

Électromagnétisme

Chapitre 1

Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux lois qui constituent la base de l'électromagnétisme à savoir les équations de MAXWELL. Celles-ci contiennent l'essence même de la nature et de la structure du champ électromagnétique. Ajoutées à quelques lois régissant l'interaction champ électromagnétique – matière, tous les phénomènes électromagnétiques deviennent explicables. Des ondes radio au courant électrique, en passant par le chauffage au four à micro-onde ou encore la couleur bleue du ciel, l'électromagnétisme est constamment présent autour de nous.

Pour aborder ces lois, nous commencerons par faire quelques révisions de première année dans une première partie, avant d'aborder une deuxième partie qui montrera comment passer des formes dites globales des lois (théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE) à des formes locales (les lois de MAXWELL). Dans une troisième partie, nous verrons quelques aspects fondamentaux des lois de MAXWELL et en particulier leurs interprétations en nous intéressant à ce qu'elles disent, ou ne disent pas. Enfin, dans la 4^e et dernière partie, nous verrons comment utiliser les lois de MAXWELL dans un cas spécifique.

Table des matières

Biographies succinctes	8
I Rappels de première année : l'électromagnétostatique	12
I-1 Sources de champ	12
I-1·i les charges	12
I-1·ii différentes descriptions	12
les charges immobiles	12
pour les charges mobiles	14
I-2 Symétries	16
I-2·i description de géométries particulières	16
type ruban	16
type disque	17
type plan	17
type fil	18
type sphère	19
I-2·ii lien avec les champs	19
pour les invariances	19
pour les plans remarquables	20
I-2·iii principe de superposition	21
I-2·iv analyser des sources de champ	21
méthode	21
les grandeurs pertinentes	21
I-3 Sources à haute symétrie	22
I-3·i théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE	22
théorème de GAUSS	22
théorème d'AMPÈRE	23
philosophie des théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE	23
I-3·ii les fils infinis	23
le fil chargé	23
le fil parcouru par un courant	26
comparaison des champs	28
I-3·iii les plans	29
le plan uniformément chargé	29
le plan parcouru par un courant	32
I-3·iv la boule uniformément chargée	35
situation	35
théorème de GAUSS	36
expression de $\Phi_{\vec{E}}$	36
expression de Q_{int}	36
rassemblement	36
analyse du résultat	37
I-4 Sources de basse symétrie	37
I-4·i lois de sommation	37
lois de COULOMB	37
loi de BIOT et SAVART	38
I-4·ii exemple fondamental du segment uniformément chargé	38
situation	38
loi de COULOMB	39

	changement de repérage	40
	analyse du résultat	40
I.4.iii	exemple fondamental du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire parcourue par un courant	40
	situation	40
	loi de BIOT et SAVART	41
	analyse du résultat	42
I.5	Dispositifs particuliers	42
I.5.i	le condensateur idéal	42
	présentation du modèle	43
	phénoménologie	43
	résultats	44
I.5.ii	le solénoïde	44
	présentation du modèle	44
	résultat	45
II	Du global au local	46
II.1	Équation de conservation de la charge	46
II.1.i	une loi fondamentale de la physique	46
II.1.ii	traduction locale	46
	la loi	46
	démonstration	46
II.1.iii	traduction globale	49
	cas général	49
	cas stationnaire, un cas connu	50
II.2	Électromagnétostatique	50
II.2.i	du théorème de GAUSS à MAXWELL – GAUSS	50
	manipulation	50
	loi de MAXWELL – GAUSS	51
II.2.ii	de la conservation du flux à MAXWELL – THOMSON	51
	manipulation	51
	loi de MAXWELL – THOMSON	51
II.3	Circulation et rotationnel	51
II.3.i	transformer le théorème d'AMPÈRE	51
	manipulation	51
	version statique de la loi de MAXWELL – AMPÈRE	52
II.3.ii	pause rotationnel	53
	relation fondamentale	53
	interprétation	53
	comment ça marche?	53
	expression en coordonnées cartésiennes	55
	avec nabla	55
	c'est un opérateur différentiel linéaire	56
II.3.iii	\vec{E} est à circulation conservative en statique	56
	forme locale	56
	autre façon de voir	56
	du côté des forces en mécanique	57
II.4	Les équations de MAXWELL	58
II.4.i	les équations à connaître	58
II.4.ii	structure	58

II-4-iii	interprétation physique	58
	première lecture	58
	l'aspect temporel	59
	lecture	59
III	Faire parler les équations de MAXWELL	61
III-1	Manipulation des opérateurs vectoriels	61
III-1-i	liste des opérateurs	61
	nabla	61
	gradient	61
	divergence	61
	rotationnel	62
III-1-ii	deux opérateurs pour un champ	62
	laplacien scalaire	62
	laplacien vectoriel	62
	d'autres compositions	63
	avec le gradient	63
	morale	64
III-1-iii	deux champs, un opérateur, plusieurs possibilités	64
III-1-iv	STOKES et les autres	65
	théorème de STOKES	65
	formule de KELVIN	65
III-1-v	GREEN – OSTROGRADSKI & co	66
	théorème de GREEN – OSTROGRADSKI	66
	formule du gradient	66
	formule du rotationnel	67
	vecteur surface	67
III-2	Équation de conservation de la charge	67
III-2-i	compatibilité avec MAXWELL	67
	retrouvailles	67
	morale	68
III-2-ii	de l'importance du courant de déplacement	68
	définition	68
	rôle dans un cas particulier	68
	historiquement	71
III-3	Potentiels du champ	71
III-3-i	naissance	71
	résultat	71
	démonstration	71
	interprétation	72
	convention de jauge	72
III-3-ii	cas statique	73
	équations de POISSON	73
	elles viennent des équations de MAXWELL	73
	solution déjà connue de l'équation de POISSON en potentiel	74
III-4	Relations de passage	74
III-4-i	situation	74
III-4-ii	discontinuité de la composante normale de \vec{E}	75
	résultat	75
	démonstration	75

	retrouver le champ créé dans tout l'espace par un plan	76
III·4·iii	continuité de la composante tangentielle de \vec{E}	77
	résultat	77
	idée de démonstration	77
III·4·iv	continuité de la composante normale de \vec{B}	78
III·4·v	discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B}	78
	résultat	78
	retrouver le champ créé dans tout l'espace par une nappe de courant	78
III·4·vi	bilan	80
	utilité	80
	pour les retenir	80
	autre version	81
	validité	82
III·5	Aspect énergétique	83
III·5·i	bilan énergétique	83
	situation, principe	83
	variation	84
	échange	84
	création	84
	rassemblement	85
III·5·ii	puissance cédée à la matière	85
	expression	85
	démonstration	85
III·5·iii	équation de POYTING	86
	expression	86
	démonstration	86
III·5·iv	interprétation	87
	les grandeurs énergétiques	87
	condensateur idéal	88
	bobine idéale	88
	contre-exemples	89
	à retenir	90
IV	Utilisation des équations de MAXWELL	91
IV·1	Réécrire MAXWELL dans l'ARQS	91
IV·1·i	situation	91
IV·1·ii	champ \vec{B} dans l'ARQS	91
	résultat	91
	preuve	91
IV·1·iii	\vec{j} dans l'ARQS	92
IV·1·iv	champ \vec{E} dans l'ARQS	92
IV·1·v	bilan	93
IV·2	Onde électromagnétique dans un conducteur	93
IV·2·i	modèle du conducteur	93
IV·2·ii	densité volumique de charge	93
	une densité nulle de charges	94
	interprétation qualitative	94
IV·2·iii	courant de conduction et courant de déplacement	96
IV·2·iv	résumé des lois dans un conducteur dans l'ARQS	96
IV·2·v	équation de diffusion vérifiée par \vec{j} dans un conducteur	97

	résultat	97
	démonstration	97
IV·3	Cas particulier du conducteur semi-infini	98
IV·3·i	résolution	98
	situation, analyse	98
	vecteur d'onde complexe	99
	solution complète	99
	représentation graphique	99
IV·3·ii	épaisseur de peau	100
	interprétation	100
	AN	100
	conducteur parfait	101
IV·3·iii	champ électromagnétique dans le conducteur	102
	champ électrique	102
	champ magnétique	102
	interprétation	103
IV·3·iv	bilan énergétique	104
	densité volumique d'énergie	104
	puissance dissipée par effet JOULE	105
	puissance apportée par POYNTING	106
	Fiche de révision	108

Biographies succinctes

Charles Augustin COULOMB

(1736 Angoulême – 1806 Paris)



Parce qu'il a choisit de suivre des cours de mathématiques plutôt que ceux de médecine auxquels ses parents le destinent, Charles est déshérité et doit aller vivre à Montpellier de 1757 à 1759 dans la famille de son père. Il rentre à Paris en 1759 pour suivre des cours préparatoires au concours d'entrée de l'école de génie de Mézière, concours qu'il réussit. Sorti en 1761, Charles est envoyé en mission en Martinique en 1764 et est rapatrié en 1772 pour raison médicale avec le grade de capitaine. Il effectue des recherches scientifiques tout en assurant son travail d'ingénieur militaire. Promu lieutenant-colonel en 1786, la révolution le force à abandonner tous ses biens en 1791. De retour à Paris sous Bonaparte en 1802, il sera Inspecteur général de l'instruction publique durant les 4 dernières années de sa vie.

Jean Baptiste BIOT

(1774 Paris – 1862 Paris)



Élève de l'École des Ponts et Chaussées puis de l'École Polytechnique, Jean-Baptiste a eu une grande influence sur la communauté scientifique. Il a ainsi découvert l'origine extra-terrestre des météorites (1804), fait des mesures de champ magnétique en ballon (1804), établit une théorie de la conduction de la chaleur (1804), participé à des expéditions de mesure du méridien (1806 à 1810), mis en évidence la polarisation de la lumière avec MALUS (1808), réalisé des mesures de vitesse du son (1809)... C'est en 1820 qu'il énonce, avec SAVART la loi qui porte son nom.

André Marie AMPERE

(1775 Polymieux (Lyon) – 1836 Marseille)



André Marie s'est en grande partie instruit tout seul en lisant l'*Encyclopédie*. Malgré cela, sa vie est jalonnée de malheurs : son père est guillotiné en 1793, sa première femme meurt au bout de 4 ans de mariage et son deuxième mariage finit par un divorce. André Marie est d'abord professeur de physique à Bourg-en-Bresse en 1801 puis à l'école polytechnique à partir de 1809. En 1820 il s'intéresse de près aux lois de l'électromagnétisme et obtient rapidement des résultats. En 1824 il devient professeur au collège de France mais n'y brille pas en tant que pédagogue. En 1827, nommé inspecteur d'université, il arrête ses travaux scientifiques.

Carl Friedrich GAUSS

(1777 Brunswick – 1855 Göttingen)



Carl GAUSS est incontestablement considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps. Tant en mathématiques qu'en physique, ses apports furent importants. Né dans une famille pauvre, Carl montre des dons pour les mathématiques : il su mener des calculs compliqué avant de savoir écrire. Encouragé par son père et aidé par une riche famille de Brunswick, Carl fait de brillantes études et c'est en tant que directeur de l'observatoire de Göttingen qu'il mènera tous ses travaux. En ce qui concerne la physique, citons seulement les conditions de GAUSS en optique, la gaussienne, le théorème de GAUSS et une vieille unité de champ magnétique : le gauss (10^{-4} tesla).

Siméon Denis POISSON

(1781 Pithiviers – 1840 Paris)



Issu d'une famille modeste, Siméon est encouragé à faire des études et rentre sur concours à l'école Polytechnique en 1798. Il y est remarqué par deux de ses professeurs : J. LAGRANGE et P. de LAPLACE. Il sort de l'école en 1800j et publie aussitôt un article sur les équations mathématiques. J. FOURIER nommé à Grenoble, Siméon le remplace sur son poste d'assistant d'enseignement à l'école Polytechnique. Il travaillera alors essentiellement en physique mathématique. Siméon est aussi connu pour la loi de probabilité qui porte son nom.

Michael FARADAY

(1791 Newington, Surrey – 1867 Hampton Court, Middlesex)



Le premier métier de Michael est relieur. Cela le met en contact avec de nombreux livres et trouve de l'intérêt à lire ceux de physique-chimie. Il continue en suivant des conférences publiques. En 1813 il obtient un poste de technicien à la Royal Institution grâce au chimiste H. DAVY avec qui il s'est lié d'amitié. En 1822, avec la découverte de ØRSTED (une aiguille aimantée est déviée près d'un conducteur parcouru par un courant), Michael se lance dans l'étude de l'électromagnétisme. Il y obtiendra tellement de succès qu'il sera l'un des principaux inspirateur de J. MAXWELL. Élevé dans la foi, M. FARADAY restera toute sa vie un homme calme, aimable et simple.

Félix SAVART

(1791 Mézières – 1841 Paris)



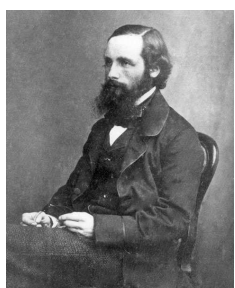
Félix commence sa vie professionnelle comme chirurgien dans l'armée après ses années de médecine à Metz et Strasbourg. Toutefois, il s'intéresse essentiellement à la musique et plus particulièrement au violon. Il invente un nouveau violon (de forme trapezoïdale) mais qui ne rencontre guère de succès (ce violon est toujours conservé à l'École Polytechnique). En hommage, une unité de mesure d'intervalle en musique porte son nom, le savart. Félix devient professeur au collège de France et est avec BIOT le co-inventeur de la loi qui porte son nom.



George STOKES

(1819 Sligo, Islande – 1903 Cambridge)

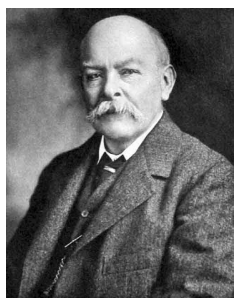
George fait ses études à Cambridge où il obtient son diplôme en 1841 pour y devenir professeur de mathématique en 1849. Son activité de recherche se concentre d'abord sur l'hydrodynamique des fluides visqueux. Il s'intéresse après à la propagation du son et de la lumière. Il explique le phénomène de fluorescence vers 1852. Il est à noter que sa productivité de chercheur a notablement diminué à partir de 1857, année de son mariage.



James MAXWELL

(1831 Edimbourg – 1879 Cambridge)

Issu d'une grande famille écossaise, James se passionne très tôt pour les mathématiques et publie déjà à l'âge de 14 ans quelques résultats. Toutefois il se réoriente vers la physique, fait ses études à Edimbourg et devient professeur à 25 ans. Il travaille un peu sur la couleur (c'est lui qui réalise la première photographie couleur en 1861) mais ses travaux principaux portent sur la thermodynamique statistique et l'électromagnétisme : c'est en rajoutant un terme dans la loi d'Ampère qu'il obtient une vision cohérente de tous les phénomènes électromagnétiques.



John Henry POYNTING

(1852 Monton, Manchester – 1914 Birmingham)

John étudie à Cambridge puis entre au laboratoire Cavendish de J.C. MAXWELL. Il travaille essentiellement sur des problèmes électromagnétiques et introduit en 1884 le vecteur qui porte son nom. Il effectue en 1890 une estimation de la densité moyenne de la Terre et fait une mesure précise de la constante de gravitation en 1891. John sera professeur de Birmingham de 1880 à sa mort.



Joseph THOMSON

(1856 Cheetham Hill, Manchester – 1940 Cambridge)

Joseph, né de parents écossais, commence ses études à Manchester. En 1890, il se marie avec Rose Elizabeth PAGET avec laquelle il aura deux enfants dont l'un, George PAGET THOMSON obtiendra le prix Nobel. En 1884 il succède à Lord RAYLEIGH à la Royal Society. Il reçoit de nombreuses distinctions, dont le prix Nobel en 1906 et est anobli en 1908. Il devient président de la Royal Society de 1916 à 1920 et c'est RUTHERFORD qui lui succède à la chaire de physique expérimentale.

Pierre CURIE
(1859 Paris – 1906 Paris)



D'origine alsacienne et issu d'une famille de médecins, Pierre effectue des études de physique sans encombre. Il commence à travailler dans la piroélectricité et la piézoélectricité. Sa thèse en 1895 porte sur le magnétisme. Il est le premier à introduire les notions de symétrie en physique. Il se passionne pour l'enseignement qu'il dispense à l'ESPCI à partir de 1882. Plus tard il rejoint son épouse dans ses recherches sur la radioactivité. Il partagera avec elle et H. BECQUEREL le prix NOBEL de physique en 1903. C'est alors seulement que son travail est enfin reconnu et qu'il devient professeur à la Sorbone. Il meurt renversé par un fiacre à l'entrée du Pont Neuf. Une citation tirée de ses lettres : « Il faut faire de la vie un rêve et faire d'un rêve une réalité. »

I – Rappels de première année : l'électromagnétostatique

I.1 – Sources de champ

I.1.i – les charges

◇ Les champs électriques et magnétiques sont définis par la force qu'ils engendrent sur une charge.

FORCE DE LORENTZ

Un point matériel M de charge q animé de la vitesse $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t)$ par rapport au référentiel \mathcal{R} subit la force

$$\vec{f}_{\text{Lo}} = q \left(\vec{E}_{(M,t)} + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{B}_{(M,t)} \right) \quad \text{où :}$$

- $\vec{E}_{(M,t)}$ est le *champ électrique* au point M
- $\vec{B}_{(M,t)}$ est le *champ magnétique* au point M

◇ Le champ \vec{B} , selon les normes internationales, ne s'appelle pas le « champ magnétique » mais le « champ d'induction magnétique ». Toutefois comme nous n'aurons pas l'occasion de rencontrer le *vrai* champ magnétique (qui, pour la culture, se note \vec{H}), nous continuerons à appeler « champ magnétique » le champ \vec{B} .

Toutes les charges créent un champ électrique.
Seules les charges mobiles créent un champ magnétique.

◇ Insistons sur le fait qu'une même charge peut créer, à la fois, un champ magnétique et un champ électrique.

◇ Nous pouvons aussi dire tout de suite que, comme le champ \vec{B} se définit (*via* la force de LORENTZ) par l'intermédiaire de la vitesse $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t)$ et que la vitesse dépend du référentiel, le champ magnétique *varie* en fonction du référentiel.



Pour éviter tout problème, nous éviterons de raisonner dans plusieurs différentiels différents en électromagnétisme, car les lois exactes de changement de référentiels pour les champs \vec{E} et \vec{B} font intervenir des notions de relativités.

I.1.ii – différentes descriptions

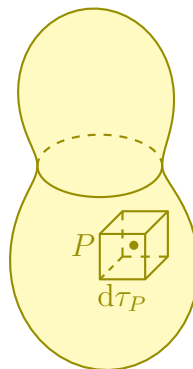
★ les charges immobiles

🕒 vision volumique

La *densité volumique de charges* $\rho(P)$ est telle que, dans un volume $d\tau_P$ situé autour de P , il y ait la charge

$$dq_P = \rho(P) d\tau_P$$

$$[\rho] = \text{C.m}^{-3}$$

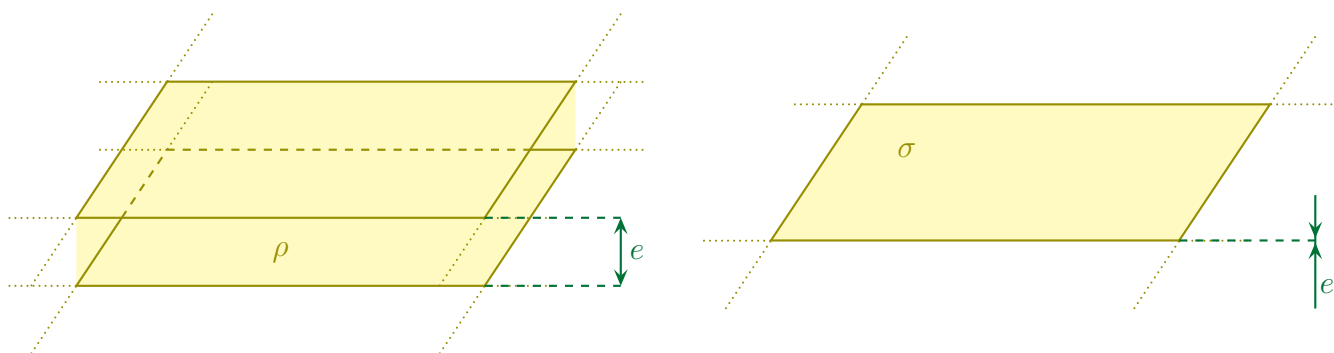


✧ Au niveau microscopique, les charges sont essentiellement volumiques (cf. les nuages électroniques).

La charge est une grandeur extensive.

🕒 vision surfacique

✧ Prenons une certaine épaisseur dans laquelle il y a la charge volumique ρ et éloignons-nous.



✧ Nous constatons alors que cette épaisseur devient un plan chargé.

La *densité surfacique de charges* $\sigma(P)$ est telle que, sur une surface dS_P située autour de P , il y ait la charge

$$dq = \sigma(P) dS_P$$

$$[\sigma] = \text{C.m}^{-2}$$



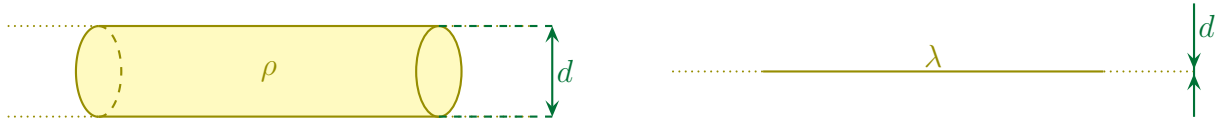
✧ Insistons sur le fait que les charges surfaciques n'existent pas en tant que telles, mais sont une *modélisation* de charges volumiques vues « à grande distance ».

✧ C'est ainsi que lorsque nous aurons affaire à une approche mésoscopique, nous ne pourrons pas avoir de charges surfaciques.

⚠ En particulier, cela implique que les relations de passage sont « hors-sujet » à l'échelle mésoscopique.

🕒 vision linéique

✧ C'est la même idée que pour les charges surfaciques mais en prenant, cette fois, un tube dans lequel il y a la charge volumique ρ .



✧ En s'éloignant nous pouvons constater que la distribution de charges devient linéique.

