

# Préparation à l'agrégation :

## Formulaire de physique

Année scolaire 2019-2020

Analyse vectorielle  
Optique  
Thermodynamique  
Électrocinétique  
Filtrage  
Induction  
Ondes (Première année)  
Électrostatique  
Magnétostatique  
Électromagnétisme  
Ondes électromagnétiques  
Mécanique



# Sommaire

<b>Analyse vectorielle</b>	<b>1</b>
<b>I. Circulation et flux d'un champ vectoriel</b>	<b>1</b>
1) Circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour . . . . .	1
a. <i>Contour</i> . . . . .	1
b. <i>Définition</i> . . . . .	1
c. <i>Propriétés</i> . . . . .	1
2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface . . . . .	2
a. <i>Orientation d'une surface</i> . . . . .	2
b. <i>Définition</i> . . . . .	2
c. <i>Propriétés</i> . . . . .	2
<b>II. Cinq opérateurs</b>	<b>2</b>
1) Définitions et expressions . . . . .	2
2) Relations vectorielles utiles . . . . .	3
<b>III. Théorème de Green-Ostrogradski</b>	<b>3</b>
1) Énoncé . . . . .	3
2) Champ vectoriel à divergence nulle . . . . .	3
<b>IV. Théorème de Stokes-Ampère</b>	<b>4</b>
1) Énoncé . . . . .	4
2) Champ à rotationnel nul . . . . .	4
<b>V. Formules dans tous les systèmes de coordonnées</b>	<b>4</b>
1) Relations vectorielles utiles . . . . .	4
2) Opérateur gradient . . . . .	5
3) Opérateur divergence . . . . .	5
4) Opérateur rotationnel . . . . .	5
5) Opérateur Laplacien . . . . .	6
<b>Optique</b>	<b>7</b>
<b>I. Nature de la lumière</b>	<b>7</b>
1) Description ondulatoire . . . . .	7
a. <i>La lumière est une onde électromagnétique</i> . . . . .	7
b. <i>Spectre électromagnétique</i> . . . . .	7
2) Description corpusculaire . . . . .	8
3) Sources de lumière. . . . .	8
<b>II. Propagation de la lumière dans un milieu transparent</b>	<b>8</b>
<b>III. Optique géométrique</b>	<b>9</b>
1) Les lois de Descartes . . . . .	9
a. <i>Réflexion</i> . . . . .	10
b. <i>Réfraction</i> . . . . .	10
2) Formation des images en optique géométrique . . . . .	10
a. <i>Vocabulaire</i> . . . . .	10
b. <i>Notions d'objet et d'image</i> . . . . .	11
c. <i>Objets et images, réels ou virtuels ?</i> . . . . .	11

3)	Conditions d'obtention d'une bonne image . . . . .	11
a.	<i>Stigmatisme</i> . . . . .	11
b.	<i>Aplanétisme</i> . . . . .	11
c.	<i>Aberrations</i> . . . . .	11
d.	<i>Conditions de Gauss</i> . . . . .	12
4)	Lentilles sphériques . . . . .	12
a.	<i>Présentation</i> . . . . .	12
b.	<i>Représentation symbolique des lentilles</i> . . . . .	12
c.	<i>Points particuliers d'une lentille mince</i> . . . . .	13
d.	<i>Distances focales et Vergence</i> . . . . .	13
e.	<i>Construction</i> . . . . .	13
f.	<i>Formules de conjugaison et grandissement</i> . . . . .	13
g.	<i>Projection d'une image d'un objet réel : Règle des <math>4f'</math></i> . . . . .	14
<b>IV.</b>	<b>L'œil</b>	15
1)	Anatomie . . . . .	15
2)	Modélisation . . . . .	15
3)	Caractéristiques . . . . .	15
a.	<i>Champ angulaire</i> . . . . .	15
b.	<i>Limite de résolution angulaire</i> . . . . .	15
c.	<i>Plage d'accommodation</i> . . . . .	15
d.	<i>Défauts courants de l'œil</i> . . . . .	16
<b>V.</b>	<b>Modèle scalaire des ondes lumineuses</b>	16
1)	Représentation scalaire des ondes lumineuses . . . . .	16
a.	<i>Grandeur scalaire de l'optique</i> . . . . .	16
b.	<i>Lumière monochromatique</i> . . . . .	16
c.	<i>Éclairement et intensité lumineuse</i> . . . . .	17
d.	<i>Intensité lumineuse d'une lumière monochromatique</i> . . . . .	17
2)	Chemin optique . . . . .	17
a.	<i>Chemin optique</i> . . . . .	17
b.	<i>Déphasage dû à la propagation</i> . . . . .	18
3)	Surface d'onde . . . . .	18
a.	<i>Surface d'onde</i> . . . . .	18
b.	<i>Onde sphérique, onde plane</i> . . . . .	19
c.	<i>Théorème de Malus</i> . . . . .	19
d.	<i>Effet d'une lentille mince convergente dans l'approximation de Gauss</i> . . . . .	19
4)	Sources lumineuses . . . . .	19
a.	<i>Source de lumière blanche : Spectre continu</i> . . . . .	19
b.	<i>Lampe spectrale : spectre discret : spectre de raies</i> . . . . .	20
c.	<i>LASER</i> . . . . .	20
5)	Émission de lumière : modèle des trains d'ondes . . . . .	20
a.	<i>Source ponctuelle et cohérence temporelle</i> . . . . .	20
b.	<i>Source classique par émission spontanée</i> . . . . .	21
c.	<i>LASER : émission stimulée</i> . . . . .	22
d.	<i>Source étendue et cohérence spatiale</i> . . . . .	22

<b>VI.</b>	<b>Superposition de deux ondes lumineuses</b>	22
1)	Superposition de deux ondes incohérentes : pas d'interférence . . . . .	22
a.	<i>Additivité des intensités lumineuses</i> . . . . .	22
b.	<i>Incohérence temporelle</i> . . . . .	22
c.	<i>Incohérence spatiale</i> . . . . .	23
2)	Superposition de deux ondes cohérentes : interférences . . . . .	23
a.	<i>Additivité des vibrations lumineuses</i> . . . . .	23
b.	<i>Expression de l'intensité lumineuse : terme d'interférence</i> . . . . .	23
c.	<i>Conditions d'obtention d'interférences à deux ondes</i> . . . . .	23
d.	<i>Différence de marche</i> . . . . .	24
3)	Cohérence d'un système interférentiel . . . . .	25
a.	<i>Cohérence temporelle</i> . . . . .	25
b.	<i>Cohérence spatiale</i> . . . . .	25
4)	Interférences de deux ondes cohérentes. . . . .	26
a.	<i>Intensité : formule de Fresnel</i> . . . . .	26
b.	<i>Franges d'interférences</i> . . . . .	26
c.	<i>Franges d'interférences</i> . . . . .	26
d.	<i>Contraste</i> . . . . .	27
5)	Diviseurs d'ondes . . . . .	27
a.	<i>Diviseurs d'onde réalisant une division du front d'onde</i> . . . . .	27
b.	<i>Diviseurs d'onde réalisant une division d'amplitude</i> . . . . .	27
6)	Interférences de deux ondes sphériques issues de deux sources ponctuelles cohérentes . . . . .	27
a.	<i>Équation des franges d'interférences</i> . . . . .	27
b.	<i>Deux positions remarquables de l'écran de l'observation</i> . . . . .	28
<b>VII.</b>	<b>Dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young</b>	29
1)	Dispositif "classique" des trous d'Young . . . . .	29
a.	<i>Présentation</i> . . . . .	29
b.	<i>Calcul de la différence de marche</i> . . . . .	30
c.	<i>Figure d'interférences (pour n=1)</i> . . . . .	31
2)	Quelques variantes du dispositif des trous d'Young . . . . .	32
a.	<i>Translation de la source ponctuelle</i> . . . . .	32
b.	<i>Présence d'une lame de verre derrière l'un des trous</i> . . . . .	32
c.	<i>Dispositif des fentes d'Young</i> . . . . .	33
3)	Dispositif des trous d'Young en lumière parallèle. . . . .	33
a.	<i>Dispositif à deux lentilles convergentes</i> . . . . .	33
4)	Source non ponctuelle : incohérence spatiale . . . . .	34
a.	<i>Critère de visibilité des franges avec source étendue</i> . . . . .	34
b.	<i>Source monochromatique constituée de deux points sources</i> . . . . .	35
c.	<i>Utilisation d'une fente source dans le dispositif des fentes d'Young</i> . . . . .	36
d.	<i>Influence de la largeur de la fente source</i> . . . . .	36
5)	Source non monochromatique - incohérence temporelle . . . . .	37
a.	<i>Critère de visibilité des franges avec une source polychromatique</i> . . . . .	37
b.	<i>Source ponctuelle émettant un doublet de longueur d'onde</i> . . . . .	37
c.	<i>Source à profil spectral rectangulaire</i> . . . . .	38

6) Interférences en lumière blanche . . . . .	39
a. <i>Présentation du phénomène</i> . . . . .	39
b. <i>Spectre cannelé</i> . . . . .	39
<b>VIII. Superposition de N ondes lumineuses cohérentes :</b>	
<b>réseaux plans</b>	40
1) Présentation des réseaux plans (infinis) . . . . .	40
a. <i>Définition</i> . . . . .	40
b. <i>Conditions d'utilisation</i> . . . . .	40
c. <i>Les deux types de réseaux</i> . . . . .	41
d. <i>Phénomènes physiques mis en jeu</i> . . . . .	41
2) Diffraction par un réseau plan . . . . .	41
a. <i>La "formule" du réseau</i> . . . . .	41
b. <i>Figure de diffraction à l'infini</i> . . . . .	43
c. <i>Influence de l'incidence : minimum de déviation</i> . . . . .	44
d. <i>Influence de la longueur d'onde : dispersion d'un réseau</i> . . . . .	45
3) Superposition de $N$ ondes cohérentes . . . . .	46
a. <i>Présentation</i> . . . . .	46
b. <i>Représentation de Fresnel</i> . . . . .	47
c. <i>Calcul de la vibration résultante</i> . . . . .	48
d. <i>Calcul de l'intensité</i> . . . . .	48
<b>IX. Dispositif interférentiel par division d'amplitude :</b>	
<b>interféromètre de Michelson</b>	49
1) Présentation de l'interféromètre de Michelson . . . . .	49
a. <i>Schéma théorique</i> . . . . .	49
b. <i>Présentation de l'appareil</i> . . . . .	49
c. <i>Rôle de la compensatrice</i> . . . . .	50
2) Dispositif équivalent à l'interféromètre de Michelson . . . . .	50
a. <i>Réflexion sur un miroir plan</i> . . . . .	50
b. <i>Intensité des rayons qui interfèrent</i> . . . . .	51
c. <i>Pliage selon l'axe <math>\Delta</math> de la séparatrice</i> . . . . .	51
d. <i>Source ponctuelle : interférences non localisées</i> . . . . .	52
e. <i>Source spatialement étendue : interférences localisées</i> . . . . .	52
3) Interféromètre de Michelson monté en lame d'air. . . . .	54
a. <i>Calcul de la différence de marche</i> . . . . .	54
b. <i>Figure d'interférence</i> . . . . .	54
c. <i>Contact optique</i> . . . . .	55
d. <i>Rayons des anneaux</i> . . . . .	55
e. <i>Source émettant un doublet de longueur d'onde</i> . . . . .	56
4) Interféromètre réglé en coin d'air . . . . .	57
a. <i>Construction de rayons</i> . . . . .	57
b. <i>Figures d'interférences</i> . . . . .	57
c. <i>Figure d'interférence en projection</i> . . . . .	58
<b>Thermodynamique</b>	59
<b>I. Généralités sur les systèmes thermodynamiques</b>	59
1) Système thermodynamique . . . . .	59
a. <i>Vocabulaire</i> . . . . .	59

<i>b. Les états de la matière . . . . .</i>	59
2) Les différents niveaux de description . . . . .	59
3) Variables d'état - Extensivité et intensivité . . . . .	59
<i>a. Généralités . . . . .</i>	59
<i>b. Pression et température . . . . .</i>	60
<i>c. Grandeur extensive d'un corps pur monophasé ou diphasé . . . . .</i>	60
4) Équilibre thermodynamique . . . . .	60
5) Équation d'état . . . . .	60
6) Énergie interne et capacité thermique à volume constant . . . . .	61
<b>II. Description d'un gaz parfait</b>	61
1) Modèle et équation d'état du gaz parfait . . . . .	61
2) Énergie interne et capacité thermique à volume constant du gaz parfait	61
<b>III. Description d'une phase condensée idéale</b>	61
<b>IV. Description du corps pur diphasé</b>	62
<i>a. Les changements d'états . . . . .</i>	62
<i>b. Diagramme d'équilibre d'un corps pur . . . . .</i>	62
<i>c. Diagramme (<math>P, T</math>) . . . . .</i>	63
<i>d. Diagramme (<math>P, v</math>) pour l'équilibre liquide-vapeur . . . . .</i>	64
<b>V. Transformations d'un système thermodynamique</b>	65
1) Définition . . . . .	65
2) Transformations quasi statique et non quasi statique . . . . .	65
<i>a. Transformations réversible et irréversible . . . . .</i>	65
3) Transformations à paramètre fixé . . . . .	65
4) Transformation élémentaire . . . . .	66
<b>VI. Premier principe de la thermodynamique</b>	66
1) Énergie interne et énergie totale . . . . .	66
2) Énoncé du premier principe de la thermodynamique . . . . .	66
3) Conventions d'orientation des échanges d'énergie. . . . .	66
4) Transformation élémentaire . . . . .	66
<b>VII. Échange d'énergie</b>	67
1) Travail des forces de pression . . . . .	67
<i>a. Travail élémentaire des forces de pression . . . . .</i>	67
<i>b. Interprétation graphique du diagramme de Clapeyron (<math>P, V</math>) . . . . .</i>	67
2) Transferts thermiques . . . . .	67
3) Énergie électrique . . . . .	67
4) Échange avec un thermostat . . . . .	68
5) Transformation isotherme vs transformation adiabatique . . . . .	68
<b>VIII. L'enthalpie <math>H</math></b>	68
1) Étude d'une transformation monobare . . . . .	68
2) Enthalpie : définition et propriétés . . . . .	68
3) Capacité thermique à pression constante $C_p$ . . . . .	68
4) Cas des gaz parfait . . . . .	68
5) Cas des phases condensées . . . . .	69
6) Enthalpie d'un système diphasé . . . . .	69

<b>IX.</b>	<b>Applications classiques</b>	69
1)	Transformation adiabatique quasi statique d'un gaz parfait . . . . .	69
2)	Calorimètre . . . . .	69
<b>X.</b>	<b>Les causes d'irréversibilité</b>	70
1)	Phénomènes de mélange ou diffusion . . . . .	70
2)	Inhomogénéités de températures . . . . .	70
3)	Frottements . . . . .	70
<b>XI.</b>	<b>Nécessité d'un second principe</b>	70
1)	Limite du premier principe . . . . .	70
2)	Énoncé du second principe . . . . .	70
3)	Commentaires . . . . .	71
<b>XII.</b>	<b>Entropie d'un système thermodynamique</b>	71
1)	Entropie d'une phase condensée . . . . .	71
2)	Entropie d'un gaz parfait . . . . .	71
3)	Entropie d'un système diphasé . . . . .	71
<b>XIII.</b>	<b>Machines thermiques</b>	71
1)	Introduction . . . . .	71
a.	<i>Description générale.</i> . . . . .	72
b.	<i>Machine monotherme</i> . . . . .	72
<b>XIV.</b>	<b>Machines thermiques dithermes</b>	72
1)	Application du premier et du seconde principe . . . . .	72
2)	Diagramme de Raveau . . . . .	73
3)	Rendement ou efficacité d'une machine thermique . . . . .	73
4)	Moteur thermique ditherme . . . . .	74
a.	<i>Rendement</i> . . . . .	74
b.	<i>Théorème de Carnot.</i> . . . . .	74
c.	<i>Cycle Beau de Rochas du moteur essence</i> . . . . .	74
5)	Récepteurs dithermes . . . . .	75
a.	<i>Pompe à chaleur</i> . . . . .	76
b.	<i>Réfrigérateur.</i> . . . . .	76
c.	<i>Efficacité des machines réelles</i> . . . . .	76
d.	<i>Pseudo-sources</i> . . . . .	76
<b>XV.</b>	<b>Machines thermiques avec écoulement fluide</b>	76
<b>Electrocinétique</b>		77
<b>I.</b>	<b>Généralités</b>	77
1)	Vocabulaire . . . . .	77
2)	Intensité du courant électrique . . . . .	77
a.	<i>Nature du courant électrique</i> . . . . .	77
b.	<i>Intensité du courant ou Débit de charge</i> . . . . .	78
3)	Potentiel et Tension . . . . .	78
a.	<i>Définitions</i> . . . . .	78
b.	<i>Masse et Terre</i> . . . . .	78
4)	Les différents régimes de fonctionnement d'un circuit . . . . .	79
5)	Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) . . . . .	79

<b>II.</b>	<b>Dipôles - Présentation</b>	79
1)	Convention d'orientation . . . . .	79
2)	Puissance reçue ou délivrée par un dipôle . . . . .	79
3)	Caractéristique d'un dipôle . . . . .	80
4)	Classification des dipôles . . . . .	80
<b>III.</b>	<b>Dipôles linéaires passifs usuels</b>	80
1)	La résistance . . . . .	80
2)	Condensateur idéal . . . . .	80
a.	<i>Description</i> . . . . .	80
b.	<i>Relation entre <math>U</math> et <math>i</math></i> . . . . .	81
c.	<i>Puissance reçue</i> . . . . .	81
d.	<i>Comportement en régime permanent</i> . . . . .	81
3)	Bobine idéale. . . . .	81
a.	<i>Description et relation entre <math>U</math> et <math>i</math></i> . . . . .	81
b.	<i>Puissance et énergie</i> . . . . .	81
c.	<i>Comportement en régime permanent</i> . . . . .	82
<b>IV.</b>	<b>Dipôles actifs</b>	82
1)	Sources idéales de tension ou de courant . . . . .	82
a.	<i>Source idéale de tension</i> . . . . .	82
b.	<i>Source idéale de courant</i> . . . . .	82
2)	Source non idéale linéaire . . . . .	82
3)	Source non linéaire - dipôle actif . . . . .	83
4)	Théorème de superposition . . . . .	83
<b>V.</b>	<b>Lois de Kirchhoff</b>	83
1)	Loi des noeuds . . . . .	83
2)	Loi des mailles . . . . .	83
<b>VI.</b>	<b>Association de résistances</b>	84
1)	Association série . . . . .	84
2)	Association parallèle . . . . .	84
<b>VII.</b>	<b>Ponts diviseurs</b>	84
1)	Pont diviseur de tension . . . . .	84
2)	Pont diviseur de courant . . . . .	85
<b>VIII.</b>	<b>Point de fonctionnement d'un circuit</b>	85
<b>IX.</b>	<b>Circuits linéaires du premier ordre en régime transitoire</b>	85
1)	Le régime libre . . . . .	85
a.	<i>Énergie emmagasinée et continuité</i> . . . . .	86
b.	<i>Équation différentielle et résolution</i> . . . . .	86
c.	<i>Trajectoire de phase</i> . . . . .	86
d.	<i>Intensité dans le circuit</i> . . . . .	87
e.	<i>Étude énergétique</i> . . . . .	87
2)	Circuit RC soumis à un échelon de tension . . . . .	87
<b>X.</b>	<b>Oscillateurs en électrocinétique et en mécanique</b>	89
1)	Similitude des comportements électrique et mécanique . . . . .	89
2)	Solution de $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ . . . . .	90
a.	<i>Cas de l'équation homogène</i> . . . . .	90
b.	<i>Cas d'une équation non-homogène</i> . . . . .	90

3)	Cas particulier : l'oscillateur harmonique . . . . .	90
4)	Cas du circuit RLC série . . . . .	91
5)	Cas de l'oscillateur harmonique : circuit LC. . . . .	92
6)	Portraits de phase d'un oscillateur . . . . .	92
	<i>a. Cas de l'oscillateur harmonique</i> . . . . .	93
	<i>b. Cas des oscillateurs amortis</i> . . . . .	93
<b>XI.</b>	<b>Oscillateurs électrique et mécanique en régime forcé</b>	94
1)	Expériences introducives . . . . .	94
2)	Description des signaux sinusoïdaux. . . . .	94
3)	Puissance moyenne . . . . .	95
	<i>a. Relation de Parseval.</i> . . . . .	95
4)	Étude fréquentielle . . . . .	96
5)	Décomposition en série de Fourier . . . . .	96
	<i>a. Signal périodique triangulaire</i> . . . . .	96
	<i>b. Signal périodique rectangulaire.</i> . . . . .	96
6)	Synthèse de Fourier . . . . .	97
	<i>a. Synthèse d'un signal sans discontinuité</i> . . . . .	97
	<i>b. Synthèse d'un signal avec des discontinuités</i> . . . . .	97
7)	Représentation complexe . . . . .	97
	<i>a. Rappels mathématiques.</i> . . . . .	97
	<i>b. Notations complexes.</i> . . . . .	97
	<i>c. Intérêts de cette représentation</i> . . . . .	98
	<i>d. Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale</i> . . . . .	98
	<i>e. Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchronisés.</i> . . . . .	98
8)	Impédances complexes . . . . .	98
	<i>a. Définition</i> . . . . .	98
	<i>b. Cas des dipôles usuels</i> . . . . .	99
	<i>c. Association de dipôles</i> . . . . .	99
9)	Outils pour l'étude des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé . . . . .	99
	<i>a. Loi des nœuds</i> . . . . .	99
	<i>b. Loi des mailles</i> . . . . .	100
	<i>c. Ponts diviseurs.</i> . . . . .	100
<b>XII.</b>	<b>Étude d'un oscillateur électrique : circuit RLC série</b>	100
	<i>a. Impédance du circuit</i> . . . . .	100
	<i>b. Résonance en intensité.</i> . . . . .	101
<b>Filtrage</b>		<b>103</b>
<b>I.</b>	<b>Généralités sur le filtrage analogique</b>	103
1)	Fonction de transfert. . . . .	103
2)	Caractéristiques d'un filtre . . . . .	103
	<i>a. Gain d'un filtre.</i> . . . . .	103
	<i>b. Pulsations de coupure et bande passante</i> . . . . .	104
	<i>c. Phase <math>\varphi</math></i> . . . . .	104

3) Détermination rapide de la nature d'un filtre . . . . .	104
4) Représentation de Bode d'une fonction de transfert . . . . .	104
5) Filtrage d'un signal périodique quelconque . . . . .	105
a. <i>Intérêt de l'étude en régime sinusoïdal.</i> . . . . .	105
b. <i>Décomposition de Fourier d'un signal périodique</i> . . . . .	105
6) Réponse d'un filtre . . . . .	106
a. <i>Importance de la linéarité</i> . . . . .	106
b. <i>But du filtrage</i> . . . . .	106
7) Réalisation d'un moyenneur, d'un intégrateur et d'un déivateur . . . . .	106
a. <i>Moyenneur</i> . . . . .	106
b. <i>Intégrateur</i> . . . . .	106
c. <i>Déivateur</i> . . . . .	106
8) Méthode d'étude . . . . .	106
9) Filtres linéaires du premier ou second ordre. . . . .	107
a. <i>Filtres linéaires du premier ordre.</i> . . . . .	107
b. <i>Filtres linéaires du deuxième ordre</i> . . . . .	107
10) Filtres linéaires passe-bas . . . . .	107
11) Filtres linéaires passe-haut . . . . .	108
12) Filtres linéaires passe-bande . . . . .	108
13) Électronique numérique. . . . .	108
a. <i>Échantillonnage</i> . . . . .	108
b. <i>Spectre d'un signal échantillonné</i> . . . . .	108
c. <i>Condition de Nyquist-Shannon.</i> . . . . .	109
d. <i>Analyse spectrale avec un oscilloscope</i> . . . . .	109
<b>Induction</b>	<b>110</b>
<b>I. Le champ magnétique</b>	<b>110</b>
1) Carte de champ magnétique . . . . .	110
a. <i>Notions de champ et de ligne de champ</i> . . . . .	110
b. <i>Fil "infini" parcouru par un courant.</i> . . . . .	111
c. <i>Propriétés générales des cartes de champ :</i> <i>Emplacement des sources et zones de champ intense ou faible</i> . . . . .	111
d. <i>Spire circulaire</i> . . . . .	112
e. <i>Bobine longue ou solénoïde</i> . . . . .	112
f. <i>Aimant droit.</i> . . . . .	112
2) Moment magnétique . . . . .	113
a. <i>Dipôles magnétique</i> . . . . .	113
b. <i>Moment magnétique d'une spire de courant plane</i> . . . . .	113
<b>II. Actions d'un champ magnétique</b>	<b>113</b>
1) La force de Laplace . . . . .	113
a. <i>Intensité</i> . . . . .	113
b. <i>Expression de la force de Laplace élémentaire</i> . . . . .	113
c. <i>Caractéristiques de la force de Laplace</i> . . . . .	114

2)	Action d'un champ magnétique sur une barre conductrice . . . . .	114
a.	<i>Expérience des rails de Laplace</i> . . . . .	114
b.	<i>Résultante des forces de Laplace sur la barre conductrice</i> . . . . .	114
c.	<i>Puissance de la force de Laplace</i> . . . . .	114
d.	<i>Système en rotation</i> . . . . .	115
3)	Action d'un champ magnétique sur un aimant. . . . .	115
a.	<i>Expérience d'Ersted</i> . . . . .	115
b.	<i>Orientation de l'aimant et positions d'équilibre</i> . . . . .	115
<b>III.</b>	<b>Les lois de l'induction</b>	115
1)	Le flux magnétique . . . . .	115
2)	Loi de Lenz . . . . .	116
3)	Force électromotrice induite et loi de Faraday . . . . .	116
<b>IV.</b>	<b>Circuits fixes dans le temps dans un champ magnétique qui varie au cours du temps</b>	116
1)	Auto-induction . . . . .	116
a.	<i>Flux propre et induction propre</i> . . . . .	116
b.	<i>Inductance propre d'un solénoïde</i> . . . . .	117
c.	<i>Circuit électrique équivalent</i> . . . . .	117
d.	<i>Mesure de L</i> . . . . .	117
2)	Induction mutuelle . . . . .	117
a.	<i>Induction mutuelle</i> . . . . .	117
b.	<i>Circuits électriques équivalents</i> . . . . .	118
<b>V.</b>	<b>Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire</b>	119
1)	Conversion de puissance mécanique en puissance électrique . . . . .	119
a.	<i>Cas de la translation</i> . . . . .	119
b.	<i>Cas d'une rotation</i> . . . . .	120
2)	Freinage par induction . . . . .	122
3)	Conversion électrique en puissance mécanique. . . . .	122
a.	<i>Configuration simplifiée : dispositif des rails de Laplace moteur</i> . . . 123	
b.	<i>Étude qualitative</i> . . . . .	123
c.	<i>Équation électrique</i> . . . . .	123
d.	<i>Équation mécanique</i> . . . . .	124
e.	<i>Bilan énergétique</i> . . . . .	124
f.	<i>Étude en régime sinusoïdal</i> . . . . .	124
4)	Chauffage par courants de Foucault . . . . .	125
<b>Ondes</b>		127
<b>I.</b>	<b>Propagation d'un signal</b>	127
1)	Généralités sur les signaux . . . . .	127
a.	<i>Ondes et signaux physiques</i> . . . . .	127
b.	<i>Ondes électromagnétiques</i> . . . . .	127
c.	<i>Conversion de signal</i> . . . . .	127
2)	Spectre d'un signal . . . . .	127
a.	<i>Cas d'un signal périodique</i> . . . . .	128
b.	<i>Cas d'un signal non périodique</i> . . . . .	128

3) Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique. . . . .	128
4) Signaux analogiques et numériques . . . . .	128
5) Ondes progressives . . . . .	128
a. <i>Célérité d'une onde</i> . . . . .	128
b. <i>Onde progressive à une dimension</i> . . . . .	129
c. <i>Onde progressive sinusoïdale</i> . . . . .	129
6) Le phénomène de diffraction. . . . .	130
a. <i>Diffraction en optique</i> . . . . .	130
b. <i>Diffraction des sons</i> . . . . .	130
<b>II. Superposition d'ondes</b>	<b>130</b>
1) Ondes stationnaires et modes propres . . . . .	130
a. <i>Corde vibrante</i> . . . . .	130
2) Interférences . . . . .	131
a. <i>Ondes stationnaires sur la corde vibrante : interprétation en terme de fréquences</i> . . . . .	131
b. <i>Observation d'interférences et figure d'interférences</i> . . . . .	132

## **Électrostatique** **133**

<b>I. Champ et potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle</b>	<b>133</b>
1) Les sources du champ électrostatique : les charges électriques. . . . .	133
a. <i>Charge électrique</i> . . . . .	133
b. <i>Modèle de la charge ponctuelle</i> . . . . .	133
c. <i>Distribution discrète de charges</i> . . . . .	133
2) Symétries et invariances du champ électrostatique . . . . .	133
a. <i>Principe de Curie</i> . . . . .	133
b. <i>Plan de symétrie d'une distribution de charges</i> . . . . .	134
c. <i>Plan d'antisymétrie d'une distribution de charges</i> . . . . .	134
d. <i>Détermination du champ électrostatique</i> . . . . .	134
e. <i>Invariances du champ électrostatique</i> . . . . .	134
3) Complément mathématique . . . . .	134
a. <i>Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un contour</i> . . . . .	134
b. <i>Opérateur gradient</i> . . . . .	135
4) Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle $q$ .	136
a. <i>Champ électrostatique</i> . . . . .	136
b. <i>Force de Coulomb</i> . . . . .	136
c. <i>Potentiel électrostatique</i> . . . . .	136
d. <i>Relation locale entre champ et potentiel électrostatiques</i> . . . . .	137
e. <i>Relation intégrale entre champ et potentiel électrostatiques</i> . . . . .	137
f. <i>Énergie potentielle électrostatique</i> . . . . .	137
5) Champ et potentiel créés par une distribution discrète de charges ponctuelles . . . . .	138
a. <i>Principe de superposition</i> . . . . .	138
6) Diagramme électrique . . . . .	138
a. <i>Lignes de champ du champ électrostatique</i> . . . . .	138
b. <i>Tubes de champ du champ électrostatique</i> . . . . .	139
c. <i>Surfaces équipotentielles</i> . . . . .	139
d. <i>Diagrammes électriques de charges ponctuelles</i> . . . . .	140

<b>II.</b>	<b>Dipôle électrostatique</b>	140
1)	Modèle du dipôle électrostatique . . . . .	140
a.	<i>Définition</i> . . . . .	140
b.	<i>Vecteur moment dipolaire</i> . . . . .	140
c.	<i>Représentation dans l'espace</i> . . . . .	140
2)	Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique . . . . .	141
a.	<i>Analyse des invariances et des symétries de la distribution de charges</i> . . . . .	141
b.	<i>Détermination du potentiel</i> . . . . .	141
c.	<i>Détermination du champ</i> . . . . .	142
d.	<i>Diagramme électrique</i> . . . . .	143
3)	Dipôle électrostatique dans un champ électrostatique extérieur (situation passive) . . . . .	144
a.	<i>Étude expérimentale</i> . . . . .	144
b.	<i>Actions mécaniques subies par le dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme</i> . . . . .	144
c.	<i>Actions mécaniques subies par le dipôle dans un champ électrostatique extérieur non uniforme</i> . . . . .	145
4)	Utilisation du modèle du dipôle électrostatique . . . . .	145
a.	<i>Distribution de charges ponctuelles</i> . . . . .	145
b.	<i>La notion de dipôle en chimie</i> . . . . .	145
<b>III.</b>	<b>Champ et potentiel électrostatiques d'une distribution continue de charges</b>	146
1)	Distribution continue de charges . . . . .	146
a.	<i>Définition</i> . . . . .	146
b.	<i>Distribution volumique de charge</i> . . . . .	146
c.	<i>Modèles limites de distributions de charge</i> . . . . .	147
d.	<i>Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges</i> . . . . .	148
2)	Flux d'un champ vectoriel à travers une surface . . . . .	148
a.	<i>Orientation d'une surface</i> . . . . .	148
b.	<i>Définition</i> . . . . .	148
c.	<i>Propriétés</i> . . . . .	149
d.	<i>Remarque importante</i> . . . . .	149
3)	Théorème de Gauss . . . . .	149
a.	<i>Énoncé</i> . . . . .	149
b.	<i>Quand utiliser ce théorème</i> . . . . .	149
4)	Champ créé par une sphère uniformément chargée en volume . . . . .	149
5)	Champ créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume . . . . .	150
a.	<i>Cas d'un fil infini uniformément chargé</i> . . . . .	151
6)	Champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface . . . . .	151
7)	Condensateur plan idéal . . . . .	152
a.	<i>Présentation</i> . . . . .	152
b.	<i>Champ électrostatique</i> . . . . .	152
c.	<i>Capacité d'un condensateur</i> . . . . .	153
d.	<i>Densité volumique d'énergie électrostatique</i> . . . . .	153

<b>IV. Champ et potentiel gravitationnels</b>	<b>154</b>
1) L'interaction gravitationnelle . . . . .	154
a. <i>Les sources du champ gravitationnel : les masses</i> . . . . .	154
b. <i>Symétries et invariances du champ gravitationnel</i> . . . . .	154
2) Champ et potentiel gravitationnels créés par une masse ponctuelle . . . . .	154
a. <i>Champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle</i> . . . . .	154
b. <i>Potentiel créé par une masse ponctuelle</i> . . . . .	155
c. <i>Relations locale et intégrale entre champ et potentiel</i> . . . . .	155
d. <i>Énergie potentielle d'une masse ponctuelle dans un champ gravitationnel</i> . . . . .	155
3) Champ et potentiel gravitationnels créés par une distribution continue de masse . . . . .	155
a. <i>Champ et potentiel gravitationnels créées par une distribution continue de masse</i> . . . . .	155
b. <i>Forme du théorème de Gauss pour la gravitation (par analogie)</i> . . . . .	156
4) Les quatre interactions fondamentales . . . . .	156
a. <i>L'interaction électromagnétique</i> . . . . .	156
b. <i>L'interaction gravitationnelle</i> . . . . .	156
c. <i>L'interaction forte</i> . . . . .	157
d. <i>L'interaction faible</i> . . . . .	157
<b>V. Topographie du champ électrostatique</b>	<b>157</b>
<b>Magnétostatique</b>	<b>158</b>
<b>I. Champ magnétostatique</b>	<b>158</b>
1) Les sources du champ magnétostatique : les courants électriques . . . . .	158
a. <i>Mise en évidence expérimentale</i> . . . . .	158
b. <i>Courant électrique</i> . . . . .	158
c. <i>Vecteur densité volumique de courant</i> . . . . .	158
d. <i>Modèles limites de distributions de courant</i> . . . . .	159
2) Symétries et invariances du champ magnétostatique . . . . .	159
a. <i>Le vecteur champ magnétostatique</i> . . . . .	159
b. <i>Plan de symétrie de la distribution de courant</i> . . . . .	160
c. <i>Plan d'antisymétrie de la distribution de courant</i> . . . . .	160
d. <i>Direction du champ magnétostatique</i> . . . . .	160
e. <i>Invariances du champ magnétostatique</i> . . . . .	160
3) Flux et circulation du champ magnétostatique . . . . .	160
a. <i>Flux du champ magnétostatique</i> . . . . .	160
b. <i>Circulation du champ magnétostatique : théorème d'Ampère</i> . . . . .	161
c. <i>Quand utiliser le théorème d'Ampère ?</i> . . . . .	161
4) Calculs de champs magnétostatiques . . . . .	161
a. <i>Principe de superposition</i> . . . . .	161
b. <i>Champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini de rayon nul</i> .	162
c. <i>Champ créé par un fil de rayon non nul</i> . . . . .	162
d. <i>Champ créé par un solénoïde infini</i> . . . . .	163
e. <i>Densité volumique d'énergie magnétique</i> . . . . .	164

5) Cartes de champ magnétostatique . . . . .	164
6) Forces de Laplace . . . . .	164
a. <i>Définition de l'ampère</i> . . . . .	164
<b>II. Dipôle magnétique</b>	<b>165</b>
1) Modèle du dipôle magnétique . . . . .	165
a. <i>Vecteur moment magnétique d'une boucle de courant plane</i> . . . . .	165
b. <i>Définition</i> . . . . .	165
c. <i>Représentation dans l'espace</i> . . . . .	165
2) Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique . . . . .	165
a. <i>Analyse des symétries et des invariances</i> . . . . .	165
b. <i>Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique</i> . . . . .	166
c. <i>Spire circulaire vue à grande distance</i> . . . . .	166
d. <i>Modèle du dipôle magnétique</i> . . . . .	167
3) Dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur . . . . .	167
a. <i>Étude expérimentale</i> . . . . .	167
b. <i>Actions mécaniques subies par un dipôle dans un champ magnétostatique uniforme</i> . . . . .	167
c. <i>Actions mécaniques subies par un dipôle dans un champ magnétostatique non uniforme</i> . . . . .	167
d. <i>Analogie dipôles électrostatique et magnétostatique</i> . . . . .	168
<b>Électromagnétisme</b>	<b>169</b>
<b>I. Les équations de Maxwell</b>	<b>169</b>
1) L'électromagnétisme . . . . .	169
a. <i>Historique</i> . . . . .	169
b. <i>Loi de Force de Lorentz</i> . . . . .	169
c. <i>Les milieux étudiés</i> . . . . .	169
2) Les équations de Maxwell . . . . .	170
a. <i>Formulation locale</i> . . . . .	170
b. <i>Formulation intégrale</i> . . . . .	170
c. <i>Couplage et propagation dans le vide</i> . . . . .	171
3) Cas des champs statiques . . . . .	172
a. <i>Régime permanent</i> . . . . .	172
b. <i>Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)</i> . . . . .	173
4) Principe de conservation de la charge électrique . . . . .	173
a. <i>Équation de conservation de la charge électrique</i> . . . . .	173
5) Modélisation surfacique des charges et des courants et relations de passage . . . . .	174
a. <i>Modélisation de distribution surfacique</i> . . . . .	174
b. <i>Relations de passage</i> . . . . .	174
<b>II. Énergie du champ électromagnétique</b>	<b>174</b>
1) Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge . . . . .	175
a. <i>Puissance volumique associée à la force de Lorentz</i> . . . . .	175
b. <i>Conducteur électrique</i> . . . . .	176
c. <i>Loi d'Ohm locale</i> . . . . .	176
d. <i>Effet Joule</i> . . . . .	176

e. <i>Conducteur filiforme en régime permanent</i> . . . . .	176
2) Grandeurs énergétiques associées à un champ électromagnétique . . . . .	177
a. <i>Densité volumique d'énergie électromagnétique</i> . . . . .	177
b. <i>Vecteur de Poynting</i> . . . . .	177
c. <i>Ordres de grandeur</i> . . . . .	177
3) Bilan d'énergie électromagnétique . . . . .	178
a. <i>Équation locale de Poynting</i> . . . . .	178
b. <i>Cas des régimes stationnaires</i> . . . . .	178
<b>Ondes électromagnétiques</b> . . . . .	<b>179</b>
<b>I. Ondes électromagnétiques dans le vide</b> . . . . .	<b>179</b>
1) Propagation du champ électromagnétique dans le vide . . . . .	179
a. <i>Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide : équation de d'Alembert</i> . . . . .	179
b. <i>Ondes électromagnétiques dans le vide</i> . . . . .	180
c. <i>Ondes planes</i> . . . . .	180
d. <i>Ondes planes progressives</i> . . . . .	181
2) Ondes planes progressives électromagnétiques dans le vide . . . . .	181
a. <i>Présentation</i> . . . . .	182
b. <i>Transversalité de l'OPPM dans le vide</i> . . . . .	182
c. <i>Relation de structure de l'OPPM dans le vide</i> . . . . .	182
3) Modèle de l'onde plane progressive monochromatique OPPM . . . . .	183
a. <i>Définition</i> . . . . .	183
b. <i>OPPM et paquet d'onde</i> . . . . .	183
c. <i>Domaines du spectre électromagnétique</i> . . . . .	183
4) Caractéristique d'une OPPM dans le vide . . . . .	184
a. <i>Vecteur d'onde</i> . . . . .	184
b. <i>Vitesse de phase</i> . . . . .	184
c. <i>Périodicité spatiale et temporelle</i> . . . . .	184
d. <i>OPPM et photons</i> . . . . .	185
e. <i>Notation complexe de l'OPPM</i> . . . . .	185
f. <i>Structure de l'OPPM dans le vide</i> . . . . .	186
5) Étude énergétique de l'OPPM dans le vide . . . . .	187
a. <i>Densité volumique d'énergie</i> . . . . .	187
b. <i>Vecteur de Poynting</i> . . . . .	188
c. <i>Vecteur de Poynting moyen</i> . . . . .	188
6) OPPM polarisée rectilignement . . . . .	188
a. <i>Polarisation d'une OPPM</i> . . . . .	188
b. <i>Polarisation rectiligne</i> . . . . .	189
7) Production et analyse de lumière polarisée rectilignement . . . . .	189
a. <i>Lumière naturelle</i> . . . . .	189
b. <i>Polariseur et analyseur</i> . . . . .	189
c. <i>Loi de Malus</i> . . . . .	190

<b>II.</b>	<b>Rayonnement dipolaire électrique</b>	190
1)	Présentation du modèle du dipôle oscillant . . . . .	190
a.	<i>Dipôle oscillant</i> . . . . .	190
b.	<i>Cadre de l'étude</i> . . . . .	190
c.	<i>Application du modèle</i> . . . . .	191
2)	Champ électromagnétique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant . . . . .	191
a.	<i>Champ électromagnétique rayonné</i> . . . . .	191
b.	<i>Structure locale du champ rayonné</i> . . . . .	192
3)	Puissance rayonnée . . . . .	193
a.	<i>Vecteur de Poynting et intensité du rayonnement</i> . . . . .	193
b.	<i>Indicateur de rayonnement</i> . . . . .	193
c.	<i>Puissance moyenne totale rayonnée</i> . . . . .	193
4)	Manifestations du rayonnement dipolaire électrique . . . . .	194
a.	<i>Notions sur la diffusion Rayleigh</i> . . . . .	194
b.	<i>Polarisation par diffusion</i> . . . . .	194
c.	<i>Bleu du ciel et rouge du Soleil couchant</i> . . . . .	194
d.	<i>Rayonnement d'un charge accélérée : rayonnement d'accélération</i> . . . . .	194
<b>III.</b>	<b>Propagation d'une OPPM dans un plasma</b>	195
1)	Propagation d'une OPPM transverse dans un plasma peu dense . . . . .	195
a.	<i>Modélisation</i> . . . . .	195
b.	<i>Effet d'une OPPM Transverse sur un plasma</i> . . . . .	195
c.	<i>Pulsation plasma</i> . . . . .	195
d.	<i>Vecteur densité volumique de courant</i> . . . . .	196
e.	<i>Équation de propagation du champ électrique dans le plasma</i> . . . . .	197
f.	<i>Relation de dispersion</i> . . . . .	198
2)	Solutions de l'équation de propagation . . . . .	198
a.	<i>Étude de la relation de dispersion</i> . . . . .	198
b.	<i>Vecteur d'onde dans le cas général</i> . . . . .	199
c.	<i>Cas de la propagation</i> . . . . .	199
d.	<i>Cas de l'onde évanescante</i> . . . . .	199
e.	<i>Graphe de <math>k(\omega)</math></i> . . . . .	200
f.	<i>Aspects énergétiques</i> . . . . .	200
3)	Dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe . . . . .	201
a.	<i>Présentation du phénomène de dispersion</i> . . . . .	201
b.	<i>Propagation de deux OPPM de fréquences voisines</i> . . . . .	201
c.	<i>Propagation d'un paquet d'onde</i> . . . . .	201
d.	<i>Applications : vide et plasma</i> . . . . .	201
e.	<i>Indice du plasma</i> . . . . .	202
<b>IV.</b>	<b>Propagation d'une OPPM dans un milieu ohmique</b>	202
1)	Équations de Maxwell dans un milieu ohmique . . . . .	202
a.	<i>Milieu conducteur ohmique</i> . . . . .	202
b.	<i>Disparition d'un excès local de charge</i> . . . . .	202
c.	<i>Courant de conduction dominant</i> . . . . .	203
d.	<i>Équation de diffusion</i> . . . . .	203

2) "Effet de peau" dans un métal . . . . .	204
a. <i>Relation de dispersion</i> . . . . .	204
b. <i>Champ électrique</i> . . . . .	204
c. <i>Vitesses de phase et de groupe</i> . . . . .	204
d. <i>Champ magnétique</i> . . . . .	205
e. <i>Aspects énergétiques</i> . . . . .	205
3) Applications . . . . .	205
<b>V. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait</b>	<b>205</b>
1) Distribution surfacique de charges et de courants . . . . .	205
a. <i>Modèle de distribution surfacique de charge et de courant</i> . . . . .	205
b. <i>Relations de passage</i> . . . . .	206
2) Plan conducteur parfait . . . . .	206
a. <i>Modèle du conducteur parfait</i> . . . . .	206
b. <i>Champ électromagnétique, charge et courant à l'intérieur du conducteur parfait</i> . . . . .	206
c. <i>Champ électromagnétique au voisinage immédiat du conducteur parfait</i> . . . . .	207
3) Réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait . . . . .	207
a. <i>Existence d'une onde réfléchie</i> . . . . .	207
b. <i>Recherche de l'onde réfléchie</i> . . . . .	207
c. <i>Onde résultante : onde stationnaire</i> . . . . .	209
d. <i>Densités surfaciques de charge et de courant</i> . . . . .	210
4) Étude énergétique . . . . .	211
a. <i>Énergie des ondes incidentes et réfléchies</i> . . . . .	211
b. <i>Énergie de l'onde stationnaire</i> . . . . .	211
c. <i>Polarisation par fils métalliques</i> . . . . .	212
5) Cavité à une dimension . . . . .	212
a. <i>Présentation</i> . . . . .	212
b. <i>Recherche des ondes stationnaires dans une cavité vide</i> . . . . .	213
c. <i>Énergie d'un mode de vibration</i> . . . . .	215
<b>Mécanique</b>	<b>216</b>
<b>I. Cinématique</b>	<b>216</b>
1) Calcul vectoriel . . . . .	216
a. <i>Produit scalaire de deux vecteurs <math>\vec{A}</math> et <math>\vec{B}</math></i> . . . . .	216
b. <i>Bases orthonormées</i> . . . . .	216
c. <i>Produit vectoriel</i> . . . . .	216
2) Repérage d'un point dans le plan . . . . .	216
a. <i>Repérage d'un point sur un axe</i> . . . . .	216
b. <i>Repérage d'un point dans le plan</i> . . . . .	217
3) Repérage d'un point dans l'espace . . . . .	218
4) Description cinématique de mouvement d'un point matériel . . . . .	219
a. <i>Expression du vecteur vitesse</i> . . . . .	219
b. <i>Expression du vecteur accélération</i> . . . . .	219

5)	Définitions de mouvement . . . . .	219
6)	Description cinématique du mouvement d'un solide. . . . .	219
a.	<i>Repérage d'un solide</i> . . . . .	219
b.	<i>Solide en translation</i> . . . . .	219
c.	<i>Solide en rotation autour d'un axe fixe</i> . . . . .	220
<b>II.</b>	<b>Changement de référentiels</b>	220
1)	Référentiels . . . . .	220
2)	Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre. . . . .	220
a.	<i>Référentiel (<math>\mathcal{R}'</math>) en translation par rapport à (<math>\mathcal{R}</math>)</i> . . . . .	220
b.	<i>Référentiel (<math>\mathcal{R}'</math>) en rotation autour d'un axe fixe de (<math>\mathcal{R}</math>)</i> . . . . .	220
c.	<i>Dérivées temporelles d'un vecteur dans les référentiels absolu et relatif</i> . . . . .	221
3)	Lois de composition des vitesses et des accélérations . . . . .	222
a.	<i>Point coïncidant avec M à l'instant t (point coïncident)</i> . . . . .	222
b.	<i>Loi de composition des vitesses</i> . . . . .	222
c.	<i>Loi de composition des accélérations</i> . . . . .	223
d.	<i>Cas particuliers : translation</i> . . . . .	223
e.	<i>Cas particulier : rotation</i> . . . . .	224
<b>III.</b>	<b>Dynamique Newtonienne</b>	224
1)	Actions à distance . . . . .	224
a.	<i>Interaction gravitationnelle</i> . . . . .	224
b.	<i>Interaction électrostatique</i> . . . . .	224
c.	<i>Force de Lorentz</i> . . . . .	225
2)	Actions de contact. . . . .	225
a.	<i>Tension exercée par un fil</i> . . . . .	225
b.	<i>Force rappel élastique exercée par un ressort</i> . . . . .	225
c.	<i>Réaction exercée par un support solide</i> . . . . .	226
d.	<i>Action exercée par un fluide</i> . . . . .	226
3)	Quantité de mouvement d'un point matériel ou d'un solide . . . . .	227
a.	<i>Quantité de mouvement d'un point matériel</i> . . . . .	227
b.	<i>Quantité de mouvement d'un solide</i> . . . . .	227
4)	Première Loi de Newton : Principe d'inertie . . . . .	227
a.	<i>Énoncé</i> . . . . .	227
b.	<i>Principe de relativité galiléenne</i> . . . . .	227
c.	<i>Référentiels usuels</i> . . . . .	227
5)	Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique . . . . .	228
6)	Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques. . . . .	228
<b>IV.</b>	<b>Aspects énergétiques de la mécanique du point</b>	228
1)	Puissance d'une force . . . . .	228
2)	Travail d'une force. . . . .	229
a.	<i>Travail élémentaire</i> . . . . .	229
b.	<i>Travail d'une force</i> . . . . .	229
3)	Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen. . . . .	229
a.	<i>Énergie cinétique</i> . . . . .	229
b.	<i>Théorème de l'énergie cinétique</i> . . . . .	229

4)	Énergie potentielle et forces conservatives . . . . .	230
a.	<i>Définitions</i> . . . . .	230
b.	<i>Le poids</i> . . . . .	230
c.	<i>Force de rappel d'un ressort</i> . . . . .	230
d.	<i>Force de gravitation</i> . . . . .	230
e.	<i>Force d'inertie d'entrainement</i> . . . . .	230
f.	<i>Forces non conservatives</i> . . . . .	231
5)	Énergie mécanique. . . . .	231
a.	<i>Cas général - Définitions</i> . . . . .	231
b.	<i>Conservation de l'énergie mécanique</i> . . . . .	231
6)	Problème à un degré de liberté dans un champ de force conservative .	231
a.	<i>Positions d'équilibre</i> . . . . .	231
7)	Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable . . . . .	232
a.	<i>Approximation locale par un puit de potentiel harmonique</i> . . . . .	232
<b>V.</b>	<b>Lois du frottement solide</b>	232
1)	Actions mécaniques de contact . . . . .	232
a.	<i>Action de contact</i> . . . . .	232
2)	Lois de Coulomb pour le frottement de glissement . . . . .	233
a.	<i>Loi de Coulomb pour la réaction normale</i> . . . . .	233
b.	<i>Lois de Coulomb pour la réaction tangentielle</i> . . . . .	233
c.	<i>Les coefficients de frottement</i> . . . . .	234
d.	<i>Contact parfait</i> . . . . .	234
3)	Aspect énergétique du contact entre solides. . . . .	234
a.	<i>Puissance des actions de contact entre deux solides</i> . . . . .	234
b.	<i>Cas d'une puissance nulle</i> . . . . .	234
4)	Méthode de résolution . . . . .	234
<b>VI.</b>	<b>Dynamique Newtonienne en référentiel non galiléen</b>	235
1)	Référentiel non galiléen . . . . .	235
2)	Principe fondamental de la dynamique. . . . .	235
3)	Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen . . . . .	237
<b>VII.</b>	<b>Mécanique terrestre</b>	238
1)	La Terre dans le système solaire . . . . .	238
a.	<i>Le référentiel de Copernic</i> . . . . .	238
b.	<i>Le référentiel géocentrique</i> . . . . .	238
c.	<i>Le référentiel terrestre</i> . . . . .	238
d.	<i>Critère d'attribution du caractère galiléen</i> . . . . .	238
2)	Conséquence de la rotation propre de la Terre. . . . .	239
<b>VIII.</b>	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique</b>	240
1)	Force de Lorentz . . . . .	240
a.	<i>Ordres de grandeur</i> . . . . .	240
b.	<i>Puissance de la force de Lorentz</i> . . . . .	240
2)	Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique . . . . .	240
a.	<i>Champ électrique et potentiel</i> . . . . .	240
b.	<i>Production d'un champ électrique uniforme entre deux plaques</i> . .	241
c.	<i>Équations du mouvement</i> . . . . .	241
d.	<i>Étude énergétique</i> . . . . .	241

3)	Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique. . . . .	241
a.	<i>Équation du mouvement</i> . . . . .	241
<b>IX.</b>	<b>Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives</b>	242
1)	Caractéristiques d'un mouvement de force centrale . . . . .	242
a.	<i>Définition et énergie potentielle associée</i> . . . . .	242
b.	<i>Exemples</i> . . . . .	242
c.	<i>Conservation du moment cinétique</i> . . . . .	242
d.	<i>Conservation de l'énergie mécanique</i> . . . . .	244
2)	Cas particulier : forces centrales Newtonienne . . . . .	244
3)	Cas de l'interaction gravitationnelle . . . . .	245
a.	<i>Lois de Kepler</i> . . . . .	245
b.	<i>Étude de la trajectoire circulaire</i> . . . . .	245
4)	Cas du mouvement elliptique . . . . .	246
5)	Satellites géostationnaires . . . . .	247
<b>X.</b>	<b>Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe</b>	248
1)	Moment cinétique . . . . .	248
a.	<i>Moment cinétique d'un point matériel</i> . . . . .	248
b.	<i>Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe</i> . . . . .	249
2)	Moment d'une force . . . . .	250
a.	<i>Par rapport à un point</i> . . . . .	250
b.	<i>Par rapport à un axe orienté <math>\Delta</math></i> . . . . .	250
c.	<i>Calcul en coordonnées cylindriques</i> . . . . .	250
d.	<i>Notion de bras de levier</i> . . . . .	251
3)	Théorème du moment cinétique en référentiel galiléen. . . . .	251
a.	<i>Cas d'un point matériel</i> . . . . .	251
b.	<i>Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe</i> . . . . .	251
c.	<i>Couple de forces</i> . . . . .	253
d.	<i>La liaison pivot</i> . . . . .	253
4)	Approche énergétique d'un solide en rotation . . . . .	254
a.	<i>Énergie cinétique</i> . . . . .	254
b.	<i>Puissance</i> . . . . .	254
c.	<i>Théorème de la puissance cinétique</i> . . . . .	254

# Analyse vectorielle

En physique, les grandeurs peuvent être *scalaires* ou *vectorielles*. On parle alors soit de champ scalaire  $g(M, t)$  soit de champ vectoriel  $\vec{g}(M, t)$ .

Un champ indépendant du point  $M$  est un champ *uniforme*.

Un champ indépendant du temps est un champ *stationnaire*.

Un champ uniforme et stationnaire est un champ *constant*.

## I. Circulation et flux d'un champ vectoriel

### 1) Circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour

#### a. Contour

On appelle *contour*  $\mathcal{C}$ , toute courbe reliant deux points de l'espace.

Quand une courbe est fermée, on dit que le contour est fermé.

#### b. Définition

On appelle *circulation du vecteur*  $\vec{g}$  le long d'un contour  $\mathcal{C}$ , l'intégrale curviligne :

$$C = \int_{\mathcal{C}} dC = \int_{M \in \mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M$$

$dC = \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}$  étant la circulation élémentaire de  $\vec{g}$  le long de l'élément de contour orienté  $\overrightarrow{dl}$ .

Remarque : Si le champ vectoriel  $\vec{g}$  représente un champ de force, la circulation n'est autre que le travail de cette force quand son point d'application suivant  $\mathcal{C}$  :  $\int \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int \delta W = W$ .

#### c. Propriétés

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (\vec{g}_1 + \vec{g}_2) \cdot \overrightarrow{dl} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{g}_1 \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{\mathcal{C}} \vec{g}_2 \cdot \overrightarrow{dl} \\ \int_{\mathcal{C}^+} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl} &= - \int_{\mathcal{C}^-} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl} \end{aligned}$$

On note  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}$ , la circulation de  $\vec{g}$  le long d'un contour  $\mathcal{C}$  fermé.

Si  $\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M = 0$  alors  $\vec{g}$  est un *champ à circulation conservative*. En effet, dans ce cas,  $\int_{M_1}^{M_2} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M$  est indépendante du chemin suivi pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ .

## 2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

### a. Orientation d'une surface

Il faut distinguer les *surfaces ouvertes* et les *surfaces fermées*.

Les *surfaces ouvertes* s'appuient nécessairement sur un contour fermé. L'orientation d'une telle surface est déterminée à l'aide de la règle de la main droite.

Les *surfaces fermées* délimitent un volume fini. Par convention, la normale positive est orientée vers l'extérieur, appelée *normale sortante*.

### b. Définition

On appelle *flux du vecteur*  $\vec{g}$  à travers une surface finie  $S$ , l'intégrale de surface :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_{M \in S} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS_M}$$

$d\Phi = \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS}$  étant le *flux élémentaire* de  $\vec{g}$  à travers l'élément de surface orienté  $\overrightarrow{dS}$ .

### c. Propriétés

On note  $\iint_S \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS}$ , le flux de  $\vec{g}$  à travers une surface fermée  $S$ .

Si  $\iint_S \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$  alors  $\vec{g}$  est un champ à flux conservatif. En effet, dans ce cas, le flux de  $\vec{g}$  à travers une surface ouverte quelconque  $S'$ , ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface ouverte  $S'$ .

## II. Cinq opérateurs

### 1) Définitions et expressions

Opérateur	Gradient	Divergence	Rotationnel
Notation	$\vec{\nabla}$ ( $\overrightarrow{grad f}$ )	$\vec{\nabla} \cdot (\overrightarrow{div g})$	$\vec{\nabla} \times (\overrightarrow{rot g})$
Définition	$df = \vec{\nabla} f \cdot \overrightarrow{dl}$	$d\Phi_{\vec{g}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} d\tau$	$dC_{\vec{g}} = \vec{\nabla} \times \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS}$

L'opérateur  $\vec{\nabla}$  est défini en coordonnées cartésiennes comme étant :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{u}_z \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Les opérateurs gradient, divergence et rotationnel sont en m<sup>-1</sup>.

Il existe également les opérateurs appelés Laplacien (scalaire et vectoriel) qui sont en m<sup>-2</sup>.

Par définition, le *Laplacien scalaire* vaut :  $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$ . Ainsi,

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Par définition, le *Laplacien vectoriel* vaut :  $\vec{\Delta} \vec{g} = \Delta g_x \vec{u}_x + \Delta g_y \vec{u}_y + \Delta g_z \vec{u}_z$ . Ainsi,

$$\vec{\Delta} \vec{g} = \begin{pmatrix} \Delta g_x = \frac{\partial^2 g_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \\ \Delta g_y = \frac{\partial^2 g_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \\ \Delta g_z = \frac{\partial^2 g_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

## 2) Relations vectorielles utiles

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) &= \text{div}(\text{rot} \vec{g}) = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) &= \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) - \vec{\Delta} \vec{g} \Leftrightarrow \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{g}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{g}) - \vec{\Delta} \vec{g} \end{aligned}$$

## III. Théorème de Green-Ostrogradski

### 1) Énoncé

Le flux de  $\vec{g}$  à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de divergence de  $\vec{g}$  sur le volume  $V$  limité par  $S$ .

$$\oint\!\!\!\oint_{S \text{ fermée}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} d\tau$$

### 2) Champ vectoriel à divergence nulle

Si la divergence de  $\vec{g}$  est nulle, d'après le théorème de Green-Ostrogradski alors : **un champ vectoriel à divergence nulle est un champ à flux conservatif.**

## IV. Théorème de Stokes-Ampère

### 1) Énoncé

La circulation d'un champ vectoriel  $\vec{g}$  le long d'un contour fermé est égal au flux de  $\vec{\nabla} \times \vec{g}$  à travers toute surface ouverte qui s'appuie sur le contour.

$$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

### 2) Champ à rotationnel nul

Si le rotationnel de  $\vec{g}$  est nul, d'après le théorème de Stokes-Ampère alors : un champ vectoriel à rotationnel nul est un champ à circulation conservative.

## V. Formules dans tous les systèmes de coordonnées

### 1) Relations vectorielles utiles

Double produit vectoriel :  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$  et  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) - \vec{\Delta} \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\vec{\nabla}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (a\vec{g}) = (\vec{\nabla} a)\vec{g} + a \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \times \vec{h}) = (\vec{\nabla} \times \vec{g}) \cdot \vec{h} - \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h})$$

$$\vec{\nabla} \times (a\vec{g}) = \vec{\nabla} a \times \vec{g} + a \vec{\nabla} \times \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{h}) = \vec{g} \vec{\nabla} \cdot \vec{h} - \vec{h} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + (\vec{h} \cdot \vec{\nabla}) \vec{g} - (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}) \vec{h}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f$$

## 2) Opérateur gradient

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} U = \left( \frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} U = \left( \frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$$

## 3) Opérateur divergence

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial (a_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

## 4) Opérateur rotationnel

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left( \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \right)$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right), \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \right)$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left( \frac{1}{r \sin(\theta)} \left( \frac{\partial (a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} \right), \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \right)$$

## 5) Opérateur Laplacien

Coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

# Optique

## I. Nature de la lumière

### 1) Description ondulatoire

#### a. La lumière est une onde électromagnétique

La lumière est une superposition d'ondes électromagnétiques<sup>1</sup> qui oscillent sinusoïdalement en fonction du temps et de l'espace à une vitesse  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  dans le vide.

Double périodicité :

- période temporelle  $T$  ou fréquence  $\nu$ ,
- période spatiale ou longueur d'onde  $\lambda$

Le lien entre ces deux périodes étant le suivant :

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

#### b. Spectre électromagnétique

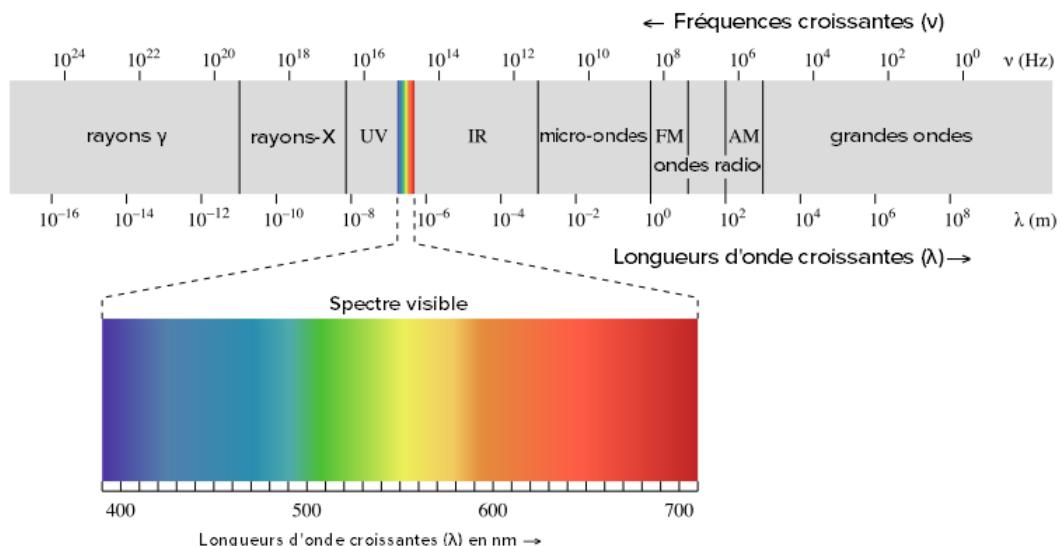


FIGURE 1 – Spectre électromagnétique

1. Ces ondes n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager.

## 2) Description corpusculaire

Photon : particule non massique et non chargée se déplaçant à la vitesse de la lumière. Son énergie est  $E = h\nu$  où  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s est la constante de Planck.

## 3) Sources de lumière

Il existe différents types de sources de lumière présentant des spectres différents :

- Spectre continu (étoiles, lampes à incandescence). Dans ce cas, la loi de Wien permet de déterminer la longueur d'onde associée au maximum d'émission du corps noir :  $\lambda_m T = 3 \cdot 10^{-3} K m$ ,
- Spectre de raies (lampes spectrales). Émission d'un photon correspondant à la désexcitation d'un atome tel que :  $\Delta E = E_{max} - E_{min} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ . On observe sur le spectre des pics de Dirac à certaines longueurs d'onde fixées.
- Source LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiations). Basé sur le principe de l'émission stimulée : un photon incident interagit avec un atome excité ce qui entraîne l'émission d'un second photon. Les LASER sont des sources directionnelles et monochromatiques (aux modes spectraux près).

## II. Propagation de la lumière dans un milieu transparent

Milieu Transparent, homogène et Isotope :

- Transparent : on suppose qu'il n'y a pas d'absorption,
- Homogène : propriétés du milieu sont les mêmes en tout point de l'espace,
- Isotope : propriétés physiques identiques dans toutes les directions de l'espace

Indice de réfraction :  $n = \frac{c_0}{c}$  où  $c_0$  désigne la vitesse de la lumière dans le vide et  $c$  la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.  $n_{air} \approx 1$  ;  $n_{verre} \approx 1,5$  ;  $n_{eau} \approx 1,33$ .

À partir de  $c = \frac{\lambda}{T}$ ,  $c_0 = \frac{\lambda_0}{T}$  et  $n = \frac{c_0}{c}$ , on montre  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ .

Dispersion : Dans tout milieu matériel il existe un phénomène de dispersion de la lumière. Généralement, les milieux THI vérifient la loi de Cauchy (empirique) :

Loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

### III. Optique géométrique

Approximation de l'optique géométrique : la lumière est formée de rayons lumineux. Cette approximation est valable tant qu'aucun phénomène de diffraction n'est observable. Ainsi, si le diamètre des diaphragmes utilisés est plus grand que la longueur d'onde incidente alors l'approximation est valable.

Remarque : *Le phénomène de la diffraction montre qu'il est impossible d'isoler un rayon lumineux. L'optique géométrique est donc un concept abstrait.*

En optique géométrique, les rayons sont considérés comme indépendants, il n'existe donc pas de phénomène d'interférences en optique géométrique.

Principe de Fermat ou principe de moindre durée : Pour aller d'un point A à un point B, la lumière emprunte le chemin qui nécessite le moins de temps. Ainsi, dans un milieu THI, les rayons lumineux sont des droites. Les rayons lumineux sont donc des demi-droites issues d'une source ponctuelle.

Principe du retour inverse de la lumière : la trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas de son sens de parcours.

#### 1) Les lois de Descartes

On définit *les dioptres* comme étant les surfaces séparant deux milieux THI différents.

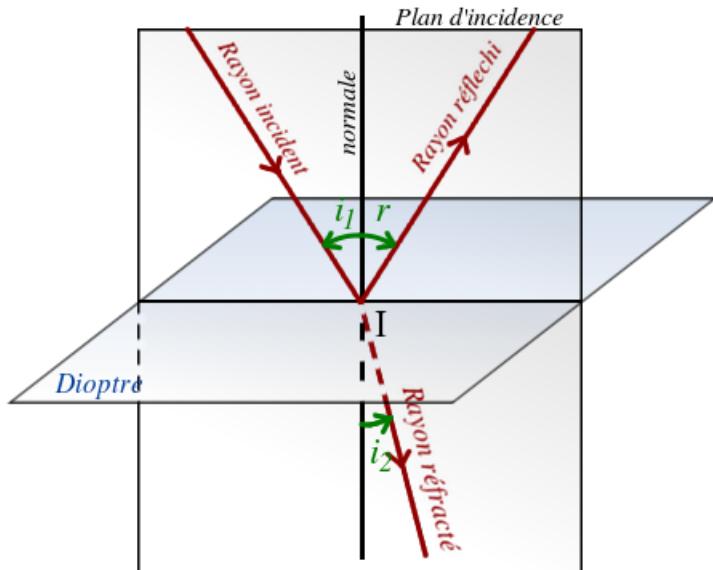


FIGURE 2 – Représentation schématique des Lois de Descartes

### a. Réflexion

Ce phénomène correspond à un changement brusque de la direction de la lumière incidente qui revient dans son milieu initial après avoir rencontré une surface réfléchissante (dioptre ou miroir).

Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence (plan formé par la normale au dioptre et le rayon incident) et l'angle d'incidence est opposé à l'angle de réflexion :  $i_1 = -r$  (Les angles sont orientés dans cette formule).

*Remarque : Dans le cas d'une incidence normale, le rayon réfléchi se superpose au rayon incident.*

### b. Réfraction

Changement brusque de la direction de propagation de la lumière qui après avoir rencontré un dioptre se propage dans un milieu différent du milieu initial.

En considérant le passage d'un milieu d'indice  $n_1$  à un milieu d'indice  $n_2$ , la relation  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  est vérifiée. Aux petits angles, cette expression est parfois simplifiée par  $n_1 i_1 = n_2 i_2$ .

Lors du passage d'un milieu plus réfringent à un moins réfringent ( $n_1 \geq n_2$ ) alors le rayon réfracté s'écarte de la normale au dioptre. Il peut y avoir dans ce cas une *réflexion totale*.

Dans le cas d'une réflexion totale, l'angle d'incidence limite est donnée par :

$$i_1^{\lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Pour un angle d'incidence supérieur on n'observe plus de rayon réfracté.

Il existe également une *réfraction totale* dans le cas où un rayon passe d'un milieu moins à plus réfringent ( $n_1 \leq n_2$ ). Dans ce cas, l'angle de réfraction maximal observable est donné par :

$$i_2^{\max} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Quelque soit l'angle d'incidence du rayon lumineux, l'angle de réfraction sera toujours plus faible que  $i_2^{\max}$ .

## 2) Formation des images en optique géométrique

### a. Vocabulaire

**Système optique** Ensemble de milieux THI et de miroirs.

*Remarque : On parle de système dioptrique s'il n'y a que des dioptres et de système catadioptrique sinon.*

**Système optique centré** Système optique qui admet un axe de symétrie cylindrique, appelé *axe optique*.

### b. Notions d'objet et d'image

**Point Objet** Intersection d'un ensemble de rayons lumineux entrant dans le système optique

**Point Image** Intersection d'un ensemble de rayons lumineux sortant du système optique

Si tous les rayons issus du point objet A se coupent en un même point A', on dit que A' est *l'image* de A par le système optique. A et A' sont dits "conjugués".

### c. Objets et images, réels ou virtuels ?

Un *objet* est *réel* s'il est situé avant la face d'entrée du système optique. Il est *virtuel* s'il est placé après la face d'entrée du système optique.

Une *image* est *réelle* si elle est située après la face de sortie du système optique. Elle est *virtuelle* si elle est placée avant la face de sortie du système optique.

## 3) Conditions d'obtention d'une bonne image

### a. Stigmatisme

Un système est *rigoureusement stigmatique* pour un couple de points (A ; A') si la totalité des rayons issus de A se coupent, après passage dans le système optique, en A'.

Remarque : Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace.

Pour la plupart des systèmes optiques, le stigmatisme est *approché* : dans ce cas, les rayons issus d'un point se coupent, après passage dans le système optique, presque en un même point.

### b. Aplanétisme

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe optique. On note A'B' l'image conjuguée de AB par le système optique. Il est dit *aplanétique* si A'B' est perpendiculaire à l'axe optique.

### c. Aberrations

Il existe deux sortes d'aberrations .

#### Aberrations géométriques :

Elles sont dues aux écarts aux conditions de Gauss.

**Distorsion en coussinet** Image d'une grille ayant l'air déformée vers l'intérieur

**Distorsion en barillet** Image d'une grille ayant l'air déformée vers l'extérieur

**Distorsion en "moustache"** Un peu un mélange des deux

Aberrations chromatiques : elles sont dues à la dispersion de la lumière par un milieu et sont visibles pour une source incidente polychromatique.

#### d. Conditions de Gauss

Un système optique centré est utilisé dans les *conditions de Gauss* si les rayons lumineux sont proches de l'axe optique et faiblement inclinés par rapport à l'axe optique. On dit que ces rayons sont *paraxiaux*.

#### 4) Lentilles sphériques

##### a. Présentation

Une *lentille sphérique*, ou plus simplement *lentille*, est un milieu THI délimité par deux dioptres sphériques (ou un dioptre sphérique et un plan).

