

Chapitre 3: Rayonnement dipolaire et applications

Richard Monier

Octobre 2019

Abstract

Ces notes de cours reprennent les éléments du cours donné en Septembre 2019 à la préparation à l'agrégation à Montrouge. Cette partie traite du rayonnement dipolaire.

Contents

1	Introduction	1
2	Champ et puissance rayonnés	1
2.1	Equivalence dipôle variable - élément de courant	2
2.2	Les différentes zones autour du dipôle	3
2.2.1	La zone statique	3
2.2.2	La zone de rayonnement	4
3	Vecteur de Poynting et puissance rayonnée	6
4	Diffusion atomique et polarisation par rayonnement	7
5	Rayonnement d'une antenne demi-onde (exercice)	10
	Bibliographie	12

1 Introduction

Il s'agit d'une leçon de niveau L3, située plutôt à la fin du cours d'électromagnétisme (calculs assez développés, onde non plane). On s'intéresse, après avoir étudié les propriétés des ondes électromagnétiques, à l'origine de ces ondes émises par des mouvements électroniques au sein des atomes. Il s'agit de montrer comment dipôle oscillant rayonne et quelles sont les propriétés et applications de ce rayonnement.

2 Champ et puissance rayonnés

Le dipôle considéré comporte une charge $-q$ à l'origine O d'un repère cartésien et une charge $+q$ en un point S sur l'axe Oz . Cette charge $+q$ oscille avec une vitesse \vec{v} .

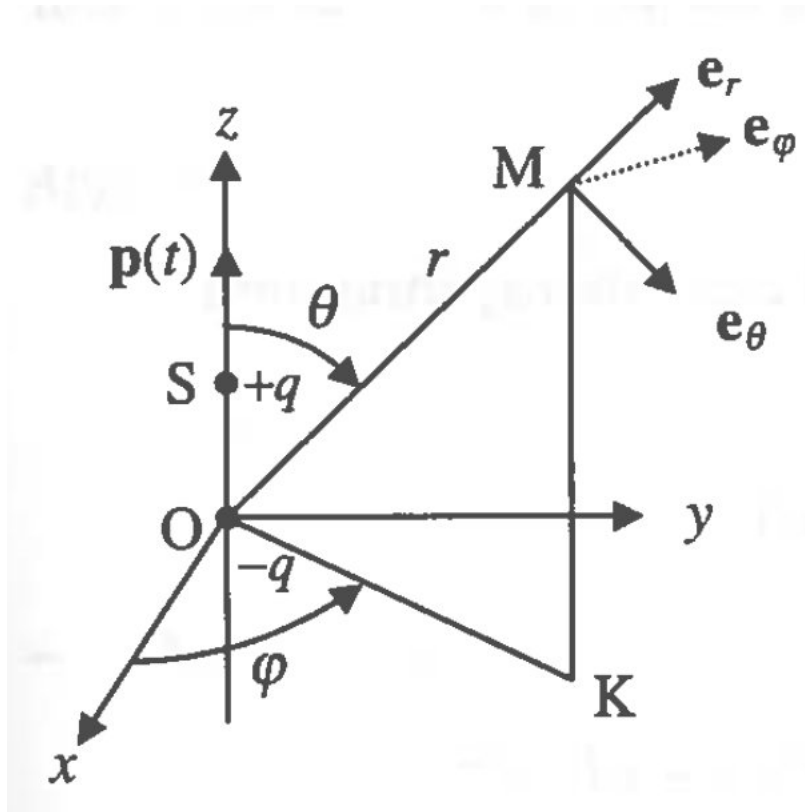


Figure 1: Le dipôle oscillant

On a:

$$\vec{OS} = a \cos \omega t \quad (1)$$

$$\vec{p(t)} = q \vec{OS} \quad (2)$$

$$= p_0 \cos \omega t \vec{e}_z \quad (3)$$

avec $p_0 = qa$. On se place à grande distance: $r \gg a$ et la charge en S n'est pas relativiste: $|v| \ll c$. On en déduit $a\omega \ll c$ et donc $a \ll \lambda$.