La *densité linéique de charges* $\lambda(P)$ est telle que, sur une longueur $d\ell_P$ située autour de P , il y ait la charge

$$dq = \lambda(P) d\ell_P$$

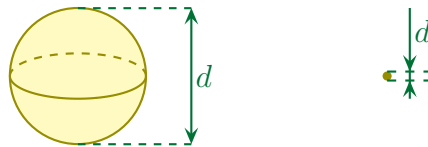
$$[\lambda] = \text{C.m}^{-1}$$



✧ Les charges linéiques n'existent pas plus que les charges surfaciques, il s'agit uniquement, là aussi, d'une *modélisation* de charges volumiques vues « à grande distance ».

🕒 vision ponctuelle

✧ Une fois de plus, prenons un volume et éloignons-nous en.



✧ À cette distance, le volume chargé devient ponctuelle.

✧ Remarquons que le volume choisi n'a pas de raison d'être « intrinsèquement » petit. Il suffit juste que sa taille soit très faible devant la distance d'étude.

🕒 faux paradoxe

✧ Il arrive souvent que des champs deviennent infinis ou non définis près des charges ponctuelle ou des surfaces chargées.

✧ Ce phénomène est totalement lié au fait qu'à faible distance de la charge ponctuelle (par exemple) la modélisation « charge ponctuelle » n'est plus valide. Il faudrait revenir au modèle de la charge répartie en volume.

★ pour les charges mobiles

🕒 courant volumique

Il y a un *courant volumique* dès lors que des charges peuvent bouger à l'intérieur d'un volume.

- ✧ Pour décrire le courant électrique, autrement dit la manière dont les charges bougent, nous utilisons une notion analogue à celle que nous avons rencontré en diffusion.

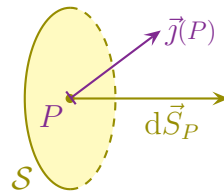
Lorsque la charge dq contenue dans $d\tau$ possède la vitesse \vec{v} , cela engendre la *densité surfacique de courant électrique en volume* \vec{j} tel que

$$\vec{j}d\tau = dq \vec{v}$$

L'*intensité* i qui traverse la surface \mathcal{S} orientée s'écrit

$$i = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

Le sens de $d\vec{S}_P$ définit le sens positif pour l'intensité i .



- ✧ En fait nous aurions pu simplement dire que l'intensité n'est que le *flux* de \vec{j} à travers \mathcal{S} .

🕒 courant linéique

- ✧ C'est celui que nous connaissons le mieux puisque nous l'utilisons sans arrêt en électrocinétique.

Il y a un *courant linéique* (ou *courant*) dès lors que des charges ne peuvent bouger que le long d'un fil.

Le courant linéique est entièrement caractérisé par la donnée :

- de l'intensité i ;
- du sens conventionnel du courant.



🕒 courant surfacique

Il y a un *courant surfacique* dès lors que des charges ne peuvent bouger que sur une surface.

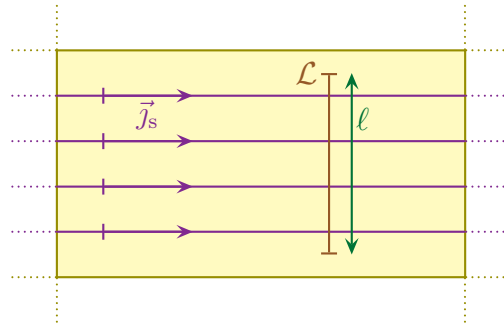
Lorsque la charge dq contenue sur la surface dS possède la vitesse \vec{v} , cela engendre la *densité linéique de courant électrique de surface* \vec{j}_s tel que

$$\vec{j}_s = dq \vec{v}$$

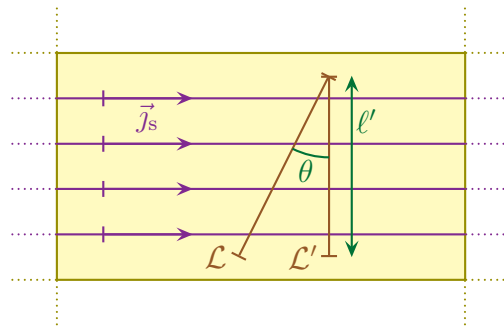
- ✧ Pour définir une intensité en volume, il faut compter les charges qui traversent une surface donnée à l'avance.

- ✧ Pour définir une intensité en surface, nous allons compter les charges qui passent sur une ligne donnée.

L'*intensité* i qui traverse la ligne \mathcal{L} de longueur ℓ et perpendiculaire à \vec{j}_s s'écrit

$$i = j_s \times \ell$$


- ✧ Dans le cas où la ligne \mathcal{L} n'est pas orthogonale aux lignes de courants, il faut se ramener à une ligne \mathcal{L}' qui l'est.



- ✧ Nous avons alors

$$i_{\mathcal{L}} = i_{\mathcal{L}'} \quad \rightsquigarrow \quad i_{\mathcal{L}} = j_s \times \ell'$$

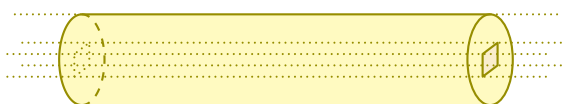
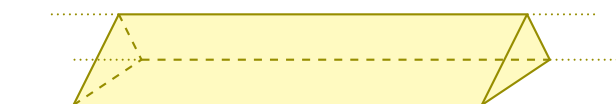
I.2 – Symétries

I.2.i – description de géométries particulières

- ✧ Une des premières choses qu'il y aura à faire lors de l'étude d'un problème d'électromagnétisme sera d'en dégager les symétries.
- ✧ C'est pourquoi nous allons voir, tout en les catégorisant, les différents types de symétrie qui peuvent exister.

★ type ruban

Nous appellerons *type ruban* une distribution qui admet une invariance par translation.





La section du ruban n'est pas forcément triangulaire, elle peut être absolument quelconque sauf circulaire auquel cas nous retrouverions la symétrie type « fil ».

- ◇ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser simplement à deux fils infinis parallèles parcourus par des courants identiques ou non.
- ◇ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme « pas comme les autres », *i.e.* l'axe de translation.

Une géométrie de type *ruban* possède :

- une invariance par translation ;
- une infinité de plans remarquables, tous ceux orthogonaux à l'axe.

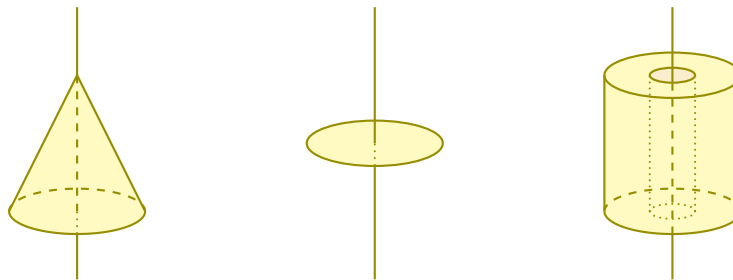
- ◇ Les plans remarquables sont soit plan de symétries (lorsque les sources sont des charges) soit plan d'antisymétrie (lorsque les sources sont des courants).



Ne pas oublier de regarder si, par hasard, il n'existe pas d'autres plans remarquables en plus de ceux obligatoires.

★ type disque

Nous appellerons *type disque* une distribution qui n'admet qu'une invariance par rotation.



- ◇ Comme nous pouvons le voir, même si l'archétype de la distribution de type *disque* est un disque, il existe d'autres types de distribution de ce type.
- ◇ Nous pouvons penser, par exemple, à une distribution volumique uniforme de charges formant un cône ou un disque pour le champ électrique ou, pour le champ magnétique, à une simple spire circulaire.
- ◇ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme l'axe de symétrie.

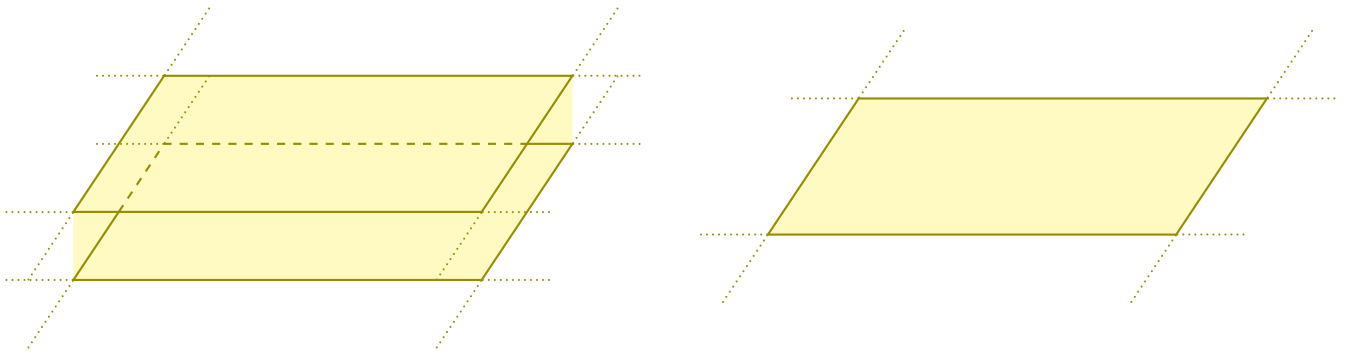
Une géométrie de type *ruban* possède :

- une invariance par rotation ;
- une infinité de plans remarquables, tous ceux contenant l'axe.

- ◇ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.

★ type plan

Nous appellerons *type plan* une distribution qui admet deux invariances par translation.



- ◇ C'est parce exemple le cas d'un espace délimité par deux plans infinis entre lesquels il y aurait une densité volumique ρ uniforme de charge.
- ◇ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme « pas comme les autres », *i.e.* l'axe normal aux deux axes de translations.
- ◇ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser à ce qu'on appelle une nappe de courant comme il en existe, dans les ordinateurs. Attention : la nappe doit être infinie dans les deux directions, *i.e.* être composée d'une infinité de fils infinis parallèles.
- ◇ C'est ainsi que dans le cas d'une nappe de courant, les axes nous sont physiquement imposés :
 - un axe orthogonal à la nappe ;
 - un axe parallèle au fil ;
 - un axe finissant le trièdre.

Une géométrie de type *plan* possède :

- deux invariances par translation ;
- deux infinités de plans remarquables.

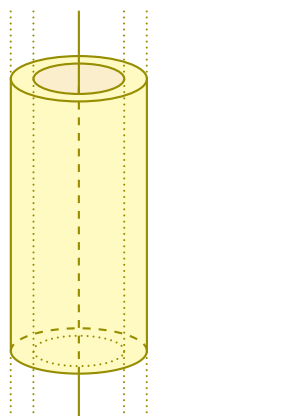
- ◇ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.



Ne pas oublier de regarder si, par hasard, il n'existe pas d'autres plans remarquables en plus de ceux obligatoires.

★ type fil

Nous appellerons *type fil* une distribution qui admet une invariance par rotation une invariance par translation.



- ◇ C'est le cas par exemple de cylindres infinis¹, pleins ou creux pour les charges ou, pour le champ magnétique, du fil infini.
- ◇ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme l'axe de symétrie.

Une géométrie de type *fil* possède :

- deux invariances, une par translation, une par rotation ;
- deux infinités de plans remarquables, tous ceux orthogonaux à l'axe et tous ceux contenant l'axe

- ◇ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.

★ type sphère

Nous appellerons *type sphère* une distribution qui admet une invariance sphérique.

- ◇ Penser à une sphère, à des boules concentriques, un oignon...



☕ *Remarque.* Il est particulièrement difficile d'avoir une distribution de courant respectant la symétrie sphérique. Ce n'est pourtant pas impossible avec des courants qui sortent tous du centre.

- ◇ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous noterons O le centre de la distribution.

Une géométrie de type *sphère* possède :

- deux invariances par rotation ;
- deux infinités de plans remarquables, tous contenant le centre.

- ◇ Les plans ne peuvent qu'être plans de symétrie. Si un problème semble fournir des plans d'antisymétrie, c'est que la distribution n'est pas sphérique !

I.2.ii – lien avec les champs

★ pour les invariances

PRINCIPE DE CURIE

L'ensemble des conséquences est au moins aussi invariante que les causes.

- ◇ Cette formulation un peu étrange permet de lever l'apparent paradoxe du crayon qui tombe.

1. Le vocable « cylindre » n'a pas la même signification en physique et en mathématiques. En physique, un cylindre est toujours « de révolution ».

- ✧ En effet, supposons un crayon initialement vertical. Nous savons que ce crayon va tomber mais nous savons aussi qu'il ne peut tomber que d'un côté.
- ✧ Nous pourrions voir là une « brisure de symétrie » au sens où la cause est verticale (le poids) et la conséquence (le crayon à plat sur la table) n'est pas symétrique par rapport à la verticale.
- ✧ Sauf que le principe de CURIE n'impose pas la symétrie à *une* conséquence mais à l'*ensemble* des conséquences. Et là, si nous regardons, en même temps, le crayon tombé à droite et le crayon tombé à gauche, nous voyons que la symétrie est bien respectée.
- ✧ Il s'agit là de cas de figures rares à notre niveau. En ce qui concerne l'électromagnétisme, le principe de CURIE se décline sous une forme bien plus simple.

Lorsque les sources d'un champ possèdent une invariance dans un système de coordonnées, alors le champ engendré possède la même invariance dans le même système de coordonnées.

- ✧ Techniquement, si $\rho(x,y,z)$, alors $\vec{E}(x,y,z)$.
- ✧ Et ce principe est valable pour *n'importe quelle source*. C'est ainsi que nous rencontrerons parfois \vec{B} comme source de \vec{E} . Nous aurons alors

$$\text{si } \vec{B}(r,\theta,z) \quad \text{alors } \vec{E}(r,\theta,z)$$

Les invariances des sources permettent de connaître la dépendance fonctionnelle des champs.

☆ pour les plans remarquables

Sources	champ \vec{E}	champ \vec{B}
Plan de symétrie	Plan de symétrie	Plan d'antisymétrie
Plan de d'antisymétrie	Plan de d'antisymétrie	Plan de symétrie

\vec{E} est appelé *vrai vecteur* ou *vecteur polaire*.

\vec{B} est appelé *pseudovecteur* ou *vecteur axial*.

En un point d'un plan de symétrie des sources, le champ \vec{E} est colinéaire à ce plan.
En un point d'un plan d'antisymétrie des sources, le champ \vec{E} est normal à ce plan.

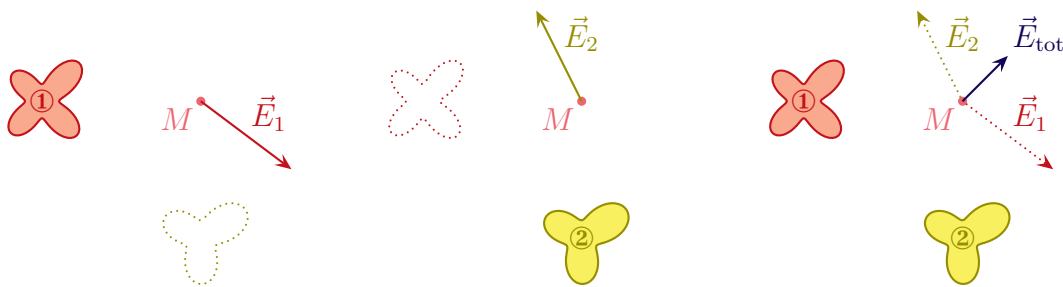
En un point d'un plan de symétrie des sources, le champ \vec{B} est normal à ce plan.
En un point d'un plan d'antisymétrie des sources, le champ \vec{B} est colinéaire à ce plan.

Les plans de symétrie ou d'antisymétrie permettent de déterminer la direction du champ au niveau de ces plans.

I.2.iii – principe de superposition

Lorsqu'une distribution peut se voir comme la réunion de deux distributions ① et ②, le champ en un point M quelconque est la superposition du champ créé par ① comme si ② n'existait pas et du champ créé par ② comme si ① n'existait pas :

$$\vec{E}(M_0) = \vec{E}_1(M_0) + \vec{E}_2(M_0) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M_0) = \vec{B}_1(M_0) + \vec{B}_2(M_0)$$



◇ Ce « petit » principe est loin d'être anodin et nous aurons l'occasion de l'utiliser très souvent, même sans nous en rendre compte.

I.2.iv – analyser des sources de champ

★ méthode

- ◇ Analyser un problème dont l'objectif est de déterminer un champ se fait en plusieurs étapes :
- ① repérer le type de source ;
 - ② trouver le type de distribution et lui associer la base idoine ;
 - ③ trouver les invariances et faire parler autant que possible les symétries ;
 - ④ chercher les plans « isolés » de symétrie ou d'anti-symétrie et traduire leurs conséquences ;
 - ⑤ identifier le nombre de milieux différents et les éventuelles conditions aux limites.
- ◇ En ce qui concerne l'analyse technique, elle est bien plus rapide :
- soit la distribution est à haute symétrie et alors nous utiliserons les lois de GAUSS et AMPÈRE ;
 - soit il n'y a pas assez de symétrie et alors nous nous rabattons sur le principe de superposition.

★ les grandeurs pertinentes

- ◇ En terme de grandeurs pertinentes, nous avons :
- ① les grandeurs caractéristiques des sources (densité volumique de charges, intensité...) ;
 - ② la géométrie de la distribution (rayon d'un tube, longueur d'un segment...) ;
 - ③ la constante de structure du champ (ε_0 pour \vec{E} et μ_0 pour \vec{B}).
- ◇ Rappelons que les coordonnées du point où nous cherchons le champ ($x, y, z, r, \theta, \varphi$) tout comme l'instant t ne sont jamais des grandeurs pertinentes.

I.3 – Sources à haute symétrie

I.3.i – théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE

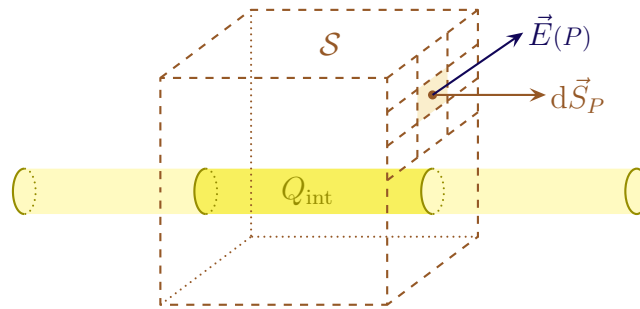
★ théorème de GAUSS

THÉORÈME DE GAUSS

Soit une distribution quelconque de charges et une surface **fermée** \mathcal{S} – éventuellement fictive – quelconque. Nous pouvons alors écrire :

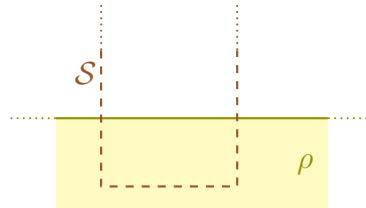
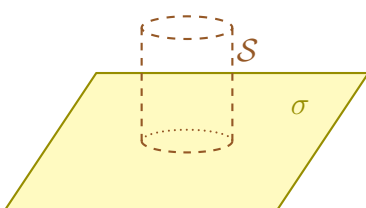
$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{où :}$$

- $\vec{E}(P)$ est le champ \vec{E} en un point quelconque de \mathcal{S} ;
- $d\vec{S}_P$ est le vecteur surface au point P considéré, toujours normal et vers l'extérieur ;
- Q_{int} est la charge contenue dans le volume délimité par la surface de contrôle ;
- ε_0 est la permittivité du vide (en F.m^{-1}).



Un champ électrique se mesure en V.m^{-1} .

- ◇ Techniquement, une « bonne » surface de GAUSS est une surface qui :
 - contient le point M où il faut déterminer le champ ;
 - respecte autant que possible les symétries et les invariances des sources.
- ◇ Remarquons qu'il est inopportun de choisir une surface de GAUSS qui contient soit des charges surfaciques soit des charges ponctuelles.
- ◇ En effet, en se souvenant que les charges surfaciques n'existent pas, si la surface de GAUSS s'arrête au niveau de celles-ci, il faut zoomer pour voir ce qu'il est est. Et là, il peut y avoir de nombreux cas.

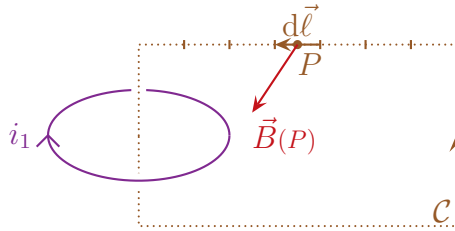


★ **théorème d'AMPÈRE**

Soit une distribution quelconque de courants et un contour **orienté** et fermé \mathcal{C}
 – éventuellement fictif – quelconque. Nous avons alors

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad \text{où :}$$

- $\vec{B}(P)$ est le champ \vec{B} en un point quelconque de \mathcal{C} ;
- $d\vec{\ell}_P$ est le vecteur déplacement élémentaire sur \mathcal{C} au niveau du point P considéré ;
- $i_{\text{enlacé}}$ est le flux du courant à travers la surface \mathcal{S} délimitée et orientée par \mathcal{C} ;
- μ_0 est la perméabilité du vide en H.m^{-1} .



Le champ magnétique se mesure en tesla (T).

★ **philosophie des théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE**

- ◇ De manière plus « philosophique », ces théorèmes fournissent une information *globale* sur le champ. Autrement dit, il mélange plein de « valeurs » différentes du champ en plein d'endroits différents et il en ressort *un* nombre.
- ◇ Dans ces conditions il est évident que sans la connaissance *a priori* d'une certaine régularité dans ces nombres, il serait impossible de remonter au champ lui-même.
- ◇ C'est la même idée que de penser à 5 nombres (réels) et d'essayer de trouver ce qu'ils valent sachant que la somme fait 25 ! C'est totalement impossible.
- ◇ Mais si nous ajoutons une information forte de « structure » comme, par exemple, « les 5 nombres sont des entiers consécutifs », alors il devient possible de trouver la réponse.
- ◇ C'est la raison pour laquelle, si justes et toujours vérifiés que sont ces théorèmes, ils ne peuvent être véritablement utiles que dans des situations très particulières.

