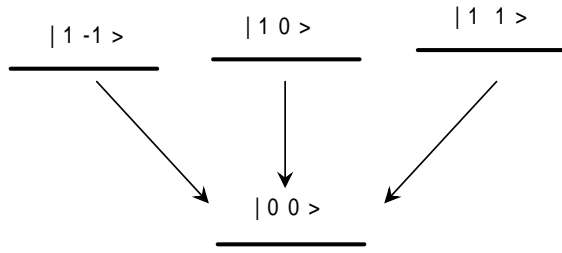


Visualisation des contraintes dans une poutre plastique observée entre polariseur et analyseur croisés

- Application à une expérience d'optique non linéaire

Une onde intense de pulsation ω peut dans un matériau adapté générer une onde de pulsation 2ω . Le processus est efficace si les deux ondes se propagent exactement à la même vitesse dans le matériau, ce qui pose problème parce que d'une manière générale l'indice optique augmente avec la pulsation, $n^{2\omega} > n^\omega$. Des matériaux anisotropes permettent d'obtenir une même vitesse de propagation des deux ondes lorsque l'une est de type ordinaire et l'autre de type extraordinaire, avec donc des directions de polarisation bien définies et perpendiculaires entre elles. Les indices sont rendus égaux en ajustant la direction de propagation de l'onde, processus qu'on appelle 'accord de phase' (Cf TP 'Doublage de Fréquences')

- mesures physiques quantiques : caractérisation de l'état quantique de l'émetteur, contrôle cohérent des transitions,



Pour une orientation de la direction des faisceaux judicieusement choisie par rapport à la direction de l'axe quantique, l'analyse de la polarisation de la lumière permet de connaître l'état quantique de départ d'une transition (émission), ou de forcer une transition vers un état quantique particulier (Cf TP Effet Zeeman, TP Effet Brossel).

4.8 Annexes : Forme des ondes se propageant dans un milieu anisotrope

4.8.1 Position du problème

Une onde peut se propager sans déformation dans un milieu si les quantités \vec{E} , \vec{B} et \vec{D} associées vérifient d'une part les équations de Maxwell, d'autre part la condition $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ imposée par le matériau.

On cherche une solution de toutes ces équations possédant la forme d'une onde plane homogène monochromatique, de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec un champ électrique écrit en représentation complexe sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \begin{cases} E_X(\vec{r}, t) = E_{0X} \exp i \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_X \right) \\ E_Y(\vec{r}, t) = E_{0Y} \exp i \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_Y \right) \\ E_Z(\vec{r}, t) = E_{0Z} \exp i \left(\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi} \right) + \psi_Z \right) \end{cases}$$

avec E_{0X} , E_{0Y} et E_{0Z} réels. Avec cette écriture, v_φ s'interprète comme la vitesse de propagation de la phase de l'onde (vitesse de phase)⁹.

À partir des caractéristiques du matériau (contenues dans les coefficients n_X , n_Y , n_Z) et pour une direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ choisie, l'objectif est de déterminer à quelles conditions sur v_φ il existe des solutions non nulles, et quels sont alors les paramètres E_{0X} , ψ_X , E_{0Y} , ψ_Y , E_{0Z} , ψ_Z correspondants.

4.8.2 Système d'équations

Pour des ondes planes homogènes monochromatiques de pulsation ω et vitesse de phase v_φ , les opérateurs vectoriels apparaissant dans les équations de Maxwell se simplifient en¹⁰ :

$$\text{div } \vec{D} = -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \cdot \vec{D} \quad \text{rot } \vec{E} = -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \omega \vec{B}$$

9. Autre formulation plus physique : la phase en un point reste constante si ce point se déplace suivant \vec{u} avec la vitesse v_φ

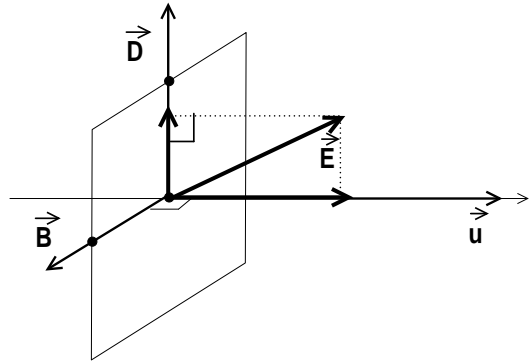
10. se vérifie avec $\text{div } \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_X}{\partial X} + \frac{\partial D_Y}{\partial Y} + \frac{\partial D_Z}{\partial Z}$ et $\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix}$