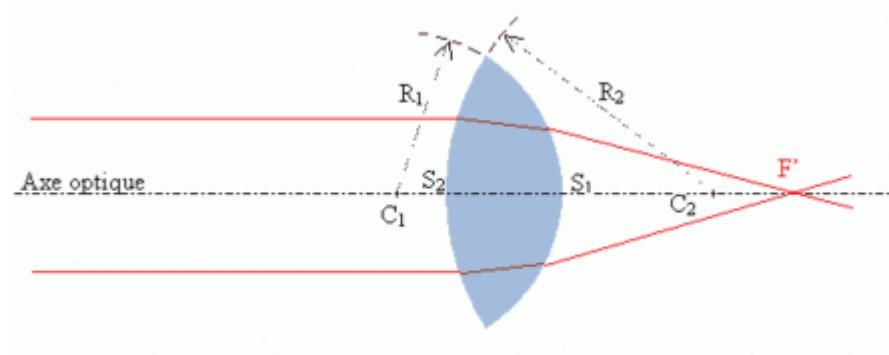


FIGURE 3 – Représentation schématique d'une lentille sphérique

*Remarque : Sur ce schéma, les points  $C_1$  et  $C_2$  sont les centres des dioptres, les points  $S_1$  et  $S_2$  sont les sommets.*

On définit les *rayons de courbure* comme  $R_1 = S_1C_1$  et  $R_2 = S_2C_2$ . Le système optique est centré si les points  $C_1$  et  $C_2$  sont situés sur l'axe optique. La lentille est dite *mince* lorsque  $e = |S_1S_2| < R_1$  et  $R_2$ . Ainsi  $S_1$  et  $S_2$  sont confondus en un point appelé *centre optique*.

##### b. Représentation symbolique des lentilles

	vue en coupe	schéma	déviation de la lumière
lentilles convergentes			
lentilles divergentes			

FIGURE 4 – Représentation symbolique des lentilles

### c. Points particuliers d'une lentille mince

**Centre optique** Point de concordance des sommets associés aux dioptres constituants la lentille

**Foyer principal objet F** Point objet de l'axe optique dont l'image est située à l'infini sur l'axe optique

**Foyer principal image F'** Point image de l'axe optique associé à un objet situé à l'infini sur l'axe optique

**Foyer secondaire objet** Point qui appartient au *plan focal objet* (plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F)

**Foyer secondaire image** Point qui appartient au *plan focal image* (plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F')

### d. Distances focales et Vergence

On définit pour une lentille mince les distances focales suivantes :

- Distance focale image :  $f' = \overline{OF'}$  (positive pour une lentille convergente)
- Distance focale objet :  $f = \overline{OF}$  (positive pour une lentille divergente)

La vergence est définie comme :  $V = \frac{1}{f'}$  et s'exprime en  $\text{m}^{-1}$  ou en dioptries ( $\delta$ ).

### e. Construction

Il existe des rayons particuliers à tracer afin de déterminer la position d'une image connaissant la position de l'objet, ou réciproquement :

- Le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié,
- Le rayon incident parallèle à l'axe optique ressort en passant par le point focal image,
- Le rayon incident passant par le point focal objet ressort parallèle à l'axe optique

Remarque : Les rayons doivent absolument être orientés à l'aide de flèches.

### f. Formules de conjugaison et grandissement

On définit le grandissement transversal comme :  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$  où  $\overline{A'B'}$  et  $\overline{AB}$  représente respectivement la taille de l'image et de l'objet par un système optique donné.

#### Relations de Newton

Ces formules sont avec origines aux foyers.

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}} \text{ et } \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

### Relations de Descartes

Ces formules sont avec origines aux centres optiques.

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \text{ et } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On définit les grossissements angulaires comme :  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  où  $\alpha$  et  $\alpha'$  correspondent respectivement à l'angle entre un rayon incident et l'axe optique et l'angle entre ce même rayon et l'axe optique après passage dans le système optique.

### **g. Projection d'une image d'un objet réel : Règle des $4f'$**

Pour projeter l'image d'un objet réel sur un écran à l'aide d'une lentille convergente, il faut que la distance minimale  $\overline{AA'}$  (distance objet écran) soit de  $4f'$ .

*Démonstration :*

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \text{ et } D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'}$$

$$\text{On pose } x = \overline{OA'} \Rightarrow \overline{OA} = x - D$$

$$D'où \frac{1}{x} - \frac{1}{x - D} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow x^2 - xD + Df' = 0 \quad (\Delta = D^2 - 4Df')$$

*Solutions réelles si et seulement si  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow D \geq 4f'$*

*Si  $\Delta = 0$ , dans ce cas  $\overline{OA'} = \frac{D}{2} = -\overline{OA}$ , donc  $\gamma = -1$*

*Si  $\Delta > 0$ , il existe deux positions pour placer la lentille*

*Qed*

## IV. L'œil

### 1) Anatomie

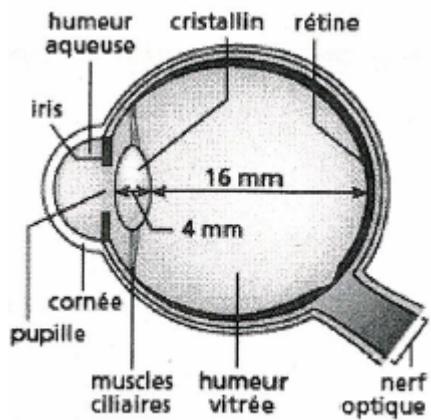


FIGURE 5 – Coupe d'un œil

**Iris** Joue le rôle de diaphragme de champ <sup>a</sup> (diamètre variable entre 2 et 8 mm)

**Cristallin** Muscle assimilable à une lentille mince biconvexe de focale variable en fonction de sa contraction

**Rétine** (Écran) Constituée de cellules photosensibles

**Humeur vitrée** Substance gélatineuse d'indice  $n \approx 1,336$

**Nerf optique + Rétine** Codage de l'image sous forme d'flux nerveux + Transmission au cerveau

a. Diaphragme limitant l'intensité lumineuse entrante dans le système optique

### 2) Modélisation

Modélisation par la succession suivante : diaphragme, lentille convergente et écran fixe.

### 3) Caractéristiques

#### a. Champ angulaire

On appelle *champ angulaire* l'angle du cône de vision (cône partant de la pupille). Il est d'environ  $40\text{--}50^\circ$ . Cependant, la zone de perception des détails est plus réduite.

#### b. Limite de résolution angulaire

L'œil ne distingue deux détails d'un objet que si leur image se forme sur deux cellules différentes de la rétine. La *limite de résolution angulaire* ou *pouvoir séparateur* de l'œil est d'environ  $1/60^\circ$  dans de bonnes conditions.

#### c. Plage d'accommodation

L'œil ne voit une image nette que si elle se forme sur la rétine. Un œil au repos voit à une distance  $D_m$ , au niveau du *Punctum Remotum (PR)*.

Lorsque le cristallin se contracte, on dit que l'œil accommode pour voir au plus proche au niveau du *Punctum Proximum (PP)*.

La zone entre le PP et le PR est appelée *plage d'accommodation*.

Pour un œil normal, ou *emmétrope*, le PP est à environ  $25\text{ cm}^2$  et le PR est à l'infini.

2. Pour un adulte

#### d. Défauts courants de l'œil

La myopie : Cet œil possède un cristallin trop convergent. Ainsi, le PP et le PR sont plus proches. Une lentille divergente est donc utilisée en correction.

L'hypermétropie : Cet œil possède un cristallin pas assez convergent. Le PP est donc plus éloigné que pour l'œil normal. Une lentille convergente est donc utilisée en correction.

L'astigmatisme : Cet œil ne possède pas de symétrie de révolution. Des lentilles non sphériques sont utilisées en correction.

Remarque : *On peut modéliser cet œil en inclinant une lentille par rapport à l'axe optique.*

La presbytie : Cet œil a des difficultés à accomoder. Problème dû au vieillissement. Correction par des verres multifocaux ou des verres progressifs (focale variable).

## V. Modèle scalaire des ondes lumineuses

### 1) Représentation scalaire des ondes lumineuses

#### a. Grandeur scalaire de l'optique

La lumière est une onde électromagnétique, vérifiant les équations de Maxwell.

Dans le cas d'une onde plane, ces deux champs sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation de l'onde.

Si l'on cherche à déterminer le champ résultant de la superposition de deux OPPM polarisées rectilignement sur  $\vec{u}_y$ . On a  $\vec{E}_1(M, t) = a_1(M, t)\vec{u}_y$  et  $\vec{E}_2(M, t) = a_2(M, t)\vec{u}_y$ . Le champ résultant est la superposition des deux champs électriques donc  $\vec{E}(M, t) = [a_1(M, t) + a_2(M, t)]\vec{u}_y = a(M, t)\vec{u}_y$ .

L'intensité lumineuse, due à la superposition de plusieurs ondes électromagnétiques, peut être déterminée au moyen d'un *modèle scalaire de la lumière*, où le champ électrique est associé à une grandeur scalaire notée  $a(M, t)$ .

Dans un grand nombre de situations, la lumière émise par une source lumineuse peut être décrite par la propagation d'un champ scalaire  $a(M, t)$  (ou  $s(M, t)$ ).  $a(M, t)$  est appelée *vibration lumineuse* : c'est une composante du champ électrique.

#### b. Lumière monochromatique

Une *lumière monochromatique* est une vibration idéale purement sinusoïdale :  $a(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_S) = A(M) \cos(\omega t - \varphi_M)$  où  $\varphi_M = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_S$ .  $A(M)$  est l'*amplitude de la vibration*,  $\omega$  est la *pulsation de la vibration*,  $(\omega t - \varphi_M)$  est la *phase à l'instant t*,  $\varphi_M$  est la *phase au point M à l'instant t = 0* et  $\varphi_S$  est la *phase de la source*.

Dans le vide, où l'onde lumineuse se propage à la vitesse  $c$ , à chaque fréquence  $\nu$ , on peut associer : la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  telle que  $c = \lambda_0\nu$ . Les longueurs d'onde du visible sont comprises entre 400 et 800 nm.

Dans un milieu, où l'onde lumineuse se propage à la vitesse  $v = \frac{c}{n}$  avec  $n = n(\lambda_0)$ , à chaque fréquence  $\nu$ , on peut associer une longueur d'onde dans le milieu  $\lambda$  telle que  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ .

Une lumière monochromatique possède une caractéristique propre, qui est sa longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

### c. Éclairement et intensité lumineuse

La période de vibration d'une lumière visible est de l'ordre de  $10^{-14}\text{s}$  ce qui est inférieur au temps de réponse de tout détecteur. Les détecteurs d'ondes lumineuses sont sensibles à la valeur moyenne, sur leurs temps de réponse, de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent.

L'*éclairement* est la valeur moyenne de la puissance lumineuse RECUE par unité de surface.

L'*intensité lumineuse* est la valeur moyenne de la puissance lumineuse EMISE par unité de surface.

On peut donc parler de façon équivalente de l'éclairement  $\mathcal{E}(M)$  reçu en un point  $M$  de l'espace ou de l'intensité  $I(M)$  émise par ce point.

### d. Intensité lumineuse d'une lumière monochromatique

Pour une onde progressive dans le vide, on a<sup>3</sup> :

$$I(M) = \left\langle \frac{d\mathcal{P}_{ray}}{dS} \right\rangle_t = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle_t = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t$$

L'intensité est donc proportionnelle à  $\langle E^2 \rangle_t$ .

Pour une onde lumineuse, représentée par une OPPM.PR avec  $\vec{E}(M, t) = a(M, t) \vec{u}$ , où  $a(M, t)$  est la vibration lumineuse en  $M$  à l'instant  $t$ ,

$$I = K \langle E^2(M, t) \rangle_t = K \langle a^2(M, t) \rangle_t \text{ en W.m}^{-2}$$

Pour une lumière monochromatique,  $a(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi_M)$ , on choisit l'intensité lumineuse selon :  $I = 2 \langle a^2(M, t) \rangle_t = A^2(M) = \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M)$

## 2) Chemin optique

### a. Chemin optique

Le *chemin optique* entre  $S$  et  $M$  est :

$$(SM) = c\Delta t_{SM} = \int_S^M n(P) dl_P$$

---

3. D'après les notions d'électromagnétisme

Le chemin optique a la dimension d'une longueur et il représente la distance qui serait parcourue par la lumière dans le vide, à la vitesse  $c$ , pendant l'intervalle de temps  $\Delta t_{SM}$ , qui correspond au temps réellement mis par la lumière pour aller de  $S$  à  $M$  dans le milieu d'indice  $n(P)$ .

Dans le cas d'un milieu d'indice constant (milieu homogène),  $(SM) = nSM$  où  $SM$  est longueur du segment  $[SM]$ . Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite.

### b. Déphasage dû à la propagation

$$\begin{aligned} a(M, t) &= A(M) \cos [\omega(t - \Delta t_{SM}) - \varphi_S] \\ \Leftrightarrow a(M, t) &= A \cos(\omega t - \omega \Delta t_{SM} - \varphi_S) \\ \Leftrightarrow a(M, t) &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{(SM)}{c} - \varphi_S\right) \\ \Leftrightarrow a(M, t) &= A \cos\left(\omega t - \left(\frac{2\pi(SM)}{\lambda_0} + \varphi_S\right)\right) \\ \Leftrightarrow a(M, t) &= A \cos(\omega t - \varphi_M) \end{aligned}$$

Avec,

$$\varphi_M = \varphi_S + \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_S = \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}$$

Il s'agit du déphasage dû à la propagation de la lumière de  $S$  à  $M$ , dans un milieu d'indice  $n$ .

Cas particulier : Interférences à deux ondes = superposition de deux ondes en un même point  $M$ .

Dans ce cas, une onde passe par un chemin (1) et subit un déphasage :  $[\varphi_M - \varphi_S]_1 = \frac{2\pi(SM)_1}{\lambda_0}$  et une onde passe par un chemin (2) et subit un déphasage :  $[\varphi_M - \varphi_S]_2 = \frac{2\pi(SM)_2}{\lambda_0}$ .  
Ainsi,

$$\Delta\varphi_M = [\varphi_M - \varphi_S]_2 - [\varphi_M - \varphi_S]_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((SM)_2 - (SM)_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_M$$

$\delta_M = (SM)_2 - (SM)_1$  est appelée *différence de marche* au point  $M$ .

## 3) Surface d'onde

a. Surface d'onde

Soit  $S$  une source lumineuse ponctuelle. Une *surface d'onde* est l'ensemble des points  $M$ , tels que le chemin optique parcouru de  $S$  à  $M$  le long d'un rayon lumineux soit constant :  $(SM) = c^{te}$ . Une surface d'onde est donc une surface d'égal chemin optique.

$\varphi_M = \varphi_S + \frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}$ . Pour une surface d'onde,  $(SM) = c^{te}$ , donc  $\varphi_M = c^{te}$  donc  $a(M, t) = A \cos(\omega t - \varphi_M) = c^{te}$  à  $t$  fixé.

D'un point de vue physique,  $(SM) = c^{te} \Rightarrow c\Delta_{SM} = c^{te} \Rightarrow \Delta t_{SM} = c^{te}$ . Une surface d'onde est donc le lieu des points atteints en même temps par la lumière issue de  $S$ .

Une surface d'onde est donc aussi une surface équiphase (lieu des points  $M$  tels que  $\varphi_M = c^{te}$ ) et aussi une surface d'égale vibration  $a(M, t)$  à  $t$  fixé.

### b. Onde sphérique, onde plane

Une source ponctuelle  $S$  émet dans un milieu homogène des ondes sphériques pour lesquelles les surfaces d'onde sont des sphères.

Dans le cas d'une onde plane, les surfaces d'onde sont des plans.

Une onde plane apparaît comme une onde sphérique très loin du lieu de l'émission de l'onde ; les surfaces d'onde sphériques sont alors assimilables à des plans.

Entre deux surfaces d'onde, le chemin optique est constant, quel que soit le rayon lumineux suivi.

### c. Théorème de Malus

**Les surfaces d'onde sont perpendiculaires aux rayons lumineux issus d'une source ponctuelle.**

Conséquence : Quand deux points  $A$  et  $A'$  sont conjugués par un système optique, le chemin optique entre  $A$  et  $A'$  est le même, quel que soit le rayon lumineux suivi. Ceci signifie que les rayons arrivent en phase sur le point image.

### d. Effet d'une lentille mince convergente dans l'approximation de Gauss

Si l'onde incidente est une onde sphérique, alors après le passage de la lentille convergente, l'onde émergente est plane.

À contrario, si l'onde incidente est plane, alors après le passage de la lentille convergente, l'onde émergente est sphérique.

Ceci s'observe en traçant les rayons particuliers et en traçant perpendiculairement les surfaces d'onde aux rayons.

## 4) Sources lumineuses

Le spectre lumineux d'une source est obtenu avec un système dispersif (prisme, réseau...) permettant de séparer les différentes radiations, ie les différentes longueurs d'onde émises par la source.

### a. Source de lumière blanche : Spectre continu

Émission de toutes les radiations entre 400 et 800 nm.

### b. Lampe spectrale : spectre discret : spectre de raies

Dans le cas des lampes spectrales, on observe sur le spectre des raies de couleur sur un fond noir. Les raies sont caractéristiques des éléments contenus dans l'ampoule de verre contenant le gaz.

### c. LASER

*LASER : Light Amplification by Stimulated Emission of Radiations*

Spectre discret : spectre de raie avec une raie principale, caractéristique du milieu qui constitue le LASER.

## 5) Émission de lumière : modèle des trains d'ondes

L'émission de lumière correspond à l'émission de photons par les atomes de la source, selon leur niveau d'énergie et selon leur environnement.

Une source réelle ne peut pas être :

- monochromatique : à cause des problèmes de cohérence temporelle,
- ponctuelle : à cause des problèmes de cohérence spatiale

Il faut donc étudier les deux problèmes séparément.

### a. Source ponctuelle et cohérence temporelle

Modèle du *train d'ondes* : représentation de l'émission lumineuse par, un atome source, par un "morceau" de sinusoïde de durée fixée  $\tau_c$  (appelée *temps de cohérence* de la source).

On définit la *longueur de cohérence*  $L_c = c\tau_c$ .

Sur une durée  $\tau_c$ , l'onde émise est quasi-monochromatique.

Un atome émet successivement des trains d'ondes sans lien de phase, de polarisation les uns avec les autres. La phase et la polarisation de l'onde émise varient aléatoirement au cours du temps. **Deux trains d'ondes émis par un même atome ne sont pas cohérents temporellement.**

Pour obtenir des **interférences** en un même point  $M$ , il faut que les ondes qui se superposent en  $M$  soient **cohérentes**. Il faut donc réussir à "couper" un même train d'onde en deux morceaux, qui cheminent selon deux chemins optiques différents et se superposent en  $M$ .

Une source réelle n'est pas rigoureusement monochromatique et émet dans un intervalle :

- de fréquence de largeur  $\Delta\nu$  tel que :  $[\nu_{min}, \nu_{max}] = \left[ \nu_{moy} - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_{moy} + \frac{\Delta\nu}{2} \right]$ ,
- de longueurs d'onde  $\Delta\lambda$  tel que  $[\lambda_{min}, \lambda_{max}] = \left[ \lambda_{moy} - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_{moy} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right]$ .

Les liens suivants existent :

$$\tau_c \Delta\nu \approx 1 \text{ et } L_c \Delta\lambda = \lambda_0^2$$

Démonstration :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

$$Or, \tau_c \Delta\nu \approx 1$$

$$Donc, \frac{1}{\tau_c} = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda \Leftrightarrow \lambda_0^2 = (c\tau_c) \Delta\lambda = L_c \Delta\lambda$$

*Qed*

Pour une source réelle ayant un temps de cohérence fini, la largeur spectrale est donnée par  $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c}$ .

Dans le cas idéal, le temps de cohérence est infini et alors la largeur spectrale est nulle. Source purement monochromatique.

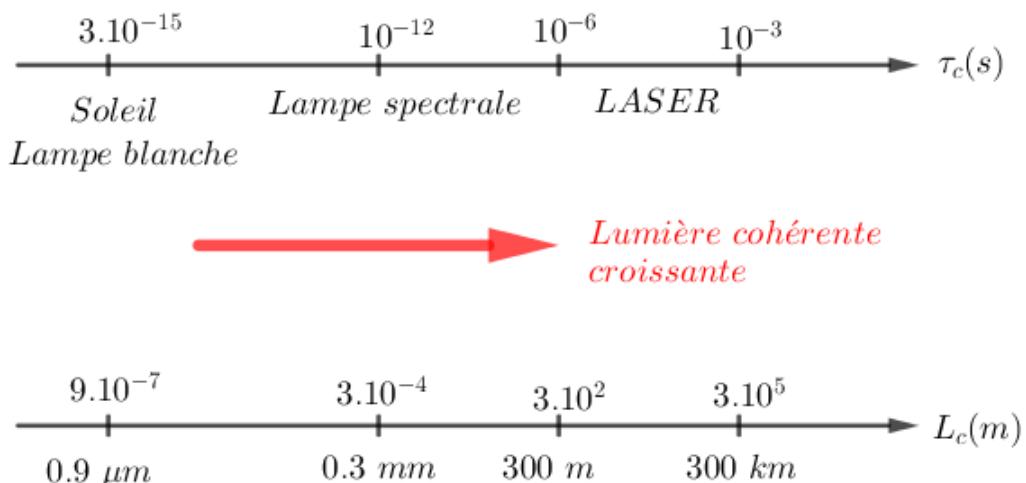
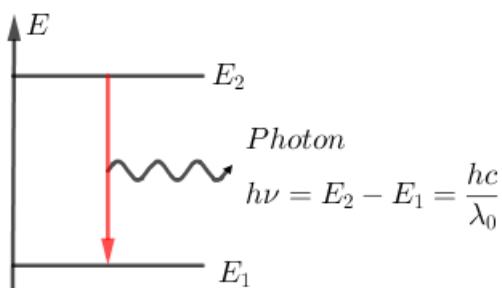


FIGURE 6 – Évolution de la cohérence en fonction de la source

### b. Source classique par émission spontanée



Les atomes émettent spontanément des photons en passant d'un niveau d'énergie  $E_2$  à un niveau d'énergie inférieur d'énergie  $E_1$ .

### c. LASER : émission stimulée

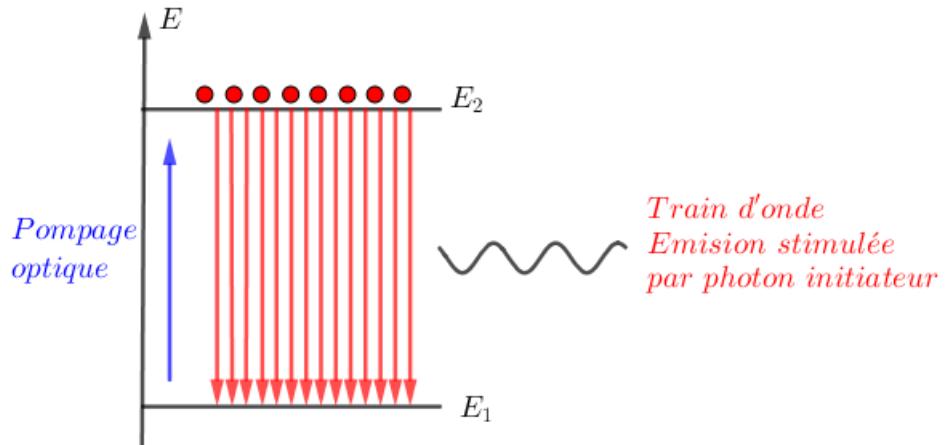


FIGURE 7 – Principe de l'émission stimulée

Le *pompage optique* permet d'amener les atomes d'un niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau d'énergie plus élevé  $E_2$ . Le pompage assure ce que l'on appelle l'*inversion de population*.

Un LASER est constitué d'une *cavité résonante* constituée d'un ou plusieurs miroirs semi-réfléchissants et d'un *milieu amplificateur* permettant l'amplification du rayon lumineux lors des différents passages en son sein.

### d. Source étendue et cohérence spatiale

La source ponctuelle est un modèle théorique qui n'existe pas. Une source réelle est nécessairement étendue. Une source réelle contient nécessairement un grand nombre d'atomes tous différents, qui émettent des ondes incohérentes spatialement.

## VI. Superposition de deux ondes lumineuses

### 1) Superposition de deux ondes incohérentes : pas d'interférence

#### a. Additivité des intensités lumineuses

Quand deux ondes incohérentes se superposent en un point  $M$ , il n'y a pas d'interférence. L'intensité totale au point  $M$  est alors la somme des intensités correspondant à chaque onde :  $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ .

Ce résultat est généralisable dans le cas de la superposition de  $N$  ondes en un même point.

#### b. Incohérence temporelle

Incohérence temporelle : source ponctuelle non monochromatique.

Deux ondes lumineuses de longueurs d'onde différentes émises par une source ponctuelle polychromatique, ne sont pas cohérentes. Ces ondes n'interfèrent pas et l'intensité totale est la somme des intensités dues à chaque longueur d'onde :  $I(M) = I_{\lambda_1}(M) + I_{\lambda_2}(M)$ .

### c. Incohérence spatiale

Incohérence spatiale : source monochromatique non ponctuelle, équivalente à deux sources ponctuelles distinctes ( $S'$  et  $S''$ ). Deux ondes lumineuses de même longueur d'onde, émises par deux sources ponctuelles différentes, ne sont incohérentes. Ces ondes n'interfèrent pas et l'intensité totale est la somme des intensités dues à chaque source :  $I(M) = I_{S'}(M) + I_{S''}(M)$ .

## 2) Superposition de deux ondes cohérentes : interférences

### a. Additivité des vibrations lumineuses

La vibration résultant de la superposition au point  $M$  de deux vibrations lumineuses est la somme des deux vibrations en ce point :  $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$ . Le lieu de superposition des ondes s'appelle le *champ d'interférences*.

### b. Expression de l'intensité lumineuse : terme d'interférence

Soit deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  monochromatiques, de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et de longueurs d'onde dans le vide  $\lambda_{01}$  et  $\lambda_{02}$ . Ainsi,  $a_1(M, t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_{1M})$  et  $a_2(M, t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_{2M})$ .

Au point  $M$  les vibrations se superposent et l'intensité est donnée par :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \left\langle (a_1(M, t) + a_2(M, t))^2 \right\rangle_t \\ &\Leftrightarrow I(M) = 2 \left\langle a_1^2(M, t) + 2a_1(M, t)a_2(M, t) + a_2^2(M, t) \right\rangle_t \\ &\Leftrightarrow I(M) = \underbrace{2 \left\langle a_1^2(M, t) \right\rangle_t}_{I_1} + 4 \left\langle a_1(M, t)a_2(M, t) \right\rangle_t + \underbrace{2 \left\langle a_2^2(M, t) \right\rangle_t}_{I_2} \\ &\Leftrightarrow I(M) = I_1 + I_{12}(M) + I_2 \end{aligned}$$

Le terme  $I_{12}(M) = 4 \left\langle a_1(M, t)a_2(M, t) \right\rangle_t$  est appelé *terme d'interférences*.

Si ce terme est non nul, alors  $I(M) \neq I_1 + I_2$ , les deux ondes sont cohérentes et il y a interférence.

Au contraire, si ce terme est nul alors  $I(M) = I_1 + I_2$ , les deux ondes sont alors incohérentes et il n'y a pas d'interférence.

### c. Conditions d'obtention d'interférences à deux ondes

Deux ondes lumineuses peuvent interférer en un point  $M$ , si elles sont cohérentes. Pour cela, il est nécessaire que les deux ondes qui se superposent en  $M$  :

- soient *synchrones* : même pulsation  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  et donc  $\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_0$  ie monochromatique de la source,
- soient issues du même point source :  $S = S_1 = S_2$ ,

- suivent des chemins optiques différents de  $S$  à  $M$  :  $(SM)_1 \neq (SM)_2$
- Pour obtenir des interférences lumineuses à deux ondes, il est nécessaire d'avoir :
- une source ponctuelle monochromatique,
- un "diviseur d'ondes" qui sépare un même train d'ondes en deux morceaux, qui vont suivre deux chemins optiques différents et se superposer en  $M$ .

Comme  $I(M) = I_1 + I_2 + I_{12}(M)$ , les conditions d'interférences correspondent aux conditions pour que le terme d'interférences soit non nul, soit  $I_{12}(M) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} I_{12}(M) &= 4 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle_t \\ \Leftrightarrow I_{12}(M) &= 4 \langle A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_{1M}) A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_{2M}) \rangle_t \\ \Leftrightarrow I_{12}(M) &= 2A_1 A_2 \underbrace{\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_{1M} + \varphi_{2M})) \rangle_t}_{\substack{=0 \text{ car } \omega_1 + \omega_2 \underset{\substack{\geq \\ \text{toujours}}}{>} 0}} \\ &\quad + 2A_1 A_2 \underbrace{\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_{2M} - \varphi_{1M})) \rangle_t}_{\neq 0 \text{ si } \omega_1 = \omega_2} \end{aligned}$$

Donc,  $\omega_1 = \omega_2$  est une condition nécessaire mais pas une condition suffisante

$$\text{Donc, } I_{12}(M) = 2A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_{2M} - \varphi_{1M}) \rangle_t$$

$$\text{Or, } \varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \varphi_{S2} + \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M) - \varphi_{S1} - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M)$$

$$\text{D'où, } I_{12}(M) = 2A_1 A_2 \left\langle \cos \left( \underbrace{(\varphi_{S2} - \varphi_{S1})}_{\text{dpd de t}} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \underbrace{((S_2 M) - (S_1 M))}_{\text{indpd de t}} \right) \right\rangle_t$$

D'après le mécanisme d'émission de la lumière, les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  distinctes émettent des trains d'ondes de façon aléatoire dans le temps, si bien que  $\langle \cos() \rangle \neq 0$  si  $\varphi_{S2} = \varphi_{S1}$ , soit ( $S = S_1 = S_2$ ) (condition nécessaire mais pas condition suffisante).

$$\text{Ainsi, } I_{12}(M) = 2A_1 A_2 \left\langle \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2 M) - (S_1 M)) \right) \right\rangle_t.$$

Le problème est que l'on obtient  $\langle \cos(0) \rangle = 1$  et donc  $I_{12}(M) = 2A_1 A_2$ , une constante indépendante de  $M$ . Or, ceci est impossible et il faut avoir deux chemins optiques différents tels que :

$$I_{12}(M) = 2A_1 A_2 \left\langle \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2 M) - (S_1 M)) \right) \right\rangle_t$$

En posant  $\delta_M = (S_2 M) - (S_1 M)$  la *différence de marche*, on obtient :

**la formule de Fresnel des interférences à deux ondes :**

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right)$$

#### d. Différence de marche

Pour deux ondes cohérentes, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \Delta\varphi_M \text{ avec } \Delta\varphi_M = 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0}$$

Dans cette formule,  $\delta_M$  est la *différence de marche optique*, appelée plus simplement *différence de marche*.

En général, cette différence de marche est une *différence de marche géométrique*. On la calcule par des considérations géométriques, après avoir représenté deux rayons lumineux issus de la source  $S$ , ponctuelle et monochromatique, qui se superposent au point  $M$ .

Cependant, dans certains dispositifs interférentiels, il s'y ajoute une *différence de marche physique*.

Donc, en général,

$$(\delta_M) = (\delta_M)_{\text{géométrique}} + (\delta_M)_{\text{physique}}$$

Différence de marche physique à ajouter :  $(\delta_M)_{\text{physique}} = \frac{\lambda_0}{2}$ .

L'onde lumineuse peut subir un déphasage supplémentaire de  $\pi = \frac{2\pi(\delta_M)_{\text{physique}}}{\lambda_0}$ , ce

qui correspond à une différence de marche supplémentaire  $(\delta_M)_{\text{physique}} = \frac{\lambda_0}{2}$ , dans les cas suivants :

- lorsqu'un seul des deux rayons subit une réflexion sur une surface métallique, l'amplitude de l'onde réfléchie est opposée à celle de l'onde incidente,
- lorsqu'un seul rayon subit une réflexion sur un milieu plus réfringent,
- au passage par un point de convergence, l'onde subit un déphasage supplémentaire de  $\pi$ .

### 3) Cohérence d'un système interférentiel

#### a. Cohérence temporelle

Les trains d'ondes successifs émis par un même atome n'ayant aucun rapport de phase, les deux ondes qui se superposent en  $M$  sont cohérentes, uniquement si ces deux ondes appartiennent au même train d'onde.

Pour qu'il y ait interférences entre les deux ondes issues de la source ponctuelle et monochromatique  $S$ , la différence  $\Delta t_{12}$  entre les temps de parcours des deux trains d'onde selon les deux trajets doit rester très inférieure à la durée  $\tau_c$  d'un train d'onde :  $\Delta t_{12} \ll \tau_c \Rightarrow c\tau_c = L_c$ . Il en résulte des conditions sur la géométrie du dispositif interférentiel.

#### b. Cohérence spatiale

Les trains d'onde appartenant à deux points différents de la source n'ayant aucun rapport de phase, les ondes qui se superposent en  $M$  ne peuvent être cohérentes, que si ces deux ondes sont issues d'une même source ponctuelle (cas idéal).

Une source réelle ne pouvant être purement ponctuelle, il faut considérer plusieurs points sources proches les uns des autres. Le phénomène d'interférence est possible uniquement si ces points ne sont pas trop éloignés les uns des autres. Si les points sont trop éloignés alors il y a un brouillage de la figure d'interférences.

La figure d'interférences reste visible (cad non brouillée) tant que

$$|\Delta\varphi''_{(M)} - \Delta\varphi'_{(M)}| \ll 2\pi \Rightarrow |\delta''_{(M)} - \delta'_{(M)}| \ll \lambda_0$$

Si cette condition n'est pas respectée, les phénomènes d'interférences ne se superposent pas, mais se brouillent et leur visibilité diminue : il y a alors perte de cohérence spatiale.

On définit la *longueur de cohérence spatiale*  $l_s$  de la source étendue, comme la largeur maximale de la source donnant une figure d'interférences peu brouillée.

#### 4) Interférences de deux ondes cohérentes

##### a. Intensité : formule de Fresnel

La *formule de Fresnel* donne :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi_M) \text{ avec } \Delta\varphi_M = 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0}$$

Ordre d'interférence au point  $M$  :  $p_M = \frac{\Delta\varphi_M}{2\pi} = \frac{\delta_M}{\lambda_0} \Rightarrow I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p_M)$ .

##### b. Franges d'interférences

On appelle *franges d'interférences* la surface d'égale intensité  $I(M)$  (ie d'égal  $\Delta\varphi_M$  (surface équiphase), d'égale  $\delta_M$  et donc d'égal  $p_M$ ).

Une *frange brillante* est une surface d'intensité maximale (cas des interférences constructives) :  $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ .

Une *frange sombre* est une surface d'intensité minimale (cas des interférences destructives) :  $I(M) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ .

*L'interfrange  $i$*  correspond à la distance entre deux franges consécutives de même nature. Ainsi  $i$  est la période spatiale de l'intensité  $I(M)$ .

On appelle *frange centrale* la frange qui correspond à  $\delta_M = 0$  soit  $p_M$  (frange centrale) = 0. Cependant, cette frange n'est pas nécessairement au centre de la figure d'interférence.

##### c. Franges d'interférences

	Les franges brillantes $\cos(\Delta\varphi) = +1$	Les franges sombres $\cos(\Delta\varphi) = -1$
Déphasage $\Delta\varphi_M$	$\Delta\varphi_M = m2\pi, m \in \mathbb{N}$ Ondes en phase	$\Delta\varphi_M = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{N}$ Opposition de phase
Ordre d'interférence	$p_M = m, m \in \mathbb{N}$	$p_M = m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{N}$
Différence de marche	$\delta_M = m\lambda_0, m \in \mathbb{N}$	$\delta_M = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0, m \in \mathbb{N}$

#### d. Contraste

Par définition, le *contraste d'interférence* vaut :

$$0 < C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} < 1$$

À partir des expressions de  $I_{min}$  et de  $I_{max}$  alors :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Donc,

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi_M) = (I_1 + I_2) (1 + C \cos(\Delta\varphi_M))$$

En changeant de variable  $u = \frac{I_2}{I_1}$ ,  $C = \frac{2\sqrt{u}}{(1+u)}$ .

$C_{max} = 1$  pour  $I_1 = I_2 = I_0$ . Dans ce cas,  $I(M) = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi_M))$ . S'il n'y a pas d'interférence alors :  $I(M) = I_1 + I_2 = 2I_0$ . L'écran est uniformément éclairé.

### 5) Diviseurs d'ondes

La division d'onde peut être réalisée de deux façons différentes, soit par division du *front d'onde*, soit par *division d'amplitude*.

#### a. Diviseurs d'onde réalisant une division du front d'onde

Un diviseur d'onde réalisant une *division du front d'onde* : L'onde émise par la source est séparée géométriquement en deux parties, qui suivent chacune une voie différente (trous d'Young, miroir de Lloyd).

#### b. Diviseurs d'onde réalisant une division d'amplitude

Un diviseur d'onde réalisant une *division d'amplitude* : L'onde émise par la source est séparée énergétiquement en deux parties, qui suivent chacune une voie différente. Pour cela l'onde émise par la source rencontre une surface partiellement réfléchissante, qui donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie (interféromètre de Michelson).

### 6) Interférences de deux ondes sphériques issues de deux sources ponctuelles cohérentes

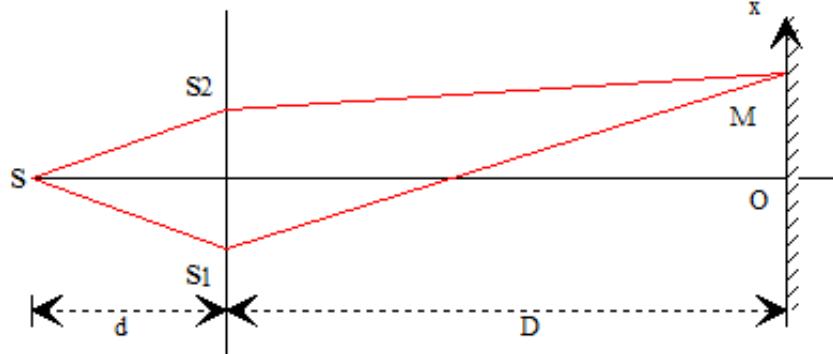
#### a. Équation des franges d'interférences

Soit deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ , émettant des ondes sphériques  $a_1(M, t)$  et  $a_2(M, t)$ .  $S_1$  et  $S_2$  sont supposées cohérentes, en phase et de même amplitude (cas des trous d'Young).

Les interférences sont observables dans tout le champ d'interférences avec le même contraste : les interférences sont non localisées.

On considère des interférences à deux ondes avec  $I_1 = I_2 = I_0$ , alors

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right]$$



$$\begin{aligned} \delta_M &= (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M) \\ &\Leftrightarrow \delta_M = [(SS_2) - (SS_1)] + [(S_2M) - (S_1M)] \\ &\Leftrightarrow \delta_M = \underbrace{[SS_2 - SS_1]}_{=0} + [S_2M - S_1M] \\ &\Leftrightarrow \delta_M = S_2M - S_1M = r_2 - r_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

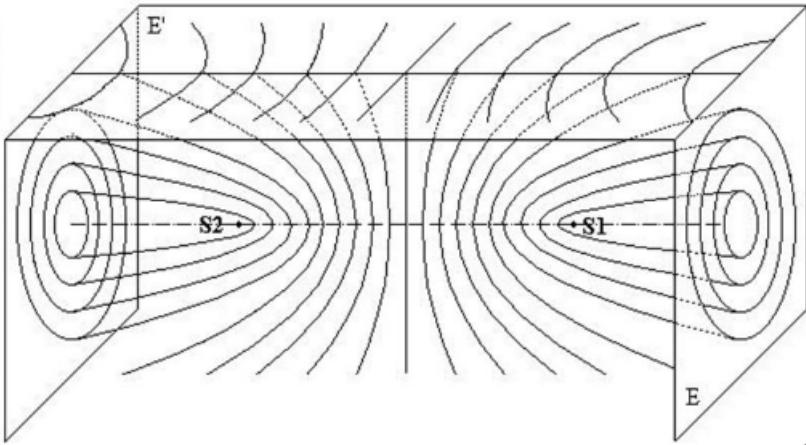
$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} (r_2 - r_1) \right) \right] \text{ avec } r_2 = S_2M \text{ et } r_1 = S_1M$$

Les franges d'interférences sont les lieux des points d'égal intensité. Les points d'égal intensité sont répartis sur des surfaces d'équation  $r_2 - r_1 = c^{te}$ , qui sont donc des hyperboïdes de révolution autour de  $S_1S_2$  et de foyers  $S_1$  et  $S_2$ .

### b. Deux positions remarquables de l'écran de l'observation

Pour observer le phénomène d'interférences, on dispose un écran plan sur lequel on observe une figure d'interférences, c'est-à-dire des franges alternativement brillantes et sombres. Cette figure d'interférences est étudiée pour deux placements remarquables de l'écran :

1. L'écran est placé parallèlement à l'axe des sources : observation transversale. L'intersection des hyperboïdes d'interférences avec ce plan donne des hyperboles, qui, dans la zone centrale de l'écran, sont assimilables à des droites parallèles.  
En observation transversale, les franges d'interférences sont rectilignes, parallèles et équidistantes.
2. L'écran est placé orthogonalement à l'axe des sources : observation longitudinale. L'intersection des hyperboïdes d'interférences avec le plan donne des cercles (anneaux) concentriques.  
En observation longitudinale, les franges d'interférences sont des anneaux, de plus en plus resserrés quand on s'éloigne du centre.



Sur cette figure les lettres  $E$  et  $E'$  représentent les positions de l'écran en observation longitudinale et en observation transversale.

Remarque : Les hyperboïdes représentés sur cette figure correspondent en fait aux lieux d'interférences constructives.

## VII. Dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young

### 1) Dispositif "classique" des trous d'Young

#### a. Présentation

Une source  $S$  ponctuelle et monochromatique est placée à une distance finie d'un plan opaque, dans lequel sont percés deux petits trous de taille caractéristique de l'ordre du dixième de millimètre. En général, les deux trous sont identiques et les intensités issues de ces trous sont donc les mêmes. La distance entre les deux trous est de l'ordre du millimètre.

On observe la lumière sur un écran situé à grande distance  $D$  du plan percé. Cet écran est placé parallèlement à l'axe des deux sources (trous), l'observation est donc transversale.

La taille des trous n'étant pas grande devant la longueur d'onde, il y a *diffraction* par les trous. Dans la zone de recouvrement des faisceaux diffractés, qui constitue le champ d'interférences, les points  $M$  de l'écran d'observation sont atteints par une onde issue de  $S_1$  et aussi par une onde issue de  $S_2$  : les ondes interfèrent au point  $M$ .

Tout se passe comme si la lumière était issue de deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  (les trous) qui se comportent comme deux sources ponctuelles cohérentes, en phase, émettant des ondes sphériques.

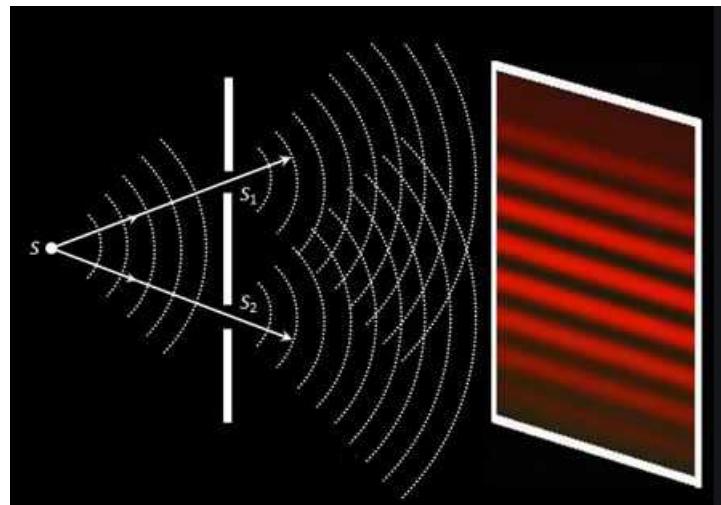
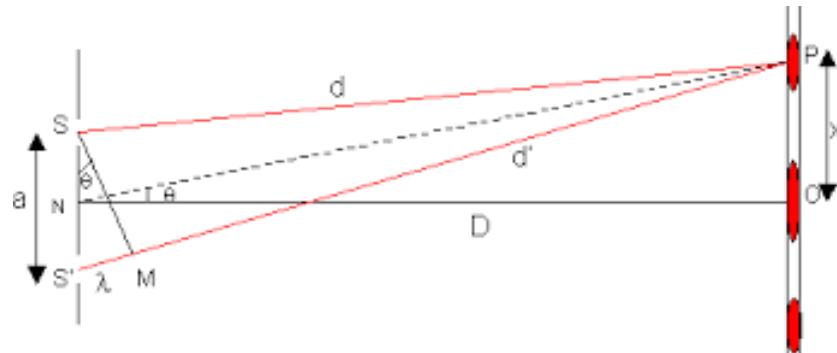


FIGURE 8 – Dispositif des trous d'Young

### b. Calcul de la différence de marche



Remarque : Sur cette figure, la partie avant les sources secondaires n'est pas représentée.

La source est placée en  $S_0$  et les sources secondaires sont situées en  $S$  et  $S'$  et on s'intéresse aux interférences formées en  $P$ .

Par définition de la différence de marche,

$$\begin{aligned}\delta_P &= (S_0P)_2 - (S_0P)_1 = (S_0S'P) - (S_0SP) = (S_0S') - (S_0S) + (S'P) - (SP) \\ S_0 \text{ étant sur la médiatrice de } [SS'] &, (S_0S') - (S_0S) = 0 \\ \text{Ainsi, } \delta_P &= n [S'P - SP] \quad n \text{ étant l'indice optique du milieu}\end{aligned}$$

$$\text{Or, } P = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}, S = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix} \text{ et } S' = \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc, } \overrightarrow{SP} = \begin{vmatrix} x - \frac{a}{2} \\ y \\ D \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{S'P} = \begin{vmatrix} x + \frac{a}{2} \\ y \\ D \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc, } \delta_P = n \left[ \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \delta_P = nD \left[ \left[ 1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ 1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

Dans les conditions de l'étude,  $D \gg a, |x|, |y|$

$$\delta_P \approx nD \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{2D^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{D^2} - \frac{y^2}{2D^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \delta_P = nD \frac{1}{2D^2} (2ax)$$

Ainsi,

$$\delta_P = \delta_P(x) = \frac{nax}{D}$$

L'ordre d'interférence associé est donc  $p_P = \frac{\delta_P}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 D}$ .

### c. Figure d'interférences (pour n=1)

En remplaçant dans l'expression de la formule de Fresnel, la différence de marche déterminée précédemment, on trouve :

$$I(P) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{nax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

Les franges d'interférence étant les lieux d'égale intensité  $I(x)$ , les franges d'interférences sont des *plans* dans l'espace. L'intersection de ces plans avec le plan de l'écran donne des *franges rectilignes* d'équation  $x = c^{te}$ .

La frange centrale est obtenue pour  $p_P = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Elle est donc au centre de l'écran dans le cas des trous de Young classique.

Les franges brillantes sont obtenues pour  $p_P = p \Leftrightarrow x(F_B) = p \left( \frac{\lambda_0 D}{a} \right), p \in \mathbb{N}$ .

Les franges sombres sont obtenues pour  $p_P = p + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(F_S) = \left( p + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\lambda_0 D}{a} \right)$ .

L'interfrange  $i$  est obtenu en faisant la différence entre  $p_{P+1}$  et  $p_P$ , donc  $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ . Les franges sont équidistantes.

De plus, on peut mettre l'intensité sous la forme :

$$I(P) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{x}{i} \right) \right] \text{ afin d'identifier l'interfrange } i$$

## 2) Quelques variantes du dispositif des trous d'Young

### a. Translation de la source ponctuelle

On ne place plus la source lumineuse  $S_0$  sur la médiatrice de  $[SS']$ . Ceci entraîne une modification de la différence de marche :

$$\delta_P = S_0S' - S_0S + \frac{ax}{D}$$

En effet, le terme que nous avons calculé précédemment reste valable mais la nullité de la différence des chemins optique avant le plan percé n'est plus valable.

D'après le principe de retour inverse de la lumière, on peut imaginer que le point  $P$  est une source ponctuelle et que les ondes interfèrent en  $S_0$ . Le calcul  $S_0S' - S_0S$  est le même que celui de  $S'P - SP$ . Ainsi,

$$\delta_P = \frac{ax(S_0)}{D'} + \frac{ax}{D}, D' \text{ étant la distance entre le point source et le plan percé}$$

Finalement,

$$I(P) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{x(S_0)}{D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right]$$

Les franges sont toujours rectilignes. L'interfrange n'est pas modifié.

Il y a une translation en bloc que la figure d'interférence (vers le bas si  $x(S_0) > 0$ ). La frange centrale n'est plus centrée sur la figure d'interférences :  $x(F_{cent}) = -\frac{Dx(S_0)}{D'}$ .

### b. Présence d'une lame de verre derrière l'un des trous

On considère la configuration classique des trous d'Young sauf que l'on place une lame de verre l'un des trous percé dans le plan (le trou  $S$  dans les calculs suivants).

La différence de marche avant le plan percé est nulle, le point source étant sur la médiatrice de  $[SS']$ .

Cependant,

$$\delta_P = (S'P) - (SP) = S'P - (SP)$$

$$\text{Or, } (SP) = SP - e + ne = SP + (n - 1)e$$

$$\text{Donc, } \delta_P = S'P - SP - (n - 1)e = \frac{ax}{D} - (n - 1)e$$

Pour trouver l'expression de  $(SP)$ , on a considéré que le chemin optique correspond à une trajet dans le vide d'une distance  $SP - e$  auquel on a ajouté la traversée de la lame d'indice  $n$  (d'où le terme  $+ne$ ). D'où  $(SP) = SP + (n - 1)e$ .

Les franges sont toujours rectilignes et l'interfrange n'est pas modifié.

La frange centrale est décalée :  $x(F_{cent}) = \frac{D(n - 1)e}{a}$ . La figure d'interférences est translatée en bloc vers le côté où l'on a mis la lame.

### c. Dispositif des fentes d'Young

La différence de marche étant indépendante de  $y$ , il est possible d'élargir les trous d'Young dans cette direction sans détériorer la visibilité des franges d'interférences.

En pratique, pour obtenir, une figure d'interférences plus lumineuse, on remplace donc les trous par deux fines fentes parallèles. On parle alors du *dispositif des fentes d'Young*.

### 3) Dispositif des trous d'Young en lumière parallèle

#### a. Dispositif à deux lentilles convergentes

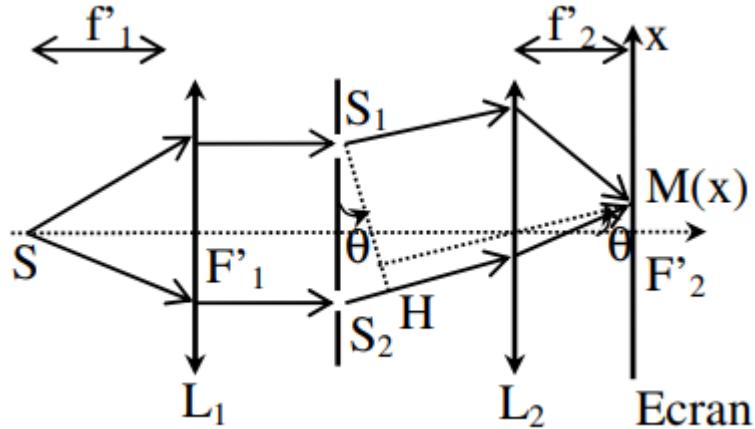


FIGURE 9 – Dispositif des trous d'Young en lumière parallèle

ATTENTION : LES LENTILLES SONT DES SYSTÈMES DÉPHASEURS, IL FAUT DONC GARDER LA NOTATION DES CHEMINS OPTIQUES.

Interférences à deux ondes telles que  $I_1 = I_2 = I_0$ , donc  $I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right]$ , on cherche donc l'expression de  $\delta_M$ .

Le calcul repose sur trois points :

1. Théorème de Malus, les surfaces d'ondes sont perpendiculaires aux rayons lumineux issus de  $S$  ponctuelle,
2. Principe de retour inverse de la lumière,
3. Conditions de Gauss car on utilise des lentilles donc rayons considérés comme paraxiaux.

$$\delta_M = (SM)_2 - (SM)_1 = [(SS_2) - (SS_1)] + [(S_2M) - (S_1M)]$$

D'après le théorème de Malus,  $S_1$  et  $S_2$  appartiennent à la même surface d'onde plane, donc  $(SS_2) - (SS_1) = 0$ .

On imagine, d'après le principe de retour inverse de la lumière, que  $M$  est une source ponctuelle, alors  $S_1$  et  $H$  appartiennent à la même surface d'onde plane, donc  $(MS_1) = (MH)$  ou  $(S_1M) = (HM)$ .

$$\delta_M = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H = S_2H(n = 1)$$

$$\text{Or, } \sin(\theta) = \frac{S_2H}{a}$$

$$\text{Donc, } \delta_M = a \sin(\theta)$$

$$\text{D'après les conditions de Gauss, } \tan(\theta) \approx \theta \approx \frac{x}{f'_2}$$

$$\text{Donc, } \delta_M \approx a\theta \approx \frac{ax}{f'_2}$$

Par rapport au résultat des trous d'Young classique, il suffit de modifier  $D$  par  $f'_2$ . Les franges sont donc rectilignes et  $i = \frac{\lambda_0 f'_2}{a}$ .

#### 4) Source non ponctuelle : incohérence spatiale

##### a. Critère de visibilité des franges avec source étendue

Avec une source étendue, les franges d'interférences restent visibles (ie non brouillées) tant que  $|\Delta p_M(\frac{1}{2} \text{ extension spatiale})| \leq \frac{1}{2}$ .

On considère le dispositif des trous d'Young classique en plaçant une source étendue à la place d'une source ponctuelle comme étudié précédemment. Une source étendue correspond à une infinité de points sources  $S_i$  différents donc incohérents entre eux. Les ondes qui en sont issues ne peuvent pas interférer. Les figures d'interférences se superposent donc sur l'écran et l'intensité est la somme intégrale des intensités élémentaires données par chaque point source.

La source  $S_0$  est associée à  $\delta_M = \frac{ax}{D}$ . La source  $S_{max}$  est associée à  $\delta'_M = \frac{ax'(S_{max})}{D'} + \frac{ax}{D}$ .

On appelle  $h$  l'extension spatiale de la source, donc  $x'(S_{max}) = \frac{h}{2}$ . Ainsi,

$$\Delta p_M(S_0/S_{max}) = \left| \frac{a}{\lambda_0} \left( \frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} - \frac{x}{D} \right) \right| = \frac{ah}{\lambda_0 2D'} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h \leq \frac{\lambda_0 D'}{a} = h_{lim} \text{ noté } l_s \text{ longueur de cohérence spatiale de la source}$$

Dans les conditions normales,  $l_s$  est de l'ordre du dixième de millimètre.

Ainsi, pour les dispositifs à division du front d'onde (trous d'Young), le brouillage des franges intervient pour une faible dimension de la source (limitation).

Si on élargit la source dans la direction ( $S_0y'$ ) perpendiculaire à  $S_1S_2$  alors la différence de marche est inchangée et il n'y a pas de brouillage des franges. On peut donc remplacer la source ponctuelle par une fente source très fine, de direction ( $S_0y'$ )  $\perp S_1S_2$ . Cette fente doit être rigoureusement parallèle aux fentes d'Young.

### b. Source monochromatique constituée de deux points sources

*Exemple : étoiles doubles*

Soient deux points sources  $P_1$  et  $P_2$  de même intensité et on suppose que les ondes qui traversent les trous d'Young ont pour intensité  $I_0$ .

$P_1$  et  $P_2$  sont deux point différents donc incohérents, les ondes issues de ces deux points ne peuvent pas interférer. Chaque point donne sa figure d'interférences et sur l'écran les deux figures se superposent et  $I(M) = I_{P_1}(M) + I_{P_2}(M)$ .

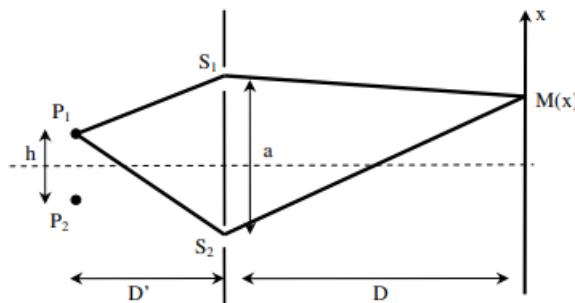


FIGURE 10 – Dispositif des trous d'Young avec deux points sources

D'après les résultats précédents, il est facile de montrer que :

$$\delta_{1M} = a \left( \frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \text{ et } \delta_{2M} = a \left( -\frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right)$$

$$I_{P_1}(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right]$$

$$I_{P_2}(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( -\frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right]$$

$$\text{Donc, } I(M) = 2I_0 \left[ 2 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( -\frac{h}{2D'} + \frac{x}{D} \right) \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow^* I(M) = 4I_0 \left[ 1 + \underbrace{\cos \left( \frac{\pi a}{\lambda_0} \frac{h}{D'} \right)}_{\text{Visibilité indpd du point M}} \times \underbrace{\cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \frac{x}{D} \right)}_{\text{terme d'interférence}} \right]$$

\*On a utilisé  $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ .

$I(M) = I(x)$ , les franges sont donc rectilignes d'équation  $x = c^{te}$ . L'interfrange est toujours donné par  $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ .

On peut écrire  $I(M) = 4I_0 \left[ 1 + V \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \right]$ .

La visibilité vaut donc :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4I_0 [1 + |V| - 1 + |V|]}{4I_0 [1 + |V| + 1 - |V|]} = |V| = \left| \cos\left(\pi \frac{ah}{\lambda_0 D'}\right) \right|$$

Les brouillages sont obtenus pour  $C = 0 \Leftrightarrow \frac{ah}{\lambda_0 D'} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{N}$ .

Le premier brouillage est obtenu pour  $a = \frac{\lambda_0 D'}{2h}$ . Ainsi, en faisant varier  $a$ , ou bien le contraste varie et l'étoile est double, ou bien il ne varie pas et l'étoile est constituée d'une seule source.

### c. Utilisation d'une fente source dans le dispositif des fentes d'Young

Dans un dispositif des trous d'Young à distance finie, on peut remplacer la source ponctuelle et les trous par trois fentes fines parfaitement parallèles.

La source ( $F$ ) est une source incohérente. On peut donc décomposer cet ensemble en un très grand nombre de triplets du type  $(S, S_1, S_2)$  incohérents entre eux : on doit donc ajouter les intensités dues à chaque triplet, cad superposer les figures d'interférences de chacun. La différence de marche ne dépend que de  $x, a$  et  $D$  grandeurs identiques pour tous les triplets.

Tous les systèmes de franges des différentes figures se superposent alors parfaitement : la figure obtenue est la même que celle donnée par des sources ponctuelles, mais beaucoup plus lumineuse, de contraste parfait  $C = 1$ .

Les franges obtenues sont parallèles aux fentes.

Remarque : Si le parallélisme n'est pas parfait, alors il y a un brouillage.

### d. Influence de la largeur de la fente source

On considère que la source est une fente réglable.

Lorsque l'on ouvre progressivement la fente, le contraste de la figure diminue, puis s'annule pour une valeur critique de la largeur de la fente source, appelée *longueur de cohérence spatiale de la source*.

Ensuite le contraste est faible, mais les franges brillantes prennent la place des franges sombres : il y a *inversion de contraste*.

Par contre, on observe que l'interfrange n'évolue pas.

## 5) Source non monochromatique - incohérence temporelle

### a. Critère de visibilité des franges avec une source polychromatique

Avec une source polychromatique, les franges sont visibles (non brouillées) tant que  $|\Delta p_M \left( \frac{1}{2} \text{ extension spectrale de la source} \right)| \leq \frac{1}{2}$ .

Une source polychromatique émet des fréquences  $\nu$  comprises entre  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$ . On pose  $\nu_{moy} = \frac{\nu_{min} + \nu_{max}}{2}$  et  $\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min}$ .

La source étant ponctuelle, la différence de marche est la même pour les deux radiations :

- pour  $\nu_{min}$ ,  $p_M = \frac{\delta_M}{\lambda_{0min}} = \frac{\delta_M}{c} \nu_{min}$ ,
- pour  $\nu_{max}$ ,  $p'_M = \frac{\delta_M}{\lambda_{0max}} = \frac{\delta_M}{c} \nu_{max}$

Donc,

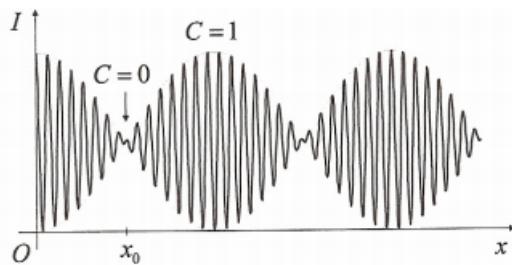
$$\begin{aligned} |\Delta p_M| &= |p'_M - p_M| = \left| \frac{\delta_M}{2c} (\nu_{max} - \nu_{min}) \right| \\ &\Leftrightarrow |\Delta p_M| = \left| \frac{\delta_M \Delta\nu}{2c} \right| \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow |\delta_M| \leq \frac{c}{\Delta\nu} = c\tau_c = L_c \text{ longueur de cohérence de la source} \end{aligned}$$

### b. Source ponctuelle émettant un doublet de longueur d'onde

*Exemple : lampe spectrale à vapeur de sodium*

Une source émet deux radiations très voisines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Le tracé de l'intensité en fonction de la différence de marche donne :



Il s'agit d'une figure de battements sur laquelle on peut voir un cosinus qui varie lentement : deux enveloppes de période  $\frac{2\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$  et un cosinus qui varie vite : terme d'interférences à deux ondes de période  $\lambda_m$ .

Calcul de l'intensité :

La source émet deux radiations très voisines telles que  $\lambda_1 = \lambda_2 + \Delta\lambda$ . Chaque radiation  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) donne sa figure d'interférence propre avec un interfrange différent  $i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a}$

(resp.  $i_2 = \frac{\lambda_2 D}{a}$ ). Sur l'écran on observe  $I(M) = I_{\lambda_1}(M) + I_{\lambda_2}(M)$ . La source étant ponctuelle, la différence de marche est la même pour les deux radiations.

$$\begin{aligned}
 I_{\lambda_1}(M) &= I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_M \right) \right] \\
 I_{\lambda_2}(M) &= I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} \delta_M \right) \right] \\
 \text{Donc, } I(M) &= I_0 \left[ 2 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_M \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} \delta_M \right) \right] \\
 \Leftrightarrow I(M) &= 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \pi \delta_M \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left( \pi \delta_M \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right] \\
 \text{On pose, } \lambda_m &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ avec } \lambda_1 \approx \lambda_m \text{ et } \lambda_2 \approx \lambda_m \\
 \text{Donc, } \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 \lambda_1} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \\
 \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{2\lambda_m}{\lambda_m^2} \approx \frac{2}{\lambda_m} \\
 \text{D'où, } I(M) &= 2I_0 \left[ 1 + \underbrace{\cos \left( \pi \delta_M \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)}_{\text{Visibilité}} \times \underbrace{\cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_m} \right)}_{\text{terme d'interférences}} \right]
 \end{aligned}$$

Les périodicités sont données par :

$\cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_m} \right) \Rightarrow$  période de  $\lambda_m$ , pour le terme d'interférences

$\cos \left( \pi \delta_M \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \Rightarrow$  période de  $\frac{2\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$  pour la variation de la visibilité

L'intensité maximale est donnée par :  $I_{max} = 2I_0 [1 + |V(\delta_M)|]$  et l'intensité minimale est donnée par  $I_{min} = 2I_0 [1 - |V(\delta_M)|]$ . Le contraste est donc donné par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2I_0 (1 + |V(\delta_M)| - 1 + |V(\delta_M)|)}{2I_0 (1 + |V(\delta_M)| + 1 - |V(\delta_M)|)} = |V(\delta_M)| = \left| \cos \left( \pi \delta_M \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \right|$$

Les brouillages sont obtenus lorsque le contraste s'annule :

$$C = 0 \Leftrightarrow \delta_M \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}$$

Le premier brouillage est donc obtenu pour :

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda_m^2}{\delta_M}$$

### c. Source à profil spectral rectangulaire

Une source réelle n'est jamais strictement monochromatique, elle émet des radiations de longueurs d'onde comprises dans un petit intervalle, centré sur une longueur d'onde moyenne  $\lambda_m$ . On obtient alors avec ce type de profil d'intensité des enveloppes en sinus cardinal et plus

en cosinus comme dans le cas précédent.

La source modélisée correspond à une simplification de la source réelle par une marche d'intensité.

## 6) Interférences en lumière blanche

### a. Présentation du phénomène

La lumière blanche contient toutes les longueurs d'onde du spectre visible comprises entre 400 et 800 nm. Les radiations monochromatiques de fréquences différentes ne pouvant interférer, chacune donne sa propre figure d'interférences (avec son propre interfrange) et, sur l'écran d'observation, l'intensité résultant de leur superposition est la somme de leurs intensités. Autrement dit,

$$I(M) = \int_k I_k(\delta_M) = \int_k I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_{0k}} \right) \right]$$

Pour  $\lambda_{0k}$  appartenant à  $[400, 800]$  nm.

Les figures d'interférences vont donc se décaler dès que la différence de marche devient voisine de  $\lambda_{0k}$ .

La frange centrale est définie comme la frange qui correspond à  $\delta_M = 0$ . Or, pour toutes les longueurs,  $\delta_M = 0$  donne des interférences constructives, si bien que la frange centrale est brillante, blanche et bien contrastée.

On a vu qu'il y a des interférences uniquement si  $|\delta_L| \leq L_c$  et  $L_c \Delta \lambda = \lambda_{0moy}^2$

$$\text{Donc, } |\delta_M| \leq \frac{\lambda_{0moy}^2}{\Delta \lambda} = \lambda_{0moy} \left( \frac{\lambda_{0moy}}{\Delta \lambda} \right) \approx \lambda_{0moy} \left( \frac{600}{400} \right) \approx 1.5 \lambda_{0moy} \approx \lambda_{0moy}$$

Les franges d'interférences en lumière visible ne sont visibles, qu'au voisinage immédiat de la frange centrale de différence de marche nulle. L'ordre d'interférence doit donc rester inférieur à 1 ; dès qu'il dépasse quelques unités, les franges se brouillent.

Si on ne s'écarte pas trop de la frange centrale, on peut observer toute une série de teintes, données dans une table dite "*échelle des teintes de Newton*" ; à chaque valeur de  $\delta_M$ , correspond une teinte déterminée.

### b. Spectre cannelé

Dans la zone de l'écran, où la différence de marche dépasse quelques micromètres, l'œil ne peut plus distinguer les nombreuses radiations éteintes et celles qui ont une intensité maximale : l'œil perçoit alors une zone uniformément éclairée et blanche.

Cette lumière blanche est appelée "*blanc d'ordre supérieur*". Ce blanc d'ordre supérieur se distingue de la lumière blanche parce qu'il présente un *spectre cannelé*.

Si l'on perçoit du blanc d'ordre supérieur sur un spectroscope, on observe un spectre continu marqué de raies noires, appelées *cannelures*.

Ces cannelures correspondent aux longueurs d'onde éteintes, pour lesquelles l'ordre d'interférence est un demi-entier soit  $p_M = \frac{\delta_M}{\lambda_0} = m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{N}$ .

Plus  $\delta_M$  augmente, plus il y a des radiations éteintes dans le spectre visible.

## VIII. Superposition de N ondes lumineuses cohérentes : réseaux plans

Cette section généralise les interférences à deux ondes aux interférences à N ondes : il faut pour cela disposer de N ondes cohérentes entre elles, grâce à un dispositif diviseur d'onde.

Un *réseau de diffraction* est un dispositif avec  $N$  trous, ou  $N$  fentes, ou plus généralement avec  $N$  motifs diffractants appelés *traits du réseau*, régulièrement répartis sur un même plan.

Il permet d'obtenir  $N$  sources secondaires  $S_1, S_2, \dots, S_N$  cohérentes entre elles à partir d'une source ponctuelle et monochromatique  $S$ . Il y a alors interférences entre  $N$  ondes issues des sources secondaires.

### 1) Présentation des réseaux plans (infinis)

#### a. Définition

Un *réseau de diffraction* est une surface, sur laquelle un *motif diffractant* (appelé trait) est répété périodiquement un grand nombre de fois. La distance  $a$  entre deux motifs est la période spatiale, appelée le "pas" du réseau. Ainsi,  $n = \frac{1}{a}$  est le nombre de traits par mètre (USI) (souvent donné en traits par mm).

Le réseau le plus simple est constitué d'un ensemble de  $N$  traits, parallèles, équidistants, situés dans un même plan et séparés par des intervalles opaques.

#### b. Conditions d'utilisation

Les réseaux sont utilisées dans les conditions de diffraction à l'infini (appelées conditions de diffraction de Fraunhofer) : la source  $S$  et le point  $M$  d'observation sont à l'infini.

Éclairage du réseau : faisceau incident issu de la source  $S$  à l'infini est un faisceau de lumière parallèle, faisant un angle  $i$  avec la normale au plan du réseau.

Observation : faisceau diffracté transmis (ou réfléchi) est un faisceau de lumière parallèle, étudié en un point  $M$ , dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec la normale au plan du réseau ( $\theta$  variable selon la position du point  $M$  d'observation).

### c. Les deux types de réseaux

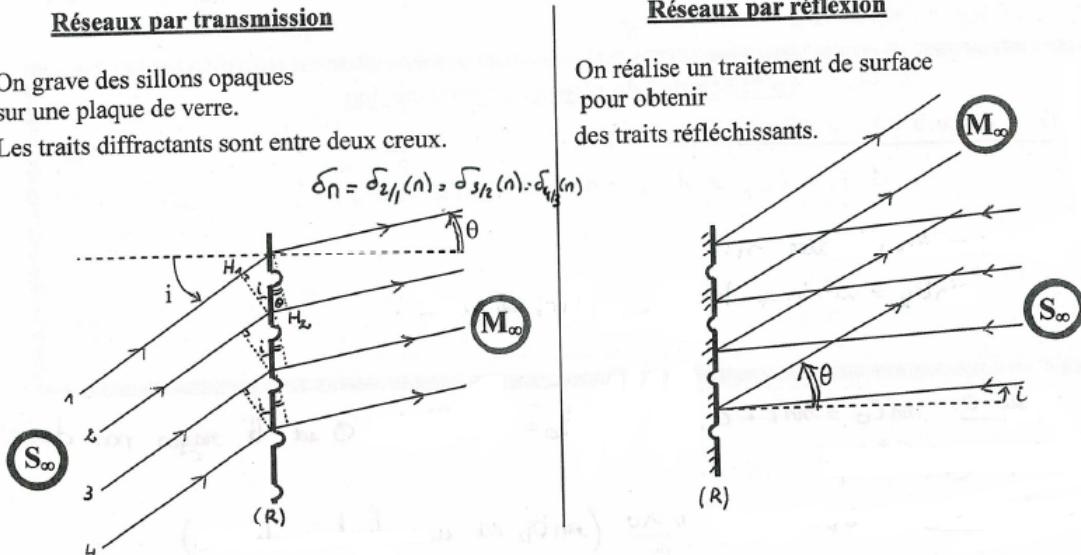


FIGURE 11 – Les deux types de réseaux

### d. Phénomènes physiques mis en jeu

Phénomènes physiques mis en jeu dans un réseau : *diffraction* par les traits du réseau et *interférences à l'infini* entre les rayons diffractés. Il s'agit d'un phénomène d'interférences à ondes multiples (à  $N$  ondes).

La lumière se répartit sur l'écran exclusivement dans les directions  $\theta_k$ , où les interférences sont rigoureusement constructives. On parle de *pics d'intensité* pour ces lieux d'intensité maximale, car plus  $N$  est grand plus les franges brillantes sont fines et plus elles sont brillantes ; l'intensité est quasiment nulle en dehors de ces pics d'intensité.

## 2) Diffraction par un réseau plan

### a. La "formule" du réseau

La "formule" du réseau donne les directions  $\theta_k$  dans lesquelles l'intensité est maximale.

