

# Chapitre 1: Electromagnétisme dans la matière

Richard Monier

Septembre 2019

## Abstract

Ces notes de cours reprennent les éléments du cours donné en Septembre 2019 à la préparation à l'agrégation à Montrouge. Cette partie traite de l'électromagnétisme dans la matière.

---

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Etat électrique d'un milieu matériel</b>	<b>2</b>
2.1	Rappels sur le dipôle électrique . . . . .	2
2.1.1	Calcul du champ à grande distance . . . . .	3
2.2	Champ créé par une distribution de charges. Développement multipolaire . . . .	4
2.3	Exemples de systèmes polaires . . . . .	6
2.4	Exemples de systèmes apolaires . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Dipole électrique induit</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Polarisation</b>	<b>8</b>
4.1	Vecteur polarisation . . . . .	8
4.2	Charges liées et charges libres . . . . .	8
4.3	Les trois principaux mécanismes de polarisation . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Densité de charge de polarisation et de courants de polarisation</b>	<b>10</b>
5.1	Densité de charges de polarisation . . . . .	10
5.2	Densités de courant de polarisation . . . . .	12
5.3	Vecteur déplacement électrique . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Etude magnétique d'un milieu matériel</b>	<b>13</b>
6.1	Dipôle magnétique . . . . .	13
6.2	Moment magnétique . . . . .	13
6.3	Moment magnétique dans la matière . . . . .	13
6.4	Vecteur aimantation . . . . .	13
6.5	Densité de courants équivalents à l'aimantation . . . . .	14
6.6	Vecteur excitation magnétique . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Equations de Maxwell dans un milieu matériel</b>	<b>16</b>

<b>8</b>	<b>Conditions aux limites du milieu</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>Relations constitutives pour les milieux LHI</b>	<b>18</b>
9.1	Permittivité diélectrique d'un milieu matériel . . . . .	18
9.2	Cas statique et quasi-statique . . . . .	18
9.2.1	Milieu linéaire . . . . .	18
9.2.2	Milieu isotrope . . . . .	18
9.2.3	Milieu homogène . . . . .	18
9.3	Permittivité magnétique d'un milieu matériel . . . . .	19
9.3.1	Milieux diamagnétiques et paramagnétiques . . . . .	19
9.3.2	Milieux ferromagnétiques . . . . .	20
<b>10</b>	<b>Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel</b>	<b>21</b>
10.1	Densité d'énergie électromagnétique . . . . .	21
10.2	Vecteur de Poynting dans un milieu . . . . .	21
	<b>Bibliographie</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

Lorsqu'il est soumis à un champ extérieur  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$  et lorsque le champ peut pénétrer dans le milieu, le milieu matériel réagit.

- Il y a création de dipôles électriques ou de dipôles magnétiques. Le nuage électronique entourant l'atome est déformé, Si le système contient des dipôles permanents, leur orientation est modifiée.
- Ces dipôles sont eux-mêmes sources de champs créant un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  différant de  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$
- La somme de tous les moments dipolaires  $\vec{p}$  ou des moments magnétiques  $\vec{m}$  crée:
  - une polarisation  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$
  - une aimantation  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$

Le vecteur  $\vec{P}$  représente donc la quantité de moments dipolaires par unité de volume en un point M donné, le vecteur  $\vec{M}$  représente la quantité de moments magnétiques par unité de volume en un point M.  $\vec{P}$  et  $\vec{M}$  sont les réponses macroscopiques du milieu matériel à l'application de  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$ .

# 2 Etat électrique d'un milieu matériel

## 2.1 Rappels sur le dipôle électrique

**Définition 2.1** (Le dipôle électrique). *Un dipôle électrique est un ensemble de 2 charges de signes contraires,  $-q$  et  $+q$ , situées aux points  $N$  et  $P$  symétriques par rapport à  $O$  et séparés de la distance  $a$*

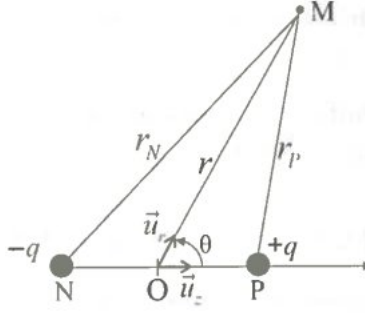


Figure 1: Modélisation du dipôle électrique

### 2.1.1 Calcul du champ à grande distance

On cherche l'expression du champ  $\vec{E}$  en un point M à grande distance du dipôle. On a donc  $OM = r \gg NP = 2a$ . Le potentiel électrostatique en V s'écrit:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} \right\} \quad (1)$$

M étant très éloigné du dipôle, on a les développements:

$$\frac{1}{r_N} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a \cos \theta}{r} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

et

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

On a  $\frac{a}{r} \simeq \epsilon \ll 1$ . Le potentiel V peut donc se réécrire sous la forme:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} \quad (4)$$

$$= \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_x \vec{u}_r}{r^2} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (6)$$

où  $\boxed{\vec{p} = 2aq\vec{e}_x = q\overrightarrow{NP}}$  est le moment dipolaire. On en déduit le champ en coordonnées polaires:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (7)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (8)$$

$$= \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \quad (9)$$

On a donc:

$$\vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \quad (10)$$

On voit que  $\vec{p}$  est orienté de la charge négative vers la charge positive. Son unité est le Cm.

## 2.2 Champ créé par une distribution de charges. Développement multipolaire

Il s'agit de calculer à grande distance le potentiel  $V(M)$  d'un système de  $N$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_n$  affectées aux points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  dans un domaine limité  $\mathcal{D}$  de l'espace. Le point  $M$  est à grande distance de  $\mathcal{D}$ :

$$\forall i |\overrightarrow{OM}| \gg |\overrightarrow{OP_i}|$$

On pose  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ ,  $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{P_iM}$ ,  $\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{OP_i}$ ,  $\alpha_i = (\overrightarrow{OP_i}, \overrightarrow{OM})$ . On a:

$$\cos \alpha_i = \frac{\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{r}}{a_i \cdot r} \quad (11)$$