I.3.ii – les fils infinis

★ **le fil chargé**🕒 **situation**

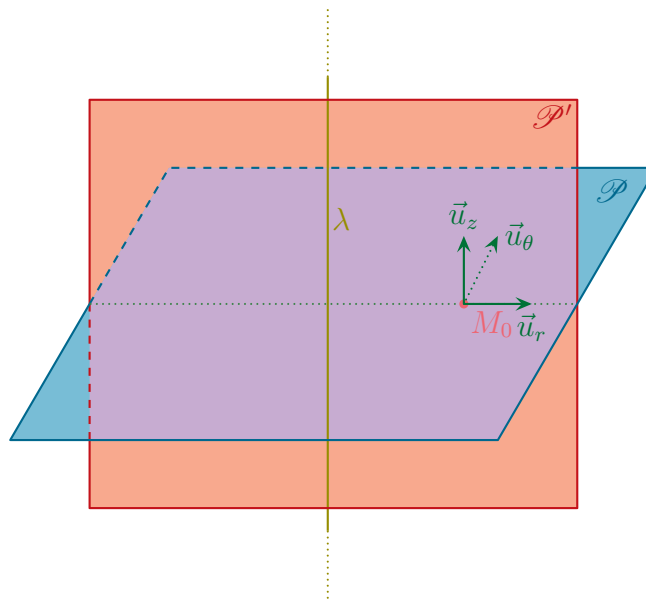
- ◇ Considérons un fil uniformément chargé de charge linéique λ .
- ◇ Cherchons le champ $\vec{E}(M)$ créé dans **tout l'espace**.



◇ La distribution est de type « fil » :

- nous allons naturellement utiliser les coordonnées cylindro-polaires ;
- il y a invariance par rotation autour de l'axe (Oz) , donc $\vec{E}(r, \theta, z) \rightarrow \vec{E}(r, z)$;
- il y a invariance par translation suivant l'axe (Oz) , donc $\vec{E}(r, z) \rightarrow \vec{E}(r)$.

◇ Pour les symétries, allons-y plus doucement.



◇ Soit un point M_0 quelconque :

- le plan $\mathcal{P}(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des charges ;
- donc $\mathcal{P}(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie du champ \vec{E} ;
- donc $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P})$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan ;
- donc $\vec{E}(M_0)$ est porté par \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

◇ Toujours pour ce point M_0 quelconque :

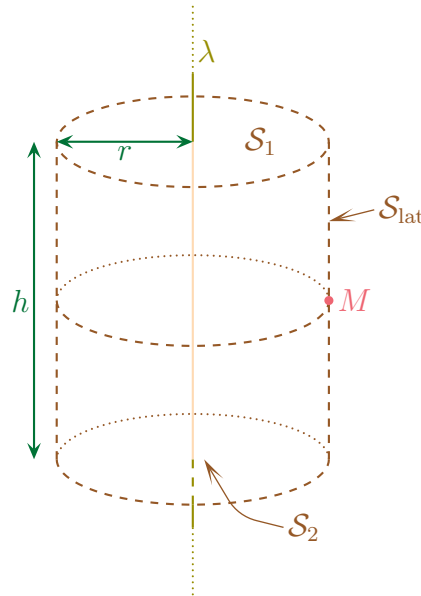
- le plan $\mathcal{P}'(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ contenant M_0 est plan de symétrie des charges ;
- donc $\mathcal{P}'(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ \vec{E} ;
- donc $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P})$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan ;
- donc $\vec{E}(M_0)$ est porté uniquement par \vec{u}_r puisqu'il ne peut pas être porté par \vec{u}_z .

◇ Finalement, le champ \vec{E} est tel que : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

◇ Les grandeurs pertinentes sont ρ (distribution) et ε_0 (structure du champ).

🌀 théorème de GAUSS

- ✧ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
 - ➔ qui contient le point M ;
 - ➔ qui respecte les symétries du problème.
- ✧ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de hauteur h , centré sur l'axe, de rayon r et telle que le point M ne soit pas sur une arête.
- ✧ Cette surface a la forme d'une boîte de conserve.

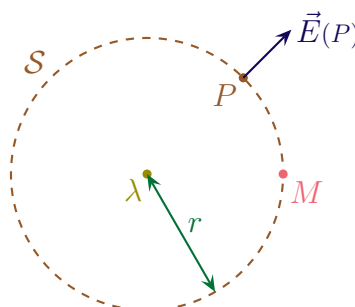


🌀 expression de $\Phi_{\vec{E}}$

- ✧ Séparons la surface en 3 :
 - ➔ le dessus de surface S_1 ;
 - ➔ le dessous de surface S_2 ;
 - ➔ la surface latérale de surface S_{lat} .
- ✧ Nous avons ainsi $\mathcal{S} = S_1 + S_2 + S_{\text{lat}}$.
- ✧ Le flux peut alors s'écrire par linéarité de la sommation : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{lat}}$.
- ✧ Le flux sur la surface supérieure donne, puisque sur cette surface $d\vec{S}_P = dS \vec{u}_z$:

$$\Phi_1 = \iint_{P \in S_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_1 = \iint_{P \in S_1} E(r_P) \underbrace{\vec{u}_r \cdot dS_P \vec{u}_z}_{=0} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_1 = 0$$

- ✧ De même, comme sur la surface inférieure $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$, nous obtenons $\Phi_2 = 0$.
- ✧ Pour mieux voir ce qui se passe sur la surface latérale, faisons un schéma dans un plan orthogonal au fil.



✧ Le flux sur la surface latérale, nous avons successivement :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in S_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in S_{\text{lat}}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r$$

✧ Et comme la surface de GAUSS a été judicieusement choisie (!), nous avons $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$, d'où :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in S_{\text{lat}}} E(r_M) dS_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{lat}} = E(r) \times \iint dS_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{lat}} = E(r) \times S_{\text{lat}}$$

✧ Cela donne finalement

$$\Phi_{\text{lat}} = E(r) \times 2 \pi r h$$

🔗 expression de Q_{int}

✧ Comme la longueur de fil découpé vaut h et que la densité linéique de charge est uniforme, nous avons tout de suite

$$Q_{\text{int}} = \lambda \times h$$

🔗 rassemblement

✧ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, nous obtenons :

$$E(r) \times 2 \pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0 r}$$

🔗 analyse du résultat

✧ Vérifions que c'est bien homogène :

$$\text{champ } E \times \text{surface} = \frac{\text{charge}}{\varepsilon_0}$$

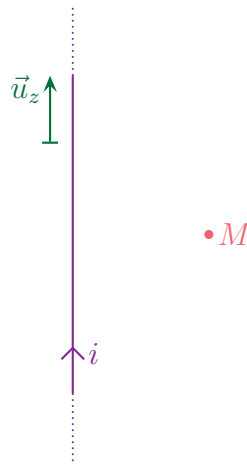
✧ Le champ décroît en $1/r$, ce qui considéré comme une décroissance plutôt lente : c'est dû à la présence de charges à l'infini.

★ le fil parcouru par un courant

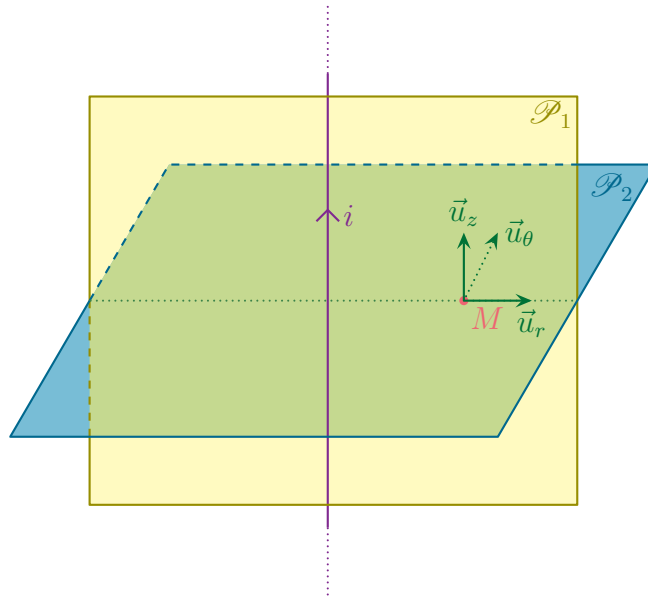
🔗 situation

✧ Considérons un fil infini parcouru par un courant d'intensité i .

✧ Cherchons le champ \vec{B} créé dans tout l'espace.



- ✧ Rappelons qu'aucun fil n'est infini. Cette situation modélise en fait ce qu'il se passe très près d'un fil non infini.
- ✧ De même que « de près » la Terre peut sembler plate et infinie, un fil quelconque vu de près peut sembler rectiligne et infini.
- ✧ Il s'agit d'une situation de type « fil » ; les coordonnées naturelles sont les coordonnées cylindro-polaires.
- ✧ Il y a invariance par rotation autour de $(Oz) : \vec{B}(r, \theta, z) \rightarrow \vec{B}(r, z)$.
- ✧ Il y a invariance par translation suivant $\vec{u}_z : \vec{B}(r, z) \rightarrow \vec{B}(r)$.
- ✧ Considère un point M quelconque en dehors du fil :
 - le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants ;
 - donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de \vec{B} ;
 - donc $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$ est normal à \mathcal{P} ;
 - donc $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{u}_θ .



✧ Finalement : $\boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta}$

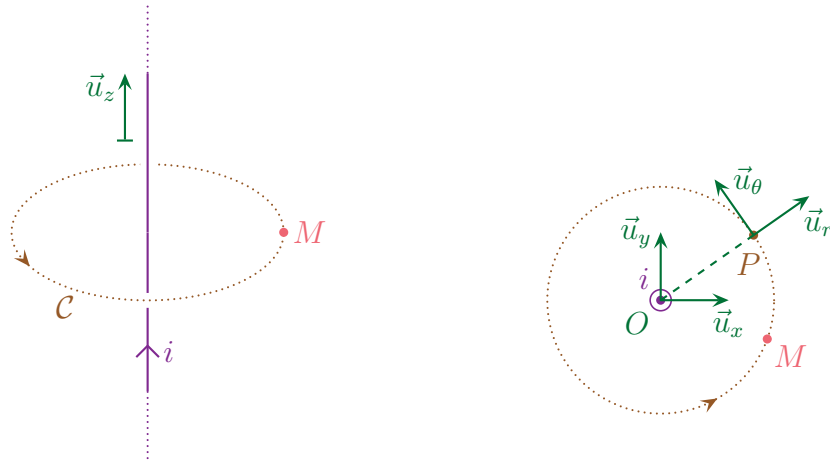
☞ *Remarque.* Nous pouvons aussi voir que le plan orthogonal à l'axe et contenant M est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de \vec{B} . Nous en aurions alors déduit que \vec{B} était dans le plan horizontal, ce qui est une déduction moins forte que la précédente.

☞ **Les plans d'antisymétrie des champs donnent plus d'information sur la direction des champs que les plans de symétrie.**

✧ Enfin les grandeurs pertinentes : i (distribution) et μ_0 (structure du champ).

🕒 théorème d'AMPÈRE

- ✧ Choisissons un contour respectant les symétries des courants et passant par M : un cercle centré sur l'axe et de rayon r et orientons-le dans le sens de \vec{u}_θ .



🕒 expression de $C_{\vec{B}}$

- ✧ Pour mieux calculer la circulation, représentons la situation dans le plan (Oxy) où O est le centre du contour choisi.
- ✧ La circulation de \vec{B} vaut alors, avec $d\vec{\ell}_P = d\ell_P \vec{u}_\theta$:

$$C_B = \oint_{P \in C} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \oint_{P \in C} B(r_P) \vec{u}_\theta \cdot (d\ell_P \vec{u}_\theta) = \oint_{P \in C} B(r_P) d\ell_P$$

- ✧ De plus, le contour judicieusement choisi impose $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$ d'où :

$$C_B = \oint_{P \in C} B(r) d\ell_P = B(r) \times \oint_C d\ell_P = B(r) \times \ell_{\text{tot}} = B(r) 2\pi r$$

🕒 expression de $i_{\text{enlacé}}$

- ✧ Le courant enlacé vaut ici : $i_{\text{enlacé}} = +i$.

🕒 rassemblement

- ✧ Comme le théorème d'AMPÈRE s'écrit $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous arrivons à $B(r) 2\pi r = \mu_0 i$ et ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

- ✧ Le sens de \vec{B} est donné par la règle de la main droite.

🕒 analyse du résultat

- ✧ Vérifions l'homogénéité et la cohérence : $\text{cham } B \times \text{longueur} = \mu_0 \times \text{courant}$.
- ✧ Le résultat précédent n'est pas à savoir par cœur *stricto sensu* mais à savoir retrouver très vite.

★ comparaison des champs

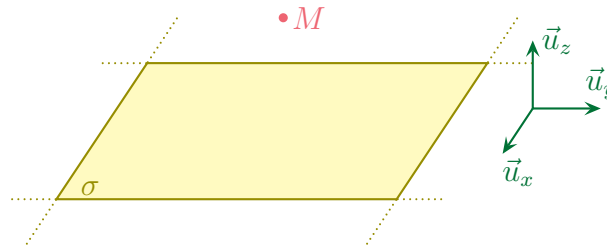
- ✧ Vus de dessus, les champs sont fondamentalement différents :
- ➔ le champ \vec{E} est *radial*;
 - ➔ le champ \vec{B} est *orthoradial*.

I.3.iii – les plans

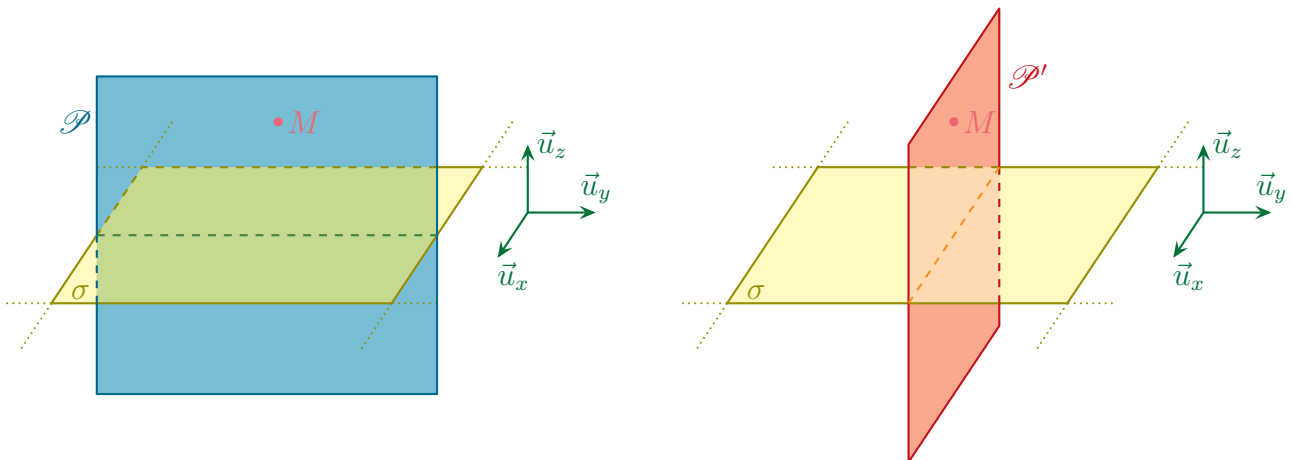
★ le plan uniformément chargé

🕒 situation

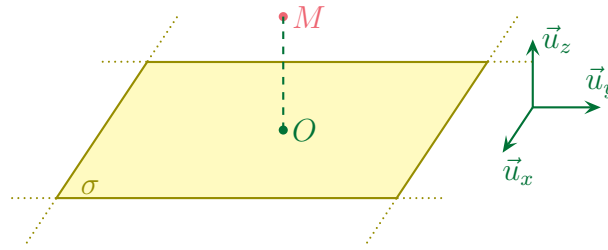
- ✧ Considérons un plan infini chargé surfaciquement de charge surfacique uniforme σ .
- ✧ Cherchons le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution dans tout l'espace.



- ✧ Il s'agit ici d'une distribution type « plan » (non ? si !), les coordonnées naturelles sont les coordonnées cartésiennes.
- ✧ La distribution est de type « plan » :
 - ➔ il y a invariance par translation suivant l'axe (Ox) , donc $\vec{E}(x,y,z) \rightarrow \vec{E}(y,z)$;
 - ➔ il y a invariance par translation suivant l'axe (Oy) , donc $\vec{E}(x,y,z) \rightarrow \vec{E}(z)$.
- ✧ Pour les symétries, il faut y aller plus doucement.



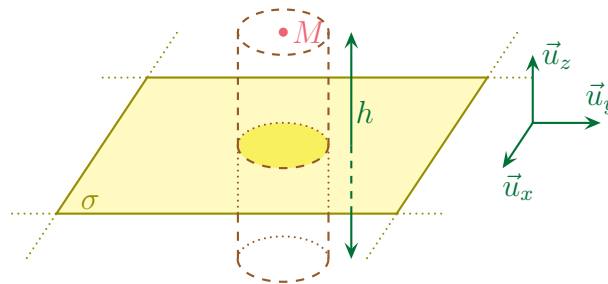
- ✧ Soit un point M_0 quelconque :
 - ➔ le plan $\mathcal{P}(M_0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges ;
 - ➔ donc plan $\mathcal{P}(M_0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ électrostatique ;
 - ➔ donc $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P})$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan ;
 - ➔ donc $\vec{E}(M_0)$ est porté par \vec{u}_y et \vec{u}_z .
- ✧ Soit un point M_0 quelconque :
 - ➔ le plan contenant $\mathcal{P}'(M_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges ;
 - ➔ donc le plan $\mathcal{P}'(M_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ électrostatique ;
 - ➔ donc $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}')$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan ;
 - ➔ donc $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}')$ est porté uniquement par \vec{u}_z puisqu'il ne peut pas être porté par \vec{u}_x .
- ✧ Nous pouvons constater qu'il y a un autre plan de symétrie !
- ✧ Notons O le projeté orthogonal de M sur la distribution.



- ◇ Le plan (Oxy) est plan de symétrie des charges donc du champ électrostatique, ce qui implique $E(-z) = -E(z)$.
- ◇ Finissons avec les grandeurs pertinentes : ρ (distribution), e (géométrie) et ε_0 (structure du champ).

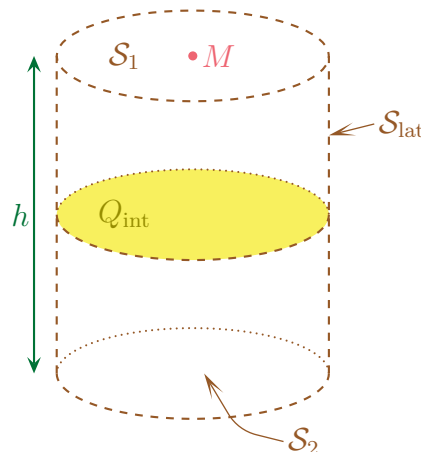
🌀 théorème de GAUSS

- ◇ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
 - qui contient le point M ;
 - qui respecte les symétries du problème.
- ◇ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de section S symétrique par rapport au plan (Oxy) tel que le point M soit sur la face supérieure.



🌀 expression de $\Phi_{\vec{E}}$

- ◇ Séparons la surface en 3 :
 - le dessus noté S_1 ;
 - le dessous noté S_2 ;
 - la surface latérale S_{lat} .
- ◇ Nous constatons alors que $S = S_1 + S_2 + S_{lat}$.



- ◇ Par linéarité de la sommation, le flux peut s'écrire : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat}$.
- ◇ Le flux sur la surface supérieure donne, avec $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{u}_z$,

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow \Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) \vec{u}_z \cdot dS_P \vec{u}_z \rightsquigarrow \Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) dS_P$$

◇ Or la surface de GAUSS a été choisie de telle sorte que pour les points P sur \mathcal{S}_1 , $z_P = C^{\text{te}} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z) \times dS_P \rightsquigarrow \Phi_1 = E(z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_1} dS_P \rightsquigarrow \Phi_1 = E(z) \times S$$

◇ De même, sur la surface inférieure, cela donne d'abord avec $d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{u}_z$:

$$\Phi_2 = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow \Phi_2 = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) \vec{u}_z \cdot (-dS_P \vec{u}_z) \rightsquigarrow \Phi_2 = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) dS_P$$

◇ Et parce que la surface de GAUSS est ainsi faite, sur la surface \mathcal{S}_2 , nous avons $z_P = C^{\text{te}} = -z_M = -z$:

$$\Phi_2 = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(-z) \times dS_P \rightsquigarrow \Phi_2 = -E(-z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_2} dS_P \rightsquigarrow \Phi_2 = -E(-z) \times S \stackrel{\text{sym}}{=} E(z) \times S$$

◇ Pour le flux sur la surface latérale, nous avons successivement :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow \Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(z) \underbrace{\vec{u}_z \cdot d\vec{S}_P}_{=0} \rightsquigarrow \Phi_{\text{lat}} = 0$$

🔗 expression de Q_{int}

◇ Nous voyons tout de suite que la charge située à l'intérieur de la surface de GAUSS est la charge contenu sur le disque découpé par S .

◇ Comme ce disque est de surface S et que la distribution est uniforme, nous avons tout de suite

$$Q_{\text{int}} = \sigma \times S$$

🔗 rassemblement

◇ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, nous avons :

$$2 E(z) \times S = \frac{\sigma \times S}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow E(z) = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}$$

🔗 analyse du résultat

◇ Le champ est uniforme en dehors du plan. Il ne décroît pas à l'infini.

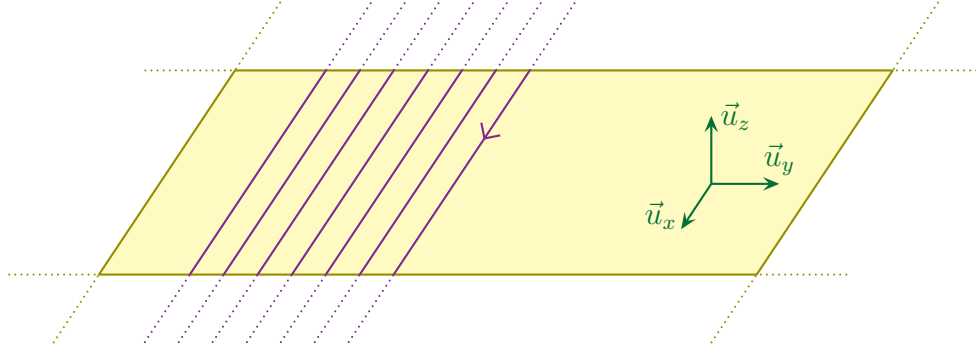
☞ *Remarque.* Pour des raisons énergétiques (le champ \vec{E} contient de l'énergie), cette situation n'est pas physiquement possible. Il faut bien voir qu'il s'agit là d'une modélisation et qu'aucun plan n'est véritablement infini, mais suffisamment proche d'un plan fini, tout se passe comme s'il était infini.