L'onde plane pouvant se propager dans le milieu matériel doit donc être solution du système suivant

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Équations de Maxwell} \\
 &\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{D} &= 0 &\Leftrightarrow & -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \cdot \vec{D} = 0 \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0 &\Leftrightarrow & -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \cdot \vec{B} = 0 \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\Leftrightarrow & -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B} \Leftrightarrow \frac{1}{v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{E} = \vec{B} \\
 \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &\Leftrightarrow & -i \frac{\omega}{v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{B} = i \mu_0 \omega \vec{D} \Leftrightarrow -\frac{1}{v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{D}
 \end{aligned}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Contraintes imposées par le matériau} \\
 &\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} D_X = \epsilon_0 n_X^2 E_X \\ D_Y = \epsilon_0 n_Y^2 E_Y \\ D_Z = \epsilon_0 n_Z^2 E_Z \end{cases}
 \end{aligned} \right\}$$

Les premières équations imposent : $\vec{D} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \perp \vec{B}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{D} \perp \vec{B}$ à un instant quelconque. Les vecteurs \vec{D} , \vec{u} et \vec{E} sont dans le même plan perpendiculaire à \vec{B} ; de même, \vec{B} et \vec{D} sont dans le même plan perpendiculaire à \vec{u} .



On élimine \vec{B} dans les équations de Maxwell :¹¹

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= -\frac{1}{\mu_0 v_\varphi} \vec{u} \wedge \vec{B} \\
 &= -\frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})
 \end{aligned}$$

avec $\mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1$ qui entraîne $\frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} = \epsilon_0 (\frac{c_0}{v_\varphi})^2$, et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$. Les relations de Maxwell écrites pour une onde plane se propageant avec la direction \vec{u} dans le milieu anisotrope impliquent la relation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(\frac{c_0}{v_\varphi}\right)^2 (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}) \quad (4.2)$$

Il apparaît ici que les solutions (\vec{D}, \vec{E}) sont fonctions de la direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

La relation $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ est utilisée pour éliminer les composantes de \vec{D} et obtenir le système

$$\begin{cases} \epsilon_0 n_X^2 E_X = \epsilon_0 \left(\frac{c_0}{v_\varphi}\right)^2 (E_X - \alpha(\alpha E_X + \beta E_Y + \gamma E_Z)) \\ \epsilon_0 n_Y^2 E_Y = \epsilon_0 \left(\frac{c_0}{v_\varphi}\right)^2 (E_Y - \beta(\alpha E_X + \beta E_Y + \gamma E_Z)) \\ \epsilon_0 n_Z^2 E_Z = \epsilon_0 \left(\frac{c_0}{v_\varphi}\right)^2 (E_Z - \gamma(\alpha E_X + \beta E_Y + \gamma E_Z)) \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour une direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ donnée et un matériau caractérisé par n_X , n_Y et n_Z , on obtient ici un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues (E_X, E_Y, E_Z) . On discutera dans la suite à quelles conditions ce système admet des solutions non nulles et quelles sont les contraintes sur ces solutions, jusqu'à pouvoir déterminer complètement quelles ondes peuvent se propager avec la direction \vec{u} dans ce milieu anisotrope.