Le théorème de superposition s'écrit:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (12)$$

avec  $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{P_iM} = \overrightarrow{P_iO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{a_i}$ . on a donc:

$$r_i = (r^2 + a_i^2 - 2\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a_i})^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$= r \left( 1 + \frac{a_i^2}{r^2} - \frac{2a_i \cos \alpha_i}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Le développement de  $\frac{1}{r_i}$  s'écrit:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a_i \cos \alpha_i}{r} + \frac{1}{2} \frac{a_i^2}{r^2} (3 \cos^2 \alpha_i - 1) + \dots \right) \quad (15)$$

Le potentiel se développe suivant les puissances de  $\frac{a_i}{r}$  sous la forme:

$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \dots \quad (16)$$

Ce développement porte le nom de *développement multipolaire de V* où:

$$V^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i \quad (17)$$

et

$$V^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i a_i \cos \alpha_i \quad (18)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \sum_i q_i \overrightarrow{a_i} \quad (19)$$

et

$$V^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^3} \sum_i q_i a_i^2 (3 \cos^2 \alpha_i - 1) \quad (20)$$

On a donc deux cas à envisager:  $\sum_i q_i = 0$  ou  $\sum_i q_i \neq 0$  (terme polaire nul ou non nul).

• Si  $\sum_i q_i \neq 0$ , la charge totale de la distribution est non nulle. Alors le terme dominant du potentiel est  $V^{(0)}$ . Le barycentre  $G$  des charges est défini par:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{Q} \sum_i q_i \overrightarrow{a_i} \quad (21)$$

On choisit comme origine le point G, on a donc:

$$\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{0} \implies V(M) \simeq V^{(0)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

A grande distance, cette distribution se comporte comme une charge ponctuelle située au barycentre de la distribution.

•  $\sum_i q_i = 0$ , la charge totale est nulle, la distribution est électriquement neutre. Cette situation est fréquente et correspond à l'état de la plupart des milieux matériels.

Si  $\sum_i q_i = Q \neq 0$ , alors G n'est plus défini et le terme prépondérant est  $V^{(1)}$ :

$$V^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \sum_i q_i \vec{a}_i \quad (22)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{p} \quad (23)$$

où on a introduit:

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i = \sum_i q_i \vec{OP}_i}$$

**Définition 2.2** (Moment dipolaire).  $\vec{p}$  est le moment dipolaire d'un système électriquement neutre. Il ne dépend pas de l'origine O choisie.

Soit  $G_+$  le barycentre des charges positives:

$$\vec{OG_+} = \frac{1}{\sum q_i} \sum_{q^+} q_i \vec{OP}_i \quad (24)$$

et  $G_-$  le barycentre des charges négatives:

$$\vec{OG_-} = \frac{1}{\sum q_i} \sum_{q^-} q_i \vec{OP}_i \quad (25)$$

Comme le système est électriquement neutre, on a:

$$\sum_{q^+} q_i = - \sum_{q^-} q_i = Q$$

, ce qui permet de réécrire:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OP}_i \quad (26)$$

$$= \sum_{q^+} q_i \vec{OP}_i + \sum_{q^-} q_i \vec{OP}_i \quad (27)$$

$$= Q (\vec{OG_+} - \vec{OG_-}) \quad (28)$$

soit

$$\vec{p} = Q (\vec{G_-G_+}) \quad (29)$$

On peut donc conclure qu'un système de charges électriquement neutre n'acquiert un moment dipolaire non nul que si le barycentre des charges positives  $G_+$  ne coïncide pas avec celui des charges négatives  $G_-$ .

Les milieux matériels se classent en deux grandes catégories:

- Les systèmes polaires ayant un moment dipolaire permanent:  $\vec{p} \neq \vec{0}$
- Les systèmes apolaires qui n'en possèdent pas:  $\vec{p} = \vec{0}$

## 2.3 Exemples de systèmes polaires

- les molécules diatomiques hétéronucléaires ayant des atomes d'électronégativité différentes: HCl, HF, HBr
- les molécules polyatomiques dissymétriques:  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ .  
L'exemple de  $H_2O$ :

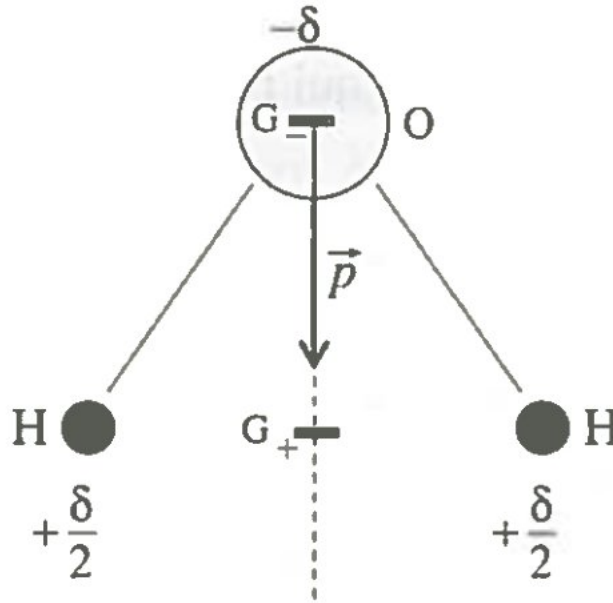


Figure 2: Molécule de  $H_2O$

les deux atomes H portent des charges  $+\frac{\delta}{2}$ .  $G_+$  se situe au milieu des 2 H. L'atome d'oxygène porte une charge  $-\delta$ .  $G_-$  est au centre de O. On a  $\vec{p} = \delta \overrightarrow{G_- G_+}$ . Lorsque  $\vec{p} \neq \vec{0}$ , le terme prépondérant est  $V^{(1)}$  qui est de la forme:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{p} \quad (30)$$

Il est équivalent au potentiel créé par un doublet électrique de moment dipolaire  $\vec{p}$ .

## 2.4 Exemples de systèmes apolaires

- les molécules diatomiques homonucléaires ou polyatomiques présentant un centre de symétrie:  $CO_2$ ,  $C_2H_2$ ,  $C_6H_6$ , .... Dans ce cas,  $V^{(0)} = V^{(1)} = 0$ , le premier terme non nul est  $V^{(2)}$ .  $G_+$  et  $G_-$  sont confondus.