Les maxima d'intensité sont obtenus dans les directions  $\theta_k$  où les interférences sont constructives, donc dans les directions telles que :

- les rayons diffractés sont en phase :  $\Delta\varphi_M = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,
- l'ordre d'interférence  $p_m = \frac{\Delta\varphi_M}{2\pi}$  est un entier relatif,
- la différence de marche  $\delta_M$  est un multiple relatif de  $\lambda_0$

Le réseau étant une structure périodique, si deux rayons diffractés par deux traits consécutifs sont en phase, alors, de proche en proche, tous les rayons diffractés sont en phase.  $\Delta\varphi_M = 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0}$ , il faut alors expliciter la différence de marche  $\delta_M$  entre deux rayons diffractés par deux traits consécutifs.

#### La "formule" du réseau par transmission :

Le maximum d'intensité d'ordre  $k$  est obtenu pour  $\sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a} = \sin i + kn\lambda_0$  avec  $n = \frac{1}{a}, k \in \mathbb{Z}$ .

Or,  $-1 \leq \sin(\theta_k) \leq 1$ , il y a donc un nombre fini d'ordre  $k$ .

Remarque : Si le milieu n'est pas d'indice 1 mais d'indice  $n_i$  alors la formule est modifiée en  $\sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{n_i a}$ .

L'ordre 0 n'est pas dévié. Ce rayon correspond au rayon non dévié de l'optique géométrique.

$\sin(\theta_k)$  étant une fonction de  $\lambda_0$ , le réseau est un système dispersif.

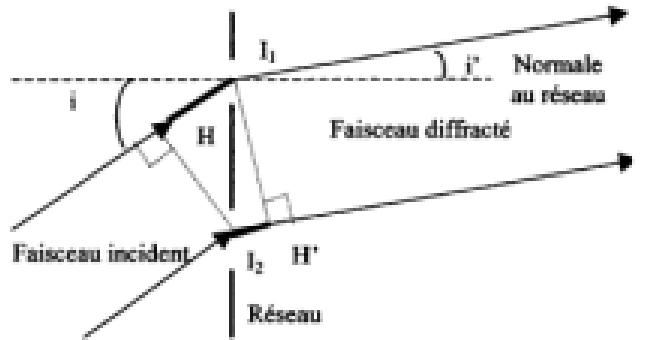
En incidence normale ( $i = 0$ ), alors  $\sin(\theta_k) = k \frac{\lambda_0}{a}$ .

#### La "formule" du réseau par réflexion :

Le maximum d'ordre  $k$  est obtenu pour  $\sin(\theta_k) = -\sin i + k \frac{\lambda_0}{a}, k \in \mathbb{Z}$ .

L'ordre 0 est réfléchie de telle sorte que  $\theta_0 = -i$  : rayon réfléchi de l'optique géométrique selon la loi de réflexion de Descartes.

#### Démonstration de la formule du réseau (en transmission) :



Par définition,  $\delta_M = (SM)_2 - (SM)_1$ .

Or, d'après le théorème de Malus,  $(SH) = (SI_2)$  et  $(MI_1) = (MH') \Leftrightarrow (H'M) = (I_1M)$ .

$$\delta_M = (SM)_2 - (SM)_1 = (SI_2) + (I_2H') + (H'M) - (SH) - (HI_1) - (I_1M)$$

$$\text{En simplifiant, } \delta_M = (I_2H') - (HI_1) = n_i [I_2H' - HI_1]$$

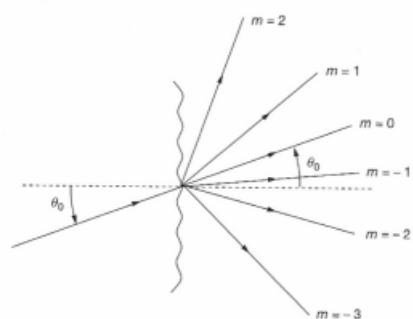
$$\text{Or, } \sin i = \frac{HI_1}{a} \text{ et } \sin(i') = \sin(\theta) = \frac{I_2H'}{a}$$

$$\text{Donc, } \delta_M = n_i a [\sin(\theta_k) - \sin i] = k\lambda_0$$

$$\text{D'où, } \sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{n_i a}$$

Souvent  $n_i = 1$  (air ou vide).

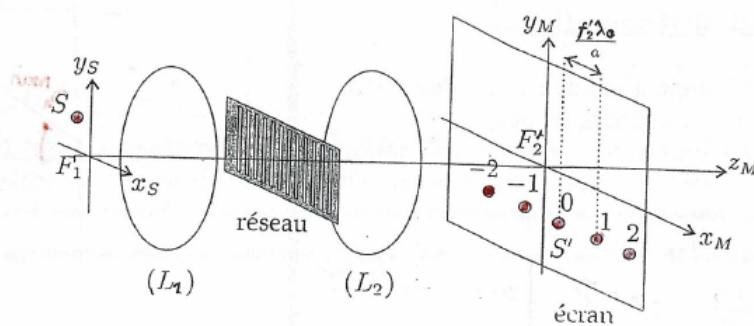
ATTENTION : LES ANGLES SONT REPÉRÉS PAR RAPPORT À LA NORMALE DONC  $\theta_k \neq \theta_{-k}$   
SAUF SI L'ORDRE 0 EST SELON LA NORMALE,  
IE SAUF SI  $i = 0$ .



### b. Figure de diffraction à l'infini

Cas d'une source ponctuelle monochromatique :

On utilise le dispositif de Fraunhofer utilisant deux lentilles convergents ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) : la source  $S$  est dans le plan focal objet de ( $L_1$ ) et l'écran d'observation dans le plan focal image de ( $L_2$ ).

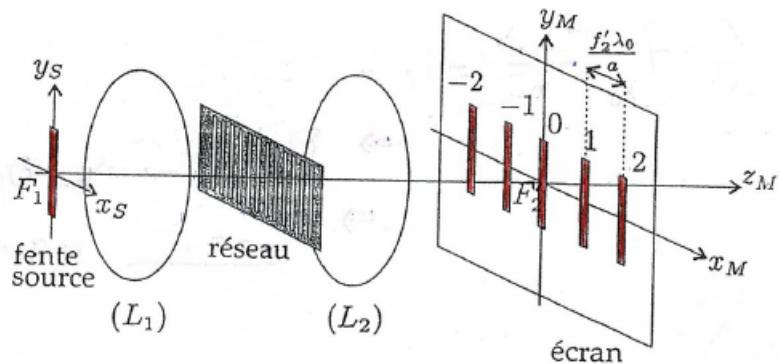


La figure de diffraction d'un réseau de pas  $a$  se compose de points lumineux disposés sur une droite perpendiculaire aux traits et passant par l'image géométrique  $S'$  de la source. Le point central (d'ordre 0) est confondu avec  $S'$  et les autres points (ordre  $k$  de diffraction) sont régulièrement espacés de  $\frac{\lambda_0 f'_2}{a}$ .

Cas d'une fente source monochromatique :

La figure de diffraction se construit à partir des figures de diffraction dues à tous les points sources incohérents de la fente.

L'ordre 0 correspond à l'image géométrique de la fente source par les deux lentilles.



### c. Influence de l'incidence : minimum de déviation

L'angle de déviation dans l'ordre  $k$  :  $D_k$  correspond à l'angle entre le rayon émergent et la direction du rayon incident :  $D_k = \theta_k - i = \theta_k - \theta_0$ .

Le *minimum de déviation* ( $D_k$ )<sub>min</sub> est défini pour une certaine valeur de l'angle d'incidence  $i$ , la déviation dans l'ordre  $k$  fixé passa par un minimum, tel que :

$$\theta_k^{min} = -i^{min} \text{ et } D_k^{min} = 2\theta_k^{min} = -2i^{min}$$

$$2 \sin \left( \frac{D_k^{min}}{2} \right) = k \frac{\lambda_0}{a}, k \in \mathbb{Z}$$

$$i_{min} = -\frac{D_k^{min}}{2}$$

*Démonstration :*  
 $D_k = \theta_k - i$ .

$$\left( \frac{dD_k}{di} \right)_{k,\lambda_0} = \left( \frac{d\theta_k}{di} \right)_{k,\lambda_0} - \left( \frac{di}{di} \right)_{k,\lambda_0} = \left( \frac{d\theta_k}{di} \right)_{k,\lambda_0} - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} & Or, \sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a} \\ & \Rightarrow d \sin(\theta_k) = d \sin i + d \left( k \frac{\lambda_0}{a} \right), k \text{ et } \lambda_0 \text{ fixés} \\ & \Rightarrow \cos(\theta_k) d\theta_k = \cos i di \\ & \Rightarrow \left( \frac{dD_k}{di} \right)_{k,\lambda_0} = \frac{\cos(\theta_k)}{\cos i} - 1 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_k) = \cos i \\ & \Rightarrow \theta_k = i \Rightarrow D_k = 0 \text{ sans intérêt} \\ & ou \theta_k^{min} = -i^{min} \Rightarrow D_k^{min} = 2\theta_k^{min} = -2i^{min} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{À partir de la formule du réseau, } \sin(\theta_k^{min}) = -\sin(-i^{min}) + k \frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow 2 \sin(\theta_k^{min}) = k \frac{\lambda_0}{a} \\ & \Rightarrow 2 \sin \left( \frac{D_k^{min}}{2} \right) = k \frac{\lambda_0}{a} \end{aligned}$$

*Qed*

#### d. Influence de la longueur d'onde : dispersion d'un réseau

Spectre d'ordre  $k$  :

L'indice  $i$  et l'ordre  $k$  sont fixés, alors  $\sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$ .  
 $\sin(\theta_k)$  est une fonction linéaire de  $\lambda_0$ , le réseau est dispersif.

Le spectre d'ordre  $k$  contient autant de raies fines qu'il ya de radiations monochromatiques émises par la source ; l'ensemble de ces raies forme le spectre d'ordre  $k$ .

Ordre zéro :

L'incidence  $i$  et l'ordre  $k = 0$  sont fixés :  $\sin(\theta_0) = \sin i$  pour toutes les longueurs d'onde  $\lambda_0$ .

L'ordre zéro est une raie fine de même composition spectrale que la source. En lumière blanche, l'ordre zéro, situé dans le prolongement du rayon incident, est l'image blanche de la fente source.

## Comparaison de deux systèmes dispersifs : le réseau et le prisme

L'énergie lumineuse dispersée par un *prisme* se répartit dans un seul spectre, le rouge est moins dévié que le bleu (Loi de Cauchy :  $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ ).

L'énergie lumineuse dispersée par un *réseau* se répartit dans l'ordre 0 très lumineux (image blanche de la fente source) et dans les différents ordres  $k$ ,  $k$  spectres (avec  $k \in \mathbb{Z}^*$ ). Le rouge est plus dévié que le bleu.

### Efficacité dispersive du réseau dans l'ordre $k$ , avec $i$ fixé :

$$e_k = \left( \frac{d\theta_k}{d\lambda_0} \right)_{k,i} = \frac{k}{a \cos(\theta_k)} = \frac{ka}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_k)}}$$

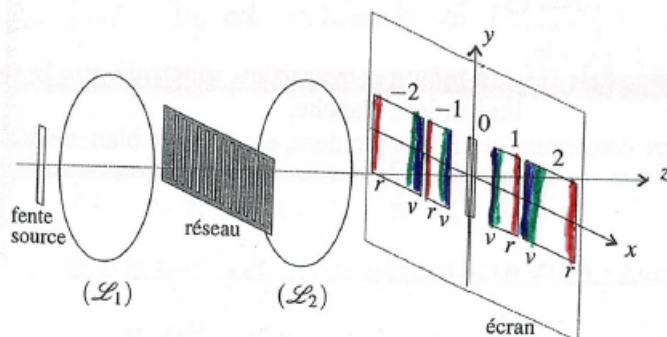
*Démonstration :*

On différentie la "formule" du réseau,  $\sin(\theta_k) = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$  à  $k$  et  $i$  fixés. On obtient :

$$\cos(\theta_k) d\theta_k = \frac{k}{a} d\lambda_0 \Rightarrow \left( \frac{d\theta_k}{d\lambda_0} \right)_{k,i} = \frac{k}{a \cos(\theta_k)}$$

*Qed*

### Spectroscopie à réseau : dispositif permettant d'obtenir le spectre d'une source :



## 3) Superposition de $N$ ondes cohérentes

### a. Présentation

Un réseau permet de former  $N$  ondes cohérentes à partir de  $N$  sources secondaires.

Au point  $M$  de l'observation sur l'écran, se superposent  $N$  ondes cohérentes :

- de même pulsation  $\omega$ ,
- de même amplitude  $A_0$ ,
- toutes déphasées deux à deux du même déphasage :  $\Delta\varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_M$

## b. Représentation de Fresnel

On considère une vibration  $a(M, t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_M)$ , donc  $\underline{a}(M, t) = A_0 e^{j(\omega t - \varphi_M)} = \underline{A} e^{j\omega t}$  en notation complexe.

Ainsi,  $\underline{A} = A_0 e^{-j\varphi_M} = A_0(\cos \varphi_M - j \sin \varphi_M)$ .

La représentation de Fresnel consiste à représenter un vecteur  $\vec{A}$  dans le plan complexe.

La superposition de  $N$  vibrations correspond donc à la somme vectorielle des vecteurs de Fresnel.

Dans le cas des réseaux, la différence de marche vaut  $\delta_M = a(\sin \theta - \sin i)$ . Quand l'intensité est maximale alors les interférences sont constructives.

Pour obtenir l'intensité maximale, il faut que  $\vec{A}_{tot}$  ait une norme maximale. Pour cela il faut que les vecteurs de Fresnel  $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$  soient tous sur la même direction. Les ondes qui se superposent sont deux à deux en phase, donc toutes en phase les unes avec les autres.

$$\Delta\varphi_M = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$I_{max}$  : maximum d'ordre  $k$

$$\Delta\varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_M = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta_k - \sin i) = k2\pi \text{ et on retrouve } \delta_M = a(\sin \theta_k - \sin i) = k\lambda_0.$$

Pour que l'intensité soit minimale donc nulle (cas des interférences destructives), il faut que la norme de  $\vec{A}_{tot}$  soit nulle. Ainsi, il faut que l'extrémité de  $\vec{A}_N$  soit à l'origine de  $\vec{A}_1$ , donc il faut faire un nombre entier de tour.

Ainsi,

$$I_{min} = 0 \Rightarrow N\Delta\varphi_M = k'2\pi \Rightarrow \Delta\varphi_M = k' \left( \frac{2\pi}{N} \right), k' \in \mathbb{Z}^*/\{\text{multiples de } N\}$$

$$I_{max} : \Delta\varphi_M = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$I_{min} = 0 : \Delta\varphi_M = k' \left( \frac{2\pi}{N} \right), k' \in \mathbb{Z}^*/\{\text{multiple de } N\}$$

On observe l'apparition de maxima principaux et de maxima secondaires (d'intensité très faible). L'énergie lumineuse se répartit presque exclusivement dans les maxima principaux. Si  $N$  augmente alors la largeur des pics diminue.

### c. Calcul de la vibration résultante

$$\begin{aligned}
\underline{a}_{tot}(M) &= \sum_{q=1}^N \underline{a}_q(M) = \sum_{q=1}^N \underline{A}_q e^{j\omega t} \\
\Leftrightarrow \underline{A}_{tot} e^{j\omega t} &= \sum_{q=1}^N \underline{A}_q e^{j\omega t} \Leftrightarrow \underline{A}_{tot} = \sum_{q=1}^N \underline{A}_q = A_0 \left[ e^{-j\varphi_{1M}} + e^{-j\varphi_{2M}} + \dots + e^{-j\varphi_{qM}} + \dots + e^{-j\varphi_{NM}} \right] \\
\Leftrightarrow \underline{A}_{tot} &= A_0 e^{-j\varphi_{1M}} \left[ 1 + e^{-j(\varphi_{2M}-\varphi_{1M})} + e^{-j(\varphi_{3M}-\varphi_{1M})} + \dots + e^{-j(\varphi_{NM}-\varphi_{1M})} \right]
\end{aligned}$$

Or,  $\varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \Delta\varphi_M$

$$\begin{aligned}
\varphi_{3M} - \varphi_{1M} &= (\varphi_{3M} - \varphi_{2M}) + (\varphi_{2M} - \varphi_{1M}) = 2\Delta\varphi_M \\
\varphi_{NM} - \varphi_{1M} &= (N-1)\Delta\varphi_M
\end{aligned}$$

D'où,  $\underline{A}_{tot} = A_0 e^{-j\varphi_{1M}} \left[ 1 + e^{-j\Delta\varphi_M} + e^{-j2\Delta\varphi_M} + \dots + e^{-j(q-1)\Delta\varphi_M} + \dots + e^{-j(N-1)\Delta\varphi_M} \right]$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \underline{A}_{tot} = A_0 e^{-j\varphi_{1M}} \left( \frac{1 - e^{-jN\Delta\varphi_M}}{1 - e^{-j\Delta\varphi_M}} \right) \\
&\Leftrightarrow \underline{A}_{tot} = A_0 e^{-j\varphi_{1M}} \frac{e^{-jN\frac{\Delta\varphi_M}{2}}}{e^{-j\frac{\Delta\varphi_M}{2}}} \left( \frac{e^{jN\frac{\Delta\varphi_M}{2}} - e^{-jN\frac{\Delta\varphi_M}{2}}}{e^{j\frac{\Delta\varphi_M}{2}} - e^{-j\frac{\Delta\varphi_M}{2}}} \right) \\
&\Leftrightarrow \underline{A}_{tot}(M) = A_0 e^{-j\varphi_{1M}} e^{-j(N-1)\frac{\Delta\varphi_M}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi_M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi_M}{2}\right)}
\end{aligned}$$

### d. Calcul de l'intensité

$$\begin{aligned}
I(M) &= \underline{a}_{tot}(M) \underline{a}_{tot}^*(M) = \underline{A}_{tot}(M) \underline{A}_{tot}^*(M) = \left( \frac{\sin(\cdot)}{\sin(\cdot)} \right)^2 \\
I(M) &= \underbrace{N^2 A_0^2}_{I_{max}} \underbrace{\left[ \frac{\sin^2\left(N\frac{\Delta\varphi_M}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi_M}{2}\right)} \right]}_{f_N(\Delta\varphi_M)}
\end{aligned}$$

La fonction  $f_N$  est  $2\pi$  périodique.

Le maximum d'intensité est  $I_{max} = N^2 I_0$  et donc  $\Delta\varphi_M = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

L'intensité est nulle (min) lorsque le numérateur est nulle et le dénominateur non nul :

$$\begin{cases} \sin\left(N\frac{\Delta\varphi_M}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\Delta\varphi_M}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Ceci se produit lorsque  $\frac{N\Delta\varphi_M}{2} = k'\pi \Rightarrow \Delta\varphi_M = k' \left( \frac{2\pi}{N} \right)$  avec  $k' \in \mathbb{Z}^*/\{mN, m \in \mathbb{Z}^*\}$ .

L'intensité (pour  $N$  suffisamment grand) en fonction de  $\Delta\varphi_M$  ressemble donc à un peigne de Dirac  $2\pi$  périodique.

## IX. Dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson

### 1) Présentation de l'interféromètre de Michelson

#### a. Schéma théorique

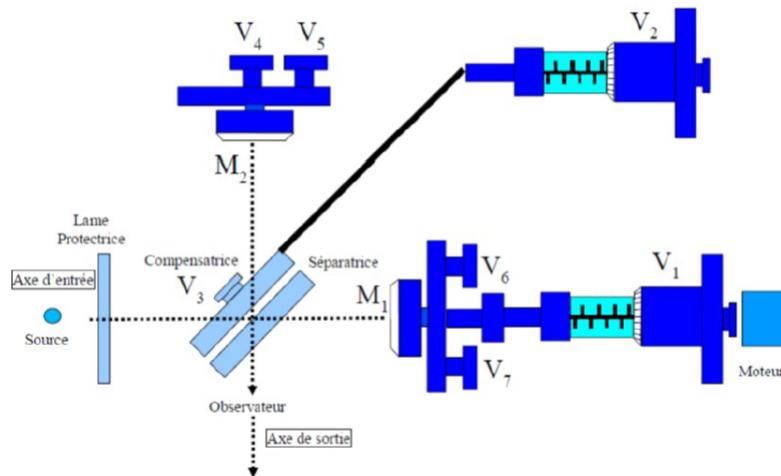


FIGURE 12 – Interféromètre de Michelson

L'*interféromètre de Michelson* est constitué de deux miroirs plans ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ), grossièrement perpendiculaires et d'une *lame semi-réfléchissante*, appelée *séparatrice*, placée à  $45^\circ$  des axes.

À sa surface, un faisceau lumineux incident est séparé en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis de même intensité. Le faisceau réfléchi et le faisceau transmis se réfléchissent chacun sur un miroir, et à la sortie de l'appareil, se superposent en un point  $M$  et interfèrent.

L'interféromètre de Michelson permet d'observer des interférences à deux ondes par division d'amplitude.

Les deux miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) forment entre eux un angle qui vaut  $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  avec  $\alpha$  de l'ordre de quelques minutes d'angle.

La *lame séparatrice* est une surface plane conçue pour réfléchir 50% de l'intensité incidente et en transmettre 50%.

#### b. Présentation de l'appareil

On distingue sur la Figure 12 principalement :

- trois lames de verre : la lame protectrice (ou verre anticalorique), la séparatrice et la compensatrice,
- deux miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ), ( $M_1$ ) est mobile (on dit "chariotable") et ( $M_2$ ) est fixe ; par contre les deux miroirs sont orientables angulairement,

- les différentes vis de réglage de l'interféromètre

La vis  $V_1$  permet une translation de  $(M_1)$  (chariotage), repérable grâce à des graduations. Les autres vis sont des vis de réglage :

- $V_6$  et  $V_7$  permettent un réglage d'orientation "grossier" de  $(M_1)$ ,
- $V_4$  et  $V_5$  permettent un réglage d'orientation plus fin de  $(M_2)$ ,
- $V_2$  permet un réglage de la compensatrice autour d'un axe vertical,
- $V_3$  permet un réglage d'orientation horizontal de la compensatrice

### c. Rôle de la compensatrice

La séparatrice est une lame fixe, à faces parallèles, dont l'une des deux faces a été traitée (par un mince dépôt métallique) de façon à diviser en deux amplitudes égales le faisceau incident.

Le rayon qui se réfléchi sur  $(M_2)$  traverse trois fois la séparatrice alors que le rayon qui se réfléchi sur  $(M_1)$  traverse cinq fois la séparatrice. Ainsi la séparatrice induit une dissymétrie entre les chemins optiques et donc introduit une différence de marche entre le rayon réfléchi sur  $(M_1)$  et celui réfléchi sur  $(M_2)$ .

La *compensatrice* permet de compenser la différence de marche due à la séparatrice. La compensatrice est une lame de verre, de même épaisseur et de même indice que la séparatrice, placée parallèlement à la séparatrice. Son utilité est d'autant plus importante en lumière polychromatique que le milieu est dispersif (l'indice dépend de la longueur d'onde incidente).

Ainsi, chaque rayon traverse quatre fois une même lame.

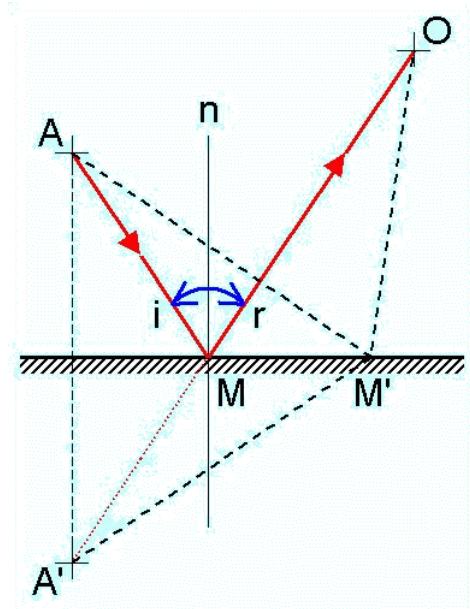
**Pour calculer la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent, on ne tiendra donc pas compte de l'ensemble {séparatrice-compensatrice}. Grâce à la compensatrice, on pourra "oublier" la présence de ces deux lames.**

## 2) Dispositif équivalent à l'interféromètre de Michelson

### a. Réflexion sur un miroir plan

D'après les lois de la réflexion de Snell-Descartes,

- le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence, plan défini par le rayon incident et la normale au miroir au point considéré,
- le rayon réfléchi vérifie :  $r = -i$



### b. Intensité des rayons qui interfèrent

Dans le cas où le rayon incident a une intensité de  $2I_0$ , alors les rayons à la sortie de l'interféromètre possèdent une intensité uniquement de  $\frac{I_0}{2}$  suite aux réflexion et transmission sur l'ensemble séparatrice compensatrice. Dans ce cas,  $I(M) = 2\frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right]$ .

Dans le cas où le rayon incident a une intensité de  $4I_0$ , alors les rayons à la sortie de l'interféromètre possèdent une intensité de  $I_0$  et  $I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right]$ .

### c. Pliage selon l'axe $\Delta$ de la séparatrice

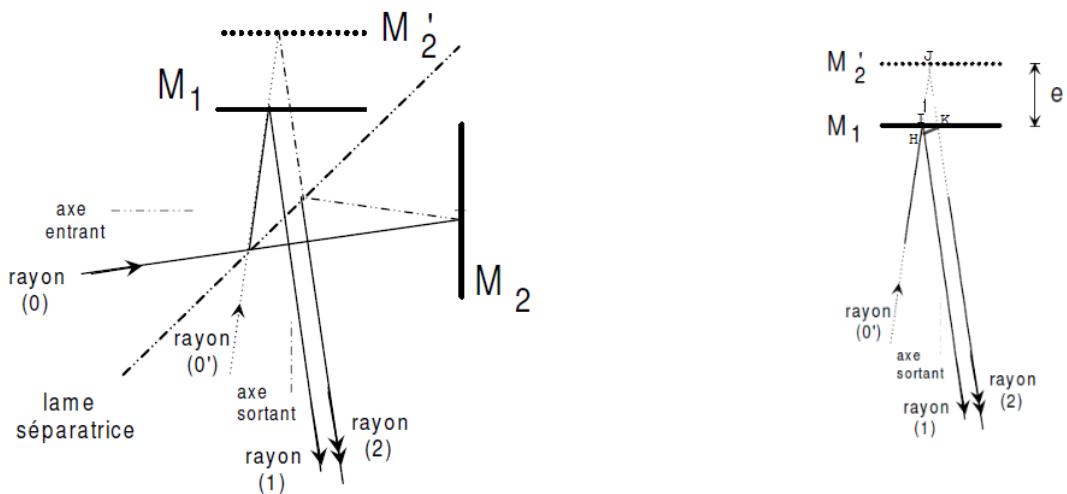
Ce pliage permet d'obtenir le schéma équivalent d'un interféromètre de Michelson.

Du point de vue calcul des chemins optiques, rien n'est changé si on effectue un "pliage" selon l'axe  $\Delta$  de la séparatrice, qui rabat l'axe X sur l'axe Y.

Le dispositif équivalent à l'interféromètre de Michelson "oublie" la séparatrice d'axe  $\Delta$  :

- il remplace la source ponctuelle  $S$  par une source virtuelle  $S'$ , symétrique de  $S$  par rapport à  $\Delta$ ,
- il remplace le miroir ( $M_1$ ) par un miroir virtuel ( $M'_1$ ), symétrique du miroir ( $M_1$ ) par rapport à l'axe de la séparatrice  $\Delta$ .

Obtention des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  issues de la source  $S$  :  $S_1$  (resp. $S_2$ ) est l'image de  $S'$  par le miroir ( $M_1$ ) (resp.( $M_2$ )).



#### d. Source ponctuelle : interférences non localisées

Montage en lame d'air :  $e \neq 0$  et  $\alpha = 0$  :

Les miroirs ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ) sont parallèles et distants de  $e$ .

Les deux ondes sphériques qui interfèrent proviennent des images  $S_1$  et  $S_2$  de  $S'$  par les deux miroirs avec  $S_1S_2 = 2e$ .

Il s'agit d'une observation longitudinale : les franges d'interférence sont des anneaux concentriques, dont les rayons varient comme les racines carrées des entiers successifs.

Montage en coin d'air :  $e = 0$  et  $\alpha \neq 0$  :

( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ) se coupent suivant leurs diamètres et ont entre eux un très petit angle  $\alpha$ .

Les deux ondes sphériques qui interfèrent proviennent des images  $S_1$  et  $S_2$  de  $S'$  par les deux miroirs, avec  $S_1S_2 = 2\alpha D$ .

Il s'agit d'une observation transversale : les franges d'interférences sont des arcs d'hyperboles, assimilables dans la région centrale à des droites parallèles équidistantes.

Contact optique :  $e = 0$  et  $\alpha = 0$  : Les deux miroirs sont superposés et la différence de marche est nulle. L'écran est uniformément éclairé, on appelle cela la *teinte plate*.

#### e. Source spatialement étendue : interférences localisées

L'intérêt d'utiliser une source étendue à la place d'une source ponctuelle est d'augmenter la luminosité des figures d'interférences.

Avec une source spatialement étendue et un dispositif à division du front d'onde, comme les trous d'Young, les interférences ne sont plus observables : le contraste diminue rapidement quand la taille de la source croît : les franges se brouillent.

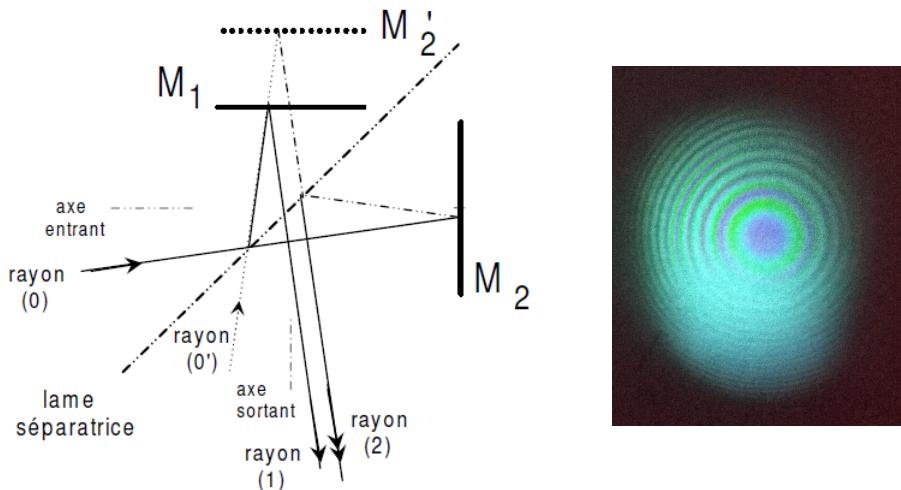
Avec une source spatialement étendue et un dispositif à division d'amplitude, comme

l'interféromètre de Michelson, les interférences restent observables mais sont localisées<sup>4</sup> : le contraste est maximal sur la surface de localisation, lieu où se rejoignent les deux rayons issus de la séparation en amplitude d'un *seul rayon incident*.

Dans le cas d'un montage en lame d'air, les interférences sont localisées à l'infini et on projette leurs images dans le plan focal image d'une lentille convergente.

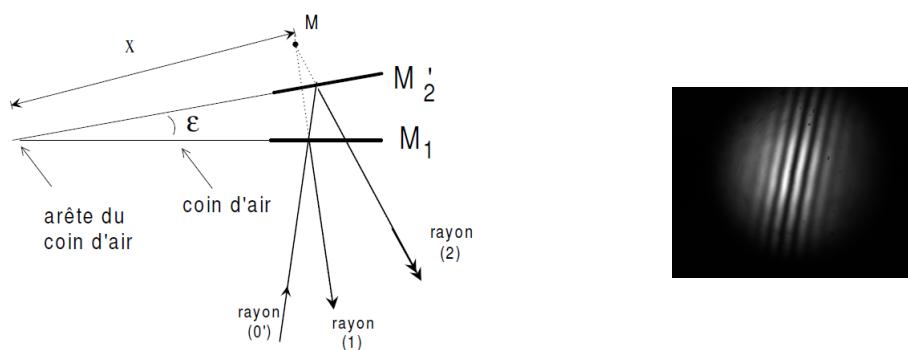
Dans le cas d'un montage en coin d'air, les interférences sont localisées sur le coin d'air et on en fait l'image à l'aide d'une lentille convenablement placée telle que :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f}$ .

#### Réglage en lame d'air :



En lame d'air à faces parallèles ( $e \neq 0$  et  $\alpha = 0$ ) et source spatialement étendue. L'éclairage est un faisceau incident convergent sur les miroirs. Les *franges* sont circulaires (anneaux d'Haidinger), qui sont des franges d'égale inclinaison. Les franges sont *localisées* à l'infini. L'*observation* sur un écran se fait en le plaçant dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $f' = 1\text{m}$ ).

#### Réglage en coin d'air :



4. Si on utilise un LASER, alors les interférences ne sont pas localisées et ceci est dû à l'utilisation d'un LASER comme source qui a des propriétés de cohérences particulières.

En coin d'air ( $e = 0$  et  $\alpha \neq 0$ ) et source spatialement étendue. L'*éclairage* est un faisceau en incidence quasi-normale. Les *franges* sont rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air (franges de Fizeau), qui sont des franges d'égale épaisseur. Les franges sont *localisées* sur le coin d'air, au voisinage des miroirs. Pour l'*observation*, on utilise un écran sur lequel on fait l'image des miroirs avec une lentille convergente ( $f' = 20, 25$  cm).

### 3) Interféromètre de Michelson monté en lame d'air

$$\text{Interférences à deux ondes par division d'amplitude : } I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right].$$

#### a. Calcul de la différence de marche

On utilise le schéma équivalent du montage en lame d'air.

$$\begin{aligned} \delta_M &= (SM)_2 - (SM)_1 = (S'M)_2 - (S'M)_1 \\ \Leftrightarrow \delta_M &= (S'I)_2 + (IJ) + (JK) + (KM) - (S'I)_1 - (IH) - (HM) \\ \text{Par le théorème de Malus et retour inverse de la lumière, } (HM) &= (KM) \\ \Leftrightarrow \delta_M &= (IJ) + (JK) - (IH) = 2(IJ) - (IH) = n [2IJ - IH] \\ \text{Or, } \cos i &= \frac{e}{IJ} \text{ et } \sin i = \frac{IH}{IK} \text{ et } \frac{IK}{2} = e \tan i \\ \text{Donc, } IH &= 2e \tan i \sin i = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} \\ \text{Donc, } \delta_M &= n \left[ \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e \sin^2 i}{\cos i} \right] = n2e \cos i \end{aligned}$$

**En lame d'air et pour un milieu d'indice  $n = 1$ ,  $\delta_M = 2e \cos i$ .**

#### b. Figure d'interférence

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} 2e \cos i \right) \right]$$

$e, \lambda_0$  étant fixés, l'intensité dépend uniquement de l'angle d'incidence  $i$ . Les franges d'interférences sont donc des franges d'égale inclinaison pour l'interféromètre de Michelson configuré en lame d'air.

Par symétrie de révolution, les franges sont donc des cercles appelés *anneaux d'Haidinger*.

En projetant, la figure d'interférences dans le plan focal d'une lentille convergente, on montre que  $\tan i \approx i = \frac{R}{f'}$  où  $R$  est le rayon des anneaux. Ainsi, comme  $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ ,

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{f'^2} \right) \right) \right]$$

Pour avoir beaucoup d'anneaux sur l'écran, il faut disposer d'un faisceau qui contient un grand nombre d'incidences  $i$  différentes. Il faut donc utiliser un faisceau très convergent sur les miroirs.

### c. Contact optique

Dans cette configuration, la différence de marche est nulle. L'intensité est donc constante égale à  $4I_0$ , on parle de *teinte plate*.

En pratique, comment obtenir le contact optique ?

Il faut charroter ( $M_1$ ) pour que ( $M'_1$ ) se rapproche de ( $M_2$ ) et ce jusqu'à obtenir  $M_2 = M'_1$ .

Comment savoir si on charioote dans le bon sens ?

On fixe des yeux un anneau, dont la différence de marche égale  $2e \cos i$  est constante. On charioote  $M_1$ , si  $e$  diminue alors  $\cos i$  doit augmenter pour que la différence de marche reste constante. Ainsi,  $i$  diminue et  $R = f'i$  diminue également. Si on déplace ( $M_1$ ) dans le bon sens, on voit *les anneaux rentrer dans le centre de la figure*. Les anneaux sont de plus en plus grands et de moins en moins nombreux sur l'écran.

### d. Rayons des anneaux

$$p_M = \frac{\delta_M}{\lambda_0} = \left( \frac{2e}{\lambda_0} \right) \cos i = p_{max} \cos i.$$

Au centre,  $i = 0$ , on a  $p_{centre} = p_{max}$ . Ensuite,  $i$  augmente et  $p_M$  diminue et le rayon  $R = f'i$  augmente.

Rayon  $R_k$  du k ième anneau :

Le k ième anneau correspond à une valeur  $i_k$  de  $i$ . Son ordre d'interférence est  $p_k$ .

$$p_k = p_{max} \cos(i_k) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos(i_k) \approx p_{max} \left( 1 - \frac{i_k^2}{2} \right)$$

$$\text{Donc, } i_k = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{p_k}{p_{max}} \right)} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{(p_{max} - p_k)}$$

$$\text{Or, } R_k = f' \tan(i_k) \approx f' i_k$$

$$R_k = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{p_{max} - p_k}$$

Ainsi, si  $e$  diminue alors  $R$  augmente. Les anneaux sont de plus en plus gros et on voit de moins en moins d'anneaux sur l'écran de dimensions finies.

Les anneaux sont brillants  $F_B$  si l'ordre d'interférence est un entier.

Les anneaux sont sombres  $F_S$  si l'ordre d'interférence est tel que  $p_M = m + \frac{1}{2}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Intensité au centre :

Au centre,  $i = 0$ ,  $R(i = 0) = f'i = 0$ . Au centre, on observe donc un point lumineux.

$I(i = 0)$  dépend de  $p_{centre} = p_{max} = \frac{2e}{\lambda_0} = E(p_{max}) + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \in [0; 1]$ .

Si  $\varepsilon = 0$ , alors  $p_{centre}$  est un entier et le point central est brillant.

Si  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , alors  $p_{centre}$  est un demi-entier et le point central est sombre.

Si  $\varepsilon$  ne vaut ni 0 ni 0.5, alors l'intensité du point central est variable.

La position des anneaux brillants dépend du point central :

$p_M = p_{max} \cos i_k$	Centre brillant $\varepsilon = 0, p_{max} = \frac{2e}{\lambda_0}$	Centre sombre $\varepsilon \neq 0 < 1$ $p_{max} = E(p_{max}) + \varepsilon$
$F_{B1}$	$p(F_{B1}) = p_{max} - 1$	$p(F_{B1}) = E(p_{max})$
$F_{B2}$	$p(F_{B2}) = p_{max} - 2$	$p(F_{B2}) = E(p_{max}) - 1$
$\vdots$		
$F_{Bk}$	$p(F_{Bk}) = p_{max} - k$	$p(F_{Bk}) = E(p_{max}) - (k - 1)$
$R_k = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{p_{max} - p_k}$	$p_{max} - p_k = k$ $R_k = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{k}$ Anneaux de plus en plus resserrés quand on s'éloigne du centre	$p_{max} - p_k = \varepsilon - k + 1$ $R_k = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{\varepsilon - k + 1}$

### e. Source émettant un doublet de longueur d'onde

Il faut reprendre le calcul avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$  pour deux radiations incohérentes :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \underbrace{\cos \left( 2\pi \frac{\delta_M \Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)}_{V(\delta_M)} \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_m} \right) \right]$$

Les brouillages se produisent lorsque  $C = |V(\delta_M)| = 0$ . Ce qui implique :

$$2\pi\delta_M \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = \left( \frac{1}{2} + k \right) \frac{\lambda_m^2}{\Delta\delta_M}$$

Entre deux brouillages successifs, la différence de marche varie de  $\Delta\delta_M = \Delta k \left( \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} \right)$ .

Cas de l'interféromètre en lame d'air :

Dans ce cas,  $\delta_M = 2e \cos i \approx 2e$  lorsqu'on regarde au centre de l'écran.

On charioote ( $M_1$ ), on fait donc varier  $e$  de  $\Delta e$  et la différence de marche varie donc de  $\Delta\delta_M = 2\Delta e$ .

Ainsi,  $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta e}$ .

En pratique, on relève la position  $X$  du miroir ( $M_1$ ), au brouillages numéro 1  $X_{Br1}$  et au brouillage numéro 2  $X_{Br2}$ . On a alors :  $\Delta e = |X_{Br1} - X_{Br2}|$  et  $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{2|X_{Br1} - X_{Br2}|}$ .

#### 4) Interféromètre réglé en coin d'air

Il s'agit toujours d'interférences à deux ondes par division d'amplitude, donc :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right]$$

##### a. Construction de rayons

Dans la configuration coin d'air,  $e = 0$  et  $\alpha$  est très petit, de l'ordre de quelques minutes d'arc. L'incidence est normale, d'angle  $i_0$ .

Pour le réglage, il faut faire coïncider les deux miroirs ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ) et il faut incliner légèrement ( $M_2$ ).

Les deux rayons issus des réflexions sur le miroir ( $M_1$ ) et sur le miroir ( $M_2$ ) ne se coupent pas mais leurs prolongements se coupent quasiment sur le coin d'air.

La différence de marche est donnée par deux fois l'épaisseur du coin d'air. Ainsi,

$$\delta_M = 2e_M = 2\alpha X \text{ où } \alpha \text{ est l'angle entre les miroirs}$$

Dans cette formule  $X$  représente la distance  $OM$ , distance entre l'intersection des deux miroirs et le point  $M$  étudié.

##### b. Figures d'interférences

Ainsi,

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2e_M}{\lambda_0} \right) \right]$$

Les franges d'interférences sont donc des franges d'égale épaisseur. À chaque valeur de  $e_M$  correspond une valeur de l'intensité. On appelle ces franges, *franges de Fizeau*.

$e_M$  étant égale à  $\alpha X$ , les fanges sont des droites parallèles à l'arête de ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ).

L'interfrange est identifié en utilisant :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{X}{i} \right) \right]$$

Donc  $i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$ .

Les franges sont équidistantes à  $\lambda_0$  et  $\alpha$  fixés.

En pratique, pour retrouver le contact optique à partir d'un montage en coin d'air, il faut faire décroître l'angle  $\alpha$ . Pour ce faire, il faut tourner les vis de ( $M_2$ ) tel que sur l'écran, on voit l'interfrange croître.

### c. Figure d'interférence en projection

L'utilisation d'une source large implique que les interférences sont localisées. Dans le cas d'un montage en coin d'air, elles sont localisées sur le coin d'air. Les franges rectilignes sont sur ( $M'_1$ ) et ( $M_2$ ).

Pour observer sur un écran, on utilise une lentille convergente placée telle que :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}.$$

L'interfrange sur l'écran vaut :  $i_{écran} = \gamma i = \gamma \frac{\lambda_0}{2\alpha}$  où  $\gamma$  est le grandissement associé au dispositif de projection.

# Thermodynamique

*Thermodynamique* : Étude des échanges d'énergie sous forme de transfert thermique et de travail.

## I. Généralités sur les systèmes thermodynamiques

### 1) Système thermodynamique

#### a. Vocabulaire

Système thermodynamique : contenu d'une région macroscopique de l'espace délimitée de l'extérieur (*environnement*) par une surface réelle ou fictive. Contient un grand nombre de particules (de l'ordre de  $\mathcal{N}_A = 6.02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$  ).

Un système thermodynamique peut être :

- ouvert : échange possible de matière et d'énergie avec le milieu extérieur,
- fermé : échange d'énergie possible mais pas d'échange de matière,
- isolé : aucun échange possible (ni énergie ni matière)

#### b. Les états de la matière

**Solide** a une forme propre et un volume propre,

**Liquide** n'a pas de forme propre mais a un volume propre,

**Gaz** n'a ni de volume propre, ni de forme propre

*Remarque* : Les solides et liquides sont appelés phases condensées. Les phases liquides et gaz sont appelées phases fluides.

### 2) Les différents niveaux de description

**Échelle microscopique** Échelle des particules élémentaires du système. À cette échelle, la matière est *discontinue* et seul une étude *statistique* est possible.

**Échelle macroscopique** Domaine observable expérimentalement. À cette échelle, la matière est *continue* et une étude en *thermodynamique classique* est possible.

**Échelle mésoscopique** Échelle intermédiaire entre ces deux échelles.

### 3) Variables d'état - Extensivité et intensivité

#### a. Généralités

Variable d'état : Grandeur ou paramètre physique qui caractérise l'état macroscopique d'un système donné et qui est susceptible d'être modifié lors d'une transformation d'un système.

Variable extensive : Grandeur additive liée aux dimensions du système et proportionnelle à la masse du système (masse, volume, énergie ...). On distingue les grandeurs *extensives* proportionnelles à la quantité de matière de grandeurs *additive* pour lesquels la grandeur de la somme de deux sous-systèmes est égale à la somme de la grandeur de chaque sous-système.

Variable intensive : Grandeur définie en chaque point du système, indépendante des dimensions du système ou de la quantité de matière de celui-ci (pression, température...)

### b. Pression et température

Il s'agit de deux variables intensives fondamentales en thermodynamique.

Pression P : Mesure l'effet des chocs des molécules sur une paroi. Elle correspond à une sorte de "valeur moyenne" des forces qui s'exercent sur la paroi par unité de surface ( $d\vec{f}_A = P_A d\vec{S}_A$ ). Unité SI : Pa (Pascal), unités courantes : bar tel que 1 bar =  $10^5$ Pa, atm tel que 1 atm = 1013 hPa = 760 mmHg.

Température T : Mesure de l'agitation des molécules constituant un système. La température est directement liée à l'énergie cinétique moyenne des molécules. Unité SI : K(Kelvin), unité courante : °C (degré Celsius).

### c. Grandeur extensive d'un corps pur monophasé ou diphasé

Soit  $X$  une grandeur extensive, on définit :

- $X_m = \frac{X}{n}$  est la grandeur molaire associée à  $X$ ,
- $x = \frac{X}{m}$  est la grandeur massique associée à  $X$

## 4) Équilibre thermodynamique

Un système est à l'*équilibre thermodynamique* lorsque toutes les variables d'état demeurent constantes au cours du temps alors qu'il n'est l'objet d'aucun échange avec le milieu extérieur. Ainsi les équilibres suivants doivent être respectés :

- Équilibre mécanique : Pression du système est identique en chaque point,
- Équilibre thermique : Température du système identique en chaque point. Si des échanges de chaleur sont possibles alors les températures du système et de l'environnement sont les mêmes,
- Équilibre chimique : Pas de réaction chimique au sein du système,
- Équilibre électrique : Potentiel électrique du système est le même en chaque point

**Tout système hors équilibre tend à évoluer vers l'état d'équilibre thermodynamique.**

## 5) Équation d'état

Équation d'état : relation de dépendance entre les différentes variables d'état d'un système thermodynamique.

## 6) Énergie interne et capacité thermique à volume constant

L'*énergie interne*, notée  $U$ , d'un système thermodynamique correspond à l'énergie totale des particules du système. Elle comprend l'énergie cinétique des particules et l'énergie potentielle d'interaction.

Il s'agit d'une *fonction d'état*. Elle s'exprime en Joules (J) et est une grandeur additive à condition de négliger toutes formes d'interactions à grandes distances.

Capacité thermique à volume constant : grandeur  $C_v$  telle que  $dU = C_v dT$  ( $dT$  étant la variation de température du système). Cette grandeur extensive s'exprime en  $\text{J.K}^{-1}$ .

## II. Description d'un gaz parfait

### 1) Modèle et équation d'état du gaz parfait

Gaz parfait : Modèle théorique idéal correspondant à un gaz constitué de particules supposées ponctuelles et sans interaction entre elles.<sup>5</sup>

L'équation d'état associée est :  $PV = nRT$  où  $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits.

Dans cette formule, il faut faire attention aux unités (toujours prendre en SI).

Remarque : *Équation du gaz de Van Der Waals* :  $\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$  où  $a$  (terme de cohésion) et  $b$  (covolume molaire) sont des constantes. Ce modèle tient compte du volume des particules ainsi que des interactions entre particules.

### 2) Énergie interne et capacité thermique à volume constant du gaz parfait

Première loi de Joule :

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

Pour un gaz parfait monoatomique,  $U = \frac{3}{2}nRT$ , donc  $C_v = \frac{3}{2}nR$ .

Pour un gaz parfait diatomique,  $U = \frac{5}{2}nRT$ , donc  $C_v = \frac{5}{2}nR$ .

## III. Description d'une phase condensée idéale

Phase condensée : phase solide ou liquide.

Le volume d'une telle phase diminue très peu lorsque la pression augmente, il s'agit d'une phase peu *compressible*.

5. Modèle valable pour des pressions et température assez faibles.

Le volume d'une telle phase diminue très peu lorsque la température augmente, il s'agit d'une phase peu *dilatable*.

Dans le cas idéal, une phase condensée est considérée comme *incompressible* et *indilatable*.

**L'énergie interne d'une phase condensée ne dépend que de la température :**  
 $U = nU_m(T)$ , donc  $dU = C_V m dT$ .

## IV. Description du corps pur diphasé

Phase (ou état) : Système homogène dans lequel les variables intensives ( $T, P, \rho, \dots$ ) sont uniformes ou varient continûment.

Un corps pur est constitué d'un seul constituant (molécules ou atomes).

On parle de *corps pur monphasé* lorsque celui-ci existe sous la forme d'une seule phase.

On parle de *corps pur diphasé* lorsque deux phases de ce corps pur coexistent.

### a. Les changements d'états

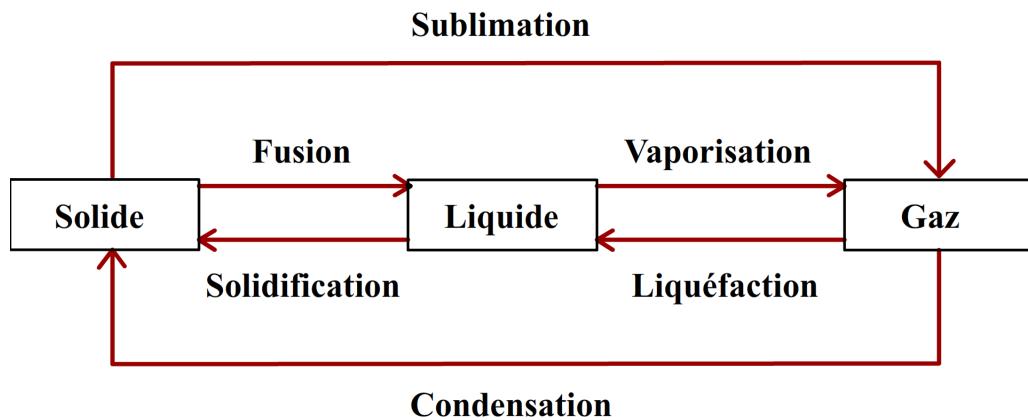
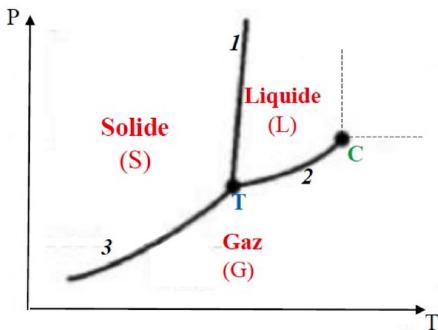


FIGURE 13 – Nom des différents changements d'états

### b. Diagramme d'équilibre d'un corps pur

L'état d'un corps pur est caractérisé par la donnée des variables  $P, V$  et  $T$ . Il s'agit donc d'un diagramme originellement tridimensionnel mais on travaille plutôt à l'aide de projection bidimensionnelle.

### c. Diagramme (P,T)



**Système monophasé** Système divariant : plusieurs pression possibles pour une température fixée (abscisse fixée)

**Système diphasé** Système monovariant : un seul couple ( $P, T$ ) existe pour une température fixée (abscisse fixée)

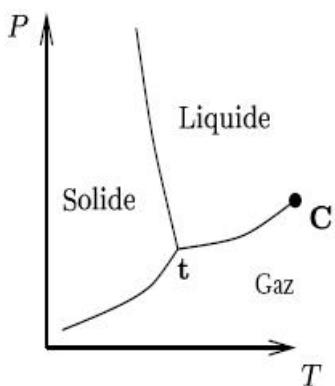
FIGURE 14 – Diagramme (P,T) générique

La courbe d'équilibre correspond à l'ensemble des couples ( $P, T$ ) possibles tels que deux phases coexistent.

Le point  $T$  correspond au *point triple* pour lequel il y a coexistence des trois phases. Il s'agit d'un unique couple et donc d'un système "0 variant".

Le point  $C$  est appelé *point critique*. Au-delà de ce point, on ne distingue plus la phase vapeur de la phase liquide.

*Remarque : La courbe d'équilibre Sol/Liq (1) est quasiment verticale car cet équilibre est quasiment indépendant de la pression.*

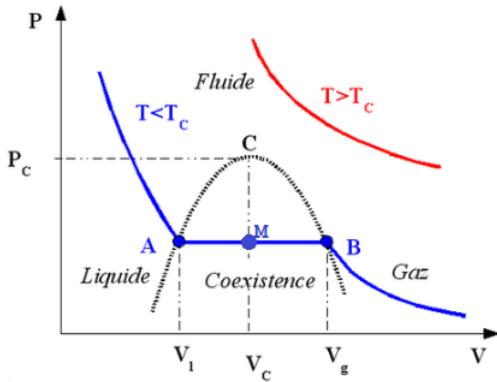


Le cas de l'eau est un peu particulier car la courbe d'équilibre entre les phases solide et liquide est de pente négative. Ainsi, une compression isotherme de la glace (augmentation de la pression à une température fixée) entraîne sa fusion.

FIGURE 15 – Diagramme (P,T) de l'eau

On appelle *pression de vapeur saturante* la pression maximale d'existence de la vapeur (ou pression du mélange lorsqu'il y a une coexistence liquide/vapeur).

#### d. Diagramme (P,v) pour l'équilibre liquide-vapeur



La courbe noire est la *courbe de saturation*. Elle est composée de la *courbe d'ébullition* à gauche du point C et de la *courbe de rosée* à la droite de ce point.

Les courbes en bleu et rouge représentent un réseau d'isothermes.

Le point C est le *point critique*.

FIGURE 16 – Diagramme (P,v)  
générique

Théorème des moments :

Soit  $m$  la masse totale du mélange diphasé { liquide + vapeur }, on note :

$$\begin{cases} m_l \text{ la masse de liquide} \\ m_v \text{ la masse de vapeur} \end{cases}$$

On définit le *titre massique en liquide* (ou *fraction massique*)  $x_l = \frac{m_l}{m}$  et le *titre massique en vapeur*  $x_v = \frac{m_v}{m}$ .

**Graphiquement, on a :**  $x_v = \frac{AM}{AB}$  et  $x_l = \frac{MB}{AB}$

*Démonstration :*

Au point M, on peut écrire :  $m = m_l + m_v$  et  $V = V_l + V_v$ . Or,  $V_l = m_l v_l$  et  $V_v = m_v v_v$ .

$$v = x_l v_l + x_v v_v \Leftrightarrow v = (1 - x_v) v_l + x_v v_v \Leftrightarrow v - v_l = x_v (v_v - v_l) \Leftrightarrow x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$$

Or,  $v$  correspond au volume massique en M,  $v_l$  correspond au volume massique en A et  $v_v$  correspond au volume massique en B. D'où l'expression de  $x_v$ . On déduit  $x_l = 1 - x_v$ .

*Qed*

*Remarque :* Différence de compressibilité entre la phase vapeur (pente hyperbolique) et la phase liquide (pente quasi verticale). Il existe un coefficient permettant de caractériser la compressibilité :  $\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$ .

## V. Transformations d'un système thermodynamique

### 1) Définition

Un système thermodynamique subit une *transformation* s'il passe d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre. Une modification des paramètres extérieurs ( $T_{ext}$ ,  $P_{ext}$ ) ou une levée des contraintes extérieures provoque l'évolution du système jusqu'à l'établissement d'un nouvel équilibre.

Une paroi qui ne permet pas le transfert thermique est appelée *adiabatique*. Une paroi qui permet ce transfert est appelée *diatherme*.

### 2) Transformations quasi statique et non quasi statique

Une *transformation quasi statique* (TQS) est une transformation suffisamment lente pour que le système passe par une suite "continue" d'états d'équilibres thermodynamiques internes infiniment voisins allant de l'état initial à l'état final. Des paramètres intensifs sont alors définis à chaque instant.

Une *transformation non quasi statique* (TNQS) se traduit par une variation rapide et inhomogène de la température et de la pression au sein du système. On ne peut plus définir les paramètres intensifs à chaque instant mais uniquement aux états initial et final.

#### a. Transformations réversible et irréversible

Une *transformation réversible* est une transformation quasi statique, pouvant être renversable, c'est-à-dire repasser par tous les états antérieurs successifs d'équilibre en modifiant en sens inverse les contraintes extérieures. Ce type de transformation représente le cas idéal d'une transformation réelle infiniment lente, quasi statique et caractérisée par des phénomènes dissipatifs négligeables.

Une *transformation irréversible* correspond au cas usuel d'une transformation réelle spontanée : elle peut être rapide, donc non quasi statique, ou lente mais non renversable. Tout phénomène dissipatif est une cause d'irréversibilité.

### 3) Transformations à paramètre fixé

Soit un système (S) de volume V caractérisé par une pression P et une température T à un instant donné.

**Transformation monotherme** (S) est en relation avec une seule source extérieure de température constante  $T_{ext}$ . Pour ce type de transformation,  $T_i = T_f = T_{ext}$ .

**Transformation isotherme** Température du système constante au cours de la transformation et égale à la température extérieure.

**Transformation monobare** (S) est en relation avec une seule source extérieure de pression constante  $P_{ext}$ . Pour ce type de transformation,  $P_i = P_f = P_{ext}$ .

**Transformation isobare** Pression du système constante au cours de la transformation et égale à la pression extérieure.

**Transformation isochore** Volume constant au cours de la transformation.

**Transformation adiabatique** Aucun transfert thermique entre (S) et l'extérieur ( $Q=0$ ).

#### 4) Transformation élémentaire

Une *transformation élémentaire* correspond à une transformation entre deux états d'équilibres thermodynamiques internes infiniment proches :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} t & \mapsto & t + dt \\ X(t) = X & \mapsto & X(t + dt) = X + dX \end{array} \right.$$

### VI. Premier principe de la thermodynamique

#### 1) Énergie interne et énergie totale

Énergie interne  $U$  : énergie cinétique microscopique et énergie potentielle d'interaction entre particules du système :  $U = E_{\text{c,micro}} + E_{\text{pint}}$ .

Énergie totale  $E$  : De façon générale,  $E = U + E_{\text{cmacro}} + E_{\text{pext}}$ .

$E$  et  $U$  sont des grandeurs additives s'exprimant en Joules (J). Il s'agit de fonctions d'état car elles dépendent des variables d'état T,P et V.

#### 2) Énoncé du premier principe de la thermodynamique

À tout système thermodynamique fermé, on associe une grandeur physique appelée énergie interne et notée  $U$ . Au cours d'une transformation thermodynamique, la variation de  $U$  est égale à l'énergie reçue par le système (algébriquement) de la part du milieu extérieur. L'énergie reçue par le système peut l'être sous forme de :

- Travail  $W$  : type macroscopique (forces qui s'exercent sur le système)
- Transfert thermique  $Q$  : type "microscopique" (transfert thermique)

Autrement dit,  $\Delta U = W + Q$

#### 3) Conventions d'orientation des échanges d'énergie

$W$  et  $Q$  sont des grandeurs *algébriques*. Elles sont positives si elles sont reçues par le système et négative sinon.

#### 4) Transformation élémentaire

Énoncé du premier principe sous forme élémentaire :  $dU = \delta W + \delta Q$

## VII. Échange d'énergie

### 1) Travail des forces de pression

#### a. Travail élémentaire des forces de pression

Par définition générale du travail,  $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl}$  et dans le cas des forces pressantes,  $\vec{F} = -P_{ext} S \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  étant le vecteur normal à la surface.

Travail des forces de pression exercées par le milieu extérieur :

$$\delta W = -P_{ext} dV$$

Cette grandeur est algébrique. Lorsque  $dV > 0$  (il s'agit d'une détente),  $\delta W < 0$  donc le système cède de l'énergie. Dans le cas d'une compression, le système reçoit de l'énergie.

De façon générale, on a :  $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \delta W = - \int_i^f P_{ext} dV$ .

Dans le cas d'une transformation monobare, on a donc :  $W_{i \rightarrow f} = -P_{ext}(V_f - V_i)$ .

Dans le cas d'une transformation isochore,  $W_{i \rightarrow f} = 0$  car  $dV = 0$ .

Dans le cas d'une transformation quasi statique,  $W_{i \rightarrow f} = - \int_i^f P dV$  car  $P_{ext} = P$ .

#### b. Interprétation graphique du diagramme de Clapeyron (P,V)

Lorsque l'on trace le diagramme de Clapeyron, diagramme (P,V), on constate que le travail d'une transformation allant de A à B correspond à l'aire sous la courbe représentant la transformation.

Dans le cas d'un cycle, on distingue les cycles moteurs ( $W < 0$ ) qui sont parcourus dans le sens horaire des cycles récepteurs ( $W > 0$ ) qui sont parcourus dans le sens trigonométrique dans les diagrammes de Clapeyron.

### 2) Transferts thermiques

Un *transfert thermique* correspond à un échange d'énergie à l'échelle microscopique. Les manifestations de transferts thermiques sont par exemple une variation de la température ou un changement d'état.

Le *transfert thermique* a lieu lorsque le système est en contact avec un milieu extérieur qui a une température différente de la sienne. Le transfert a lieu spontanément du corps chaud vers le corps froid. On le calcule à l'aide  $Q = \Delta U - W$ .

### 3) Énergie électrique

$E_{el} = \int_i^f \mathcal{P}(t) dt = \int_i^f u(t)i(t) dt = UI\Delta t$  (dans le cas où  $u(t)$  et  $i(t)$  sont constantes).

#### 4) Échange avec un thermostat

Le *thermostat* (ou source de chaleur) est caractérisé(e) par :

- une capacité thermique très grande (infinie pour un thermostat idéal),
- une température quasi constante (constante pour un thermostat idéal)

Il ne peut échanger que du transfert thermique avec le milieu extérieur et est à l'équilibre thermique à chaque instant.

#### 5) Transformation isotherme vs transformation adiabatique

Une *transformation isotherme* est une transformation à température constante alors qu'une *transformation adiabatique* se fait sans échange de transfert thermique ( $Q=0$ ).

Une transformation isotherme se fait lorsque le système est en contact avec un thermostat à température constante et lorsque la transformation est lente.

**Transformation adiabatique** parois calorifugés et transformation plutôt rapide.

**Transformation isotherme** contact avec un thermostat et transformation plutôt lente.

### VIII. L'enthalpie $H$

#### 1) Étude d'une transformation monobare

On étudie la transformation  $(P_i, V_i, T_i) \rightarrow (P_f, V_f, T_f)$  monobare ( $P_i = P_f = P_{ext}$ ).

D'après le premier principe :  $U_f - U_i = Q - P_{ext}(V_f - V_i) = Q - P_f V_f + P_i V_i$ .

Ainsi,  $U_f + P_f V_f - (U_i + P_i V_i) = Q = H_f - H_i$ .

#### 2) Enthalpie : définition et propriétés

**On définit ainsi la fonction d'état *enthalpie* par :  $H = U + PV$ .**

L'enthalpie est homogène à une énergie et s'exprime en Joules (J). On définit l'enthalpie molaire  $H_m = \frac{H}{n}$  en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$  et l'enthalpie massique  $h = \frac{H}{m}$  en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Cette fonction est additive et est indépendante du chemin suivi (fonction d'état).

#### 3) Capacité thermique à pression constante $C_p$

La capacité thermique à pression constante  $C_p$  correspond à la variation d'énergie à fournir pour augmenter la température du système de un degré à pression constante, telle que :  $dH = C_p dT$ . Elle s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

On définit également des capacités thermiques à pression constante molaire et massique.

#### 4) Cas des gaz parfait

$H = U + PV = C_v T + nRT = (C_v + nR)T$ . Ainsi,  $dH = C_p dT = (C_v + nR)dT$ .

Relation de Mayer :  $C_p = C_v + nR$ .

Souvent on utilise  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , on montre donc :  $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$  et  $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$ .

## 5) Cas des phases condensées

On fait souvent l'hypothèse :  $H \approx U$  pour les phases condensées.  $dH = CdT = dU$ .

## 6) Enthalpie d'un système diphasé

Soit un corps pur diphasé constitué d'une masse  $m_1$  dans l'état 1 et d'une masse  $m_2$  dans l'état 2. Ainsi, on a  $H = m_1 h_1 + m_2 h_2 \Rightarrow \frac{H}{m} = x_1 h_1 + x_2 h_2 = h = x_1 h_1 + (1 - x_1) h_2$ .

Ainsi, on obtient le théorème des moments  $x_1 = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2}$ .

On définit l'*enthalpie massique de changement d'état*  $1 \rightarrow 2$  à une température  $T$  donnée par :  $l_{1 \rightarrow 2}(T) = h_2(T) - h_1(T)$ .

Remarque : Cette grandeur était appelée chaleur latente.

# IX. Applications classiques

## 1) Transformation adiabatique quasi statique (ou réversible) d'un gaz parfait

$$(T_i, P_i, V_i) \xrightarrow[Q=0]{} (T_f, P_f, V_f).$$

Premier principe :  $dU = \delta W + \delta Q = \delta W = -PdV$  car adiabatique et quasi statique.

Gaz parfait :  $dU = C_v T = \frac{nR}{\gamma - 1} dT$  et  $PV = nRT$ .

Ainsi,

$$\frac{nR}{\gamma - 1} dT = -PdV \Leftrightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} dT = -\frac{nRT}{V} dV \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

Après intégration, on obtient :

$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + (\gamma - 1) \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}}\right) = 0$$

D'où,

**Loi de Laplace** : Pour un gaz parfait et pour une transformation adiabatique et quasi statique, on a :

$$TV^{\gamma-1} = c^{te} \Leftrightarrow PV^\gamma = c^{te} \Leftrightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = c^{te}$$

## 2) Calorimètre

Un *calorimètre* est constitué de deux vases cylindriques concentriques en aluminium, isolés l'un de l'autre par de l'air (calorimètre de Berthelot). On peut améliorer l'isolation en poussant le vide (calorimètre Dewar).

*Notre objectif est de déterminer la valeur en eau du calorimètre ( $\mu$ ) et de ses accessoires (homogène à une masse).*

On se place dans le cas d'une transformation adiabatique et monobare. Dans le calorimètre on place une  $m_1$  d'eau à une température initiale  $\theta_1$ . On ajoute alors une masse  $m_2$  d'eau à la température  $\theta_2 \neq \theta_1$ . Le système atteint alors une température d'équilibre  $\theta_e$ .

$$\Delta H = Q_p = 0 = \Delta H_{\text{calo}} + \Delta H_2 + \Delta H_1 = \mu c_{eau}(\theta_e - \theta_1) + m_1 c_{eau}(\theta_e - \theta_1) + m_2 c_{eau}(\theta_e - \theta_2)$$

Ainsi,

$$(\mu + m_1)(\theta_e - \theta_1) + m_2(\theta_e - \theta_2) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_e)}{\theta_e - \theta_1} - m_1$$

Mesure de la capacité thermique de l'eau :  $\theta(t) = \theta_1 + \frac{UIt}{c_{eau}(m_1 + \mu)}$

## X. Les causes d'irréversibilité

### 1) Phénomènes de mélange ou diffusion

*Exemple : Une goutte de colorant dans de l'eau diffuse dans le liquide jusqu'à l'obtention d'une concentration uniforme.*

**Tout phénomène de mélange (diffusion) est, par nature, irréversible.**

### 2) Inhomogénéités de températures

**Toute inhomogénéité de température au sein du système et le milieu extérieur est une cause d'irréversibilité.**

### 3) Frottements

**Tout phénomène de frottement est une cause d'irréversibilité.**

## XI. Nécessité d'un second principe

### 1) Limite du premier principe

Le premier principe ne permet pas de déterminer le sens de la réaction.

*Exemple : pâles plongées dans un liquide. On fournit un travail  $W > 0$  aux pâles ce qui entraîne un échauffement du milieu extérieur  $Q < 0$ . Cependant, avec le premier principe on arrive à  $W = -Q$  et donc  $W < 0$  et  $Q > 0$  n'est pas impossible.*

### 2) Énoncé du second principe

Pour tout système thermodynamique fermé, on postule l'existence d'une fonction d'état appelée *entropie*, notée  $S$ , telle que pour toute transformation donnée :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} \text{ avec}$$

$S_{\text{créée}} \geq 0$  : strictement positif pour une transformation irréversible et nulle pour une transformation réversible.

$S_{\text{échangée}} = \sum_k \int_i^f \frac{\delta Q_k}{T_{sk}}$  où  $\delta Q_k$  est le transfert thermique élémentaire échangé avec une source de température de surface  $T_{sk}$ .

### 3) Commentaires

- $S$ ,  $S_{\text{créée}}$  et  $S_{\text{échangée}}$  s'expriment en  $\text{J.K}^{-1}$ ,
- $S$  est une grandeur additive et extensive,
- $S$  est une fonction d'état dont la variation ne dépend pas du chemin suivi lors de la transformation,
- une transformation adiabatique ( $\delta Q = 0$ ) réversible ( $S_{\text{créée}} = 0$ ) est isentropique ( $\Delta S = 0$ ),
- l'entropie ne peut qu'augmenter lors d'une transformation adiabatique

## XII. Entropie d'un système thermodynamique

### 1) Entropie d'une phase condensée

Soit une phase condensée de capacité thermique  $C$ ,  $S(T) = C \ln(T) + c^{te}$ .

### 2) Entropie d'un gaz parfait

Soit un gaz supposé parfait caractérisé par  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $S(T, P) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln(T) - nR \ln(P) + c^{te}$ .

### 3) Entropie d'un système diphasé

Soit un corps pur diphasé, constitué d'une phase 1 ( $m_1$ ) et d'une phase 2 ( $m_2$ ), on a  $S = S_1 + S_2 = m_1 s_1 + m_2 s_2$ .

On admet que sur un pallier de changement d'état à une température  $T$  donnée,  $\Delta S = \frac{\Delta H}{T}$ .

## XIII. Machines thermiques

### 1) Introduction

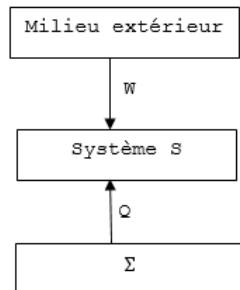
Le terme *machines thermiques* désignent tout dispositif susceptible d'échanger de l'énergie avec le milieu extérieur sous forme de travail ou de transfert thermique.

### a. Description générale

Elle est constituée d'un système thermodynamique ( $S$ ) qui décrit des cycles successifs lors desquels il échange du transfert thermique avec une ou plusieurs source(s) de chaleur ( $\Sigma_i$ ) et du travail avec le milieu extérieur.

### b. Machine monotherme

Une telle machine ne fonctionne qu'avec une unique source de chaleur ( $\Sigma$ ).



Sur un cycle,  
le premier principe donne :  $\Delta U = W + Q = 0$ .  
le second principe donne :  $\Delta S = \frac{Q}{T_\Sigma} + \underbrace{S_c}_{\geq 0} = 0$ .

On en déduit que  $Q \leq 0$  et  $W \geq 0$ .

**Une machine monotherme consomme du travail et cède du transfert thermique au milieu extérieur. On ne peut donc pas fabriquer de moteur monotherme.**

FIGURE 17 – Machine monotherme

## XIV. Machines thermiques dithermes

Ces machines fonctionnent au contact de deux sources de chaleur.

### 1) Application du premier et du seconde principe

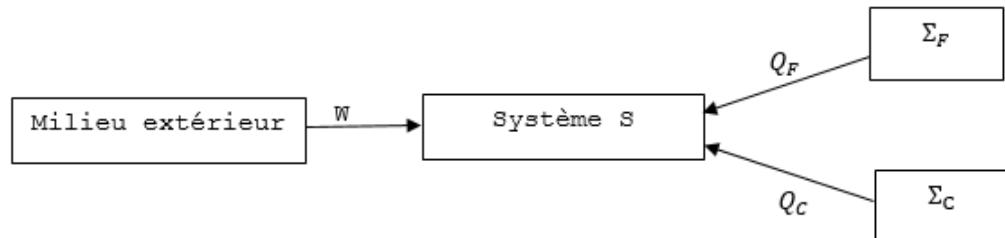


FIGURE 18 – Machine ditherme

$\Sigma_C$  (resp.  $\Sigma_F$ ) est appelée *source chaude* (resp. *source froide*) et est à la température  $T_C$  (resp.  $T_F$ ). On considère que  $Q_C$ ,  $Q_F$  et  $W$  sont reçus par le système ( $S$ ).