11. C'est le même calcul que celui qui conduit à l'écriture des équations de propagation de \vec{E} dans un milieu isotrope de susceptibilité diélectrique χ et montre que les ondes solutions se propagent à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi)}} = \frac{c_0}{n}$ avec $n = \sqrt{1 + \chi}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} &= \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial(\vec{B})}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) \\
 \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \text{ avec } \vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} \\
 \text{et } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \text{ sachant que } \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\
 \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi)}} = \frac{c_0}{n}
 \end{aligned}$$

4.8.3 Contraintes sur la vitesse de phase de l'onde et sur son type de polarisation

Un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues possède une solution non nulle à condition que son déterminant soit nul. On peut montrer que c'est le cas pour le système (4.3) si et seulement si le paramètre v_φ laissé libre dans la forme générale de la solution vérifie :

$$\frac{\alpha^2 n_X^2}{(n_X^2 - (\frac{c_0}{v_\varphi})^2)} + \frac{\beta^2 n_Y^2}{(n_Y^2 - (\frac{c_0}{v_\varphi})^2)} + \frac{\gamma^2 n_Z^2}{(n_Z^2 - (\frac{c_0}{v_\varphi})^2)} = 0 \quad (\text{Équation de Fresnel})$$

Pour $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ fixé, on peut montrer que cette équation admet deux racines réelles positives¹² v'_φ et v''_φ .

Il existe donc au plus deux valeurs possibles pour la vitesse de phase d'une onde de direction de propagation $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le milieu anisotrope¹³. Ces ondes possèdent des vitesses de phase qu'on peut noter $v'_\varphi = \frac{c_0}{n'}$ ou $v''_\varphi = \frac{c_0}{n''}$ comme si elles voyaient dans ce milieu anisotrope un indice optique n' ou n'' , indices dont les valeurs sont fonction de $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Lorsque son déterminant est nul, le système homogène (4.3) se réduit à un système de deux équations à deux inconnues $\frac{E_X}{E_Z}$ et $\frac{E_Y}{E_Z}$. Les coefficients de ce système sont réels donc les inconnues sont réelles. On rappelle la forme générale de l'onde

$$\begin{cases} E_X(\vec{r}, t) &= E_{0X} \exp i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi}) + \psi_X \\ E_Y(\vec{r}, t) &= E_{0Y} \exp i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi}) + \psi_Y \\ E_Z(\vec{r}, t) &= E_{0Z} \exp i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi}) + \psi_Z \end{cases}$$

Les rapports $\frac{E_X}{E_Z}$ et $\frac{E_Y}{E_Z}$ sont réels seulement si $\psi_X = \psi_Z$ et $\psi_Y = \psi_Z$, modulo π . L'origine des temps peut être choisie telle que $\psi_Z = 0$ et on prend $\psi_X = \psi_Y = \psi_Z = 0$.

Le champ électrique de l'onde solution est alors proportionnel à

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp i\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v_\varphi}) \quad \text{avec } v_\varphi = \frac{c_0}{n'} \text{ ou } v_\varphi = \frac{c_0}{n''}$$

Il reste à tout instant colinéaire à $\vec{E}_0(E_{0X}, E_{0Y}, E_{0Z})$, c'est par définition d'une onde **polarisée rectilignement**.

De même, $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$ reste à tout instant colinéaire à $\vec{D}_0(\epsilon_0 n_X^2 E_{0X}, \epsilon_0 n_Y^2 E_{0Y}, \epsilon_0 n_Z^2 E_{0Z})$. Contrairement à \vec{E} , le vecteur \vec{D} a la propriété de rester perpendiculaire à \vec{u} que le milieu soit isotrope ou anisotrope. Pour cette raison, c'est sa direction qu'on choisit pour définir **la direction de polarisation** de l'onde.

Il reste à déterminer les vecteurs \vec{D}_0 et \vec{E}_0 pour les deux ondes se propageant dans la direction \vec{u} en voyant les indices optiques n' et n'' .

4.8.4 Détermination des directions de polarisation (ellipsoïde des indices)

On repart du système

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 n^2 (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}) & \text{en notant } n = \frac{c_0}{v'_\varphi} = n' \text{ ou } n = \frac{c_0}{v''_\varphi} = n'' \\ & \text{pour les deux ondes solutions} \\ \vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} D_X = \epsilon_0 n_X^2 E_X \\ D_Y = \epsilon_0 n_Y^2 E_Y \\ D_Z = \epsilon_0 n_Z^2 E_Z \end{cases} & \text{où } n_X, n_Y \text{ et } n_Z \text{ caractérisent le cristal} \end{cases}$$