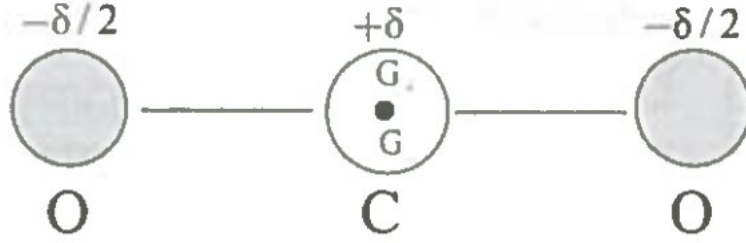


Figure 3: Molécule de  $CO_2$

### 3 Dipole électrique induit

Une molécule polaire ou apolaire placée dans un champ électrique acquiert un moment dipolaire induit.

- Molécules apolaires:

Lorsque  $\vec{E} = \vec{0}$ ,  $G_+$  et  $G_-$  sont confondus. Si on applique un champ  $\vec{E}$ , les charges positives et négatives migrent en sens inverses.  $G_+$  et  $G_-$  ne sont plus confondus. La molécule se comporte comme un dipôle constitué de deux charges:  $-Q$  en  $G_-$  et  $+Q$  en  $G_+$ . Elle acquiert un moment dipolaire induit  $\vec{p} = Q\overrightarrow{G_-G_+}$  qui ne disparaît que si  $\vec{E}$  disparaît.

- Molécules polaires:

Le dipole  $\overrightarrow{G_-G_+}$  est placé dans un champ  $\vec{E}$  uniforme. Le dipole est soumis à un couple de forces:

- la charge  $+q$  est soumise à  $\vec{F}_{+q} = q\vec{E}$

- la charge  $-q$  est soumise à  $\vec{F}_{-q} = -q\vec{E}$  Le dipole ne se déplace pas. Mais  $\vec{E}$  exerce un couple dont le moment est donné par:

$$\vec{C} = \overrightarrow{M_{F_{+q}}} + \overrightarrow{M_{F_{-q}}} \quad (31)$$

$$= \overrightarrow{OG_+} \wedge \vec{F}_{+q} + \overrightarrow{OG_-} \wedge \vec{F}_{-q} \quad (32)$$

$$= \overrightarrow{OG_+} \wedge q\vec{E} + \overrightarrow{OG_-} \wedge (-q\vec{E}) \quad (33)$$

$$= q\vec{E} \wedge (\overrightarrow{G_-G_+}) \quad (34)$$

$$= q\overrightarrow{G_-G_+} \wedge \vec{E} \quad (35)$$

$$= \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (36)$$

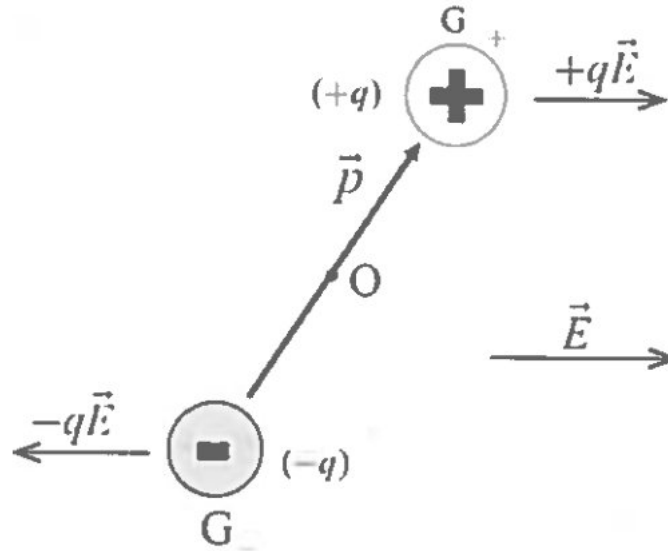


Figure 4: Couple sur une molécule polaire

Le couple de forces fait donc tourner le dipôle autour de O de manière à ce que  $\vec{p}$  s'aligne avec  $\vec{E}$  ce qui minimise l'énergie potentielle du dipole.

## 4 Polarisation

### 4.1 Vecteur polarisation

Placé dans un champ  $\vec{E}$ , un milieu matériel acquiert un caractère dipolaire à l'échelle microscopique. On peut généraliser la notion de dipôle électrique à un volume élémentaire  $d\tau$  du milieu contenant un ensemble de charges  $q_i$  vérifiant:

- $dq = \sum q_i = 0$
- $d\vec{p} = \sum q_i \vec{OM}_i \neq \vec{0}$

**Définition 4.1** (Vecteur polarisation). *Le vecteur polarisation  $\vec{P}$  est défini comme la densité volumique de moment dipolaire électrique*

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

où  $d\vec{p}$  est le moment dipolaire total dans le volume  $d\tau$ .

### 4.2 Charges liées et charges libres

**Définition 4.2** (Charges libres). *Les charges libres se déplacent librement sur des grandes distances dans le milieu. Elles donnent lieu aux courants libres ou de conduction. Ce sont essentiellement des électrons de masses bien inférieures à celles des autres constituants du milieu*



**Définition 4.3** (Charges liées). *Les charges liées ne se déplacent que sur des distances restreintes au voisinage des positions qu'elles occupent en l'absence de  $\vec{E}$ .*

### 4.3 Les trois principaux mécanismes de polarisation

- **La polarisation électronique:**

Il s'agit du déplacement des électrons du nuage électronique. Elle est présente dans tous les milieux et domine les milieux diélectriques dépourvus de milieux dipolaires électriques permanents.

- **La polarisation ionique:**

Un cristal ionique peut se déformer sous l'action d'un champ électrique, ce qui entraîne l'apparition d'un moment dipolaire et donc d'une polarisation ionique.

- **La polarisation d'orientation:**

Les milieux composés de molécules polaires sont dotés d'un moment dipolaire permanent au niveau de chaque molécule. En l'absence de tout champ, l'orientation de ces dipôles est aléatoire ce qui donne une polarisation globale nulle. En présence d'un champ  $\vec{E}$ , ces moments dipolaires vont s'orienter dans le sens du champ et créer un moment dipolaire non nul.