◇ Contrairement à ce que pourrait laisser croire l'expression brute du champ électrostatique, celui-ci dépend bien de z ! En effet, suivant le signe de z (*i.e.* suivant que le point considéré se situe d'un côté ou de l'autre du plan chargé), le sens de \vec{E} ne sera pas le même.

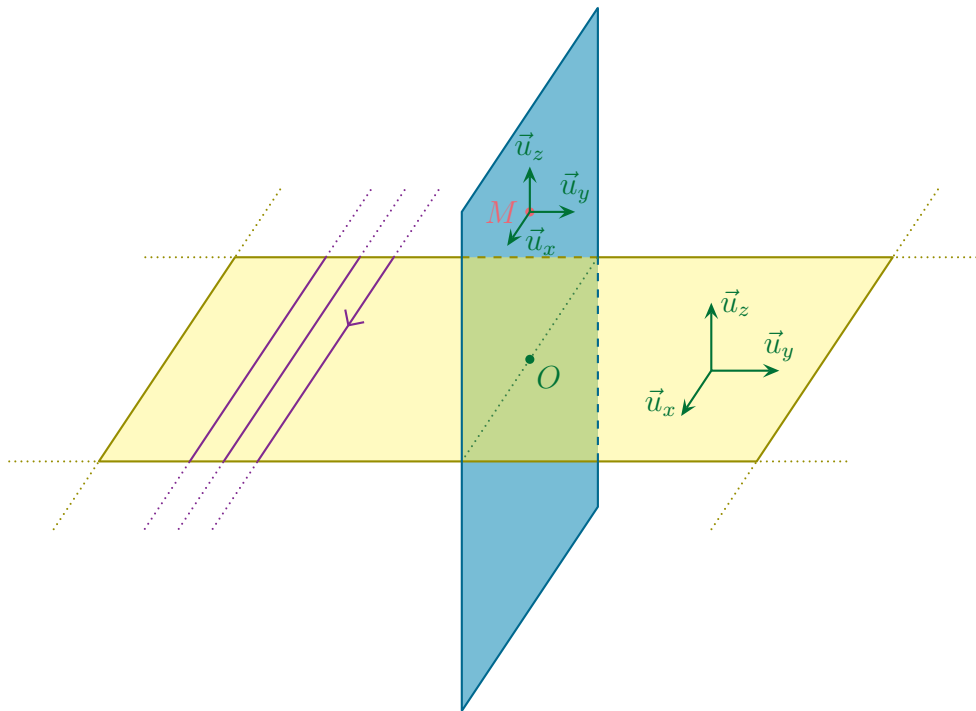
★ le plan parcouru par un courant

🌀 situation

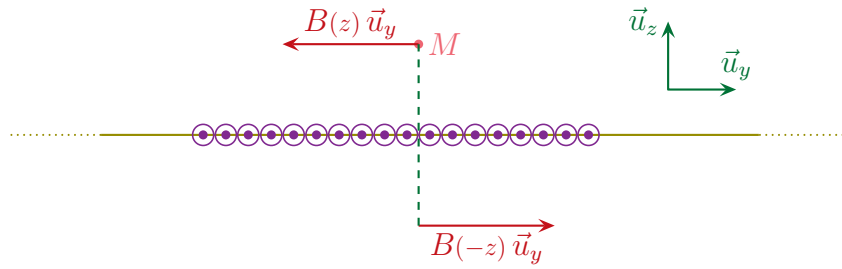
- ◇ Considérons un plan infini parcouru par un courant surfacique uniforme \vec{j}_s .
- ◇ Cherchons le champ magnétostatique créé dans tout l'espace.



- ◇ Il s'agit d'un problème de type « plan » (incroyable, n'est-ce pas?), les coordonnées naturelles sont donc les coordonnées cartésiennes.
- ◇ Prenons \vec{u}_z comme axe normal au plan et \vec{u}_x la direction du courant.
- ◇ Il y a invariance des courants suivant x et y , donc $\vec{B}(x,y,z) \rightarrow \vec{B}(z)$.



- ◇ Soit M quelconque. Alors :
 - ➔ le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_x \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants ;
 - ➔ donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_x \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie du champ \vec{B} ;
 - ➔ donc $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$ est orthogonal à \mathcal{P} ;
 - ➔ donc $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{u}_y .
- ◇ Finalement le champ \vec{B} est tel que $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$.
- ◇ De plus, en notant O le projeté de M sur la nappe de courant, nous pouvons constater que le plan le plan (Oxy) est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} .



✧ Nous avons donc $B(-z) = -B(z)$.

☞ *Remarque.* Le fait que le plan (Ozy) soit plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de \vec{B} implique que \vec{B} porté par \vec{u}_y et \vec{u}_z ce qui est « moins bien » que de savoir, par le plan d'antisymétrie des champs, que \vec{B} est porté par \vec{u}_y .

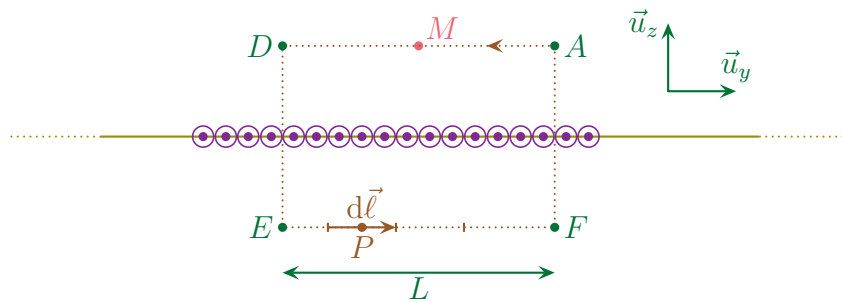
✧ Grandeurs pertinentes : j_s (distribution) et μ_0 (structure).

🔗 théorème d'AMPÈRE

✧ Il faut choisir un contour respectant les symétries et contenant M ...

✧ Nous allons prendre un rectangle de longueur L dans le plan (Ozy) et symétrique par rapport au plan (Oxy) .

✧ Réflexe (non obligatoire) : mettre l'orientation de \mathcal{C} de telle sorte que son vecteur surface soit dans le même sens que les courants.



🔗 expression de $C_{\vec{B}}$

✧ Décomposons le contour en 4 : $\mathcal{C} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$

✧ Par linéarité de la circulation, nous avons $C = C_{AD} + C_{DE} + C_{EF} + C_{FA}$.

✧ Écrivons la définition de C_{AD} avec $d\vec{\ell}_P = -d\ell_P \vec{u}_y$:

$$C_{AD} = \int_{P \in \mathcal{L}_1} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C_{AD} = \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (-d\ell_P \vec{u}_y) \rightsquigarrow C_{AD} = - \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) d\ell_P$$

✧ La géométrie du contour est telle que $z_P = C^{\text{te}} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$ d'où :

$$C_{AD} = - \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z) d\ell_P \rightsquigarrow C_{AD} = -B(z) \times \int_A^D d\ell_P \rightsquigarrow C_{AD} = -B(z) \times \ell_{\text{tot}, AB}$$

✧ Et finalement

$$C_{AD} = -B(z) L$$

✧ Rappelons un point technique essentiel.

Seuls les déplacements élémentaires proportionnels à $d\ell$ peuvent être signés artificiellement par l'ajout d'un signe $-$.

✧ Il faudra faire très attention à la façon de calculer la circulation de manière à ne pas se tromper de signe :

- soit réfléchir au signe au moment de l'écriture du déplacement élémentaire en $d\ell_P \vec{u}$
- soit **ne jamais réfléchir au signe** en écrivant les déplacements élémentaires en $dx \vec{u}_x$, $dy \vec{u}_y$, $dz \vec{u}_z$ mais être extrêmement rigoureux sur les bornes et les intégrations

✧ Pour C_{DE} , le déplacement élémentaire vaut $d\vec{\ell} = -d\ell_P \vec{u}_z$. Cela donne donc :

$$C_{DE} = \int_{P \in \mathcal{L}_2} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C_{DE} = \int_{P \in \mathcal{L}_2} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (dz \vec{u}_z) \rightsquigarrow C_{DE} = \int_{P \in \mathcal{L}_2} B(z_P) \underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z}_{=0} dz$$

✧ Et donc finalement

$$C_{DE} = 0$$

✧ Le champ $\vec{B}(P)$ étant orthogonal en tout point de DE au contour d'AMPÈRE ce résultat n'est pas surprenant.

✧ Pour C_{EF} le déplacement élémentaire vaut $d\vec{\ell} = +d\ell_P \vec{u}_y$. Nous avons donc :

$$C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (d\ell_P \vec{u}_y) \rightsquigarrow C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(z_P) d\ell_P$$

✧ Ici la géométrie particulière implique que $z_P = C^{\text{te}} = -z_M = -z$ et ainsi :

$$C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(-z) d\ell_P \rightsquigarrow C_{EF} = B(-z) \int_{P \in \mathcal{L}_3} d\ell_P \rightsquigarrow C_{EF} = B(-z) \times L$$

✧ Et comme $B(-z) = -B(z)$, nous obtenons finalement $C_{DE} = -B(z) \times L$.

✧ Enfin, De même que sur DE , le champ en chaque point P de FA est orthogonal au contour, donc nous pouvons dire que :

$$C_{FA} = 0$$

✧ Finalement : $C = -2 B(z) \times L$.

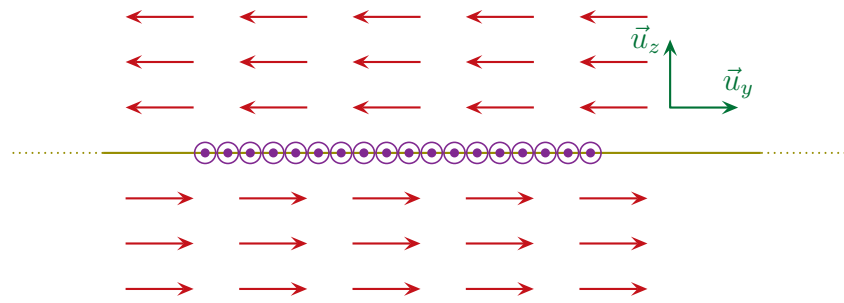
🌀 expression de $i_{\text{enlacé}}$

✧ Le courant enlacé donne directement $i_{\text{enlacé}} = +j_s \times L$ car seule la portion à l'intérieur du contour compte pour le courant enlacé.

🌀 rassemblement

✧ Avec le théorème d'AMPÈRE qui dit $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous obtenons

$$-2 B(z) \times L = \mu_0 j_s \times L \rightsquigarrow \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y$$



🔍 analyse du résultat

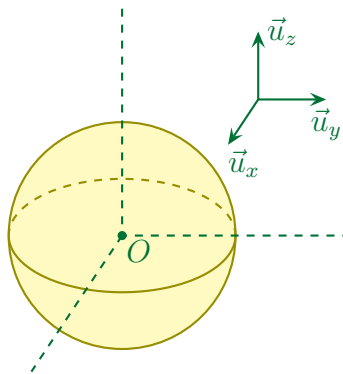
- ✧ N'oublions pas de vérifier l'homogénéité et la cohérence, notamment le fait que le sens du champ \vec{B} soit conforme à la règle de la main droite.
- ✧ Nous pouvons nous poser la question de la dépendance du champ magnétique en z puisque le résultat ne dépend pas de z .
- ✧ En fait, comme le montre bien le schéma précédent, **le champ dépend** de la coordonnée z : si $z > 0$ le champ est dans un sens et si $z < 0$ le champ est dans l'autre sens. C'est pourquoi il vaut mieux écrire le résultat sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{B}_{(M)} = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y & \text{pour } z > 0 \\ \vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

I.3.iv – la boule uniformément chargée

★ situation

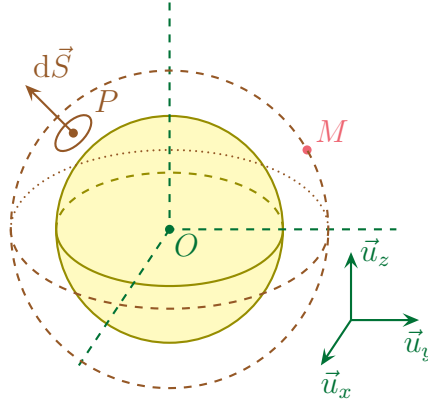
- ✧ Considérons une boule de rayon R uniformément chargée en volume et cherchons le champ \vec{E} créé par une telle distribution dans tout l'espace.



- ✧ Ici nous sommes clairement face à une distribution de type « sphère ».
- ✧ Ainsi le champ ne dépend que de r : $\vec{E}(r)$.
- ✧ Considérons un point M quelconque de l'espace :
 - ➔ tous les plans contenant M et \vec{u}_r sont plans de symétrie des charges ;
 - ➔ donc tous les plans contenant M et \vec{u}_r sont plans de symétrie de \vec{E} ;
 - ➔ donc $\vec{E}_{(M)}$ doit être contenu dans tous ces plans, *i.e.* dans leur intersection ;
 - ➔ donc $\vec{E}_{(M)}$ porté par \vec{u}_r .
- ✧ Finalement, nous avons $\vec{E}_{(M)} = \vec{E}(r) \vec{u}_r$.
- ✧ Pour les grandeurs pertinentes : ρ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure).

★ théorème de GAUSS

- ◇ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
 - qui contient le point M ;
 - qui respecte les symétries du problème.
- ◇ Choisissons une sphère \mathcal{S} centrée sur O et de rayon r .



★ expression de $\Phi_{\vec{E}}$

- ◇ Le flux à travers cette surface donne, puisque $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_r$:

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow \Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot (dS_P \vec{u}_r) \rightsquigarrow \Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) dS_P$$

- ◇ De plus, la surface de GAUSS a été choisie telle que $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$, ce qui donne :

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r) \times dS_P \rightsquigarrow \Phi = E(r) \iint_{P \in \mathcal{S}} dS_P \rightsquigarrow \Phi = E(r) \times S \rightsquigarrow \Phi = E(r) \times 4\pi r^2$$

★ expression de Q_{int}

- ◇ Il y a deux cas à distinguer :
 - M est dans la distribution soit $r \leq R$;
 - M n'est pas dans la distribution soit $r > R$.
- ◇ Si M est dans la distribution, alors, parce que la densité de charge est uniforme,

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} \rightsquigarrow Q_{\text{int}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

- ◇ Si M n'est pas dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{boule}} \rightsquigarrow Q_{\text{int}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$$

★ rassemblement

- ◇ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R \\ E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r \leq R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R \end{array} \right.$$

★ analyse du résultat

- ◇ N'oublions pas de vérifier que l'expression est bien homogène.
- ◇ Le champ décroît en $1/r^2$, ce qui est considéré comme rapide.

I.4 – Sources de basse symétrie

I.4.i – lois de sommation

★ lois de COULOMB

- ◇ C'est le simple principe de superposition des champs \vec{E} à partir du moment où nous connaissons le champ créé au point M par une charge q située en P : $\vec{E}_{(M)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\vec{PM}}{PM^3}$.

Le champ électrostatique créé en M par des charges q_i situées en P_i s'écrit :

$$\vec{E}_{(M)} = \sum \frac{q_i \vec{P_i M}}{4\pi\varepsilon_0 P_i M^3}$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution linéique de charges de densité $\lambda(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}_{(M)} = \int_{P \in \mathcal{L}} \frac{\lambda(P) \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^3} d\ell_P$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution surfacique de charges de densité $\sigma(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}_{(M)} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(P) \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^3} dS_P$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}_{(M)} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P) \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^3} d\tau_P$$



Ne pas oublier qu'il s'agit d'une loi vectorielle !

◇ Ceci dit, bien que cette loi soit toujours applicable, ce sera celle qui amènera aux calculs les plus difficiles. Elle est donc à réserver aux cas où :

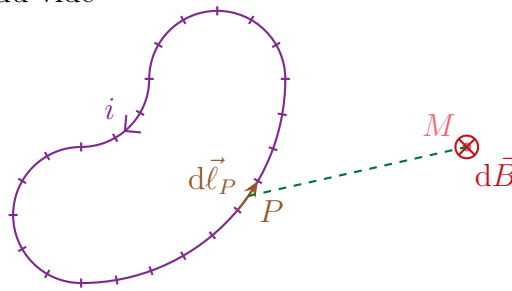
- rien d'autre ne marche ;
- la consigne impose de l'utiliser.

★ loi de BIOT et SAVART

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par un circuit \mathcal{C} parcouru par le courant i s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad \text{où :}$$

- $d\vec{\ell}_P$ est un déplacement élémentaire sur \mathcal{C} autour de P dans le sens de i , peu importe que $i \leq 0$
- μ_0 est la perméabilité du vide



◇ À partir de là, nous pouvons facilement trouver l'expression de la loi de BIOT et SAVART pour des courants non filiformes.

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par une surface \mathcal{S} parcourue par la densité linéique de courant électrique en surface \vec{j}_s s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \oiint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\vec{j}_s(P) dS_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad \text{où :}$$

- dS_P est une surface élémentaire sur \mathcal{S} autour de P ;
- μ_0 est la perméabilité du vide.

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par un volume \mathcal{V} parcouru par la densité surface de courant électrique en volume \vec{j} s'écrit :

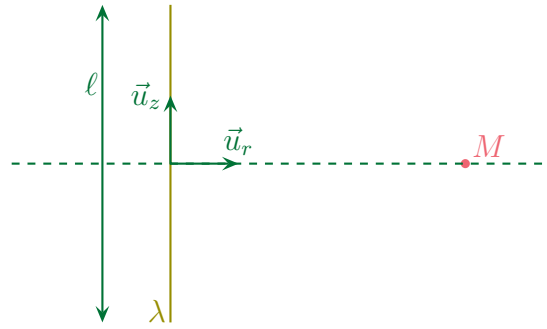
$$\vec{B}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\vec{j}(P) d\tau_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad \text{où :}$$

- $d\tau_P$ est un volume élémentaire dans \mathcal{V} autour de P ;
- μ_0 est la perméabilité du vide.

I.4.ii – exemple fondamental du segment uniformément chargé

★ situation

◇ Considérons un segment de longueur ℓ uniformément chargé et cherchons le champ créé dans son plan médiateur.



◇ Analyse physique :

- la distribution n'admet qu'une invariance par rotation, c'est donc un problème de type « cône » ;
- nous allons naturellement utiliser les coordonnées cylindro-polaires ;
- les grandeurs pertinentes sont λ (distribution), ℓ (géométrie) et ε_0 (structure).


◇ Soit M un point du plan médiateur du segment :

- le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges ;
- donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ \vec{E} ;
- donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$ est contenu dans le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$;
- donc $\vec{E}(M)$ porté par \vec{u}_r et \vec{u}_z .

◇ Soit M un point du plan médiateur du segment :

- le plan $\mathcal{P}'(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des charges ;
- donc le plan $\mathcal{P}'(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie du champ \vec{E} ;
- donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P}')$ est contenu dans le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$;
- donc $\vec{E}(M)$ porté par \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

◇ Finalement, le champ en M est porté par \vec{u}_r : $\vec{E}(M) = E(0, r) \vec{u}_r$.

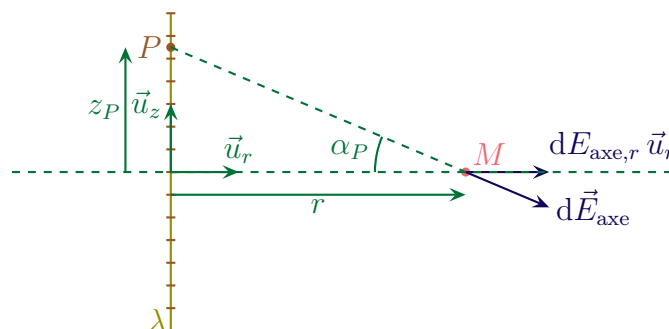
 Écrire le champ en M sous la forme $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ est très maladroit puisqu'il laisse sous-entendre que le champ ne dépend que de r et n'est porté que par \vec{u}_r , ce qui est **faux**. Le champ électrique *dépend* de z mais nous n'allons pas chercher cette dépendance. Nuance.

◇ Analyse technique :

- le point M sera repéré par r quand à un point P de la distribution, il sera repéré par sa cote z_P ;
- ici, avec *une seule* invariance, nous pourrions d'abord chercher le potentiel puis dériver, mais cela revient à faire deux calculs ; autant utiliser directement la loi de COULOMB car, grâce aux symétries, nous n'avons qu'un seul calcul est nécessaire (celui de la composante sur \vec{u}_r).

★ loi de COULOMB

◇ Découpons d'abord la distribution et écrivons l'expression du champ.



◇ Nous avons :

$$d\vec{E}_{\text{axe},P(M)} = \frac{\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{E}_{\text{axe},P(M)} = \frac{\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM^3} (-z \vec{u}_z + r \vec{u}_r)$$

◇ Et ainsi en ne conservant que la composante sur \vec{u}_r :

$$E_{\text{axe},r}(r) = \vec{E}_{\text{axe}}(M) \cdot \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad E_{\text{axe},r}(r) = \left(\int_{P \in \mathcal{D}} d\vec{E}_{\text{axe},P(M)} \right) \cdot \vec{u}_z$$

◇ Ce qui donne

$$E_{\text{axe},r}(r) = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \times r$$

★ changement de repérage

◇ Pour calculer techniquement cette intégrale, nous allons procéder à un changement classique de variable. Cela revient à changer de repérage pour le point P : au lieu de le repérer par z_P , nous allons le repérer par α_P .

◇ Cela donne :

$$PM = \frac{r}{\cos \alpha_P} ; \quad z_P = r \times \tan \alpha_P \quad \text{et} \quad dz_P = \frac{r}{\cos^2 \alpha_P} d\alpha_P$$

◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} E_{\text{axe},r}(r) &= \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \times r = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \times \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\frac{r}{\cos^2 \alpha_P} d\alpha_P}{\frac{r^3}{\cos^3 \alpha_P}} \\ &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \times \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\cos \alpha_P d\alpha_P}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos \alpha_P d\alpha_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \times 2 \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

◇ Finalement

$$\vec{E}_{\text{axe}} = \frac{\lambda \sin \alpha_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

★ analyse du résultat

◇ Nous pouvons tout d'abord vérifier que ce résultat homogène, ce qu'il est.