12. Soit la fonction

$$f(n^2) = \alpha^2 n_X^2 (n_Y^2 - n^2)(n_Z^2 - n^2) + \beta^2 n_Y^2 (n_X^2 - n^2)(n_Z^2 - n^2) + \gamma^2 n_Z^2 (n_X^2 - n^2)(n_Y^2 - n^2)$$

L'équation de Fresnel s'écrit $\frac{f(n^2)}{(n_X^2 - n^2)(n_Y^2 - n^2)(n_Z^2 - n^2)} = 0$. On suppose $n_X \leq n_Y \leq n_Z$. Le polynôme $f(n^2)$ est du second ordre en n^2 , avec les valeurs

$$\begin{aligned} f(n_X^2) &= \alpha^2 n_X^2 (n_Y^2 - n_X^2)(n_Z^2 - n_X^2) \quad \text{positive} \\ f(n_Y^2) &= \beta^2 n_Y^2 (n_X^2 - n_Y^2)(n_Z^2 - n_Y^2) \quad \text{négative} \\ f(n_Z^2) &= \gamma^2 n_Z^2 (n_X^2 - n_Z^2)(n_Y^2 - n_Z^2) \quad \text{positive} \end{aligned}$$

donc il possède deux racines positives n comprises entre n_X et n_Z .

13. L'équation de Fresnel est parfois donnée sous la forme

$$\frac{\alpha^2}{(n^2 - n_X^2)} + \frac{\beta^2}{(n^2 - n_Y^2)} + \frac{\gamma^2}{(n^2 - n_Z^2)} = \frac{1}{n^2} \quad \text{avec } n = \frac{c_0}{v_\varphi}$$

On passe à la formulation précédente en remplaçant $\frac{1}{n^2}$ par $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{n^2}$

On modifie ces équations pour obtenir une forme permettant de déduire les valeurs n' et n'' ainsi que les directions des solutions \vec{D} par une interprétation graphique simple. La première équation implique

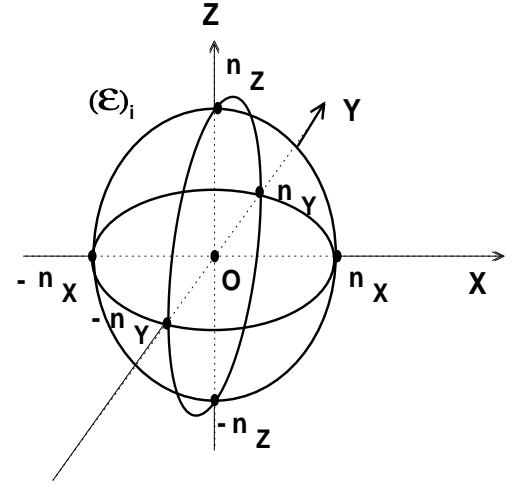
$$\begin{aligned}\vec{D} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 n^2 \left(\vec{D} \cdot \vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{D} \cdot \vec{u} \right) \quad \text{avec } \vec{D} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{D}\|^2 &= n^2 (D_X \epsilon_0 E_X + D_Y \epsilon_0 E_Y + D_Z \epsilon_0 E_Z) \\ \|\vec{D}\|^2 &= n^2 \left(D_X \frac{D_X}{n_X^2} + D_Y \frac{D_Y}{n_Y^2} + D_Z \frac{D_Z}{n_Z^2} \right) \quad \text{en utilisant } \vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n_X^2} \left(n \frac{D_X}{\|\vec{D}\|} \right)^2 + \frac{1}{n_Y^2} \left(n \frac{D_Y}{\|\vec{D}\|} \right)^2 + \frac{1}{n_Z^2} \left(n \frac{D_Z}{\|\vec{D}\|} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Interprétation géométrique : les points $M(X, Y, Z)$ tels que $\overrightarrow{OM} = n \frac{\vec{D}}{\|\vec{D}\|}$ appartiennent à la surface de l'ellipsoïde (\mathcal{E}_i) d'équation

$$\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{Z^2}{n_Z^2} = 1$$

appelé 'ellipsoïde des indices'.