Exemples de dipôles oscillants:

- l'atome forme un dipôle atomique, avec une charge $+e$ du noyau fixe et une charge $-e$ mobile.
- une antenne émettrice de faible longueur devant la longueur d'onde.

2.1 Equivalence dipôle variable - élément de courant

La charge en S se déplace avec une vitesse \vec{v} et donc engendre un courant. On peut écrire que les charges sont contenues dans un élément de volume $d\tau$ autour de O. Si en O la densité

volumique de courant est $\overrightarrow{j(O, t)}$, alors l'élément de courant vérifie:

$$\overrightarrow{j(O, t)} d\tau = \sum_{d\tau} \overrightarrow{v_i} \quad (4)$$

$$= \sum_{d\tau} q_i p_i \frac{d\overrightarrow{OS_i}}{dt} \quad (5)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{d\tau} q_i \overrightarrow{OS_i} \quad (6)$$

$$= \frac{d}{dt} q \overrightarrow{OS} \quad (7)$$

$$= \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \quad (8)$$

Considérons que cet élément de courant rectiligne entre O et S est assimilable à un petit cylindre de section droite dS et de volume $d\tau = ||OS||dS$. Il est parcouru par un courant d'intensité $I(t)$ vérifiant; $I(t) = j(O, t)dS$. on a donc:

$$I(t)||OS|| = j(O, t)dS||OS|| = j(O, t)d\tau = \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}$$

On a donc:

$$I(t)||OS|| = \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}$$

2.2 Les différentes zones autour du dipôle

On travaille en coordonnées sphériques. On distingue trois zones selon la longueur d'onde et la distance r au dipôle.

2.2.1 La zone statique

Elle correspond à la région: $a \ll r \ll \lambda$. La durée de propagation du signal entre S et le point d'observation M est $\Delta t = \frac{r}{c}$ est très inférieur à une période. Sur cette durée, les charges se déplacent de manière négligeable devant r et λ . Le dipôle est donc quasiment électrostatique. Le champ électrique doit être celui d'un dipôle électrostatique et le champ magnétique est donné par la loi de Biot et Savart. On a donc:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p(t) \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(t) \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

et

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t) \overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dp}{dt} \wedge \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{p}{r^2} \overrightarrow{e_\phi}$$

2.2.2 La zone de rayonnement

Cette zone vérifie: $r \gg \lambda$. La durée de propagation est grande devant la période de variation du dipôle. Le moment dipolaire intervient par son expression retardée $\overrightarrow{p_{ret}} = \overrightarrow{p}(t - \frac{r}{c})$ tenant compte de l'état de la source à l'instant précédent $t - \frac{r}{c}$.

Dans ce qui suit, on va chercher à exprimer d'abord le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(r, t)$, puis les champs \overrightarrow{B} et \overrightarrow{E} en faisant un calcul exact.

1) Expression du potentiel-vecteur

On a $a = ||OS|| \ll \lambda$ ce qui implique $\frac{SM}{c} \simeq \frac{r}{c}$. Le potentiel vecteur est créé par la seule charge -e en S, on a donc:

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{j}(S, t - \frac{SM}{c}) d\tau}{SM} \quad (9)$$

soit

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{j}(O, t - \frac{r}{c}) d\tau}{SM} \quad (10)$$

Comme on a l'équivalence $\overrightarrow{j}(O, t) d\tau = \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}$, cette relation reste vraie pour les expressions retardées: $\overrightarrow{j}(O, t - \frac{r}{c}) d\tau = \frac{d\overrightarrow{p}(t - \frac{r}{c})}{d\tau} = \overrightarrow{p_{ret}}$. d'où l'expression du potentiel vecteur:

$$\boxed{\overrightarrow{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{p_{ret}}}{r}}$$

2- Calcul de \overrightarrow{B} et \overrightarrow{E}

Considérations de symétries:

- Oz est axe de symétrie de révolution
- Le plan OKM est plan de symétrie. En tout point appartenant à ce plan, \overrightarrow{E} est dans ce plan et donc a deux composantes E_r et E_θ non nulles et E_ϕ est nulle.
- Sur Oz, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$: le dipôle ne rayonne pas dans la direction \overrightarrow{p}
- Le plan Oxy est un plan d'antisymétrie, donc en tout point de ce plan, \overrightarrow{B} appartient à ce plan. On calcule $\overrightarrow{B} = \text{rot}(\overrightarrow{A})$

On a

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot}\left(\frac{\overrightarrow{p_{ret}}}{r}\right) \quad (11)$$

On utilise

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{A}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \overrightarrow{A} \quad (12)$$

Dans la zone de rayonnement, on ne dérive par rapport aux coordonnées d'espace que les termes fonctions de $t - \frac{r}{c}$. On a donc: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ ce qui implique que: $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\overrightarrow{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \overrightarrow{e_r} \frac{\partial}{\partial r}$ mais on a: $\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ ce qui entraîne la relation:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r} \frac{\partial}{\partial r}}$$

d'où l'expression de \overrightarrow{B} :

$$\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{e_r}}{rc} \wedge \overrightarrow{p_{ret}} + \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2} \wedge \overrightarrow{p_{ret}} \quad (13)$$

Comme $\overrightarrow{p_{ret}} = p_{ret} \overrightarrow{e_z}$ ceci conduit aux trois composantes de \overrightarrow{B} :

$$\boxed{B_r = 0, B_\theta = 0, B_\phi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}_{ret}}{rc} + \frac{\dot{p}_{ret}}{r^2} \right)}$$

La jauge de Lorentz permet de calculer le potentiel scalaire retardé $V(r, t)$:

$$\text{div} \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

On utilise:

$$\text{div}(f \overrightarrow{A}) = f \text{div}(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A} \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (15)$$

On a donc

$$\text{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \text{div}(\overrightarrow{p_{ret}}) + \overrightarrow{p_{ret}} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \right) \quad (16)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \text{div}(\overrightarrow{p_{ret}}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{p_{ret}} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (17)$$

expression que l'on entre dans la jauge de Lorentz pour obtenir:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\overrightarrow{e_r}}{rc} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{p_{ret}}}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{p_{ret}}}{\partial t} \cdot \frac{\overrightarrow{e_r}}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

On intègre et on prend une constante d'intégration nulle pour arriver à:

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p_{ret}}}{r^3} + \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p_{ret}}}{cr^2} \right) \quad (19)$$

$$= \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}_{ret}}{r^2} + \frac{\dot{p}_{ret}}{cr} \right) \quad (20)$$

On en déduit $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ d'où :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial A}{\partial t} \quad (21)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial A}{\partial t} \quad (22)$$

$$E_\phi = 0 \quad (23)$$

ce qui conduit à:

$$E_r = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\dot{p}_{ret}}{r^3} + \frac{2\dot{p}_{ret}}{cr^2} \right) \quad (24)$$

$$E_\theta = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}_{ret}}{r^3} + \frac{\dot{p}_{ret}}{cr^2} + \frac{\ddot{p}_{ret}}{c^2 r} \right) \quad (25)$$

$$E_\phi = 0 \quad (26)$$

Remarques:

- ces résultats sont valables que le dipôle soit sinusoïdal ou non.
- dans la zone de rayonnement, les termes importants de E et B sont en $\frac{1}{r}$.

3 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

On est dans le vide, on a donc:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (27)$$

$$= (\vec{B} \wedge c\vec{e}_r) \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (28)$$

$$= c \frac{B^2}{\mu_0} \vec{e}_r \quad (29)$$

On a donc:

$$\boxed{\vec{\Pi} = \epsilon_0 c \left(\frac{\sin \theta}{4\pi c^2} \frac{p_{ret}^{\ddot{}}}{r} \right) \vec{e}_r}$$

La puissance rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r est donc:

$$P_r = \int \int \vec{\Pi} dS \quad (30)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_{ret}^{\ddot{}}}{r} \right)^2 \int \int (\sin \theta)^2 dS \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_{ret}^{\ddot{}}}{r} \right)^2 2\pi r^2 \int_0^\pi (\sin \theta)^3 d\theta \quad (32)$$