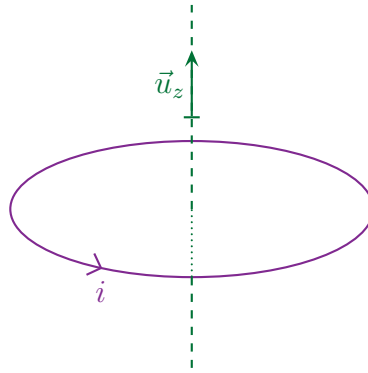
◇ Ensuite nous pouvons constater que si le fil devient infini, *i.e.* si α_0 tend vers $\frac{\pi}{2}$, alors nous retrouvons l'expression du champ électrique créé par un fil infini, ce qui est, là aussi, rassurant.

◇ Enfin, rappelons que l'utilité du segment chargé est d'être une « brique de construction » de distribution, *i.e.* d'être un morceau qui permet de construire le fil infini, le plan infini, un polygone, etc.

I.4.iii – exemple fondamental du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire parcourue par un courant

★ situation

◇ Considérons un circuit électrique circulaire (une « spire » circulaire) parcourue par un courant d'intensité i et cherchons le champ magnétique en un point de l'axe.



◇ Analyse physique :

- la distribution est de type « disque » car il n'y a qu'une invariance par rotation ;
- nous utiliserons le repérage cylindro-polaire ;
- grandeurs pertinentes : i (distribution), R (géométrie), μ_0 (structure).

◇ Soit M un point de l'axe :

- tout plan « vertical » contenant (M, \vec{u}_z) est plan d'antisymétrie des courants ;
- donc tout plan contenant (M, \vec{u}_z) est plan de symétrie de \vec{B} ;
- donc $\vec{B}(M)$ contenu dans tous les plans contenant (M, \vec{u}_z) ;
- donc $\vec{B}(M)$ porté par \vec{u}_z .

◇ Finalement : $\vec{B}(M) = B(0, z) \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} B_{\text{axe}}(z) \vec{u}_z$.

◇ Analyse technique :

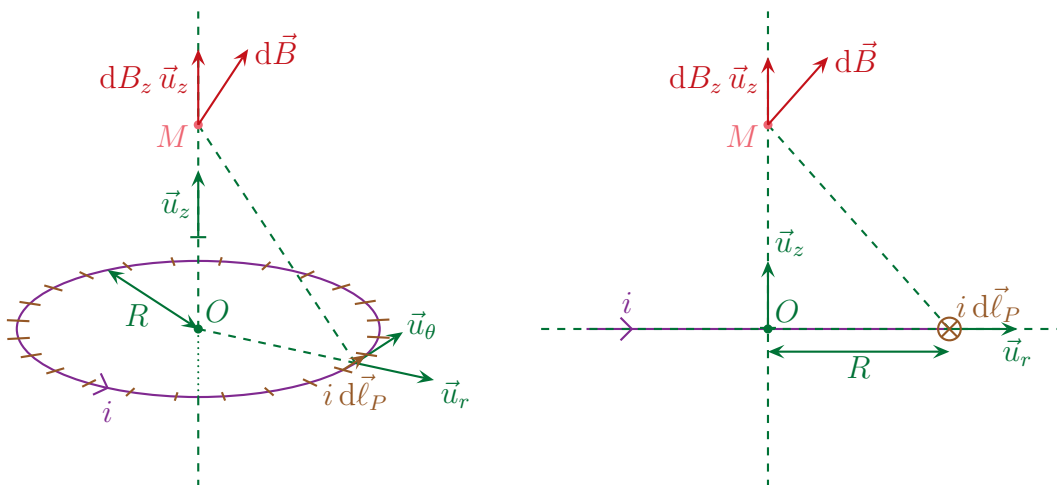
- il n'y a pas assez d'invariance pour essayer AMPÈRE, nous allons donc utiliser la loi de BIOT et SAVART.

⛔ Écrire le champ sur l'axe $\vec{B}(z) \vec{u}_z$ est très piégeux car cela peut faire croire à l'existence de nombreuses symétries. Il vaut donc mieux une des deux notations suivantes :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z) \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad B(0, z) \vec{u}_z$$

★ loi de BIOT et SAVART

◇ Commençons par faire deux schémas de manière à bien représenter les choses et surtout toutes les grandeurs pertinentes.



◇ La loi de BIOT et SAVART s'écrit :

$$\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \int_{P \in C} d\vec{B}_P(M_{\text{axe}}) \quad \text{avec} \quad d\vec{B}_P(M_{\text{axe}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Ici nous avons

$$d\vec{\ell}_P = d\ell_P \vec{u}_\theta ; \overrightarrow{PM} = -R \vec{u}_r + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad PM^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$$

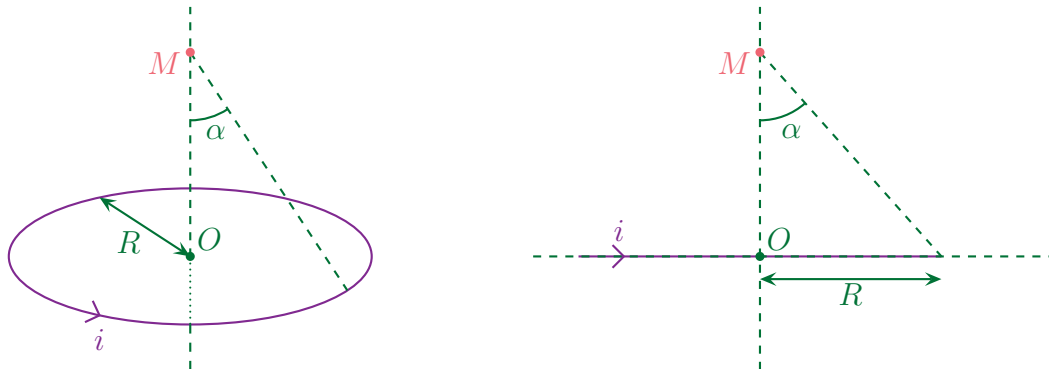
✧ Cela donne

$$\begin{aligned} d\vec{B}_{(M_{\text{axe}})} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{(d\ell_P \vec{u}_\theta) \wedge (-R \vec{u}_r + z \vec{u}_z)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \times (R d\ell_P \vec{u}_z - z d\ell_P \vec{u}_r) \end{aligned}$$

✧ Comme nous savons déjà que le champ $\vec{B}_{(M_{\text{axe}})}$ est porté par \vec{u}_z , nous pouvons nous contenter de ne déterminer que cette composante, ce qui donne :

$$\begin{aligned} B_z(M_{\text{axe}}) &= \vec{B}_{(M_{\text{axe}})} \cdot \vec{u}_z = \int d\vec{B}_{P(M_{\text{axe}})} \cdot \vec{u}_z = \int dB_z(M_{\text{axe}}) \\ &= \int \frac{\mu_0 i}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \times R d\ell_P = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \times \int d\ell_P \\ &= \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2R} \times \left(\frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right)^3 \end{aligned}$$

✧ Résultat que nous écrivons, par habitude sous la forme $\vec{B}_{(M_{\text{axe}})} = \frac{\mu_0 i \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z$ où α est l'angle sous lequel est vu le rayon de la spire depuis le point M .



★ analyse du résultat

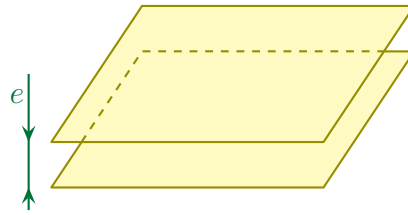
- ✧ Comme pour le segment uniformément chargé en électrostatique, nous pouvons vérifier que le résultat est homogène.
- ✧ L'intérêt de ce calcul est qu'en associant plusieurs boucles circulaires de courant, nous pouvons retrouver le champ sur l'axe d'une bobine finie ou infinie (cf. cours de 1^{re} année).

I.5 – Dispositifs particuliers

I.5.i – le condensateur idéal

★ présentation du modèle

Un condensateur plan idéal est modélisé par deux *armatures* de même surface S séparées de e et pour lequel les effets de bord sont négligés.



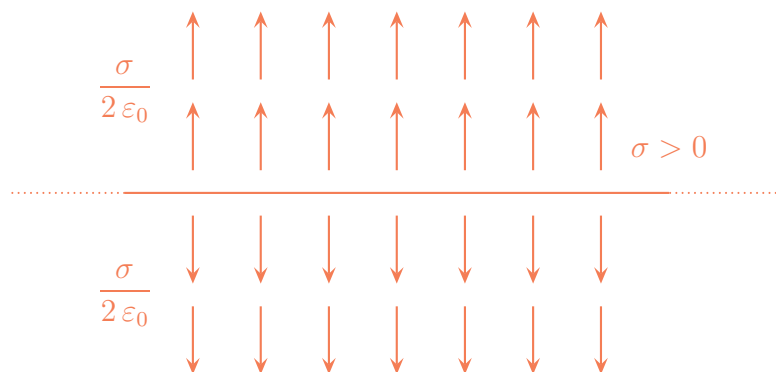
- ◇ Lorsque nous dirons « condensateur idéal » nous sous-entendrons en fait « condensateur *plan* idéal ». Il existe en effet des condensateurs cylindriques pour lesquels les armatures en regard n'ont pas la même surface.
- ◇ Comme les effets de bord sont négligés, nous pouvons faire comme si ces surfaces étaient infinies.

Les deux armatures d'un condensateur portent des charges opposées.

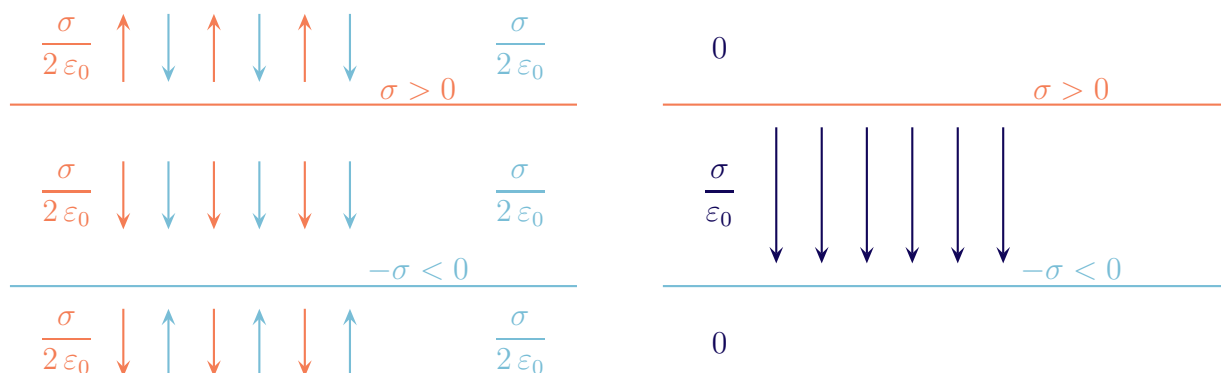
- ◇ Cela vient du fait que le condensateur est un dispositif neutre.
- ◇ Il est parfois possible d'envisager des condensateurs non neutres mais cela dépasse les limites de ce cours.

★ phénoménologie

- ◇ Pour mieux voir ce qui se passe, utilisons le principe de superposition.
- ◇ Tout d'abord, remarquons que les deux armatures :
 - portent des charges opposées ;
 - ont la même surface ;
 - ne présentent pas d'effet de bord.
- ◇ Dans ces conditions :
 - les deux armatures ont des charges surfaciques homogènes ;
 - les deux armatures ont des charges surfaciques opposées.
- ◇ Pour déterminer le champ dans tout l'espace, nous pouvons donc utiliser :
 - le principe de superposition ;
 - les résultats du champ créé par un plan infini.
- ◇ Redessinons tout d'abord le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé.



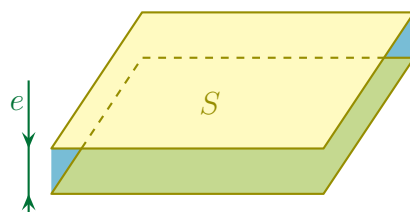
- ◇ Utilisons ces résultats dans le cas des deux armatures (qui ont une taille finie mais créent des champs comme des surfaces infinies).



★ résultats

Pour un condensateur plan idéal le champ électrique :

- est nul à l'extérieur ;
- est uniforme de norme $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à l'intérieur et se dirige des charges positives vers les charges négatives.



◇ Rappelons aussi un résultat de première année.

La capacité d'un condensateur plan idéal s'écrit

$$C = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e} \quad \text{où :}$$

- S est la surface d'une armature ;
- e est la distance entre les deux armatures.

◇ Pour s'en souvenir, rien de tel que :

- savoir que les grandeurs pertinentes du condensateur plan sont S , e (géométrie) et ε_0 (structure) ;
- connaître l'unité de ε_0 , à savoir des F.m^{-1} .

I.5.ii – le solénoïde

★ présentation du modèle

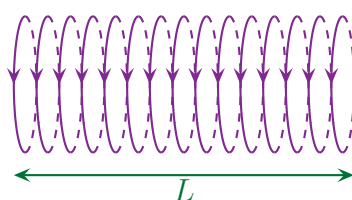
◇ Rappelons d'abord quelques définitions

Un *solénoïde* est un enroulement de fils dont le but est de créer un champ magnétique.



- ◇ La différence entre *bobine* et *solénoïde* est très faible même si, souvent, une bobine revêt un aspect davantage électrocinétique et un solénoïde davantage magnétique, il est fréquent de rencontrer un mot pour un autre (cf. les « bobines d'HELMHOLTZ »).
- ◇ Au lieu de considérer un solénoïde comme *un* seul circuit, nous allons le voir comme une juxtaposition de circuits élémentaires, les spires.

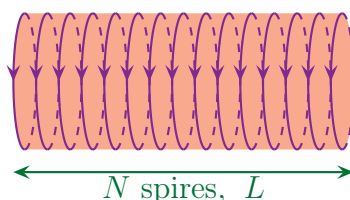
Une *spire* est un tour complet d'un enroulement.



★ résultat

Le champ magnétique créé par un solénoïde :

- est nul à l'extérieur ;
- est uniforme de norme $\mu_0 \times \frac{N}{L} i$ à l'intérieur, le sens étant donné par la règle de la main droite.



II – Du global au local

II.1 – Équation de conservation de la charge

II.1.i – une loi fondamentale de la physique

La charge se conserve.
Il est impossible de détruire ou de créer une charge.

- ◇ La seule chose qui soit possible de faire, c'est de « transformer » une particule neutre en deux particules, une chargée positivement et une chargée négativement. Sauf qu'ici, aucune charge n'a été créée, seules des *particules chargées* l'ont été.

II.1.ii – traduction locale

★ la loi

- ◇ Nous avons déjà vu des lois de conservation (de l'énergie). La loi de EM CONSERVATION de la charge va s'écrire un peu de manière identique.

La loi de conservation de la charge s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0 \quad \text{où :}$$

- $\rho(M)$ est la densité volumique de charge en M ;
- $\vec{j}(M, t)$ est la densité surfacique de courant en volume.

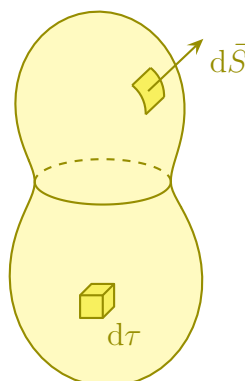
Dans une situation statique, la loi de conservation de la charge s'écrit, avec $\vec{j}(M, t)$ est la densité surfacique de courant en volume,

$$\operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

★ démonstration

🌀 système

- ◇ Considérons un volume \mathcal{V} quelconque et faisons un bilan de charge entre les instants t et $t + dt$.



✧ Commençons par écrire, comme pour tout bilan,

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME}$$

✧ Sauf que nous savons déjà que le terme de création est nul, donc il reste

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE}$$

🕒 variation temporelle

✧ À un instant t quelconque, la charge $Q(t)$ contenue dans \mathcal{V} s'écrit, par extensivité

$$Q(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} dq_P \quad \rightsquigarrow \quad Q(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\rho(P,t) d\tau_P$$

✧ La variation du nombre de particules s'écrit donc, en utilisant un développement limité

$$\delta Q_{\text{var}} = Q(t+dt) - Q(t) \quad \text{et} \quad Q(t+dt) = Q(t) + dt \times \frac{dQ}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta Q_{\text{var}} = \frac{dQ}{dt}(t) dt$$

✧ Avec l'expression de $Q(t)$ cela donne

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{P \in \mathcal{V}} \rho(P,t) d\tau_P \right) dt$$

✧ Et comme le domaine d'intégration \mathcal{V} ne dépend pas du temps, il est possible de « rentrer » la dérivée sous le signe somme ce qui donne

$$\delta Q_{\text{var}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt$$

✧ Nous obtenons finalement

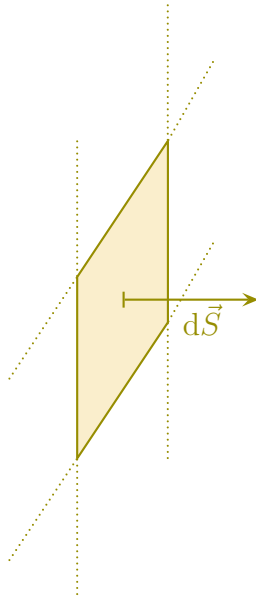
$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt$$

🕒 échange surfacique

✧ L'extensivité de la charge échangée permet d'écrire

$$\delta Q_{\text{éch}} = \oint_{P \in \mathcal{S}} \delta^2 Q_{\text{éch}}(P)$$

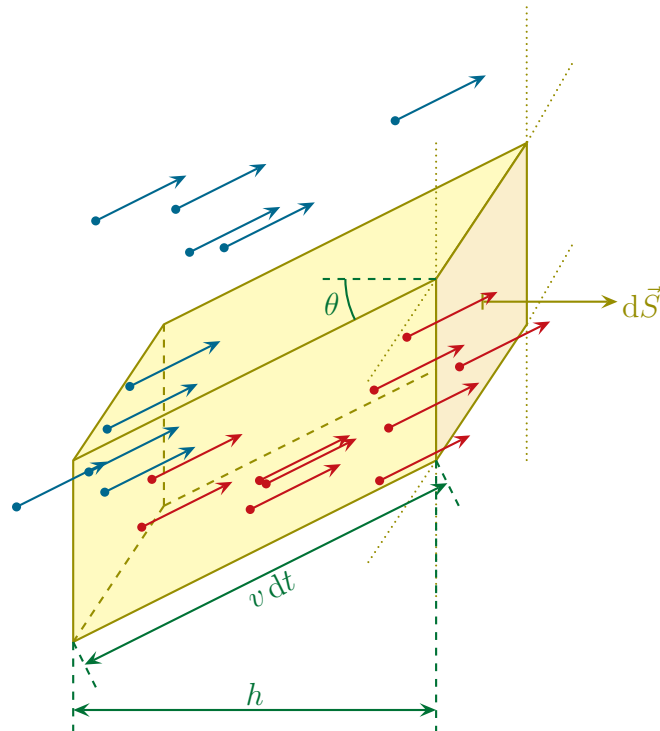
✧ Regardons d'un peu plus près comme s'écrit $\delta^2 Q_{\text{éch}}(P)$. Pour cela considérons une surface élémentaire $d\vec{S}$ et comptons la charge qui passe à travers elle durant dt .



✧ Pour simplifier le raisonnement, considérons :

- qu'il n'y a qu'un type de porteur de charge (électron, ion...);
- que chaque porteur a la charge q ;
- que tous les porteurs ont la même vitesse \vec{v} ;
- que la densité particulière de porteurs vaut n^* .

✧ Dans ces conditions, ne pourront passer par $d\vec{S}$ que les porteurs initialement compris dans le petit cylindre de longueur $v dt$ représenté ci-dessous.



✧ Ci-dessus, nous avons représenté quelques porteurs qui passeront à travers dS (en rouge) et quelques autres qui ne passeront pas (en bleu).

✧ Le nombre de porteurs qui passe effectivement s'écrit donc

$$\delta^2 N_{\text{port}} = n^* \times d\tau \quad \text{avec} \quad d\tau = h \times S = v dt \cos \theta S \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{port}} = n^* v dt S \cos \theta$$

✧ En introduisant la densité surfacique de courant en volume $\vec{j} = n^* q \vec{v} = \rho \vec{v}$, nous avons

$$\delta^2 N_{\text{port}} = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

Le vecteur densité surfacique de courant électrique en volume créé par un type de porteur de charge mobile s'écrit

$$\vec{j} = n^* q \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{où :}$$

- \vec{v} est la vitesse d'ensemble des porteurs ;
- ρ est la charge volumique correspondant à ce porteur ;
- n^* est la densité particulaire de ce porteur ;
- q est la charge d'un porteur.

✧ En comptant la charge *reçue* nous avons donc

$$\delta Q_{\text{éch}} = - \oint_{P \in S} \vec{j}(P,t) \cdot d\vec{S} dt$$

✧ Un petit GREEN – OSTROGRADSKI

$$\delta Q_{\text{éch}} = - \iiint_{P \in V} \text{div } \vec{j}(P,t) d\tau dt$$

✧ Ce qui donne finalement

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = - \iiint_{P \in V} \text{div } \vec{j}(P,t) d\tau dt$$

🌀 rassemblement

✧ En rassemblant nous avons d'abord

$$\iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt = - \iiint_{P \in V} \text{div } \vec{j}(P,t) d\tau dt$$

✧ Comme le volume V est le même pour les deux sommes, nous pouvons les regrouper en une seule

$$\iiint_{P \in V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) + \text{div } \vec{j}(P,t) \right) d\tau_P dt = 0$$

✧ Et comme ce résultat est nul **quel que soit** le volume V c'est que l'intégrande est nul donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

✧ Ce qui est bien le résultat attendu.

II.1.iii – traduction globale

★ cas général

✧ Reprenons la loi de conservation et appliquons GREEN – OSTROGRADSKI

$$\iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) d\tau_P = - \iiint_{P \in V} \text{div } \vec{j}(P,t) d\tau_P \quad \rightsquigarrow \quad \iiint_{P \in V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(P,t) d\tau_P = - \oint_{P \in S} \vec{j}(P,t) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ L'extensivité de la charge et la définition de l'intensité permettent d'écrire

$$\frac{dQ_{\text{dans } \mathcal{V}}}{dt} = -I_{\text{sortant de } \mathcal{V}} \quad \text{ou} \quad \frac{dQ_{\text{dans } \mathcal{V}}}{dt} = +I_{\text{entrant dans } \mathcal{V}}$$

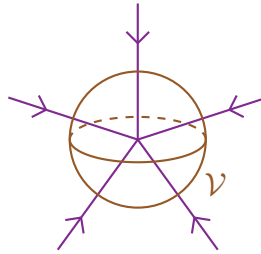
★ cas stationnaire, un cas connu

✧ Dans une situation stationnaire, toutes les grandeurs sont indépendantes du temps. En particulier la charge contenu dans un volume \mathcal{V} quelconque.