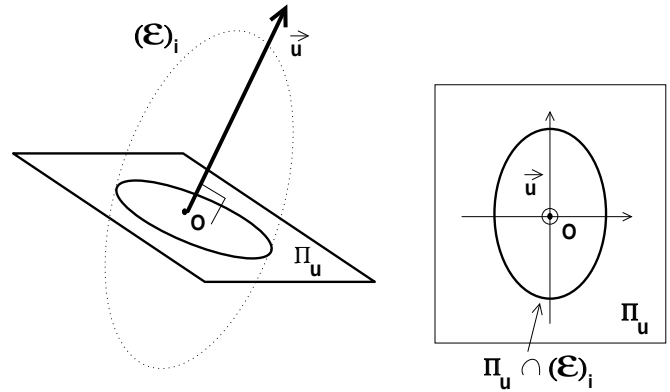
La figure représente les traces de cet ellipsoïde dans les plans XY , XZ et YZ .



Soient \vec{D}' et \vec{D}'' les vecteurs déplacement des deux ondes solutions se propageant dans la direction \vec{u} en voyant les indices n' ou n'' . On introduit les vecteurs unitaires $\vec{d}' = \frac{\vec{D}'}{\|\vec{D}'\|}$ et $\vec{d}'' = \frac{\vec{D}''}{\|\vec{D}''\|}$ pour désigner les directions de polarisation de ces ondes. On note M' et M'' les points tels que $\overrightarrow{OM'} = n' \vec{d}'$ et $\overrightarrow{OM''} = n'' \vec{d}''$.

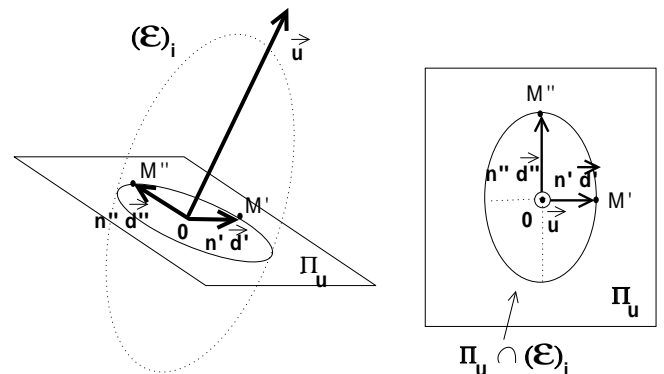
On a établi au §4.8.2 que \vec{D}' et \vec{D}'' sont perpendiculaires à \vec{u} . Les points M' et M'' appartiennent donc au plan Π_u perpendiculaire à \vec{u} passant par O , et plus précisément à l'intersection de Π_u avec l'ellipsoïde des indices (\mathcal{E}_i) . Les propriétés géométriques d'un ellipsoïde font que cette intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ est généralement une ellipse et dans certains cas particuliers un cercle.^a

a. On peut noter que le plan perpendiculaire à \vec{u} correspond à un plan d'onde.



On admet la propriété suivante : les équations de propagation dans le milieu anisotrope imposent que $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ correspondent aux demi-axes de l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ avec $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|n' \vec{d}'\| = n'$ et $\|\overrightarrow{OM''}\| = \|n'' \vec{d}''\| = n''$ (Cf justification au paragraphe suivant de l'annexe).

On attribue arbitrairement \vec{d}' et \vec{d}'' aux axes de l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ de sorte que $\vec{d}'' = \vec{u} \wedge \vec{d}'$.

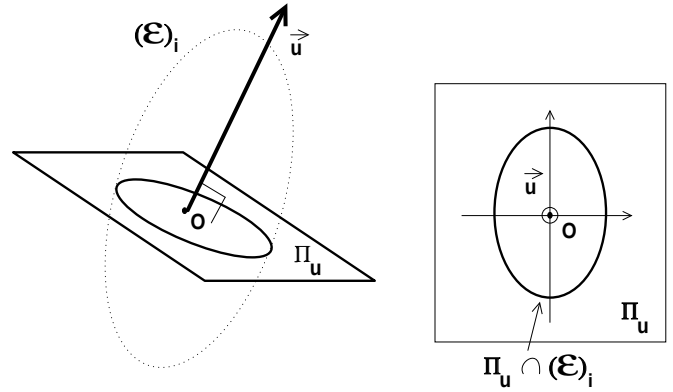


Pour une direction de propagation \vec{u} , la procédure géométrique décrite ici détermine complètement les deux directions de polarisation \vec{d}' ou \vec{d}'' autorisant une propagation sans déformation ainsi que les valeurs correspondantes n' ou n'' de l'indice optique.