Sur un cycle :

- Premier principe :  $\Delta U = 0 = W + Q_C + Q_F$ ,
- Second principe :  $\Delta S = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_c$

Du second principe et du fait que  $S_c \geq 0$ , on obtient l'*inégalité de Claussius*  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$ .

## 2) Diagramme de Raveau

Diagramme 2D avec  $Q_C$  en ordonnée et  $Q_F$  en abscisse. On considère pour le tracé de ce diagramme  $W = 0$ .

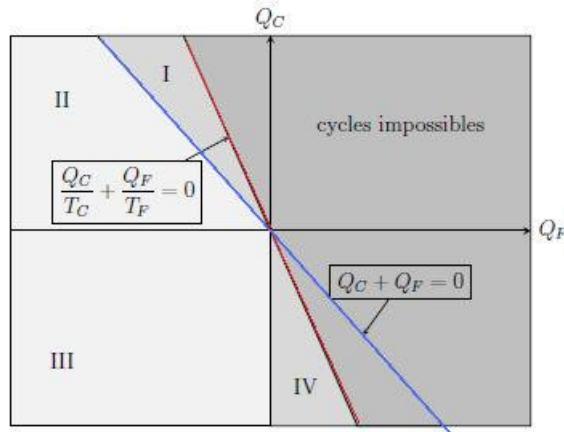


FIGURE 19 – Diagramme de Raveau

On obtient alors quatre zones qui respecte les conditions issues du premier et second principes.

### Zone 1 : Principe du moteur thermique

- $Q_C > 0$ , le système reçoit du transfert thermique de la source chaude,
- $Q_F < 0$ , le système cède du transfert thermique à la source froide,
- $W < 0$ , le système cède du travail au milieu extérieur

### Zone 2 :

- $Q_C > 0$ , le système reçoit du transfert thermique de la source chaude,
- $Q_F < 0$ , le système cède du transfert thermique à la source froide,
- $W > 0$ , le système reçoit du travail

### Zone 3 :

- $Q_C < 0$ , le système cède du transfert thermique de la source chaude,
- $Q_F < 0$ , le système cède du transfert thermique à la source froide,
- $W > 0$ , le système reçoit du travail du milieu extérieur

### Zone 4 : Principe du réfrigérateur ou pompe à chaleur

- $Q_C < 0$ , le système cède du transfert thermique de la source chaude,
- $Q_F > 0$ , le système reçoit du transfert thermique à la source froide,
- $W > 0$ , le système reçoit du travail du milieu extérieur

## 3) Rendement ou efficacité d'une machine thermique

$$\rho = \frac{|\text{Énergie récupérable sur un cycle}|}{|\text{Énergie onéreuse sur un cycle}|}$$

#### 4) Moteur thermique ditherme

$W < 0$ ,  $Q_C > 0$  et  $Q_F < 0$ .

##### a. Rendement

Par définition,  $\rho = \frac{|W|}{|Q_C|} = -\frac{W}{Q_C}$ . Or, d'après le premier principe,  $Q_C + Q_F = -W$ . Donc  $\rho = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$ .

De plus, d'après l'inégalité de Claussius,  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{Q_F}{Q_C} \leq -\frac{T_F}{T_C}$ .

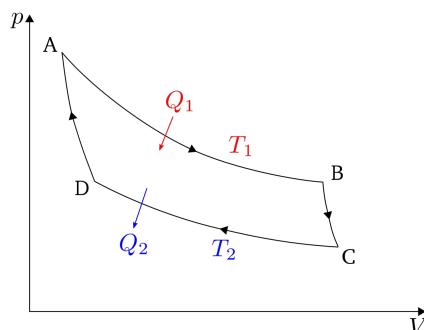
Ainsi,  $\rho \leq 1 - \frac{T_F}{T_C} = \rho_{\text{Carnot}}$ <sup>6</sup>.

##### b. Théorème de Carnot

Machine supposée réversible donc  $\rho_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ .

Théorème de Carnot :

Le rendement d'une machine thermique ditherme est toujours inférieur au rendement de la machine fonctionnant avec les mêmes sources de chaleur de façon réversible.



Cycle de Carnot théorique :

Deux adiabatiques réversibles  
Deux isothermes réversibles

FIGURE 20 – Cycle de Carnot théorique

##### c. Cycle Beau de Rochas du moteur essence

###### Description et modélisation

Source chaude : transfert thermique  $Q_C$  est créé dans un cylindre lors de l'inflammation du mélange air-carburant.

Source froide : air extérieur

Moteur à explosion : étincelle de la bougie qui est responsable de l'inflammation du mélange.

---

6. Le cycle de Carnot est obtenu dans le cas où la machine fonctionne de façon réversible.

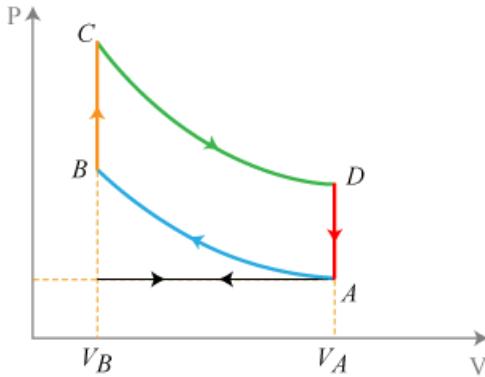


FIGURE 21 – Cycle Beau de Rochas

### Calcul du rendement

*Objectif : Détermination du rendement en fonction de  $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$  et  $\gamma$ .*

$V_{min} = V_B = V_C$  et  $V_{max} = V_A = V_D$ . Le système thermodynamique décrit le cycle  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Ce cycle est parcouru dans le sens horaire et est donc moteur.

Étape  $A \rightarrow B$  : adiabatique réversible :  $Q_{AB} = 0$  et  $W_{AB} = ?$ ,

Étape  $B \rightarrow C$  : isochore :  $Q_{BC} = ?$  et  $W_{BC} = 0$ ,

Étape  $C \rightarrow D$  : adiabatique réversible :  $Q_{CD} = 0$  et  $W_{CD} = ?$ ,

Étape  $D \rightarrow A$  : isochore :  $Q_{DA} = ?$  et  $W_{DA} = 0$ .

Sur un cycle,  $W_{cycle} = 0 = \underbrace{W_{AB}}_{>0} + \underbrace{W_{CD}}_{<0}$  et  $Q_C = Q_{BC} > 0$  et  $Q_F = Q_{DA} < 0$ .

De plus, il a été montré que  $\rho = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{\Delta U_{DA}}{\Delta U_{BC}} = 1 + \frac{C_v(T_A - T_D)}{C_v(T_C - T_B)}$ .

Or, de  $A$  à  $B$ , il s'agit d'une transformation adiabatique réversible donc :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_{min}}{V_{max}} \right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{T_B}{T_A} = a^{\gamma-1}$$

De même, de  $C$  à  $D$  :

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{T_C}{T_D} = \left( \frac{V_D}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{T_C}{T_D} = a^{\gamma-1}$$

Donc :

$$\rho = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 + \frac{T_A \left( 1 - \frac{T_D}{T_A} \right)}{T_B \left( \frac{T_C}{T_B} - 1 \right)}$$

Or,  $\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} \Leftrightarrow \frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B}$ , donc  $\rho = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - a^{1-\gamma}$ .

### 5) Récepteurs dithermes

Ces récepteurs ont les propriétés suivantes :  $W > 0$ ,  $Q_C < 0$  et  $Q_F > 0$ .

### a. Pompe à chaleur

Dans ce cas, la source chaude est la pièce à chauffer et la source froide est l'air extérieur.  
Ainsi,

$$e = -\frac{Q_C}{W} = -\frac{Q_C}{-Q_C - Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = e_{réversible}$$

### b. Réfrigérateur

Dans ce cas, la source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude est la pièce dans laquelle il se trouve.

Ainsi,

$$e = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{-Q_F - Q_C} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_C}{Q_F}} \leq \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1} = e_{réversible}$$

### c. Efficacité des machines réelles

- Congélateur domestique :  $e \approx 2$ ,
- Réfrigérateur :  $e \approx 8$ ,
- Pompe à chaleur :  $e \approx 4$

### d. Pseudo-sources

Lorsque la température des sources ne peut plus être considérée comme constante, les sources de chaleurs sont appelées *pseudo-sources* et il faut raisonner à partir du premier et du second principe sous forme élémentaire :  $dU = \delta W + \delta Q_C + \delta Q_F$  et  $dS = \delta S_{créée} + \delta S_{ech}$ .

## XV. Machines thermiques avec écoulement fluide

Dans ce cas, on ne peut plus appliquer directement le premier et seconde principe car il s'agit d'un système ouvert. Il est donc nécessaire de travailler sur un système fermé fictivement.

# Electrocinétique

L'*electrocinétique* est l'étude des circuits dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS).

## I. Généralités

### 1) Vocabulaire

**Réseau électrique ou Circuit** Ensemble de conducteurs reliés les uns aux autres et dans lesquels circulent les porteurs de charge.

**Dipôle** Élément d'un circuit possédant deux bornes (ou deux pôles). Chaque dipôle possède son symbole normalisé.

**Quadripôle** Composant conducteur relié au circuit par quatre bornes (deux d'entrée et deux de sortie).

**Nœud** Point de jonction entre, au moins, trois fils.

**Branche** Tronçon de circuit compris entre deux nœuds.

**Maille** Ensemble de branches formant une boucle fermée et ne passant qu'une fois par chaque nœud.

Pile	Générateur	Fil conducteur	Interrupteur		Résistance	Lampe	Diode	Diode électroluminescente (DEL)	Moteur
			ouvert	fermé					
		—							

FIGURE 22 – Représentation normalisée de quelques dipôles

### 2) Intensité du courant électrique

#### a. Nature du courant électrique

Le *courant électrique* correspond au déplacement d'ensemble de particules chargées (électrons dans les métaux, ions en solution ou dans les plasma, électrons/trous dans les semi-conducteurs).

La charge électrique est quantifiée. Elle s'exprime en Coulomb (C). De plus, elle est toujours multiple de la charge élémentaire  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

## b. Intensité du courant ou Débit de charge

L'intensité du courant électrique est la quantité algébrique d'électricité qui traverse la section d'un circuit orienté par unité de temps.

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ ou intensité moyenne } I = \frac{Q}{T}$$

L'intensité s'exprime en Ampère (A) et  $1\text{A}=1\text{C.s}^{-1}$  et est une grandeur algébrique.

La convention d'orientation correspond au sens conventionnel du courant électrique, c'est-à-dire celui du déplacement des charges positives. Ainsi, dans un conducteur métallique, le courant est orienté dans le sens opposé de celui des électrons.

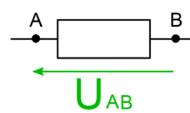
On mesure l'intensité à l'aide d'un *ampèremètre* placé en série dans le circuit.

## 3) Potentiel et Tension

### a. Définitions

À chaque point d'un circuit où circule un courant électrique on peut associer une grandeur appelée *potentiel électrique*, noté V et s'exprimant en Volts (V).

Une *tension* entre deux points d'un circuit correspond à la *différence de potentiel* entre les deux points.



$$U_{AB} = V_A - V_B$$

$$U_{AB} = V_A - V_B \text{ et va de B vers A}$$

$$U_{BA} = V_B - V_A \text{ et va de A vers B}$$

FIGURE 23 – Représentation tension

On mesure la tension à l'aide d'un *voltmètre* placé en dérivation.

### b. Masse et Terre

La *masse* désigne le fil conducteur dont le potentiel servira de référence "zéro Volt". Le choix de la masse est fait par l'expérimentateur.



FIGURE 24 – Symbole masse électrique

La *terre* représente le potentiel de la terre. L'expérimentateur peut choisir la terre comme masse électrique par le biais des différents appareils utilisés.



FIGURE 25 – Symbole terre électrique

#### 4) Les différents régimes de fonctionnement d'un circuit

**Régime permanent (ou continu)** Toutes les grandeurs sont indépendantes du temps.

Dans ce régime, les fréquences et pulsations sont nulles.

**Régime transitoire** Modification des conditions extérieures faisant passer le circuit d'un régime permanent à un autre.

**Régime forcé** Excitation périodique d'un circuit entraînant une réponse périodique du système. Il s'agit d'un cas particulier des *régimes variables*.

#### 5) Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Dans le cadre de l'ARQS, les phénomènes de propagation sont négligés.

On montre que ce cadre est vérifié lorsque  $\tau$ , le temps de propagation de l'onde dans un circuit de longueur  $L$  à la vitesse  $c$  est inférieur à la période  $T$  des phénomènes envisagés. Ainsi,

$$\tau \ll T \Leftrightarrow \frac{L}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Leftrightarrow L \ll \lambda$$

Dans cette approximation, l'intensité du courant électrique dans un circuit simple est la même en tout point du circuit.

## II. Dipôles - Présentation

### 1) Convention d'orientation

Il existe deux conventions d'orientation de tension  $U$  et d'intensité  $i$  : récepteur et générateur.

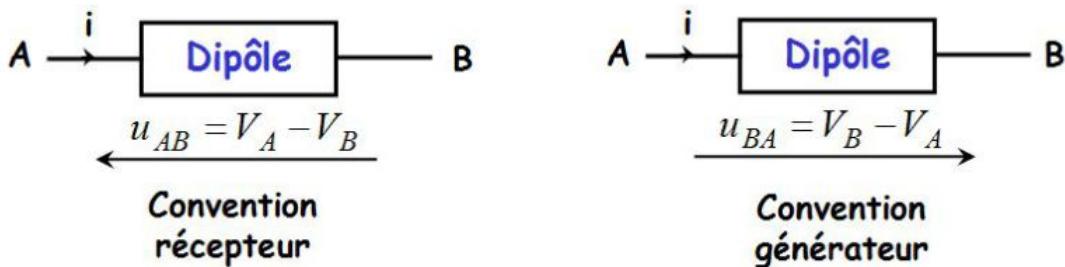


FIGURE 26 – Conventions d'orientation

La convention est choisie de façon arbitraire pour fixer un sens positif au courant.

### 2) Puissance reçue ou délivrée par un dipôle

- Soit un dipôle en convention récepteur, la puissance reçue par le dipôle est  $\mathcal{P}_R = U \times i$ . Si  $\mathcal{P}_R > 0$ , alors le dipôle est un "vrai" récepteur sinon c'est un générateur.
- Soit un dipôle en convention générateur, la puissance délivrée par le dipôle est  $\mathcal{P}_D = U \times i$ . Si  $\mathcal{P}_D > 0$ , alors le dipôle est un "vrai" générateur sinon c'est un récepteur.

La puissance s'exprime en Watts (W) ou en Volt.Ampère (V.A).

### 3) Caractéristique d'un dipôle

La *caractéristique d'un dipôle* est la représentation graphique de l'évolution de l'intensité  $i$  en fonction de la tension  $U$ .

### 4) Classification des dipôles

**Dipôle symétrique** Si on change  $i$  en  $-i$ , alors  $U$  devient  $-U$ . Sa caractéristique est symétrique par rapport à l'origine.

**Dipôle polarisé** Si on inverse les bornes du dipôle, cela change le fonctionnement du circuit.

**Dipôle actif** Dipôle pouvant fournir de l'énergie à l'extérieur pendant une durée "longue".

Sa caractéristique ne passe pas par l'origine.

**Dipôle passif** Dipôle qui reçoit de l'énergie de l'extérieur. Sa caractéristique passe par l'origine.

**Dipôle linéaire** Un dipôle est *linéaire* si la tension  $U$  et l'intensité  $i$  sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :  $\sum_n \alpha_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + \sum_k \beta_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} = 0$ .

Sa caractéristique statique (régime continu) est une droite.

Les dipôles R,L et C sont des dipôles linéaires, symétriques et passifs.

Les diodes sont des dipôles polarisés, passifs et non linéaires.

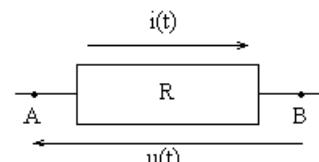
Les piles sont des dipôles polarisés, actifs et linéaires.

## III. Dipôles linéaires passifs usuels

### 1) La résistance

En convention récepteur, la *loi d'Ohm* stipule que :

$$U = R \times i$$



$R$  s'exprime en Ohm ( $\Omega$ ).

FIGURE 27 – Symbole résistance

On définit également la *conductance* par :  $G = \frac{1}{R}$  en  $\Omega^{-1}$  ou Siemens (S).

Les relations  $P = U \times i$  et  $U = R \times i$  donne :  $\mathcal{P}_R = R \times i^2 = \frac{U^2}{R}$ .

### 2) Condensateur idéal

#### a. Description

Un *condensateur* est constitué de deux plaques métalliques séparées par un isolant (milieu diélectrique).

Pour un condensateur, on a :  $q = C \times U$  où  $C$  est la capacité qui s'exprime en Farad (F).

Remarque : Un condensateur a une tension de claquage au-delà de laquelle l'isolant devient conducteur.

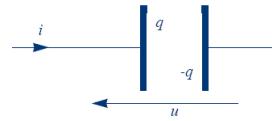


FIGURE 28 – Symbole condensateur

#### b. Relation entre $U$ et $i$

À partir de  $q = C \times U$  et  $i = \frac{dq}{dt}$ , on montre :  $i = C \frac{du}{dt}$  pour une capacité indépendante du temps.

La tension  $u_c(t)$  aux bornes d'un condensateur et sa charge  $q(t)$  sont des fonctions continues du temps.

#### c. Puissance reçue

$$\mathcal{P}_R = U \times i = U \times C \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} CU^2 \right).$$

L'énergie emmagasinée par un condensateur est donc :  $E_C = \frac{1}{2} CU^2$ .

#### d. Comportement en régime permanent

En régime permanent la tension  $U$  et l'intensité  $i$  sont constantes. Or,  $i = C \frac{du}{dt}$ . Donc si  $U$  est constante alors l'intensité est nulle ( $i = 0$ ).

En régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, ou un fil coupé.

Remarque : Un condensateur réel est représenté par un condensateur idéal placé en parallèle avec une résistance, appelée résistance de fuite.

### 3) Bobine idéale

#### a. Description et relation entre $U$ et $i$

Une bobine est un enroulement régulier de fil métallique.

En convention récepteur,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  où  $L$  est l'*inductance* en Henry (H).

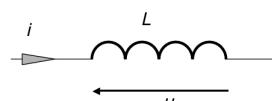


FIGURE 29 – Symbole bobine

L'intensité  $i_L(t)$  du courant traversant une bobine unique est une fonction continue du temps.

#### b. Puissance et énergie

$$\mathcal{P}_R = U \times i = L \frac{di}{dt} \times i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right).$$

L'énergie emmagasinée par une bobine est donc :  $E_L = \frac{1}{2} Li^2$ .

### c. Comportement en régime permanent

Si l'intensité  $i$  est constante alors la tension aux bornes de la bobine est nulle.

**En régime permanent, une bobine est équivalente à un interrupteur fermé ou un fil.**

Remarque : Une bobine réelle est un dipôle consistant à mettre en série une bobine idéale et une résistance. La tension aux bornes de ce dipôle est alors :  $u = L \frac{di}{dt} + Ri$ .

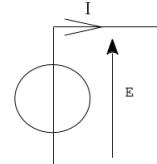
## IV. Dipôles actifs

### 1) Sources idéales de tension ou de courant

#### a. Source idéale de tension

Une telle source est modélisée par  $\forall i, U = E$ .

$E$  est appelée *force électromotrice*.



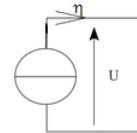
Remarque : Si on éteint la source, elle devient équivalente à un fil.

FIGURE 30 – Symbole source idéale de tension

#### b. Source idéale de courant

Une telle source est modélisée par  $\forall U, i = \eta$ .

$\eta$  est appelée *courant électromoteur*.



Remarque : Si on éteint la source, elle devient équivalente à un fil coupé.

FIGURE 31 – Symbole source idéale de courant

### 2) Source non idéale linéaire

Générateur de Thévenin : Il s'agit d'une modélisation d'une source réelle de tension.

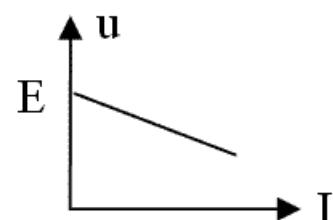
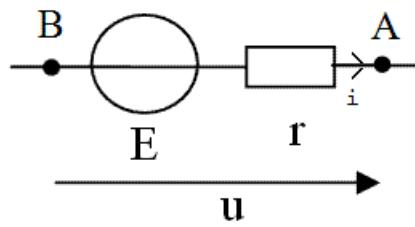


FIGURE 32 – Représentation d'un générateur de Thévenin

Pour une telle source,  $U = E - ri$ .

### 3) Source non linéaire - dipôle actif

Pour de telle source, il n'existe pas de relation simple entre la tension  $U$  et l'intensité  $i$ , c'est par exemple le cas pour une photodiode.

### 4) Théorème de superposition

La réponse d'un réseau linéaire à un ensemble de sources peut être considérée comme la superposition des réponses de chaque source libre supposée seule dans le réseau, en ayant éteint toutes les autres sources libres.

## V. Lois de Kirchhoff

### 1) Loi des nœuds

Soit un nœud N dans un circuit quelconque. Il arrive autant d'électrons qu'il en repart au niveau du nœud N.

Loi des nœuds :

La somme algébrique des courants en un nœud donné est nulle.

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

où  $\varepsilon_k = +1$  si le courant arrive au nœud et -1 s'il en sort.

### 2) Loi des mailles

Loi des mailles :

Un maille étant fermée, la somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant la maille dans un sens donné est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$$

où  $\varepsilon_k = +1$  si  $u_k$  est dans le sens de la maille et -1 sinon.

Il existe également la *loi de Pouillet* issue de la loi des mailles pour des conducteurs ohmiques :

$$I = \frac{\sum_k \varepsilon_k e_k}{\sum_k R_k}$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si  $e_k$  est orientée dans le sens de I.

## VI. Association de résistances

### 1) Association série

Si plusieurs résistances  $R_i$  sont en série (parcourue par le même courant) alors elles sont équivalentes à une unique résistance  $R_{éq}$  telle que  $R_{éq} = \sum_i R_i$ .

### 2) Association parallèle

Si plusieurs résistances  $R_i$  sont en parallèle (même tension à leurs bornes) alors elles sont équivalentes à une unique résistance  $R_{éq}$  telle que  $\frac{1}{R_{éq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ .

## VII. Ponts diviseurs

### 1) Pont diviseur de tension



FIGURE 33 – Pont diviseur de tension

*Démonstration :*

$U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)i$  d'après la loi des mailles, loi d'Ohm  
et l'association de résistances en série

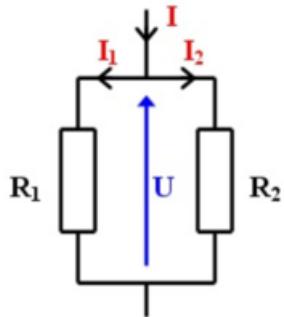
$$\text{Donc, } i = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

*De plus,*  $U_1 = R_1 i$  et  $U_2 = R_2 i$  d'après la loi d'Ohm

$$\text{D'où, } U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \text{ et } U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

*Qed*

## 2) Pont diviseur de courant



$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

FIGURE 34 – Pont diviseur de tension

*Démonstration :*

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U \text{ d'après la loi des nœuds et loi d'Ohm}$$

$$\text{Donc } i_1 = \frac{i}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \times \frac{1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \text{ et } i_2 = \frac{i}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \times \frac{1}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

*Qed*

## VIII. Point de fonctionnement d'un circuit

On appelle *point de fonctionnement* (s'il existe) d'un circuit le point de coordonnées  $(i_p, U_p)$  correspondant à l'intersection des caractéristiques des deux dipôles constituant le circuit.

On remarque que l'un des deux dipôles est en convention générateur et l'autre en convention récepteur.

## IX. Circuits linéaires du premier ordre en régime transitoire

### 1) Le régime libre

*Étude du circuit sans générateur*

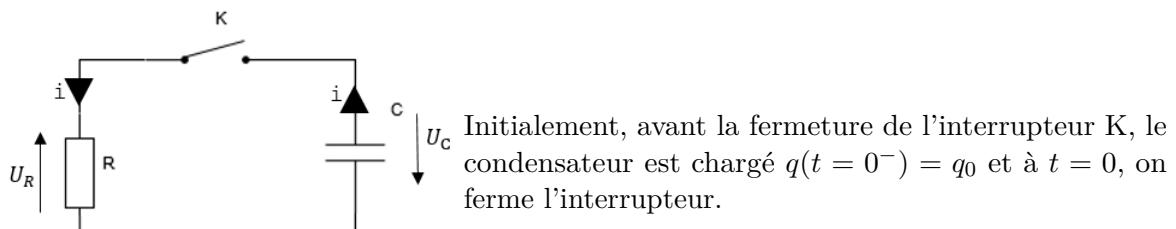


FIGURE 35 – Circuit RC en régime libre

### a. Énergie emmagasinée et continuité

$E = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ . L'énergie est une grandeur continue, donc  $U_C(t)$  et  $q(t)$  sont des fonctions continues du temps.

### b. Équation différentielle et résolution

D'après la loi des mailles,  $U_R + U_C = 0$ . D'après la loi d'Ohm,  $U_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$  et  $U_C = \frac{q}{C}$ .  
D'où  $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$ .

On définit la *constante de temps*  $\tau = RC$ .

Avec les conditions initiales, on montre que  
 $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Remarque : Équation de la tangente :

$$q_{tan}(t) = -\frac{q_0}{\tau}t + q_0$$

$\tau$  est le temps caractéristique de la décharge.

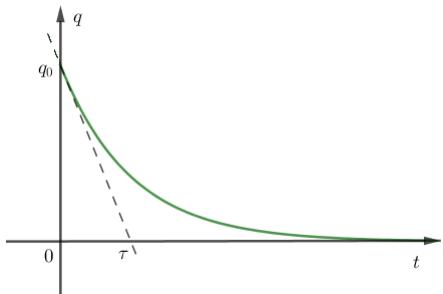
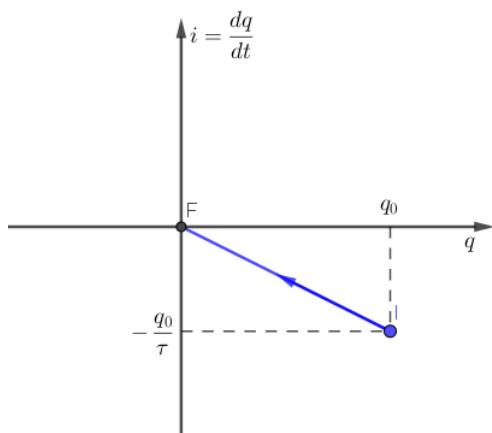


FIGURE 36 – Évolution de la charge lors de la décharge d'un condensateur

### c. Trajectoire de phase

On trace  $\frac{dq}{dt} = i$  en fonction de  $q$ . Ici, on a  $\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}$ . De plus, à l'instant initial  $t = 0$ ,  $q(t = 0^+) = q_0$  et  $i(t = 0^+) = \frac{dq}{dt}(t = 0^+) = -\frac{q_0}{\tau}$ . À l'instant final,  $q(t \rightarrow +\infty) = 0$  et  $i(t \rightarrow +\infty) = 0$ .



La pente est de  $-\frac{1}{\tau}$ , où  $\tau = RC$ .  
Le point I correspond à l'instant initial et le point F à l'instant final.

Remarque : Une trajectoire de phase est toujours orientée.

FIGURE 37 – Trajectoire de phase circuit RC en régime libre

#### d. Intensité dans le circuit

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -\frac{q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

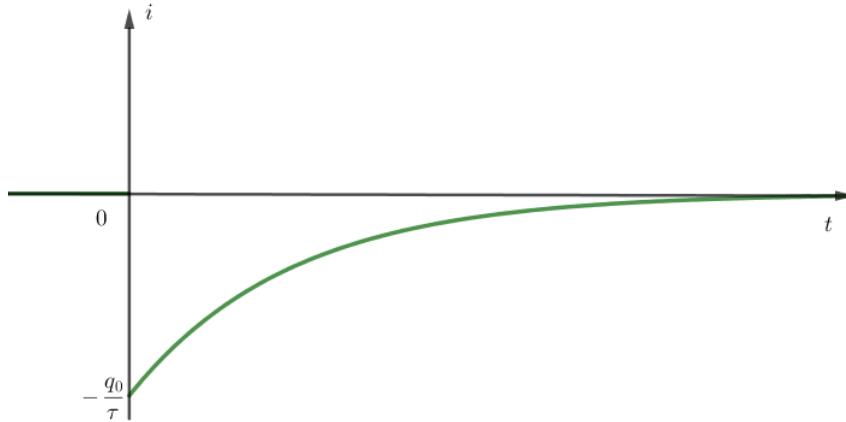


FIGURE 38 – Évolution du courant en fonction du temps pour un circuit RC série en régime libre

#### e. Étude énergétique

Loi des mailles :  $U_C + U_R = 0 \Leftrightarrow U_C i + U_R i = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_R = 0$ .

Ainsi, le condensateur délivre une puissance électrique qui est dissipée dans la résistance par effet Joule.

#### 2) Circuit RC soumis à un échelon de tension

On étudie le circuit suivant en le soumettant à un échelon  $e(t) = E, t \geq 0$  et nul sinon. Initialement, le condensateur est déchargé.

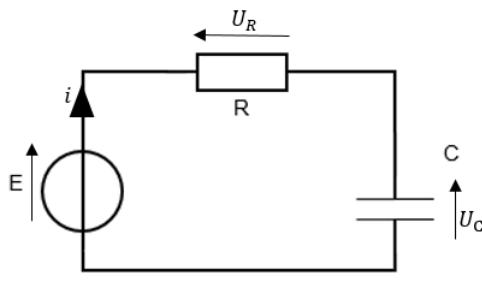


FIGURE 39 – Circuit RC soumis à un échelon de tension

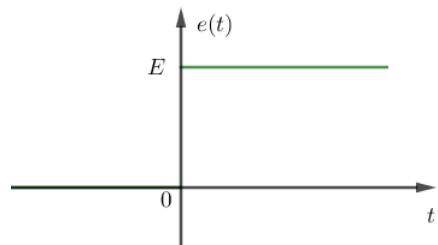


FIGURE 40 – Échelon de tension en fonction du temps

La loi des mailles donne :

$$e(t) = U_R(t) + U_C(t) = Ri(t) + U_C(t) = R \frac{dq(t)}{dt} + U_C(t) = RC \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t)$$

Donc, pour  $t \geq 0$ ,  $\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{U_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$  avec  $\tau = RC$ .

Ainsi,  $U_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ .

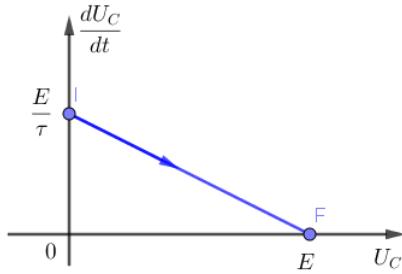


FIGURE 41 – Trajectoire de phase circuit RC soumis à un échelon

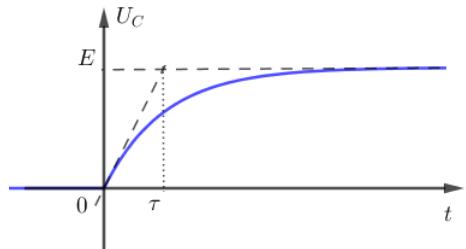


FIGURE 42 – Évolution de  $U_C$  en fonction du temps pour un circuit RC soumis à un échelon de tension (Charge d'un condensateur)

On peut remonter au courant  $i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Au niveau énergétique, on a :  $U_R + U_C = E \Leftrightarrow U_R i + U_C i = E i \Leftrightarrow \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_C = \mathcal{P}_E$ .

$$E_{géné} = \int_0^{+\infty} E i(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \tau = CE^2.$$

$$E_C = \frac{1}{2} C (U_C(t \rightarrow +\infty)^2 - U_C(t=0)^2) = \frac{1}{2} CE^2 = E_R.$$

Une étude expérimentale consiste à soumettre un circuit RC série à une tension créneau, on observe alors une alternance de charge et de décharge du condensateur.

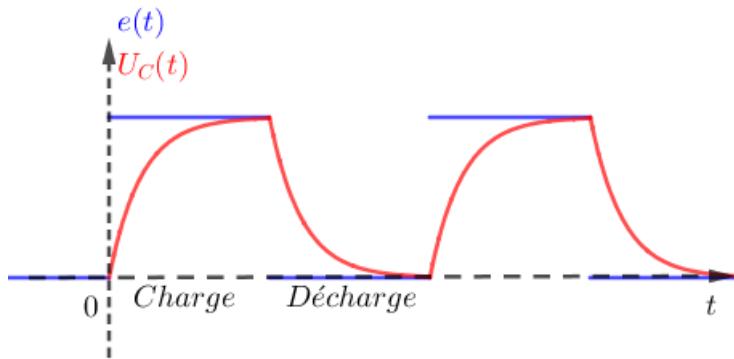


FIGURE 43 – Circuit RC soumis à une tension créneau

Remarque : Si la période du signal créneau est trop petite devant  $\tau$  alors les charges et décharges sont incomplètes.

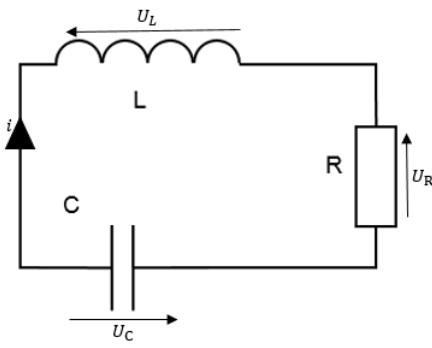
Remarque : Si  $R$  et  $C$  augmentent alors  $\tau$  augmente également, les phases de charges et décharges sont alors plus lentes.

Remarque : Le circuit  $RL$  série peut également être étudié. Dans ce cas, on trouve un temps caractéristique  $\tau = \frac{L}{R}$ .

## X. Oscillateurs en électrocinétique et en mécanique

### 1) Similitude des comportements électrique et mécanique

On cherche à mettre en évidence les similitudes entre le comportement d'un circuit RLC série et un système masse ressort.



$$\begin{aligned} U_R + U_C + U_L &= 0 \text{ d'après la loi des mailles} \\ \Leftrightarrow Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

FIGURE 44 – Circuit RLC série

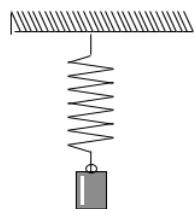


FIGURE 45 – Système masse ressort

On s'intéresse à la masse dans un référentiel galiléen. Le poids ( $\vec{P}$ ), la force de rappel du ressort ( $\vec{F}$ ) et les frottements ( $\vec{f}$ ) s'appliquent sur cette masse

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} \text{ d'après la seconde loi de Newton} \\ \text{En projetant sur l'axe } z, \quad m\ddot{z} &= mg - k(l - l_0) - h\dot{z} \\ \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z &= 0 \text{ en posant } z = l - l_{eq} \end{aligned}$$

Électrocinétique	Mécanique	Électrocinétique	Mécanique
$q(t)$ (Charge)	$z(t)$ (Position)	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$	$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0$
$i(t) = \frac{dq}{dt}$ (Intensité)	$v(t) = \frac{dz}{dt}$ (vitesse)	$L$ (Inductance)	$m$ (Masse)
$R$ (Résistance)	$h$ (Coefficient de frottement)	$\frac{1}{C}$ (Inv capacité)	$k$ (Const de raideur)

TABLE 1 – Tableau Analogie Électrocinétique et Mécanique

**2) Solution de  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$**

**a. Cas de l'équation homogène**

On écrit son équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \text{ dont le discriminant est } \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

On distingue alors trois cas :

Régime apériodique :  $\Delta > 0$  :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} > 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}.$$

Il y a alors deux solutions :

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

La solution est alors :  $X(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées grâce aux conditions initiales.

Régime apériodique critique :  $\Delta = 0$  :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} = 1 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}.$$

La racine double est alors :  $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ .

La solution :  $X(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées grâce aux conditions initiales.

Régime pseudo périodique :  $\Delta < 0$  :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$$

Il y a deux racines doubles complexes :

$$r_{\pm} = \alpha \pm j\beta \text{ avec } \alpha = -\frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

La solution de l'équation différentielle est :  $X(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$  avec des constantes  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ . Une autre écriture est :  $X(t) = Ke^{\alpha t} (\cos(\beta t) + \varphi)$  où  $(K, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ .

**b. Cas d'une équation non-homogène**

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = f(t) \text{ où } f \text{ est une fonction quelconque}$$

Dans ce cas, la solution est  $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$ .

**3) Cas particulier : l'oscillateur harmonique**

Électrocinétique ( $R=0$ ) et en mécanique (Pas de frottements).

Équation différentielle :  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$

Équation caractéristique :  $r^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm j\omega_0$ .

La solution est  $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  ou  $X(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

Remarque : L'équation différentielle  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et la solution est donnée par :  
 $X(t) = A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t) + \frac{\lambda}{\omega_0^2}$ .

#### 4) Cas du circuit RLC série

L'équation établie précédemment est :  $\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0$ . On identifie donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La solution à l'équation différentielle est donc :  $U_C(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$  avec  $\alpha = -\frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$  (Pseudo-période) et  $\Delta = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$ .

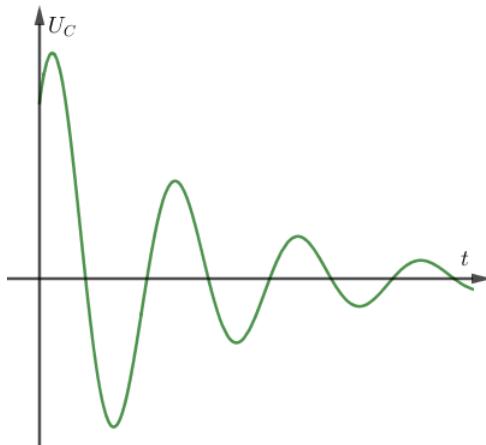


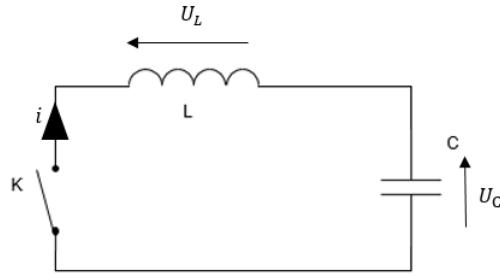
FIGURE 46 – Évolution de  $U_C$  en fonction du temps pour un circuit RLC en régime pseudo-périodique

L'étude énergétique est donnée par :

$$U_R + U_C + U_L = 0 \Leftrightarrow U_R i + U_C i + U_L i = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_L = 0$$

La puissance électrique est emmagasinée dans le condensateur et la bobine et est dissipée dans la résistance par effet Joule.

## 5) Cas de l'oscillateur harmonique : circuit LC



$$\begin{aligned}
 U_L + U_C &= 0 \text{ d'après la loi des mailles} \\
 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + U_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{U_C}{LC} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \omega_0^2 U_C &= 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}
 \end{aligned}$$

FIGURE 47 – Circuit LC série

La solution de cette équation différentielle est donnée par :  $U_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . En considérant  $U_C(t=0) = E$  et  $i(t=0) = 0$  (imposé par la continuité dans la bobine), on trouve  $U_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$ . Ainsi,  $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ .  $U_C$  et  $i$  étant des grandeurs sinusoïdales, on parle de circuit oscillant.

D'un point de vue énergétique :  $E_C = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}CE^2 \cos^2(\omega_0 t)$  (énergie emmagasinée par le condensateur) et  $E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2E^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CE^2 \sin^2(\omega_0 t)$  car  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  (énergie emmagasinée par la bobine). L'énergie totale est donc conservée est constante  $E = E_C + E_L = \frac{1}{2}CE^2$ .

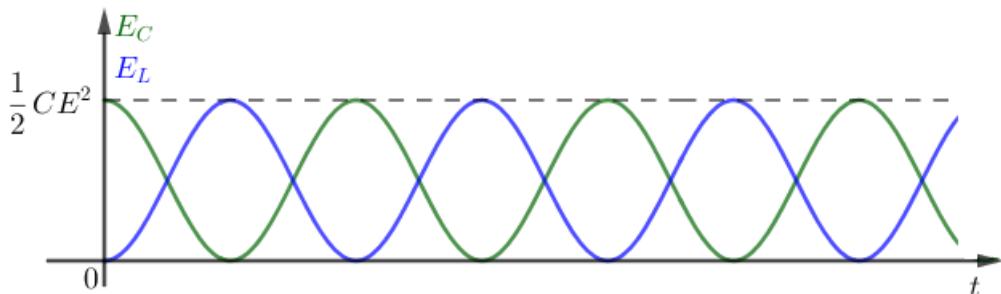


FIGURE 48 – Variations de  $E_C$  et  $E_L$  pour un circuit LC série en régime libre

## 6) Portraits de phase d'un oscillateur

Rappels mathématiques :

- Équation d'un cercle de centre  $(x_C, y_C)$  et de rayon  $r$  :  $r^2 = (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2$ ,
- Équation d'une ellipse de demi petit axe  $b$  et de demi grand axe  $a$  :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

### a. Cas de l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle est :  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$  avec pour conditions initiales :  $X(t=0) = X_0$  et  $\dot{X}(t=0) = 0$ . Donc  $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$ .

La trajectoire de phase consiste à tracer  $\dot{X}$  en fonction de  $X$ . Or,  $\dot{X}(t) = -X_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ .

Ainsi, on a :

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{X}}{X_0 \omega_0}\right)^2 = 1$$

On obtient donc l'équation d'une ellipse de demi axes  $X_0$  et  $X_0 \omega_0$ .

On appelle *portrait de phase* la superposition de plusieurs trajectoires de phase pour des conditions initiales différentes.

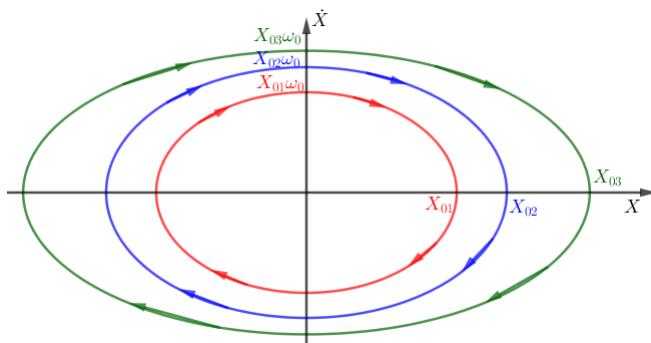


FIGURE 49 – Portrait de phase pour un oscillateur harmonique

Remarque : Le sens de parcours est le sens horaire car lorsque  $\dot{X} > 0$  alors  $X$  augmente et quand  $\dot{X} < 0$  alors  $X$  diminue.

### b. Cas des oscillateurs amortis

On ne peut pas établir d'expression littérale des trajectoires de phase. On retiendra tout de même que les trajectoires ne sont pas fermées et qu'il y a convergence vers le point d'équilibre.

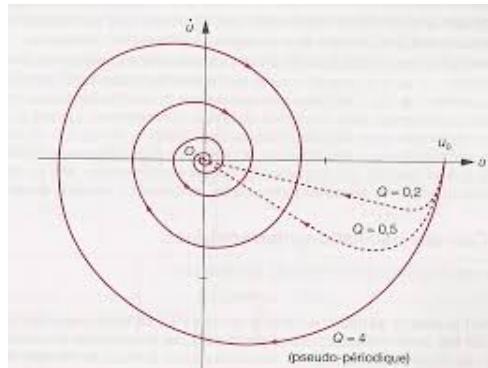


FIGURE 50 – Portrait de phase d'un oscillateur amorti

*Remarque :*  $Q = 0.2$  correspond à un régime apériodique ;  $Q = 0.5$  au régime apériodique critique et  $Q = 4$  à un régime pseudo-périodique.

## XI. Oscillateurs électrique et mécanique en régime forcé

### 1) Expériences introductives

En mécanique, système masse+ressort relié à un moteur et plongé dans un fluide (air ou eau).

En électricité, circuit RLC série aux bornes de la résistance et en entrée une tension créneau.

On retient que pour tout oscillateur forcé en électricité ou en mécanique, toutes les grandeurs associées au système sont de même fréquence que le système excitateur.

### 2) Description des signaux sinusoïdaux

Soit un signal  $S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . L'*amplitude* est donnée par  $A$ , c'est-à-dire que  $S(t) \in [-A; A]$ .  $\omega$  représente la *pulsation* telle que  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  où  $T$  est la *période* et  $f$  la *fréquence*.  $\varphi$  représente la *phase à l'origine*.

La *valeur moyenne* est définie comme :

$$S_{moy} = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal,  $S_{moy} = 0$ . Si jamais il y a un offset alors :  $\langle S(t) \rangle = \langle S_0 \rangle$ .

La *valeur efficace* est définie comme :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal,  $S_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ .

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} S_{eff}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt \text{ car } \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \text{Donc, } S_{eff}^2 &= \frac{A^2}{2T} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right]_0^T = \frac{A^2}{2T} \left( T + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right) \\ \Leftrightarrow S_{eff}^2 &= \frac{A^2}{2T} \left( T + \frac{1}{2\omega} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right) \text{ car } \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{Donc, } S_{eff}^2 &= \frac{A^2}{2T} T = \frac{A^2}{2} \Rightarrow S_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

*Qed*

### Théorème de Fourier :

Soit  $s(t)$  une fonction réelle périodique (de période  $T$ ).  $s(t)$  présente un nombre fini de discontinuités, de minima et de maxima sur une période et  $\int_0^T |s(t)|dt$  a une valeur finie, alors  $s(t)$  est développable de façon unique en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

Le terme  $H_n = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  est appelé *harmonique de rang n*. Le terme  $H_1$  est appelé *fondamental*.

On peut également écrire  $s(t)$  sous la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Si la fonction  $s(t)$  est paire (ie  $s(t) = s(-t)$ ) alors tous les coefficients  $b_n$  sont nuls.

Si la fonction  $s(t)$  est impaire (ie  $s(-t) = -s(t)$ ) alors tous les coefficients  $a_n$  sont nuls.

Si  $s\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = s(t)$ , alors seuls les harmoniques pairs existent.

Si  $s\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -s(t)$  alors seuls les harmoniques de rangs impairs existent.

## 3) Puissance moyenne

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie. Par définition, la puissance instantanée est :  $p(t) = Ks^2(t)$  et  $\mathcal{E} = \int p(t)dt = K \int s^2(t)dt$ .

La puissance moyenne est donc donnée par :

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle Ks^2(t) \rangle = K \langle s^2(t) \rangle = K \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

### a. Relation de Parseval

Soit  $s(t)$  un signal périodique, de période  $T$ , de décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

La moyenne quadratique de  $s(t)$  est la somme des moyennes quadratiques de ses composantes sinusoïdales, ie :

$$s^2(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} \text{ car } \langle \cos^2(n\omega t) \rangle_T = \langle \sin^2(n\omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$$

La puissance moyenne d'un signal périodique  $s(t)$  est donc la somme des puissances moyennes de chacun des termes harmoniques composant le signal.

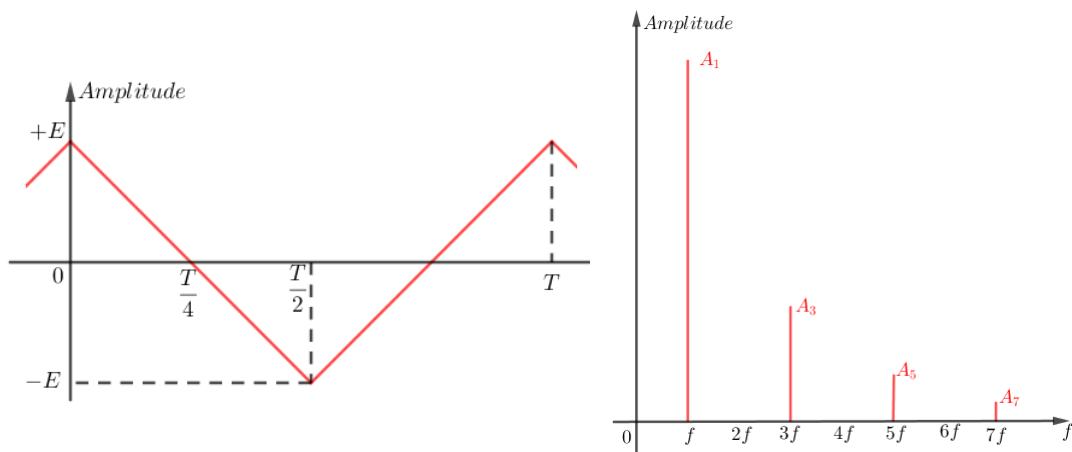
## 4) Étude fréquentielle

L'ensemble des amplitudes  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , forme le *spectre de fréquences* du signal  $s(t)$ .

La représentation spectrale ou spectre en fréquence d'un signal périodique, de période  $T$ , est un diagramme en bâtons donnant les amplitudes  $A_n$  en fonction de  $nf$  ou de  $n\omega$  (voir Figure 54 page 105). La raie de fréquence nulle donne la composante continue du signal et celle de fréquence  $f$  donne le fondamental du signal.

## 5) Décomposition en série de Fourier

### a. Signal périodique triangulaire



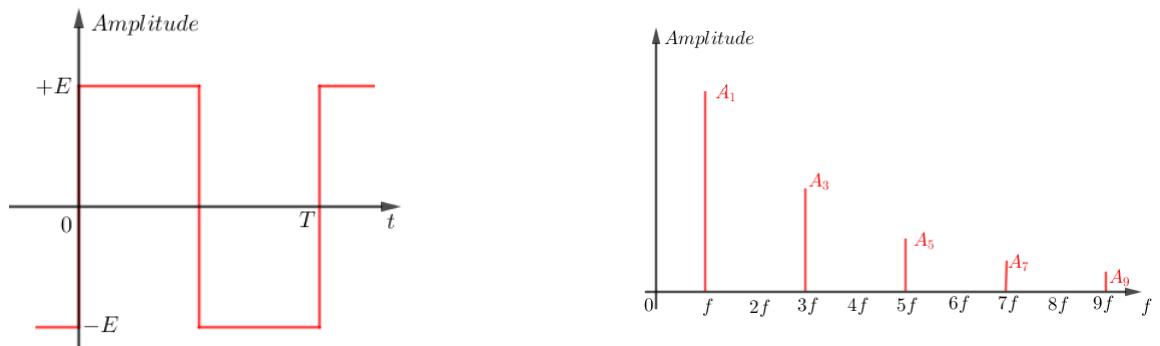
$$\langle s(t) \rangle = A_0 = 0.$$

$$s(t) = s(-t) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$$

$$s\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -s(t), \text{ donc seuls les harmoniques impairs existent.}$$

Pour un signal triangulaire,  $a_n = A_n = \frac{8E}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ . Ainsi, l'amplitude décroît rapidement avec  $n$ . C'est pourquoi le signal triangulaire contient peu (ou pas) d'harmoniques de rang élevé. Il s'agit d'un signal continu avec seulement des ruptures de pentes, pas de discontinuité. On parle de *son pauvre*.

### b. Signal périodique rectangulaire



$$\langle s(t) \rangle = A_0 = 0.$$

$$s(-t) = -s(t) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0.$$

$s\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -s(t)$ . Donc seuls les harmoniques impairs existent.

Pour un signal rectangulaire,  $A_n = \frac{4E}{\pi} \frac{1}{n}$ . Le signal rectangulaire contient donc plus d'harmoniques de rang élevé caractéristiques des signaux sinusoïdaux de hautes fréquences, qui traduisent des discontinuités brutales. Il s'agit d'un *son riche*.

Plus un signal présente des variations rapides (discontinuités) plus le spectre du signal est riche en signaux sinusoïdaux de hautes fréquences, ie d'harmoniques de rang élevé.

## 6) Synthèse de Fourier

### a. Synthèse d'un signal sans discontinuité

Soit un signal périodique  $s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ . On note  $s_N(t)$  la série de Fourier du signal limitée à ses  $N$  premiers termes.

En pratique, la somme des premiers harmoniques suffit pour reconstituer de façon satisfaisante un signal sans discontinuité. Ceci est aussi valable pour des signaux présentant uniquement des discontinuités de pentes (signal triangulaire).

### b. Synthèse d'un signal avec des discontinuités

En un point de discontinuité, l'écart entre les graphes de  $s_N(t_0)$  et de  $s(t_0)$  est irréductible, quel que soit le nombre  $N$  d'harmoniques considéré : ceci est nommé *phénomène de Gibbs*.

## 7) Représentation complexe

### a. Rappels mathématiques

Un nombre complexe peut se mettre sous deux formes différentes :  $\underline{z} = \Re(\underline{z}) + j\Im(\underline{z})$  (forme algébrique) ou  $\underline{z} = r e^{j\varphi}$  (forme polaire). ( $r$  est appelé *module* et  $\varphi$  *argument*).

On montre :  $\cos(\varphi) = \frac{\Re(\underline{z})}{r} = \frac{\Re(\underline{z})}{|\underline{z}|}$ ,  $\sin(\varphi) = \frac{\Im(\underline{z})}{r} = \frac{\Im(\underline{z})}{|\underline{z}|}$  et  $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\Im(\underline{z})}{\Re(\underline{z})}$ .

### b. Notations complexes

On associe à  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ , le complexe  $\underline{u} = U e^{j\omega t + \varphi_u} = \underline{U} e^{j\omega t}$  avec  $\underline{U} = e^{j\varphi_u}$ .

On associe à  $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ , le complexe  $\underline{i} = I e^{j\omega t + \varphi_i} = \underline{I} e^{j\omega t}$  avec  $\underline{I} = e^{j\varphi_i}$ .

$\underline{U}$  et  $\underline{I}$  sont appelées *amplitudes complexes*.

Remarque : On retrouve  $u(t)$  (rep.  $i(t)$ ) en prenant la partie réelle de  $\underline{u}$  (resp.  $\underline{i}$ ).

### c. Intérêts de cette représentation

La dérivation :

$$\frac{du}{dt} = j\omega u$$

L'intégration :

$$\int \underline{u} dt = \frac{\underline{u}}{j\omega}$$

### d. Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

On associe à une grandeur un vecteur tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  de norme l'amplitude du signal.

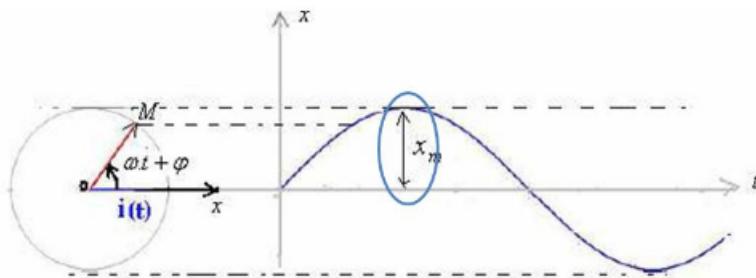


FIGURE 51 – Représentation de Fresnel

### e. Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchronisés

On s'intéresse aux signaux  $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  et  $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ .

Si  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0[2\pi]$ , on dit que les signaux sont en *phases*. Dans ce cas, le décalage temporel est un nombre entier de périodes.

Si  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi[2\pi]$ , on dit que les signaux sont en *opposition de phases*. Dans ce cas, le décalage temporel est d'une demi-période (plus un nombre entier de périodes).

Si  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ , on dit que les signaux sont en *quadrature de phases*. Dans ce cas, le décalage temporel est d'un quart-période (plus un nombre entier de périodes).

On retiendra  $\Delta\varphi = 2\pi \times \Delta t \times f$ .

Pour repérer si un signal est en avance sur un autre, on regarde sur une montée ou une descente lequel coupe en premier l'axe des abscisses.

## 8) Impédances complexes

### a. Définition

On considère un dipôle en convention récepteur. On définit son *impédance complexe* par :

$$Z = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U e^{j\omega t}}{I e^{j\omega t}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Remarque : On définit parfois l'admittance comme étant l'inverse de l'impédance.

Remarque :  $u$  et  $i$  sont en phase uniquement si  $\underline{Z}$  est réelle.

### b. Cas des dipôles usuels

Nom	Formule de base	Formule complexe	Impédance complexe	Déphasage
Résistance	$U = R \times i$	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{Z}_R = R$	0
Bobine	$U_L = L \frac{di}{dt}$	$\underline{U}_L = Lj\omega \underline{i}$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$i_L = C \frac{du}{dt}$	$\underline{i} = Cj\omega \underline{u}_C$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

TABLE 2 – Impédances complexes des dipôles usuels

### c. Association de dipôles

Si des dipôles  $\underline{Z}_k$  sont associés en série alors ils peuvent être remplacés par un dipôle d'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  telle que :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

Si les dipôles  $\underline{Z}_k$  sont associés en parallèle alors ils peuvent être remplacés par un dipôle d'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

## 9) Outils pour l'étude des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

### a. Loi des nœuds

Loi des nœuds :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$$

où  $\varepsilon_k = +1$  si le courant arrive au nœud et -1 s'il en sort.

## b. Loi des mailles

Loi des mailles :

Dans une maille, on choisit arbitrairement un sens de parcours et on vérifie que la somme des tensions dans le sens de la maille est égale à la somme des tensions qui sont dans le sens opposé, autrement dit :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$$

où  $\varepsilon_k = +1$  si  $\underline{u}_k$  est dans le sens de la maille et -1 sinon.

## c. Ponts diviseurs

On montre (comme pour la partie avec les résistances) que  $\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$  (pont diviseur de tension) et  $\underline{i}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}$  (pont diviseur de courant).

## XII. Étude d'un oscillateur électrique : circuit RLC série

On soumet une tension d'entrée  $e(t)$  sinusoïdale.

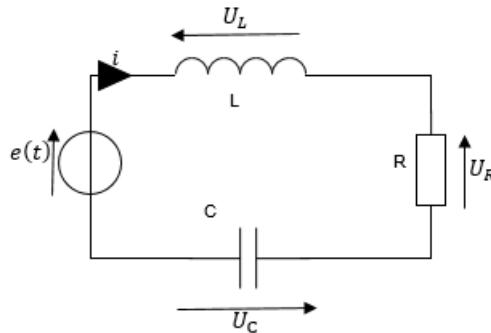


FIGURE 52 – Circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale

### a. Impédance du circuit

L'impédance équivalente des trois dipôles en série est donc :

$$\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\text{Donc, } |\underline{Z}_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \text{ et } \tan(\varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$|\underline{Z}_{eq}|$  est minimale lorsque  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , la *pulsation propre* et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ , le *facteur de qualité*.

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{eq} &= R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_{eq} &= R \left( 1 + j \left( \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right) \right) \\ \text{Or, } \frac{L\omega}{R} &= \frac{L\omega_0}{R} \times \frac{\omega}{\omega_0} = Qx, \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0} \\ \text{De même, } \frac{1}{RC\omega} &= \frac{1}{RC\omega_0} \times \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{Q}{x} \\ \text{Donc, } \underline{Z}_{eq} &= R \left( 1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) \Rightarrow |\underline{Z}_{eq}| = R \sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}\end{aligned}$$

### b. Résonance en intensité

L'amplitude complexe de l'intensité est donnée par :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{\underline{U}}{R \left( 1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)}$$

On en déduit donc l'amplitude réelle comme :

$$I(x) = \frac{U}{R \sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0/+ \infty} 0$$

Pour  $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$ , l'amplitude réelle de l'intensité passe par un maximum, c'est ce que l'on appelle la *résonance en intensité*.

La largeur du pic en intensité dépend du facteur de qualité. On définit alors une bande passante pour les pulsations  $\omega$  comprises entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectant la condition  $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \leq I(\omega) \leq I_{max}$ . Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont appelées *pulsations de coupure*.

Remarque : Le tracé en  $x$  correspond à une normalisation du tracé fréquentiel.

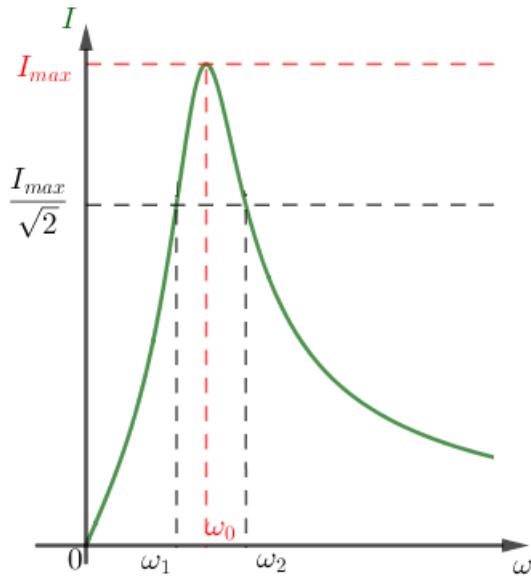


FIGURE 53 – Évolution de l'intensité en fonction de la pulsation pour un circuit RLC série

*Démonstration :*

*Dans cette démonstration, on cherche à déterminer les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  correspondant aux deux pulsations de coupure. On cherche donc les solutions de l'équation :*

$$I(x) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q} \Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

*Le discriminant associé vaut :  $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$  pour observer une résonance.*

$$\text{Les solutions mathématiques sont : } x_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

*Les solutions physiquement acceptables sont positives donc :*

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta} \right) \text{ et } x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta} \right)$$

*Qed*

La largeur de la bande est donnée par :  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

On peut s'intéresser à d'autre type de résonance comme la résonance en tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série.

# Filtrage

Un *filtre* en électrocinétique permet d'amplifier ou d'atténuer certaines composantes fréquentielles. Il s'agit d'un quadripôle. Les signaux d'entrée et de sortie sont de même fréquence (pulsation) si l'on s'agit d'une filtration linéaire.

## I. Généralités sur le filtrage analogique

Un signal est dit *analogique* lorsqu'il varie continûment au cours du temps. Un *filtre* est un quadripôle. On appelle  $e(t)$  le signal d'entrée et  $s(t)$  celui de sortie.

### 1) Fonction de transfert

En considérant,  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$  associé à  $\underline{e} = E e^{j(\omega t + \varphi_e)}$  et  $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$  associé à  $\underline{s} = S e^{j(\omega t + \varphi_s)}$ , la *fonction de transfert* est définie comme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = |\underline{H}| e^{j \arg(\underline{H})}$$

### 2) Caractéristiques d'un filtre

#### a. Gain d'un filtre

On appelle *gain*, le rapport suivant :

$$G = |\underline{H}| = \frac{S}{E}$$

Il existe quatre types de filtres :

- Les filtres passe-bas : (bande passante  $[0, f_{ch}]$ ) transmettent la composante continue et les harmoniques de fréquences inférieures à  $f_{ch}$  et coupent les harmoniques de fréquences supérieures.
- Les filtres passe-haut : (bande passante  $[f_{cb}, +\infty]$ ) transmettent les harmoniques de fréquences supérieures à  $f_{cb}$  et coupent la composante continue et les harmoniques de fréquences inférieures à  $f_{cb}$ .
- Les filtres passe-bande : (bande passante  $[f_{cb}, f_{ch}]$ ) transmettent les harmoniques dont les fréquences sont contenues dans la bande passante et coupent la composante continue et les harmoniques en dehors de la bande passante. *Un filtre passe-bande à bande étroite ne transmet que les harmoniques proches de la fréquence de résonance du filtre.*
- Les filtres coupe-bande : (bande coupée  $[f_{cb}, f_{ch}]$ ) transmettent les harmoniques en dehors de la bande coupée (dont la composante continue) et coupent les harmoniques dont les fréquences sont dans la bande coupée.

### b. Pulsations de coupure et bande passante

La ou les *pulsion(s) de coupure* est (sont) définie(s) comme :  $G(\omega = \omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ .

On appelle *bande passante* est définie comme étant l'intervalle de pulsations telles que :  
 $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{max}$ .

### c. Phase $\varphi$

$\varphi = arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e$  correspond au déphasage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

## 3) Détermination rapide de la nature d'un filtre

Pour déterminer rapidement la nature d'un filtre, on utilise les équivalents des dipôles à hautes et basses fréquences.

Un condensateur est équivalent à un fil coupé à basses fréquences et à un fil à hautes fréquences.

Une bobine est équivalente à un fil à basses fréquences et à un fil coupé à hautes fréquences.

Enfin, on applique la loi des mailles pour étudier la valeur du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

## 4) Représentation de Bode d'une fonction de transfert

On définit, pour des questions pratiques, le *gain en dB* comme :

$$GdB = 20 \log G = 20 \log (|\underline{H}|) = 20 \log \left( \frac{S}{E} \right)$$

Remarque : Une multiplication par 10 du gain correspond à une augmentation de 20 dB de  $GdB$ .

Remarque : On trace les diagrammes de Bode sur du papier semi-logarithmique pour avoir une grande échelle fréquentielle.

Remarque : On utilise un facteur 20 à on parle la  $GdB$  avec un facteur 10 est défini à partir d'un rapport de puissance qui est en tension au carré.

Le *diagramme de Bode* consiste à tracer le  $GdB$  en fonction du  $\log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  et  $\varphi$  en fonction du  $\log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ , où  $\omega_0$  est la pulsation caractéristique du filtre.

On appelle *décade* l'intervalle de fréquences comprises entre  $f$  et  $10f$ .

On appelle *octave* l'intervalle de fréquences comprises entre  $f$  et  $2f$ .

On appelle *pulsation de coupure* la pulsation  $\omega_C$  telle que :  $G(\omega_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ . Ainsi étant donné le passage au log,  $GdB(\omega_C) \approx GdB_{max} - 3dB$ .

On appelle *bande passante* l'intervalle des fréquences telles que :  $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G \leq G_{max}$ . Ainsi,  $GdB_{max} - 3dB \leq G \leq GdB_{max}$ .

Un *filtre* est un quadripôle dont la grandeur de sortie n'est que faiblement atténuée à l'intérieur de la bande passante et fortement atténuée en dehors de cette bande. Les fréquences en dehors de la bande passante sont dites *filtrées* ou *coupées*.

Un filtre est dit *passif* lorsqu'il ne possède pas de source propre d'énergie (il n'y a que des dipôles R,L et C). Un filtre est dit *actif* lorsqu'il possède une source propre d'énergie. C'est le cas dans amplificateurs opérationnels (ou amplificateurs linéaires intégrés) par exemple.

## 5) Filtrage d'un signal périodique quelconque

### a. Intérêt de l'étude en régime sinusoïdal

Tout signal périodique peut se décomposer en une somme de série de signaux sinusoïdaux (discrète ou continue).

### b. Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique est défini par la répétition d'un motif de durée  $T$ , appelée *période*.

On admet que tout signal périodique de période  $T$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s(t) = S_{moy} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \text{ avec } \omega_k = k \times \omega_0$$

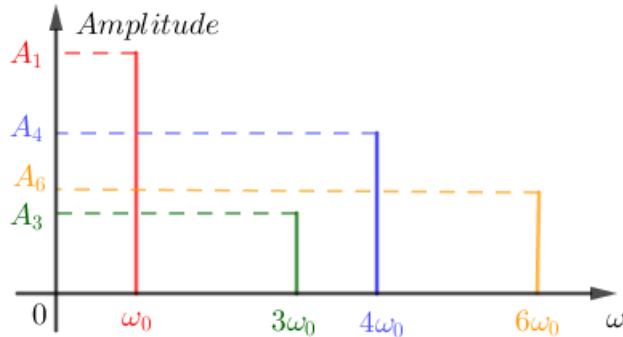


FIGURE 54 – Représentation spectrale

## 6) Réponse d'un filtre

### a. Importance de la linéarité

Considérons un filtre tel que :

- si  $e_1(t)$  est le signal d'entrée, alors  $s_1(t)$  est celui de sortie
- si  $e_2(t)$  est le signal d'entrée, alors  $s_2(t)$  est celui de sortie

Ce filtre est *linéaire* si pour un signal d'entrée  $\lambda e_1(t) + \beta e_2(t)$  alors le signal de sortie est  $\lambda s_1(t) + \beta s_2(t)$ .

Lors d'un *traitement linéaire*, le spectre d'un signal ne s'enrichit jamais, mais peut s'apauvrir (si des harmoniques sont coupés par exemple).

Lors d'un *traitement non-linéaire*, le spectre d'un signal s'enrichit toujours. On peut ainsi tester la linéarité d'un filtre. S'il contient plus d'harmoniques que le spectre du signal d'entrée alors le filtre est non-linéaire.

### b. But du filtrage

Le *filtrage* permet de séparer les fréquences d'un signal en fréquences "utiles" qu'on veut conserver et en fréquences "parasites" que l'on cherche à atténuer.

## 7) Réalisation d'un moyenneur, d'un intégrateur et d'un déivateur

### a. Moyenneur

Ce filtre permet d'obtenir en sortie la moyenne du signal d'entrée. Un moyenneur est un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure très inférieure à la fréquence du signal d'entrée.

### b. Intégrateur

Un filtre est *intégrateur* si l'on a :  $\underline{H} = \lambda \frac{1}{j\omega}$ . (Filtre RC passe-bas par exemple).

### c. Déivateur

Un filtre est *déivateur* si l'on a :  $\underline{H} = \lambda j\omega$ .

## 8) Méthode d'étude

Dans un premier temps, on fait une *étude qualitative* pour déterminer, à l'aide des équivalents à basses et hautes fréquences, la nature probable du filtre.

Ensuite, on détermine la *fonction de transfert*.

On utilise la *décomposition en série de Fourier* du signal périodique d'entrée. On met à l'entrée chaque harmonique et on explicite le signal de sortie lié à cet harmonique. Enfin, en utilisant le théorème de superposition (voir page 83), on remonte au signal de sortie.

On peut étudier *qualitativement* l'effet d'un filtre linéaire en :

- représentant la courbe du gain en fonction de la pulsation,
- représentant le spectre en fréquences (ou pulsations) du signal d'entrée,
- superposant ces deux courbes (les harmoniques appartenant à la bande passante sont supposés transmis et les autres sont coupés).

## 9) Filtres linéaires du premier ou second ordre

### a. Filtres linéaires du premier ordre

Un filtre est dit *du premier ordre* si le dénominateur de sa fonction de transfert  $H(j\omega)$  est un polynôme en  $j\omega$  de degré maximal 1.

La *forme normalisée* est la suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{?}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Le ? peut prendre deux valeurs : 1 (passe-bas) ou  $j\frac{\omega}{\omega_0}$  (passe-haut).

### b. Filtres linéaires du deuxième ordre

Un filtre est dit *du second ordre* si le dénominateur de sa fonction de transfert est un polynôme de degré maximal 2.

La *forme normalisée* est la suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{?}{1 + \frac{1}{Q} \left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Le ? peut prendre les valeurs suivantes :

- Dans le cas d'un passe-bas : ? = 1,
- Dans le cas d'un passe-haut : ? =  $\left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2$ ,
- Dans le cas d'un passe-bande : ? =  $\frac{1}{Q} \left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right)$ ,
- Dans le cas d'un coupe-bande : ? =  $1 + \left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2$

## 10) Filtres linéaires passe-bas

Il existe des filtres passe-bas du premier et du second ordre.

Lorsqu'il s'agit d'un filtre du second ordre, il peut y avoir un phénomène de résonance en fonction de la valeur de  $Q$ . Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors il y a résonance pour une fréquence donnée

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

## 11) Filtres linéaires passe-haut

Un filtre passe-haut du second ordre coupe mieux les basses fréquences qu'un filtre passe-haut du premier ordre (à cause de sa pente qui est deux fois plus importante).

## 12) Filtres linéaires passe-bande

Un *filtre passe-bande* est un circuit qui présente une résonance pour un fréquence  $f_0$ . Il transmet les fréquences au voisinage de  $f_0$  dans une bande de fréquences  $\Delta f$ , plus ou moins large selon que le filtre moins ou plus sélectif en fonction de  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ . Si  $Q > 1$ , alors le filtre est sélectif et la résonance est aiguë.