✧ Cela nous amène à

$$I_{\text{entrant dans } \mathcal{V}} = 0$$

✧ Nous retrouvons là, ni plus ni moins, que la loi des nœuds. Le volume \mathcal{V} est alors un volume qui « entoure » le nœud.



II.2 – Électromagnétostatique

II.2.i – du théorème de GAUSS à MAXWELL – GAUSS

★ manipulation

✧ Partons du théorème de GAUSS qui s'écrit, pour un volume \mathcal{V} quelconque, délimité par la surface \mathcal{S}

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \iiint_{P \in \mathcal{V}} \rho(P) d\tau_P$$

✧ Regardons agir GREEN – OSTROGRADSKI

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{E}(P) d\tau_P = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} d\tau_P$$

✧ Regroupons-les sous la même somme puisque le volume est le même

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \left(\text{div } \vec{E}(P) - \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} \right) d\tau_P = 0$$

✧ Et comme la somme est nulle **quel que soit** le volume \mathcal{V} , c'est que l'intégrande est nul

$$\text{div } \vec{E}(P) - \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} = 0$$

★ loi de MAXWELL – GAUSS

◇ Cette loi, trouvée en statique, reste valable aussi pour les régimes variables.

LOI DE MAXWELL – GAUSS

$$\operatorname{div} \vec{E}_{(M,t)} = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$$

II.2.ii – de la conservation du flux à MAXWELL – THOMSON

★ manipulation

◇ La conservation du flux magnétique s'écrit, pour une surface fermée \mathcal{S} quelconque

$$\Phi_B = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0$$

◇ En notant \mathcal{V} le volume délimité par la surface \mathcal{S} , GREEN – OSTROGRADSKI conduit à

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{B}(P) d\tau_P = 0$$

◇ Et comme ce résultat est valable quel que soit le volume \mathcal{V} nous avons

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

★ loi de MAXWELL – THOMSON

LOI DE MAXWELL – THOMSON

$$\operatorname{div} \vec{B}_{(M,t)} = 0$$

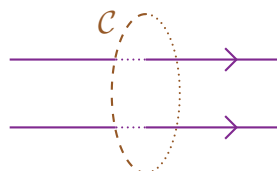
◇ Des quatre lois de MAXWELL que nous verrons, celle-ci est celle dont le nom est le plus controversé. Elle est d'ailleurs souvent appelée « MAXWELL – FLUX ».

II.3 – Circulation et rotationnel

II.3.i – transformer le théorème d'AMPÈRE

★ manipulation

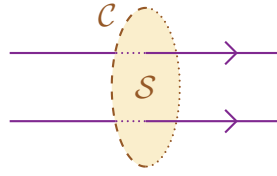
◇ Considérons un contour \mathcal{C} quelconque.



◇ Nous savons alors que le théorème d'AMPÈRE s'écrit

$$C_B = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$$

◇ $i_{\text{enlacé}}$ est le courant qui traverse la surface \mathcal{S} qui s'appuie sur \mathcal{C} .



✧ Nous avons alors, avec la définition de l'intensité

$$i_{\text{enlacé}} = \iint_{P \in S} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Donc, ici, le théorème d'AMPÈRE s'écrit

$$\oint_{P \in C} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in C} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in S} \mu_0 \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Rappelons que GREEN – OSTROGRADSKI transforme une somme sur une surface fermée en somme sur un volume

$$\oint_{P \in S} (\dots) d\vec{S}_P \quad \longrightarrow \quad \iiint_{P \in V} (\text{div}(\dots)) d\tau_P$$

✧ Par analogie, nous allons introduire un opérateur qui transforme une somme sur une ligne fermée en une somme sur une surface

$$\oint_{P \in S} (\dots) d\vec{\ell}_P \quad \longrightarrow \quad \iint_{P \in S} (\overrightarrow{\text{rot}}(\dots)) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Nous avons ainsi

$$\oint_{P \in C} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in S} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \iint_{P \in S} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in S} \mu_0 \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ En regroupant sous le même signe somme

$$\iint_{P \in S} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(P) - \mu_0 \vec{j}(P)) \cdot d\vec{S}_P = 0$$

✧ Et parce que ce résultat est valable quelle que soit la surface S envisagée

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \vec{j} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

★ version statique de la loi de MAXWELL – AMPÈRE

En version **statique**, la loi de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$



Attention ! Ce n'est pas la loi complète, mais seulement une version très utilisée de celle-ci.

II.3.ii – pause rotationnel

★ relation fondamentale

Pour un contour fermé orienté \mathcal{C} définissant une surface élémentaire $d\vec{S}$, la *circulation* du champ vectoriel \vec{A} à travers lle long de \mathcal{C} s'écrit

$$dC \triangleq \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

- ◇ Autrement dit, nous pouvons transformer une sommation sur une ligne en une sommation sur une surface



- ◇ Et cela donne le...

THÉORÈME DE STOKES

Pour un volume \mathcal{V} quelconque délimité par la surface \mathcal{S} nous avons

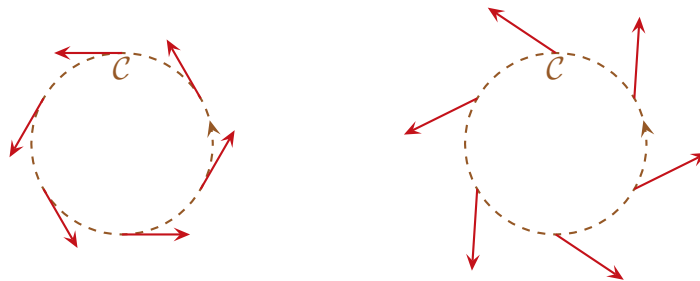
$$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{\text{rot}} \vec{A}$ est appelé le *rotationnel* de \vec{A}

- ◇ Cela revient à dire que, pour savoir ce qui se passe le long de \mathcal{C} ,
- soit il faut regarder ce qui se passe sur le contour lui-même $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$;
 - soit il faut regarder ce qui se passe « à l'intérieur » $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

★ interprétation

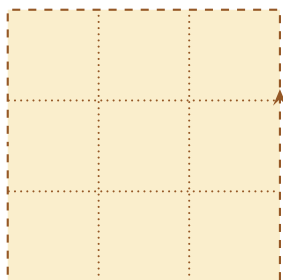
- ◇ Tout comme la divergence, le rotation traduit la structure locale d'un champ de vecteur.
- ◇ Ici le rotationnel est lié à la circulation donc va traduire la manière dont les lignes de champ « tournent » sur elles-mêmes.



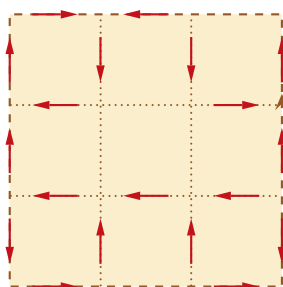
- ◇ Dans les deux cas ci-dessus, les flèches semblent tourner dans le sens du contour donc la circulation sera positive.

★ comment ça marche ?

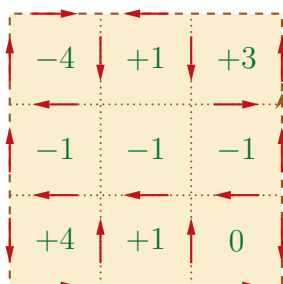
- ◇ Commençons par prendre un contour orienté que nous découperons en 9 cases.



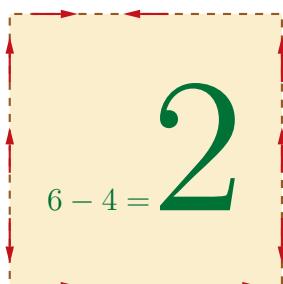
✧ Sur chaque bordure mettons des flèches au hasard



✧ Pour chaque case, comptons les flèches qui tournent dans le sens choisi, *i.e.* ici trigonométrique



✧ Maintenant comptons le nombre de flèches qui tourne dans le bon sens pour le grand contour

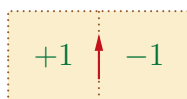


✧ Nous constatons alors que

$$-4 + 1 - 3 - 1 - 1 - 1 + 4 + 1 + 0 = 2$$

✧ Il s'agit là du nombre de flèches circulant dans le sens positif pour le grand contour.

✧ L'explication est simple. Quand nous regardons une flèche séparant deux cases, nous pouvons voir qu'elle compte obligatoirement positivement pour l'une et négativement pour l'autre



✧ Dans ces conditions, lorsque nous sommes le tout, toutes les flèches à l'intérieur ont une contribution nulle et il ne reste que les flèches sur l'extérieur.

★ **expression en coordonnées cartésiennes**

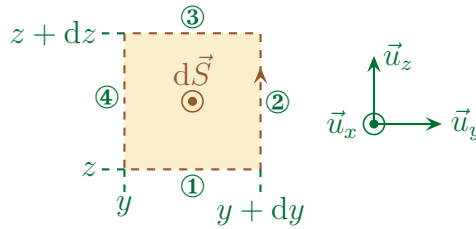
En coordonnées **cartésiennes** le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{\xi}$ s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} = \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad \text{où :}$$

ξ_x, ξ_y et ξ_z sont les composantes de $\vec{\xi}$ sur respectivement \vec{u}_x, \vec{u}_y et \vec{u}_z .

◇ Pour le démontrer, nous allons nous contenter de trouver l'expression de la composante sur \vec{u}_x du rotationnel puis nous aurons les autres par permutation circulaire.

◇ Pour cela considérons une surface élémentaire $d\vec{S} = dS \vec{u}_x = dy dz \vec{u}_x$.



◇ Par extensivité, la circulation sur l'ensemble du contour s'écrit

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

◇ Les vecteurs déplacement élémentaires associés s'écrivent

$$d\ell_1 = +dy \vec{u}_y ; \quad d\ell_2 = +dz \vec{u}_z ; \quad d\ell_3 = -dy \vec{u}_y \quad \text{et} \quad d\ell_4 = -dz \vec{u}_z$$

◇ Cela donne d'abord

$$C = \xi_y(y, z) dy + \xi_z(y + dy, z) dz - \xi_y(y, z + dz) dy - \xi_z(y, z) dz$$

◇ En regroupant astucieusement

$$C = \left(\xi_y(y, z) - \xi_y(y, z + dz) \right) dy + \left(\xi_z(y + dy, z) - \xi_z(y, z) \right) dz$$

◇ Et en utilisant des développements limités

$$C = -\frac{\partial \xi_y}{\partial z}(y, z) dz \times dy + \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(y, z) dy \times dz$$

◇ Ce qui est bien de la forme

$$C = \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} \cdot \vec{u}_x = \frac{\partial \xi_y}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial y}$$

★ **avec nabla**

Avec nabla, le rotationnel se note

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\xi}$$

◇ Comme c'était le cas pour la divergence, le rotationnel... cette notation permet de retrouver l'expression du rotationnel **en coordonnées cartésiennes**.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

★ c'est un opérateur différentiel linéaire

Le rotationnel est un opérateur vectoriel différentiel et

$$[\vec{\text{rot}} \vec{\xi}] = \frac{[\xi]}{\text{longueur}}$$

Avec λ_1 et λ_2 des scalaires quelconques, nous avons

$$\vec{\text{rot}} (\lambda_1 \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\xi}_2) = \lambda_1 \vec{\text{rot}} \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\text{rot}} \vec{\xi}_2$$

◇ La démonstration est exactement la même que celle pour la divergence, à savoir laissée au lecteur.

II.3.iii – \vec{E} est à circulation conservative en statique

★ forme locale

◇ Rappelons qu'en première année a été vue la loi

Le champ électrostatique a une circulation nulle sur tout contour fermé.

◇ En notant \mathcal{C} un contour quelconque, cela se traduit par

$$C_E = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = 0$$

◇ Utilisons le théorème de STOKES en notant \mathcal{S} une surface s'appuyant sur \mathcal{C}

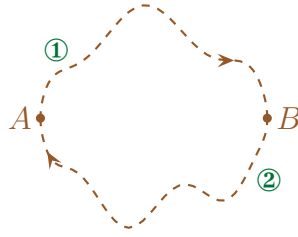
$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0$$

◇ Et comme ceci est vrai quel que soit le contour \mathcal{C} donc quelle que soit la surface \mathcal{S} nous obtenons

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0$$

★ autre façon de voir

◇ Considérons un circuit \mathcal{C} quelconque passant par deux points A et B .



✧ Nous savons, d'après la loi précédente, que la circulation globale sur l'ensemble du contour est nulle soit

$$C = C_1 + C_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad C_1 = -C_2$$

✧ Or

$$C_1 = \int_{A \rightarrow B, P \in \mathcal{L}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \text{et} \quad C_2 = \int_{B \rightarrow A, P \in \mathcal{L}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$$

✧ De plus, en changeant le sens de parcours sur ②, nous pouvons écrire

$$C_2 = \int_{B \rightarrow A, P \in \mathcal{L}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = - \int_{A \rightarrow B, P \in \mathcal{L}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$$

✧ Ce qui nous mène à

$$\int_{A \rightarrow B, P \in \mathcal{L}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{A \rightarrow B, P \in \mathcal{L}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$$

✧ Autrement dit

Lorsqu'un champ est à circulation conservative, la circulation de ce champ entre deux point A et B quelconques de l'espace ne dépend pas du chemin utilisé.

★ du côté des forces en mécanique

✧ Rappelons la définition du travail fourni par une force entre les points A et B

$$W_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}_M$$

✧ Autrement dit, le travail fourni par une force sur la trajectoire $A \rightarrow B$ n'est autre que la circulation de cette force sur ce chemin.

✧ Au regard de ce qui précède nous pouvons donc dire que :

- ➔ une force conservative est une force à circulation conservative ;
- ➔ un champ de force conservatif est un champ de force de rotationnel nul.

✧ C'est ainsi qu'il est possible de définir un champ de force conservatif par

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} = 0$$

✧ Nous venons de trouver là une propriété intéressante à savoir que lorsque le rotationnel est nul pour un champ de vecteur, il est possible de l'écrire sous la forme d'un gradient, à savoir

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} \iff \vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

✧ Le signe « $-$ » est conventionnel. Mathématiquement il ne sert à rien.

II.4 – Les équations de MAXWELL

II.4.i – les équations à connaître

◇ Les équations qui suivent constituent des lois fondamentales au sens où elles ne se démontrent pas.

Les quatre équations de MAXWELL sont	
$\operatorname{div} \vec{E}_{(M,t)} = \frac{\rho_{(M,t)}}{\varepsilon_0}$	équation de MAXWELL – GAUSS
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_{(M,t)} = -\frac{\partial \vec{B}_{(M,t)}}{\partial t}$	équation de MAXWELL – FARADAY
$\operatorname{div} \vec{B}_{(M,t)} = 0$	équation de MAXWELL – THOMSON
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}_{(M,t)} = \mu_0 \left(\vec{j}_{(M,t)} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{(M,t)}}{\partial t} \right)$	équation de MAXWELL – AMPÈRE

→ $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$ est la **permittivité du vide**;
 → $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la **perméabilité du vide**.

II.4.ii – structure

- ◇ Ces lois sont absolument extraordinaires car leur formulation même est extrêmement symétrique.
- ◇ En effet nous voyons immédiatement que nous avons :
 - deux équations en \vec{E} (MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – FARADAY) ;
 - deux équations en \vec{B} (MAXWELL – THOMSON et MAXWELL – AMPÈRE).
- ◇ Mathématiquement nous voyons aussi qu'il y a :
 - deux équations en divergence (MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON) ;
 - deux équations en rotationnel (MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE).
- ◇ Mais ce n'est pas tout, nous voyons aussi que nous avons :
 - deux équations de couplage, *i.e.* qui relient \vec{E} et \vec{B} (MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE) ;
 - deux équations de structure intrinsèque (MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON).
- ◇ En regardant attentivement nous voyons aussi que nous avons :
 - deux équations avec des sources matérielles (MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – AMPÈRE) ;
 - deux équations sans source matérielle (MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – THOMSON).
- ◇ Enfin, nous avons aussi :
 - deux équations invariantes en statique (MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON) ;
 - deux équations dynamiques (MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE).

II.4.iii – interprétation physique

★ première lecture

- ◇ Il faut bien comprendre que ces lois, fondamentales, sont à la base de **toute** l'électromagnétisme.
- ◇ La seule chose qui manque c'est en fait l'interaction entre la matière et le champ électro-magnétique :

- la matière subit-elle avant tout le champ (*via* la force de LORENTZ ou la loi d'OHM par exemple) ?
 - ou bien la matière est-elle essentiellement une source de champ (*via* MAXWELL – GAUSS ou MAXWELL – AMPÈRE) ?
- ◇ Bien sûr, en « vrai » c'est toujours un peu des deux, mais dans la grande majorité des cas, il est possible de ne considérer qu'un seul aspect.

★ l'aspect temporel

- ◇ Comme nous pouvons le constater, il y a deux équations de MAXWELL qui changent en statique.
- ◇ C'est ainsi que dans le cas « parfaitement » statique, les équations de MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE s'écrivent

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- ◇ De même dans le cas dynamique, ces équations s'écrivent sous leurs formes complètes, *i.e.*

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- ◇ Entre les deux, il existe un cas. Un cas où la situation n'est pas stationnaire mais *quasiment*. Alors nous verrons qu'une seule des deux équations voit son terme temporel disparaître et cela donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- ◇ Bien sûr, il s'agit là d'une approximation. L'approximation d'un régime quasi-stationnaire.

★ lecture

- ◇ Réécrivons les lois

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

- ◇ Cette écriture a une signification intrinsèque qu'il ne faut pas oublier.
- ◇ En effet, même si mathématiquement c'est entièrement juste, nous ne verrons *jamais*² lois écrites sous la forme

2. En tout cas l'auteur garantit qu'il ne les a **jamais** vues sous cette forme, dans aucune des collections de cours qu'il possède – que cette collection soit « de prépa » ou « anglo-saxonne » – ni sur internet.

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \operatorname{div} \vec{E} \\
-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \\
0 &= \operatorname{div} \vec{B} \\
\mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}
\end{aligned}$$

- ✧ Loin d'être une simple habitude, cela révèle en fait une caractéristique très forte de ces quatre équations.
- ✧ En effet, tout comme en mathématiques, à la fin de la recherche d'une solution, nous n'écrivons pas $3 = x$ mais bien $x = 3$, ici les équations de MAXWELL s'écrivent sous la forme

conséquence sur (\vec{E}, \vec{B}) = source du champ (\vec{E}, \vec{B})

- ✧ Cela signifie que :
 - ➔ \vec{B} peut être source de champ \vec{E} via l'équation de MAXWELL – FARADAY ;
 - ➔ \vec{E} peut être source de champ \vec{B} via l'équation de MAXWELL – AMPÈRE.
- ✧ Bien sûr, dans le cas dynamique, toutes les lois sont vraies de manière équivalentes, mais pour les situations où nous aurons juste à regarder un effet au premier ordre, il ne faudra utiliser la loi en adéquation avec l'interprétation ci-dessus.

III – Faire parler les équations de MAXWELL

III.1 – Manipulation des opérateurs vectoriels

- ✧ La manipulation des opérateurs vectoriels est un préliminaire indispensable à l'utilisation un peu formelle des équations de MAXWELL pour la simple et bonne raison qu'elles sont écrites avec des opérateurs vectoriels.
- ✧ Les manipulations qui suivent ne sont pas compliquées en elles-mêmes mais nécessitent un peu de pratique car elles ne sont pas toujours intuitives.

III.1.i – liste des opérateurs

- ✧ Rappelons tout d'abord quels sont les opérateurs vectoriels.

★ nabla

- ✧ Nabla est la notation suivante

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

- ✧ Rappelons que **ce n'est qu'une notation!**
- ✧ En « vrai » nabla n'est pas un vecteur. Ce n'est même pas un opérateur vectoriel. C'est, en vrai, une manière de noter les opérateurs vectoriels qui permet, cadeau bonus, de retrouver les expressions de ces opérateurs en **coordonnées cartésiennes**.

★ gradient

L'opérateur vectoriel <i>gradient</i> réalise la transformation suivante		
$\overrightarrow{\text{grad}} V$ $\vec{\nabla} V$:	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> champ scalaire « nombre » </div> \longrightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> champ vectoriel « vecteur » </div>

- ✧ Quelques lois dans lesquelles il apparaît :
 - ➔ définition de l'énergie potentielle $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$;
 - ➔ définition du potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

★ divergence

L'opérateur vectoriel <i>divergence</i> réalise la transformation suivante		
$\text{div } \vec{E}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$:	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> champ vectoriel « vecteur » </div> \longrightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> champ scalaire « nombre » </div>

- ✧ La loi phare dans laquelle apparaît la divergence est une loi de conservation :
 - ➔ loi de conservation de l'énergie $\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_q = 0$;
 - ➔ loi de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$.
- ✧ À cela, nous pouvons, bien sûr, rajouter les deux lois de MAXWELL :

- la loi de MAXWELL – GAUSS $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$;
 → la loi de MAXWELL – THOMSON $\text{div } \vec{B} = 0$.

★ rotationnel

L'opérateur vectoriel *rotationnel* réalise la transformation suivante

$$\begin{array}{ccc} \vec{\text{rot}} \vec{E} & : & \boxed{\begin{array}{c} \text{champ vectoriel} \\ \text{« vecteur »} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{champ vectoriel} \\ \text{« vecteur »} \end{array}} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} & & \end{array}$$

◇ Les deux lois que nous connaissons qui le font intervenir sont deux lois de MAXWELL :

- la loi de MAXWELL – FARADAY $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;
 → la loi de MAXWELL – AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$.