On trouve:

$$P_r = \frac{\mu_0}{6\pi c} (p_{ret}^{\ddot{}})^2 \quad (33)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(p_{ret}^{\ddot{}})^2}{c^3} \quad (34)$$

En adoptant un moment dipolaire sinusoïdal:

$$p_{ret} = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (35)$$

$$p_{ret}^{\ddot{}} = -\omega^2 p_{ret} \quad (36)$$

La puissance moyenne rayonnée sur une période, $P = \langle P_r \rangle$, est donc:

$$\boxed{P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}}$$

Comme $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, on a donc $P \propto \frac{1}{\lambda^4}$.

Conclusion: La puissance moyenne rayonnée par un dipôle sinusoïdal est inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur d'onde

Application: puissance rayonnée par la charge accélérée:

q en S est mobile, -q en O est fixe, $\overrightarrow{p(t)} = q\overrightarrow{OS(t)}$ d'où $\overrightarrow{p(t)^{\ddot{}}} = q\overrightarrow{a(t)}$ et donc $\overrightarrow{p_{ret}(t)^{\ddot{}}} = q\overrightarrow{a_{ret}(t)}$ d'où la formule de LARMOR (1897):

$$P_r = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} q a_{ret}^2 \quad (37)$$

La charge accélérée rayonne une puissance P_r , la charge fixe ne rayonne pas. Ce résultat est valable pour des charges non relativistes.

Application: Flux surfacique d'énergie Φ_r à travers la sphère de rayon r

Le flux surfacique est la puissance rayonnée par unité de surface: $\Phi_r = \frac{dp_r}{dS} = ||\vec{\Pi}||$

On a donc:

$$\Phi_r = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 \ddot{p}_{ret}}{4\pi r} \right)^2 (\sin \theta)^2 \quad (38)$$

Application: Diagramme de rayonnement

Definition: On appelle diagramme de rayonnement le graphe de $||\Pi(\theta)||$ en coordonnées polaires dans un plan méridien, l'angle θ est compté depuis l'axe Oz. Dans une direction définie par θ , on porte une longueur égale à $||\Pi(\theta)||$.

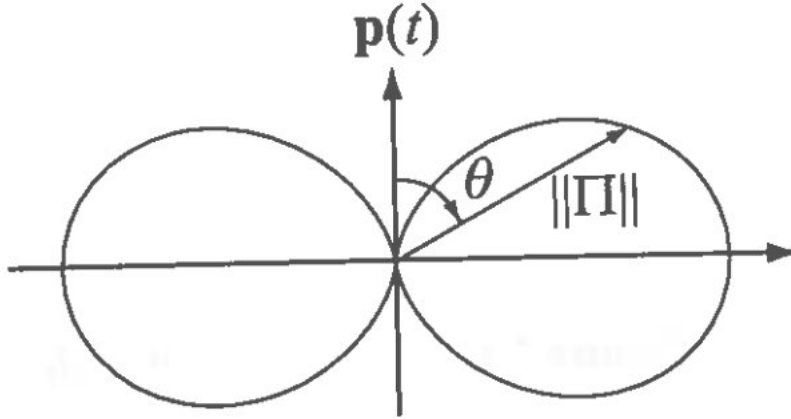


Figure 2: Diagramme de rayonnement

En conclusion, la puissance rayonnée est nulle dans la direction du moment dipolaire $\vec{p}(t)$ et maximale dans une direction perpendiculaire.

4 Diffusion atomique et polarisation par rayonnement

Contexte:

On étudie la diffusion d'une O.P.P.M polarisée rectilignement par un atome modélisé par un noyau fixe de charge $+e$ en O et un électron de charge $-e$, lié élastiquement au noyau par une force de rappel $\vec{f} = -k\vec{OS}$. L'onde incidente a un champ électrique polarisé selon Oy et se propage selon Ox: $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_y$. Le champ $\vec{E}_i(x, t)$ excite l'oscillateur atomique: l'électron effectue des oscillations forcées sur Oy. L'ensemble noyau fixe plus électron mobile forme un dipôle rayonnant sinusoïdal oscillant à la pulsation de l'onde excitatrice.