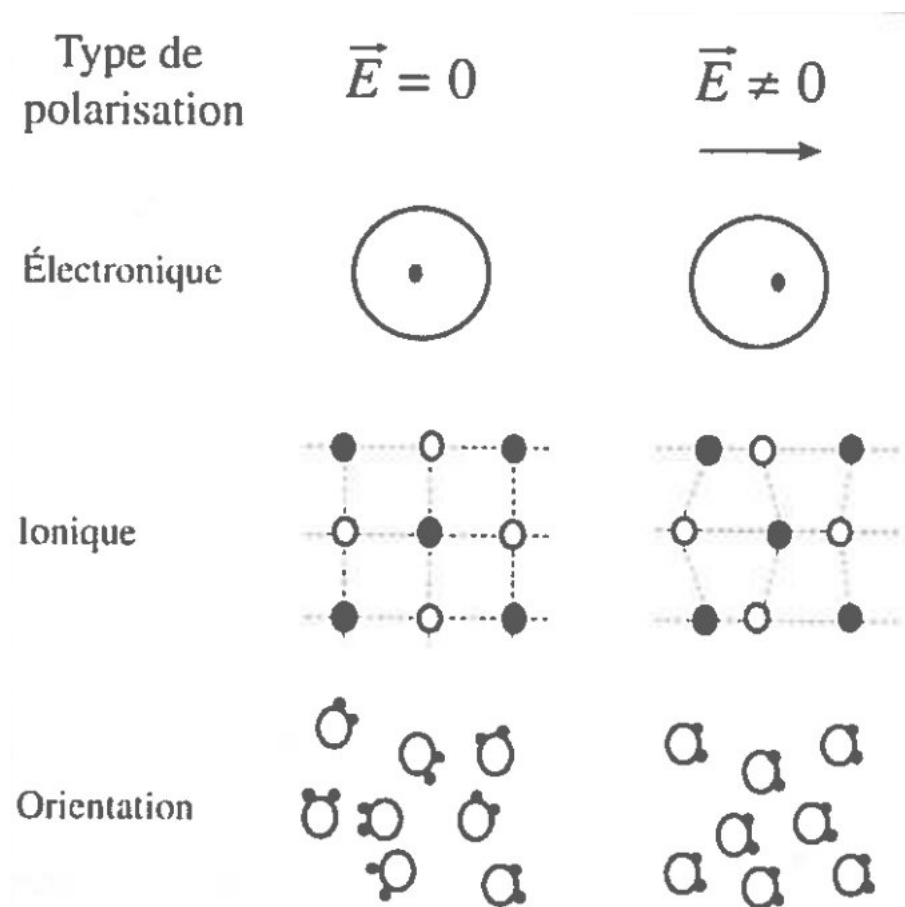


Figure 5: Mécanismes de polarisation

## 5 Densité de charge de polarisation et de courants de polarisation

### 5.1 Densité de charges de polarisation

Soit un milieu diélectrique ( $\mathcal{D}$ ) limité par une surface fermée  $\Sigma$  de dimensions grandes devant les dimensions atomiques. On cherche à exprimer le potentiel électrostatique en un point extérieur.

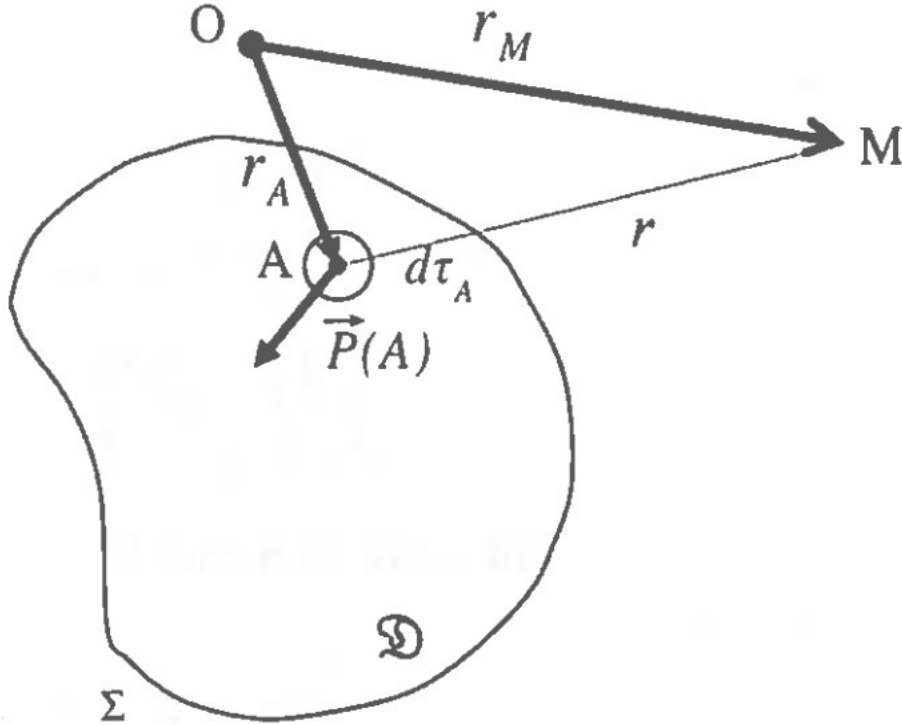


Figure 6: Calcul du potentiel électrostatique

Considérons d'abord le cas général où le milieu est non polarisé et immobile et doté d'une distribution de charges répartie en volume avec la densité  $\rho$  et sur la surface  $\Sigma$  avec une densité surfacique  $\sigma$ . Il crée en tout point  $M$  un potentiel électrostatique donné par:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(A)}{r} d\tau_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{r} dS \quad (37)$$

avec  $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_A$ .

Considérons maintenant un milieu est électriquement neutre mais polarisé. Soit  $\vec{P}(A)$  le vecteur polarisation en  $A$ . Le volume élémentaire  $d\tau_A$  est noté d'un moment dipolaire  $d\vec{p} = \vec{P}(A)d\tau_A$ . Compte tenu de ce que nous avons établi précédemment pour une distribution de charges

ponctuelles, le potentiel  $dV(M)$  créé par l'élément  $d\tau_A$  en M est:

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{dp}}{r^3} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \overrightarrow{P(A)}}{r^3} d\tau_A \quad (39)$$

Le potentiel total  $V(M)$  créé par la polarisation dans  $(\mathcal{D})$  s'exprime en sommant les contributions de tous les moments dipolaires contenus dans  $(\mathcal{D})$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_D \frac{\vec{r} \cdot \overrightarrow{P(A)}}{r^3} d\tau_A \quad (40)$$

Sachant que  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}_A(\frac{1}{r})}$ . L'indice A indique que les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées de A. Par ailleurs, pour un champ vectoriel  $\vec{a}$  et une fonction scalaire f, on a

$$\text{div}(f\vec{a}) = f \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}(f)} \quad (41)$$