III.1.ii – deux opérateurs pour un champ

★ laplacien scalaire

L'opérateur vectoriel *laplacien* (ou « laplacien scalaire ») réalise la transformation suivante

$$\begin{array}{ccc} \Delta V & : & \boxed{\begin{array}{c} \text{champ scalaire} \\ \text{« nombre »} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{champ scalaire} \\ \text{« nombre »} \end{array}} \\ \vec{\nabla}^2 V & & \end{array}$$

◇ Le laplacien apparaît :

- dans l'équation de diffusion $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$;
 → dans l'équation de propagation d'un champ scalaire $\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

★ laplacien vectoriel

L'opérateur vectoriel *laplacien vectoriel* réalise la transformation suivante

$$\begin{array}{ccc} \vec{\Delta} \vec{E} & : & \boxed{\begin{array}{c} \text{champ vectoriel} \\ \text{« vecteur »} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{champ vectoriel} \\ \text{« vecteur »} \end{array}} \end{array}$$

Le *laplacien vectoriel* est défini par

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \triangleq \vec{\text{grad}} \text{div} - \vec{\Delta}$$

◇ Cela nous permettra un jour de pouvoir trouver l'équation de propagation du champ électromagnétique qui sera, sans surprise

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

- ◇ Pour déterminer l'expression du laplacien vectoriel, il faut :
 - soit repasser par la définition précédente ;
 - soit utiliser la relation **extraordinaire** suivante dans le cas des coordonnées cartésiennes.
- ◇ Dans le cas des coordonnées cartésiennes et **uniquement dans le cas des coordonnées cartésiennes** nous avons

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$$

★ d'autres compositions

- ◇ Deux compositions très utiles.

Le rotationnel d'un gradient est toujours nul

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{grad}} (\text{npq}) \right) = \vec{0}$$

La divergence d'un rotationnel est toujours nul

$$\text{div} \left(\vec{\text{rot}} (\text{npq}) \right) = 0$$

- ◇ En repensant à ce que signifient divergence et rotationnel, cette relation n'est pas très surprenante.
- ◇ Nous les utiliserons en fait ces deux relation de la manière suivante.

Le rotationnel d'un champ vectoriel est nul si et seulement si ce champ dérive d'un gradient

$$\vec{\text{rot}} \vec{\xi} = \vec{0} \iff \vec{\xi} = \vec{\text{grad}} (\text{qqch})$$

La divergence d'un champ vectoriel est nul si et seulement si ce champ dérive d'un rotationnel

$$\text{div} \vec{\xi} = 0 \iff \vec{\xi} = \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{qqch}} \right)$$

★ avec le gradient

- ◇ Il y a un opérateur composé (intéressant) avec le gradient.
- ◇ La force subie par un dipôle \vec{p} plongé dans un champ \vec{E} non uniforme s'écrit

$$\vec{f} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{E}$$

- ◇ Avec la notation nabla, c'est assez facile de retrouver l'expression de cet opérateur **en cartésienne**

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times E \quad \rightsquigarrow \quad \vec{f} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}$$

◇ Il faut donc appliquer **à chaque composantes** de \vec{E} l'opérateur

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- ◇ 3 dérivées par composantes et trois composantes, cela fait 9 dérivées à calculer... Heureusement que la plupart du temps, dans les cas pratiques, nous aurons plein de simplifications qui nous ramèneront à une ou deux dérivées à calculer.
- ◇ Sur le même modèle il y a un opérateur que nous utiliserons beaucoup en mécanique des fluides c'est

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$$

◇ Et comme nous utiliserons cet opérateur sur le champ de vitesse lui-même, cela nous donnera la relation suivante

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

◇ Nous aurons l'occasion d'en reparler.

★ morale

- ◇ Même si ce qui précède peut revendiquer le titre d'opérateur vectoriel à part entière, nous les avons plutôt vus comme des *composés* d'opérateurs « simples » pour insister sur le fait que leur nouveauté réside dans le mélange et non dans l'existence.
- ◇ Malgré cela, lorsqu'il faudra effectivement utiliser le laplacien, nous ne repasserons pas systématiquement par la divergence du gradient.

III.1.iii – deux champs, un opérateur, plusieurs possibilités

◇ Voici quelques exemples de petites « formules » existantes où α et β sont des champs scalaires et $\vec{\xi}$ et $\vec{\chi}$ des champs vectoriels.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}} (\alpha \times \beta) &= \alpha \times \overrightarrow{\text{grad}} \beta + \beta \times \overrightarrow{\text{grad}} \alpha \\
\text{div} (\alpha \times \vec{\xi}) &= \alpha \times \text{div} \vec{\xi} + \overrightarrow{\text{grad}} \alpha \cdot \vec{\xi} \\
\overrightarrow{\text{rot}} (\alpha \times \vec{\xi}) &= \alpha \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} + \overrightarrow{\text{grad}} \alpha \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} \\
\text{div} (\vec{\xi} \wedge \vec{\chi}) &= \vec{\chi} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\chi} \\
\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{\xi} \wedge \vec{\chi}) &= \vec{\xi} \times \text{div} \vec{\chi} - \vec{\chi} \times \text{div} \vec{\xi} + \left(\vec{\chi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{\xi} - \left(\vec{\xi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{\chi}
\end{aligned}$$

✧ La moralité de tout cela, c'est que lorsqu'il y a deux champs (scalaires et / ou vectoriels) dans un même opérateur :

- il existe des « formules » permettant de les séparer ;
- ces « formules » sont disponibles quelque part ;
- ces « formules » ne sont pas intuitives.

III.1.iv – STOKES et les autres

★ théorème de STOKES

✧ Rappelons le théorème de STOKES applicable à n'importe quel contour \mathcal{C} fermé sur lequel s'appuie une surface \mathcal{S}

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{\xi} \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} \cdot d\vec{S}_P$$

★ formule de KELVIN

🔗 énoncé

- ✧ Le théorème de STOKES permet de transformer une somme sur un contour en une somme sur une surface pour un champ vectoriel.
- ✧ La formule de KELVIN permet de faire la même chose mais pour un champ scalaire.

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \xi \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi$$

🔗 démonstration

- ✧ L'idée consiste à transformer le champ scalaire en champ vectoriel en multipliant ξ par un vecteur \vec{u} quelconque.
- ✧ Notons

$$\vec{\kappa} \stackrel{\text{not}}{=} \oint_{P \in \mathcal{C}} \xi \cdot d\vec{\ell}_P$$

✧ Cela donne d'abord, en développant \vec{u} sous le signe somme et en utilisant STOKES

$$\left(\oint_{P \in \mathcal{C}} \xi \cdot d\vec{\ell}_P \right) \cdot \vec{u} = \oint_{P \in \mathcal{C}} (\xi \vec{u}) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{u} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} (\xi \vec{u}) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Avec une des formules de compositions vue précédemment nous obtenons

$$\vec{\kappa} \cdot \vec{u} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \left(\vec{\xi} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + (\overrightarrow{\text{grad}} \xi) \wedge \vec{u} \right) \cdot d\vec{S}_P$$

◇ Et comme \vec{u} est uniforme

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{u} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \left((\overrightarrow{\text{grad}} \xi) \wedge \vec{u} \right) \cdot d\vec{S}_P$$

◇ Avec la relation du produit mixte nous pouvons écrire le résultat sous la forme

$$\left((\overrightarrow{\text{grad}} \xi) \wedge \vec{u} \right) \cdot d\vec{S}_P = \left(d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi \right) \cdot \vec{u} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{u} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \left(\left(d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi \right) \cdot \vec{u} \right)$$

◇ En refactorisant par \vec{u}

$$\vec{\kappa} \cdot \vec{u} = \left(\iint_{P \in \mathcal{S}} \left(d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi \right) \right) \cdot \vec{u}$$

◇ Comme ce résultat est valable quel que soit \vec{u} cela prouve que

$$\vec{\kappa} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \left(d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi \right) \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in \mathcal{C}} \xi \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} d\vec{S}_P \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi \quad \text{C.Q.F.D.}$$

III.1.v – GREEN – OSTROGRADSKI & co

★ théorème de GREEN – OSTROGRADSKI

◇ Rappelons le théorème de GREEN – OSTROGRADSKI applicable à n'importe quelle surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V}

$$\oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\xi} \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{\xi} \, d\tau_P$$

★ formule du gradient

◇ Cette formule permet de transformer une somme sur une surface en une somme sur un volume pour un champ scalaire.

FORMULE DU GRADIENT

Soit un champ scalaire ξ quelconque. Alors pour toute surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V}

$$\oint_{P \in \mathcal{S}} \xi \, d\vec{S}_P = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} (\xi) \, d\tau_P$$

◇ Cette formule nous servira notamment pour déterminer des résultantes de forces pressantes

$$-\oint P \, d\vec{S} = - \iiint \overrightarrow{\text{grad}} P \, d\tau_P$$

★ **formule du rotationnel**

◇ Il y a d'autres lois similaires comme la formule du rotationnel

$$\oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\xi} \wedge d\vec{S}_P = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\xi} d\tau_P$$

★ **vecteur surface**

Pour une surface fermée \mathcal{S} quelconque

$$\oint_{P \in \mathcal{S}} d\vec{S}_P = \vec{0}$$

◇ Pour un contour \mathcal{C} quelconque, toutes les surfaces qui s'appuient dessus ont le même vecteur surface global défini par

$$\vec{S} = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{\ell}_P \quad \text{où} \quad O \text{ point quelconque}$$

III.2 – Équation de conservation de la charge

III.2.i – **compatibilité avec MAXWELL**★ **retrouvailles**

◇ Reprenons l'équation de MAXWELL – AMPÈRE et calculons sa divergence sans oublier qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel *linéaire*

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right)$$

◇ Comme la divergence d'un rotationnel est toujours nul, cela nous conduit à

$$0 = \text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

◇ La divergence est un opérateur différentiel, tout comme $\frac{\partial}{\partial t}$, nous pouvons donc les intervertir

$$0 = \text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\text{div} \vec{E})}{\partial t}$$

◇ Rajoutons la loi MAXWELL – GAUSS

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad 0 = \text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

◇ Et, enfin, en simplifiant par ε_0

$$0 = \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

◇ Il s'agit là, ni plus ni moins de l'équation de conservation de la charge.

★ morale

- ◇ Alors que nous avons *postulé* la conservation de la charge, nous nous apercevons maintenant que nous pouvons la *démontrer* grâce aux lois de MAXWELL.
- ◇ Épistémologiquement, cela change complètement le statut de la loi de conservation de la charge : d'un fondement physique elle devient « résultat » secondaire...

III.2.ii – de l'importance du courant de déplacement

★ définition

- ◇ Reprenons l'équation de MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- ◇ Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d) \quad \text{avec} \quad \vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- ◇ Le terme \vec{j}_d est donc homogène à un courant électrique sans être un courant électrique...

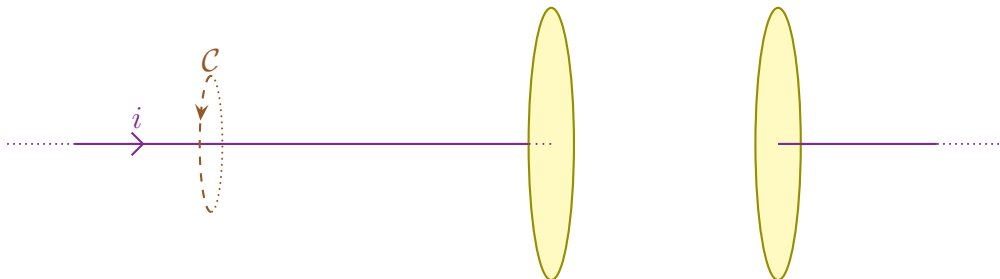
Le terme $\vec{j}_d \stackrel{\text{not}}{=} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ de l'équation de MAXWELL – AMPÈRE est appelé *courant de déplacement*.

- ◇ Le terme en \vec{j} est un terme qui correspond à des déplacements *réels* de charges à l'endroit considéré. La plupart du temps ces déplacements de charges sont associés à un courant électrique dans un fil électrique.
- ▲ Les courants dits *liés* dans les diélectriques correspondent bien à des mouvements de charges, donc à un vrai courant électrique, mais avec des porteurs qui restent globalement sur place.

★ rôle dans un cas particulier

🌀 situation

- ◇ Imaginons un condensateur dans l'ARQS et calculons la circulation C de \vec{B} sur le contour dessiné.



- ◇ D'après le théorème de STOKES cette circulation peut s'écrire, avec \mathcal{S} une surface *quelconque* s'appuyant sur le contour

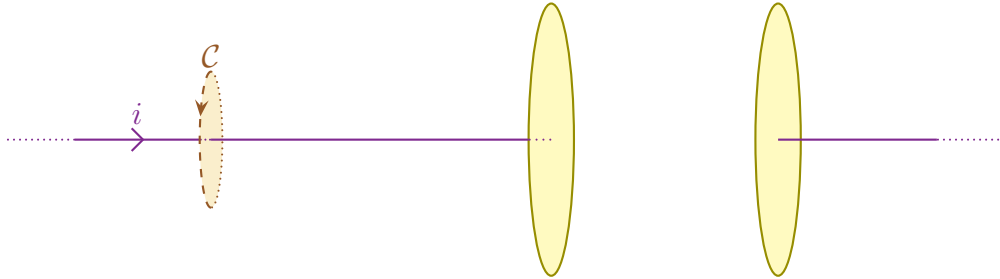
$$C = \oint_{P \in C} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE nous permet alors d'écrire

$$C = \mu_0 \iint_{P \in \mathcal{S}} \left(\vec{j}(P) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_P$$

🔗 premier calcul

✧ Choisissons d'abord comme surface \mathcal{S} la plus simple, celle qui correspond au disque délimité par \mathcal{C} .



- ✧ Sur cette surface, il n'y a ni champ \vec{E} ni courant \vec{j} en dehors de la zone d'intersection avec le fil.
- ✧ De plus, nous montrerons dans la dernière partie que l'hypothèse « ARQS » permet de négliger **dans un conducteur ohmique** le courant de déplacement devant le courant électrique.
- ✧ Dans ces conditions, il reste

$$C = \mu_0 \iint_{P \in \mathcal{S}} (\vec{j}(P) + \text{néglig}) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \mu_0 \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

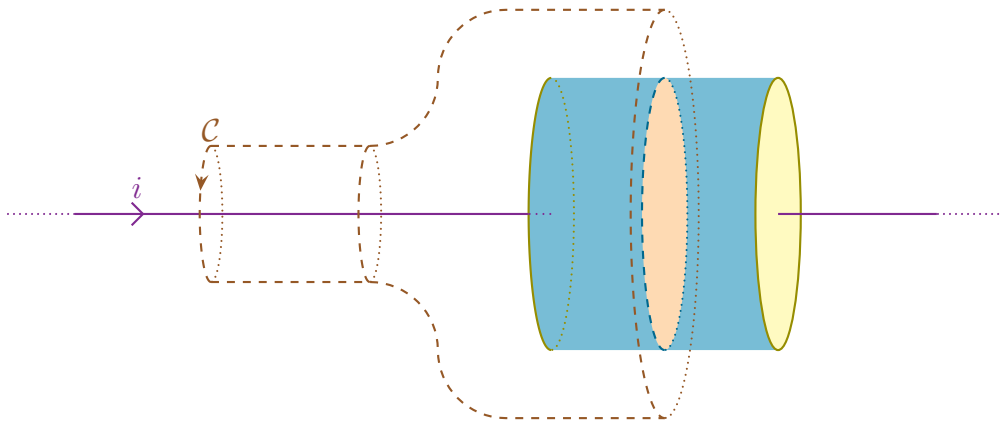
✧ Il s'agit là ni plus ni moins que de la définition de l'intensité. Nous trouvons alors

$$C = \mu_0 i$$

- ✧ Cela ressemble beaucoup au théorème d'AMPÈRE et c'est normal : c'est le théorème d'AMPÈRE. Sauf que cela ne nous permettrait pas de déterminer entièrement le champ magnétique par manque de connaissance sur sa structure (pas assez de symétrie et d'invariance).

🔗 deuxième calcul

✧ Choisissons maintenant une surface \mathcal{S} qui, en s'appuyant toujours sur \mathcal{C} , entoure désormais une armature du condensateur et coupe l'espace intermédiaire de manière parfaitement plane.



- ✧ Cette surface ressemble un peu à celle d'une bulle de savon qui ne s'est pas encore détachée comme cette bulle géante³

3. Source : http://cdn.banlieusardises.com/wp/media/martine_bulle_geante.jpg.



◇ Quel que soit le point P de cette surface, sans approximation aucune, nous pouvons dire que le courant \vec{j} est nul. Il reste donc

$$C = \mu_0 \iint_{P \in \mathcal{S}} \left(\vec{0} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad C = \mu_0 \iint_{P \in \mathcal{S}} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P$$

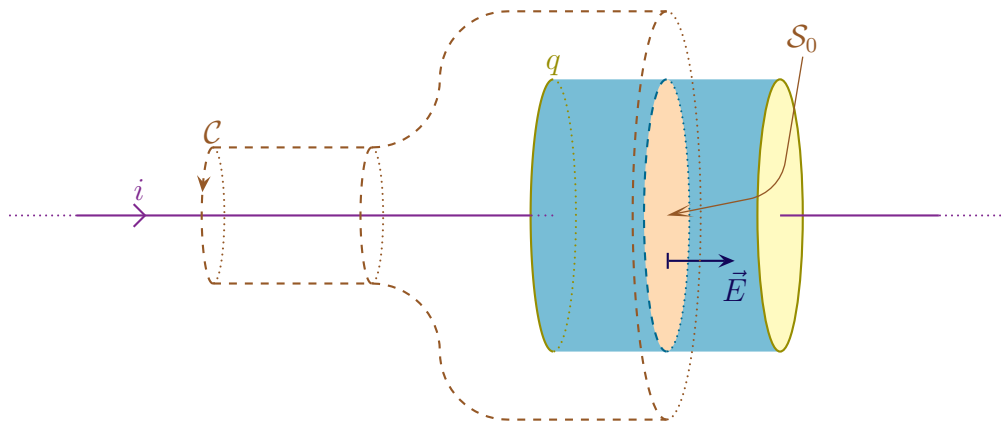
◇ Comme la surface \mathcal{S} est indépendante du temps, nous pouvons sortir la dérivée par rapport au temps

$$C = \mu_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \right)$$

◇ Considérons le condensateur comme idéal.

◇ Alors, de champ \vec{E} :

- n'est présent qu'entre les deux armatures ;
- est orthogonal à la surface de contrôle ;
- est de norme $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.



◇ Cela nous donne, parce que le champ est uniforme sur la zone d'intégration \mathcal{S}_0

$$\iint_{P \in \mathcal{S}_0} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad \rightsquigarrow \quad \iint_{P \in \mathcal{S}_0} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

◇ Par définition de la charge surfacique (qui est uniforme pour un condensateur idéal), nous avons, en notant q la charge portée par l'armature de gauche

$$\sigma S = q$$

◇ En rassemblant le tout, nous obtenons

$$C = \mu_0 \varepsilon_0 \times \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\varepsilon_0} \right) \quad \rightsquigarrow \quad C = \mu_0 \times \frac{dq}{dt}$$

◇ Et nous retrouvons là, à nouveau, la définition de l'intensité utilisée en électrocinétique

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad C = \mu_0 i$$

◇ Sans le courant de déplacement, nous n'aurions pas pu retrouver ce résultat.

★ historiquement

- ◇ Historiquement, les lois de l'électromagnétisme posaient problème et conduisaient à des paradoxes, notamment le théorème d'AMPÈRE.
- ◇ C'est alors qu'intervient MAXWELL qui *postulat* l'existence de ce courant de déplacement.
- ◇ La théorie est alors devenue cohérente et a été conservée même si, à l'époque, MAXWELL a essayé de *démontrer* ses lois à partir d'un modèle de l'espace et de la matière, modèle que la science académique a complètement laissé de côté à présent.

III.3 – Potentiels du champ

III.3.i – naissance

★ résultat

Il existe un champ vectoriel \vec{A} appelé *potentiel vecteur* tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Il existe un champ scalaire V appelé *potentiel électrique* tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

★ démonstration

◇ Le potentiel vecteur découle immédiatement de l'équation de MAXWELL – THOMSON

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

◇ Pour le potentiel électrique, partons de l'équation de MAXWELL – FARADAY et incluons-y le potentiel vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t}$$

◇ Nous pouvons intervertir dérivée spatiale et dérivée temporelle, ce qui donne, en utilisant la linéarité du rotationnel,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

- ◇ Comme nous avons un rotationnel nul, c'est qu'il dérive d'un gradient que nous écrirons arbitrairement sous la forme

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- ◇ Ce qui est bien le résultat attendu.

★ interprétation

- ◇ Dans le cas statique, nous avons $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ ce qui nous assure de l'existence d'un potentiel.
 ◇ Cette existence n'est pas anodine puisque la circulation de \vec{E} entre deux points A et B quelconques de l'espace donne

$$C_{AB} = \int_{P \in AB} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad C_{AB} = - \int_{P \in AB} \overrightarrow{\text{grad}} V(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad C_{AB} = - \int_{P \in AB} dV_P$$

- ◇ Cela nous conduit à

$$C_{AB} = -(V_B - V_A) \quad \rightsquigarrow \quad C_{AB} = U_{AB}$$

- ◇ La circulation de \vec{E} entre deux points n'est autre que la tension entre ces points.
 ◇ Que la circulation totale soit nulle sur n'importe quel contour fermé n'est autre que... la loi des mailles qui dit que, sur une maille, la somme des tensions est nulle.
 ◇ Sauf que l'hypothèse initiale est que le dispositif soit en régime stationnaire.
 ◇ Cela signifierait-il qu'en régime non stationnaire, il n'est plus possible d'appliquer la loi des mailles ?
 ◇ Eh bien non ! La loi des mailles n'est pas valide ni dans le cas dynamique, ni même dans l'ARQS !
 ◇ Pourquoi l'utilisons-nous alors à foison ? Parce que la non validité vient du phénomène d'induction (voir chapitre suivant) et que ce phénomène n'a pas vraiment été rencontré en 1^{re} année.
 ◇ Mais le plus fort, c'est que même lorsque nous aborderons l'induction, nous nous arrangerons pour créer des modèles qui permettront d'utiliser la loi des mailles, alors même qu'elle sera fausse !
 ▲ Le générateur de f.é.m. e_{ind} rajouté « de force » dans le modèle électrocinétique du circuit n'existe évidemment pas, mais est là pour faire écrire le terme manquant dans l'expression de la circulation de \vec{E} sur un circuit.

★ convention de jauge

Les potentiels \vec{A} et V sont définis à quelque chose près.