## 13) Électronique numérique

### a. Échantillonnage

Les phénomènes physiques que nous percevons sont analogiques (grandeurs variant continûment). Pour les traiter, ils sont numérisés. La numérisation passe par plusieurs étapes :

- Une phase d'échantillonnage : discrétisation du domaine temporel. On prend périodiquement (à une fréquence  $f_e$  appelée *fréquence d'échantillonnage*) des échantillons, appelés aussi points d'acquisition.
- Une phase de quantification : affectation d'une valeur numérique approchée aux échantillons sélectionnés. Il s'agit d'une discrétisation des valeurs prises.
- Une phase d'encodage : conversion en binaire des valeurs numériques. On introduit ici une erreur de quantification.

Un échantillonnage optimal doit permettre de remonter au signal étudié à partir du signal échantillonné en prenant assez d'échantillons tout en évitant d'en prendre de trop pour éviter des calculs trop longs. Ainsi, l'échantillonnage est le résultat de compromis.

### b. Spectre d'un signal échantillonné

Le spectre d'un signal  $s(t)$  variable dans le temps est une étude dans le domaine fréquentiel (obtenu grâce à la transformée de Fourier).

Le spectre d'un signal échantillonné  $s_e(t)$  est obtenu à l'aide d'une version discrète de la transformée de Fourier. Le nombre de points d'acquisition choisi par le logiciel est une puissance de 2 tel que  $N = 2^p$ . La résolution fréquentielle est donnée par  $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ .

Le spectre d'un signal échantillonné à la fréquence  $f_e$ , fait apparaître non seulement les fréquences  $f$  existant dans le spectre du signal réel  $s(t)$ , mais aussi pour chacune d'elles, une raie supplémentaire de même amplitude à la fréquence  $f_e - f$ , on parle de *repliement de spectre*.

*Remarque : En réalité, le spectre de  $s_e$  contient des raies pour toutes les fréquences  $(kf_e \pm f), k \in \mathbb{Z}$ .*

### c. Condition de Nyquist-Shannon

Pour échantillonner un signal analogique  $s(t)$  sans modifier son spectre, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage  $f_e > 2f_{max}$ , où  $f_{max}$  est la fréquence maximale contenue dans  $s(t)$ .

Pour que cette condition soit vérifiée, il faut que le signal initial possède une fréquence maximale, ce qui n'est pas toujours le cas (signal créneau par exemple). Ainsi, il est nécessaire de placer un filtre passe-bas avant d'échantillonner un signal, ce filtre est appelé *filtre anti-repliement*.

### d. Analyse spectrale avec un oscilloscope

Les paramètres d'échantillonnage sont :

- le nombre de points  $N$ ,
- la fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{T_e}$ ,
- la durée d'acquisition  $\Delta t_a = (N - 1)T_e \approx NT_e \approx \frac{N}{f_e}$

Pour que l'échantillonnage soit convenable, il faut respecter la condition de Nyquist-Shannon et  $\Delta t_a$  supérieure à la période fondamentale du signal.

La résolution en fréquences est donnée par :  $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{\Delta t_a}$ .

En pratique, pour trouver un bon compromis, on choisit  $f_e$  grande et on l'a fait décroître jusqu'à obtenir la limite du repliement.

# Induction

Il existe deux types de sources de champ magnétique : les aimants et les circuits parcourus par un courant.

## I. Le champ magnétique

### 1) Carte de champ magnétique

#### a. Notions de champ et de ligne de champ

Un *champ vectoriel* permet de décrire une interaction à distance.

Un *aimant* ou une *bobine* crée un champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace. Ce champ a une influence sur les charges en mouvement situées autour.

On peut représenter un champ vectoriel en traçant en de nombreux points de l'espace le *vecteur champ*. Chaque vecteur précise alors la direction, le sens et l'intensité du champ (par sa taille (on parle de norme)).

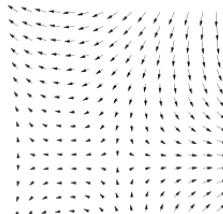


FIGURE 55 – Représentation d'un champ vectoriel par des vecteurs champ

Les *lignes de champ* sont les courbes orientées tangentes en tout point au champ et dans le sens du champ. Elles permettent également de représenter un champ vectoriel.

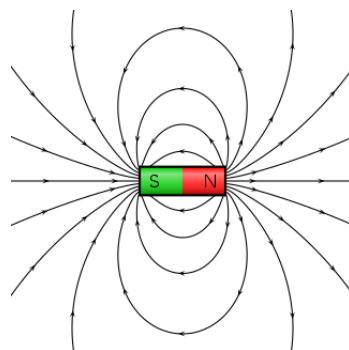


FIGURE 56 – Représentation d'un champ vectoriel par des lignes de champ

## b. Fil "infini" parcouru par un courant

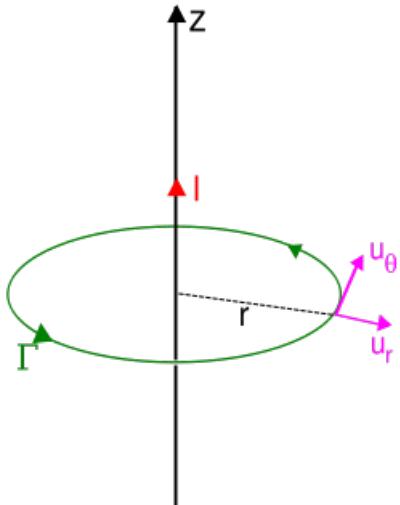


FIGURE 57 – Fil infini parcouru par un courant

Le champ créé par un fil parcouru par un courant d'intensité  $I$  est donné par :

$$\overrightarrow{B(r)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

*Démonstration :*

*Le champ est invariant par rotation d'angle  $\theta$  et par translation d'axe  $z$  (fil supposé "infini"). Ainsi  $B$  dépend uniquement de  $r$ . De plus, le plan  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan et est donc porté par  $\vec{u}_\theta$ . D'après le théorème d'Ampère,*

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{B(r)} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

*Qed*

## c. Propriétés générales des cartes de champ : Emplacement des sources et zones de champ intense ou faible

Propriété 1 : Emplacement des sources et Règle de la main droite

Dans le cas où les sources de champ magnétique sont des courants, les lignes de champ sont (la plupart du temps) des courbes fermées qui entourent les fils dans lesquels le courant passe. On dit que *le champ magnétique tourbillonne autour de ses sources*.

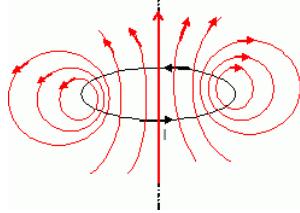
L'orientation de la ligne de champ et le sens du courant dans les fils sont liés par la règle de la main droite : si on met la main droite le long de la ligne de champ orientée de la base des doigts vers le bout des doigts, le pouce donne le sens du courant.

Propriété 2 : Zones de champ intense, faible ou uniforme

Dans une carte de champ magnétique, si on se déplace le long d'une ligne de champ, l'évolution de l'écartement de cette ligne avec lignes de champ voisines est liée à l'évolution de la norme du champ magnétique. *Si la norme du champ augmente, les lignes de champ voisines se rapprochent et inversement si la norme du champ diminue, elles s'écartent.* On en déduit que si l'écartement entre les lignes de champ est constant alors le champ est uniforme.

#### d. Spire circulaire

Une *spire circulaire* est un circuit circulaire parcourue par un courant d'intensité constante.



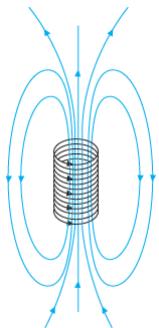
Le champ est plus intense au centre de la spire.  
Pour une spire de rayon  $R$  est parcourue par une intensité  $I$ ,

$$\overrightarrow{B_{centre}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

FIGURE 58 – Lignes de champ associées à une spire circulaire

#### e. Bobine longue ou solénoïde

Une *bobine longue* ou *solenoïde* est une bobine constitué de  $N$  spires enroulées sur une longueur  $l$ . On appelle  $n = \frac{N}{l}$  la *densité linéique de spires*.

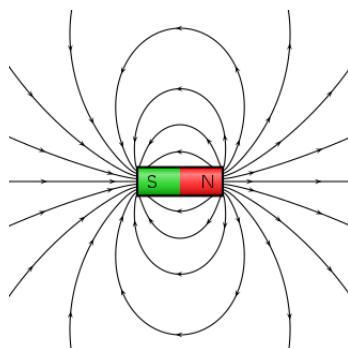


Le champ est plus intense à l'intérieur du solénoïde et est nul à l'extérieur de celui-ci.  
À l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est uniforme et vaut :

$$\overrightarrow{B_{int}} = \mu_0 n I \vec{e}, \vec{e} \text{ étant l'axe du solénoïde.}$$

FIGURE 59 – Lignes de champ associées à un solénoïde

#### f. Aimant droit



On appelle "pôle nord", la face de l'aimant d'où les lignes de champ sortent et "pôle sud" celle où les lignes de champ entrent.  
Les lignes de champ entrent par le pôle sud et ressortent par le pôle nord.

FIGURE 60 – Lignes de champ associées à un aimant droit

Remarque : La Terre comme de nombreuse planète a des propriétés magnétiques analogues à celles d'un aimant droit. À la surface de la Terre, le champ magnétique est de l'ordre de  $5.10^{-5} T$ . On utilise parfois le Gauss tel que  $1G = 10^{-4} T$ .

## 2) Moment magnétique

### a. Dipôles magnétiques

On associe aux *dipôles magnétiques* un *moment magnétique*  $\vec{M}$  qui permet de caractériser l'action d'un dipôle.

### b. Moment magnétique d'une spire de courant plane

Soit une spire plane à laquelle on associe un vecteur surface  $\vec{S}$  (orienté perpendiculairement à la surface, origine centre de la surface, norme l'aire de la surface et orientée selon la règle de la main droite).

**Le moment magnétique d'une telle spire est donnée par  $\vec{M} = I\vec{S}$  en A.m<sup>2</sup>.**

Remarque : L'aimant droit est également caractérisé par un moment magnétique.

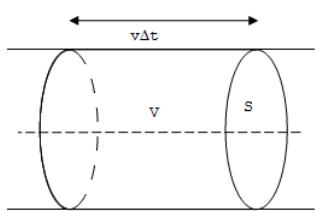
## II. Actions d'un champ magnétique

### 1) La force de Laplace

Cette force caractérise l'action d'un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant.

La force de Laplace est obtenue en sommant toutes les forces de Lorentz en  $q\vec{v} \times \vec{B}$  s'appliquant aux électrons en mouvement dans le fil conducteur. La force de Laplace est plutôt macroscopique alors que la force de Lorentz est plutôt microscopique.

### a. Intensité



$|I| = \frac{|Q|}{\Delta t}$  avec  $|Q| = nV|q|$  où  $|q|$  est la charge d'un unique porteur et  $n$  est la densité de porteurs de charge.

D'où,

$$I = \frac{nV|q|}{\Delta t} = nSv|q|$$

### b. Expression de la force de Laplace élémentaire

On s'intéresse à une portion élémentaire de conducteur de longueur  $dl$  et de section  $S$  de densité de charges  $n$ . Les porteurs de charges sont des électrons donc  $|q| = e$ . Tous les électrons vont à la vitesse  $\vec{v}$  et sont donc soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ . Dans le volume élémentaire, il y a  $nSdl$  électrons soumis à cette force. Donc,

$$\delta\vec{F}_L = -enSdl\vec{v} \times \vec{B}$$

$|I| = nSv|q| = nSve$  d'après la partie précédente

$$\text{Donc, } \delta\vec{F}_L = I\vec{dl} \times \vec{B}$$

Cette force est en Newton (N) ; I est en Ampère (A) ;  $\vec{dl}$  est en mètres (m) et  $\vec{B}$  est en Tesla (T).

### c. Caractéristiques de la force de Laplace

- $\vec{dl}$  est colinéaire au fil et orienté dans le sens du courant,
- $\vec{B}$  est quelconque,
- $(\vec{dl}, \vec{B}, \vec{\delta F}_L)$  forme un trièdre direct,
- $\vec{F}_L = \int \vec{\delta F}_L$  permet de déterminer l'expression intégrale de la force de Laplace.

## 2) Action d'un champ magnétique sur une barre conductrice

On étudie dans cette partie l'action d'un champ magnétique sur une barre conductrice en translation rectiligne.

### a. Expérience des rails de Laplace

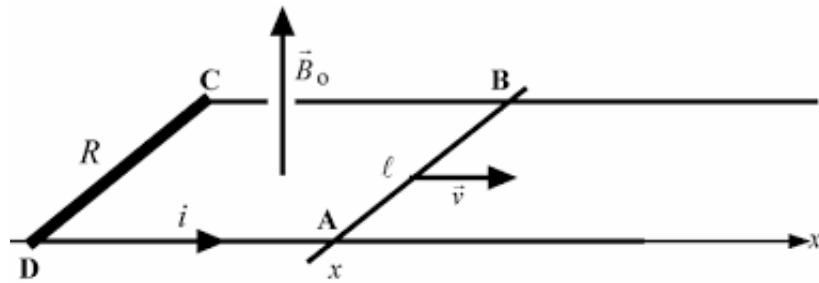


FIGURE 61 – Expérience des rails de Laplace

### b. Résultante des forces de Laplace sur la barre conductrice

La barre de longueur  $l$  est représentée par le segment AB. Ainsi, un élément  $dl$  de la barre subit :

$$\delta \vec{F}_L = i \vec{dl} \times \vec{B} \text{ avec } \vec{dl} = dy \vec{u}_y \text{ et } \vec{B} = B_0 \vec{u}_z$$

Donc,

$$\delta \vec{F}_L = idy B_0 \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_L = i B_0 \vec{u}_x \int_A^B dy = i B_0 l \vec{u}_x$$

### c. Puissance de la force de Laplace

$$\mathcal{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = i B_0 l \vec{u}_x \cdot \dot{x} \vec{u}_x = i B_0 l \dot{x}$$

Remarque : contrairement aux forces de Lorentz, la puissance de la force de Laplace est non nulle et elle travaille.

## d. Système en rotation

*Étude du galvanomètre d'Arsonval : spire rectangulaire parcourue par un courant plongé dans un champ orthogonal à l'axe de rotation de la spire. On montre que la résultante des forces est nulle mais pas le moment lié au couple de forces.*

Tout système (circuit ou aimant) associé à un moment magnétique  $\vec{M}$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  subit le couple des actions de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \times \vec{B}$$

La puissance associée est  $\mathcal{P} = m_\Delta \dot{\theta}$  où  $m_\Delta = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_\Delta$ .

### 3) Action d'un champ magnétique sur un aimant

#### a. Expérience d'Ersted

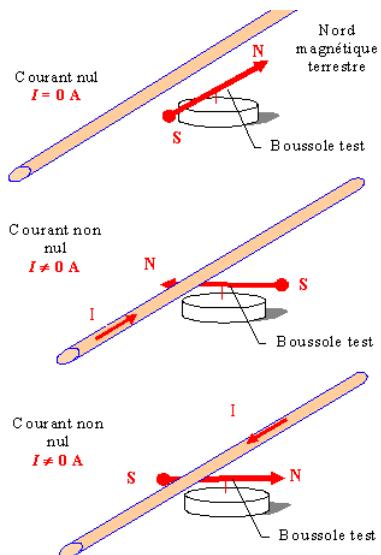


FIGURE 62 – Expérience d'Ersted

Le fil parcouru par un courant  $I$  crée un champ  $\vec{B}$  à son voisinage ce qui provoque la rotation de l'aiguille aimantée.

#### b. Orientation de l'aimant et positions d'équilibre

L'aiguille assimilée à un aimant subit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}_{ext}$$

Les positions d'équilibre sont atteintes lorsque  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ , donc lorsque  $\vec{M}$  est colinéaire à  $\vec{B}_{ext}$ , soit dans la même direction (équilibre stable) ou alors dans la direction opposée (équilibre instable).

*Remarque : Application à la boussole : l'aiguille s'oriente selon les lignes de champ magnétique du champ magnétique terrestre.*

## III. Les lois de l'induction

### 1) Le flux magnétique

Qualitativement, le *flux magnétique* correspond à la "quantité de champ  $\vec{B}$ " qui traverse une surface  $S$  donnée.

Si  $\vec{B}$  est perpendiculaire à la surface, alors le flux vaut :  $\Phi_B = \|\vec{B}\| \cdot S$ .

On retiendra que pour des champs uniformes, le *flux magnétique* vaut  $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$  et s'exprime en Weber (Wb). ( $\vec{S}$  est orienté à l'aide de la règle de la main droite).

Dans le cas de champ non uniforme, il faut définir des flux élémentaire en chaque point d'une surface découpée en surface élémentaire. Ainsi, le flux à travers toute la surface est :  $\Phi_B = \iint_{P \in S} \vec{B}_P \cdot d\vec{S}_P$ .

## 2) Loi de Lenz

**Les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur donnent naissance.**

Ainsi, les champs magnétiques induits s'opposent aux champs magnétiques responsables de leur apparition.

## 3) Force électromotrice induite et loi de Faraday

En 1831, Faraday déduit des ses observations que l'apparition d'un courant induit dans un circuit correspond au courant observé dans un circuit où serait placé un générateur fictif (générateur induit) caractérisé par la force électromotrice induite telle que :

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} \text{ Loi de Faraday}$$

Remarque :

- Le signe - est la traduction mathématique de la loi de Lenz,
- La dérivée par rapport au temps implique que le flux doit varier pour qu'il y ait apparition d'une force électromotrice induite.

Ainsi, on peut dessiner le circuit électrique équivalent, tenant compte des phénomènes d'induction, dans lequel le générateur induit doit apparaître en CONVENTION GÉNÉRATEUR. On transpose donc un problème d'induction complexe en un problème d'électrocinétique plus simple.

# IV. Circuits fixes dans le temps dans un champ magnétique qui varie au cours du temps

## 1) Auto-induction

Tout circuit électrique parcouru par un courant crée un champ magnétique en son voisinage.

Le flux de ce champ magnétique à travers le circuit qui lui a donné naissance, appelé *flux propre*, peut être à l'origine d'un phénomène d'induction dans le cas où ce flux varie au cours du temps, c'est le phénomène d'*auto-induction*.

### a. Flux propre et induction propre

Soit  $\mathcal{C}$  un circuit filiforme parcouru par un courant  $i$ . Le *flux propre*, noté  $\varphi_p$ , correspond au flux du champ  $\vec{B}$  créé par  $\mathcal{C}$  à travers  $\mathcal{C}$ . On a alors :

$$\varphi_p = Li \text{ où } L \text{ est l'inductance propre en Henry (H)}$$

### b. Inductance propre d'un solénoïde

$$\varphi_p = N\varphi_{spire} = N\vec{B} \cdot \vec{S} = N\mu_0 \frac{N}{l} i S \Leftrightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2}{l} Si$$

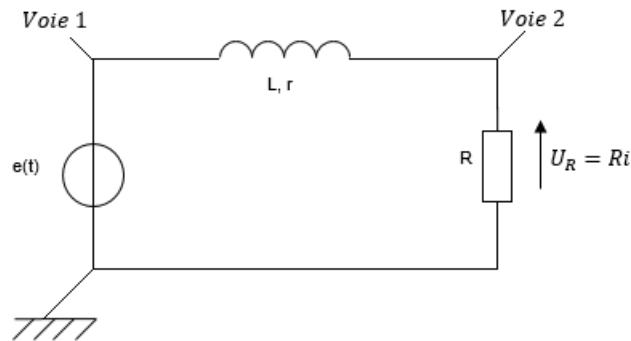
D'où,  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$

### c. Circuit électrique équivalent

Soit un circuit parcouru par un courant  $i$ . Le flux propre associé est  $\varphi_p = Li$ . Si  $i$  varie au cours du temps, il y a apparition d'un fem induite telle que :  $e = -\frac{d\varphi_p}{dt}$ . Ainsi,  $e = -L\frac{di}{dt}$ .

### d. Mesure de L

Pour mesurer  $L$ , on travaille en régime forcé ou en régime transitoire sur le circuit suivant :



La loi des mailles permet d'écrire :

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + (R + r)i$$

On peut donc déterminer à partir du temps caractéristique  $\tau = \frac{L}{R+r}$  l'inductance propre du circuit.

## 2) Induction mutuelle

### a. Induction mutuelle

Soit un circuit  $C_1$  parcouru par un courant  $i_1$  créant un champ magnétique  $\vec{B}_1$ .

Si on place un circuit  $C_2$  au voisinage de  $C_1$ , celui-ci intercepte des lignes du champ  $\vec{B}_1$  et il existe un flux de  $\vec{B}_1$  à travers  $C_2$ , noté  $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ , tel que :

$\varphi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$  où  $M$  est le coefficient de mutuelle induction en Henry (H)

Si  $\mathcal{C}_2$  est parcouru par un courant  $i_2$ , il crée également un champ  $\vec{B}_2$  dont le flux à travers  $\mathcal{C}_1$  est  $\varphi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2$ .

Remarque :  $M$  peut être positif ou négatif, contrairement à  $L$  qui est toujours positif. Cela dépend des conventions d'orientation.

### b. Circuits électriques équivalents

$\mathcal{C}_1$  parcouru par  $i_1 \rightarrow \vec{B}_1$ .

$\mathcal{C}_2$  parcouru par  $i_2 \rightarrow \vec{B}_2$ .

Flux total à travers  $\mathcal{C}_1$  :

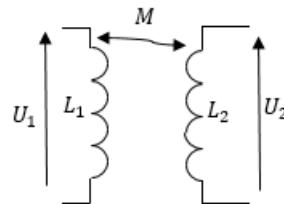
$$\varphi_1 = \varphi_{p1} + \varphi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + Mi_2$$

$$e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Flux total à travers  $\mathcal{C}_2$  :

$$\varphi_2 = \varphi_{p2} + \varphi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + Mi_1$$

$$e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$



Sur ce schéma,  $U_1 = -e_1$  et  $U_2 = -e_2$ .

L'inductance mutuelle est utilisée dans les transformateurs. Ces derniers permettent d'élever ou abaisser une tension. Pour un transformateur idéal, on a :

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1}$$

## V. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

### 1) Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

#### a. Cas de la translation

On s'appuie sur l'expérience des rails de Laplace. Le champ magnétique est constant tel que :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Un opérateur appuie sur la tige mobile de longueur  $a$  telle que  $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{u}_x$ .

Qualitativement, le déplacement de la tige entraîne une modification du flux du champ magnétique et donc il y a apparition d'une force électromotrice et d'un courant induit dans le circuit. Le circuit est soumis à la force de Laplace qui s'oppose au déplacement de la tige.

On oriente la surface de sorte à ce que  $\varphi = BS$ .

#### Équation électrique :

Le circuit équivalent se compose d'une résistance et d'un générateur de tension  $e(t)$ . Ainsi,  $e = Ri = -\frac{d\varphi}{dt}$  et  $\varphi = Bax(t)$  où  $a$  est la longueur de la tige mobile. Ainsi,

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{aB}{R}\dot{x}(t)$$

#### Équation mécanique :

Le système étudié est la tige mobile, dans un référentiel galiléen. Elle est soumise au poids (sur  $\vec{u}_z$ ), à la réaction du support (sur  $\vec{u}_z$ ), la force de Laplace (sur  $\vec{u}_x$ ) et à la force exercée par l'opérateur (sur  $\vec{u}_x$ ).

La force de Laplace vaut :

$$\vec{F}_L = \int i \vec{dl} \times B = ia\vec{u}_y \times B\vec{u}_z = iaB\vec{u}_x$$

Ainsi, en projetant la deuxième loi de Newton sur  $\vec{u}_x$ , on obtient,

$$\ddot{x} = \frac{iaB}{m} + \frac{F_{op}}{m}$$

Finalement, on obtient un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} i(t) = -\frac{aB}{R}\dot{x}(t) & (1) \\ \ddot{x}(t) = \frac{iaB}{m} + \frac{F_{op}}{m} & (2) \end{cases}$$

On injecte (1) dans (2) et on obtient :

$$\ddot{x}(t) = \frac{aB}{m} \left( -\frac{aB}{R}\dot{x}(t) \right) + \frac{F_{op}}{m} \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{(aB)^2}{mR}\dot{x}(t) = \frac{F_{op}}{m}$$

On identifie ainsi une constante de temps :  $\tau = \frac{mR}{(aB)^2}$ .

En dérivant (1) et en injectant (2), on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{i}(t) &= -\frac{aB}{R} \ddot{x}(t) \\ \dot{i}(t) &= -\frac{aB}{R} \left( \frac{iaB}{m} + \frac{F_{op}}{m} \right) \Leftrightarrow \dot{i}(t) + \frac{(aB)^2}{mR} i = -\frac{aBF_{op}}{m}\end{aligned}$$

Bilan énergétique :

D'après les résultats précédents,  $e = Ri = -aB\dot{x}$ . Donc en multipliant par  $i$ , on obtient  $Ri^2 = -iaB\dot{x}$ .

L'équation mécanique donne :  $m\ddot{x} = F_{op} + F_L$  avec  $F_L = iaB$ . Donc en multipliant par  $\dot{x}$ , on obtient :  $m\ddot{x}\dot{x} = F_{op}\dot{x} + iaB\dot{x}$ .

ON RETIENDRA QUE POUR OBTENIR LE BILAN ÉNERGÉTIQUE, ON MULTIPLIE PAR  $i$  L'ÉQUATION ÉLECTRIQUE ET PAR  $\dot{x}$  L'ÉQUATION MÉCANIQUE.

On obtient alors,

$$F_{op}\dot{x} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

Le terme de gauche correspond à la puissance fournie par l'opérateur. Le terme  $Ri^2$  correspond à la puissance électrique dissipée par effet Joule et le dernier terme correspond à une puissance cinétique. Ainsi l'énergie fournie par l'opérateur est à ma fois dissipée par effet Joule et permet de mettre en mouvement la tige (énergie cinétique).

### b. Cas d'une rotation

On étudie une spire rectangulaire en rotation dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .  $\Delta$  représente l'axe de rotation,  $\vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{u}_\Delta$  et  $\vec{S}$  est orthogonal au plan de la spire. On note  $\theta$  l'angle entre la surface de la spire et le vecteur  $\vec{B}$ . Un opérateur fournit un couple  $\Gamma_{op}$  pour faire tourner la spire autour de l'axe  $\Delta$ .

On note  $J$  le moment d'inertie de la spire (rectangulaire de surface  $S$ ).

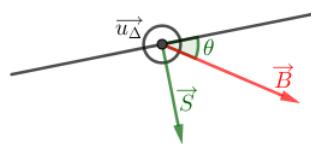


FIGURE 63 – Représentation de la spire en rotation vue du dessus

Qualitativement, lorsque la spire tourne, on observe l'apparition d'une force électromotrice induite (et d'un courant induit dans le cas d'un circuit fermé). En effet, lorsque la spire

tourne, le flux  $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  varie d'où l'apparition d'une force électromotrice induite telle que  $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ . De plus, la spire est associée à un moment magnétique  $\vec{M}$  et est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Elle subit donc  $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \times \vec{B}$ , qui va s'opposer au couple exercé par l'opérateur, d'après la loi de Lenz.

Le circuit électrique équivalent est un circuit RL série car on ne néglige pas le phénomène d'auto-induction.

$$\text{Or, } e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{BS \sin(\theta)}{dt} = -BS\dot{\theta} \cos(\theta).$$

$$\text{De plus, d'après la loi des mailles, } e = L \frac{di}{dt} + Ri.$$

$$\text{On obtient donc l'équation électrique : } \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = -\frac{BS}{L}\dot{\theta} \cos(\theta).$$

D'un point de vue mécanique, on s'intéresse à la spire de moment d'inertie  $J$ , dans un référentiel galiléen.

Bilan des moments :

- Le poids,  $m_\Delta(\vec{P}) = 0$  car  $\vec{P} // \vec{u}_\Delta$ ,
- Réaction de l'axe de rotation, moment nul car on néglige les frottements,
- Couple exercé par l'opérateur  $\Gamma_{op}$  par rapport à l'axe  $\Delta$ ,
- Couple des actions de Laplace  $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{M} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta = (i\vec{S} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta = iSB \cos(\theta)$ .

Par application du théorème du moment cinétique, on trouve l'équation mécanique suivante :  $J\ddot{\theta} = \Gamma_{op} + iBS \cos(\theta)$ .

Dans le cas d'un régime sinusoïdal permanent tel que  $\dot{\theta} = \omega = c^{te}$ , on obtient à partir de l'équation mécanique :  $\Gamma_{op} = -iSB \cos(\theta)$ .

Les équations électrique et mécanique se résument dans le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = -\frac{BS}{L}\omega \cos(\omega t) & (1) \\ \Gamma_{op} = -iSB \cos(\omega t) & (2) \end{cases}$$

La solution de (1) est de la forme :

$$i(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + i_p(t)$$

avec  $\tau = \frac{L}{R}$  est une solution particulière de forme sinusoïdale.

En passant en notation complexe, l'équation (1) se réécrit :

$$j\omega \underline{I} + \frac{R}{L}\underline{I} = -\frac{BS}{L}\omega \text{ avec } \underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t} \text{ et } \underline{I} = e^{j\varphi}$$

$$\text{Ainsi, } \underline{I} = -\frac{BS\omega}{jL\omega + R}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
i(t) &= \Re(\underline{i}) = \Re(\underline{I}e^{j\omega t}) = \Re\left(-\frac{BS\omega}{jL\omega + R}e^{j\omega t}\right) \\
\Leftrightarrow i(t) &= \Re\left(-\frac{BS\omega(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\right) \\
\Leftrightarrow i(t) &= -\frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R\cos(\omega t) + L\omega\sin(\omega t)) \\
\Leftrightarrow i(t) &= -\frac{BSR\omega}{R^2 + L^2\omega^2}(\cos(\omega t) + \tau\omega\sin(\omega t)) \\
\Leftrightarrow i(t) &= -\frac{BS\omega}{R(1 + \tau^2\omega^2)}(\cos(\omega t) + \tau\omega\sin(\omega t))
\end{aligned}$$

On en déduit donc  $\Gamma_{op}$  en injectant l'expression de  $i(t)$  dans (2).

On trouve,

$$\Gamma_{op} = \frac{B^2S^2\omega}{R(1 + \tau^2\omega^2)}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\cos(\omega t)$$

Donc,

$$\langle \Gamma_{op} \rangle_t = \frac{B^2S^2\omega}{R(1 + \tau^2\omega^2)} \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \mathcal{P}_{op} \rangle_t = \langle \Gamma_{op} \rangle_t \omega = \frac{(BS\omega)^2}{2R(1 + \tau^2\omega^2)}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_{elec} \rangle_t &= R\langle i^2 \rangle_t = \frac{RB^2S^2\omega^2}{R^2(1 + \tau^2\omega^2)^2} \left\langle (\cos^2(\omega t) + 2\tau\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \tau^2\omega^2\sin^2(\omega t)) \right\rangle_t \\
\Leftrightarrow \langle \mathcal{P}_{elec} \rangle_t &= \frac{(BS\omega)^2}{R(1 + \tau^2\omega^2)^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau^2\omega^2}{2} \right) = \frac{(BS\omega)^2}{2R(1 + \tau^2\omega^2)} = \langle \mathcal{P}_{op} \rangle_t
\end{aligned}$$

Application : alternateur : transforme énergie mécanique en électrique.

## 2) Freinage par induction

Les actions de Laplace correspondent à des actions de freinage. Dans le cas des rails de Laplace,  $m\ddot{x} = F_{op} - \frac{a^2B^2}{R}\dot{x}$ , le dernier terme correspond à une force de frottement du type  $-\lambda v$ . Dans le cas de la spire rectangulaire en rotation, le couple de Laplace est résistant. Cela se justifie par la loi de Lenz, les actions de Laplace s'opposent aux actions de l'opérateur.

On observe la même chose avec des solides dans lesquels les courants induits sont répartis en surface ou volume : ces courants sont appelés *courants de Foucault*.

*Expérience : pendule pesant freiné par la présence d'un champ magnétique.*

## 3) Conversion électrique en puissance mécanique

Principe du haut parleur : la membrane du haut parleur, dont les vibrations permettent l'émission d'une onde sonore, est mise en mouvement par des phénomènes d'induction.

### a. Configuration simplifiée : dispositif des rails de Laplace moteur

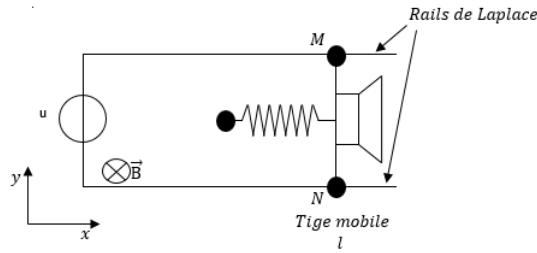


FIGURE 64 – Configuration simplifiée d'un haut parleur

$u(t)$  est la tension variable qui correspond au signal sonore qu'on cherche à créer. Un ressort de constante de raideur  $k$  permet de ramener la tige à sa position d'équilibre.

### b. Étude qualitative

Qualitativement, lorsque le circuit est alimenté, la tige est soumise à la force de Laplace. Le déplacement de la tige entraîne une variation du flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit, ce qui entraîne l'apparition d'une force électromotrice induite qui va s'opposer à la tension  $u(t)$  d'après la loi de Lenz.

### c. Équation électrique

Le circuit étudié est constitué d'une bobine, d'une résistance et de deux générateurs de tension  $e$  et  $u(t)$  en série.

La loi des mailles donne :

$$e(t) + u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

D'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\vec{B} \cdot \vec{S}}{dt} = -Bl\dot{x}(t)$$

L'équation électrique est donc :

$$-Bl\dot{x}(t) + u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

#### d. Équation mécanique

On étudie la tige de longueur  $l$  (segment MN) dans un référentiel galiléen.

Bilan des forces :

- Le poids (sur  $\vec{u}_z$ ),
- La réaction du support (sur  $\vec{u}_z$ ),
- La force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$ ,
- La force de Laplace  $\vec{F}_L = ilB\vec{u}_x$ ,
- La force de frottements fluides  $\vec{f} = -\alpha\dot{x}$

En projetant la deuxième loi de Newton sur  $\vec{u}_x$ , on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx + iBl - \alpha\dot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = iBl$$

#### e. Bilan énergétique

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Li \frac{di}{dt} + Ri^2 & = & ui - iBlv \\ mv\dot{v} + \alpha v^2 + kxv & = & iBlv \end{array} \right.$$

D'où,

$$ui = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2 \right) + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) + \alpha v^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}kx^2 \right)$$

Le terme  $ui$  représente la puissance fournie par le générateur,

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2 \right)$  est la puissance emmagasinée par la bobine,

$Ri^2$  est la puissance dissipée par effet Joule,

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right)$  est la puissance cinétique,

$\alpha v^2$  est la puissance dissipée par l'émission de l'onde sonore,

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}kx^2 \right)$  est la puissance emmagasinée par le ressort

#### f. Étude en régime sinusoïdal

Tout signal périodique pouvant se décomposer comme une somme de signaux sinusoïdaux, on étudie ici seulement le cas où  $u(t) = U \cos(\omega t)$ .

On passe les équations électrique et mécanique en notation complexe :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} jL\omega \underline{i} + R\underline{i} & = & -B\underline{l}\underline{v} + \underline{u} \quad (1) \\ mj\omega \underline{v} + \alpha \underline{v} + \frac{k\underline{v}}{j\omega} & = & B\underline{l}\underline{i} \quad (2) \end{array} \right.$$

On cherche à déterminer l'impédance complexe associée au haut parleur  $\underline{Z}$  telle que  $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$ .

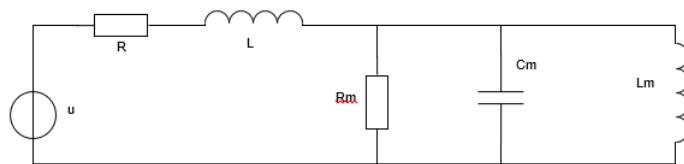
D'après l'équation (2), on a :

$$\underline{v} = \frac{Bl\underline{i}}{mj\omega + \alpha + \frac{k}{j\omega}}$$

En injectant dans (1), on trouve :

$$\underline{u} = \left( R + jL\omega + \frac{(Bl)^2}{mj\omega + \alpha + \frac{k}{j\omega}} \right) \underline{i}$$

Le circuit équivalent est donc de ce type :



La résistance  $R_m$ , le condensateur  $C_m$  et la bobine  $L_m$  branchés en dérivation peuvent être remplacés par un dipôle d'impédance équivalente  $\underline{Z}_m$  telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jC_m\omega} + \frac{1}{jL_m\omega} \Leftrightarrow \underline{Z}_m = \frac{1}{jC_m\omega + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega}}$$

La résistance  $R$ , la bobine  $L$  et le dipôle équivalent sont branchés en série. On peut donc déterminer l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  telle que :

$$\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC_m\omega + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega}}$$

On peut donc identifier :

$$C_m = \frac{m}{l^2B^2}, R_m = \frac{l^2B^2}{\alpha} \text{ et } L_m = \frac{l^2B^2}{k}$$

On s'est ramené à un problème d'électrocinétique. De plus, on remarque que  $\underline{Z}_{eq}$  dépend de  $\omega$ . Il existe donc des gammes de fréquences pour lesquelles le fonctionnement du haut parleur sera optimal.

#### 4) Chauffage par courants de Foucault

On considère un cylindre de section  $S$  (de rayon  $a$ ) de conductivité  $\gamma$  et de hauteur  $h$  soumis à un champ magnétique selon l'axe  $z$  tel que  $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ .

La dépendance temporelle du champ magnétique, induit d'après l'équation de Maxwell-Faraday l'existence d'un champ électrique et donc de courants de Foucaults tels que  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

On travaille, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour  $\vec{B}$ , donc  $\vec{E}$  est orthogonal à ce plan et est porté par  $\vec{u}_\theta$ . De plus, le problème est invariant par rotation d'angle  $\theta$  et translation d'axe  $z$ . Donc,  $\vec{E}(M, t) = E(r, \theta) \vec{u}_\theta$ .

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday : } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

On choisit comme contour  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $H$  et de rayon  $r$ .

Ainsi, la forme intégrale de l'équation donne :

$$E(r, t) 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt} \Rightarrow E(r, t) = \frac{B_0}{2} r \omega \sin(\omega t)$$

Ainsi,

$$p_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \frac{B_0^2}{4} r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \Rightarrow \langle p_V \rangle = \gamma \frac{B_0^2}{8} r^2 \omega^2$$

La puissance dissipée par effet Joule étant donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Joule} &= \iiint_V \langle p_V \rangle dr \, rd\theta \, dz \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_{Joule} &= \gamma \frac{B_0^2}{8} \omega^2 \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_{Joule} &= \gamma \frac{B_0^2}{8} \omega^2 \frac{a^4}{4} 2\pi h \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_{Joule} &= \gamma \frac{B_0^2}{16} \omega^2 a^4 \pi h \end{aligned}$$

# Ondes

## I. Propagation d'un signal

### 1) Généralités sur les signaux

#### a. Ondes et signaux physiques

On appelle *onde* un phénomène physique correspondant à une perturbation locale qui se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Tout grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée *signal physique* transporté par l'onde.<sup>7</sup>

Il existe par exemple :

- Les ondes mécaniques (ondes de surface, *ondes transversales* : perturbation perpendiculaire à la direction de propagation, *ondes longitudinales* : déformation s'effectue dans le même sens que la direction de propagation). Le signal transmis est la déformation locale et réversible de la matière,
- Les ondes acoustiques : elles sont issues de mouvements longitudinaux et imperceptibles de couches de fluide. Les signaux transmis correspondent à une variation de pression par rapport à l'état de repos et vitesse de vibration.

*Remarque : L'oreille est sensible aux fréquences comprises entre 20 Hz (son grave) et 20 kHz (son aiguë).*

#### b. Ondes électromagnétiques

À la différence des signaux précédents, les *ondes électromagnétiques* n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager. Le signal transmis correspond à la superposition d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ . Le spectre électromagnétique est présenté sur la Figure 1 page 7.

#### c. Conversion de signal

L'acquisition, mémorisation, transmission d'une information peut nécessiter l'utilisation de signaux de différentes natures. Il est donc nécessaire de convertir les signaux.

### 2) Spectre d'un signal

Le signal associé à une onde n'est pas en général sinusoïdal. Cependant, la théorie mathématique de Fourier montre que tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux.

---

7. La définition d'une onde n'est pas simple.

### a. Cas d'un signal périodique

Tout signal périodique de fréquence  $f$  peut se décomposer comme :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

$s_0$  est la *composante continue*. Le premier terme de la somme est appelé *fondamental*. Le terme de rang  $n \neq 1$  est appelé *harmonique de rang n*.

### b. Cas d'un signal non périodique

On peut écrire le signal comme :

$$s(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

## 3) Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique

La *valeur moyenne* d'un signal est :

$$S_{moy} = S_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

La *valeur efficace* d'un signal est :

$$S_{eff} = S_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Pour un signal périodique,  $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $S_{moy} = 0$  et  $S_{eff} = \frac{s_0}{\sqrt{2}}$ .

## 4) Signaux analogiques et numériques

La quasi-totalité des signaux exploités de nos jours sont numérisés. La numérisation correspond à la succession de trois étapes : l'échantillonnage, la quantification et le codage.

Les échantillons permettent une bonne restitution du signal initial analogique, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment grande. Le *critère de Shannon* indique que la fréquence d'échantillonnage  $f_{éch}$  doit être toujours supérieure au double de la fréquence du signal à échantillonner (ou fréquence maximale du signal).

## 5) Ondes progressives

### a. Célérité d'une onde

La *vitesse de déplacement d'un signal* est appelée *vitesse de propagation* ou encore *célérité*.

On peut également définir la *célérité* comme étant le facteur intervenant dans l'équation de d'Alembert devant la dérivée seconde temporelle.

## b. Onde progressive à une dimension

On s'intéresse ici à une onde progressive qui se propage sans atténuation ni déformation à la vitesse constante  $c$  dans la direction d'un axe ( $Ox$ ). Cette onde est associée au signal  $s$ .  $s$  est une fonction de plusieurs variables ; en effet une onde en point donné varie dans le temps et une onde à un instant donné varie dans l'espace. Dans le cas général,  $s$  dépend des trois variables d'espace et de temps :  $s(x, y, z, t)$ . Dans le cas d'une onde unidimensionnelle, le signal s'écrit  $s(x, t)$ .

Une onde progressive unidimensionnelle se propageant vers les  $x$  croissants sans atténuation s'écrit :

$$s(x, t) = F(x - ct) = f(t - \frac{x}{c})$$

Si cette même onde propage vers les  $x$  décroissants, elle s'écrit :

$$s(x, t) = G(x + ct) = g(t + \frac{x}{c})$$

*Remarque : Une onde se propageant sans atténuation suppose une conservation de l'énergie et il est donc nécessaire de négliger les phénomènes dissipatifs.*

## c. Onde progressive sinusoïdale

Dans ce cas, si le signal se propage dans le sens des  $x$  croissants :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$A_0$  est l'*amplitude*,  $\varphi_0$  est la *phase à l'origine*,  $\omega$  est la *pulsation* et  $k$  est le *vecteur d'onde*.

Si l'onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants, alors :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

La phase de l'onde  $\omega t \pm kx + \varphi_0$  dépend à la fois du temps et de l'espace. Il y a donc une évolution temporellement et spatialement périodiques.

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  est la période temporelle.

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$  est la période spatiale ( $\sigma$  est le *nombre d'onde*).

On parle de double périodicité spatiotemporelle. On peut écrire :

$$s(x, t) = A_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Donc  $\lambda = cT$ .

## 6) Le phénomène de diffraction

On appelle *diffraction* le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle ou une ouverture. Lorsqu'une onde rencontre un obstacle, elle ne se propage pas en ligne droite mais elle est diffractée dans différentes directions de l'espace.

Lorsqu'une onde de longueur d'onde  $\lambda$  rencontre un obstacle de taille  $a$ , elle est diffractée dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta$  tel que :

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

Plus l'obstacle est petit par rapport à  $\lambda$ , plus l'onde s'étale ( $\theta$  grand).

### a. Diffraction en optique

En optique, à 1 m de l'obstacle, on voit des points diffractés espacés de 1 mm. Donc,  $\sin(\theta) = \frac{1}{1000} = \frac{\lambda}{a}$ . On peut donc repérer en optique de la diffraction pour des obstacles de taille  $a \approx 1000\lambda \approx 0.5$  mm.

Pour un instrument d'optique de diamètre  $d$ , quelle que soit la taille des capteurs photosensibles, il existe une limite intrinsèque de résolution liée à la diffraction :  $\sin(\theta) \approx \frac{\lambda}{d}$ .

### b. Diffraction des sons

Pour les sons, il peut y avoir diffraction par une ouverture (porte) de taille  $a$ . Les sons graves de fréquences proches de 20 Hz donnent :  $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{20} \approx 17$  m. Les sons aiguës donnent :  $\lambda = \frac{c}{f} \approx \frac{340}{20000} \approx 0.02$  m. Ainsi, une porte de largeur d'environ 1 m diffracte les sons graves ( $\lambda \approx a$ ) mais pas les aiguës car  $\lambda \ll a$ .

## II. Superposition d'ondes

### 1) Ondes stationnaires et modes propres

#### a. Corde vibrante

On s'intéresse à une corde de longueur  $L$  dont les extrémités sont considérées comme fixes. Cela n'est pas vrai expérimentalement dans l'expérience de la corde de Melde mais on s'approche d'un mode propre afin de répartir majoritairement l'énergie dans ce mode.

On considère une onde progressive se propageant sur  $+\vec{u}_x$ , donc  $y_+(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx)$ . En  $x = L$ , cette onde est réfléchie et donne naissance à une onde progressive se propageant sur  $-\vec{u}_x$  de signal  $y_-(x, t) = y'_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$ . La superposition de ces deux ondes, appelée *onde résultante*, s'écrit :

$$y(x, t) = y_+(x, t) + y_-(x, t)$$

Les conditions aux limites imposent :  $y(0, t) = 0$  et  $y(L, t) = 0$ . Ainsi,

$$y(0, t) = 0 \Leftrightarrow y_0 \cos(\omega t) + y'_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow y_0 = y'_0 \text{ et } \varphi = 0$$

Finalement,

$$y(x, t) = y_0 [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t - kx)] = 2y_0 \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Il s'agit d'une *onde stationnaire*. Il y a séparation des variables temporelle et spatiale, une telle onde ne se propage pas mais elle vibre sur place.

La condition  $y(L, t) = 0$  implique :

$$\forall t, y(L, t) = 0 \Leftrightarrow 2y_0 \sin(kL) \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

Les différentes solutions sont indiquées par un entier  $n$  et on dit qu'il y a quantification des solutions :

$$y_n(x, t) = 2y_{0n} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 2y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Chaque solution est appelée *mode propre*.

On a :  $k_n L = n\pi$  et  $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ . Ainsi,  $L = n \frac{\lambda_n}{2}$ . De plus,  $c = \lambda_n f_n$ , donc  $f_n = \frac{nc}{2L}$  est la fréquence d'un mode propre. On distingue donc des nœuds et des ventres. Deux nœuds sont distants d'une longueur  $\frac{\lambda}{2}$ .

Dans le cas général, la forme d'une onde stationnaire sur une corde fixée à ses deux extrémités s'écrit comme la somme des différents modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

L'expérience de la corde de Melde permet de vérifier l'accord expérience/théorie en considérant l'approximation des extrémités comme valable.

Remarque : Pour cette expérience, on peut utiliser un stroboscope (dispositif qui émet des flash lumineux de manière périodique). En fixant la fréquence du stroboscope à la fréquence de vibration de la corde, on la voit fixe.

## 2) Interférences

### a. Ondes stationnaires sur la corde vibrante : interprétation en terme de fréquences

Une onde stationnaire est obtenue par la superposition d'une onde progressive aller ( $y_+ = y_0 \cos(\omega t - kx)$ ) et d'une retour ( $y_- = y_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$ ). Pour un  $x_0$  fixé,  $y_+ = y_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$  où  $\varphi_1 = -kx_0$  et  $y_- = y_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$  où  $\varphi_2 = kx_0 + \varphi$ . Il existe alors deux cas limite :

$\varphi_1 - \varphi_2 = 2p\pi$  et dans ce cas,  $y_+ = y_-$ , d'où  $y = 2y_+$ . Il s'agit d'un *ventre* de vibration.

$\varphi_1 - \varphi_2 = (2p + 1)\pi$  et dans ce cas,  $y_+ = -y_-$  et  $y = 0$ . Il s'agit d'un *nœud* de vibration.

Dans le cas d'un ventre de vibration, les ondes sont en phase et les interférences sont constructives. Dans le cas d'un nœud de vibration, les ondes sont en opposition de phase et les interférences sont destructives.

### b. Observation d'interférences et figure d'interférences

Pour observer des interférences, il faut utiliser deux sources d'ondes synchrones.

Sur la figure d'interférences, on observe un maximum d'amplitude lorsque  $\Delta\varphi = 2k\pi$  (les ondes sont en phase).

On observe un minimum d'intensité sur la figure d'interférence lorsque  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$  (les ondes sont en opposition de phase).

# Électrostatique

## I. Champ et potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle

L'*electrostatique* étudie l'interaction entre *particules immobiles* dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

L'*electrostatique* est une branche de l'*electromagnétisme*, qui n'étudie que les *régimes stationnaires*, c'est-à-dire indépendants du temps.

L'*electrostatique* joue un rôle fondamental à l'échelle microscopique : elle assure la cohésion de la matière. Elle est responsable de la liaison chimique et explique la stabilité de différents édifices.

### 1) Les sources du champ électrostatique : les charges électriques

#### a. Charge électrique

Toute particule (essentiellement microscopique) est caractérisée par une *grandeur scalaire*, appelée *charge*, notée  $q$  et mesurée en Coulomb (C).

La charge est une *grandeur algébrique* et est *quantifiée*. En effet, la charge  $q$  de tout système à l'état libre est un multiple entier de la charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Ainsi,  $q = Ze, Z \in \mathbb{Z}$ . La charge est *conservative*, la charge totale d'un système isolé doit rester constante et elle est *invariante* par changement de référentiel.

#### b. Modèle de la charge ponctuelle

Le *modèle de la charge ponctuelle* est une charge électrique  $q$  localisée en un point (dans un volume nul).

Ce modèle, qui décrit bien une particule élémentaire chargée, donne souvent des calculs simples mais il pose un problème au point même où est localisée la charge, le champ électrique n'y étant pas défini.

#### c. Distribution discrète de charges

Une *distribution discrète de charges* est un ensemble de charges ponctuelles qui engendre et subit des interactions électromagnétiques. Cet ensemble contient qu'un petit nombre de particules chargées que l'on peut donc considérer individuellement et d'en faire la somme discrète des contributions.

### 2) Symétries et invariances du champ électrostatique

#### a. Principe de Curie

Énoncé simplifié du principe de symétrie de Curie :

Dans une expérience physique, les effets présentent au moins les symétries des causes.

### b. Plan de symétrie d'une distribution de charges

Le plan  $P_S$  est un plan de symétrie pour une distribution de charges si l'opération de symétrie par rapport à ce plan laisse la distribution inchangée.

Un plan de symétrie  $P_S$ , pour une distribution de charges est aussi un plan de symétrie pour un champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par cette distribution.

### c. Plan d'antisymétrie d'une distribution de charges

$P_A$  est un plan d'antisymétrie pour une distribution de charges si l'opération de symétrie par rapport à ce plan change la distribution en son opposée.

Un plan d'antisymétrie  $P_A$  pour une distribution de charge est aussi un plan d'antisymétrie pour le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par cette distribution.

### d. Détermination du champ électrostatique

Direction d'un champ électrostatique créé par une distribution de charges :

- En un point  $M$  d'un plan de symétrie  $P_S$  de la distribution,  $\vec{E}(M) \in P_S$ ,
  - En un point  $M$  d'un plan d'antisymétrie  $P_A$  de la distribution,  $\vec{E}(M) \perp P_A$
- En pratique,
- Si  $M$  appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, alors comme  $\vec{E}(M) \perp P_A$ , la direction de  $\vec{E}(M)$  est déterminée sans souci,
  - Si  $M$  appartient à un plan de symétrie de la distribution, alors on sait que  $\vec{E}(M) \in P_S$ . Il faut donc chercher *au moins* deux plans de symétrie passant par  $M$ . Ainsi,  $\vec{E}(M)$  appartient à l'intersection de ces deux plans de symétrie.

Le champ électrostatique est qualifié de "vrai" vecteur ou vecteur polaire ; car le sens de ce vecteur, défini par la loi de force de Coulomb, est indépendant des conventions d'orientation de l'espace et a donc une signification physique intrinsèque.

### e. Invariances du champ électrostatique

Les invariances du champ électrostatique  $\vec{E}$  sont les invariances de la distribution de charges qui crée  $\vec{E}$ .

En pratique, on commence toujours par étudier les *symétries* de la distribution de charges pour déterminer la direction du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par la distribution. Ensuite, on étudie les invariances de la distribution, afin de déterminer les variables dont dépendent les composantes du champ électrostatique  $\vec{E}$ .

## 3) Complément mathématique

### a. Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un contour

On appelle *contour*  $\mathcal{C}$ , toute courbe reliant deux points de l'espace. Quand la courbe est fermée, le contour est dit fermé et définit alors une surface associée. Un contour doit être *orienté*.

On appelle *circulation d'un champ de vecteurs*  $\vec{g}$  le long d'un contour  $\mathcal{C}$  l'intégrale curviligne :

$$C = \int_{\mathcal{C}} dC = \int_{M \in \mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M$$

Propriétés :

- $\int_{\mathcal{C}} (\vec{g}_1 + \vec{g}_2) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\mathcal{C}} \vec{g}_1 \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{\mathcal{C}} \vec{g}_2 \cdot \overrightarrow{dl}$
- $\int_{\mathcal{C}^+} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl} = - \int_{\mathcal{C}^-} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}$
- On note  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}$ , la circulation de  $\vec{g}$  le long d'un contour fermé  $\mathcal{C}$

Si  $\int_{M \in \mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M = 0$ , alors  $\vec{g}$  est un champ à circulation conservative. En effet, dans ce cas,  $\int_{M_1}^{M_2} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}_M$  est indépendante du chemin suivi pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ .

Remarque :

Il faut bien distinguer  $\int_{\mathcal{C}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dl}$  et  $\int_{\mathcal{C}} g dl$  (intégrale scalaire) et  $\int_{\mathcal{C}} g \overrightarrow{dl}$  (intégrale vectorielle).

## b. Opérateur gradient

L'*opérateur gradient* transforme une fonction scalaire en un vecteur :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{\nabla} f \cdot \overrightarrow{dl}$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \vec{u}_{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \vec{u}_{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_{\varphi}$$

Le vecteur  $\vec{\nabla} f$  perpendiculaire aux surfaces  $f = c^{te}$  et dirigé vers les valeurs croissantes de  $f$ , indique donc en un point dans quelle direction, dans quel sens et dans quelle importance la grandeur  $f$  varie.

L'*opérateur gradient* est *linéaire* :

$$\vec{\nabla} (\lambda f + \beta g) = \lambda \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla} g$$

**4) Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle  $q$**

**a. Champ électrostatique**

Soit  $q$  une charge ponctuelle placée à l'origine  $O$  des coordonnées sphériques dans le vide.  $q$  crée en tout point de  $M$  de l'espace un champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{OM^2} \vec{u}_{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

Le champ électrostatique s'exprime en  $\text{V.m}^{-1}$ , la charge  $q$  en C (Coulombs),  $r$  en m (mètres) et  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$  est la *permittivité diélectrique du vide*.

Pour un milieu diélectrique autre que le vide, il faut remplacer  $\epsilon_0$  par la permittivité diélectrique du milieu  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ . La permittivité diélectrique relative (au vide)  $\epsilon_r$  est sans unité.

**b. Force de Coulomb**

Si on place une charge  $q_M$  au point  $M$  où il existe  $\vec{E}(M)$  créé par  $q$  (placée en  $O$ ), elle subit la *force de Coulomb* :

$$\vec{F} = q_M \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_M}{r^2} \vec{u}_r$$

Deux charges de même signe se repoussent alors que deux charges de signe opposé s'attirent.

**c. Potentiel électrostatique**

La charge ponctuelle  $q$  placée au point  $O$  dans le vidé crée un potentiel électrostatique  $V(M)$  en tout point  $M$  de l'espace.

$V(M)$  est défini tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = -dV(M) \\ (M) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0 \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Le potentiel s'exprime en Volts (V).

*Démonstration :*

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = -dV(M) \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = -dV(M) \Leftrightarrow dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( -\frac{dr}{r^2} \right)$$

$$\text{D'où, } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + c^{te}$$

*En utilisant la seconde condition, on montre facilement que la constante est nécessairement nulle.*

*Qed*

#### d. Relation locale entre champ et potentiel électrostatiques

Par définition,  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -dV(M)$  et  $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l}$ .

Ainsi, en électrostatique,

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -dV(M) = -\vec{\nabla} V(M) \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \vec{E}(M) = -\vec{\nabla} V(M)$$

#### e. Relation intégrale entre champ et potentiel électrostatiques

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = - \int_{M_1}^{M_2} dV(M) = V(M_1) - V(M_2)$$

D'où la relation intégrale :

$$V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Si les points  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus en un seul et même point, alors :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

*Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est un champ à circulation conservative.*

#### f. Énergie potentielle électrostatique

Soit une zone de l'espace où il existe un champ électrostatique tel que

$$\vec{E}_{ext}(M) = -\vec{\nabla} V_{ext}(M)$$

Une charge ponctuelle  $q$  subit la force de Coulomb :

$$\vec{F} = q \vec{E}_{ext}(M) = -q \vec{\nabla} V_{ext}(M) = -\vec{\nabla} (qV_{ext}(M)) = -\vec{\nabla} E_p(M)$$

La charge  $q$  placée dans le potentiel  $V_{ext}(M)$ , possède une énergie potentielle :

$$E_p(M) = qV_{ext}(M)$$

De plus,

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

Le travail es donc indépendant du chemin suivi. La force de Coulomb est donc conservative.

## 5) Champ et potentiel créés par une distribution discrète de charges ponctuelles

### a. Principe de superposition

Les équations de Maxwell étant linéaires, on peut appliquer le *principe de superposition*.

Soit une distribution discrète de charges ponctuelles :  $q_1$  en  $P_1$ , ...,  $q_i$  en  $P_i$  dans le vide.  
On a alors :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M^2} \hat{u}_{P_i M}$$

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

## 6) Diagramme électrique

### a. Lignes de champ du champ électrostatique

Une *ligne de champ du champ électrostatique*  $\vec{E}$  est une courbe tangente en chaque point aux vecteurs champ  $\vec{E}$  défini en ce point.

En coordonnées cartésiennes, les lignes de champ vérifient :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques, elles vérifient :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, elles vérifient :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin(\theta)d\varphi}{E_\varphi}$$

Propriétés :

Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper sauf en des points singuliers où le champ est soit nul soit non défini.

*Démonstration :*

*Si deux lignes de champ se coupent en  $M$ , alors  $\vec{E}(M)$  aurait deux directions différentes, ce qui est impossible.*

*Qed*

Le potentiel  $V$  décroît le long d'une ligne de champ, parcourue dans le sens du champ.

*Démonstration :*

Soit  $\vec{dl}$  sur une ligne de champ dans le sens de  $\vec{E}$ .

$\underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dl}}_{>0} = -dV(M)$ . Donc,  $dV(M) < 0$ , c'est-à-dire que  $V(M)$  décroît quand on suit la ligne de champ dans le sens du champ.

Les lignes sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

*Qed*

Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être une courbe fermée.

*Démonstration :*

Il s'agit d'une conséquence de la propriété précédente. Si une ligne était fermée, alors on partirait de  $M_1$  avec  $V(M_1)$  et on reviendrait en  $M_1$  avec  $V(M_1) < V(M_1)$  !

*Qed*

### b. Tubes de champ du champ électrostatique

Un *tube de champ* est la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.

### c. Surfaces équipotentielles

Les *surfaces équipotentielles* sont les surfaces définies par l'ensemble des points de même potentiel ( $V(M) = c^{te}$ ).

Propriétés :

Deux surfaces équipotentielles ne peuvent pas se couper.

*Démonstration :*

Si deux surfaces équipotentielles pouvaient se couper en un point  $M$ , alors  $V(M)$  aurait deux valeurs différentes, ce qui est impossible.

*Qed*

Les lignes de champ du champ électrostatique et les surfaces équipotentielles sont orthogonales.

*Démonstration :*

Par définition d'une surface équipotentielle,  $dV = 0$ .

Or,  $dV = 0 = \vec{\nabla}V \cdot \vec{dl} = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}$ . Donc  $\vec{E}(M)$  est orthogonal à  $\vec{dl}$  et aux surfaces équipotentielles.

*Qed*

#### d. Diagrammes électriques de charges ponctuelles

Les lignes de champ "sortent" des charges positives et "entrent" dans les charges négatives.

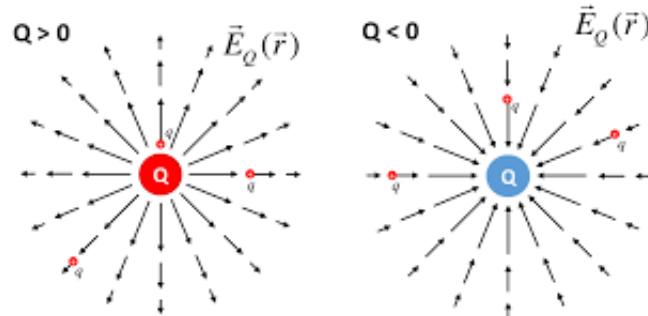


FIGURE 65 – Diagramme électrique de charges ponctuelles

## II. Dipôle électrostatique

### 1) Modèle du dipôle électrostatique

#### a. Définition

Un *dipôle électrostatique* est un ensemble de deux charges ponctuelles opposées,  $(+q)$  au point  $P$  (pôle positif) et  $(-q)$  au point  $N$  (pôle négatif), dont on étudie les effets à une distance grande devant la distance mutuelle des deux charges.

On distingue deux situations :

- Situation active : le dipôle est actif et on s'intéresse au champ créé par le dipôle en un point très éloigné de celui-ci
- Situation passive : le dipôle est passif et on s'intéresse à son comportement lorsqu'il est placé dans un champ extérieur, quasi-uniforme sur l'extension spatiale du dipôle

#### b. Vecteur moment dipolaire

Le *vecteur moment dipolaire* d'un dipôle électrostatique correspond à :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

Son unité est le C.m ou le Debye tel que  $1 \text{ D} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$

#### c. Représentation dans l'espace

On étudie le dipôle en *coordonnées sphériques*  $(r, \theta, \varphi)$ . Étant donné la symétrie de révolution autour de l'axe du dipôle, on fait l'étude dans le plan  $(M, Oz)$ , à  $\varphi$  fixé et les résultats seront donc indépendants de  $\varphi$ .

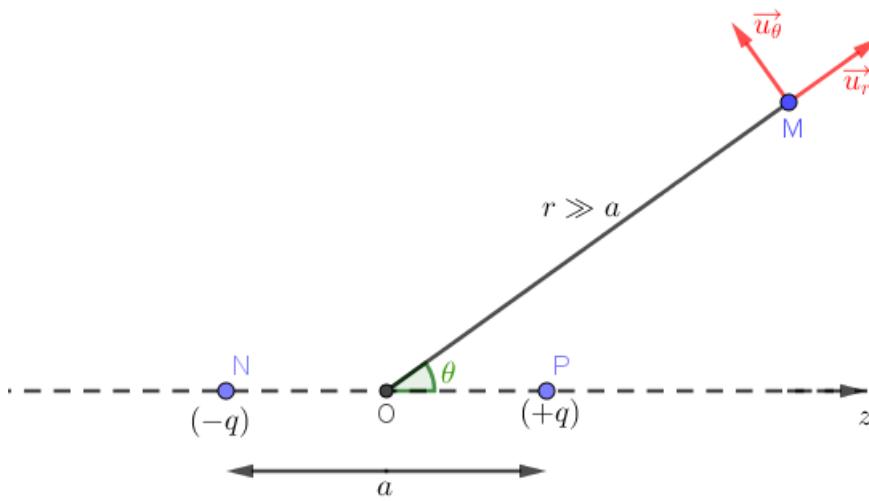


FIGURE 66 – Représentation d'un dipôle électrostatique à  $\varphi$  fixé

## 2) Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique

En comparant les cartes de champ d'un dipôle électrostatique et d'un doublet de charges, on remarque qu'un dipôle électrostatique se comporte comme un doublet de charges "vu à grande distance". C'est ce que l'on appelle l'*approximation dipolaire*.

### a. Analyse des invariances et des symétries de la distribution de charges

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges, le champ électrique est donc contenu dans ce plan.

De plus, le problème est invariant par rotation d'angle  $\varphi$ . Ainsi le potentiel ainsi que le champ ne dépendent que des variables  $r$  et  $\theta$ .

### b. Détermination du potentiel

Le potentiel créé par un dipôle électrostatique est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

*Démonstration :*

*D'après le théorème de superposition,*

$$V(M) = V_{+q}(M) + V_{-q}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{NM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{PM}^2 = \overrightarrow{PO}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2 = \frac{a^2}{4} - ar \cos(\theta) + r^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}^2 &= r^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{a^2}{4r^2} \right)\end{aligned}$$

On considère  $r \gg a$ , ainsi le terme  $\frac{a^2}{4r^2}$  peut être négligé au premier ordre et on obtient :

$$\overrightarrow{PM}^2 \approx r^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) \right)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{r} \cos(\theta) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

En développant au premier ordre, on a  $\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right)$

On montre par la même méthode que  $\frac{1}{NM} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right)$

Ainsi,

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) - 1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}$$

*Qed*

### c. Détermination du champ

Le champ créé par un dipôle électrostatique est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \vec{u}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \vec{u}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left( 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p} \right)$$

Démonstration :

On a :  $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$  et  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}$ .

Or,  $V$  dépend que des variables  $r$  et  $\theta$ , donc en coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-2p \cos(\theta)}{r^3} \right) \vec{u}_r - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-p \sin(\theta)}{r^3} \right) \vec{u}_\theta \\ \Leftrightarrow \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \vec{u}_\theta \right)\end{aligned}$$

Autre expression :

$$\vec{p} = p \vec{u}_z = p (\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta).$$

$$Ainsi, \vec{p} \cdot \vec{u}_r = p \cos(\theta) \Rightarrow E_r(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^3}.$$

$$p(\sin(\theta))\vec{u}_\theta = p \cos(\theta)\vec{u}_r - \vec{p} = (\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}.$$

$$Donc, E_\theta(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}.$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( (2\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + ((\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( (3\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p} \right)$$

$$Comme \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \text{ on a}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left( (3\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p} \right)$$

*Qed*

#### d. Diagramme électrique

Lignes de champ :

Par définition, les lignes de champ respectent :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

Ainsi,

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta = \frac{2p \cos(\theta)}{p \sin(\theta)} d\theta = \frac{2d \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \Rightarrow \ln(r) = \ln(\sin^2(\theta)) + \ln(\lambda) = \ln(\lambda \sin^2(\theta))$$

Les lignes de champ pour un dipôle électrostatique vérifient :

$$r = \lambda \sin^2(\theta), \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Surfaces équipotentielles :

Par définition,  $V(M) = c^{te}$ , donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = c^{te} \Rightarrow \frac{\cos(\theta)}{r^2} = c^{te}$$

Les surfaces équipotentielles associées au champ électrique d'un dipôle électrostatique vérifient :

$$r^2 = \mu \cos(\theta), \mu \in \mathbb{R}$$

Sur la figure suivante, les courbes avec des flèches représentent les lignes de champ et celles sans flèche sont les surfaces équipotentielles.

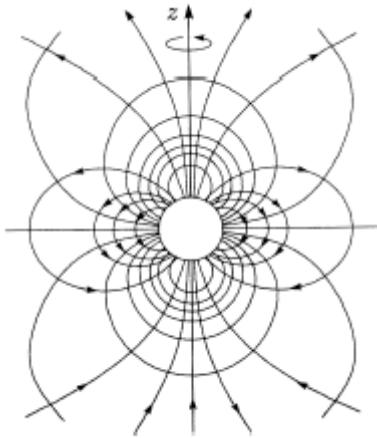


FIGURE 67 – Diagramme électrique d'un dipôle électrostatique

**3) Dipôle électrostatique dans un champ électrostatique extérieur (situation passive)**

**a. Étude expérimentale**

On saupoudre des graines de salade sur de l'huile en présence d'un champ électrique extérieur. Les graines s'orientent dans la direction et dans le sens du champ électrique extérieur. On visualise ainsi les lignes de champ du champ électrique extérieur.

**b. Actions mécaniques subies par le dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme**

On considère un dipôle rigide  $\|\vec{p}\| = qNP = c^{te}$ .

Il est placé dans un champ extérieur considéré comme uniforme sur l'extension spatiale du dipôle.

$$\text{Résultante des forces : } \vec{F} = -q\vec{E}_{ext} + q\vec{E}_{ext} = \vec{0}$$

$$\text{Moment résultant en O : } \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \times \vec{E}_{ext}$$

$$\text{Énergie potentielle d'interaction du dipôle : } E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

*Un dipôle électrostatique placé dans un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  uniforme s'oriente dans la direction et le sens du champ  $\vec{E}_{ext}$ .*

*Démonstration :*

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{ON} \times (-q\vec{E}_{ext}) + \vec{OP} \times (q\vec{E}_{ext}) = (\vec{NO} + \vec{OP}) \times q\vec{E}_{ext} = \vec{NP} \times q\vec{E}_{ext}$$

$$E_p = -qV_{ext}(N) + qV_{ext}(P) = q \int_N^P dV_{ext}(M) = -q \int_N^P \overrightarrow{E}_{ext}(M) \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$E_p = -q \overrightarrow{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{NP} = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E}_{ext}$$

*Qed*

c. Actions mécaniques subies par le dipôle dans un champ électrostatique extérieur non uniforme

Résultante des forces :  $\vec{F} = -q \overrightarrow{E}_{ext}(N) + q \overrightarrow{E}_{ext}(P) = q (\overrightarrow{E}_{ext}(P) - \overrightarrow{E}_{ext}(N))$

Moment résultant en O :  $\overrightarrow{M}_O = \vec{p} \times \overrightarrow{E}_{ext}(O)$

Énergie potentielle d'interaction du dipôle :  $E_p(M) = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{E}_{ext}(M)$

Un dipôle électrostatique placé dans un champ extérieur  $\overrightarrow{E}_{ext}$  quasi-uniforme s'oriente dans la direction et dans le sens du champ  $\overrightarrow{E}_{ext}$  puis est attiré dans la zone de champ intense.

4) Utilisation du modèle du dipôle électrostatique

a. Distribution de charges ponctuelles

Vue à grande distance, une distribution de charges

- de charge totale non nulle  $Q = \sum_i q_i \neq 0$  est équivalente à une charge unique  $Q$ , placée au barycentre des charges.
- de charge totale nulle  $Q = \sum_i q_i = 0$  est équivalente à un dipôle, constitué de deux charges ponctuelles opposées  $(+q)$  et  $(-q)$ , placées respectivement au barycentre des charges positives ( $B^+$ ) et au barycentre des charges négatives ( $B^-$ ) et de moment dipolaire  $\vec{p} = q \overrightarrow{B^- B^+}$ .

b. La notion de dipôle en chimie

Polarité d'une molécule : moment dipolaire permanent

Il s'agit d'étudier le comportement intrinsèque d'une molécule, en absence de tout champ électrique extérieur.

Une molécule est constituée de charges positives (noyaux) et de charges négatives (électrons) formant un ensemble neutre. On considère donc  $B^+$  et  $B^-$  les barycentres des charges positives et négatives.

Dans le cas où  $B^+$  et  $B^-$  sont confondus au centre de symétrie de la molécule, ces molécules ont un moment dipolaire nul et sont dites *apolaires*.

Dans le cas où  $B^+$  et  $B^-$  ne sont pas confondus, ces molécules ont un moment dipolaire non nul et sont dites *polaires*.

### Polarisabilité d'une molécule : moment dipolaire induit

Il s'agit d'étudier le comportement d'une molécule en présence d'un champ électrique extérieur, créé (par exemple) par une autre molécule. Dans le cas d'une molécule apolaire.

Si cette molécule est placée dans un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}_0$ , les charges positives subissent des forces dans le sens du champ  $\vec{E}_0$  et le nuage électronique (charges négatives) se trouve déformé dans le sens opposé.

La molécule *se polarise* (apparition d'un pôle positif et d'un pôle négatif) et acquiert un moment dipolaire, appelé *moment dipolaire induit*. En général ce moment dipolaire induit est colinéaire au champ  $\vec{E}_0$  et de même sens que lui.