4.8.5 Justification de l'utilisation géométrique de l'ellipsoïde des indices

Soient \vec{D}' et \vec{D}'' les vecteurs déplacement des deux ondes solutions se propageant dans la direction \vec{u} en voyant les indices n' ou n'' . Les vecteurs unitaires $\vec{d}' = \frac{\vec{D}'}{\|\vec{D}'\|}$ et $\vec{d}'' = \frac{\vec{D}''}{\|\vec{D}''\|}$ définissent les directions de polarisation de ces ondes. On note M' et M'' les points de l'ellipsoïde des indices tels que $\overrightarrow{OM'} = n' \vec{d}'$ et $\overrightarrow{OM''} = n'' \vec{d}''$

On a établi au §4.8.2 que \vec{D}' et \vec{D}'' sont perpendiculaires à \vec{u} . Les points M' et M'' appartiennent donc au plan Π_u perpendiculaire à \vec{u} passant par O , et plus précisément à l'intersection de Π_u avec l'ellipsoïde (\mathcal{E}_i) . Cette intersection $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ est une ellipse.



On note (X, Y, Z) les coordonnées de M' . Soit N' un point $N'(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ voisin de M' sur la surface de l'ellipsoïde (\mathcal{E}_i) , avec donc $\overrightarrow{M'N'}(dX, dY, dZ)$. On a

$$\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{Z^2}{n_Z^2} = 1$$

$$\text{et } \frac{(X + dX)^2}{n_X^2} + \frac{(Y + dY)^2}{n_Y^2} + \frac{(Z + dZ)^2}{n_Z^2} = 1$$

donc par différence, au premier ordre :

$$\frac{2X dX}{n_X^2} + \frac{2Y dY}{n_Y^2} + \frac{2Z dZ}{n_Z^2} = 0$$

Les composantes de \vec{D}' sont proportionnelles à (X, Y, Z) donc celles de \vec{E}' s'écrivent $(\frac{D_X}{\epsilon_0 n_X^2}, \frac{D_Y}{\epsilon_0 n_Y^2}, \frac{D_Z}{\epsilon_0 n_Z^2})$ et sont proportionnelles à $(\frac{X}{n_X^2}, \frac{Y}{n_Y^2}, \frac{Z}{n_Z^2})$. Il en résulte la propriété $\vec{E}' \cdot \overrightarrow{M'N'} = 0$.

On choisit maintenant pour N' un point voisin de M' à la fois sur la surface de l'ellipsoïde et dans le plan Π_u , c'est à dire sur l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$. On évalue :

$$\begin{aligned} \vec{D}' \cdot \overrightarrow{M'N'} &= \epsilon_0 n'^2 \left(\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u} \right) \cdot \overrightarrow{M'N'} \\ &= \epsilon_0 n'^2 (\vec{E} \cdot \overrightarrow{M'N'}) \\ &\quad - \epsilon_0 n'^2 (\vec{u} \cdot \vec{E}) (\vec{u} \cdot \overrightarrow{M'N'}) \end{aligned}$$

avec $\vec{E} \cdot \overrightarrow{M'N'} = 0$ d'après le raisonnement précédent et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M'N'} = 0$ pour N' pris dans le plan Π_u . Il vient alors $\vec{D}' \cdot \overrightarrow{M'N'} = 0$.

La relation $\vec{D}' \cdot \overrightarrow{M'N'} = 0$ pour tout point N' au voisinage de M' sur l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ signifie que \vec{D}' est normal en M' à la tangente à cette ellipse, et par conséquent que \vec{D}' est orienté nécessairement sur l'un des axes de cette ellipse.

Par le même raisonnement, \vec{D}'' est orienté sur l'autre axe de cette ellipse, ces deux directions étant bien sûr perpendiculaires entre elles dans Π_u .