On en déduit que:

$$\frac{\vec{r} \cdot \overrightarrow{P(A)}}{r^3} = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}(\frac{1}{r})} \quad (42)$$

$$= \text{div}(\frac{\vec{P}}{r}) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} \quad (43)$$

donc

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_D \text{div}(\frac{\vec{P}}{r}) d\tau_A - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_D \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} d\tau_A \quad (44)$$

D'après le théorème de la divergence, on a:

$$\int \int \int_D \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} d\tau_A = \int \int_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS \quad (45)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à  $\Sigma$  dirigé vers l'extérieur. Ce potentiel s'identifie à celui de la distribution générale précédente  $(\rho, \sigma)$  non polarisée si on adopte:

$$\boxed{\rho_P = -\text{div}(\vec{P})}$$

et

$$\boxed{\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}}$$

En conclusion, la distribution de polarisation  $\vec{P}$  est équivalente à une distribution macroscopique de charges de polarisation en volume et en surface  $(\rho_P, \sigma_P)$ .

## 5.2 Densités de courant de polarisation

Lorsque les porteurs de charges sont en mouvement, le moment dipolaire devient fonction du temps et la polarisation aussi. Dans ce cas, la relation entre polarisation et densité de charges équivalentes s'applique aussi:

$$\boxed{\rho_P(t) = -\text{div}(\vec{P}(t))}$$

A ce mouvement de porteurs de charges, correspond un courant appelé courant de polarisation de densité volumique  $\vec{j}_P$ . On applique la loi de conservation de la charge pour l'obtenir:

$$\text{div}\vec{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0 \quad (46)$$

soit:

$$\text{div}\vec{j}_P = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t} \quad (47)$$

$$= \text{div}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) \quad (48)$$

dont on déduit:

$$\boxed{\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

## 5.3 Vecteur déplacement électrique

On a deux catégories de porteurs de charge: les charges libres de densité volumique de charges,  $\rho_{libre}$  et les charges liées de densité  $\rho_{lies}$ . En un point P, la densité de charges est:

$$\rho = \rho_{libres} + \rho_{lies} \quad (49)$$

On considère que le champ  $\vec{E}$  présent dans le milieu est la superposition du champ  $\vec{E}_l$  créé par les charges libres et du champ  $\vec{E}_{pol}$  créé par les charges liées. Dans ce milieu, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{libres} + \rho_{lies}}{\epsilon_0} \quad (50)$$

$$= \frac{\rho_{libres}}{\epsilon_0} - \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) \quad (51)$$

On a donc:

$$\boxed{\text{div}(\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{libres}}$$

**Définition 5.1** (Vecteur déplacement électrique). On appelle vecteur déplacement électrique, noté  $\vec{D}$ , le vecteur  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  qui vérifie la relation  $\text{div}(\vec{D}) = \rho_{libres}$ .

**Remarque:**  $\vec{D}$  n'est pas uniquement déterminé par la densité de charges libres. Son rotationnel dépend en effet de la polarisation. En effet,

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{D})} = \epsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}(\vec{E})} + \overrightarrow{\text{rot}(\vec{P})} \quad (52)$$

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}(\vec{P})} \quad (53)$$

$$(54)$$

## 6 Etude magnétique d'un milieu matériel

Considérons un milieu contenant des courants répartis dans le domaine avec une densité. La présence de ces courants crée en M un état magnétique caractérisé par 2 vecteurs:

- le vecteur  $\vec{B}$ , résultante du champ créé par tous les courants du milieu
- l'aimantation  $\vec{M}$  qui est la réponse du milieu à la présence de  $\vec{B}$ .

### 6.1 Dipôle magnétique

Le modèle le plus simple de dipôle magnétique est une boucle de courant créant un champ  $\vec{B}$ . La droite passant par le centre de la boucle correspond à l'axe du dipôle. Un dipôle magnétique est analogue à un aimant droit. Les lignes de champ  $\vec{B}$  sont orientées du pôle nord vers le pôle sud. Le champ est tangent en chaque point à la ligne de champ.

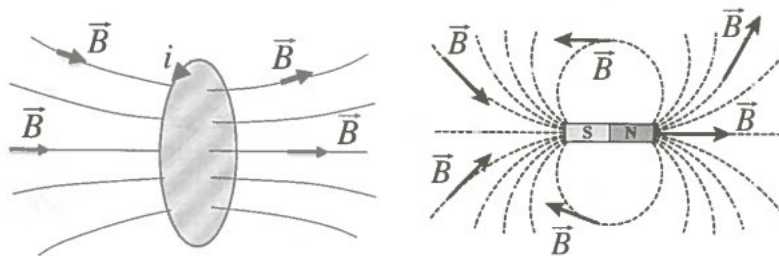


Figure 7: Le dipôle magnétique

### 6.2 Moment magnétique

**Définition 6.1** (Moment magnétique). *Le moment magnétique d'une boucle de courants  $i$  entourant une surface  $S$  est  $\vec{m} = iS\vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire orthogonal à la surface  $S$  (unité:  $\text{Am}^2$ ).*

### 6.3 Moment magnétique dans la matière

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , ce dernier agit de manière importante sur les électrons (légers) plutôt que sur les noyaux. Les propriétés de la matière s'expliquent par la présence de courants microscopiques qui sont les mouvements orbitaux des électrons autour du noyau. A ce moment orbital de l'électron, s'ajoute le moment magnétique intrinsèque, le moment magnétique de spin.

### 6.4 Vecteur aimantation

Plongé dans un champ  $\vec{B}$ , chaque volume élémentaire  $d\tau$  de matière acquiert un moment magnétique  $d\vec{m}$  induit par ce champ.

**Définition 6.2** (Vecteur aimantation). *Le vecteur aimantation  $\vec{M}$  est la densité volumique de moments magnétiques:  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$*

## 6.5 Densité de courants équivalents à l'aimantation

Les électrons en mouvement orbital créent des courants localisés auxquels sont associés les moments magnétiques  $d\vec{m}$ . Montrons qu'il existe une relation entre l'aimantation moyenne  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$  et la moyenne  $j_m$  des densités volumiques de ces courants microscopiques.