Les pertes d'énergie sont représentées par une force de frottement fluide, $-\alpha \vec{v}$, opposée à la vitesse. Le coefficient α d'amortissement, $\alpha = \frac{m}{\tau}$ est supposé constant. L'électron est non relativiste: on néglige la composante magnétique:

$$\vec{f}_{Lorentz} = -e[\vec{E}_i(x, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}_i(x, t)] = -e\vec{E}_i(x, t)$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique projeté sur Oy s'écrit:

$$m\ddot{y} = -ky - \alpha \dot{y} + \omega_0^2 y \quad (39)$$

dont la solution complexe en régime sinusoïdal permanent s'écrit:

$$y = -\frac{e}{m} \frac{E_0 \exp i\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \quad (40)$$

Le moment dipolaire instantané $\vec{p}(t) = -ey(t)\vec{e}_y$ oscille aussi à la pulsation ω et diffuse un rayonnement dipolaire dans toutes les directions de l'espace sauf l'axe Oy.

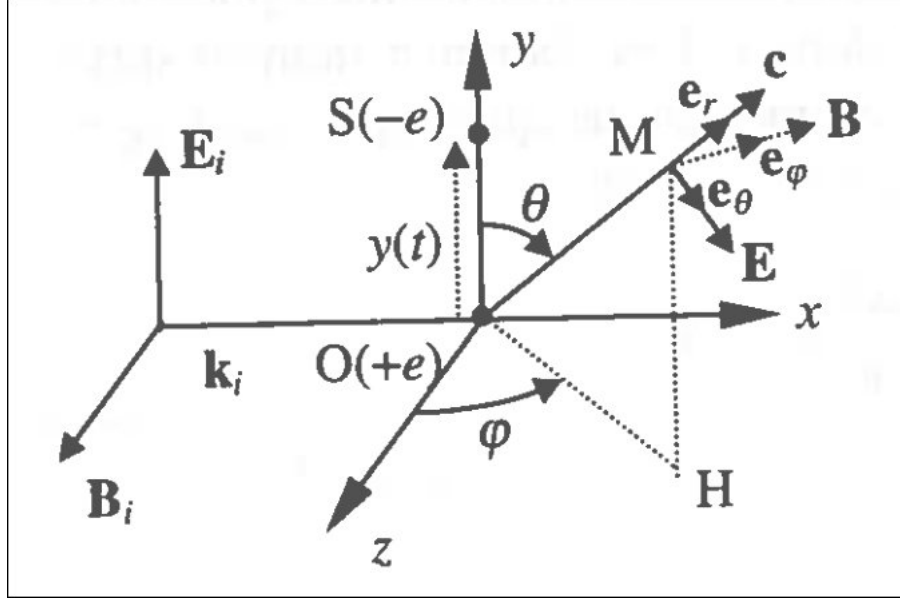


Figure 3: Oscillation de l'électron selon Oy sous l'action de l'onde incidente

On a un phénomène de diffusion sans changement de fréquence avec polarisation du champ électrique selon \vec{e}_θ . L'accélération instantanée en complexe s'écrit:

$$a(t) = \frac{e}{m} \frac{\omega^2 E_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \quad (41)$$

d'où la valeur moyenne de la puissance rayonnée:

$$\langle P_r \rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \langle \text{Re}(a)^2 \rangle}{3 \cdot 4c^3} \quad (42)$$

$$= \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (43)$$

Les normes des accélérations instantanées et retardées sont les mêmes.

Soit $\Phi_i = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$, la puissance surfacique de l'onde incidente et r_e le rayon classique de l'électron

défini par $mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$ ce qui donne: $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$.