Si le champ  $\vec{E}_0$  n'est pas trop intense et si la molécule est assez symétrique, on peut poser :

$$\text{le moment dipolaire induit : } \vec{p}_i = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

où  $\alpha$  est la *polarisabilité* de la molécule en  $\text{m}^3$ .

## III. Champ et potentiel électrostatiques d'une distribution continue de charges

### 1) Distribution continue de charges

#### a. Définition

Une *distribution de charges* est un ensemble de charges électriques qui engendre et subit des interactions électromagnétiques.

Une *distribution continue de charge* est un ensemble contenant une très grande quantité de particules chargées, impossible à considérer individuellement.

#### b. Distribution volumique de charge

*La distribution volumique est la seule modélisation ayant une réalité physique.*

$d\tau$  est un élément de volume dit mésoscopique : il est très petit à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grand à l'échelle microscopique pour contenir un très grand nombre de particules chargées.

Au volume élémentaire  $d\tau$  est associée la charge  $dq$  qu'il contient telle que :  $dq = \rho(M)d\tau$ . Ainsi,  $\rho(M) = \frac{dq}{d\tau}$  est la *densité volumique de charge* au point  $M$ , en  $\text{C.m}^{-3}$ .

La charge totale contenue dans un volume  $V$  quelconque est :

$$Q = \iiint_V dq(M) = \iiint_V \rho(M)d\tau$$

Dans le cas où il y a un seul porteur de charge, ayant la même charge électrique, on définit la *densité particulaire de porteurs* par  $n = \frac{dN}{d\tau}$  en  $\text{m}^{-3}$ . Il s'agit en fait du nombre de porteur par unité de volume. L'élément  $d\tau$  contient  $dN = nd\tau$  porteurs et  $\rho = nq$ .

Dans le cas où les porteurs ne sont pas de même charge, on généralise :

$$\rho = \sum_i \rho_i = \sum_i n_i q_i$$

Dans le cas d'un métal contenant des ions positifs fixes et des électrons libres se déplaçant :

$$\rho_{\text{métal}} = \rho_{\text{ion}} + \rho_{\text{él}} = 0$$

### c. Modèles limites de distributions de charge

Modèle de la charge ponctuelle :

Ce modèle, qui décrit bien une particule élémentaire chargée, donne souvent des calculs simples, mais il pose problème au point même où est localisée la charge, le champ n'y étant pas défini.

Distribution surfacique de charge :

Dans certaines situations, les charges sont réparties au voisinage d'une surface, à l'intérieur d'une mince couche d'épaisseur  $\delta$  très faible par rapport aux dimensions du corps. On est amené à définir une *densité surfacique de charge*  $\sigma$  telle que :  $dq = \sigma dS$  et  $\sigma = \rho\delta$  en  $\text{C.m}^{-2}$ .

À la surface élémentaire  $dS$ , est associée la charge  $dq$  qu'elle contient telle que :  $dq = \sigma(M)dS \Rightarrow \sigma(M) = \frac{dq}{dS}$  : *densité surfacique de charge* au point  $M$  en  $\text{C.m}^{-2}$ .

La charge totale répartie sur une surface  $S$  quelconque est :  $Q = \iint_{M \in S} \sigma(M)dS_M$ .

ATTENTION : DANS LE CAS D'UNE MODÉLISATION SURFACIQUE, LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE N'EST PAS DÉFINI EN UN POINT DE LA SURFACE CAR LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGE Y EST INFINIE.

Le modèle de la distribution surfacique de charge n'a pas de réalité physique.

Ce modèle introduit une discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée.

Distribution linéique de charge :

À l'élément de longueur  $dl$ , est associée la charge  $dq$  qu'il porte telle que :  $dq = \lambda(M)dl \Rightarrow \lambda(M) = \frac{dq}{dl}$  : *densité linéique de charge* au point  $M$  en  $\text{C.m}^{-1}$ .

La charge totale répartie sur une courbe quelconque est :  $Q = \int_{M \in C} \lambda(M)dl_M$ .

ATTENTION : DANS LE CAS D'UNE MODÉLISATION LINÉIQUE DE CHARGE, LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE N'EST PAS DÉFINI EN UN POINT DE LA COURBE CAR LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGE Y EST INFINIE.

Le modèle de la distribution linéique de charge n'a pas de réalité physique.

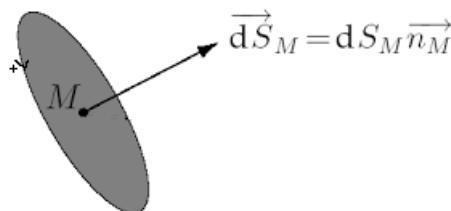
d. Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges

	$dq(P)$	$\vec{E}(M)$	$V(M)$
$\mathcal{D}$ volumique	$\rho(P)d\tau_P$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P)d\tau_P}{PM^2} \vec{u}_{PM}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P)d\tau_P}{PM}$
$\mathcal{D}$ surfacique	$\sigma(P)dS_P$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{P \in S} \frac{\sigma(P)dS_P}{PM^2} \vec{u}_{PM}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{P \in S} \frac{\sigma(P)dS_P}{PM}$
$\mathcal{D}$ linéique	$\lambda(P)dl_P$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P)dl_P}{PM^2} \vec{u}_{PM}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P)dl_P}{PM}$

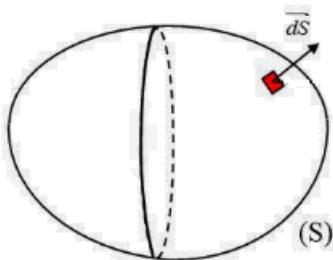
2) Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

a. Orientation d'une surface

Surface ouverte :



Surface fermée :



Une surface ouverte s'appuie nécessairement sur un contour  $C$  fermé. L'orientation de la surface est liée à l'orientation du contour par la règle de la main droite.<sup>a</sup>

a. Les doigts s'enroulent dans le sens du contour et le pouce donne l'orientation de la surface.

Une *surface fermée* est une surface limitant un volume  $V$  fini. Par convention, la normale positive est orientée vers l'extérieur du volume limité par la surface : on l'appelle *normale sortante*.

b. Définition

On appelle *flux du vecteur*  $\vec{g}$  à travers une surface finie  $S$  :

$$\text{l'intégrale de surface : } \Phi = \iint_S d\Phi = \iint_{M \in S} \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS_M}$$

$d\Phi = \vec{g} \cdot \overrightarrow{dS_M}$  est le *flux élémentaire* de  $\vec{g}$  à travers l'élément de surface orienté  $\overrightarrow{dS_M}$ .

### c. Propriétés

On note  $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$ , le flux de  $\vec{g}$  à travers une surface fermée. Si ce flux est nul, on dit que  $\vec{g}$  est à flux conservatif.

### d. Remarque importante

Il faut distinguer  $\iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$ ,  $\iint_S g dS$  (intégrale scalaire) et  $\iint_S \vec{g} dS$  (intégrale vectorielle). Ainsi,  $\iint_S dS$  est l'aire de la surface  $S$  et est différente de  $\iint_S d\vec{S} = \vec{0}$

## 3) Théorème de Gauss

### a. Énoncé

Soit  $\mathcal{D}_{ch}$  une distribution de charges continue ou discrète et  $\vec{E}(M)$  le champ électrostatique créé par  $\mathcal{D}_{ch}$  au point  $M$ .

Le flux du champ  $\vec{E}(M)$  à travers une surface fermée  $S_G$  (surface de Gauss) est égal à la charge contenue à l'intérieur de  $S_G$  divisée par  $\epsilon_0$ .

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

### b. Quand utiliser ce théorème

1. Choisir une surface fermée passant par le point  $M$ , où on veut déterminer  $\vec{E}(M)$
2. Choisir  $S_G$  de telle sorte que  $\vec{n}$  (normale sortante) ait deux possibilités :
  - Soit  $\vec{E}(M) \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{E}(M) \perp d\vec{S}$  si bien que  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0$
  - Soit  $\vec{E}(M) // \vec{n} \Rightarrow \vec{E}(M) // d\vec{S}$  si bien que  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = E(M)dS_M$
3. Choisir  $S_G$  telle que sur les zones où  $\vec{E}(M) // \vec{n} // d\vec{S}$ , la norme de  $\vec{E}(M)$  soit constante

LE THÉORÈME DE GAUSS N'EST UTILISABLE QUE SI PAR DES ANALYSES DE SYMÉTRIE ET D'INVARIANCE DE LA DISTRIBUTION DE CHARGES  $\mathcal{D}_{ch}$ , ON PEUT DÉTERMINER LA DIRECTION DE  $\vec{E}(M)$  ET LA LOI DE VARIATION DE  $\|\vec{E}(M)\|$  EN TOUT POINT  $M$  DE L'ESPACE. CECI EST POSSIBLE UNIQUEMENT AVEC DES DISTRIBUTIONS DE CHARGES À HAUT DEGRÉ DE SYMÉTRIE.

## 4) Champ créé par une sphère uniformément chargée en volume

$\mathcal{D}_{ch}$  est une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de charge  $Q$  telle que  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ .

Tous les plans contenant les points  $O$  et  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Ainsi  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{u}_r$ . De plus, le problème est invariant par rotations d'angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Donc  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

On choisit comme surface de Gauss, une sphère de rayon  $r$  centrée en  $O$ .

On a :

$$\oint\!\!\!\oint_{S_G} \overrightarrow{E(M)} \cdot d\overrightarrow{S_M} = \oint\!\!\!\oint_{S_G \text{ à } r \text{ fixé}} E(r) \overrightarrow{u_r} \cdot dS \overrightarrow{u_r} = E(r) 4\pi r^2$$

Si  $r > R$ , alors l'application du théorème de Gauss donne :

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Si  $r < R$ , alors le théorème de Gauss donne :

$$E(r) 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

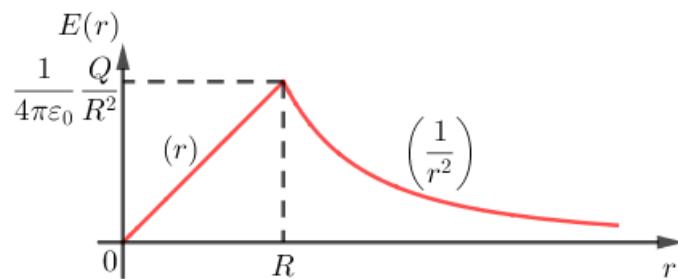


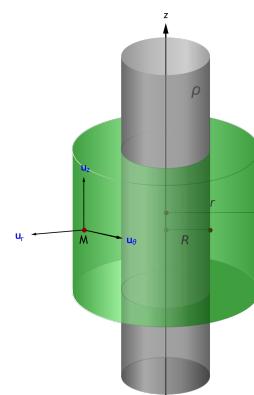
FIGURE 68 – Évolution du champ électrique dans le cas d'une sphère chargée

### 5) Champ créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume

On appelle *cylindre infini* un cylindre dont le rayon est très petit devant la longueur si bien que quand on est à l'intérieur on ne voit pas les "bords". On dit que *les effets de bords sont négligés*.

$\mathcal{D}_{ch}$  est un cylindre infini d'axe  $Oz$  de rayon  $R$  de densité de charge volumique  $\rho$ . (Représenté en gris)

La surface de Gauss choisie est un cylindre d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ . (Représenté en vert)



Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le problème est invariant par rotation d'angle  $\theta$  et par translation d'axe  $Oz$  (cylindre infini). Ainsi,  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

Ainsi,

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS_M} = E(r)2\pi rh$$

Si  $r > R$ , alors d'après le théorème de Gauss :

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Si  $r < R$ , alors on a :

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

Il y a bien continuité du champ pour  $r = R$  et la croissance est d'abord linéaire puis il y a décroissance en  $\frac{1}{r}$ .

#### a. Cas d'un fil infini uniformément chargé

On considère un fil infini de rayon nul (sans réalité physique) de densité linéique de charges  $\lambda$ .

Par les mêmes arguments de symétries et d'invariances, on montre que  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

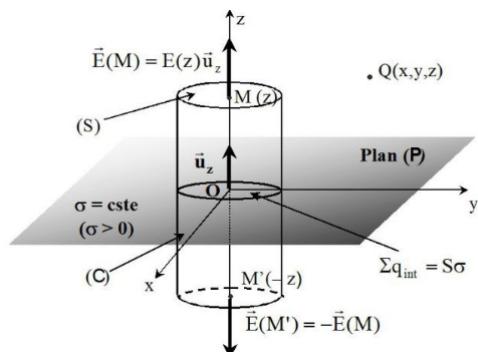
On considère la même surface de Gauss que dans le cas précédent, donc  $\Phi_{\vec{E}} = E(r)2\pi rh$ . Cependant, dans ce cas il n'y a qu'un unique cas à traité et le théorème de Gauss donne :

$$E(r)2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

### 6) Champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface

On considère le plan infini  $(O, x, y)$  uniformément chargé en surface  $\sigma > 0$ . On considère un point  $M$  hors de ce plan.

On choisit comme surface de Gauss, un cylindre de surface  $S$ , d'axe  $MM'$  et de hauteur quelconque.



Les plans  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  et  $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. De plus, le problème est invariant par translations d'axe  $Ox$  et  $Oy$ . Donc,  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ .

On a :

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Sup } z \text{ fixé}} E(z) dS + \iint_{\text{Inf } z \text{ fixé}} E(z) dS + \underbrace{\iint_{\text{Slat}} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}}_0 = E(z) 2S$$

Ainsi, par le théorème de Gauss, on obtient :

$$E(z) 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

D'un point de vue vectoriel,

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

## 7) Condensateur plan idéal

### a. Présentation

Un *condensateur plan idéal* est constitué de deux armatures métalliques  $A_1$  et  $A_2$  qui sont deux plans infinis parallèles séparés par du vide ( $\epsilon_0$ ) ou par un diélectrique ( $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ) et portant des charges opposées ( $Q_{A_1} = +\sigma S$  et  $Q_{A_2} = -\sigma S$ ). ( $S$  étant la surface d'une armature).

Le caractère "infini" des armatures du condensateur est validé lorsque l'on peut négliger les effets des bords du condensateur autrement dit lorsque la distance entre les deux armatures est très inférieure à la dimension caractéristique de l'armature (son rayon pour une armature circulaire).

### b. Champ électrostatique

On utilise le principe de superposition en considérant le résultat précédent.

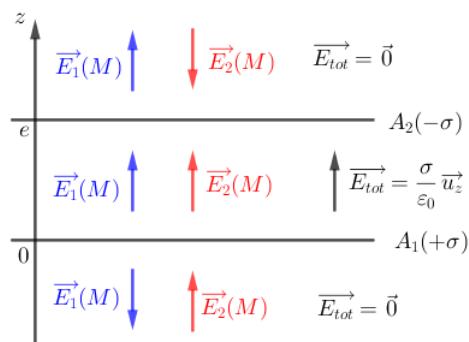


FIGURE 69 – Champ électrostatique condensateur plan

Le champ à l'extérieur du condensateur plan idéal est nul et le champ interne vaut :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z - \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Entre les armatures, le champ est donc uniforme et est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Dans le cas d'un condensateur réel, près des bords, les lignes de champ sont légèrement incurvées.

### c. Capacité d'un condensateur

Par définition,

$$C = \frac{Q_{A_1}}{V_{A_1} - V_{A_2}} = \frac{Q_{A_2}}{V_{A_2} - V_{A_1}}$$

Cette grandeur s'exprime en Farads (F).

Pour un condensateur plan,

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

*Démonstration :*

$$\text{Par définition, } C = \frac{Q_{A_1}}{V_{A_1} - V_{A_2}}.$$

$$\text{Or, } Q_{A_1} = \sigma S \text{ et } V_{A_1} - V_{A_2} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = \int_0^e Edz = Ee = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e.$$

$$\text{D'où, } C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}.$$

*Qed*

### d. Densité volumique d'énergie électrostatique

Le champ d'un condensateur plan est localisé entre les armatures (dans le volume  $Se$ ). C'est là aussi où est localisée l'énergie électrostatique.

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{e} (Ee)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (Se)$$

Ainsi,

$$u_c = \frac{\mathcal{E}_c}{Se} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 > 0$$

Cette grandeur s'exprime en J.m<sup>-3</sup>.

## IV. Champ et potentiel gravitationnels

### 1) L'interaction gravitationnelle

#### a. Les sources du champ gravitationnel : les masses

La *distribution volumique de masse* est la seule modélisation ayant une réalité physique. Au volume élémentaire  $d\tau$ , est associée la masse  $dm$  telle que  $dm = \rho(M)d\tau$ . Donc  $\rho(M) = \frac{dm}{d\tau}$  est la *densité volumique de masse* en  $\text{kg.m}^{-3}$ .

Les modèles de la *masse ponctuelle*, *distribution surfacique de masse*  $\sigma(M) = \frac{dm}{dS}$  (en  $\text{kg.m}^{-2}$ ) et *distribution linéique de masse*  $\lambda(M) = \frac{dm}{dl}$  (en  $\text{kg.m}^{-1}$ ) sont des modèles limites de distribution de masse et n'ont pas de sens physique.

#### b. Symétries et invariances du champ gravitationnel

Comme le champ électrostatique  $\vec{E}$ , le champ gravitationnel est un vrai vecteur (vecteur polaire).

**Le champ gravitationnel  $\vec{G}$  possède donc les mêmes propriétés de symétrie et d'invariance que le champ  $\vec{E}$ .**

En pratique, on commence toujours par étudier les symétries de la distribution de masse pour déterminer la direction du champ  $\vec{G}$ . Ensuite, on étudie les invariances de la distribution de masse afin de déterminer les variables dont dépendent les composantes de  $\vec{G}$ .

### 2) Champ et potentiel gravitationnels créés par une masse ponctuelle

#### a. Champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle

La force de gravitation entre les masses  $m$  et  $m(M)$  est donnée par :

$$\vec{F}_{m \rightarrow m(M)} = -G \frac{m \cdot m(M)}{r^2} \vec{u}_r = m(M) \left( -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r \right) = m(M) \vec{G}(M)$$

Le champ gravitationnel créé par la masse  $m$  situé en  $O$  est donné par :

$$\vec{G}(M) = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $r = ||\vec{OM}||$ ,  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  et  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  est la constante de gravitation universelle.

Pour une distribution de masse  $m_i$  en des points  $P_i$ , on généralise :

$$\vec{G}(M) = \sum_i \vec{G}_i(M) = \sum_i -G \frac{m_i}{P_i M^2} \vec{u}_{P_i M}$$

**b. Potentiel créé par une masse ponctuelle**

Par définition,

$$\begin{cases} \vec{G}(M) \cdot \vec{dl} = -dV(M) \\ V(M) \xrightarrow[M \text{ à l'infini}]{} 0 \end{cases}$$

Donc,

$$V(M) = -\mathcal{G} \frac{m}{r}$$

**c. Relations locale et intégrale entre champ et potentiel**

Par définition,  $dV = \vec{\nabla} V \cdot \vec{dl}$ .

Donc,  $\vec{G} = -\vec{\nabla} V(M)$  et  $V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{G} \cdot \vec{dl}$ .

**d. Énergie potentielle d'une masse ponctuelle dans un champ gravitationnel**

$$\vec{F} = m_0 \vec{G}_{ext}(M) = -m_0 \vec{\nabla} V_{ext}(M) = -\vec{\nabla} (m_0 V_{ext}(M)) = -\vec{\nabla} E_p.$$

Donc,

$$E_p(M) = m_0 V_{ext}(M)$$

**3) Champ et potentiel gravitationnels créés par une distribution continue de masse**

**a. Champ et potentiel gravitationnels créées par une distribution continue de masse**

On retiendra :

$$\begin{aligned} d\vec{G}(M) &= -\mathcal{G} \frac{dm}{PM^2} \vec{u}_{PM} \\ \vec{G}(M) &= \int d\vec{G}(M) = -\mathcal{G} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{dm}{PM^2} \vec{u}_{PM} \\ V(M) &= -\mathcal{G} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{dm}{PM} \end{aligned}$$

## b. Forme du théorème de Gauss pour la gravitation (par analogie)

Champ électrostatique	Champ gravitationnel
<i>Distribution de charges</i>	<i>Distribution de masses</i>
$\vec{F}_{\text{coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_M}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_{\text{gravit}} = -G \frac{mm_M}{r^2} \vec{u}_r$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
$\oint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oint_{S_G} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

TABLE 3 – Analogie champ électrostatique et gravitationnel

## 4) Les quatre interactions fondamentales

### a. L'interaction électromagnétique

Il s'agit d'une interaction entre particules chargées.

Elle est décrite par les équations de Maxwell et par la théorie quantique à l'échelle atomique.

Entre deux particules immobiles dans le vide, l'interaction électromagnétique se réduit à l'interaction électrostatique, décrite par la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_M}{r^2} \vec{u}_r$$

Dans le cas général (présence de champs électrique et magnétique), la particule subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

L'interaction électromagnétique est à l'origine :

- des liaisons chimiques et de tous les phénomènes chimiques,
- des interactions entre les constituants (atomes, molécules, ions...),
- des ondes électromagnétiques

### b. L'interaction gravitationnelle

La force gravitationnelle entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$  est donnée par la loi de Newton :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

À l'échelle atomique, l'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électrostatique.

Cependant, à plus grande échelle, les corps sont globalement neutres, la force électromagnétique est donc nulle et seule la force gravitationnelle est à prendre en compte.

### c. L'interaction forte

Cette interaction est responsable de la cohésion des nucléons (protons et neutrons) à l'intérieur du noyau.

Elle est attractive entre toutes les particules constituant le noyau (neutrons et protons) indépendamment de la charge de la particule.

C'est une interaction très intense mais à très courte portée (femtomètre). Elle ne s'exerce pas au-delà du noyau atomique.

### d. L'interaction faible

Cette interaction est responsable de la plupart des processus de désintégration (bêta en particulier).

C'est une interaction d'intensité nettement inférieure à celle de l'interaction forte s'exerçant à courte portée ( $10^{-17}$  m), portée plus faible que l'interaction forte.

## V. Topographie du champ électrostatique

**Lignes de champ** courbes tangentes en chaque point au vecteur champ  $\vec{E}$  défini en ce point

**Tube de champ** surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé

**Surfaces équipotentielles** lieu des points de même potentiel

En électrostatique,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV$ .

→ Les lignes de champ électrostatique sont donc perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

→ Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ de  $\vec{E}$  lorsqu'elle est parcourue dans le sens du champ ⇒ une ligne de champ électrostatique ne peut pas être une courbe fermée.

#### À RETENIR

Le champ électrostatique diverge algébriquement à partir de ses sources (charges). Il diverge donc à partir d'une charge positive et converge vers une charge négative.

# Magnétostatique

## I. Champ magnétostatique

Avec deux boussoles, on remarque que deux pôles de même nom se repoussent et que deux pôles de même nom s'attirent.

L'aimantation est une propriété de la matière au niveau de ses constituants les plus fins. Le magnétisme renvoie directement à la mécanique quantique.

### 1) Les sources du champ magnétostatique : les courants électriques

#### a. Mise en évidence expérimentale

On approche un aimant droit d'une boussole, celle-ci change de direction.

Il se produit le même phénomène lorsque l'on approche une boussole d'un fil électrique alimenté. (*Expérience d'Oersted*).

Ainsi, courants permanents et aimants sont, au même titre, des sources de champ magnétostatique.

Le champ magnétostatique est donc lié à des courants, c'est-à-dire des charges ayant un mouvement d'ensemble par rapport à un référentiel donné.

#### b. Courant électrique

On appelle *courant électrique* dans un référentiel donné, tout mouvement d'ensemble ordonné de particules chargées par rapport à ce référentiel.

En magnétostatique, les phénomènes étant indépendants du temps, les courants le sont également  $\Rightarrow$  seuls sont envisagés des courants permanents, d'intensité  $I$  constante.

L'intensité d'un courant électrique apparaît donc comme un flux de charge en mouvement c'est-à-dire comme le *flux d'un vecteur densité volumique de courant*  $\vec{j}(M)$ , qui caractérise les charges mobiles ayant un mouvement d'ensemble ordonné par rapport à un référentiel.

#### c. Vecteur densité volumique de courant

Le *vecteur densité de courant*  $\vec{j}(M)$  est une grandeur vectorielle, qui tient compte non seulement de la charge des porteurs mobiles, mais aussi de leur vecteur vitesse d'ensemble  $\vec{v}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ .

Seuls les porteurs de charges *mobiles* créent un courant électrique, appelé *courant de conduction*.

Cas particulier : vecteur densité de courant  $\vec{j}$   
avec un seul type de porteurs de charge mobiles.

$\rho$  : densité volumique de charge mobile ;  $\vec{v}$  : vecteur vitesse des porteurs mobiles par rapport à  $\mathcal{R}$  ;  $n$  densité particulaire de porteurs ;  $q$  charge portée par un porteur

$$\vec{j}(M) = \rho(M)\vec{v} = nq\vec{v} \text{ tel que } I = \iint_{M \in \text{ section}} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$$

Cette grandeur est en A.m<sup>-2</sup>.

Remarque : Attention à la dénomination "volumique" trompeuse au vu de l'unité du vecteur densité de courant.

Dans le cas général, on a :

$$\vec{j}(M) = \sum_k \rho_k(M) \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{k}_k \text{ tel que } I = \iint_{M \in \text{ section}} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$$

#### d. Modèles limites de distributions de courant

Il existe également des modèles de distributions surfacique et linéique de courant. Ces modèles n'ont pas de réalité physique.

## 2) Symétries et invariances du champ magnétostatique

### a. Le vecteur champ magnétostatique

Il existe un *champ magnétostatique*  $\vec{B}$  dans une région de l'espace, si une charge test  $q_0$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  et placée dans cette région, subit une force appelée *force de Laplace* :

$$\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

Le champ magnétique s'exprime en Tesla (T) ou en Gauss (G)<sup>8</sup> qui est l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.

Le sens du vecteur  $\vec{B}$  est défini par un produit vectoriel. Il dépend donc d'une convention d'orientation de l'espace (règle de la main droite).

Pour cette raison, le champ magnétostatique  $\vec{B}$  est qualifié de pseudo-vecteur, ou vecteur axial par opposition aux "vrais" vecteurs (ou vecteurs polaires) dont le sens est indépendant d'une convention d'orientation de l'espace.

D'après le principe de symétrie de Curie, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ont des propriétés inverses par rapport aux propriétés de symétrie des distributions qui sont leurs sources.

Vis à vis des translations et des rotations, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ont les mêmes propriétés d'invariance que les distributions qui sont leurs sources.

---

8. 1G = 10<sup>-4</sup>T.

### b. Plan de symétrie de la distribution de courant

$P_S$  est un *plan de symétrie* de la distribution de courant si l'opération de symétrie par rapport à ce plan laisse la distribution inchangée.

Un plan de symétrie  $P_S$  pour une distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ  $\vec{B}$  créé par cette distribution de courant.

### c. Plan d'antisymétrie de la distribution de courant

$P_A$  est un *plan d'antisymétrie* de la distribution de courant si l'opération de symétrie par rapport à ce plan change la distribution en son opposé.

Un plan d'antisymétrie  $P_A$  pour une distribution de courant est un plan de symétrie pour le champ  $\vec{B}$  créé par cette distribution de courant.

### d. Direction du champ magnétostatique

Direction du champ magnétostatique créé par une distribution de courant :

- En un point  $M$  d'un plan  $P_S$  de symétrie de la distribution de courant :  
 $\vec{B}(M) \perp P_S$ ,
- En un point  $M$  d'un plan  $P_A$  d'antisymétrie de la distribution de courant :  
 $\vec{B}(M) \in P_A$

### e. Invariances du champ magnétostatique

Les invariances du champ magnétostatique  $\vec{B}$  sont les invariances de la distribution de courant qui crée le champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

En pratique, on commence toujours par étudier les *symétries* de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par la distribution de courant. Ensuite, on étudie les invariances de la distribution de courant, afin de déterminer les variables dont dépendent les composantes du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

## 3) Flux et circulation du champ magnétostatique

### a. Flux du champ magnétostatique

Flux du champ magnétostatique  $\vec{B}$  :

$$\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  est un champ à flux conservatif c'est-à-dire le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée est nul.

## b. Circulation du champ magnétostatique : théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère :

La circulation de  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé  $\mathcal{C}_A$  est égale au produit par  $\mu_0$  du courant algébrique enlacé par ce contour :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

## c. Quand utiliser le théorème d'Ampère ?

Il faut choisir le contour  $\mathcal{C}_A$  fermé de telle sorte que :

- $\mathcal{C}_A$  passe par le point  $M$  où l'on veut déterminer le champ  $\vec{B}(M)$  ;
- le champ  $\vec{B}(M)$  soit :
  - $\hookrightarrow$  orthogonal à l'élément de contour orienté  $\overrightarrow{dl}$ , de sorte que  $\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = 0$  ;
  - $\hookrightarrow$  colinéaire à l'élément de contour orienté  $\overrightarrow{dl}$  et de norme uniforme  $||\vec{B}(M)|| = B$ , de sorte que  $\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = B(M)dl = Bd\ell$  et

$$\oint_{M \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_{M \in \mathcal{C}_A} B(M)dl_M = \oint_{M \in \mathcal{C}_A} Bd\ell_M = B \times \text{longueur de } \mathcal{C}_A$$

Le théorème d'Ampère n'est donc utilisable que si la distribution de courants présente suffisamment de symétries et d'invariances pour pouvoir déterminer, en tout point  $M$  de l'espace, la direction du champ magnétique ainsi que les variables dont il dépend.

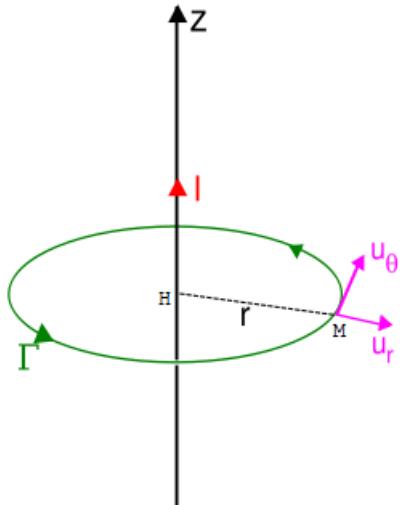
Le théorème d'Ampère n'est donc utilisable que si la distribution de courants présente un haut degré de symétrie.

## 4) Calculs de champs magnétostatiques

### a. Principe de superposition

La superposition de deux distributions de courant  $\mathcal{D}_{crt1}$  et  $\mathcal{D}_{crt2}$  crée un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ , qui est la superposition des champs magnétiques  $\vec{B}_1(M)$  et  $\vec{B}_2(M)$  créés séparément, respectivement par  $\mathcal{D}_{crt1}$  et  $\mathcal{D}_{crt2}$  :  $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$ .

### b. Champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini de rayon nul



Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$ . De plus, le problème est invariant par rotation d'angle  $\theta$  et par translation d'axe  $Hz$  (fil infini) donc  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .

On choisit comme contour d'Ampère un cercle de rayon  $HM = r$  et de centre  $H$ .

*Remarque : Le champ magnétique tourbillonne autour de ses sources (ici le courant dans le fil).*

D'après le théorème d'Ampère :

$$\oint_{C_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow \oint_{C_A} B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = \mu_0 \Leftrightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

Donc,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On remarque que pour  $r \mapsto 0$ , le champ n'est pas défini (car infini). C'est du au choix du modèle car un fil de rayon nul n'a pas de réalité physique.

### c. Champ créé par un fil de rayon non nul

On considère le fil comme étant un cylindre d'axe  $Hz$  de rayon  $a$  et parcouru par une densité volumique de courant  $j$ . Donc  $I = j\pi a^2$ . On applique toujours le théorème d'Ampère sur un cercle de centre  $H$  et de rayon  $r = HM$ .

Les propriétés de symétries et d'invariances ne sont pas modifiées.

Si  $r < a$ , alors d'après le théorème d'Ampère :

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

Si  $r > a$ , alors d'après le théorème d'Ampère :

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 j \pi a^2 \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j a^2}{2} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

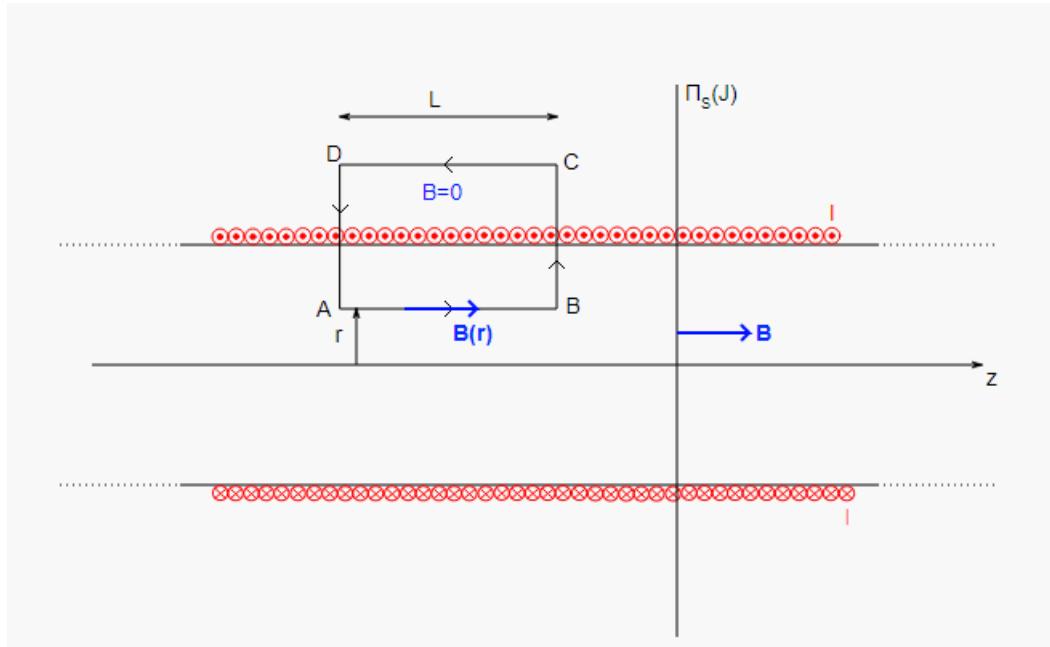
La continuité en  $r = a$  est vérifiée. La norme du champ magnétique est croissante à l'intérieur du fil puis décroît en l'inverse du rayon à l'extérieur du fil.

#### d. Champ créé par un solénoïde infini

Un *solénoïde* est un ensemble de spires jointives de même axe  $zz'$ , de même rayon et parcourues par le même courant  $I$ .

Un *solénoïde infini* est un solénoïde de rayon très petit par rapport à sa longueur  $l$ . Les effets de bords peuvent donc être négligés.

On définit la densité linéique de spires par :  $n = \frac{N}{l}$  en  $\text{m}^{-1}$  avec  $N$  le nombre de spires.



Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant et le problème est invariant par rotation d'angle  $\theta$  et translation d'axe  $z$ . Ainsi,  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$ .

Pour démontrer les différents résultats, nous devrons choisir comme contours d'Ampère des rectangles.

Si le contour est placé en totalité à l'intérieur du solénoïde, alors d'après le théorème d'Ampère :

$$\oint_{C_{A1}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \int_{r=r_1}^B B(r) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z + \underbrace{\int_B^C B(r) \vec{u}_z \cdot dr \vec{u}_r}_{0} + \int_{r=r_2}^D B(r) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z + \underbrace{\int_D^A B(r) \vec{u}_z \cdot dr \vec{u}_r}_{0}$$

En considérant que le point  $A$  et  $B$  sont distants de  $h$  tout comme les points  $C$  et  $D$ , on trouve :

$$\oint_{C_{A1}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = B(r_1)h - hB(r_2) = \mu_0 I_{enlacé} = 0$$

Ainsi, comme  $h \neq 0$ , on a montré que  $B(r_1) = B(r_2) = B$ . À l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est constant.

Pour trouver son expression, on considère un contour d'Ampère fermé à cheval entre l'intérieur et l'extérieur (comme sur l'image).

Dans ce cas, on a d'après le théorème d'Ampère :

$$\oint_{C_{A2}} \vec{B} \vec{u}_z \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \vec{u}_z dz \vec{u}_z + \underbrace{\int_B^C \vec{B} \vec{u}_z . dr \vec{u}_r}_{0} + \underbrace{\int_C^D \vec{B} \vec{u}_z . dz \vec{u}_z}_{0} + \underbrace{\int_D^A \vec{B} \vec{u}_z . dr \vec{u}_r'}_{0}$$

$$\oint_{C_{A2}} \vec{B} \vec{u}_z \cdot d\vec{l} = Bh = \mu_0 n I h$$

Ainsi, on retiendra que pour un solénoïde infini, le champ magnétostatique interne vaut :

$$B = \mu_0 n I \text{ et est uniforme.}$$

#### e. Densité volumique d'énergie magnétique

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

*Démonstration :*

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} L I^2.$$

*De plus, d'après les résultats de l'induction*

$$\Phi_{propre} = N \phi_{propre} = LI \Leftrightarrow (nl)BS = LI \Leftrightarrow (nl)\mu_0 n IS = LI \Leftrightarrow L = \mu_0 n^2 l S$$

*Donc,*

$$u_B = \frac{\mathcal{E}_B}{lS} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n^2 l S I^2}{lS} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

*Qed*

### 5) Cartes de champ magnétostatique

Le champ magnétostatique tourbillonne autour des courants qui sont ses sources. Les lignes de champ du champ magnétostatique sont des courbes fermées orientées à l'aide de la règle de la main droite.

### 6) Forces de Laplace

Dans le cas d'une distribution linéique de courant,  $\vec{F}_{lap} = \oint_C d\vec{F}_{lap}$ .

Dans le cas d'une distribution volumique de courant,  $\vec{j} d\tau$  placée dans  $\vec{B}$  subit  $d\vec{F}_{lap} = \vec{j} d\tau \times \vec{B}$  et  $\vec{F}_{lap} = \iiint_V d\vec{F}_{lap}$ .

#### a. Définition de l'ampère

L'ampère est l'intensité d'un courant continu, qui, maintenu dans deux fils rectilignes infinis et distants de un mètre, produit entre eux une force attractive de  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre de longueur.

*Remarque : Cette définition n'est plus bonne depuis le changement du système SI. La définition de l'ampère repose maintenant sur l'utilisation de la charge élémentaire.*

## II. Dipôle magnétique

### 1) Modèle du dipôle magnétique

#### a. Vecteur moment magnétique d'une boucle de courant plane

Un aimant est caractérisé par son *vecteur moment magnétique dipolaire*  $\vec{m}$ .

Pour un aimant droit, ce vecteur est dirigé le long de l'aimant de son pôle Sud vers son pôle Nord.

Soit  $\mathcal{C}$  une boucle de courant plane, parcourue par un courant  $I$  de surface orientée  $\vec{S}$ , alors :

$$\vec{m} = I \vec{S} \text{ en A.m}^2$$

#### b. Définition

Un *dipôle magnétique* est une distribution de courants permanents de moment magnétique  $\vec{m}$  non nul et de dimension très inférieure à toutes les autres distances qui interviennent dans l'étude.

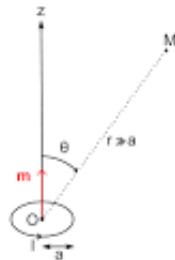
On distingue deux situations : situation active (on s'intéresse au champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle) et passive (on s'intéresse au comportement du dipôle lorsqu'il est placé dans un champ  $\vec{B}_{ext}$ ).

#### c. Représentation dans l'espace

On étudie le dipôle magnétique en coordonnées sphériques dans le plan  $(M, Oz)$  étant donné la symétrie de révolution autour de l'axe du dipôle.

### 2) Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique

#### a. Analyse des symétries et des invariances



Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Donc la composante sur  $\vec{u}_z$  de  $\vec{B}$  est nulle. De plus, le problème est invariant par rotation d'angle  $\varphi$ . Donc  $\vec{B}(M) = B(r, \theta)\vec{u}_r + B(r, \theta)\vec{u}_\theta$ .

### b. Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique

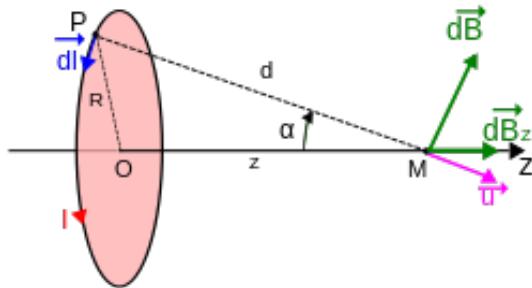
On obtient les expressions par analogie avec l'étude du dipôle electrostatique.

Dipôle électrostatique	Dipôle magnétostatique
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}$
$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = qa\vec{u}_z$	$\vec{m} = I\overrightarrow{S} = IS\vec{u}_z$
$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$	$\vec{A}$
$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$ $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3}$ $E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3}$	$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$ $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos(\theta)}{r^3}$ $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin(\theta)}{r^3}$

TABLE 4 – Analogie champs des dipôles électrostatique et magnétostatique

### c. Spire circulaire vue à grande distance

Considérer un problème à grande distance revient à considérer un angle  $\theta \approx 0$  rad. Ainsi,  $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3}$  et  $B_\theta = 0$ .



On admet que pour cette spire circulaire,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}}$$

Dans le cas où la spire est très éloignée,

$$\frac{z^2}{R^2} \gg 1 \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{R}{z} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{u}_z$$

De plus,  $\mathfrak{m} = IS = I\pi R^2$ . Donc,  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \frac{\mathfrak{m}}{\pi R^2} R^2}{2z^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathfrak{m}}{z^3} \vec{u}_z$ .

#### d. Modèle du dipôle magnétique

Une distribution de courant n'est jamais monopolaire, ce qui est en accord avec l'absence de monopôle magnétique.

### 3) Dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur

#### a. Étude expérimentale

Saupoudrer de la limaille de fer dans une région où règne  $\vec{B}_{ext}$ . Chaque morceau de la limaille s'aimante et s'oriente dans la direction et le sens du champ extérieur.

#### b. Actions mécaniques subies par un dipôle dans un champ magnétostatique uniforme

On considère un dipôle rigide tel que  $\|\vec{m}\| = c^{te}$ .

Cas d'un champ magnétostatique extérieur rigoureusement uniforme.

- Résultante des forces de Laplace :  $\vec{F} = \vec{0}$ ,
- Moment résultant en  $O$  :  $\vec{M}_O = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}$ ,
- Énergie potentielle d'interaction du dipôle :  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ .

*Un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur rigoureusement uniforme s'oriente dans la direction et dans le sens du champ.*

#### c. Actions mécaniques subies par un dipôle dans un champ magnétostatique non uniforme

On considère un dipôle rigide tel que  $\|\vec{m}\| = c^{te}$ .

Cas d'un champ magnétostatique extérieur non-rigoureusement uniforme.

- Résultante des forces de Laplace :  $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_{ext}$ ,
- Moment résultant en  $O$  :  $\vec{M}_O = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}$ ,
- Énergie potentielle d'interaction du dipôle :  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ .

*Un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur quasi-uniforme s'oriente dans la direction et le sens du champ puis est attiré dans la zone de champ intense.*

d. Analogie dipôles électrostatique et magnétostatique

Dipôle électrostatique	Dipôle magnétostatique
Vecteur moment dipolaire $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ en C.m	$\vec{m} = I\overrightarrow{S}$ en A.m <sup>2</sup>
Énergie potentielle d'interaction $E_p = -p\overrightarrow{E_{ext}}$	$E_p = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{ext}}$
<b>Actions subies par le dipôle</b>	
Résultante des forces $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \overrightarrow{E_{ext}}$	$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \overrightarrow{B_{ext}}$
$\vec{F} = \vec{0}$ si $\overrightarrow{E_{ext}}$ uniforme	$\vec{F} = \vec{0}$ si $\overrightarrow{B_{ext}}$ uniforme
Moment résultant des forces $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \vec{p} \times \overrightarrow{E_{ext}}$	
<b>Équilibres</b>	
$\vec{F} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \vec{0}$	
Équilibre stable $E_{pmin} = -pE_{ext}$	
Équilibre instable $E_{pmax} = pE_{ext}$	
$E_{pmin} = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{ext}}$	
$E_{pmax} = \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{ext}}$	

TABLE 5 – Analogies entre dipôles électrostatique et magnétostatique

# Électromagnétisme

## I. Les équations de Maxwell

### 1) L'électromagnétisme

#### a. Historique

Faraday en 1831 et Neumann en 1845 mettent en évidence un lien entre les champs électriques et magnétiques à partir d'étude sur des phénomènes d'induction.

En 1864, Maxwell présente la théorie de l'électromagnétisme classique.

En 1888, Hertz apporte une confirmation expérimentale de ces lois, en produisant des ondes hertziennes à partir de moyens électriques.

Vers 1905, Einstein propose sa théorie de la relativité restreinte, mais celle-ci ne modifie pas les équations de Maxwell, qui ont la même formulation dans tous les référentiels galiléens.

L'origine de cette théorie réside dans l'incompatibilité pour la lumière d'avoir la même vitesse dans tous les référentiels galiléens à cause de la transformation galiléenne des vitesses. On peut regarder plus attentivement l'histoire de l'expérience de Michelson et Morley.

*Les équations de Maxwell restent donc la base de l'électromagnétisme non quantique.*

#### b. Loi de Force de Lorentz

Une particule de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , placée dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  subit la *force de Lorentz* :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

L'ensemble force de Lorentz et équations de Maxwell constitue les postulats de l'électromagnétisme.

#### c. Les milieux étudiés

Le vide de Maxwell :

Dans le vide de Maxwell,  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

Le vide est caractérisé par les constantes :

- $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$  en  $\text{F.m}^{-1}$  : permittivité du vide
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  en  $\text{H.m}^{-1}$  : perméabilité du vide

On a la relation suivante :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

où  $c$  est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide donc la vitesse de la lumière dans le vide ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ ) : célérité.

### Les plasmas :

Les *plasmas* sont des nuages de gaz ionisés, où les charges constituées d'ions positifs et d'électrons se déplacent librement.

Les plasmas sont caractérisés par les mêmes constantes que le vide.

### Les milieux conducteurs :

Un métal est décrit par le modèle suivant : certaines charges fixes (ions positifs) constituent le réseau métallique et d'autres charges (électrons) libres de se déplacer engendrent des courants, assurant ainsi la conductivité électrique du milieu.

Les métaux diffèrent par leur *conductivité*  $\gamma$  (en  $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ou  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) mais tous sont caractérisés par les mêmes constantes que le vide.

Dans le cas d'un conducteur ohmique, la *loi d'Ohm locale* s'écrit :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

## 2) Les équations de Maxwell

### a. Formulation locale

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ (Maxwell-Flux)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Maxwell-Faraday)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (Maxwell-Gauss)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (Maxwell-Ampère)} \end{array} \right.$$

Ces équations sont linéaires et couplées.

Le couplage traduit la propagation du champ électromagnétique.

$\vec{j}$  est appelé *courant de conduction* et le terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_d$  est appelé *courant de déplacement*.

### b. Formulation intégrale

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ (B est à flux conservatif)} \\ e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \text{ (Loi de Faraday)} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \text{ (Théorème de Gauss)} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \text{ (Théorème d'Ampère généralisé)} \end{array} \right.$$

Démonstration :

À partir de l'équation de Maxwell-Flux et du théorème de Green-Ostrogradski, on montre :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0 \underset{G.0}{=} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

À partir de l'équation de Mawell-Faraday et du théorème de Stokes-Ampère, on montre :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} dS \underset{S.A.}{=} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\partial t} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

À partir de l'équation de Maxwell-Gauss et du théorème de Green-Ostrogradski, on montre :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \underset{G.O.}{=} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

À partir de l'équation de Maxwell-Ampère et du théorème de Stokes-Ampère, on montre :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} dS \underset{S.A.}{=} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} dS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \iint_S \vec{E} dS}{\partial t} \\ &\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \end{aligned}$$

*Qed*

### c. Couplage et propagation dans le vide

Dans le vide,  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ . Les équations de Maxwell se simplifient donc en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi l'équation de propagation dans le vide appelée *équation de d'Alembert* :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Démonstration :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_0) - \vec{\Delta} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0}\end{aligned}$$

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{E}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0) - \vec{\Delta} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0}\end{aligned}$$

*Qed*

### 3) Cas des champs statiques

#### a. Régime permanent

Dans ce cas, toutes les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. Les équations de Maxwell peuvent donc s'écrire comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

Donc, d'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \text{ car } \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} U) = \vec{0} \text{ toujours vérifiée}$$

Ainsi, l'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Dans le cas général, cette équation est appelée *équation de Poisson* en l'honneur d'un mathématicien et physicien français.

Dans le cas où  $\rho = 0$ , on obtient  $\Delta V = 0$  et l'équation s'appelle *équation de Laplace*.

En régime permanent, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont totalement découpés et peuvent être étudiés séparément. Il n'y a plus de propagation.

## b. Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Les équations de Maxwell sont modifiées comme suit dans le cas de l'ARQS magnétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère dans ce cadre, on obtient  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ , ce qui revient à dire que  $\vec{j}$  est à flux conservatif.

Cette approximation décrit convenablement le champ électromagnétique d'une distribution  $\mathcal{D}$ , qui varie dans le temps avec la fréquence  $\nu$ , aux points  $M$ , dont les distances  $PM$  aux éléments de  $\mathcal{D}$  sont faibles devant la longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  ie

$$PM \ll \lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

Remarque : Pour plus de détails sur cette notion d'ARQS, voir le cours de J.Neveu.

## 4) Principe de conservation de la charge électrique

Une grandeur contenue dans un volume  $V$  fini est *conservative*, si sa variation est due uniquement à un flux de cette grandeur à travers la surface  $S$  fermée limitant le volume  $V$ . Il n'y a alors aucun processus de création ou de destruction interne de la grandeur.

Pendant un intervalle de temps  $dt$ , la grandeur  $Q$  varie de  $dQ = Q(t+dt) - Q(t)$ .

On associe à ce type de grandeur un bilan global de conservation de la grandeur :

$$\Phi_{sortant} + \frac{dQ}{dt} = 0$$

### a. Équation de conservation de la charge électrique

Dans le cas général, cette équation s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

Dans un cas unidimensionnel sur un axe  $x$ , cette équation se simplifie en :

$$\frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

Dans le cas du régime stationnaire (ou permanent), la dérivée partielle par rapport au temps étant nulle, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(M, t) = 0$$

*Démonstration :*

*On calcule la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :*

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow 0 &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}$$

*On peut également obtenir cette équation en faisant un bilan de charges sur un volume déterminé.*

*Qed*

## 5) Modélisation surfacique des charges et des courants et relations de passage

### a. Modélisation de distribution surfacique

On appelle  $\sigma(M, t)$  la *densité surfacique de charge* au point  $M$  à l'instant  $t$ , en  $\text{C.m}^{-2}$  telle que  $dq = \sigma(M, t)dS$ .

On appelle  $\vec{j}_s(M, t) = \sigma(M, t)\vec{v}$  le *vecteur densité surfacique de courant* au point  $M$  à l'instant  $t$  en  $\text{A.m}^{-1}$ .

### b. Relations de passage

Dans le cas d'une modélisation surfacique  $(\sigma, \vec{j}_s)$ , les équations de Maxwell sont remplacées par les relations de passage, relations entre les champs de part et d'autre de la surface.

En considérant deux milieux (1 et 2) et la normale sortante  $\vec{n}_{12}$  la normale dirigée du milieu 1 vers le milieu 2, on a :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \text{ et } \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{12}$$

Pour une surface avec  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$ , on a continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique.

## II. Énergie du champ électromagnétique

Existence d'énergie électromagnétique :

Placés dans un champ électromagnétique, les porteurs de charge sont soumis à la force de Lorentz. Lorsque ces porteurs sont libres de se déplacer, alors la force de Lorentz travaille.

**Les porteurs de charge peuvent donc recevoir de l'énergie de la part du champ électromagnétique.**

Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge :

$$p_V = \left( \frac{d\mathcal{P}_{EM}}{d\tau} \right)_{cédée} = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) \text{ en W.m}^{-3}$$

Localisation de l'énergie électromagnétique : L'énergie électromagnétique est contenue dans le champ électromagnétique, c'est-à-dire dans les régions de l'espace où règne le champ électromagnétique. Il existe donc une densité volumique d'énergie électromagnétique.

Densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0} \text{ en J.m}^{-3}$$

Transport de l'énergie électromagnétique : Le transport d'énergie électromagnétique par le champ est appelé **rayonnement électromagnétique**.

Vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  : vecteur densité surfacique de puissance électromagnétique :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \times \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \text{ en W.m}^{-2}$$

## 1) Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge

### a. Puissance volumique associée à la force de Lorentz

Au point  $M$ , une charge ponctuelle  $q$  animée par la vitesse  $\vec{v}$  subit la force de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  dont la puissance est donné par :  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$ .

Au point  $M$ , une charge élémentaire  $dq$  animée par la vitesse  $\vec{v}$  ( $dq = \rho d\tau$  et  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ ) subit la force de Lorentz élémentaire :  $d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  dont la puissance élémentaire est donné par :  $d\mathcal{P} = dq \vec{E} \cdot \vec{v} = \rho d\tau \vec{E} \cdot \frac{\vec{j}}{\rho} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$ .

La puissance volumique est donc donnée par :

$$p_v = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \text{ en J.m}^{-3}$$

## b. Conducteur électrique

Un *conducteur électrique* est un corps dans lequel des porteurs de charge peuvent se déplacer sous l'action d'une force infiniment petite (de la forme  $\vec{F} = q\vec{E}$ ). Le contraire d'un conducteur est un *isolant*.

Dans les *métaux*, les électrons sont libres de se déplacer. Ils sont animés à la fois de mouvements désordonnés dus à l'agitation thermique du milieu mais ils peuvent aussi circuler dans le réseau cristallin avec une certaine vitesse d'ensemble, assurant ainsi la conduction électrique du métal : on les appelle électrons de conduction.

Dans les électrolytes (solutions) des cations et des anions se déplacent au sein du solvant.

## c. Loi d'Ohm locale

Un milieu conducteur est dit ohmique lorsqu'il vérifie la loi d'Ohm locale.

**Loi d'Ohm locale (loi phénoménologique) :**  $\gamma > 0$  : conductivité du milieu électrique en  $\text{S.m}^{-1}$ .

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

On définit également  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  comme étant la résistivité du milieu en  $\Omega \cdot \text{m}$ .

Cette loi est applicable si le champ  $\vec{E}$  n'est pas trop intense.

La loi d'Ohm est applicable pour des champs  $\vec{E}$  de fréquence inférieure à  $10^{14}$  Hz, ce qui est le cas dans le cadre de l'ARQS.

## d. Effet Joule

Dans un conducteur ohmique, la puissance volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique correspond à la puissance volumique dissipée par effet Joule :

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} \geq 0$$

Les porteurs de charges mobiles du conducteur reçoivent de l'énergie de la part du champ électromagnétique.

Le champ électromagnétique cède donc de l'énergie à la matière : c'est l'effet Joule.

## e. Conducteur filiforme en régime permanent

D'après les résultats précédents,  $p_V = \frac{j^2}{\gamma}$ .

De plus, par définition,

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{d}\vec{S} = jS \Rightarrow j = \frac{I}{S}$$

$$\text{Donc, } p_V = \frac{I^2}{\gamma S^2}.$$

Ainsi, la puissance cédée par le champ électromagnétique peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{cédée}} = \iiint_V p_V d\tau = \iiint_V \frac{I^2}{\gamma S^2} (S dl) = I^2 \int_l \underbrace{\frac{1}{\gamma S} dl}_R = I^2 \left( \frac{l}{\gamma S} \right)$$

Ainsi, on peut exprimer la résistance comme

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{l}{\gamma S} \text{ en } \Omega$$

## 2) Grandeurs énergétiques associées à un champ électromagnétique

### a. Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique est donnée par :

$$u_{EM}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0} = u_E(M, t) + u_B(M, t) \text{ en J.m}^{-3}$$

Ainsi, l'énergie électromagnétique contenue dans un volume  $d\tau$  :  $dU_{EM}$  est donnée par :

$$dU_{EM}(M, t) = u_{EM}(M, t) d\tau \text{ ou } u_{EM}(M, t) = \frac{dU_{EM}(M, t)}{d\tau}$$

### b. Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  correspond à un vecteur densité surfacique de puissance électromagnétique :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \times \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \text{ en W.m}^{-2}$$

Le vecteur de Poynting caractérise le rayonnement électromagnétique :

$$\left. \begin{array}{l} d\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = d\Phi_{\vec{\Pi}} = \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \\ \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \Phi_{\vec{\Pi}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La puissance électromagnétique rayonnée est} \\ \text{le flux du vecteur de Poynting} \end{array}$$

### c. Ordres de grandeur

La puissance rayonnée par un LASER est de l'ordre du  $\text{kW.m}^{-2}$ .

Au niveau de la Terre (et sans tenir compte de l'atmosphère), le flux surfacique solaire est de l'ordre du  $\text{kW.m}^{-2}$ .

Lorsqu'un téléphone portable émet un appel, le champ électrique émis au niveau du portable est de l'ordre de  $20 \text{ V.m}^{-1}$ , ce qui correspond à un flux surfacique de  $0,5 \text{ W.m}^{-2}$ .

### 3) Bilan d'énergie électromagnétique

On peut écrire un bilan global sur la grandeur non conservative  $G(t)$  :

$$\frac{dG}{dt} = -\Phi_{\text{sortant de G}} + \text{Taux de création de G} - \text{Taux de destruction de G}$$

#### a. Équation locale de Poynting

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(M, t)}_{\text{Flux d'énergie EM}} + \underbrace{\frac{\partial u_{EM}(M, t)}{\partial t}}_{\text{Stockage d'énergie EM}} + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{Perte d'énergie EM}} = 0$$

*Démonstration :*

*On fait un bilan sur l'énergie contenue dans un volume  $V$  délimitée par une surface fermée.*

$$\frac{dU_{EM}}{dt} = \Phi_{\text{sortant}} + \underbrace{\text{Taux de création d'EM}}_0 - \text{Taux de destruction d'EM}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_{EM}}{dt} &= -\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} - \mathcal{P}_{\text{cédée}} \\ &\Rightarrow \frac{d(\iiint_V u_{EM} d\tau)}{dt} + \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0 \\ &\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} d\tau + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} d\tau + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0 \\ &\Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau = 0 \forall V \\ &\Rightarrow \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

*Qed*

#### b. Cas des régimes stationnaires

Dans ce cas, les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. Ainsi, l'équation locale de Poynting devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

# Ondes électromagnétiques

## I. Ondes électromagnétiques dans le vide

### 1) Propagation du champ électromagnétique dans le vide

On fait notre étude dans le vide de Maxwell :  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

#### a. Équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide : équation de d'Alembert

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday (resp. Maxwell-Ampère), on obtient l'équation de d'Alembert pour le champ  $\vec{E}$  (resp.  $\vec{B}$ ) :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ces équations sont *linéaires* et aux dérivées partielles d'ordre 2 pour l'espace et d'ordre 1 pour le temps.

*Démonstration :*

*En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient*

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_0) - \vec{\Delta} \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\vec{\Delta} \vec{E} \Leftrightarrow \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

*En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère et en procédant de la même façon, on retrouve l'équation de d'Alembert formulée pour le champ  $\vec{B}$ .*

*Qed*

## b. Ondes électromagnétiques dans le vide

Une *onde électromagnétique* est l'ensemble  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  solution de l'équation de d'Alembert. Les six composantes scalaires  $s$  du champ électromagnétique vérifie l'équation de d'Alembert scalaire :

$$\Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

De façon générale, la grandeur scalaire "s" ( $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ ) est appelée *vibration électromagnétique*.

Les ondes électromagnétiques se propagent :

- dans le vide, donc sans support matériel à la célérité  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  dans tout référentiel galiléen,
- sans transport de matière (d'où l'utilisation du mot "célérité")

Dans le vide, toutes les ondes électromagnétiques se propagent avec la même célérité  $c$ , quelle que soit leur fréquence  $\Rightarrow$  le vide est un milieu non dispersif.

Soit  $s(x, t)$  une vibration scalaire, fonction de  $x$  et de  $t$  et qui vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension. *Pour résoudre l'équation de d'Alembert, on peut choisir deux types de solution, selon les conditions aux limites imposées par le problème.*

Espace illimité	Espace limité
Pas de conditions aux limites	Avec conditions aux limites
Solution : <i>ondes progressives</i> $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ (var temporelle) $s(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ (var spatiales) $f, g, F, G$ fonctions quelconques deux fois dérivables	Solution : <i>ondes stationnaires</i> $s(x, t) = f(t)g(x)$ $f$ et $g$ sont des fonctions trigo

## c. Ondes planes

Une *surface d'onde* à un instant  $t$  est lieu des points d'égale valeur de  $s(x, t)$  (lieu d'égale vibration).

Une *onde plane* est une onde dont les surfaces d'onde sont des plans.

En pratique, une onde est plane s'il existe un choix de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  tel que l'onde ne soit fonction que d'une variable d'espace et du temps.

Remarque : Il existe des cas où les surfaces d'onde sont des sphères centrées en un point  $O$  : ces ondes sont appelées ondes sphériques. C'est le cas des ondes lumineuses issues d'une source ponctuelle placée en  $O$ .

Très loin de la source ponctuelle, les ondes sphériques sont assimilables à des ondes planes (la surface d'onde étant assimilable au plan tangent des sphères).

De plus, une onde sphérique centrée sur un point du plan focal image traversant une lentille convergente devient une onde plane et vice-versa.

#### d. Ondes planes progressives

Une *onde progressive* est une onde qui se propage, c'est-à-dire une vibration dans laquelle les variables d'espace et de temps sont liées dans un terme, appelé *terme de propagation*.

Onde plane progressive selon la direction  $\vec{u}_x$  dans le vide :  $s(x, t)$

	Terme de propagation pour une OPP selon $+\vec{u}_x$	
	OPP selon $+\vec{u}_x$	OPP selon $-\vec{u}_x$
Variable temporelle	$t - \frac{x}{c}$	$t + \frac{x}{c}$
Variable spatiale	$x - ct$	$x + ct$

Les ondes électromagnétiques planes et progressives sont des *ondes transversales*. C'est-à-dire que les plans d'ondes sont des perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde.

Une *onde transversale* est une onde pour laquelle la déformation du milieu est orthogonale à la direction de propagation de l'onde. Cette onde s'oppose aux *ondes longitudinales* pour lesquelles la déformation du milieu est colinéaire à la direction de propagation.

Propriété : Soit  $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , l'onde est identique à l'instant  $t$  au point d'abscisse  $x$  et à l'instant  $t + \Delta t$  à l'abscisse  $x + \Delta x$  si et seulement si  $\Delta x = c\Delta t$ . L'onde s'est donc propagée, sans se déformer, à la vitesse  $c$ , dans le sens de  $+\vec{u}_x$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s(x + \Delta x, t + \Delta t) \\ \Leftrightarrow f\left(t - \frac{x}{c}\right) &= f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c} + \Delta t - \frac{\Delta x}{c}\right) \\ \text{Donc, } \Delta t - \frac{\Delta x}{c} &= 0 \Leftrightarrow \Delta x = c\Delta t \end{aligned}$$

Qed

## 2) Ondes planes progressives électromagnétiques dans le vide

Dans le vide de Maxwell,  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

### a. Présentation

Les ondes planes progressives électromagnétiques correspondent à la propagation simultanée d'un champ  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui vérifient l'équation de d'Alembert.

L'écriture générale de la solution de l'équation de d'Alembert pour une OPP :

Si l'onde se propage selon la direction  $\vec{u}_x$ , alors,

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

La partie en  $f$  correspondant à une OPP se propageant selon  $+\vec{u}_x$  et la partie en  $g$  à une OPP se propageant selon  $-\vec{u}_x$ .

Si l'onde se propage une direction quelconque  $\vec{u}$ , alors,

$$s(M, t) = f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)$$

Lors de la résolution de l'équation de d'Alembert, on rejette toute solution constante et on ne considère que les solutions qui sont des ondes progressives. En pratique, lorsqu'une constante apparaît (par intégration) alors celle-ci est prise nulle.

### b. Transversalité de l'OPP dans le vide

Considérons une OPP se propageant sur  $+\vec{u}_x$ .

L'OPP EM est transverse électrique et transverse magnétique.

C'est-à-dire que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $+\vec{u}_x$ . Ils ont ainsi une composante nulle sur la direction de propagation.

### c. Relation de structure de l'OPP dans le vide

Dans le cas particulier d'une OPP se propageant sur  $+\vec{u}_x$ ,

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x}{c} \times \vec{E}$$

Ainsi,  $(\vec{u}_x, \vec{E}, \vec{B})$  forment un trièdre direct.

Dans le cas d'une OPP se propageant selon la direction  $+\vec{u}$ ,

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E}$$

Ainsi,  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  forment un trièdre direct.

Remarque : Ces propriétés ne sont plus valables si l'onde progressive n'est pas plane, ou si l'onde plane progressive n'est pas unique (superposition d'OPP).

### 3) Modèle de l'onde plane progressive monochromatique OPPM

#### a. Définition

Une *onde plane progressive monochromatique* (OPPM) ou *onde plane progressive harmonique* (OPPH) ou *onde plane sinusoïdale* est une onde progressive dont la dépendance temporelle est sinusoïdale avec la pulsation  $\omega$ .

Ainsi, une OPPM se propageant dans la direction  $+\vec{u}$  s'écrit

$$s(M, t) = s_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \varphi \right)$$

#### b. OPPM et paquet d'onde

L'étude des OPPM permet, à l'aide de la linéarité des équations de Maxwell et du théorème de Fourier, l'étude de tout type d'onde.

L'OPPM est un *modèle* qui permet d'analyser des phénomènes de propagation. Comme tout modèle, elle a un caractère idéal et ne saurait décrire à elle seule un phénomène physique observable.

Un signal physique réel émis par une source est un *paquet d'ondes*, qui résulte de la superposition de plusieurs OPPM se propageant dans la même direction. L'OPPM est une composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

#### c. Domaines du spectre électromagnétique

Les principaux domaines du spectre électromagnétique sont (des basses vers les hautes fréquences) : ondes hertziennes, lumière (IR, Visible, UV), rayons X et rayons  $\gamma$ .

Voir la Figure 1 page 7.

Le lien entre longueur d'onde et fréquence est donné par :

$$c = \lambda f$$

Les *ondes hertziennes* ont une fréquence inférieure à  $10^{12}$  Hz =  $10^3$  GHz. On peut les produire par des moyens électriques, grâce à des antennes parcourues par des courants sinusoïdaux.

Les *infrarouges* ont une longueur d'onde comprise entre 800 nm et 1 mm. Ils sont produits par les corps chauffés, selon le processus du rayonnement thermique.

Le lumière *visible* a une longueur d'onde comprise entre 400 nm (bleu) et 800 nm (rouge). Ce rayonnement est émis par des atomes qui se désexcitent.

Les *ultraviolets* ont une longueur d'onde comprise entre 10 nm et 400 nm. Ils sont également produit par des émissions d'atomes.

Les *rayons X* ont une longueur d'onde comprise entre 20 pm et 10 nm. Ils sont produits, généralement, par bombardement d'électrons sur la surface d'un solide.

Les *rayons  $\gamma$*  ont une longueur d'onde inférieure à 20 pm. Ils sont produits sur Terre par des réactions nucléaires.

## 4) Caractéristique d'une OPPM dans le vide

### a. Vecteur d'onde

Le vecteur d'onde est  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'OPPM dans le vide.

La relation  $k(\omega)$  est appelée *relation de dispersion*. Dans le vide,  $k = \frac{\omega}{c}$  est une relation linéaire, ce qui est équivalent à dire que le vide est non dispersif. Ceci est dû au fait que la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$  est une constante. De plus, la vitesse de groupe  $v_g \frac{d\omega}{dk} = c$  est également une constante.

On peut ainsi réécrire une OPPM dans le vide se propageant sur  $+\vec{u}$  comme :

$$s(M, t) = s_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi \right)$$

Les surfaces d'onde à  $t$  fixé  $s(M, t) = c^{te}$ , ce qui revient à  $\vec{k} \cdot \vec{r} = c^{te}$ . Donc, pour une OPPM dans le vide, les plans d'onde sont des plans.

### b. Vitesse de phase

Par définition, la *vitesse de phase* vaut  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$  pour une OPPM. Cette vitesse correspond à la vitesse de propagation des surfaces d'égale  $\Phi(M, t)$  à  $t$  fixé.

Pour une OPPM dans le vide, d'après la relation de dispersion,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

### c. Périodicité spatiale et temporelle

La période spatiale est appelée *longueur d'onde* et s'exprime en m (ou nm).

La période temporelle est appelée *fréquence* et s'exprime en Hz ( $s^{-1}$ ).

On a de plus<sup>9</sup>,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Le lien entre les deux étant donné par :

$$\lambda = v_\varphi T$$

---

9. Ces résultats se démontrent en utilisant le fait que le cosinus est  $2\pi$ -périodique.

#### d. OPPM et photons

On appelle  $h$  la *constante de Planck* ( $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s).

OPPM : $\omega, k$	Photons (m=0)
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	$E = h\nu = \hbar\omega$ (en J)
$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$	$\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u} = \frac{h\nu}{c}\vec{u} = \frac{\hbar\omega}{c}\vec{u} = \hbar\vec{k}$

#### e. Notation complexe de l'OPPM

La vibration s'écrit,

$$s(M, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Ainsi,

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E)} = \vec{E}_0 e^{i\varphi_E} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

De même,

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_B)} = \vec{B}_0 e^{i\varphi_B} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \underline{\vec{B}_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

**ATTENTION :** La notation complexe est adaptée aux OPPM dans le vide, et aux ondes où les variables spatiales et de temps sont dans l'exponentielle.

En notation complexe pour une formulation  $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  les opérateurs peuvent s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= -i \vec{k} f \text{ (Gradient)} \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{g}} &= -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{g}} \text{ (Divergence)} \\ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{g}} &= -i \vec{k} \times \underline{\vec{g}} \text{ (Rotationnel)} \\ \vec{\nabla}^2 \cdot \underline{\vec{g}} &= (-i \vec{k})^2 \underline{\vec{g}} \text{ (Laplacien)} \\ \frac{\partial}{\partial t} &: \times i\omega \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &: \times (i\omega)^2 \end{aligned}$$

**ATTENTION :** Le signe dépend de la convention car on peut également choisir de mettre la vibration en  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  et dans ce cas, les signes – deviennent des + et vice-versa.

**Remarque :** Attention le  $\times$  n'a pas la même signification pour le rotationnel (produit vectoriel) et dans le cas des dérivées temporelles simple et double (multiplication).

## f. Structure de l'OPPM dans le vide

Transversalité des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

Pour une OPPM se propageant dans le vide,  $\vec{E} \perp \vec{u}$ ,  $\vec{B} \perp \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la direction de propagation.

Démonstration :

Il suffit d'écrire les équations Maxwell-Flux et Maxwell-Gauss en notation complexe.

$$\text{Maxwell-Flux : } \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \Leftrightarrow -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \Leftrightarrow k \vec{u} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

En repassant en notation réelle, on obtient :  $\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$ .

$$\text{Maxwell-Gauss dans le vide : } \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \Leftrightarrow -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \Leftrightarrow k \vec{u} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

En repassant en notation réelle, on obtient :  $\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$ .

Qed

Relation de structure :

Pour une OPPM dans le vide,

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{u} \times \vec{E} = \frac{\vec{u}}{v_\varphi} \times \vec{E}$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow -i \vec{k} \times \underline{\vec{E}} &= -i\omega \underline{\vec{B}} \Leftrightarrow \vec{k} \times \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \\ \Leftrightarrow \frac{\vec{u}}{v_\varphi} \times \underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{B}} \end{aligned}$$

En repassant en notation réelle, on obtient

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{v_\varphi} \times \vec{E}$$

Qed

Relation de dispersion :

La relation de dispersion pour une OPPM dans le vide est donnée par :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

*Démonstration :*

Il suffit d'écrire l'équation de d'Alembert en notation complexe :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (-i\vec{k})^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E} &= \vec{0} \\ -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 &\Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

*Qed*

## 5) Étude énergétique de l'OPPM dans le vide

ATTENTION : Ne pas utiliser la notation complexe, car il y a des produits et la partie réelle d'un produit n'est pas égale au produit des parties réelles.

### a. Densité volumique d'énergie

Par définition,

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Or, pour une OPPM dans le vide, d'après la relation de structure,

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \Leftrightarrow B = \frac{E}{c}$$

Ainsi,  $u_B = u_E$ , il y a équirépartition de l'énergie électromagnétique entre les forces électriques et les forces magnétiques. Ainsi,  $u_{EM} = 2u_E = 2u_B = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ .

Ainsi, pour une OPPM dans le vide,

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Donc, la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie est donnée par :

$$\langle u_{EM}(M, t) \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

L'énergie moyenne répandue dans tout l'espace est donc donnée par :

$$\langle U_{EM} \rangle_t = \iiint_V \langle u_{EM} \rangle_t d\tau = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} d\tau = +\infty$$

Ce résultat aberrant met en évidence que l'on ne sait pas créer une OPPM, qui n'a donc pas de réalité physique. C'est juste un modèle. Une onde réelle est un paquet d'ondes OPPM.

### b. Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \times \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times (\vec{u} \times \vec{E}))$$

Or,  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ , donc

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} ((\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}$$

Ce résultat est dû à la transversalité électrique des OPPM dans le vide.

$$\vec{\Pi}(M, t) = c \varepsilon_0 E^2 \vec{u} = (u_{EM}(M, t)) (c \vec{u})$$

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  a la même direction que celle de propagation de l'onde donc la même que le vecteur d'onde.

$c \vec{u}$  : vecteur vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique  $\vec{v}_{\text{énergie}} = c \vec{u}$ .

Ainsi,

$$\langle \vec{P}_i(M, t) \rangle_t = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle c \vec{u}$$

$$\mathcal{P}_{ray} = \Phi_{\vec{\Pi}} = \iint_S \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle_t dS$$

Identité (énergétique) de rayonnement :

$$I = \langle ||\vec{\Pi}(M, t)|| \rangle_t = c \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle \text{ (en W.m}^{-1}\text{)}$$

### c. Vecteur de Poynting moyen

On donne la relation suivante :

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$\vec{B}^*$  étant le complexe conjugué de  $\vec{B}$ .

## 6) OPPM polarisée rectilignement

### a. Polarisation d'une OPPM

Soit une OPPM se propageant selon  $Ox$  :  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

La polarisation d'une onde est relative uniquement à la direction du champ  $\vec{E}$ .

La *polarisation* d'une OPPM caractérise l'évolution au cours du temps du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  dans le plan d'onde, plan normal à la direction de propagation de l'onde.

Par convention, l'observation se fait dans le sens opposé au sens de propagation.

### b. Polarisation rectiligne

Soit une OPPM se propageant sur  $Ox$ , alors :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{cases} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx - \varphi) \text{ en posant } \varphi = \varphi_y - \varphi_z \end{cases}$$

L'OPPM est *polarisée rectilignement* lorsque, dans un plan d'onde d'équation  $x = x_0$ , le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  a toujours la même direction au cours du temps. La *polarisation rectiligne* correspond au cas où  $\varphi = 0[\pi]$ . Si  $\varphi = 0$ , alors  $E_y$  et  $E_z$  vibrent en phase. Sinon, lorsque  $\varphi = \pm\pi$ , les composantes  $E_y$  et  $E_z$  vibrent en opposition de phase.

Si  $\varphi = \frac{\pi}{2}[\pi]$ , alors l'onde est *polarisée elliptiquement*.

De plus, si  $E_{0x} = E_{0y}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}[\pi]$ , alors l'onde est *polarisée circulairement*.

## 7) Production et analyse de lumière polarisée rectilignement

### a. Lumière naturelle

La lumière naturelle possède une certaine étendue en fréquence. On s'intéresse donc à la lumière naturelle après l'action d'un filtre, qui permet d'isoler une fine bande fréquentielle permettant de considérer la lumière naturelle comme quasi-monochromatique.

La lumière obtenue est bien transverse mais n'est pas polarisée. Le terme  $\varphi$  varie aléatoirement et très rapidement dans le temps. Dans le plan normal,  $\vec{E}$  prend toutes les directions possibles.

**La lumière naturelle n'est pas polarisée.**

### b. Polariseur et analyseur

Un *polariseur* est un système optique plan, possédant une direction privilégiée, celle de son axe de transmission.

Le polariseur transmet la composante du champ électrique incident parallèle à son axe de transmission. Un polariseur est donc un "projecteur" de champ électrique sur son axe de transmission.

La lumière sortant d'un polariseur est polarisée rectilignement, quelle que soit la nature de la lumière incidente.

### c. Loi de Malus

On considère un polariseur suivi d'un analyseur : les axes de transmission respectifs font un angle  $\alpha$  entre eux.

#### Loi de Malus :

Quand on place successivement un polariseur et un analyseur, dont les axes de transmission font un angle  $\alpha$  entre eux, l'intensité  $I_2$  après l'analyseur est liée à l'intensité  $I_1$  incidente par la relation :

$$I_2 = I_1 \cos^2(\alpha)$$

*Démonstration :*

Après le polariseur  $P$ , la lumière est polarisée rectilignement sur  $\vec{u}_p$  :  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_p$ .

Après l'analyseur  $A$ , la lumière est polarisée rectilignement sur  $\vec{u}_A$  :  $\vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A = E_1 \cos(\alpha) \vec{u}_A$ .

Or,  $I_1 = \langle \|\vec{H}\| \rangle_t = c\varepsilon_0 \langle E_1^2 \rangle$  et  $I_2 = c\varepsilon_0 \langle E_2^2 \rangle = c\varepsilon_0 \langle E_1^2 \rangle \cos^2(\alpha) = I_1 \cos^2(\alpha)$

*Qed*

## II. Rayonnement dipolaire électrique

### 1) Présentation du modèle du dipôle oscillant

#### a. Dipôle oscillant

Le modèle du *dipôle oscillant* consiste à étudier l'ensemble de deux charges opposées :

- charge (-q) en O
- charge (+q) mobile en P tel que :  $\overrightarrow{OP(t)} = a \cos(\omega t) \vec{u}_z = z(t) \vec{u}_z$

Attention, la charge  $q$  considérée n'est pas nécessairement positive.

Le moment dipolaire instantané associé au système est donc :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{OP(t)} = qa \cos(\omega t) \vec{u}_z = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Le dipôle oscillant, localisé au point  $O$ , émet une onde électromagnétique qui se propage dans le vide, selon la direction  $u_r$ . Quelle est l'expression du champ électromagnétique émis par ce dipôle ?

#### b. Cadre de l'étude

On se place dans les conditions telles que :  $a \ll \lambda \ll r = OM$  soit vérifiée. On cherche donc l'expression du champ électromagnétique rayonné par ce dipôle :

- en un point  $M$  très éloigné du dipôle,
- sachant que la charge mobile placée au point  $P$  n'est pas relativiste,
- dans la *zone de rayonnement* ie  $r \gg \lambda$

On fait donc l'*approximation dipolaire*,  $M$  est à grande distance devant une dimension caractéristique du dipôle, ie l'amplitude d'oscillation de la charge mobile :  $r \gg a$ .

La charge mobile est non relativiste, ce qui implique  $v \ll c \Leftrightarrow aw \ll c \Leftrightarrow a \ll cT = \lambda$ .

Le point  $M$  est dans la *zone de rayonnement*  $r \gg \lambda$ .

### c. Application du modèle

On peut utiliser ce modèle lorsque la condition  $a \ll \lambda \ll r$  est vérifiée.

Dans le domaine optique, le dipôle oscillant décrit correctement l'émission d'une onde lumineuse par un atome d'une lampe spectrale. La zone de rayonnement correspond aux conditions courantes de perception des ondes en optique.

Dans le domaine hertzien, le dipôle oscillant décrit correctement l'émission d'une onde électromagnétique par une antenne. En effet, une *antenne* est un conducteur parcouru par un courant. Les antennes utilisées pour la radiodiffusion ont des longueurs de quelques mètres (ordre de grandeur de  $\lambda$ ). La condition  $a \ll \lambda$  n'est pas vérifiée et le modèle du dipôle oscillant ne peut pas être utilisé pour l'antenne complète. Cependant, le modèle du dipôle oscillant correspond à un élément infinitésimal d'antenne, pour lequel la condition  $a \ll \lambda$  est vérifiée.

## 2) Champ électromagnétique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant

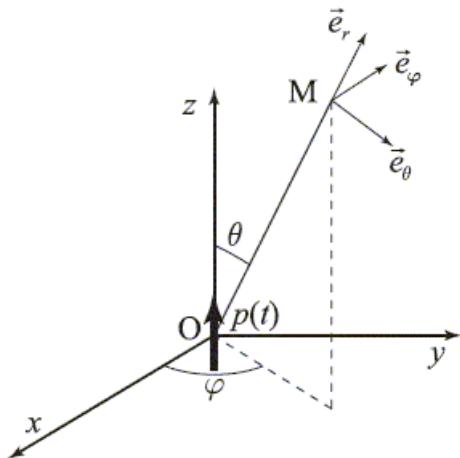


FIGURE 70 – Dipôle oscillant représentation

### a. Champ électromagnétique rayonné

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\varphi$$

$\frac{r}{c}$  est le temps mis par l'onde EM pour aller de  $O$  à  $M$  dans vide donc à la vitesse  $c$ .

En considérant,  $p(t) = p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\omega^2 p_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$ .

Remarque : L'obtention de ces expressions est hors programme CPGE, on trouvera le calcul dans le cours de P.PUZO chapitre 8 ou diapo 6.1.

Donc,

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r} p_0 \omega^2 \cos\left(\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{rc} p_0 \omega^2 \cos\left(\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

### b. Structure locale du champ rayonné

L'onde électromagnétique rayonnée dans le vide, de la direction  $\vec{u}_r$ , par le dipôle oscillant a la structure d'une OPPM, polarisée rectilignement sur  $\vec{u}_\theta$ .

**ATTENTION :** Cette relation n'est vraie que localement en un point  $M$  et en instant  $t$  donné.

D'après les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , l'onde est à la fois transverse électrique et magnétique, comme une OPPM.

La relation de structure  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r}{c} \times \vec{E}$  est également vérifiée.

De plus, le champ  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement sur  $\vec{u}_\theta$ .

L'analogie est vraie uniquement localement à cause de la décroissance en  $\frac{1}{r}$  des amplitudes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

L'expression des champs dépend de  $\ddot{p}$ , donc de l'accélération des particules chargées. Seules les particules chargées et accélérées rayonnent un champ électromagnétique.

Les directions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  peuvent être déterminées par analyse des symétries des distributions de charges et de courants.

On peut alors tracer l'*indicatrice de rayonnement* :

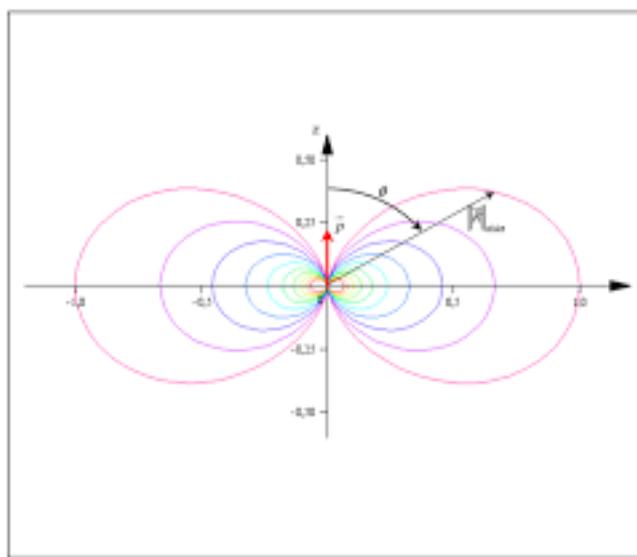


FIGURE 71 – Indicatrice de rayonnement

En trois dimensions, on obtient un tore.

### 3) Puissance rayonnée

#### a. Vecteur de Poynting et intensité du rayonnement

D'après la définition et la relation de structure, on a :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}_r$$

Ainsi, d'après l'expression de  $\vec{E}$ ,

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} p_0^2 \omega^4 \cos^2 \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \vec{u}_r$$

Donc, en moyenne temporelle,

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle_t = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} p_0^2 \omega^4 \vec{u}_r \Rightarrow I(r, \theta) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle = I_0(r) \sin^2(\theta)$$

#### b. Indicatrice de rayonnement

L'*indicatrice de rayonnement* est la surface qui représente à  $r$  fixé, la fonction  $I(r \text{ fixé}, \theta) = I_0 \sin^2(\theta)$ .

Pour  $\theta = 0$ ,  $I(\theta) = 0$ . Ainsi, le dipôle oscillant n'émet aucune puissance dans sa propre direction et émet aux maximum dans le plan qui lui est orthogonal. Le rayonnement du dipôle est *anisotrope*.

#### c. Puissance moyenne totale rayonnée

En travaillant en coordonnées sphériques, on cherche à calculer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère  $S$  de rayon  $r$  fixé, donc  $d\vec{S} = rd\theta r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_r = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{u}_r$ .

Par définition,

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint_S \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} p_0^2 \omega^4 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{\frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{1}{12\pi} \frac{\mu_0}{c} p_0^2 \omega^4$$

*Démonstration :*

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \int_0^\pi \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) d(-\cos(\theta))$$

En posant  $u = -\cos(\theta)$ , on a :

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

*Qed*

## 4) Manifestations du rayonnement dipolaire électrique

### a. Notions sur la diffusion Rayleigh

La *diffusion* d'une onde électromagnétique incidente est le renvoi de celle-ci dans toutes les directions sans changement de fréquence après interaction avec un système matériel.

La *diffusion Rayleigh* est le nom donné à la diffusion de la lumière par des particules de taille très inférieure aux longueurs d'ondes de cette lumière (diamètre des particules <  $0.1\mu\text{m}$ ).

La diffusion Rayleigh concerne donc la diffusion de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère.

Alors que la lumière du Soleil n'est pas polarisée et dominée par le jaune, la lumière diffusée par les molécules de l'atmosphère est polarisée et dominée par le bleu (conférant au ciel sa couleur).

### b. Polarisation par diffusion

Partant de la lumière non polarisée du Soleil, la diffusion permet d'obtenir une onde polarisée rectilignement dans certaines directions.

### c. Bleu du ciel et rouge du Soleil couchant

On a montré que la puissance rayonnée par un dipôle oscillant dépend de  $\omega^4$  donc est inversement proportionnelle à  $\lambda^4$ .

Ainsi,

$$\frac{\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle_{bleu}}{\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle_{rouge}} = \left( \frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{bleu}} \right)^4 = 2^4 = 16$$

L'importance relative du bleu est donc nettement renforcée dans la lumière diffusée, ce qui explique la couleur bleue du ciel.

L'atténuation dans le bleu dans la direction incidente de la lumière solaire est beaucoup plus forte. C'est pourquoi, dans le prolongement de la direction incidente, la lumière est donc rouge, ce qui explique la couleur rouge du Soleil couchant.

La lumière solaire est principalement diffusée dans le bleu et donc atténuée dans le bleu, ce qui explique la couleur rouge du Soleil couchant.

### d. Rayonnement d'un charge accélérée : rayonnement d'accélération

La puissance moyenne rayonnée vaut :

$$\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4$$

En considérant,

$$z(t) = a \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{z}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t)$$

Donc,

$$(\ddot{z}(t))^2 = a^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) \Rightarrow \langle (\ddot{z}(t))^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{p_0^2 \omega^4}{q^2} \Leftrightarrow p_0^2 \omega^4 = 2q^2 \langle (\ddot{z}(t))^2 \rangle$$

Formule de Larmor :

$$\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle_t = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \langle (\ddot{z}(t))^2 \rangle_t$$

Toute particule chargée accélérée rayonne des ondes électromagnétiques.

Applications : rayonnement dipolaire électrique et magnétique, rayonnement thermique émis par un corps chauffé, rayonnement de freinage, rayonnement synchrotron

### III. Propagation d'une OPPM dans un plasma

Le plasma est un milieu globalement neutre, mais est-il localement neutre ?

L'OPPM considérée est transverse électrique. Ainsi, à partir de l'équation de Maxwell-Gauss, on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -i \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

#### 1) Propagation d'une OPPM transverse dans un plasma peu dense

##### a. Modélisation

Un *plasma* est un milieu ionisé, globalement neutre, constitué d'ions positifs supposés immobiles, de masse  $M$  et de charge  $(+e)$  et d'électrons mobiles, supposés non relativistes, de masse  $m \ll M$  et de charge  $(-e)$ . On appelle  $n_0$  la densité particulaire. Un *plasma peu dense* est un milieu dilué, où  $n_0$  est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les interactions entre les particules chargées.

##### b. Effet d'une OPPM Transverse sur un plasma

On s'intéresse à la propagation d'une OPPM selon la direction  $\vec{u}_x$  transverse électrique. Sous l'action du champ électromagnétique de cette OPPM, les particules chargées du plasma se mettent en mouvement. On considère seulement le mouvement des électrons, les ions étant supposés immobiles car beaucoup plus massifs.

Les électrons ayant un mouvement d'ensemble, créent des courants de conduction dans le plasma, caractérisés par un vecteur densité volumique de courant. Ainsi, contrairement au vide, dans le plasma,  $\vec{j} \neq \vec{0}$ .

##### c. Pulsation plasma

On définit une *pulsation plasma* caractéristique du plasma par :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} \text{ et } f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

#### d. Vecteur densité volumique de courant

On considère une OPPM transverse électrique, donc  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ .

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i \vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{k}{\omega}\right) \vec{u}_x \times \vec{E} \\ &\Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{v_\varphi}\end{aligned}$$

De plus, par définition,

$$\vec{j} = \vec{j}_{e^-} + \vec{j}_{ions} = -n_0 e \vec{v}_e + n_0 e \vec{v}_{ions} = n_0 e (\vec{v}_{ions} - \vec{v}_e)$$

Pour déterminer  $\vec{v}_e$ , on étudie un électron de masse  $m$ , de charge  $-e$  dans un référentiel galiléen. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \underbrace{-e \vec{E}}_{\vec{f}_E} + \underbrace{(-e)(\vec{v}_e \times \vec{B})}_{\vec{f}_B} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{négligé}} + \underbrace{\text{Interactions}}_{\text{Plasma dilué - négligées}}$$

Or,

$$\frac{\|\vec{f}_B\|}{\|\vec{f}_E\|} = \frac{\|-e(\vec{v}_e \times \vec{B})\|}{\|-e\vec{E}\|} \approx \frac{v_e \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v_e}{v_\varphi} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1$$

Donc en négligeant la force magnétique devant la électrique, on obtient en notation complexe :

$$im\omega \underline{\vec{v}_e} = -e \underline{\vec{E}} \Leftrightarrow \underline{\vec{v}_e} = \frac{(-e)\underline{\vec{E}}}{(i\omega)m}$$

Pour les ions et par un raisonnement similaire, on obtient :

$$\underline{\vec{v}_{ions}} = \frac{e \underline{\vec{E}}}{(i\omega)M}$$

Ainsi,

$$\underline{\vec{j}} = n_0 e^2 \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \underline{\vec{E}} \approx \frac{1}{i\omega} \left( \frac{n_0 e^2}{m} \right) \underline{\vec{E}} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} \underline{\vec{E}}$$

L'approximation provient du fait que  $M \gg m \Rightarrow \frac{1}{M} \ll \frac{1}{m}$ .

Ainsi, on retient que  $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$  où  $\underline{\gamma} = -i \frac{n_0 e^2}{m\omega} = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$  est la *conductivité complexe du plasma*.

On a donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y \\ \underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} = \underbrace{(-i)}_{\pi} \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y \\ \qquad \qquad \qquad e^{-i \frac{\pi}{2}} \end{array} \right.$$

En repassant en notation réelle, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \\ \vec{j}(M, t) = E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_y \end{cases}$$

$\vec{j}$  est déphasé de  $-\frac{\pi}{2}$  par rapport à  $\vec{E}$ . Il s'agit d'une quadrature retard.

De plus,

$$\frac{dP_{\text{cédée}}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} E_0^2 \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} E_0^2 \frac{1}{2} \sin(2(\omega t - kx))$$

En moyenne, la puissance cédée par le champ électromagnétique de l'OPPM au plasma est nulle étant donné que la valeur moyenne d'un sin est nulle.

Pendant une alternance, les électrons sont accélérés car ils reçoivent de l'énergie EM, ils sont ensuite décélérés et rayonnent de l'énergie électromagnétique.

#### e. Équation de propagation du champ électrique dans le plasma

Dans un plasma, les équations de Maxwell sont :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

L'équation de Maxwell-Ampère peut donc s'écrire sous la forme :

$$-i \vec{k} \times \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 i\omega \underline{\vec{E}} \left( \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0 i\omega} + 1 \right)$$

Or, d'après l'expression de  $\underline{\gamma} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega i}$ , on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \underbrace{\left( -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \right)}_{\varepsilon_r(\omega)} = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Dans cette formule,  $\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  est la *permittivité diélectrique du plasma*.

L'équation de propagation d'une OPPM dans un plasma est donc donnée par :

$$\vec{\Delta} \underline{\vec{E}} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

*Démonstration :*

*Il suffit de calculer le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :*

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}}) &= \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}})}_0 - \vec{\Delta} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \vec{\Delta} \underline{\vec{E}} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} &= \vec{0}\end{aligned}$$

*Qed*

#### f. Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Cette relation n'est pas linéaire, le plasma est donc un milieu dispersif.

*Démonstration :*

*On part de l'équation de propagation démontrée précédemment :*

$$\begin{aligned}\vec{\Delta} \underline{\vec{E}} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (-i \vec{k})^2 \underline{\vec{E}} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} &= \vec{0} \\ \Rightarrow -k^2 + \frac{\varepsilon_r}{c^2} \omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}\end{aligned}$$

*Qed*

## 2) Solutions de l'équation de propagation

### a. Étude de la relation de dispersion

La relation de dispersion dans un plasma est donnée par :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

La pulsation plasma  $\omega_p$  joue donc un rôle fondamental.

Si  $\omega > \omega_p$  alors  $k^2 > 0$  et  $k$  est réel. La solution est alors une OPPM et il y a propagation dans le plasma.

Si  $\omega < \omega_p$  alors  $k^2 < 0$  et  $k$  est un imaginaire pur. La solution est alors une *onde évanescante* et il n'y a pas de propagation.

Vis à vis des ondes électromagnétiques, le plasma se comporte comme un filtre passe-haut, de pulsation de coupure basse égale à  $\omega_p$ .

### b. Vecteur d'onde dans le cas général

Dans le cas général,  $\underline{k} = k' + ik''$ . Or,  $\vec{\underline{k}} = \underline{k}\vec{u}_x$ . Ainsi,

$$\omega t - \vec{\underline{k}} \cdot \vec{r} = \omega t - \underline{k}x = \omega t - k'x - ik''x$$

Donc,

$$e^{i(\omega t - \vec{\underline{k}} \cdot \vec{r})} = e^{k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$$

La partie réelle de  $\underline{k}$  intervient dans le terme de propagation. Donc, si  $k' = 0$ , il n'y a pas de propagation de l'onde.

La partie imaginaire de  $\underline{k}$  intervient quant à elle dans un terme d'atténuation si  $k'k'' < 0$  ou un terme d'amplification si  $k'k'' > 0$ .

Pour déterminer le signe de  $k''$ , il faut étudier la physique du problème et en particulier l'extension spatiale du milieu :

- Si le milieu est infini alors l'exponentielle ne pouvant pas diverger,  $k'' < 0$ ,
- Si le milieu est limité, alors il peut y avoir amplification (LASER)

### c. Cas de la propagation

On suppose dans cette partie :  $\omega > \omega_p$ . Ainsi,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$$

La vitesse de phase est donc donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

La vitesse de phase dépend de  $\omega$ , le plasma est un milieu dispersif car il peut séparer des ondes de pulsations différentes. La vitesse de phase est supérieure à  $c$ , mais il n'y a pas de problème physique car  $v_\varphi$  est associée au modèle de l'OPPM qui n'a pas de réalité physique.

### d. Cas de l'onde évanescante

On suppose dans cette partie :  $\omega < \omega_p$ . La relation de dispersion donne :

$$k^2 = i^2 \left( \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \right) < 0$$

Donc,  $\underline{k}$  est un imaginaire pur tel que :

$$\underline{k} = ik'' \text{ avec } k'' = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} = \frac{1}{\delta}$$

$\delta$  est en mètres (m). Cette longueur est caractéristique de l'amortissement de l'onde dans le plasma. En effet, on peut écrire :

$$\vec{\underline{E}}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

On remarque bien à l'aide de cette expression que  $\delta$  est caractéristique de la décroissance de l'amplitude de l'onde.

### e. Graphe de $k(\omega)$

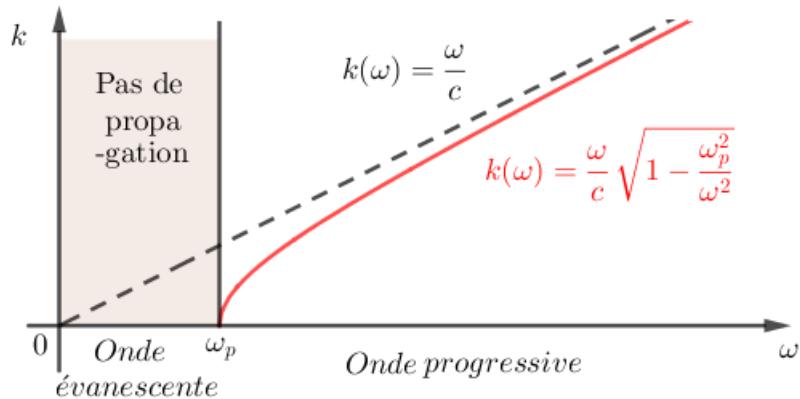


FIGURE 72 – Tracé de  $k(\omega)$  pour un plasma

### f. Aspects énergétiques

Dans le cas d'une propagation,

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \\ \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{v_\varphi} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 c^2 E_0^2}{v_\varphi} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

Dans le cas d'une onde évanescante,

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0 e^{k'' x} \cos(\omega t) \vec{u}_y \\ \vec{B}(M, t) = -\frac{k''}{\omega} E_0 e^{k'' x} \sin(\omega t) \vec{u}_z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\vec{\Pi}(M, t) = -(\varepsilon_0 c^2) \frac{E_0^2}{2} \frac{k''}{\omega} e^{2k'' x} \sin(2\omega t) \vec{u}_x \text{ et } k'' = \frac{1}{\delta}$$

En moyenne, la norme du vecteur de Poynting est nulle. Ainsi l'OPPM telle que  $\omega < \omega_p$  ne communique aucune énergie au plasma, qui se comporte alors comme un miroir. Ces ondes sont alors réfléchies selon les lois de Descartes.

### 3) Dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe

#### a. Présentation du phénomène de dispersion

Une OPPM n'a pas de réalité physique : une onde réelle est donc un paquet d'ondes.

Si la vitesse de phase dépend de la pulsation,  $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$ , alors les phases des différentes composantes du paquet d'ondes progressent à des vitesses différentes et l'onde se déforme en se propageant : on dit qu'il y a *dispersion*.

#### b. Propagation de deux OPPM de fréquences voisines

Le paquet d'ondes le plus simple est celui obtenu par superposition de deux OPPM de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  très proches, de même amplitude en  $x = 0$  et à  $t = 0$ . Autrement dit,  $s(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ .

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  étant voisines, on note :  $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $\delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ ,  $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$  et  $\delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$ .

À partir des propriétés trigonométriques, on peut montrer que :

$$s(x, t) = 2A \underbrace{\cos(\omega_m t - k_m x)}_{\text{Onde moyenne}} \underbrace{\cos(\delta\omega t - \delta k x)}_{\text{Onde enveloppe}}$$

À l'instant  $t$ , on observe un phénomène de battements : une onde moyenne de nombre d'onde  $k_m$  est enveloppée d'une onde enveloppe de nombre d'onde  $\delta k$ .

#### c. Propagation d'un paquet d'onde

On définit la *vitesse de phase* comme  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\Re(k)}$  comme la vitesse correspondant à la vitesse de propagation de la phase d'une composante monochromatique. La vitesse de phase peut-être supérieure à  $c$ , car ce n'est pas la vitesse propagation de l'énergie, ni d'aucune information macroscopique.

On définit la *vitesse de groupe* comme  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  comme étant la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde. La vitesse de groupe reste inférieure à  $c$ , car elle s'identifie souvent à la vitesse de propagation de l'énergie (ou de l'information), l'énergie associée à l'onde étant localisée dans le paquet d'ondes.

Si  $v_\varphi$  dépend effectivement de  $\omega$ , alors la phase de chaque OPPM se propage à sa propre vitesse. Une onde physique réelle, qui est un paquet d'ondes constitué d'OPPM, se déforme au cours de sa propagation : ce phénomène est appelé *dispersion*.

#### d. Applications : vide et plasma

Dans le vide, la relation de dispersion est  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ . Ce qui donne directement,  $v_\varphi = v_g = c$ .

Dans un plasma, la relation de dispersion est  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ .

$$\text{Ainsi, } v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

En différentiant, la relation de dispersion, on trouve  $2kdk = \frac{2\omega}{c^2}d\omega$  et donc  $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ .

On remarque que pour un plasma et pour  $\omega > \omega_p$ ,  $v_\varphi v_g = c^2$ . De plus, pour une OPPM de pulsation très grande devant  $\omega_p$ , alors  $v_\varphi \approx v_g \approx c$  et l'onde traverse le plasma comme si c'était du vide. Physiquement, les électrons n'ont plus le temps de suivre les variations du champ électromagnétique de l'onde et ne bougent plus.

Remarque : Il est à noter que  $v_\varphi v_g$  n'est pas toujours égal à  $c^2$ .

### e. Indice du plasma

Par définition,  $\overrightarrow{k_{milieu}} = n\overrightarrow{k_{vide}}$ .

Donc, l'indice d'un plasma est donné par  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ .

## IV. Propagation d'une OPPM dans un milieu ohmique

### 1) Équations de Maxwell dans un milieu ohmique

#### a. Milieu conducteur ohmique

Un *conducteur électrique* est un corps dans lequel des porteurs de charge peuvent se déplacer sous l'action d'une force infiniment petite. Le contraire d'un conducteur est un isolant.

Un milieu est un *conducteur électrique* si, sous l'action d'un champ électrique, il apparaît un courant de conduction, caractérisé par un vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

Un milieu conducteur est dit *ohmique* s'il satisfait la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , où  $\gamma$  est la conductivité du métal en  $\text{S.m}^{-1}$ . La conductivité électrique est un réel positif pour un métal.

#### b. Disparition d'un excès local de charge

Montrons que  $\forall M, \forall t, \rho(M, t) = 0$ .

Supposons qu'il y ait à  $t = 0$  un excès local de charge en  $M$ , établissons l'évolution de  $\rho(M, t)$  par la suite.

À partir de l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} &\xrightarrow[t \gg \tau]{} 0 \text{ avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19} s
 \end{aligned}$$

La conductivité électrique des métaux est de l'ordre de  $10^6$  ou  $10^7$  S.m $^{-1}$ .

Ainsi,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ .

### c. Courant de conduction dominant

Montrons que  $\|\vec{j}_d\| \ll \|\vec{j}\|$  dans le cadre de l'ARQS magnétique.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 \text{Or, } \vec{j} &= \gamma \vec{E} \text{ et } \vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \\
 \Rightarrow \frac{\|\vec{j}_d\|}{\|\vec{j}\|} &= \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \omega \tau
 \end{aligned}$$

Ce rapport est faible devant 1 pour des fréquences inférieures à  $10^{18}$  Hz, ce qui est bien dans le cadre de l'ARQS.

### d. Équation de diffusion

Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}
 \end{array}
 \right.$$

En prenant, le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, on montre :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Cette relation n'est pas invariante par changement  $t$  en  $-t$ , la propagation d'une onde EM dans un conducteur ohmique n'est pas réversible.

## 2) "Effet de peau" dans un métal

### a. Relation de dispersion

On écrit l'équation de propagation en notation complexe :

$$(-i\vec{k})^2 \vec{E} - \mu_0 \gamma i \omega \vec{E} = \vec{0}$$

D'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}} \mu_0\gamma\omega$$

Donc,  $\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0\gamma\omega} = \pm \frac{1-i}{\delta}$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$  est en mètres (m) et est appelée *épaisseur de peau*.

### b. Champ électrique

$$i(\omega t - \underline{k}z) = i(\omega t - k'z) + k''z \text{ avec } \underline{k} = k' + ik''.$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{k''z} e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$$

En choisissant une propagation sur  $+\vec{u}_z$ ,  $k' > 0$  et  $k'' < 0$  et donc  $k' = \frac{1}{\delta} = -k''$ .

D'où

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Donc,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \underbrace{\gamma E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}}_{\text{amplitude exp décroissante}} \cos\left(\underbrace{\omega t - \frac{z}{\delta}}_{\text{terme de propagation}}\right) \vec{u}_x$$

Au bout de quelques  $\delta$ , l'onde est atténuee. Le courant de conduction  $\vec{j}$  n'existe que dans une volume d'épaisseur  $\delta$  très faible.

$$\left( \frac{d\mathcal{P}_{joule}}{d\tau} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \Rightarrow \left\langle \left( \frac{d\mathcal{P}_{joule}}{d\tau} \right) \right\rangle = \gamma \frac{E_0^2}{2} e^{-2\frac{z}{\delta}}$$

### c. Vitesses de phase et de groupe

Par définition,  $v_\varphi = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})}$  et  $\Re(\underline{k}) = k' = \frac{1}{\delta}$ .

Donc,  $v_\varphi = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}} = c\sqrt{2\mu_0\omega\tau}$ . Le métal est donc un milieu dispersif.

En différentiant la relation :  $k'^2 = \frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu_0\gamma\omega}{2}$ , on trouve  $v_g = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}} = 2v_\varphi$ .

#### d. Champ magnétique

En écrivant en notation complexe l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \times \vec{E}$$

Donc,

$$\vec{B}(M, t) = \frac{k}{\omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_y$$

$$\text{Or, } k = k' + ik' = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc,

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y$$

#### e. Aspects énergétiques

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \delta \omega} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(2\omega t - \frac{2z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \vec{u}_z$$

Donc,

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \delta \omega} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}}$$

### 3) Applications

On étudie parfois les *conducteurs parfaits* pour lesquels  $\gamma$  est considérée comme infinie et donc  $\delta = 0$ .

## V. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

### 1) Distribution surfacique de charges et de courants

#### a. Modèle de distribution surfacique de charge et de courant

On appelle  $\sigma(M, t)$  la densité surfacique de charges au point  $M$  et à l'instant  $t$  en  $\text{C.m}^{-2}$  et  $\vec{j}_s(M, t) = \sigma(M, t) \vec{v}$  le vecteur densité surfacique de courant au point  $M$  et à  $t$  en  $\text{A.m}^{-1}$ .

Le modèle de la distribution surfacique de charges et de courant n'a pas de réalité physique. Ce modèle limite introduit des discontinuités du champ électromagnétique à la traversée d'une surface chargée parcourue par des courants.

## b. Relations de passage

Les équations de Maxwell décrivent le champ électromagnétique créé par des distributions volumiques de charges et de courants.

Dans le cas de modélisation surfacique, on ne peut pas écrire les équations de Maxwell en un point de la surface.

Dans le cas d'une modélisation surfacique ( $\sigma, \vec{j}_s$ ), les équations de Maxwell sont remplacées par les relations entre les champs de part et d'autre de la surface, appelées *relations de passage* :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) &= \mu_0 \vec{j}_s \times \vec{n}_{12}\end{aligned}$$

## 2) Plan conducteur parfait

### a. Modèle du conducteur parfait

Un milieu conducteur ohmique est un milieu conducteur qui vérifie la loi d'Ohm locale ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ). Un *conducteur électrique parfait* est un conducteur ohmique dont la conductivité électrique est infinie.

*Remarque : Ce modèle décrit correctement la physique des bons conducteurs métalliques dans un domaine étendu de fréquences.*

L'épaisseur de peau<sup>10</sup> d'un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  est définie par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma (2\pi\nu)}}$$

Dans le cas d'un conducteur ohmique parfait, la conductivité étant considérée comme infinie, l'épaisseur de peau est nulle.

Les ondes électromagnétiques ne pénètrent donc pas dans un conducteur parfait : elles sont réfléchies par le conducteur parfait.

### b. Champ électromagnétique, charge et courant à l'intérieur du conducteur parfait

Dans le conducteur parfait,  $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ ,  $\vec{B}_{int} = \vec{0}$ ,  $\rho_{int} = 0$  et  $\vec{j}_{int} = \vec{0}$ .  
 À priori,  $\sigma \neq 0$  et  $\vec{j}_s \neq \vec{0}$ .

$$\left( \frac{d\mathcal{P}_{cédée}}{d\tau} \right) = \vec{j}_{int} \cdot \vec{E}_{int} = 0$$

Dans un conducteur parfait, il n'y a pas de perte d'énergie par effet Joule. Une onde électromagnétique ne peut pas pénétrer dans un conducteur parfait, elle est réfléchie.

---

10. Notion introduite dans la section précédente

Démonstration :

$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}_{int} = \gamma E_{int}^2$  est une grandeur finie et  $\gamma$  est infinie donc  $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ .

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\vec{E}_{int}$  étant nul, le champ  $\vec{B}_{int}$  est constant (nul) car un champ statique ne peut pas être celui d'une onde électromagnétique.

D'après l'équation de Maxwell-Gauss,  $\vec{E}_{int}$  étant nul,  $\rho_{int} = 0$ .

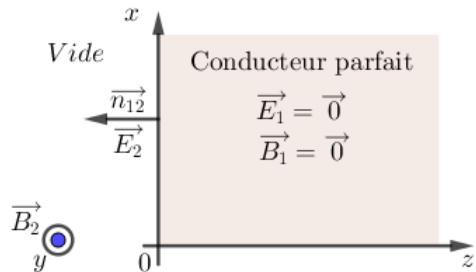
Enfin, sachant que  $\vec{E}_{int}$  et  $\vec{B}_{int}$  sont nuls, on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère que  $\vec{j}_{int} = \vec{0}$ .

Qed

### c. Champ électromagnétique au voisinage immédiat du conducteur parfait

$$\forall t, \vec{E}_2(z=0,t) = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n}_{12}$$

$$\forall t, \vec{B}_2(z=0,t) = \mu_0 \vec{j}_s(z=0,t) \times \vec{n}_{12}$$



Démonstration directe en utilisant les relations de passage et en utilisant  $\vec{E}_1 = \vec{B}_1 = \vec{0}$ .

### 3) Réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait

#### a. Existence d'une onde réfléchie

D'un point de vue théorique, l'existence d'une onde réfléchie est imposée par les relations de passage. En effet, il faut assurer, en  $z = 0$ , la continuité de la composante tangentielle du champ électrique. Ainsi,  $\vec{E}_{2tang}(z=0,t) = \vec{E}_{1tang}(z=0,t) = \vec{0}$  n'est possible que s'il existe une onde réfléchie dans le milieu 2 (vide) telle que  $\vec{E}_{2tang}(z=0,t) = \vec{E}_i(z=0,t) + \vec{E}_r(z=0,t) = \vec{0}$ .

#### b. Recherche de l'onde réfléchie

On considère comme onde incidente une OPPM transverse sur  $\vec{u}_x$  se propageant dans le vide sur  $+\vec{u}_z$ . Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \\ \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z}{c} \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ \vec{k}_i = k \vec{u}_z \text{ et } k = \frac{\omega}{c} \end{array} \right.$$

On recherche donc une onde réfléchie qui a à priori la forme suivante :

$$\vec{E}_r = \begin{cases} E_{rx}(x, y, z, t) \\ E_{ry}(x, y, z, t) \\ E_{rz}(x, y, z, t) \end{cases}$$

L'onde réfléchie a la même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente.

Les électrons (à la surface du conducteur) subissent la force de Lorentz associée au champ électrique incident et ont donc un mouvement sinusoïdal à la pulsation  $\omega$ . Le mouvement d'ensemble des électrons crée un courant de surface (sinusoïdal  $\omega$ ) responsable de l'onde réfléchie qui a donc la pulsation  $\omega$  et la polarisation de  $\vec{E}_i$ .

L'onde réfléchie est une OPPPM transverse, polarisée sur  $\vec{u}_x$  et progressive sur  $-\vec{u}_z$ .

Le plan conducteur étant infini selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , le problème est invariant par translation sur  $x$  ou  $y$ , donc  $\vec{E}_r = \vec{E}_r(z, t)$ . L'onde réfléchie est donc plane et se propage sur  $-\vec{u}_z$ .

À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, écrite en notation complexe, on montre bien que l'onde est transverse électrique. Ainsi, on peut simplifier l'écriture de  $\vec{E}_r$  en :

$$\vec{E}_r = \begin{cases} E_{rx}(z, t) = E_{r0x} \cos(\omega t + kz - \varphi_x) \\ E_{ry}(z, t) = E_{r0y} \cos(\omega t + kz - \varphi_y) \\ E_{rz}(z, t) = 0 \end{cases}$$

On utilise les relations de passage pour déterminer les constantes liées à l'amplitude et au déphasage.

La relation de passage pour  $\vec{E}$  donne :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(z = 0, t) - \vec{E}_1(z = 0, t) &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{E}_i(z = 0, t) + \vec{E}_r(z = 0, t) - \vec{0} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{aligned}$$

En projetant sur  $\vec{u}_x$ ,  $E_0 \cos(\omega t) + E_{r0x} \cos(\omega t - \varphi_x) = 0$

$$\Rightarrow E_{r0x} \cos(\omega t - \varphi_x) = -E_0 \cos(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \pi)$$

$$\Rightarrow E_{r0x} = E_0 \text{ et } \varphi_x = \pi$$

En projetant sur  $\vec{u}_y$ ,  $0 + E_{r0y} \cos(\omega t - \varphi_y) = 0$

$$\Rightarrow E_{r0y} = 0 \text{ et } \varphi_y = 0$$

Finalement,

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{u}_z}{c} \times \vec{E}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

### c. Onde résultante : onde stationnaire

Les relations trigonométriques utilisées sont :

$$\begin{aligned}\cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

L'onde résultante est donnée par la somme du champ incident et du champ réfléchi.

$$\begin{aligned}\vec{E}_2(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ \Leftrightarrow \vec{E}_2(M, t) &= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{E}_2(M, t) &= E_0(2) \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x \\ \Rightarrow \vec{E}_2(M, t) &= 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_2(M, t) &= \frac{E_0}{c} [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)] \vec{u}_y \\ \Rightarrow \vec{B}_2(M, t) &= 2 \frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y\end{aligned}$$

À priori,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ .

Une onde stationnaire possède des *nœuds de vibration*, point de vibration nulle, quel que soit  $t$  et des *ventres de vibration*, point où l'amplitude est maximale quel que soit  $t$ .

Ainsi, d'après les expressions de  $\vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ ,

les nœuds de vibration électrique sont obtenus pour  $\sin(kz) = 0 \Leftrightarrow kz = -N\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi z}{\lambda} = -N\pi \Leftrightarrow z(N_E) = -N\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ .

les ventres de vibration électrique sont obtenus pour  $\sin(kz) = \pm 1 \Leftrightarrow kz = -\frac{\pi}{2} - N\pi \Leftrightarrow z(V_E) = -\frac{\lambda}{4} - N\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ .

les nœuds de vibration magnétique sont obtenus pour  $\cos(kz) = 0 \Leftrightarrow kz = -\frac{\pi}{2} - N\pi \Leftrightarrow z(N_B) = -\frac{\lambda}{4} - N\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ .

les ventres de vibration magnétique sont obtenus pour  $\cos(kz) = \pm 1 \Leftrightarrow kz = -N\pi \Leftrightarrow z(V_B) = -N\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ .

On remarque que les nœuds électriques sont les ventres magnétiques et que les ventres électriques sont les nœuds magnétiques.

Deux nœuds consécutifs (électriques ou magnétiques) sont distants de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Deux ventres consécutifs (électriques ou magnétiques) sont distants de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Un nœud et un ventre consécutif (électriques ou magnétiques) sont distants de  $\frac{\lambda}{4}$ .

La surface  $z = 0$  du conducteur parfait correspond à un nœud électrique et à un ventre magnétique.

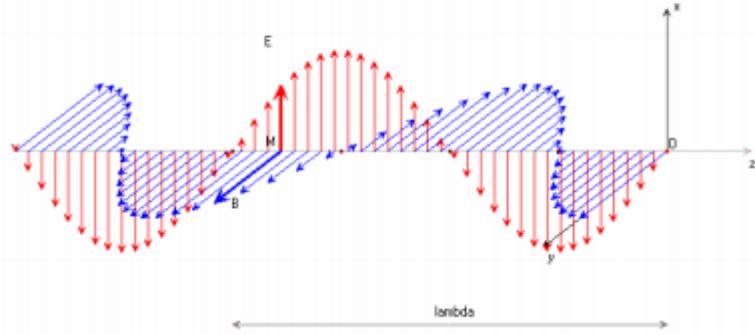


FIGURE 73 – Onde stationnaire à la surface d'un milieu conducteur parfait

#### d. Densités surfaciques de charge de courant

*Méthode : utiliser les relations de passage à la surface en connaissant l'expression de  $\vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ .*

Ainsi,

$$\vec{E}_2(z = 0, t) - \vec{E}_1(z = 0, t) = 2E_0 \sin(0) \sin(\omega t) \vec{u}_x - \vec{0} = \vec{0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Donc  $\sigma = 0$ . Le conducteur parfait est localement neutre en volume ( $\rho = 0$ ) et en surface ( $\sigma = 0$ ). Cependant,  $\sigma = \sigma_e + \sigma_{ions} = 0$  mais  $\sigma_e \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(z = 0, t) - \vec{B}_1(z = 0, t) &= \mu_0 \vec{j}_s \times (-\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow (-\vec{u}_z) \times 2 \frac{E_0}{c} \cos(0) \cos(\omega t) \vec{u}_y &= (-\vec{u}_z) \times (\mu_0 \vec{j}_s \times (-\vec{u}_z)) \\ \Leftrightarrow 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_x &= ((-\vec{u}_z) \cdot (-\vec{u}_z)) \cdot \mu_0 \vec{j}_s - \left( \underbrace{(-\vec{u}_z) \cdot \mu_0 \vec{j}_s}_0 \right) \cdot (-\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \vec{j}_s(z = 0, t) &= \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \end{aligned}$$

## 4) Étude énergétique

### a. Énergie des ondes incidentes et réfléchies

L'onde incidente est une OPPM se propageant sur  $+\vec{u}_z$  et transverse sur la direction  $\vec{u}_x$ .  
Donc,

$$\begin{cases} \vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \\ \vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{u}_z}{c} \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \end{cases}$$

Ainsi,

$$\vec{\Pi}_i(M, t) = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

Donc,

$$\langle \vec{\Pi}_i(M, t) \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2}_{\langle u_{EMi} \rangle} \underbrace{\vec{u}_z}_{v_{énergie}}$$

L'onde réfléchie s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{E}_r(M, t) = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x \\ \vec{B}_r(M, t) = -\frac{\vec{u}_z}{c} \times \vec{E}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y \end{cases}$$

Donc,

$$\langle \vec{\Pi}_r(M, t) \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2}_{\langle u_{EMr} \rangle} \underbrace{(-c \vec{u}_z)}_{v_{énergie}}$$

On définit un *coefficient de réflexion* R et un *coefficient de transmission* T en énergie tels que  $R + T = 1$ .

$$R = \frac{\text{énergie réfléchie par S}}{\text{énergie incidente sur S}} = \frac{\Phi_{\langle \vec{\Pi}_r \rangle}}{\Phi_{\langle \vec{\Pi}_i \rangle}} = \frac{I_r S}{I_i S}$$

Dans le cas étudié,  $R = 1$  donc toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. C'est cohérent avec le modèle du conducteur parfait dans lequel il n'y a pas de pertes par effet Joule.

### b. Énergie de l'onde stationnaire

L'onde stationnaire est donnée par :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x \\ \vec{B}(M, t) = 2\frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y \end{cases}$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) \sin^2(\omega t) \Rightarrow \langle u_E \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz)$$

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz) \cos^2(\omega t) \Rightarrow \langle u_B \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz)$$

$u_{EM} = \varepsilon_0 E_0^2 = c^{te}$ . L'énergie électromagnétique se répartie entre les formes électrique et magnétique.

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kz) \sin(2\omega t) \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{\Pi}(M, t) &= \varepsilon_0 E_0^2 \sin(2kz) \sin(2\omega t) \vec{u}_z \Leftrightarrow \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \vec{0} \end{aligned}$$

L'énergie ne peut pas se propager. Ce résultat était prévisible car  $\vec{\Pi} = \vec{0}$  à chaque fois que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nuls, ie pour les nœuds électriques et magnétiques, donc tous les  $\frac{\lambda}{4}$ .

### c. Polarisation par fils métalliques

Une grille métallique agit comme un polariseur rectiligne, qui ne transmet que la composante du champ électrique qui est orthogonale à la direction des fils. La direction des fils est ainsi la direction d'extinction et la direction perpendiculaire aux fils est la direction de transmission.

## 5) Cavité à une dimension

### a. Présentation

Les ondes existant dans une cavité sont nécessairement des ondes stationnaires car il y a réflexion de toute OPPM arrivant sous incidence normale sur un plan conducteur parfait.

Les conditions aux limites imposées par les deux plans conducteurs parfaits parallèles déterminent le champ électromagnétique de l'onde pouvant exister dans la cavité ; il dépend d'un entier naturel  $n$  et on parle de *mode propre d'ordre  $n$  de la cavité*.

Champ électromagnétique de l'onde stationnaire existant dans une cavité de longueur  $L$ . Mode propre  $n$  de la cavité.

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\left(\frac{n\pi}{L}c\right)t + \varphi\right) \vec{u}_x \\ \vec{B}(M, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}c\right)t + \varphi\right) \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{\omega_n}{c} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L}c$$

Pour un mode  $n$ , le champ électrique présente  $n$  ventres et  $n+1$  nœuds en  $0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, L$ .

Les fréquences des ondes stationnaires ont des valeurs bien précises, dépendant de la dimension  $L$  de la cavité. Elles sont appelées *fréquences propres* de la cavité :  $f_n = n \frac{c}{2L}$ ,  $n$  étant un entier naturel.

## b. Recherche des ondes stationnaires dans une cavité vide

Dans la cavité, le problème est invariant par translation selon  $x$  et  $y$ . Donc, à priori,  $\vec{E}(M, t) = E_x(z, t)\vec{u}_x + E_y(z, t)\vec{u}_y + E_z(z, t)\vec{u}_z$ .

La cavité étant vide, le champ  $\vec{E}$  doit vérifier l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(z, t)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} &= 0 \Rightarrow E_z(z, t) = c^{te} = 0 \end{aligned}$$

On choisit une onde stationnaire polarisée sur  $\vec{u}_x$  telle que :  $\vec{E}(M, t) = E(z, t)\vec{u}_x = f(z)g(t)\vec{u}_x$ .

Donc, d'après l'équation de d'Alembert,

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow g(t)f''(z) - \frac{1}{c^2} f(z)g''(t) &= 0 \text{ en projetant sur } \vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \frac{c^2 f''(z)}{f(z)} &= \frac{g''(t)}{g(t)} \end{aligned}$$

Ainsi, ces deux termes dépendant de variables indépendantes sont nécessairement égaux à une constante  $H$ . On obtient alors deux équations différentielles :

$$f''(z) - \frac{H}{c^2} f(z) = 0 \text{ et } g''(t) - Hg(t) = 0$$

Les relations de passage en  $z = 0$  et  $z = L$  imposent :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(z = 0, t) - \vec{E}_1(z = 0, t) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \Rightarrow \forall t, f(z = 0)g(t) - 0 &= 0 \text{ en projetant sur } \vec{u}_x \\ \Rightarrow f(z = 0) &= 0 \end{aligned}$$

De même, la relation de passage, en  $z = L$  impose  $f(z = L) = 0$ .

Pour vérifier les deux conditions précédentes, il y a deux possibilités :

- $f$  est identiquement nulle et cela n'a pas d'intérêt,
- $f$  est périodique et s'annule en  $z = 0$  et en  $z = L$ . Donc  $H < 0$  et  $H = -\omega^2$ .

Ainsi, il ne reste plus qu'à résoudre :

$$f''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0 \Leftrightarrow f''(z) + k^2 f(z) = 0$$

Ainsi,  $f(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$ .

Or,  $f(z = 0) = A = 0$ . Donc  $f(z) = B \sin(kz)$ .

De plus,  $f(z = L) = B \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ .

Donc,  $f(z) = A \sin(k_n z) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right), n \in \mathbb{N}^*$ .

Remarque : Dans cette étude nous avons développé le calcul dans le cas de conditions aux limites strictes.

L'équation temporelle est :

$$g''(t) - Hg(t) = 0 \Leftrightarrow g''(t) + \omega_n^2 g(t) = 0$$

Donc,  $g(t) = \alpha \cos(\omega_n t) + \beta \sin(\omega_n t) = \alpha \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \alpha \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)$ .

Ainsi,

$$\vec{E}(M, t) = f(z)g(t)\vec{u}_x = \alpha A \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \vec{u}_x$$

On détermine le champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(z, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Donc  $B_x = c^{te} = 0$  et  $B_z = c^{te} = 0$ .

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = -E_0 \cos(\omega_n t + \varphi_n) k_n \cos(k_n z)$$

$$\Rightarrow B_y = -E_0 \cos(k_n z) \frac{k_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Donc,

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{E_0}{c} \cos(k_n z) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \vec{u}_y$$

### c. Énergie d'un mode de vibration

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_n z) \cos^2(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow \langle u_E \rangle_t = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_n z)$$

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(k_n z) \sin(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow \langle u_B \rangle_t = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(k_n z)$$

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = c^{te}$$

Enfin,

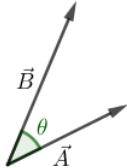
$$\vec{\Pi}(M, t) = -E_0^2 \varepsilon_0 c \frac{1}{4} \sin(k_n z) \sin(\omega_n t + 2\varphi) \vec{u}_y \Rightarrow \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \vec{0}$$

# Mécanique

## I. Cinématique

### 1) Calcul vectoriel

#### a. Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \cos(\theta)$$

FIGURE 74 – Représentation produit scalaire

Propriétés :

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ ,
- Si  $\vec{A}$  est normal à  $\vec{B}$ , alors  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ,
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = ||\vec{A}||^2$

#### b. Bases orthonormées

Définition :

Dans le plan, la base  $(\vec{I}, \vec{J})$  est constituée de deux vecteurs  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  tels que :  $\vec{I} \cdot \vec{J} = 0$  et  $||\vec{I}|| = ||\vec{J}|| = 1$ .

Dans l'espace 3D, la base  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  est constituée de trois vecteurs tels que :  $\vec{I} \cdot \vec{J} = \vec{I} \cdot \vec{K} = \vec{J} \cdot \vec{K} = 0$  et  $||\vec{I}|| = ||\vec{J}|| = ||\vec{K}|| = 1$ .

#### c. Produit vectoriel

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \sin(\theta)$ .  $\vec{C}$  est perpendiculaire au plan  $(\vec{A}, \vec{B})$  et le trièdre  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  est direct.

### 2) Repérage d'un point dans le plan

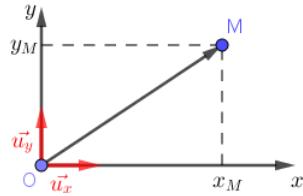
#### a. Repérage d'un point sur un axe

Exemple : Chute libre

Dans ce cas,  $\vec{OM} = z \cdot \vec{u_z}$ .

## b. Repérage d'un point dans le plan

Coordonnées cartésiennes :

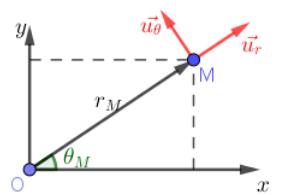


Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = x_M \vec{u}_x + y_M \vec{u}_y$$

FIGURE 75 – Coordonnées cartésiennes

Coordonnées polaires :



Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = r_M \vec{u}_r$$

FIGURE 76 – Coordonnées polaires

Les vecteurs de cette base ne sont pas fixes, ainsi :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{r} \vec{u}_r$$

*Démonstration :*

On a :  $\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \vec{u}_y - \sin(\theta) \vec{u}_x$ .  
Ainsi,

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d \cos(\theta) \vec{u}_x}{dt} + \frac{d \sin(\theta) \vec{u}_y}{dt} = -\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{u}_y = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d \cos(\theta) \vec{u}_y}{dt} - \frac{d \sin(\theta) \vec{u}_x}{dt} = -\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{u}_y - \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{u}_x = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

*Qed*

### 3) Repérage d'un point dans l'espace

Coordonnées cartésiennes :

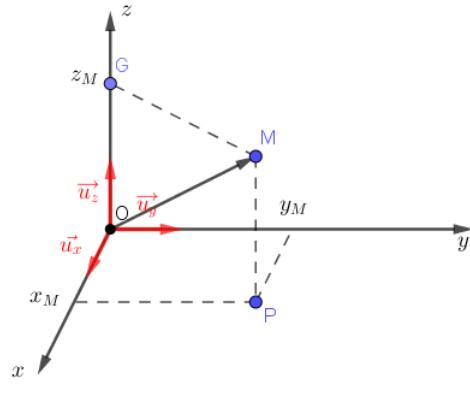


FIGURE 77 – Coordonnées cartésiennes 3D

Coordonnées cylindriques :

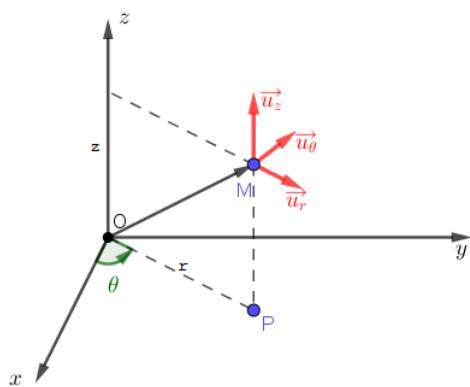


FIGURE 78 – Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques :

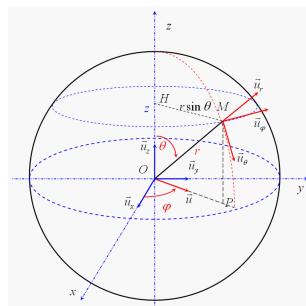


FIGURE 79 – Coordonnées sphériques

Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = x_M \vec{u}_x + y_M \vec{u}_y + z_M \vec{u}_z$$

Le déplacement élémentaire est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Le volume élémentaire est donné par :

$$d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$$

Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

On notera :

$$r \in [0; +\infty[, \theta \in [0; 2\pi] \text{ et } z \in \mathbb{R}$$

Le déplacement élémentaire est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Le volume élémentaire est donné par :

$$d\tau = dr \cdot rd\theta \cdot dz$$

Dans ce cas,

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

On notera :

$$r \in [0; +\infty[, \theta \in [0; \pi] \text{ et } \varphi \in [0; 2\pi]$$

Le déplacement élémentaire est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Le volume élémentaire est donné par :

$$d\tau = dr \cdot rd\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi$$

## 4) Description cinématique de mouvement d'un point matériel

### a. Expression du vecteur vitesse

On définit le *vecteur vitesse* comme :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ avec } O \text{ un point fixe du repère}$$

En coordonnées cartésiennes :  $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ ,

En coordonnées cylindriques :  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ ,

En coordonnées sphériques :  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$ .

### b. Expression du vecteur accélération

On définit le *vecteur accélération* comme :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$ ,

En coordonnées cylindriques,  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$ ,

## 5) Différents types de mouvement

Il existe des mouvements *rectilignes* pour lesquels la trajectoire est une droite, des mouvements *circulaires* pour lesquels le point étudié à distance constante d'un centre et des mouvements *quelconques*.

Il existe des mouvements *uniformes* pour lesquels  $\|\vec{v}\| = c^{te}$  et des mouvements *non uniformes* (accélérés, ralentis, etc...)

## 6) Description cinématique du mouvement d'un solide

### a. Repérage d'un solide

On définit un *solide indéformable* comme un solide dont l'ensemble des points restent à distance constante les uns des autres.

### b. Solide en translation

Dans ce cas, tous les points du solide ont la même trajectoire. On peut donc simplifier l'étude en se ramenant à l'étude d'un point, souvent le centre de gravité.

Si les points du solide décrivent des droites identiques, on parle de *translation rectiligne*.

Si les points du solide décrivent des cercles de même rayon, on parle de *translation circulaire*.

### c. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans un référentiel donné, un solide est en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) s'il existe un axe  $\Delta$  immobile dans le référentiel et immobile par rapport au solide.

*Remarque : Pour ne pas confondre translation circulaire et rotation, on peut penser à l'exemple d'une grande roue. Les cabines sont en translation circulaire et non en rotation car la trajectoire de chaque point de la cabine est un cercle de rayon constant et de centre différent.*

## II. Changement de référentiels

### 1) Référentiels

Un *référentiel* est un système de référence, qui permet de repérer un système physique dans l'espace et dans le temps. Un référentiel correspond à la donnée de *trois axes géométriques* de référence indéformable liés à un observateur et d'une *horloge*.

Un *référentiel galiléen* est un référentiel, dans lequel un point isolé (ou pseudo-isolé) a un mouvement rectiligne uniforme :  $\vec{v}(M)/R = \vec{c}^{\text{te}}$ .

Il existe une infinité de référentiels galiléens, tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

*Remarque : Le "meilleur" référentiel galiléen est le référentiel de Copernic. son origine étant le barycentre du système solaire dont sont issus trois axes dirigés vers des étoiles très lointaines, dites "fixes".*

### 2) Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

On appelle  $(\mathcal{R})$  le référentiel fixe (référentiel absolu) et  $(\mathcal{R}')$  la référentiel mobile (référentiel relatif).

#### a. Référentiel $(\mathcal{R}')$ en translation par rapport à $(\mathcal{R})$

Le référentiel  $(\mathcal{R}')$  est en *translation* par rapport à  $(\mathcal{R})$  si les axes de  $(\mathcal{R}')$  gardent toujours une direction constante par rapport à ceux de  $(\mathcal{R})$ , c'est-à-dire si les axes de  $(\mathcal{R}')$  ne tournent pas par rapport à ceux de  $(\mathcal{R})$ .

Dans le cas général, le mouvement de  $O'$  (origine du référentiel  $(\mathcal{R}')$ ) est quelconque dans le référentiel  $(\mathcal{R})$ . On parle alors de *translation quelconque* de  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ .

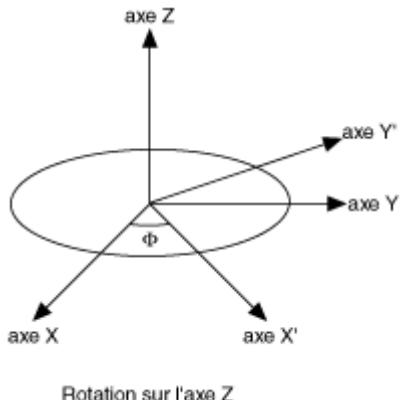
Lorsque le mouvement du point  $O'$  est rectiligne (est une droite) dans  $(\mathcal{R})$ , on dit que  $(\mathcal{R}')$  est en *translation rectiligne* par rapport à  $(\mathcal{R})$ .

Lorsque le mouvement du point  $O'$  est circulaire (est une cercle) dans  $(\mathcal{R})$ , on dit que  $(\mathcal{R}')$  est en *translation circulaire* par rapport à  $(\mathcal{R})$ .

#### b. Référentiel $(\mathcal{R}')$ en rotation autour d'un axe fixe de $(\mathcal{R})$

Le référentiel  $(\mathcal{R}')$  est en *rotation uniforme par rapport à une axe  $\Delta$  fixe de  $(\mathcal{R})$*  si tous les points fixes de  $(\mathcal{R}')$  sont animés, dans  $(\mathcal{R})$ , d'un mouvement circulaire uniforme de même axe

$\Delta$  et de même vecteur rotation  $\vec{\omega}$  constant. Le vecteur  $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$  ou  $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$  est appelé *vecteur rotation* de  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ .



Rotation sur l'axe Z

$$\text{On a : } \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \dot{\Phi} \vec{u}_z$$

Soit  $\vec{i}$  (resp  $\vec{i}'$ ) le vecteur unitaire associé à l'axe  $X$  (resp  $X'$ ),

$$\left( \frac{d \vec{i}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{i}'$$

$$\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = -\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}}$$

### c. Dérivées temporelles d'un vecteur dans les référentiels absolu et relatif

Pour un vecteur  $\vec{V}$  quelconque, on a :

$$\left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{V}$$

Remarque :

- Dans le cas de référentiels en translation,  $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \vec{0}$ , donc  $\left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$ ,
- Pour un vecteur constant dans  $(\mathcal{R}')$ ,  $\left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ , donc  $\left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{V}$ ,
- Dans le cas où  $\vec{V} = \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$ ,  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ , donc  $\left( \frac{d \vec{\omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d \vec{\omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$ ,

*Démonstration :*

Soit  $\vec{V}$  un vecteur de composantes  $(V_x, V_y, V_z)$  dans  $(\mathcal{R})$  et  $(V_{x'}, V_{y'}, V_{z'})$  dans  $(\mathcal{R}')$ .  
On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \Rightarrow \left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k} \\ \vec{V} &= V_{x'} \vec{i}' + V_{y'} \vec{j}' + V_{z'} \vec{k}' \Rightarrow \left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \frac{dV_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dV_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dV_{z'}}{dt} \vec{k}' \end{aligned}$$

De plus,

$$\left( \frac{d \vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{V_{x'} \vec{i}'}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{i}'} + V_{x'} \underbrace{\left( \frac{d \vec{i}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{i}'} + \underbrace{V_{y'} \vec{j}'}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{j}'} + V_{y'} \underbrace{\left( \frac{d \vec{j}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{j}'} + \underbrace{V_{z'} \vec{k}'}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{k}'} + V_{z'} \underbrace{\left( \frac{d \vec{k}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{k}'}$$

*D*onc,

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{V}$$

*Qed*

### 3) Lois de composition des vitesses et des accélérations

$(\mathcal{R})$  : référentiel associé au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   
 $(\mathcal{R}')$  : référentiel associé au repère orthonormé direct  $(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z) = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

#### a. Point coïncidant avec $M$ à l'instant $t$ (point coïncident)

On appelle *point coïncident*, le point fixe dans  $\mathcal{R}'$  et entraîné par  $\mathcal{R}'$  dans sont mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  qui coïncide avec  $M$  à l'instant  $t$ .

On appelle *vitesse d'entraînement de  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$*  :  $\vec{v}_e = \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  la vitesse du point coïncident avec  $M$  à  $t$  évaluée dans  $\mathcal{R}$ .

On appelle *accélération d'entraînement de  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$*  :  $\vec{a}_e = \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  l'accélération du point coïncident avec  $M$  à  $t$  évaluée dans  $\mathcal{R}$ .

#### b. Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{O'M}$$

Autrement dit, la vitesse absolue est égale à la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

*Démonstration :*

Par définition,  $\vec{v}_a = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ .

Or,  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$  et  $\vec{v}_r = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$ .

*D*onc,

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ \Leftrightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{O'M} \\ \Leftrightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \left( \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{O'M} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \end{aligned}$$

*Qed*

### c. Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \vec{a}_c$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) &= \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \left( \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{O'M} \right) \\ \vec{a}_c &= 2\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{v(M)_{/\mathcal{R}}}\end{aligned}$$

$\vec{a}_c$  est appelée *accélération de Coriolis*.

Démonstration :

D'après la loi de composition des vitesses,

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left( \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ \Leftrightarrow \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left( \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ \Leftrightarrow \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left( \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} \underbrace{\left( \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \right) \right)}_{\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{\vec{a}_c}\end{aligned}$$

Qed

### d. Cas particuliers : translation

$(\mathcal{R}')$  en translation par rapport à  $(\mathcal{R})$  alors  $\overrightarrow{\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \vec{0}$ .

D'après les expressions des vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis, on a :

$$\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_c = \vec{0}$$

Donc, d'après les lois de composition des vitesses et des accélérations, on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} \Leftrightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} \Leftrightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

### e. Cas particulier : rotation

Tous les points de l'axe  $\Delta$  sont immobiles. Donc,  $\vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$  et  $\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ . De plus, dans le cas d'une rotation uniforme,  $\vec{\omega} = \vec{c}^t\vec{e}$ .

D'après la loi de composition des vitesses,

$$\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \omega HM \overrightarrow{u_\theta}$$

Dans cette expression,  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur l'axe de rotation  $\Delta$ . D'après la loi de composition des accélérations,

$$\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) = \vec{\omega} \times wHM \overrightarrow{u_{tan}} = -\omega^2 HM \overrightarrow{u_{tan}}$$

## III. Dynamique Newtonienne

Une *force* est une grandeur vectorielle caractérisant une *action mécanique* à l'origine du mouvement du système auquel elle s'applique. Il s'agit donc d'une modélisation. Elle s'exprime en Newton (N).

On distingue les actions à distance des actions de contact.

### 1) Actions à distance

#### a. Interaction gravitationnelle

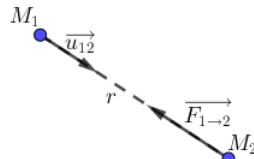


FIGURE 80 – Masses en interaction gravitationnelle

Il s'agit d'une *force attractive*.

Soit 2 masses  $m_1$  (en  $M_1$ ) et  $m_2$  (en  $M_2$ ).

**La force exercée par  $m_1$  sur  $m_2$  est :**

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_{12}}$$

avec  $\overrightarrow{u_{12}} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\| \overrightarrow{M_1 M_2} \|}$ ,  $r = \| \overrightarrow{M_1 M_2} \|$  et  $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}$  SI la *constante de gravitation universelle*.

Cas particulier : Le poids

Dans le cas de l'étude d'une masse  $m$  au voisinage de la Terre, celle-ci subit le champ gravitationnel terrestre appelé *poids*.

$$\vec{P} = m\vec{g} \text{ où } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \vec{u} \approx 9,81 m.s^{-2}$$

#### b. Interaction électrostatique

Dans le cas où deux charges  $q_1$  (placée en  $M_1$ ) et  $q_2$  (en  $M_2$ ) sont distantes de  $r$ , alors :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{u_{12}}$$

$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la *permittivité diélectrique du vide*.

### c. Force de Lorentz

Soit une charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$ , placée dans un champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ). Cette charge subit :

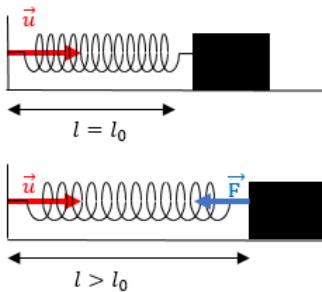
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

## 2) Actions de contact

### a. Tension exercée par un fil

Soit un fil attaché au sol en  $O$ . On étudie le point  $M$  situé à l'extrémité du fil. La *tension* est donnée par :  $\vec{T} = -T\vec{u}$  où  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ .

### b. Force rappel élastique exercée par un ressort



On appelle  $l_0$  la longueur au repos du ressort. Dans le cas où  $l > l_0$ , l'allongement  $\Delta l = l - l_0$  est positif et la force  $\vec{F}$  est opposée à  $\vec{u}$ . Dans le cas (non représenté) où  $\Delta l < 0$ , la force est dans le même sens que  $\vec{u}$ .

FIGURE 81 – Masse reliée à un ressort

La *force de rappel élastique* est donnée par :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

$k$  est appelé *constante de raideur* et est exprimée en N.m<sup>-1</sup>.

Remarque :  $l_0$  représente la longueur du ressort lorsque celui-ci est au repos. Dans le cas d'un ressort horizontal, cette longueur est la longueur à vide du ressort. Dans le cas d'un ressort vertical, cette longueur n'est plus la longueur à vide du ressort car il faut prendre en compte le poids s'appliquant sur la masse.

### c. Réaction exercée par un support solide

Tout système en contact avec le milieu extérieur via un solide subit une réaction.

Soit un système se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$ .

La *réaction* du support se décompose en :

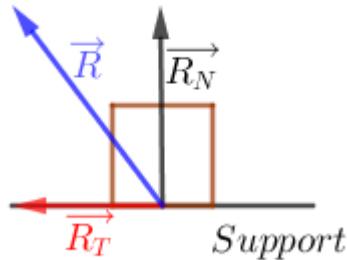


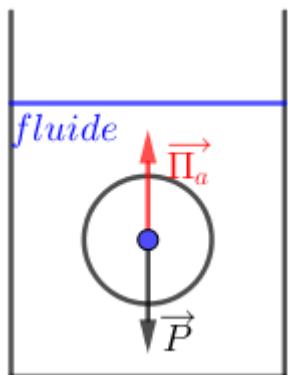
FIGURE 82 – Réaction du support

Remarque :  $\vec{R}_T = \vec{0}$  est équivalent à dire que l'on considère un contact sans frottement.