Pour cela, on exprime le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  créé par une distribution volumique d'aimantation. Soit  $\mathcal{D}$  un milieu limité par une surface fermée  $\Sigma$  de grandes dimensions devant les dimensions atomiques.

Distinguons deux cas:

- Le milieu n'est pas aimanté:  $\forall P \in (\mathcal{D}) \vec{M}(P) = \vec{0}$  mais il est pourvu de courants répartis avec une densité volumique  $\vec{j}$  et sur la surface  $\Sigma$  avec une densité surfacique  $\vec{j}_s$ . Alors ces courants créent en tout point Q un potentiel vecteur  $\vec{A}$ :

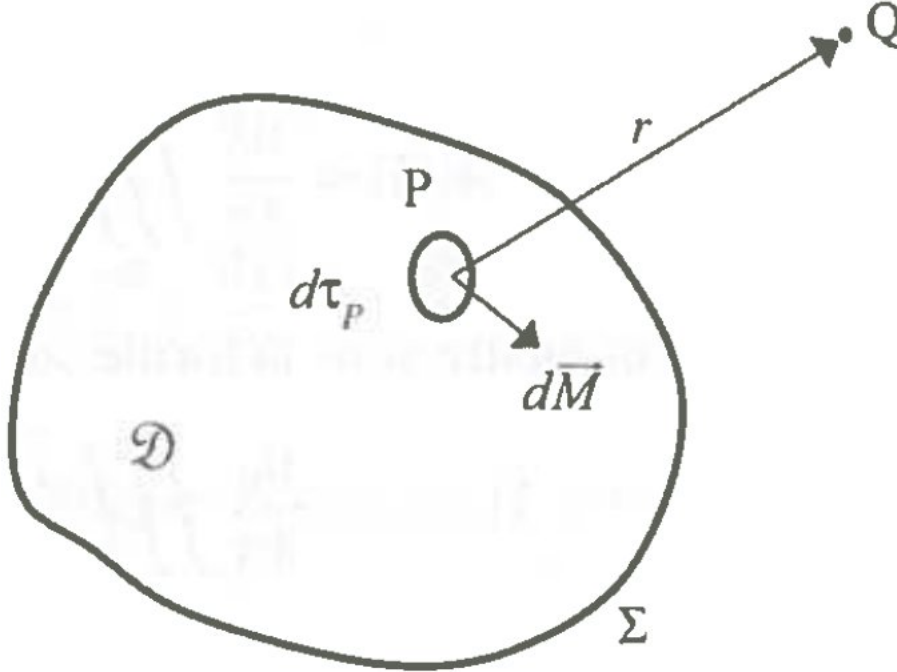


Figure 8: Calcul du potentiel-vecteur  $\vec{A}$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}}{r} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}_s}{r} d\Sigma \quad (55)$$

- Supposons maintenant que ce milieu soit aimanté et dépourvu de courants  $\vec{j}$ . Un élément  $d\tau_P$  centré en P et doté du moment magnétique  $d\vec{m} = \vec{M}(P)d\tau_P$  où  $\vec{M}(P)$  désigne l'aimantation

au point P. Le potentiel-vecteur  $\overrightarrow{dA(Q)}$  créé par P en Q s'écrit:

$$\overrightarrow{dA(Q)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (56)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{M(P)} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (57)$$

Le potentiel vecteur dû à toute la distribution  $\mathcal{D}$  s'écrit:

$$\overrightarrow{A(Q)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_D \frac{\overrightarrow{M(P)} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau_P \quad (58)$$

On utilise la relation:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (59)$$

avec  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ . On a donc:

$$\overrightarrow{A(Q)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_D \overrightarrow{M(P)} \wedge \overrightarrow{\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)} d\vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\tau_P \quad (60)$$

On utilise la relation:

$$\overrightarrow{\text{rot}(f\vec{a})} = \overrightarrow{\text{rot}\vec{a}} - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{grad}(f)} \quad (61)$$

ce qui permet de réécrire:

$$\overrightarrow{A(Q)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_P \overrightarrow{\text{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\overrightarrow{\text{rot}(M)}}{r} d\tau_P \quad (62)$$

La formule du rotationnel permet de transformer la première intégrale:

$$\int \int \int \overrightarrow{\text{rot}(\vec{a})} d\tau_P = \int \int \vec{n} \wedge \vec{a} d\Sigma \quad (63)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface  $\Sigma$  et dirigé vers l'extérieur. Le potentiel vecteur s'écrit alors:

$$\overrightarrow{A(Q)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\overrightarrow{\text{rot}(M)}}{r} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} d\Sigma \quad (64)$$

que l'on peut comparer à l'expression précédente de  $\overrightarrow{A(Q)}$  (milieu non aimanté):

$$\overrightarrow{A(Q)} = \frac{mu_0}{4\pi} \int \int \int_D \frac{\vec{j}}{r} d\tau_P + \frac{mu_0}{4\pi} \int \int \frac{\vec{j}_s}{r} d\Sigma \quad (65)$$

à la condition de poser:

$$\boxed{\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}\vec{M}}}$$

$$\boxed{\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}}$$

**Interprétation** Le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  (et donc  $\vec{B}$  qui en dérive) est identique à celui que produirait une distribution macroscopique de courants caractérisée:

- à l'intérieur de  $(\mathcal{D})$  par une densité volumique de courant d'aimantation  $\vec{j}_m$
- sur la surface  $\Sigma$  par une densité surfacique de courant d'aimantation  $\vec{j}_{sm}$

*Remarque:* La présence d'une densité superficielle de courant  $\vec{j}_{sm}$  est liée au fait que nous avons considéré un domaine fini  $(\mathcal{D})$ . A la sortie de ce domaine,  $\vec{M} \rightarrow \vec{0}$  très rapidement. Cette discontinuité de  $\vec{M}$  est à l'origine de la création d'une densité superficielle de courants au niveau de  $\Sigma$ .