Ceci conduit à:

$$\langle P_r \rangle = \Phi_i \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (44)$$

La courbe de la puissance diffusée en fonction du rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ a l'allure suivante:

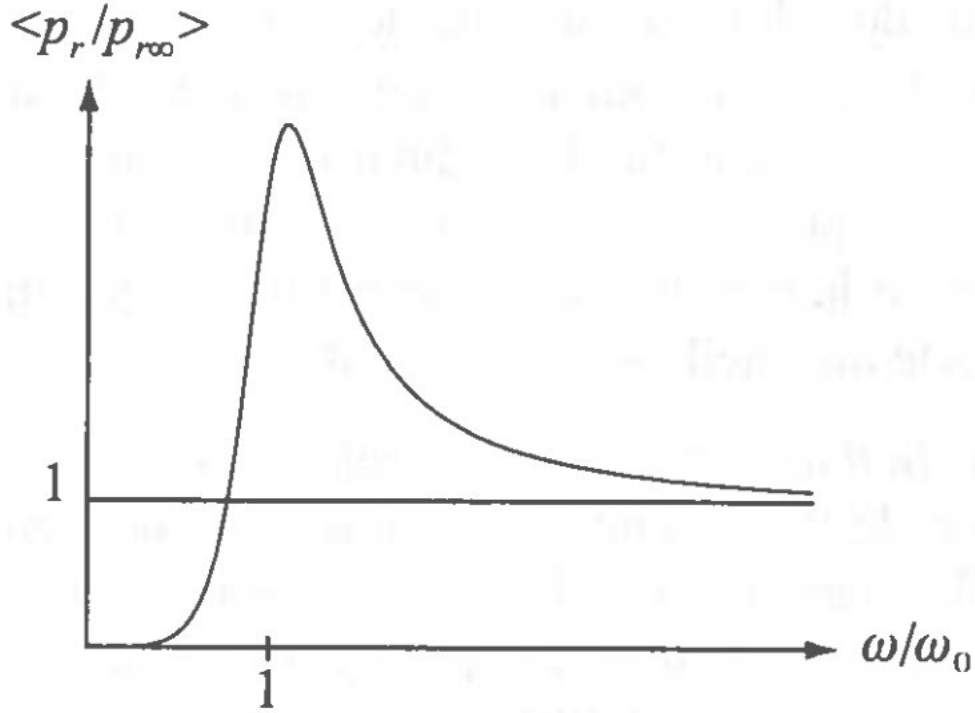


Figure 4: Puissance diffusée en fonction du rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$

Elle présente un maximum pour $\omega \simeq \omega_0$, pulsation propre de l'oscillateur atomique. On définit la section efficace totale de diffusion, $\sigma = \frac{\langle P_r \rangle}{\Phi_i}$. Elle a la dimension d'une surface, l'unité adaptée est le barn ($1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$) Elle représente la surface apparente de l'atome vue par l'onde incidente (différente de la surface réelle πr_e^2). Cette section efficace s'écrit:

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (45)$$

Il existe trois types de diffusion:

- $\omega \ll \omega_0$: diffusion Rayleigh:

La puissance moyenne rayonnée est inversement proportionnelle à la puissance 4 de λ :

$$P = \Phi_i \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (46)$$

On a donc:

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (47)$$

et σ tend vers zéro pour les très grandes longueurs d'onde.

- $\omega \simeq \omega_0$: la diffusion résonnante:

On remplace ω par ω_0 sauf dans la différence au dénominateur:

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0 a^2}{\tau^2}} \quad (48)$$

Il s'agit d'un profil Lorentzien de largeur à mi-hauteur égale à $\frac{1}{\tau}$.

- *diffusion Thomson (domaine des rayons X):*

La puissance diffusée et la section efficace de diffusion sont indépendantes de la pulsation.

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} \quad (49)$$

La valeur est $\sigma = 0.66510^{-28} \text{ m}^2$.

Application à la diffusion de la lumière solaire par la couche d'ozone atmosphérique

Dans la haute atmosphère, les molécules d'Ozone O_3 se comportent comme des dipôles oscillants sous l'action de la lumière solaire. La fréquence de la lumière solaire visible est ω variant de 10^{14} à 10^{15} Herz. La fréquence propre des électrons est de l'ordre de $\omega_0 \simeq 10^{17}$ Hertz. On a donc $\omega \ll \omega_0$: *la diffusion est de type Rayleigh*.