### d. Action exercée par un fluide

Poussée d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force, appelée Poussée d'Archimède, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.



La poussée d'Archimède est donnée par :

$$\vec{\Pi}_a = -\rho_f V \vec{g}$$

$\rho_f$  est la masse volumique du fluide et  $V$  est le volume de l'objet immergé.

FIGURE 83 – Poussée d'Archimède

Force de trainée :

Lorsqu'un système est en mouvement dans un fluide, il subit une *force de frottement fluide* qui s'oppose au mouvement. Il existe plusieurs modélisations :

$$\vec{f} = -h\vec{v} \text{ ou } \vec{f} = -\lambda||\vec{v}||\vec{v}$$

La modélisation linéaire est plutôt choisie dans le cadre de faibles vitesses et la modélisation quadratique est choisie à haute vitesse. Le choix du modèle se fait en étudiant la valeur du nombre de Reynolds.

### 3) Quantité de mouvement d'un point matériel ou d'un solide

#### a. Quantité de mouvement d'un point matériel

La *quantité de mouvement* d'un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  est :  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

#### b. Quantité de mouvement d'un solide

Le point  $G$  est le *barycentre* des points  $A$  et  $B$  affectés des poids  $a$  et  $b$  si  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

Ainsi, à tout solide de masse totale  $M$  et de centre de gravité  $G$ ,  $\vec{p} = M\vec{v}_G$ .

### 4) Première Loi de Newton : Principe d'inertie

#### a. Énoncé

Il existe des référentiels privilégiés, appelés *référentiels galiléens*, dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Un système est *isolé* lorsqu'il est soumis à aucune force.

Un système est *pseudo isolé* lorsqu'il est soumis à une résultante de forces nulle.

Remarque : *Un mouvement est rectiligne uniforme si et seulement si*  $\vec{v} = \vec{c}^{te}$ .

#### b. Principe de relativité galiléenne

Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

#### c. Référentiels usuels

Référentiel héliocentrique : Son origine est située au centre du Soleil et ses axes pointent vers trois étoiles lointaines fixes. Il est considéré comme galiléen tant que l'on peut négliger le mouvement orbital du Soleil autour du centre de gravité de la Voie Lactée.

Référentiel géocentrique : Son origine est située au centre de la Terre et ses axes sont identiques à ceux du référentiel héliocentrique. Il peut être considéré comme galiléen tant que l'on peut négliger le mouvement orbital de la Terre.

Référentiel terrestre : Son origine est située au point de la surface du globe où a lieu l'expérience et ses axes sont fixes par rapport à la Terre. Il peut être considéré comme galiléen tant que la rotation de la Terre autour de ses pôles peut être négligée.

## 5) Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce point matériel :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \text{ si la masse est constante au cours du temps}$$

Remarque : système isolé ou pseudo isolé : somme des forces nulles implique que la dérivée de la quantité de mouvement (ou vitesse) est nulle et donc que le vecteur vitesse est constant.

Dans le cas d'un solide, on montre à l'aide du principe des actions réciproques que la résultante des forces intérieures est nulle. Ainsi, en appliquant le principe fondamental de la dynamique au point  $M_i$ , on a :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \overrightarrow{F_{iext}} + \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F_{j \rightarrow i}}$$

Ainsi, en sommant sur tous les points  $i$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d}{dt} (M \vec{v}_G) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} \text{ où } F_{ext} \text{ est la résultante des forces extérieures.}$$

## 6) Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques

Si  $A$  exerce une force  $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$  sur  $B$ , alors  $B$  exerce une force  $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$  sur  $A$ , tel que  $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}} = -\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$  et que les deux forces soient situées sur la même droite d'action.

## IV. Aspects énergétiques de la mécanique du point

### 1) Puissance d'une force

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  et soumis à une force  $\vec{F}$ , la puissance est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Remarque :

- $\mathcal{P}$  dépend du choix du référentiel car  $\vec{v}$  en dépend,
- $\mathcal{P}$  s'exprime en Watt (W),
- $\mathcal{P}(\sum \vec{F}) = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$ ,
- Si  $\vec{F}$  est dans le sens du mouvement, on parle de *puissance motrice*,
- Si  $\vec{F}$  s'oppose au mouvement, on parle de *puissance résistante*

## 2) Travail d'une force

### a. Travail élémentaire

Soit  $M$  et  $M'$  deux positions du point étudié infiniment proches.  $\overrightarrow{MM'}$  est un déplacement élémentaire. Soit  $O$  un point de référence,  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$ .

Le travail élémentaire de  $\vec{F}$  est :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$ .

Or,  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , donc :

$$\frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Ainsi,  $\delta W = \mathcal{P} dt$ .

### b. Travail d'une force

Soit un matériel soumis à la force  $\vec{F}$  sur un trajet de  $M_1$  à  $M_2$ . Le travail de  $\vec{F}$  sur ce trajet est donc :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P} dt$$

Remarque :

- $W$  dépend du référentiel,
- $W$  s'exprime en Joules (J),
- si  $\vec{F} \perp d\overrightarrow{OM}$ , alors  $\delta W = 0$ , on dit que la force "ne travaille pas",
- Dans le cas d'une force constante,  $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$ ,
- Dans le cas général, le travail dépend du chemin suivi

## 3) Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

### a. Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse  $m$  est de vitesse  $\vec{v}$  est  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ .

### b. Théorème de l'énergie cinétique

On se place dans un référentiel galiléen, dans lequel la deuxième loi de Newton s'applique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \Leftrightarrow \left( m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v} = \left( \sum \vec{F} \right) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$$

D'où,

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \text{ Théorème de la puissance cinétique}$$

$$dE_c = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) dt = \sum \delta W(\vec{F}) \text{ Forme élémentaire du théorème de l'énergie cinétique}$$

En intégrant sur un trajet de  $A$  vers  $B$ , on obtient :

$$\Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \text{ Théorème de l'énergie cinétique}$$

#### 4) Énergie potentielle et forces conservatives

##### a. Définitions

On dit qu'une force est *conservative* si le travail de cette force est indépendant du chemin suivi entre deux points.

Dans ce cas, on définit l'*énergie potentielle*  $E_p$  associée à cette force telle que :  $dE_p = -\delta W$  (forme élémentaire) ou  $\Delta E_p = -W_{1 \rightarrow 2}$  (forme intégrale).

##### b. Le poids

$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  et  $d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$  en coordonnées cartésiennes.

$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mgdz = -d(mgz) = -dE_p$ . Donc,

L'énergie potentielle de pesanteur est donnée par :  $E_p(z) = mgz + c^{te}$ .

##### c. Force de rappel d'un ressort

$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$  et  $d\vec{l} = dl\vec{u}$ .

$\delta W(\vec{F}) = -k(l - l_0)dl = -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2\right)$ .

L'énergie potentielle élastique est donnée par :  $E_{pe}(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ .

##### d. Force de gravitation

$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$  et  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$ .

$\delta W(\vec{F}) = -G\frac{Mm}{r^2}dr = -d\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$ .

L'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par :  $E_{pg}(r) = -G\frac{Mm}{r} + c^{te}$ . La constante est souvent prise nulle car on considère que  $E_{pg} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$ .

##### e. Force d'inertie d'entraînement

On considère le cas où  $(\mathcal{R}')$  est en translation rectiligne non uniforme par rapport à  $(\mathcal{R})$ . Dans ce cas,  $\vec{\omega} = \vec{0}$  et  $\vec{a}_e = \vec{a}(O')/\mathcal{R} = a_e\vec{u}_x$ . Donc, par définition,  $\vec{F}_{ie} = -ma_e\vec{u}_x$ . Ainsi,  $\delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{l} = -ma_e dx' = -dE_{pie}$ .

Donc,

$$E_{pie}(x') = ma_ex' + c^{te}$$

Dans le cas où  $(\mathcal{R}')$  est en rotation uniforme par rapport à un axe fixe  $Oz$ . On a :  $\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -r\omega^2\vec{u}_r$ . Donc, par définition,  $\vec{F}_{ie} = mr\omega^2\vec{u}_r$ . Ainsi,  $\delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{l} = mr\omega^2\vec{u}_r \cdot dr\vec{u}_r = mr\omega^2dr$ .

Donc,

$$E_{pie}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + c^{te}$$

#### f. Forces non conservatives

Les forces de frottements :  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , alors  $\delta W(\vec{f}) = -h\vec{v} \cdot d\vec{l} = -h\vec{v} \cdot \vec{v} dt = -h\vec{v}^2 dt$ . On ne peut pas définir d'énergie potentielle associée à ce type de forces.

Il n'existe pas d'énergie potentielle associée à la force d'inertie de Coriolis car la puissance associée à cette force et donc son travail sont nuls.

### 5) Énergie mécanique

#### a. Cas général - Définitions

Soit un système soumis à des forces conservatives  $\vec{F}_C$  et non conservatives  $\vec{F}_{NC}$ . D'après le théorème de l'énergie cinétique,  $dE_c = \delta W(\vec{F}_c) + \delta W(\vec{F}_{NC}) = -dE_p + \delta W(\vec{F}_{NC})$ .

On définit donc l'*énergie mécanique* comme  $E_m = E_c + E_p$ .

$$\text{Ainsi, } dE_m = \delta W(\vec{F}_{NC}) \Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W(\vec{F}_{NC})}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{NC}).$$

#### b. Conservation de l'énergie mécanique

Si  $\vec{F}_{NC} = \vec{0}$ , alors  $dE_m = 0$ .

L'énergie mécanique se conserve si et seulement si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives.

### 6) Problème à un degré de liberté dans un champ de force保守

"1 degré de liberté" signifie que la position du système est définie à l'aide d'une seule variable. Le système n'est soumis qu'à des forces conservatives. Dans ce cas, l'énergie mécanique se conserve et reste constante.

Le système peut être *lié*, si la position du système oscille entre deux positions définies.

Le système est *libre*, lorsque la position est minorée mais non majorée.

#### a. Positions d'équilibre

Un point matériel est à l'équilibre si sa vitesse et son accélération sont nulles.

Les extrêmes de l'énergie potentielle correspondent aux positions d'équilibre.

Pour déterminer les positions d'équilibres :

- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle du système en fonction des différents paramètres,
- Dériver cette expression en fonction de ce paramètre,
- Trouver les valeurs du paramètre qui annulent cette dérivée.

On distingue les positions d'équilibre *stables* (lorsque l'on écarte le système de cette position, le système y revient spontanément et  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) > 0$ ) et *instables* (lorsque l'on écarte le système de cette position, le système s'en éloigne définitivement).

## 7) Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

### a. Approximation locale par un puit de potentiel harmonique

Lorsque le système reste confiné dans une région limitée de l'espace autour d'une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle peut être assimilée à son développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$E_p(x) = E_p(x = x_{eq}) + \frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2$$

Lorsque cette approximation n'est plus valable, des effets non linéaires apparaissent.

## V. Lois du frottement solide

On choisit d'utiliser le modèle du *solide indéformable*. Un solide est un corps, dans lequel la distance entre deux points quelconques reste constante au cours du temps.

### 1) Actions mécaniques de contact

#### a. Action de contact

Une *action de contact* est une action mécanique qui s'exerce entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$ , dont les surfaces sont en contact. Les actions de contact sont des actions mécaniques inconnues : seule l'application des théorèmes de la mécanique permet de les expliciter.

L'action de contact est modélisée par une force appelée *réaction de  $S_1$  sur  $S_2$*  et notée  $\overrightarrow{R}_{S_1 \rightarrow S_2}$ . Cette force a deux composantes, une composante *normale* (perpendiculaire à la surface de contact) et une *tangentielle* appartenant au plan tangent.

On définit la *vitesse de glissement de  $S_2$  sur  $S_1$*  à chaque instant  $t$  comme étant la vitesse d'un point  $I \in S_2$  par rapport à un référentiel lié à  $S_1$ .  $\overrightarrow{v_g} = \overrightarrow{v_{g2/I}} = \vec{v}(I \in S_2)_{/\mathcal{R}_{S_1}}$ . Cette vitesse appartient au plan tangent aux deux solides. Ainsi,  $\overrightarrow{v_g} = \vec{v}(I \in S_2)_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I \in S_1)_{/\mathcal{R}}$ .

Condition de non glissement :  $\forall t, \overrightarrow{v_g} = \vec{0}$ .

## 2) Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

Les actions de contact résultent d'interactions microscopiques entre les atomes constitutifs des solides qui se trouvent au voisinage des surfaces de contact. Ces interactions sont trop complexes pour les modéliser convenablement, on est contraint d'utiliser des *lois phénoménologiques*, issues des expériences de Coulomb en 1779.

### a. Loi de Coulomb pour la réaction normale

Dans le cas d'une liaison unilatérale ( $S_2$  posée sur un support  $S_1$ ), la réaction normale exercée par  $S_1$  sur  $S_2$  est toujours dirigée de  $S_1$  vers  $S_2$ . Cette réaction empêche  $S_2$  de traverser le support.

Dans le cas d'une telle liaison,  $\vec{N} = N \vec{n}$  avec  $N \geq 0$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire perpendiculaire au plan tangent entre les deux solides. Le contact cesse pour  $N = 0$ .

Remarque : L'exemple d'une liaison bilatérale est une bille enfilée sur un anneau.

### b. Lois de Coulomb pour la réaction tangentielle

Cas de non glissement :

C'est le cas lorsqu'il y a beaucoup de frottement.

Dans ce cas, on utilise la *loi du frottement statique* :

$$\vec{v}_g = \vec{0} \text{ et } \|\vec{T}\| \leq f_{stat} \|\vec{N}\|$$

$f_{stat}$  est le coefficient de frottement statique (sans dimension).

Cas de glissement :

C'est le cas lorsqu'il y a peu de frottements.

Dans ce cas, on utilise la *loi du frottement dynamique* :

$$\vec{v}_g \neq \vec{0} \text{ et } \|\vec{T}\| = f_{dyn} \|\vec{N}\|$$

$\vec{T}$  est colinéaire et de sens opposé à  $\vec{v}_g$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \vec{T} \times \vec{v}_g = \vec{0} \\ \vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0 \end{cases}$$

$\vec{T}$  s'oppose au glissement et s'appelle force de frottement de glissement.  $f_{dyn}$  est le coefficient de frottement dynamique (sans dimension).

### c. Les coefficients de frottement

Les coefficients de frottement statique et dynamique caractérisent les matériaux constituant les deux solides  $S_1$  et  $S_2$  et l'état des surfaces en contact. Ils dépendent de la rugosité plus ou moins grande des surfaces, mais ne dépendent ni de l'aire de la surface de contact, ni de la valeur de la composante normale de la réaction.

Le coefficient de frottement dynamique est très légèrement inférieur au coefficient de frottement statique. En général, on confond ces deux coefficients en un seul coefficient  $f$  appelé *coefficient de frottement* car  $\frac{f_{stat} - f_{dyn}}{f_{stat}} \ll 1$ .

### d. Contact parfait

Dans le cas d'un *contact parfait*,  $f = 0 \Rightarrow \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{N}$ . La réaction est purement normale et il n'y pas de dissipation d'énergie.

## 3) Aspect énergétique du contact entre solides

### a. Puissance des actions de contact entre deux solides

On a :

$$\mathcal{P}_{contact} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0$$

Cette formule est indépendante du référentiel et de  $\vec{N}$  car cette composante de la réaction est orthogonale à  $\vec{v}_g$ .

### b. Cas d'une puissance nulle

Cas du glissement sans frottement :  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$  et  $\vec{T} = \vec{0}$ . Dans ce cas, la réaction est purement normale. *C'est la cas du patineur sur la glace.*

Cas du frottement sans glissement :  $\vec{v}_g = \vec{0}$  et  $\vec{T} \neq \vec{0}$ . *C'est le cas des véhicules à roues.*

## 4) Méthode de résolution

Formulation de l'hypothèse	Cas de non-glissement ( $\vec{v}_g = \vec{0}$ )	Cas du glissement ( $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ et sens)
Traduction mathématique	Expression de $\vec{v}_g$ et écrire $\vec{v}_g = \vec{0}$	Lois de Coulomb : $\ \vec{T}\  = f_{dyn} \ \vec{N}\ $
Résolution du problème	RFD et $\vec{v}_g = \vec{0}$ . Déduction de $\vec{N}$	Avec RFD, expressions de $\vec{N}$ et $\vec{T}$ et déduction de $\vec{v}_g$
Condition de validité	$\ \vec{T}\  \leq f_{stat} \ \vec{N}\ $	$\vec{v}_g \neq \vec{0}$ et sens

## VI. Dynamique Newtonienne en référentiel non galiléen

### 1) Référentiel non galiléen

Les référentiels galiléens sont définis à partir du principe d'inertie (ou première loi de Newton).

Un référentiel est donc *non galiléen* lorsque celui-ci n'est pas en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen. C'est le cas de référentiel qui sont en translation *non uniforme* et/ou *non rectiligne* par rapport à un référentiel galiléen ou alors le référentiel relatif n'est pas en translation par rapport à un référentiel galiléen.

### 2) Principe fondamental de la dynamique

Dans un *référentiel galiléen*, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce point matériel :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \text{ si la masse est constante au cours du temps}$$

Dans un *référentiel non galiléen*, le principe fondamental de la dynamique reste valable tant que l'on ajoute les forces d'inertie s'exerçant sur le système. Il faut ainsi ajouter la *force d'inertie d'entrainement*  $\vec{F}_{ie}$  et la *force d'inertie de Coriolis*  $\vec{F}_{ic}$ .

$$\left( \frac{d\overrightarrow{p(M)/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Avec,  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  et  $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$ .

*Démonstration :*

*D'après la loi de composition des accélérations,*

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \vec{a}_c$$

*De plus, d'après le principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen,*

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum \vec{F} \Leftrightarrow m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + m\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + m\vec{a}_c = \sum \vec{F}$$

*Donc,*

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F} + (-m\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})) + (-m\vec{a}_c) = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

*Qed*

Remarque : Les forces d'inertie sont des forces proportionnelles à la masse inertielle. Elles ne traduisent donc pas de vraies interactions car elles dépendent du référentiel. Elles ont tout de même un effet et sont parfois appelées pseudo-forces.

Dans l'exemple d'un objet dans un ascenseur, on peut montrer que pour un observateur dans l'ascenseur, on pourrait faire le calcul avec un *poids apparent*. On définit le *poids apparent* d'un corps de  $m$  dans un référentiel  $(\mathcal{R}')$  quelconque comme la force  $\vec{a}$  opposée à celle qui maintient le corps  $M$  en équilibre dans  $(\mathcal{R}')$ . Dans le cas du référentiel terrestre, on parle uniquement de "poids".

### 3) Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

	Référentiel galiléen	Référentiel non galiléen
PFD	$\left( \frac{d\overrightarrow{p(M)/R}}{dt} \right)_R = \sum \overrightarrow{F}$	$\left( \frac{d\overrightarrow{p(M)/R'}}{dt} \right)_{R'} = \sum \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic}$
TMC	$\left( \frac{d\overrightarrow{L_A(M)/R}}{dt} \right)_R = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_A(F)} = \sum \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{F}$	$\left( \frac{d\overrightarrow{L_A(M)/R'}}{dt} \right)_{R'} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_A(F)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_A(F_{ie})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_A(F_{ic})}$
TPC	$\left( \frac{dE_c(M)/R}{dt} \right)_R = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_R$	$\left( \frac{dE_c(M)/R'}{dt} \right)_{R'} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_{R'} + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie})_{R'} + \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ic})_{R'}}_0$
TEC	$dE_c(M)/R = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_R dt = \sum \delta W(\overrightarrow{F})_R = \sum \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}/R$	$dE_c(M)/R' = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_{R'} dt + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie}) dt = \sum \delta W(\overrightarrow{F})_{R'} + \delta W(\overrightarrow{F}_{ie})$
TPM	$\left( \frac{dE_m(M)/R}{dt} \right)_R = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{f_{NC}})_R$	$\left( \frac{dE_m(M)/R'}{dt} \right)_{R'} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{f_{NC}})_{R'}$
TEM	$dE_m(M)/R = \sum \delta W(\overrightarrow{f_{NC}})_R$	$dE_m(M)/R' = \sum \delta W(\overrightarrow{f_{NC}})_{R'}$

TABLE 6 – Lois de la mécanique en référentiel galiléen et non galiléen

## VII. Mécanique terrestre

### 1) La Terre dans le système solaire

#### a. Le référentiel de Copernic

Origine : S barycentre du système solaire (voisin du barycentre du Soleil)

Axes : Trois axes issus de S et dirigés vers trois étoiles "fixes"

Ce référentiel est le "meilleur" référentiel galiléen connu à ce jour.

#### b. Le référentiel géocentrique

Origine : T barycentre de la Terre

Axes : 3 axes issus de T et parallèles à ceux du référentiel de Copernic

$(\mathcal{R}_g)$  a un mouvement de translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic et n'est donc pas strictement galiléen.

Remarque : Ce référentiel n'est pas le référentiel terrestre car il ne tient pas compte du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

$T$  a un mouvement circulaire uniforme, de période  $\Delta t = 1$  an. Donc,  $v(T)_{/\mathcal{R}_C} = \frac{2\pi d}{\Delta t} = \omega(T)_{/\mathcal{R}_C} d$ .

Ainsi,  $\omega(T)_{/\mathcal{R}_C} \approx \frac{2\pi}{\Delta t} \approx 2.10^{-7}$  rad.s $^{-1}$  et  $a_e(T)_{/\mathcal{R}_C} \approx \omega^2(T)_{/\mathcal{R}_C} d \approx 6.10^{-3}$  m.s $^{-2}$   
 $\approx \frac{g}{1000}$ .

#### c. Le référentiel terrestre

Origine : O point quelconque sur la Terre

Axes : 3 axes issus de T

Ce référentiel a un mouvement de rotation par rapport au référentiel géocentrique et un mouvement de translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic.

On définit le *jour solaire* comme étant la période de rotation de la Terre sur elle-même, par rapport à un habitant de la Terre. Ce jour a une durée de 24 h soit 86 400 s.

On définit le *jour sidéral* comme étant la période de rotation de la Terre sur elle-même, par rapport à des étoiles fixes. On a :  $365.25 J_{sol} = 366.25 J_{sid}$ , donc un jour sidéral a une durée d'environ 23.93 h.

Rotation propre de la Terre :  $\omega = \frac{2\pi}{J_{sid}} \approx 7,3.10^{-5}$  rad.s $^{-1}$ .

#### d. Critère d'attribution du caractère galiléen

Un référentiel sera considéré comme galiléen si, dans la limite de précision des mesures expérimentales, les observations expérimentales ne mettent pas en défaut le Principe Fondamental de la Dynamique.

## 2) Conséquence de la rotation propre de la Terre

En appliquant le principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen, on peut montrer :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F} + m \left[ \overrightarrow{G_T}(M) + \omega_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_g}^2 \cdot \overrightarrow{HM} \right] - 2m\overline{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_g} \times \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$$

En considérant la rotation propre de la Terre sur elle-même, le champ de pesanteur est modifié. On peut montrer que :

$$\vec{g}(M) = \overrightarrow{G_T}(M) + \omega_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_g}^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

Dans cette expression,  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation de la Terre.

La direction de  $\vec{g}$  est appelée *verticale* du lieu et  $\overrightarrow{G_T}$  est le champ gravitationnel terrestre. Le second terme est dû à la rotation propre de la Terre. Ceci entraîne que  $\vec{g}$  ne passe par  $T$  sauf aux pôles et à l'équateur.

Le *poids* est la force opposée à celle qui maintient  $M$  en équilibre dans le référentiel d'étude ( $\mathcal{R}$ ). Ainsi, dans le poids, il y a déjà la force d'inertie d'entrainement due à la rotation de la Terre.

Un calcul d'ordre de grandeur permet de savoir si l'on peut négliger l'impact de la force de Coriolis :

$$\frac{\|\vec{F}_{ic}\|_{max}}{\|\vec{P}\|} = \frac{2m\omega v}{mg} = \frac{2\omega v}{g}$$

*Dans le cas d'un avion allant à 1000 km.h<sup>-1</sup>, ce rapport vaut environ 0.4 % .*

**Il est légitime de négliger la force de Coriolis devant le poids dans les cas usuels. La force de Coriolis intervient lorsque la vitesse relative est très grande et/ou pour des masses importantes.**

Par exemple, pour les corps en chute libre, on constate une déviation vers l'est du corps. Le système ne chute pas suivant la verticale du lieu. Cet effet est le même dans les deux hémisphères car la composante verticale de la force de Coriolis est en cosinus de la latitude<sup>11</sup>.

Pour des corps en mouvement dans le plan horizontal, on constate une déviation sur la droite dans l'hémisphère nord et sur la gauche dans l'hémisphère sud. En effet, la dépendance de la composante horizontale de la force de Coriolis est en sinus de la latitude. On explique ainsi les vents alizés et cyclones.

$$\vec{F}_{ic} = -2m\overline{\omega} \times \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = -2m \begin{vmatrix} 0 & \dot{x} & \dot{z}\omega \cos(\lambda) - \dot{y}\omega \sin(\lambda) \\ \omega \cos(\lambda) & \dot{y} & -2m \\ \omega \sin(\lambda) & \dot{z} & -\dot{x}\omega \cos(\lambda) \end{vmatrix}$$

11. Angle entre l'horizontale et la direction de  $\overrightarrow{OM}$ .

## VIII. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée lorsqu'elle se déplace dans un milieu où règne un *champ électrique*  $\vec{E}$  et/ou un *champ magnétique*  $\vec{B}$ .

### 1) Force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\|\vec{E}\|$  est en  $\text{V.m}^{-1}$  et  $\|\vec{B}\|$  est en Tesla (T).

#### a. Ordres de grandeur

La masse d'un électron est  $m_e \approx 10^{-30}$  kg et  $q = -1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

Ainsi,  $P = mg \approx 10^{-29}$  N.

En soumettant l'électron à un champ  $\vec{E}$  de  $1\text{kV.m}^{-1}$  (différence de potentiel de 10 V sur 1 cm), donne  $F_e = qE \approx 10^{-16}$  N  $\gg P$ .

Ainsi, on pourra négliger le poids lorsqu'on étudie le mouvement d'une particule chargée.

#### b. Puissance de la force de Lorentz

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

La force magnétique a une puissance nulle donc cette force ne travaille pas.

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Il est donc impossible de modifier l'énergie cinétique d'une particule avec un champ magnétique uniquement. Cependant, on peut le faire avec un champ électrique judicieusement orienté.

### 2) Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique

#### a. Champ électrique et potentiel

$\delta W = q\vec{E} \cdot \vec{dl}$ . Si  $\vec{E} = E\vec{u}_x$ , alors  $\delta W = qEdx = -d(-qEx)$ .

La force électrique est conservative et l'énergie potentielle électrique associée est

$$E_{pe}(x) = -qEx + c^{te}$$

On définit le *potentiel électrique*  $V$  tel que  $E_{pe} = qV \Leftrightarrow -qEx + \lambda = qV(x)$ . Ainsi,  $V(x_2) - V(x_1) = -E(x_2 - x_1)$ .

### b. Production d'un champ électrique uniforme entre deux plaques

Soit deux électrodes planes A et B soumises à une différence de potentiel  $U = V_A - V_B$  et distantes de  $d$ .

$$\text{On a : } V_A - V_B = Ed, \text{ d'où : } \vec{E} = E\vec{u}_x = \frac{U}{d}\vec{u}_x.$$

### c. Équations du mouvement

Dans un référentiel galiléen et en négligeant le poids,  $m\vec{a} = q\vec{E}$ , donc  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ .

$$\text{En intégrant, } \vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}(t=0) \text{ et } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{v}(t=0)t + \overrightarrow{OM}(t=0).$$

On peut étudier différents cas ( $\vec{E} / \vec{v}_0$  et  $\vec{E} \perp \vec{v}_0$  déflexion électrostatique).

On définit l'électron-Volt comme l'énergie cinétique d'un électron initialement au repos et accéléré par une différence de potentiel de 1 V.

### d. Étude énergétique

La seule force considérée est conservative. Ainsi,  $E_m$  se conserve. Donc  $E_c + E_p = c^{te} \Leftrightarrow qV + \frac{1}{2}mv^2 = c^{te}$ .

## 3) Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

### a. Équation du mouvement

On étudie une *particule chargée* dans un *champ magnétique* uniquement. Le poids est négligé. Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \Leftrightarrow \vec{v} \times \frac{q\vec{B}}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On note  $\omega_c = \frac{|q| \|\vec{B}\|}{m}$ , la *pulsation cyclotron*.

On suppose  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ .

Ainsi, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & \left| \begin{array}{c} \dot{x} \\ 0 \end{array} \right| \\ \ddot{y} & = & \left| \begin{array}{c} \dot{y} \\ 0 \end{array} \right| \\ \ddot{z} & = & \left| \begin{array}{c} \dot{z} \\ \omega_c \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{lcl} \left| \begin{array}{c} \dot{y}\omega_c \\ -\dot{x}\omega_c \\ 0 \end{array} \right| \end{array}$$

On obtient alors un système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y}\omega_c \\ \ddot{y} = -\dot{x}\omega_c \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

On peut alors étudier différentes situations :  $\vec{B} // \vec{v}_0$  ou  $\vec{B} \perp \vec{v}_0$ . Dans le premier cas, la particule décrit un mouvement de translation rectiligne. Dans le second cas, la particule décrit une trajectoire circulaire de rayon  $\frac{mv_0}{qB}$ .

Dans le cas général, ces deux trajectoires se superposent et la particule décrit une trajectoire hélicoïdale.

## IX. Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

### 1) Caractéristiques d'un mouvement de force centrale

#### a. Définition et énergie potentielle associée

Une *force centrale* est une force constamment dirigée vers un point fixe (noté  $O$ ) du référentiel et dont la norme ne dépend que de la distance  $r = \| \overrightarrow{OM} \|$  avec  $M$  le point qui subit cette force.

Lorsqu'il s'agit d'une force conservative, on peut lui associer une énergie potentielle telle que :  $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dE_p$  avec  $\vec{F} = f(r)\vec{u}_r$ .

En coordonnées sphériques,  $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$ .

$$\text{Ainsi, } \delta W = f(r)dr = -dE_p \Leftrightarrow f(r) = -\frac{dE_p}{dr} \Leftrightarrow \vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r.$$

#### b. Exemples

Interaction gravitationnelle :

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\vec{u}_r \text{ et } E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r} + c^{te}$$

Interaction coulombienne :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r \text{ et } E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + c^{te}$$

#### c. Conservation du moment cinétique

Le *moment cinétique* d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vecteur vitesse  $\vec{v}$  est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$$

*Démonstration :*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{OM} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{OM} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{0} + \vec{OM} \times \sum \vec{F}$$

D'où,  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{OM} \times \vec{F}$

*Qed*

Dans le cas d'une force centrale, le moment cinétique se conserve.

*Démonstration :*

*D'après le théorème du moment cinétique,*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{OM} \times \vec{F} = \sum r\vec{u}_r \times f(r)\vec{u}_r = \vec{0}$$

*Qed*

Par définition,  $\vec{L}_O = \vec{OM} \times m\vec{v}$  et  $\vec{L}_O = \vec{c}^t \vec{e}$ . Cela signifie que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont à chaque instant situés dans le même plan perpendiculaire à  $\vec{L}_O$ , le mouvement est donc plan.

Ce plan contient le centre de force  $O$ .

Constante des aires :

Le mouvement étant plan, les coordonnées polaires suffisent pour la description du mouvement.

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= r\vec{u}_r \text{ et } \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{L}_O &= \vec{OM} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z\end{aligned}$$

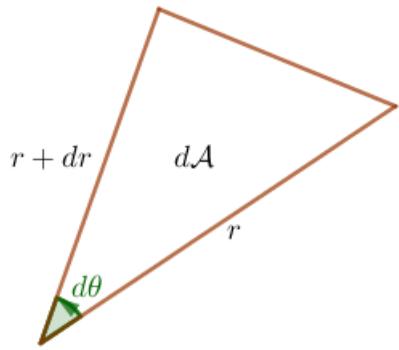
Le moment cinétique étant constante, on en déduit que  $C = r^2\dot{\theta}$  est une grandeur constante, appelée *constante des aires*.

Loi des aires :

La vitesse à laquelle le rayon vecteur  $\vec{OM}$  balaie la surface définie par la trajectoire (dans le plan) est constante.

La vitesse aérolaire est constante.

*Démonstration :*



$dA$  est une aire élémentaire balayée par  $\overrightarrow{OM}$  pendant une durée  $dt$ .

$$dA = \frac{b \times h}{2} = \frac{rd\theta \times r}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

*Qed*

#### d. Conservation de l'énergie mécanique

La seule force s'exerçant étant conservative, l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$$

$$v = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ donc } v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

$$\text{Ainsi, } E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left( \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) \right)}_{E_{peff}(r)}$$

#### 2) Cas particulier : forces centrales Newtonienne

Ces forces sont en  $\frac{K}{r^2}$ , l'énergie potentielle associée est donc en  $\frac{K}{r}$ .

C'est le cas par exemple des interactions gravitationnelle et coulombienne.

L'énergie potentielle effective définie précédemment est donc dans ce cas sous la forme :

$$E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{K}{r}$$

Si  $K > 0$ , alors l'interaction est répulsive car :

$$E_{peff}(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$$

$$E_{peff}(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\frac{dE_{peff}(r)}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} - \frac{K}{r^2} < 0 \text{ car } K > 0$$

Dans ce cas, l'énergie potentielle effective est strictement décroissante et la trajectoire est une hyperbole. Il s'agit d'un état libre ou diffusion.

Si  $K < 0$ , alors l'interaction est attractive car :

$$E_{peff}(r) \sim \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$$

$$E_{peff}(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\frac{dE_{peff}(r)}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} - \frac{K}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{mC^2}{r_0^3} = \frac{K}{r_0^2} \Leftrightarrow r_0 = \frac{mC^2}{K} > 0 \text{ car } K > 0$$

Ainsi, il existe une énergie potentielle effective minimale telle que :

$$E_{peffmin} = E_{peff}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{K}{mC^2}$$

Ainsi, quatre trajectoires sont possibles :

- Si l'énergie mécanique considérée est égale à  $E_{peffmin}$ , alors la trajectoire est circulaire et l'état est lié,
- Si l'énergie mécanique considérée est négative mais supérieure à  $E_{peffmin}$ , alors  $r \in [r_{min}; r_{max}]$ , la trajectoire est elliptique et l'état est lié,
- Si l'énergie mécanique considérée est nulle, alors  $r \in [r'_{min}; +\infty[$  et la trajectoire est parabolique,
- Si l'énergie mécanique est strictement positive, alors la trajectoire est hyperbolique.

### 3) Cas de l'interaction gravitationnelle

On note  $m$  la masse du système et  $M$  la masse du centre de force.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r \text{ et } E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

#### a. Lois de Kepler

Première loi de Kepler : Les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

Deuxième loi de Kepler : (aussi appelée loi des aires) le rayon vecteur  $\vec{SP}$  (S : Soleil et P : Planète) balaie des aires égales en des temps égaux.

Troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{a^3} = c^{te} = \frac{4\pi^2}{GM}$  avec  $T$  la période de révolution et  $a$  le demi grand-axe de l'ellipse.

#### b. Étude de la trajectoire circulaire

LE MOUVEMENT EST *uniforme*.

*Démonstration* :

*En effet, le moment cinétique se conserve. Or,*

$$\|\overrightarrow{LO}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times m\|\vec{v}\| = Rm\|\vec{v}\| = c^{te}, \text{ donc } \|\vec{v}\| = c^{te}$$

*Qed*

Vitesse sur l'orbite circulaire :

On étudie un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel supposé galiléen et soumis à la force gravitationnelle. On travaille en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r$$

En projetant la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$\text{Sur } \overrightarrow{u}_r : -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}$$

$$\text{Sur } \overrightarrow{u}_\theta : mR\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = c^{te}$$

Ainsi, à partir de l'équation obtenue en projetant sur  $\overrightarrow{u}_r$ , on obtient :

$$R^2\dot{\theta}^2 = v^2 = \frac{\mathcal{G}M}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R}}$$

De plus, par définition,  $v = \frac{2\pi R}{T}$ , donc :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R}} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{G}M}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} \text{ (Troisième loi de Kepler)}$$

Étude énergétique :

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M}{R} = \frac{\mathcal{G}Mm}{2R}$  et  $E_p = -\mathcal{G}\frac{Mm}{R}$ , donc  $E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{R} < 0$ . Ceci est logique car la masse est dans un état lié.

Relation utile :

$$P = mg = \frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2} \Leftrightarrow gR_T^2 = \mathcal{G}M_T$$

#### 4) Cas du mouvement elliptique

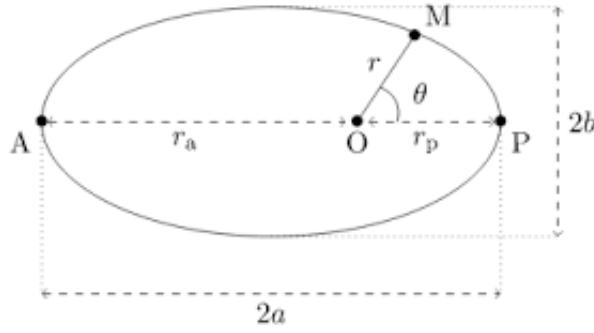
On généralise la troisième loi de Kepler (sans démonstration) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$

Étude énergétique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}$$

En  $A$  (apogée) et en  $P$  (périmètre),  $\dot{r} = 0$ .



Ainsi,  $r_p$  et  $r_a$  sont solutions de l'équation :

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} \Leftrightarrow E_m r^2 + \mathcal{G}Mmr - \frac{1}{2}mC^2 = 0$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré et si on somme les deux racines solutions, on trouve :

$$r_a + r_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{E_m} = 2a \Leftrightarrow E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$$

Ce résultat est l'analogie du résultat trouvé dans le cas d'une trajectoire circulaire.

## 5) Satellites géostationnaires

Ces satellites sont situés à la verticale d'un point fixe à la surface de la Terre. Ceci a plusieurs conséquences :

- Sa période de révolution doit être la même que celle de la Terre :  $T = 24h$ ,
- La trajectoire est nécessairement dans le plan équatorial

À partir de la troisième loi de Kepler, on peut remonter à l'altitude du satellite :

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Leftrightarrow h = \left( \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T = \left( \frac{g R_T^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T$$

Or,  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $T = 24h$  et  $R_T \approx 6400 \text{ km}$ .

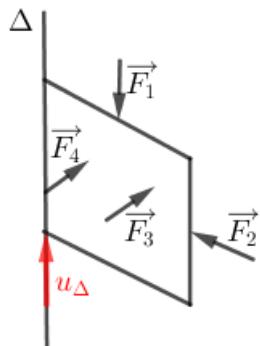
On trouve  $h \approx 36\,000 \text{ km}$ .

On définit la *vitesse de libération* comme étant la vitesse limite à communiquer à un objet initialement situé à la surface de la Terre pour le libérer de l'attraction terrestre.

Dans le cas limite,  $E_m = 0$ .

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T} = 0 \Leftrightarrow v_L = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}$$

## X. Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe



Pour mettre en mouvement la porte, on exerce une force plus ou moins efficace.

$\vec{F}_1$  n'a pas d'effet car parallèle à  $\vec{u}_\Delta$  et  $\vec{F}_2$  n'a pas d'effet car elle coupe l'axe  $\Delta$ .

Les forces  $\vec{F}_3$  et  $\vec{F}_4$  permettent de mettre en rotation la porte. Cependant, la force  $\vec{F}_3$  est plus efficace car le "bras de levier" est plus important.

Pour étudier la rotation d'un solide, il faut définir :

- Le *moment cinétique* associé à la cinématique du solide en rotation
- Le *moment de force* qui caractérise l'aptitude d'une force à mettre en mouvement le solide.

### 1) Moment cinétique

#### a. Moment cinétique d'un point matériel

On définit le *moment cinétique par rapport à un point O* d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  comme :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \times \vec{p} = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v}$$

Remarque :

- $\vec{L}_O \perp \overrightarrow{OM}$  et  $\vec{L}_O \perp \vec{v}$ ,
- Dans le cas d'un mouvement rectiligne,  $\overrightarrow{OM} // \vec{v}$ , donc  $\vec{L}_O = \vec{0}$ ,
- $\vec{L}_O = \vec{c}^{te}$  alors le mouvement est plan

Soit  $O'$  un autre point fixe du référentiel, alors :

$$\vec{L}_{O'}(M) = \overrightarrow{O'M} \times m\vec{v} = \left( \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \right) \times m\vec{v} = \underbrace{\overrightarrow{OO'} \times m\vec{v}}_{\neq \vec{0}} + \vec{L}_O$$

$\vec{L}$  dépend du point par rapport auquel on le considère.

Soit un axe  $\Delta$  qui contient un point  $O$  fixe dans le référentiel. On associe à l'axe  $\Delta$  un vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$ .

Le *moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$*  est défini comme :

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Dans le cas où le point  $M$  décrit une trajectoire circulaire, la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\Delta)$  est directe. De plus,  $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ . Donc,

$$\overrightarrow{L_O}(M) = R\vec{u}_r \times mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_\Delta \text{ et } L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_O}(M) \cdot \vec{u}_\Delta = mR^2\dot{\theta}$$

On définit le *moment d'inertie*  $J_\Delta$  comme :

$$L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$$

Pour un point matériel,  $J_\Delta = mR^2$  s'exprime en kg.m<sup>2</sup>.

### b. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe

Soit un solide ( $S$ ) en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ . On considère les points  $M_i$  du solide. On appelle  $H_i$  le projeté de  $M_i$  sur  $\Delta$ . Ainsi,  $\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OH}_i + \overrightarrow{H_i M}_i = z_i \vec{u}_\Delta + r_i \vec{u}_r$ . La vitesse est donc donnée par :  $\vec{v}_{M_i} = r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ . Ainsi,

$$\overrightarrow{L_O}(M_i) = \overrightarrow{OM}_i \times m \vec{v}_i = (z_i \vec{u}_\Delta + r_i \vec{u}_r) \times m_i (r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = -m_i z_i r_i \dot{\theta} \vec{u}_r + m_i r_i^2 \dot{\theta} \vec{u}_\Delta$$

$$L_{\Delta i} = \overrightarrow{L_O} \cdot \vec{u}_\Delta = m_i r_i^2 \dot{\theta}$$

Le *moment cinétique du solide par rapport à l'axe  $\Delta$*  est :

$$L_\Delta = \sum_i L_{\Delta i} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = \dot{\theta} \sum_i m_i r_i^2 = \dot{\theta} J_\Delta$$

De façon générale, le *moment d'inertie* est donné par :

$$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

Remarque : La somme discontinue peut être remplacée par une intégrale car un solide est constitué d'une infinité de points  $M$  de masse  $m$ .

$$J_{\Delta \text{solide}} = \iiint_{M \in S} r_M^2 dm$$

$J_\Delta$  sera généralement fourni dans le sujet. Pour un cylindre plein homogène,  $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$  et pour une boule,  $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$ .

L'expression de  $J_\Delta$  dépend de la répartition de la masse au sein du solide. Ainsi, pour un disque,  $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$  avec  $r_i \in [0; R]$  et pour un anneau  $J_\Delta = R^2 \sum_i m_i = mR^2$ .

## 2) Moment d'une force

### a. Par rapport à un point

Soit un point  $M$  soumis à une force  $\vec{F}$ .

Soit  $O$  un point fixe du référentiel.

Le *moment de la force*  $\vec{F}$  est donné par :

$$\overrightarrow{m_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$$

Ce moment caractérise l'aptitude d'une force  $\vec{F}$  à faire tourner le point  $M$  autour du point  $O$ .

### b. Par rapport à un axe orienté $\Delta$

Soit un axe  $\Delta$  associé au vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$ .

Soit  $O$  un point appartenant à  $\Delta$ .

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à  $\Delta$  :

$$\overrightarrow{m_\Delta} = \overrightarrow{m_O(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

### c. Calcul en coordonnées cylindriques

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ . Le point  $M$  est soumis à une force  $\vec{F}$  telle que :  $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{u}_z$ .  
Ainsi,

$$\overrightarrow{m_O(\vec{F})} = \begin{vmatrix} r & F_r & -zF_\theta \\ 0 & F_\theta & zF_r - rF_z \\ z & F_z & rF_\theta \end{vmatrix}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{m_\Delta(\vec{F})} = \overrightarrow{m_O(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{m_O(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{u_z} = rF_\theta$$

#### d. Notion de bras de levier

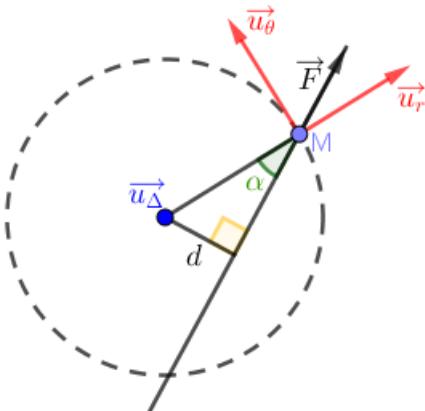


FIGURE 84 – Bras de levier

On se place dans le cas où  $\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta$ , avec  $F_\theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_\theta = F \sin(\alpha)$ .

Or,  $\sin(\alpha) = \frac{d}{r}$ .

Donc,  $m_\Delta(\vec{F}) = rF_\theta = \frac{d}{\sin(\alpha)}F \sin(\alpha) = d.F$ .

Si cette valeur est positive, on dit que la force est *moteur*. Sinon, elle est *résistante*.

*d* est appelé "BRAS DE LEVIER" et correspond à la distance minimale entre l'axe de rotation et la droite support de la force  $\vec{F}$  (droite d'action).

On retiendra :  $m_\Delta(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\|d$  (+ si  $\vec{F}$  est moteur et - sinon).

### 3) Théorème du moment cinétique en référentiel galiléen

#### a. Cas d'un point matériel

$$\frac{d\overrightarrow{L_O(M)}}{dt} = \sum \overrightarrow{m_0(F_{ext})} = \sum \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_{ext}} \text{ par rapport à un point } O$$

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \sum m_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}}) = \sum \left( \overrightarrow{m_0(F_{ext})} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \right) \text{ par rapport à l'axe } \Delta$$

#### b. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Chaque point  $M$  d'un solide est soumis à deux types de forces :

- les forces intérieures exercées par les autres points du solide,
- les forces extérieures exercées par le milieu extérieur

Généralisation à tout solide indéformable :

$$\begin{cases} \overrightarrow{m_{Oext}} = \sum_i \overrightarrow{m_O(F_{iext})} & (\text{forces extérieures}) \\ \overrightarrow{m_{Oint}} = \vec{0} & (\text{forces intérieures}) \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque point  $M_i$  du solide,

$$\frac{d\overrightarrow{L_O(M_i)}}{dt} = \overrightarrow{m_0(f_{iext} + f_{iint})} \text{ avec } \overrightarrow{f_{iext}} (\overrightarrow{f_{iint}}) \text{ la résultante des forces extérieures (intérieures)}$$

Ainsi,

$$J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_i m_\Delta(\overrightarrow{f_{iext}}) \text{ Théorème du moment cinétique pour solide en rotation autour d'axe fixe}$$

$J_\Delta$  est le moment d'inertie en  $\text{kg.m}^2$ ,  
 $\ddot{\theta}$  est l'accélération angulaire en  $\text{rad.s}^{-2}$ ,  
 $m_\Delta(\overrightarrow{f_{iext}})$  sont les moments des forces extérieures en N.m

Cette relation est l'équivalent de la seconde loi de Newton pour les solides en rotations.

TRANSLATION	ROTATION
Masse $m$ (kg)	Moment d'inertie $J_\Delta$ ( $\text{kg.m}^2$ )
Position $x$ (m)	Position angulaire $\theta$ (rad)
Vitesse $\dot{x}$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	Vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ( $\text{rad.s}^{-1}$ )
Accélération $\ddot{x}$ ( $\text{m.s}^{-2}$ )	Accélération angulaire $\ddot{\theta}$ ( $\text{rad.s}^{-2}$ )
Force $\vec{F}$ (N)	Moment de force $\overrightarrow{m_0(F)} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$ (en N.m)
Quantité de mouvement $\vec{p}$ ( $\text{kg.m.s}^{-1}$ )	Moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$ (en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ )

TABLE 7 – Analogies basiques entre solide en translation et solide en rotation

TRANSLATION	ROTATION
Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (J)	Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ (J)
Seconde loi de Newton : $m\ddot{x} = \sum_i \overrightarrow{f_{iext}} \cdot \overrightarrow{u_x}$	TMC $J_\Delta\ddot{\theta} = \sum_i m_\Delta(\overrightarrow{f_{iext}})$

TABLE 8 – Analogies complexes entre solide en translation et solide en rotation

### c. Couple de forces

Un *couple de forces* ( $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ ) correspond à deux forces s'exerçant au point  $A$  et  $B$  d'un solide tel que  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$  mais  $m_\Delta(\vec{F}_A) + m_\Delta(\vec{F}_B) \neq 0$ .

Le moment du couple est souvent appelé "couple". Il est parfois noté  $\Gamma$  ou  $\mathcal{C}$ . Cette grandeur est algébrique ( $> 0$  alors couple moteur ;  $< 0$  alors couples résistant).

$\Gamma = \pm Fd$  avec  $d$  la distance entre les deux points d'application

### d. La liaison pivot

Dans une machine tournante, on a une partie fixe (*stator*) et une partie mobile (*rotor*). La liaison entre ces deux parties est une liaison pivot qui autorise comme seul degré de liberté la rotation.

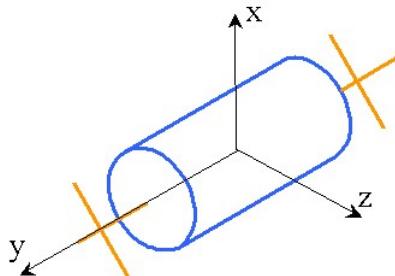


FIGURE 85 – Schéma normalisé d'une liaison pivot

Dans le cas d'une liaison pivot supposée idéale, on néglige les frottements entre le rotor et le stator, ainsi,  $m_\Delta(\text{liaison}) = 0$ .

Dans le cas d'une liaison pivot non-idéale, les frottements ne sont plus négligés et  $m_\Delta(\text{liaison}) < 0$ .

Remarque : On utilise des roulements à billes pour réduire ces frottements.

#### 4) Approche énergétique d'un solide en rotation

##### a. Énergie cinétique

$$E_c = \sum_i E_{ci} \text{ avec } E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{ et } v_i = r_i \dot{\theta}$$

Donc,  $E_c = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_i m_i r_i^2$

$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

##### b. Puissance

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i. \text{ Or, } \vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

Donc,  $\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{f}_{i\theta} r_i \dot{\theta} = m_\Delta(\vec{f}_i) \dot{\theta}.$

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = m_\Delta(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

##### c. Théorème de la puissance cinétique

Pour un point  $M_i$  du solide,  $\frac{dE_{ci}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_i).$   
Donc pour le solide,

$$\sum_i \frac{dE_{ci}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i) \Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$

Or,  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_i) = m_\Delta(\vec{f}_i) \dot{\theta}.$  Donc,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \right) = \sum_i m_\Delta(\vec{f}_i) \dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{\theta} \sum_i m_\Delta(\vec{f}_i) \Leftrightarrow J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_i m_\Delta(\vec{f}_i)$$

## Table des figures

1	Spectre électromagnétique . . . . .	7
2	Représentation schématique des Lois de Descartes . . . . .	9
3	Représentation schématique d'une lentille sphérique . . . . .	12
4	Représentation symbolique des lentilles . . . . .	12
5	Coupe d'un œil . . . . .	15
6	Évolution de la cohérence en fonction de la source . . . . .	21
7	Principe de l'émission stimulée . . . . .	22
8	Dispositif des trous d'Young . . . . .	30
9	Dispositif des trous d'Young en lumière parallèle . . . . .	33
10	Dispositif des trous d'Young avec deux points sources . . . . .	35
11	Les deux types de réseaux . . . . .	41
12	Interféromètre de Michelson . . . . .	49
13	Nom des différents changements d'états . . . . .	62
14	Diagramme (P,T) générique . . . . .	63
15	Diagramme (P,T) de l'eau . . . . .	63
16	Diagramme (P,v) générique . . . . .	64
17	Machine monotherme . . . . .	72
18	Machine ditherme . . . . .	72
19	Diagramme de Raveau . . . . .	73
20	Cycle de Carnot théorique . . . . .	74
21	Cycle Beau de Rochas . . . . .	75
22	Représentation normalisée de quelques dipôles . . . . .	77
23	Représentation tension . . . . .	78
24	Symbole masse électrique . . . . .	78
25	Symbole terre électrique . . . . .	78
26	Conventions d'orientation . . . . .	79
27	Symbole résistance . . . . .	80
28	Symbole condensateur . . . . .	81
29	Symbole bobine . . . . .	81
30	Symbole source idéale de tension . . . . .	82
31	Symbole source idéale de courant . . . . .	82
32	Représentation d'un générateur de Thévenin . . . . .	82
33	Pont diviseur de tension . . . . .	84
34	Pont diviseur de tension . . . . .	85
35	Circuit RC en régime libre . . . . .	85
36	Évolution de la charge lors de la décharge d'un condensateur . . . . .	86
37	Trajectoire de phase circuit RC en régime libre . . . . .	86
38	Évolution du courant en fonction du temps pour un circuit RC série en régime libre . . . . .	87
39	Circuit RC soumis à un échelon de tension . . . . .	87
40	Échelon de tension en fonction du temps . . . . .	87
41	Trajectoire de phase circuit RC soumis à un échelon . . . . .	88
42	Évolution de $U_C$ en fonction du temps pour un circuit RC soumis à un échelon de tension (Charge d'un condensateur) . . . . .	88
43	Circuit RC soumis à une tension créneau . . . . .	88

44	Circuit RLC série . . . . .	89
45	Système masse ressort . . . . .	89
46	Évolution de $U_C$ en fonction du temps pour un circuit RLC en régime pseudo-périodique . . . . .	91
47	Circuit LC série . . . . .	92
48	Variations de $E_C$ et $E_L$ pour un circuit LC série en régime libre . . . . .	92
49	Portrait de phase pour un oscillateur harmonique . . . . .	93
50	Portrait de phase d'un oscillateur amorti . . . . .	93
51	Représentation de Fresnel . . . . .	98
52	Circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale . . . . .	100
53	Évolution de l'intensité en fonction de la pulsation pour un circuit RLC série	102
54	Représentation spectrale . . . . .	105
55	Représentation d'un champ vectoriel par des vecteurs champ . . . . .	110
56	Représentation d'un champ vectoriel par des lignes de champ . . . . .	110
57	Fil infini parcouru par un courant . . . . .	111
58	Lignes de champ associées à une spire circulaire . . . . .	112
59	Lignes de champ associées à un solénoïde . . . . .	112
60	Lignes de champ associées à un aimant droit . . . . .	112
61	Expérience des rails de Laplace . . . . .	114
62	Expérience d'Ersted . . . . .	115
63	Représentation de la spire en rotation vue du dessus . . . . .	120
64	Configuration simplifiée d'un haut parleur . . . . .	123
65	Diagramme électrique de charges ponctuelles . . . . .	140
66	Représentation d'un dipôle électrostatique à $\varphi$ fixé . . . . .	141
67	Diagramme électrique d'un dipôle électrostatique . . . . .	144
68	Évolution du champ électrique dans le cas d'une sphère chargée . . . . .	150
69	Champ électrostatique condensateur plan . . . . .	152
70	Dipôle oscillant représentation . . . . .	191
71	Indicatrice de rayonnement . . . . .	192
72	Tracé de $k(\omega)$ pour un plasma . . . . .	200
73	Onde stationnaire à la surface d'un milieu conducteur parfait . . . . .	210
74	Représentation produit scalaire . . . . .	216
75	Coordonnées cartésiennes . . . . .	217
76	Coordonnées polaires . . . . .	217
77	Coordonnées cartésiennes 3D . . . . .	218
78	Coordonnées cylindriques . . . . .	218
79	Coordonnées sphériques . . . . .	218
80	Masses en interaction gravitationnelle . . . . .	224
81	Masse reliée à un ressort . . . . .	225
82	Réaction du support . . . . .	226
83	Poussée d'Archimède . . . . .	226
84	Bras de levier . . . . .	251
85	Schéma normalisé d'une liaison pivot . . . . .	253

## Liste des tableaux

1	Tableau Analogie Électrocinétique et Mécanique . . . . .	89
2	Impédances complexes des dipôles usuels . . . . .	99
3	Analogie champ électrostatique et gravitationnel . . . . .	156
4	Analogie champs des dipôles électrostatique et magnétostatique . . . . .	166
5	Analogies entre dipôles électrostatique et magnétostatique . . . . .	168
6	Lois de la mécanique en référentiel galiléen et non galiléen . . . . .	237
7	Analogies basiques entre solide en translation et solide en rotation . . . . .	252
8	Analogies complexes entre solide en translation et solide en rotation . . . . .	253

# Index

## A

- Aberrations ..... 11  
Accélération d'entrainement ..... 219  
Accélération de Coriolis ..... 220  
Ampère (unité) ..... 162  
Antenne ..... 188  
Aplanétisme ..... 11  
Approximation dipolaire ..... 188  
ARQS ..... 77, 79  
ARQS/ARQP ..... 170  
Astigmatisme (œil) ..... 16  
Auto-induction ..... 116  
Axe optique ..... 10

## B

- Bandé passante ..... 104, 105  
Barycentre ..... 224  
Bases orthonormées ..... 213  
Blanc d'ordre supérieur ..... 39  
Bobine ..... 81  
Branche (elec) ..... 77  
Bras de levier ..... 246

## C

- Champ angulaire (œil) ..... 15  
Calorimètre ..... 69  
Caractéristique d'un dipôle ..... 80  
Célérité ..... 167  
Célérité ..... 7  
Changements d'états ..... 62  
Champ d'interférences ..... 23  
Champ électrostatique ..... 134  
Champ magnétique ..... 110  
Champ magnétique (aimant) ..... 112  
Champ magnétique (fil) ..... 111  
Champ magnétique (solenoïde) ..... 112  
Champ magnétique (spire) ..... 112  
Champ magnétostatique ..... 157  
Charge élémentaire ..... 77, 131  
Charge électrique ..... 131  
Charge ponctuelle ..... 131  
Chemin optique ..... 18  
Circuit ..... 77  
Circulation (int) ..... 1, 133  
Cohérence spatiale ..... 25

- Cohérence temporelle ..... 25  
Compressibilité ..... 61  
Condensateur ..... 80  
Condition de non glissement ..... 229  
Condition de Nyquist-Shannon ..... 108  
Conditions de Gauss ..... 12  
Conductance ..... 80  
Conducteur électrique ..... 200  
Conducteur ohmique ..... 200  
Conducteur parfait ..... 203  
Conductivité ..... 168, 174, 200  
Conductivité plasma ..... 194  
Constante de gravitation universelle ..... 221  
Constante de Planck ..... 8, 182  
Constante de temps ..... 86  
Constante des aires ..... 239  
Constante des gaz parfaits ..... 61  
Contact optique ..... 52, 55  
Contact parfait (méca) ..... 231  
Contour ..... 1  
Contraste ..... 27  
Convention d'orientation (elec) ..... 79  
Coordonnées cartésiennes ..... 214, 215  
Coordonnées sphériques ..... 215  
Coordonnées cylindriques ..... 215  
Coordonnées polaires ..... 214  
Couple de forces ..... 248  
Courant électrique ..... 77  
Courant de conduction ..... 156  
Courant électrique ..... 156  
Corps pur diphasé ..... 62  
Corps pur monophasé ..... 62  
Critère de Shannon ..... 108, 127  
Capacité thermique ..... 61, 68  
Cycle Beau de Rochas ..... 74  
Cycle de Carnot ..... 73

## D

- Décade ..... 104  
Diagramme (P,T) ..... 62  
Diagramme (P,v) ..... 63  
Diagramme de Bode ..... 104  
Diagramme de Clapeyron ..... 67  
Diagramme de Raveau ..... 72  
Différence de marche ..... 18, 24

Diffraction .....	128	Équation locale de Poynting .....	175
Diffusion .....	191	Équation d'un cercle .....	92
Diffusion Rayleigh.....	191	Équation d'une ellipse .....	92
Dioptrés.....	9	Équations de Maxwell .....	168
Dipôle oscillant .....	188	Équilibre thermodynamique .....	60
Dipôle.....	77	Équilibre thermique .....	60
Dipôle électrostatique .....	138	Équation du gaz de Van Der Waals .....	61
Dipôle magnétique .....	163	Expérience d'Œrsted .....	115
Dipôles magnétiques .....	113		
Dipôle actif .....	80	<b>F</b>	
Dipôle linéaire.....	80	Facteur de qualité .....	91, 101
Dipôle passif .....	80	Fentes d'Young .....	33
Dipôle polarisé.....	80	Filtrage .....	103
Dipôle symétrique.....	80	Filtre moyenneur .....	106
Dispersion .....	8, 198, 199	Filtre premier ordre .....	107
Distances focales .....	13	Filtre second ordre .....	107
Diviseurs du front d'onde.....	27	Filtre déivateur .....	106
Double périodicité.....	7	Filtre intégrateur .....	106
Dynamique Newtonienne .....	221	Flux d'un champ vectoriel .....	2, 146
		Flux magnétique .....	115
		Flux propre .....	116
<b>E</b>		Fonction de transfert .....	103
Échelon de tension .....	87	Force (Newtonienne) .....	221
Enthalpie de changement d'état .....	68	Force centrale .....	238
Équilibre chimique .....	60	Force conservative .....	227
ÉCLAIREMENT .....	17	Force de Coulomb .....	134
Équilibre électrique .....	60	Force de Laplace .....	113, 162
Effet Joule .....	174	Force de Lorentz .....	167, 222, 236
Efficacité dispersive d'un réseau .....	46	Force électromotrice .....	116
Electrocinétique .....	77	Force de trainée .....	223
Electron Volt .....	237	Force de rappel élastique .....	222
Électrostatique .....	131	Forces centrales Newtonienne .....	240
États de la matière .....	59	Formule de Fresnel .....	24
Équilibre mécanique .....	60	Formule de Larmor .....	192
Émission stimulée .....	8	Frange brillante .....	26
Émission spontanée .....	21	Frange centrale .....	26
Émission stimulée .....	22	Frange d'interférence .....	26
Énergie cinétique .....	226, 249	Frange sombre .....	26
Énergie mécanique .....	228		
Énergie potentielle .....	227, 236	<b>G</b>	
Énergie interne .....	60, 61, 65	Gain (Filtrage) .....	103
Enthalpie .....	68	Gain en dB .....	104
Entropie .....	70	Gaz parfait .....	61, 68
Épaisseur de peau .....	201	Générateur de Thévenin .....	82
Équation d'état .....	60	Gradient (op) .....	133
Équation de conservation de la charge ..	171	Grandeur conservative .....	171
Équation de d'Alembert .....	169, 177	Grandeur massique .....	60
Équation de Laplace .....	170	Grandeur molaire .....	60
Équation de Poisson .....	170		

Grandissement transversal .....	13	Loi de noeuds .....	83, 100		
Grossissement angulaire .....	14	Loi de Wien .....	8		
<b>H</b>					
Hypermétropie .....	16	Loi des aires .....	239		
<b>I</b>					
Identité de rayonnement .....	186	Loi des mailles .....	83, 100		
Image .....	11	Lois de Coulomb pour le frottement .....	229		
Impédances complexes .....	99	Lois de Descartes .....	9		
Inégalité de Claussius .....	72	Lois de Kepler .....	241		
Incohérence spatiale .....	23	Lois de Kirchhoff (elec) .....	83		
Incohérence temporelle .....	22	Longueur de cohérence .....	20		
Indicatrice de rayonnement .....	190, 191	Longueur de cohérence spatiale .....	26		
Indice de réfraction .....	8	Longueur de cohérence spatiale de la source .....	36		
Indice (plasma) .....	200	Limite de résolution angulaire (œil) .....	15		
Indilatable .....	61	Lumière monochromatique .....	16		
Induction mutelle .....	117	<b>M</b>			
Intensité lumineuse .....	17	Machines thermiques .....	71		
Intensité .....	78	Maille (elec) .....	77		
Interaction gravitationnelle .....	151, 221, 227, 238,	Masse (elec) .....	78		
241		Michelson équivalent .....	51		
Interactions fondamentales .....	153	Michelson en coin d'air .....	52, 54, 57		
Interaction électrostatique .....	221, 238	Michelson en lame d'air .....	52–54		
Interférences .....	23	Milieu THI .....	8		
Interféromètre de Michelson .....	49	Minimum de déviation .....	44		
Interfrange .....	26	Mode propre .....	210		
Inversion de contraste .....	36	Moment d'inertie .....	244, 245		
Inversion de population .....	22	Moment de force .....	243, 245		
<b>J</b>					
Jour sidéral .....	234	Moment dipolaire induit .....	144		
Jour solaire .....	234	Moment dipolaire permanent .....	143		
<b>L</b>					
Lame compensatrice .....	50	Moment magnétique .....	113		
Lame séparatrice .....	49	Moment cinétique .....	238, 243, 244, 246		
Lampe spectrale .....	20	Myopie .....	16		
LASER .....	20, 22	<b>N</b>			
Lentilles .....	12	Noeud (elec) .....	77		
Liaison pivot .....	248	Noeuds de vibration .....	207		
Lignes de champ .....	110, 136, 154	Nombre d'Avogadro .....	59		
Loi d'Ohm .....	80, 168, 174, 200	Numérisation .....	127		
Loi de Cauchy .....	8	<b>O</b>			
Loi de composition des accélérations .....	220	Octave .....	104		
Loi de composition des vitesses .....	219	Œil emmétrope .....	15		
Loi de Faraday .....	116	Onde électromagnétique .....	178		
Loi de Laplace .....	69	Onde évanescante .....	196		
Loi de Lenz .....	116	Onde longitudinale .....	179		

Onde sphérique .....	179	Pression de vapeur saturante .....	63
Onde stationnaire .....	129, 206	Principe d'inertie.....	224
Onde transversale .....	179	Principe de Curie.....	131
Onde progressive à une dimension .....	127	Principe de Fermat .....	9
Ondes.....	126	Principe de superposition.....	136, 159
Ondes électromagnétiques .....	126	Principe du retour inverse de la lumière....	9
Ondes longitudinales .....	126	Principe fondamental de la dynamique ..	225,
Ondes transversales .....	126	232, 233	
Ordre d'interférence .....	26	Principe des actions réciproques .....	225
<b>P</b>			
Pompe à chaleur .....	75	Produit scalaire .....	213
Paquet d'ondes.....	181	Produit vectoriel .....	213
Paroi diatherme .....	64	Pouvoir séparateur (œil).....	15
Phase condensée .....	61, 68	Pseudo-source (thermo) .....	76
Perméabilité diélectrique .....	167	Puissance d'une force .....	225, 249
Permittivité diélectrique .....	134, 221	Puissance moyenne .....	95
Permittivité diélectrique.....	167	Puissance instantanée .....	95
Permittivité diélectrique plasma.....	195	Pulsation coupure .....	101
Phase (elec) .....	98	Pulsation cyclotron .....	237
Phase (thermodynamique).....	62	Pulsation de coupure.....	104
Phénomène de Gibbs .....	97	Pulsation propre.....	91, 101
Photon .....	8	Punctum Proximum .....	15
Plage d'accomodation (œil).....	15	Punctum Remotum .....	15
Plasma .....	167, 193	<b>Q</b>	
Première loi de Joule .....	61	Quadripôle .....	77
Poids .....	221	Quantité de mouvement .....	224
Poids apparent .....	232	<b>R</b>	
Point coïncident .....	219	Réseau de diffraction .....	40
Point de fonctionnement .....	85	Rails de Laplace.....	114
Point Image .....	11	Référentiel .....	217
Point Objet .....	11	Référentiel de Copernic.....	234
Polarisation .....	186	Référentiel galiléen .....	217, 224
Polarisation circulaire .....	187	Référentiel géocentrique .....	224, 234
Polarisation elliptique .....	187	Référentiel héliocentrique.....	224
Polarisation rectiligne .....	187	Référentiel terrestre .....	224, 234
Polariseur .....	187	Réflexion .....	10
Pompage optique .....	22	Réfraction .....	10
Pont diviseur de courant .....	85, 100	Réfrigérateur .....	75
Pont diviseur de tension .....	84, 100	Réfraction totale .....	10
Portrait de phase .....	92	Réflexion totale .....	10
Potentiel électrique .....	78	Régime apériodique .....	90
Potentiel harmonique .....	229	Régime apériodique critique .....	90
Potentiel électrique.....	236	Régime pseudo périodique .....	90
Poussée d'Archimède .....	223	Régime forcé .....	79, 93
Premier principe de la thermodynamique ..	66	Régime libre (elec) .....	85
Presbytie .....	16	Régime permanent .....	79
Pression .....	60	Régime transitoire .....	79

Règle des $4f'$ .....	14	Tension (fil) .....	222
Relation de dispersion .....	182, 184	Terme d'interférences .....	23
Relation de dispersion (c.ohm) .....	201	Terre (elec) .....	78
Relation de dispersion plasma .....	195	Théorème de Malus .....	19
Relation de Mayer .....	68	Théorème d'Ampère .....	159
Relation de Parseval .....	96	Théorème de Gauss .....	147, 153
Relation de structure .....	180, 184	Théorème de Green-Ostrogradski .....	3
Relations de Descartes .....	14	Théorème de Stokes-Ampère .....	4
Relations de Newton .....	13	Théorème de Fourier .....	95, 105
Relations de passage .....	172, 203	Théorème de l'énergie cinétique .....	226, 233
Rendement d'une machine thermique .....	73	Théorème de la puissance cinétique .....	233, 249
Repliement de spectre .....	108	Théorème de superposition .....	83
Représentation de Fresnel .....	47	Théorème du moment cinétique .....	233, 238
Représentation complexe .....	97	Thermodynamique .....	59
Représentation de Fresnel .....	98	Thermostat .....	67
Résistance électrique .....	80	Théorème des moments .....	64, 68
Resistivité .....	174	Train d'ondes .....	20
Résonance en intensité .....	101, 102	Trajectoire de phase .....	86
<b>S</b>			
Satellites géostationnaires .....	243	Transformation élémentaire (thermo) .....	65
Second principe de la thermodynamique .....	70	Transfert thermique .....	67
Signal analogique .....	103	Transformation (thermodynamique) .....	64
Signal rectangulaire .....	97	Transformation adiabatique .....	64, 65, 67
Signal sinusoïdal .....	94	Transformation isobare (thermo) .....	65
Signal triangulaire .....	96	Transformation isochore (thermo) .....	65
Solénoïde .....	161	Transformation isotherme (thermo) .....	65, 67
Solide en rotation .....	217	Transformation monobare (thermo) .....	65
Solide en translation .....	216	Transformation monotherme (thermo) .....	65
Solide indéformable .....	216	Transformation Non Quasi Statique .....	65
Source idéale de courant .....	82	Transformation Quasi Statique .....	64
Source idéale de tension .....	82	Transformation irréversible .....	65
Spectre électromagnétique .....	7	Transformation réversible .....	65
Spectre cannelé .....	39	Travail (thermo) .....	66
Système thermodynamique .....	59	Travail d'une force .....	226
Stigmatisme .....	11	Trous d'Young .....	29
Surface d'onde .....	18, 178	Tube de champ .....	137, 154
Surface fermée .....	2	<b>V</b>	
Surface ouverte .....	2	Valeur efficace d'un signal .....	94, 127
Surfaces équipotentielles .....	137, 154	Valeur moyenne d'un signal .....	94, 127
Système optique .....	10	Variable d'état .....	59
<b>T</b>			
Teinte plate .....	52, 55	Variable extensive .....	59
Teintes de Newton .....	39	Variable intensive .....	60
Température .....	60	Vecteur d'onde .....	128, 182
Temps de cohérence .....	20	Vecteur de Poynting .....	173, 175, 185, 190
Tension (elec) .....	78	Vecteur densité volumique de courant .....	156
		Vecteur moment dipolaire .....	138
		Vecteur moment magnétique .....	162
		Vecteur vitesse .....	216

Vecteur accélération .....	216
Ventres de vibration .....	207
Vergence .....	13
Vibration lumineuse .....	16
Vitesse d'entrainement .....	219
Vitesse de glissement .....	229
Vitesse de groupe .....	199
Vitesse de phase .....	182, 199
Vitesse de phase (plasma) .....	197
Vitesse de libération .....	243

## Z

Zone de rayonnement .....	188
---------------------------	-----