## 6.6 Vecteur excitation magnétique

Dans un milieu matériel, on peut avoir trois types de champs magnétique:

- $\vec{B}_l$ : champ créé par les courants de conduction  $\vec{j}_l$  (courants de charges libres)
- $\vec{B}_m$ : créé par l'aimantation, associé à  $\vec{j}_m$
- $\vec{B}_p$  associé à des courants de polarisation de densité volumique  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

La densité totale des courants volumiques est donc:  $\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_m + \vec{j}_p$ . Dans ce milieu, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{B})} = \mu_0(\vec{j}_l + \vec{j}_m + \vec{j}_p) + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (66)$$

$$= \mu_0(\vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}(\vec{M})}) + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (67)$$

ce qui se réécrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})} = \vec{j}_l + \frac{\partial(\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \quad (68)$$

$$= \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (69)$$

ce qui se réécrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M})} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (70)$$

**Définition 6.3** (Vecteur excitation magnétique). On appelle vecteur excitation magnétique le vecteur  $\vec{H}$  défini par  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

Ce vecteur vérifie:  $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}(\vec{H})} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ .

Remarque: ce vecteur vérifie aussi  $\text{div}(\vec{H}) = -\text{div}(\vec{M})$

## 7 Equations de Maxwell dans un milieu matériel

Dans un milieu matériel, les équations de Maxwell sont le plus facilement exploitables sous la forme suivante:



- équation de Maxwell-Gauss (MG):  $\text{div}(\vec{D}) = \rho_{\text{libres}}$
- équation de Maxwell-Ampère (MA) :  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- équation du flux magnétique (MΦ):  $\text{div}(\vec{B}) = 0$
- équation de Maxwell-Faraday (MF) :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Cette formulation des équations de Maxwell a pour principal avantage de faire apparaître explicitement les densités de charges et de courants libres,  $\rho_{\text{libres}}$  et  $\vec{j}_l$  pour lesquelles on connaît le comportement dans de nombreux matériaux. Cet avantage s'accompagne de l'introduction de deux vecteurs supplémentaires  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  qui sont deux "inconnues" supplémentaires.

### Remarque

La plupart des milieux matériels occupe un volume fini de l'espace. Pour que les ondes électromagnétiques puissent exister dans ces milieux, il faut que les équations de Maxwell soient vérifiées à l'intérieur du volume mais aussi sur les frontières (surfaces) du domaine occupé avec le matériau avec le milieu extérieur.

## 8 Conditions aux limites du milieu

Sur les frontières (surfaces) du domaine occupé avec le matériau avec le milieu extérieur, les équations de Maxwell conduisent à un jeu d'équations appelées "relations de passage". Il est possible de montrer les relations suivantes:

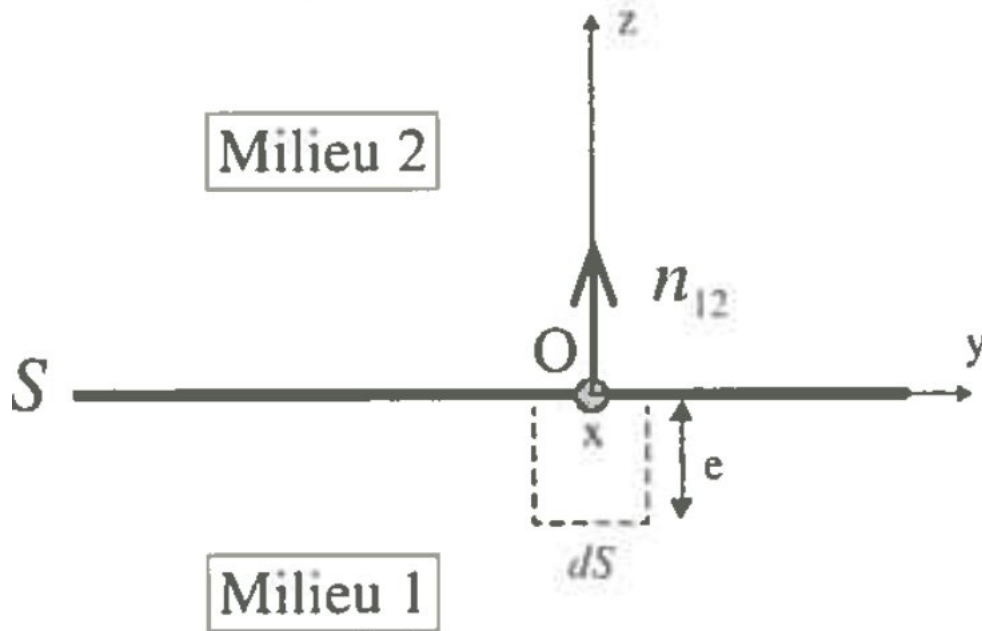


Figure 9: Géométrie pour les relations de passage

- L'équation MG conduit à:

$$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma_l \vec{n}_{12} \quad (71)$$

- L'équation de MA conduit à:

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_{ls} \wedge \vec{n}_{12} \quad (72)$$

## 9 Relations constitutives pour les milieux LHI

Les équations de Maxwell dans un milieu matériel font intervenir les champs  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ . Elles ne suffisent pas pour résoudre certains problèmes d'électromagnétisme car il y a plus d'inconnues que d'équations. En pratique, il faut compléter les équations de Maxwell par d'autres relations, qualifiées de relations constitutives afin de pouvoir résoudre le problème. Ces relations constitutives décrivent le comportement du milieu soumis à un champ électromagnétique.

### 9.1 Permittivité diélectrique d'un milieu matériel

#### 9.2 Cas statique et quasi-statique

##### 9.2.1 Milieu linéaire

On constate expérimentalement dans de nombreux matériaux que, lorsque l'amplitude du champ électrique appliqué au matériau n'est pas trop importante, la relation entre la polarisation du milieu,  $\vec{P}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  est linéaire. Si de plus  $\vec{E}$  ne varie pas trop vite alors la polarisation suit instantanément les variations du champ électrique, ce qui se traduit par une relation du type:

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad (73)$$

**Définition 9.1.** Un milieu où  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  suivent ce type de relation est dit linéaire

La relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  est matricielle et se met sous la forme matricielle suivante:

**Remarque:**  $[\chi_e]$  est une matrice symétrique appelé tenseur de susceptibilité électrique.

##### 9.2.2 Milieu isotrope

**Définition 9.2.** Un milieu est dit isotrope si ses propriétés ne dépendent pas de la direction considérée.

dans un tel milieu, la matrice  $[\chi_e]$  est proportionnelle à la matrice unité. La polarisation  $\vec{P}$  est localement parallèle à  $\vec{E}$  et s'écrit

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (74)$$

où  $\chi_e$  est fonction de la pulsation du champ électrique.