La lumière diffusée vers l'oeil est inversement à λ^4 et donc est supérieure dans le bleu comparé au rouge. Elle est bien supérieure à la puissance directement émise du Soleil: le ciel semble bleu.

Ceci permet aussi d'expliquer la lumière rouge du Soleil au coucher: dans ce cas la lumière diffusée est moins intense que la lumière directe du Soleil qui apparaît rouge. En effet, la lumière solaire traverse une grande longueur d'atmosphère et s'appauvrit en lumière diffusée bleue.

5 Rayonnement d'une antenne demi-onde (exercice)

Enoncé -On considère une antenne émettrice formée d'un courant rectiligne de longueur L comparable à la longueur d'onde des ondes émises. Elle est portée par l'axe Oz et son milieu se trouve à l'origine O . Elle est alimentée en O par une source de courants: $i(z, t) = I_0(z) \cos \omega t$.

1- Exprimer les champs \vec{E} et \vec{B} rayonné à grande distance par rapport à λ dans la direction θ, ϕ .

2- Appliquer le résultat à une antenne demi-onde pour laquelle $L = \frac{\lambda}{2}$. Une onde stationnaire s'établit dans l'antenne alors $I_0(z) = I_0 \cos(\frac{\omega z}{c})$. En déduire la puissance rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r . Valeur numérique.

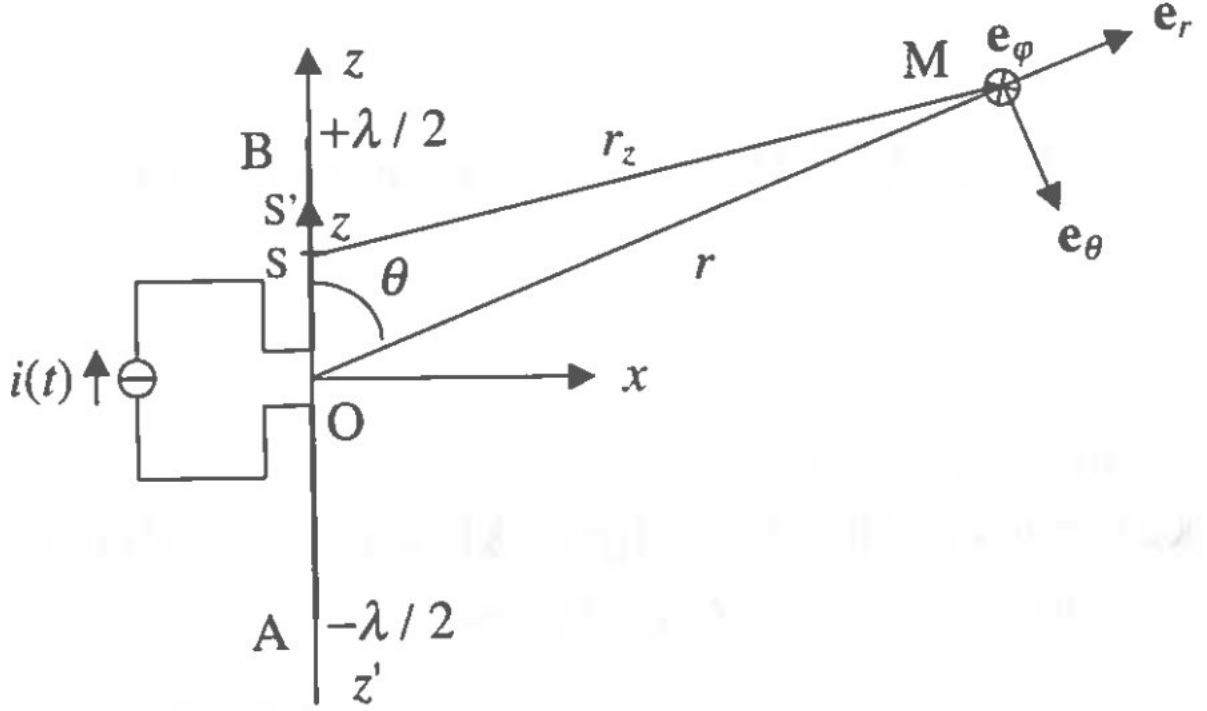


Figure 5: Antenne demi-onde

On a une symétrie de révolution autour de Oz: les composantes des champs ne dépendent pas de ϕ .