##### 9.2.3 Milieu homogène

**Définition 9.3.** Un milieu est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point du milieu considéré. Dans ce cas,  $\chi_e$  a la même valeur en tout point du milieu matériel.

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), lorsque le champ électrique ne varie pas trop rapidement dans le temps, les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{D}$  sont liés par les relations:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (75)$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}}$$

Ces deux relations sont dites constitutives: elles relient la réponse du milieu  $\vec{P}$  ou  $\vec{M}$  aux champs électrique et magnétique. Le nombre  $\chi_e$  n'a pas de dimension et est appelé la susceptibilité électrique du milieu. Le nombre  $\epsilon_r = 1 + \chi_r$  est la permittivité diélectrique relative du milieu et n'a pas de dimension. Le nombre  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  est la permittivité du milieu et s'exprime en  $F.m^{-1}$ .

Gaz	$10^6 \chi_r$	Liquides	$\chi_r$	Solides	$\chi_r$
hélium	6.5	eau	80.36	diamant	5.5
néon	127		2.24	silice pure	3.78
argon	517	benzène	2.28	paraffine	2.20
hydrogène	254	nitrobenzène	35.74	nylon	5.00
oxygène	495	acide acétique	6.15	polyéthylène	2.3
azote	547	éthanal	4.34	verres	4 à 7
gaz carbonique	921	éthanol	25.1	plexiglass	3.3
air sec	537	glycérol	43.5	téflon	2.1
		acétone	21.2	titane de baryum	1500

Table 1: Susceptibilités et permittivités relatives de quelques fluides et solides

## 9.3 Permittivité magnétique d'un milieu matériel

### 9.3.1 Milieux diamagnétiques et paramagnétiques

Une proportion importante des milieux matériels présente des propriétés magnétiques. Dans ces milieux, l'aimantation induite  $\vec{M}$  est proportionnelle au champ magnétique  $\vec{B}$  (même lorsque  $\vec{B}$  varie rapidement dans le temps): ces milieux sont donc linéaires et isotropes pour leurs propriétés magnétiques. Nous les supposons aussi homogènes.

**Définition 9.4.** On définit la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  par la relation  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

Sachant que  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H}$ , on en déduit:  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$

en posant  $\mu_r = 1 + \chi_m$ ,  $\mu_r$  est perméabilité magnétique relative du milieu et  $\mu = \mu_0 \mu_r$  la perméabilité du milieu. Les grandeurs  $\chi_m$  et  $\mu_r$  sont sans dimensions tandis que  $\mu$  et  $\mu_0$  s'expriment en  $H.m^{-1}$ .

La susceptibilité  $\chi_m$  peut être positive ou négative, le signe de  $\chi_e$  permet de distinguer de distinguer les milieux diamagnétiques des milieux

- Les milieux diamagnétiques vérifient  $\chi_m < 0$ :

Dans ces milieux le champ magnétique créé par l'aimantation acquise s'oppose au champ extérieur  $\vec{B}$ . L'aimantation induite, généralement faible, reste quasiment indépendant de la température. La susceptibilité magnétique  $\chi_m$  dépend peu de la température.

- Les milieux paramagnétiques vérifient  $\chi_m > 0$ :

Dans ce cas, les atomes possèdent déjà leur propre moments magnétiques permanents, le paramagnétisme va masquer le diamagnétisme. Sous l'effet du champ magnétique extérieur, les dipôles magnétiques permanents (petits aimants permanents) s'orientent dans la direction du champ appliquée et l'amplifient. L'aimantation globale induite  $\vec{M}$  reste généralement faible mais elle dépend fortement de la température car l'agitation thermique s'oppose à l'orientation privilégiée des dipôles. La susceptibilité magnétique  $\chi_m$  des matériaux paramagnétiques est positive et décroît (en général) avec la température.

Corps diamagnétiques	$10^6 \chi_m$	paramagnétiques	$10^6 \chi_m$
dihydrogène	-0.02	dioxygène	4.8
diazote	-0.006	air	0.37
eau	-9.1	sodium	8.50
diamant	-21.6	aluminium	20.7
cuivre	-9.60	calcium	19.5
plomb	-9.6	$FeCl_3$	3300
argent	-23.8		

Table 2: Susceptibilités magnétiques de quelques milieux

### Remarques:

- Lorsque la susceptibilité  $\chi_m$  est très faible, on peut écrire

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (76)$$

$$= \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)} \vec{B} \quad (77)$$

$$= \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B} \quad (78)$$

- Dans les milieux, le champ  $\vec{B}$  total résulte de la superposition du champ créé par les sources extérieures au milieu et du champ créé par la matière elle-même (via l'aimantation). Dans un milieu diamagnétique ou paramagnétique, on néglige souvent ce champ et on écrit  $\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{H}$ .
- Pour la plupart des gaz et matériaux diélectriques,  $\mu_r = 1$ .

### 9.3.2 Milieux ferromagnétiques

Les milieux ferromagnétiques peuvent présenter une aimantation très importante lorsqu'ils sont plongés dans un champ  $\vec{B}$  et cette aimantation peut subsister lorsque le champ extérieur est supprimé. Des métaux comme le fer, le nickel, le cobalt sont ferromagnétiques. Ces matériaux ne sont pas linéaires: la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  n'est pas linéaire.

## 10 Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel

### 10.1 Densité d'énergie électromagnétique

On peut montrer que la densité volumique d'énergie électromagnétique,  $u$ , dans un milieu LHI s'écrit:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (79)$$

Cette densité d'énergie comprend deux termes:

- le premier représente la densité d'énergie électrique:  $\epsilon \frac{E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} = E \frac{D}{2}$
- le second représente la densité d'énergie magnétique:  $\mu \frac{H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = H \frac{B}{2}$

### 10.2 Vecteur de Poynting dans un milieu

**Définition 10.1.** Dans un milieu le vecteur de Poynting est défini par  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

A un instant donné, le flux du vecteur  $\Pi$  à travers une surface fermée  $\Sigma$  donne la puissance rayonnée

## References

- [1] Brébec et al. *Electromagnétisme PC-PC\**, Hachette Sup, 1998 (livre vert)
- [2] Garing C. *Ondes électromagnétiques dans les Milieux Diélectriques PC-PC\**, Ellipses, 1998
- [3] Garing C. *Milieux Magnétiques PC-PC\**, Ellipses, 1998