Le plan xOz est un plan de symétrie. En tout point de ce plan, \vec{A} et \vec{E} appartiennent à ce plan et \vec{B} est perpendiculaire et donc selon \vec{e}_ϕ .

\vec{A} est parallèle au courant et donc selon Oz. On décompose l'antenne en dipôles élémentaires. Celui compris entre z et $z+dz$ est parcouru par le courant $i(z, t)I_0(z) \cos \omega t$. Ce dipôle élémentaire a un moment dipolaire, $\delta p(t)$ vérifiant:

$$\frac{d}{dt}(\delta p(t)) = i(z, t)dz \quad (50)$$

Les champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} sont les sommes des champs dus à chacun de ces dipôles.

Dans la zone de rayonnement, on a: $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt}(\delta p_{ret}(t)) = \frac{\mu_0}{4\pi r} i(z, t - \frac{r_z}{c}) dz \vec{e}_z$

La distance r_z pour aller du point d'abscisse z sur le dipôle élémentaire au point M dépend de z :

$$r_z = r - z \cos \theta \quad (51)$$

d'où l'expression de $d\vec{A}$:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0(z)}{4\pi r} \cos \omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c}) dz \vec{e}_z \quad (52)$$

Au dénominateur on a écrit $r_z \simeq r$ car cette distance est très supérieure à λ . On passe en complexes:

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I_0(z)}{4\pi r} \exp(i\omega(t - \frac{r}{z} + \frac{z \cos \theta}{c})) dz \vec{e}_z \quad (53)$$

On a donc au final:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0(z)}{4\pi r} \exp(i\omega(t - \frac{r}{z})) \int I_0(z) \exp(i\omega \frac{z \cos \theta}{c}) dz \vec{e}_z \quad (54)$$

Pour l'antenne demi-onde, on introduit les bornes $\frac{\lambda}{4}$ et $-\frac{\lambda}{4}$ et l'expression de $I_0(z)$. On écrit $\cos(\frac{\omega z}{c})$ sous forme complexe. On intègre et on utilise $\omega\lambda = 2\pi c$ pour trouver:

$$A = \frac{\mu_0 c I_0 \exp(i\omega(t - \frac{r}{z})) \cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{2\pi r \omega (\sin \theta)^2} \quad (55)$$

On a donc en réels:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r \omega} \cos \omega(t - \frac{r}{z}) \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{(\sin \theta)^2} \vec{e}_z \quad (56)$$

et on a la structure:

$$\vec{B} = \vec{A} \wedge \frac{\vec{e}_r}{c} \text{ et } \vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{c}$$

Le vecteur de Poynting est:

$$\vec{\Pi} = \frac{B^2}{\mu} \vec{c} \quad (57)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{I_0}{2\pi r} \right)^2 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{(\sin \theta)^2} (\sin(\omega(t - \frac{r}{c}))^2 \vec{e}_r \quad (58)$$

On donne la valeur de l'intégrale J sur θ :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)^2}{(\sin \theta)^2} d\theta = 1.22 \quad (59)$$

En utilisant, $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, l'impédance du vide, la puissance instantanée rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r est:

$$P = \frac{Z_c I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)^2}{(\sin \theta)^2} d\theta \quad (60)$$

soit: $\boxed{P = \frac{Z_c I_0^2 J}{4\pi} = \frac{1}{2} R_{ray} I_0^2}$ avec $R_{ray} = \frac{Z_c J}{2\pi} = 73.1 \Omega$

References

- [1] Brébec, J-Ph. *Electromagnétisme, Spéciales PC*, Hachette Sup, 1996