- ◇ Les lois font intervenir \vec{E} et \vec{B} , *i.e.* les seules grandeurs physiques pertinentes sont \vec{E} et \vec{B} et **pas** \vec{A} et V .
 ◇ Dans ces conditions, si \vec{A} est un potentiel vecteur, alors $\vec{A}_0 = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ est aussi un potentiel vecteur, quel que soit ϕ .
 ◇ En effet

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_0 = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_0 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \phi \right)$$

- ◇ Comme \vec{A} est un potentiel vecteur et que le rotationnel d'un gradient est toujours nul

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_0 = \vec{B} + \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_0 = \vec{B}$$

- ✧ Ce qui prouve bien que \vec{A}_0 est *aussi* un potentiel vecteur.
- ✧ Il est donc important de définir des *conventions* pour obtenir des potentiels vecteurs \vec{A} et V parfaitement définis et sans ambiguïté.
- ✧ Ces conventions, pour les potentiels \vec{A} et V s'appellent des *jauges*.
- ✧ La jauge la plus connue est celle pour V en statique qui est « le potentiel V est nul là où le champ est nul » ce qui revient le plus souvent (mais pas toujours) à dire « le potentiel V est nul à l'infini ».

III.3.ii – cas statique

★ équations de POISSON

En régime statique, le potentiel électrique obéit à l'*équation de POISSON*

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

En régime statique, le potentiel vecteur obéit à l'*équation de POISSON*

$$\vec{\Delta} \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$$

★ elles viennent des équations de MAXWELL

- ✧ Pour l'équation de POISSON vérifiée par V , partons simplement de l'équation de MAXWELL – GAUSS

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- ✧ Pour un régime statique, le champ \vec{E} s'écrit

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{0}$$

- ✧ Ce qui donne

$$-\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \vec{E} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

- ✧ Pour l'équation vérifiée par \vec{A} faisons comme nous ferons toujours, à savoir exprimer de deux manières différentes $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})$.
- ✧ Tout d'abord la définition du laplacien scalaire nous permet d'écrire

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

- ✧ Pour la deuxième manière, utilisons la définition de \vec{A} suivi de la loi de MAXWELL – AMPÈRE

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- ✧ En régime statique nous avons donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{0}) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

✧ En rassemblant le tout, cela donne

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

✧ Pour arriver à l'équation, nous allons imposer la condition de jauge $\text{div } \vec{A} = 0$ et ainsi

$$-\vec{\Delta} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Delta} \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

★ solution déjà connue de l'équation de POISSON en potentiel

✧ En première année a été vue la manière de calculer un potentiel **lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini**, *i.e.* lorsqu'il est possible d'imposer $V(\infty) = 0$.

En régime statique, lorsqu'il n'y a pas de charge à l'infini, le potentiel électrostatique V s'écrit

$$V(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P) d\tau_P}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

✧ Cette loi est déclinable en version surfacique, linéique et discrète

$$V(M) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(P) dS_P}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad V(M) = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\lambda(P) d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad \text{et} \quad V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

✧ Par pure analogie, nous pouvons dire que le potentiel vecteur peut s'écrire, s'il n'y a pas de courant à l'infini

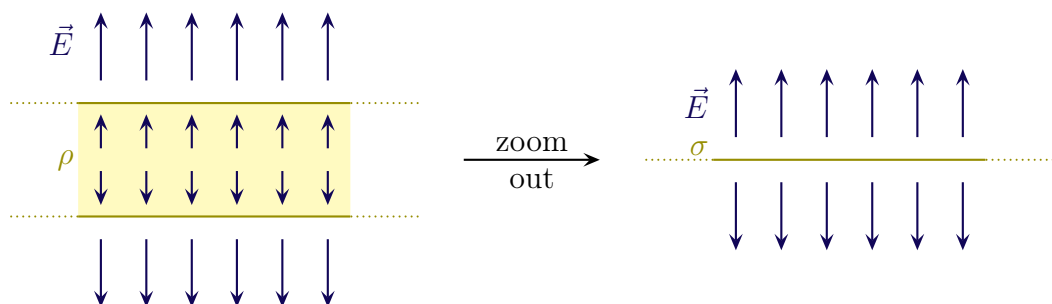
$$\vec{A}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P) d\tau_P}{4\pi PM}$$

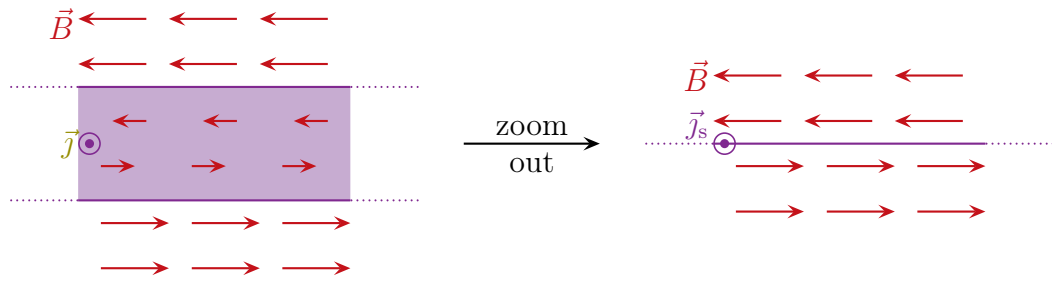
✧ Cette expression n'a que peu d'intérêt puisque nous ne l'utiliserons jamais pour calculer \vec{A} . En effet cette loi représente trois intégrales (une pour chaque composante de \vec{A}) ce qui n'est pas rapide à calculer. Mais en plus, après, pour avoir \vec{B} , la grandeur physique intéressante, il faudrait calculer un rotationnel, ce qui est loin d'être simple... Autant calculer directement \vec{B} avec une grosse intégrale *via* la loi de BIOT et SAVART par exemple.

III.4 – Relations de passage

III.4.i – situation

✧ Regardons ce qui se passe lorsque nous nous éloignons de plans épais.





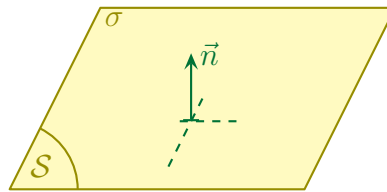
- ✧ Les champs ne sont plus définis sur les plans infiniment fins.
- ✧ Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux discontinuités *apparentes* des champs \vec{E} et \vec{B} .

III.4.ii – discontinuité de la composante normale de \vec{E}

★ résultat

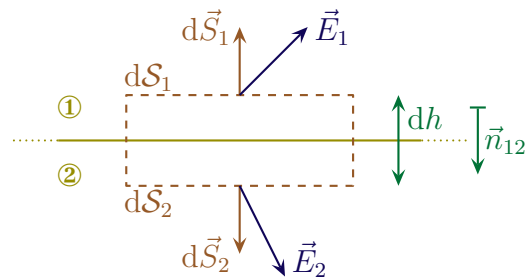
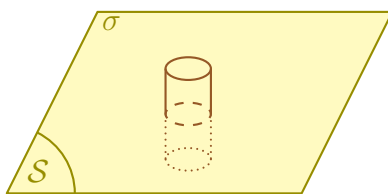
Il y a discontinuité de la composante normale du champ \vec{E} à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



★ démonstration

- ✧ Zoomons sur une surface chargée, de manière à ce qu'elle soit bien plane et que la densité surfacique σ soit uniforme.
- ✧ Choisissons la surface de GAUSS représentée.



- ✧ Notons ① la partie au-dessus et considérons un petit cylindre de hauteur h .
- ✧ Calculons $\Phi = \Phi_1 + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_2$.
- ✧ Lorsque la hauteur dh vers 0, nous avons $\Phi_{\text{lat}} \rightarrow 0$ car dans l'expression du flux, nous n'avons pas $\|\vec{E}\| \nearrow +\infty$.
- ✧ Il reste :
 - ➔ $\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E_{n1} dS$;
 - ➔ $\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -E_{n2} dS$.

- ✧ Et ainsi le théorème de GAUSS donne : $E_{n1} dS - E_{n2} dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$ soit :

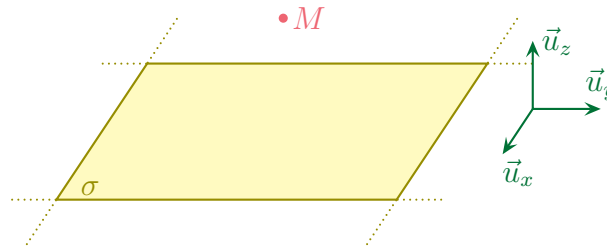
$$E_{\perp,1} - E_{\perp,2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- ✧ Ce qui revient bien au résultat énoncé.

★ retrouver le champ créé dans tout l'espace par un plan

🕒 situation

✧ Reprenons le plan uniformément chargé étudié en page 29.



✧ L'analyse nous avait permis de déterminer que le champ \vec{E} est tel que

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad E(-z) = -E(z)$$

🕒 utiliser MAXWELL – GAUSS

✧ L'équation de MAXWELL – GAUSS s'écrit

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

✧ Ici la charge *volumique* est :

- ➔ nulle partout ;
- ➔ non définie en $z = 0$.

✧ Cela nous permet d'écrire, compte-tenu de la forme particulière de \vec{E}

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dE}{dz}(z) = 0$$

✧ L'intégration est alors aisée et nous trouvons, là aussi en prenant en compte le résultat de l'analyse

$$E(z) = C^{\text{te}} = E_0 \quad \text{pour } z > 0 \quad \text{et} \quad E(z) = -E_0 \quad \text{pour } z < 0$$

🕒 finir avec la relation de passage

✧ La relation de passage nous dit que

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

✧ Prenons $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$. Cela implique que :

- ➔ le milieu ①, celui qui est « avant » dans le sens de $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$, est le demi-espace $z < 0$;
- ➔ le milieu ②, celui qui est « après » dans le sens de $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$, est le demi-espace $z > 0$.

✧ La relation de passage devient alors

$$\vec{u}_z \cdot (E_0 \vec{u}_z - (-E_0 \vec{u}_z)) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad 2 E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

✧ Et nous retrouvons bien le résultat attendu

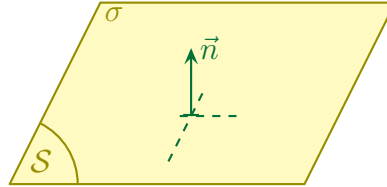
$$E_0 = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}$$

III.4.iii – continuité de la composante tangentielle de \vec{E}

★ résultat

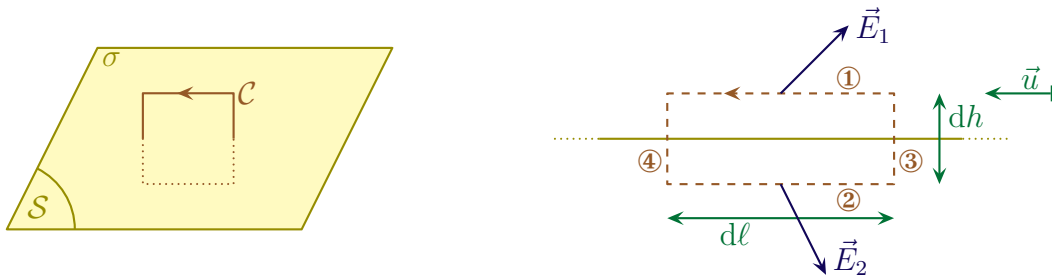
Il y a continuité de la composante tangentielle du champ \vec{E} à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$



★ idée de démonstration

◇ Considérons un contour infinitésimal \mathcal{C} autour d'une surface chargée de telle sorte que le champ soit uniforme au dessus et en dessous.



◇ Calculons la circulation sur ce contour et montrons que $C_{\text{tot}} = 0$ lorsque la hauteur $dh \rightarrow 0$.

◇ L'équation de MAXWELL – FARADAY combinée au théorème de STOKES nous permet d'écrire

$$C = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C = \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow C = \oint_{P \in \mathcal{S}} -\frac{\partial B}{\partial t}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

◇ Comme le champ magnétique est fini, sa dérivée l'est aussi et donc

$$|C| \leq \left(\frac{dB}{dt} \right)_{\text{max}} \times S \rightsquigarrow |C| \leq \left(\frac{dB}{dt} \right)_{\text{max}} \times h \times dl$$

◇ Et quand h tend vers 0 nous trouvons bien

$$|C| \leq 0 \rightsquigarrow C = 0$$

◇ De plus, lorsque dh tend vers 0, nous pouvons aussi négliger les deux circulations sur les deux bords ③ et ④ car le champ n'est pas infini sur le plan (cf. plan infini épais).

◇ Il reste donc :

$$\rightarrow C_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = E_{u1} d\ell;$$

$$\rightarrow C_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = -E_{u2} d\ell;$$

◇ Soit, en regroupant les résultats : $E_{x1} d\ell - E_{x2} d\ell = 0$ et ainsi $E_{u1} = E_{u2}$.

◇ Ce résultat étant vrai pour n'importe quel \vec{u} nous obtenons donc

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2}$$

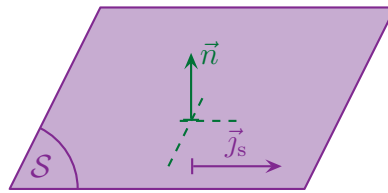
- ◇ Cette relation peut alors se traduire, de manière plus générale, par la forme évoquée précédemment, à savoir

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

III.4.iv – continuité de la composante normale de \vec{B}

Il y a continuité de la composante normale du champ \vec{B} à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$



- ◇ La démonstration est laissée au lecteur.
 ◇ Pour celle-ci, il « suffit » de s'inspirer de celle faite pour montrer la discontinuité de \vec{E} à travers une surface chargée et en utilisant la version globale de la loi de MAXWELL – THOMSON

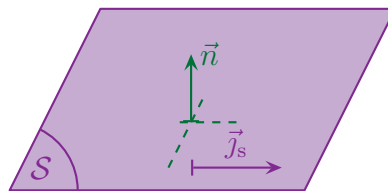
$$\Phi_B = 0$$

III.4.v – discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B}

★ résultat

Il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ \vec{B} à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

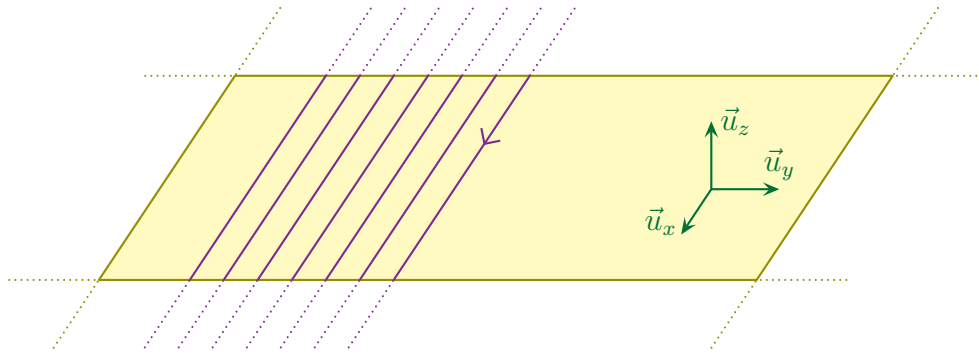


- ◇ La démonstration est laissée au lecteur courageux qui s'inspirera de celle faite pour montrer la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} mais avec la loi de MAXWELL – AMPÈRE.

★ retrouver le champ créé dans tout l'espace par une nappe de courant

🕒 situation

- ◇ Reprenons la nappe infinie de courant étudiée en page 32.



✧ L'analyse nous avait permis de déterminer que le champ \vec{B} est tel que

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad B(-z) = -B(z)$$

🔗 utiliser MAXWELL – AMPÈRE

✧ L'équation de MAXWELL – GAUSS en statique s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

✧ Ici la densité surfacique de courant en *volume* est :

- ➔ nulle partout ;
- ➔ non définie en $z = 0$.

✧ Cela nous permet d'écrire, compte-tenu de la forme particulière de \vec{B}

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = 0$$

✧ Pour exprimer le rotationnel, nous allons utiliser nabla, **mais en le simplifiant tout de suite** compte-tenu de l'analyse.

✧ Nous avons ainsi

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

✧ Il reste ainsi

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \rightsquigarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{dB_y}{dz} \vec{u}_x$$

✧ L'intégration est alors aisée et nous trouvons, là aussi en prenant en compte le résultat de l'analyse

$$B(z) = C^{\text{te}} = -B_0 \quad \text{pour } z > 0 \quad \text{et} \quad B(z) = B_0 \quad \text{pour } z < 0$$

🔗 finir avec la relation de passage

✧ La relation de passage nous dit que

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

✧ Prenons $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$. Cela implique que :

- ➔ le milieu ①, celui qui est « avant » dans le sens de $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$, est le demi-espace $z < 0$;
- ➔ le milieu ②, celui qui est « après » dans le sens de $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$, est le demi-espace $z > 0$.

✧ La relation de passage devient alors

$$\vec{u}_z \cdot \left(-B_0 \vec{u}_y - (B_0 \vec{u}_y) \right) = \mu_0 j_s \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad 2 B_0 = -\mu_0 j_s$$

✧ Et nous retrouvons bien le résultat attendu

$$B_0 = -\frac{\mu_0 j_s}{2}$$

III.4.vi – bilan

★ utilité

- ✧ Comme nous l'avons vu sur les deux exemples des plans infini, l'utilisation des équations de MAXWELL combinées aux relations de passage permet de retrouver très vite des champs \vec{E} ou \vec{B} .
- ✧ L'avantage tient essentiellement au fait qu'il n'y a pas besoin de surface de GAUSS ou de contour d'AMPÈRE (ni de courant enlacé).
- ✧ L'autre avantage est qu'il est aussi possible d'étendre cette méthode à des cas non statique.
- ✧ L'inconvénient est que cela marche bien essentiellement pour les cas où les coordonnées naturelles sont les coordonnées cartésiennes.
- ✧ Dans le cas d'autres coordonnées, comme les expressions des opérateurs vectoriels div ou $\overrightarrow{\text{rot}}$ ne sont pas à connaître, il est parfois aussi long de faire la méthode intégrale (avec surface de GAUSS ou contour d'AMPÈRE) que la méthode locale.

★ pour les retenir

- ✧ Un bon moyen mnémotechnique pour retrouver ces 4 relations de passage consiste à suivre le processus suivant :
 - ➔ écrire les équations de MAXWELL avec nabla ;
 - ➔ remplacer $\vec{\nabla}$ par \vec{n}_{12} ;
 - ➔ remplacer les dérivées temporelles par $\vec{0}$;
 - ➔ remplacer les champs restants par $\left(\overrightarrow{\text{champ}_2} - \overrightarrow{\text{champ}_1} \right)$;
 - ➔ remplacer les sources volumiques par des sources surfaciques.
- ✧ Voyons ce que cela donne pour l'équation de MAXWELL – GAUSS

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{n}_{12} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\dots) \\ (\dots) &\longrightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

✧ Pour l'équation de MAXWELL – FARADAY

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\longrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\dots) \\ (\dots) &\longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge \vec{E} = \vec{0} \longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \end{aligned}$$

✧ Pour l'équation de MAXWELL – THOMSON

$$\text{div } \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{n}_{12} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

✧ Et enfin pour l'équation de MAXWELL – AMPÈRE

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &\longrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\dots) \\ (\dots) &\longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\dots) \\ (\dots) &\longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j} \longrightarrow \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s \end{aligned}$$

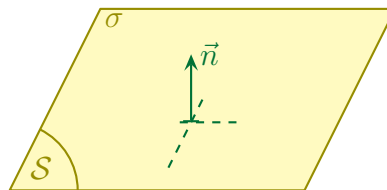
✧ Bien sûr, avec l'habitude, il est possible de faire toutes les étapes de tête et en une seule fois.

★ autre version

🗨 énoncés

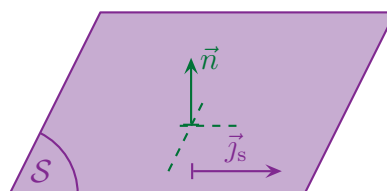
Il y a discontinuité du champ \vec{E} à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$



Il y a discontinuité du champ \vec{B} à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = (\mu_0 \vec{j}_s) \wedge \vec{n}_{12}$$



🔍 les retrouver

✧ Pour la relation sur \vec{E} c'est immédiat puisque la seule discontinuité se fait sur la normale, est dans le sens \vec{n}_{12} et de norme $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

✧ Pour la relation sur \vec{B} calculons $\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \right)$.

✧ La formule du double produit vectoriel donne d'abord

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \right) = \left(\vec{n}_{12} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \right) \times \vec{n}_{12} - (\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_{12}) \times \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right)$$

✧ Avec la relation de passage sur la composante normale de \vec{B} nous avons ainsi

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \right) = - \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right)$$

✧ D'un autre côté, la relation de passage sur la composante tangentielle de \vec{B} nous permet d'écrire

$$\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{n}_{12} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) \right) = \vec{n}_{12} \wedge (\mu_0 \vec{j}_s)$$

✧ En rassemblant, cela donne

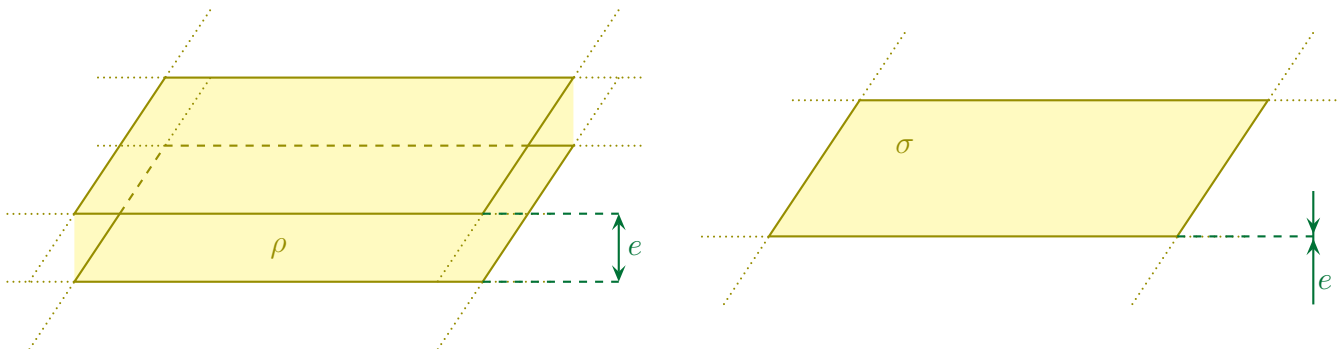
$$- \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) = \vec{n}_{12} \wedge (\mu_0 \vec{j}_s) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = (\mu_0 \vec{j}_s) \wedge \vec{n}_{12}$$

🔍 les différences entre les deux versions

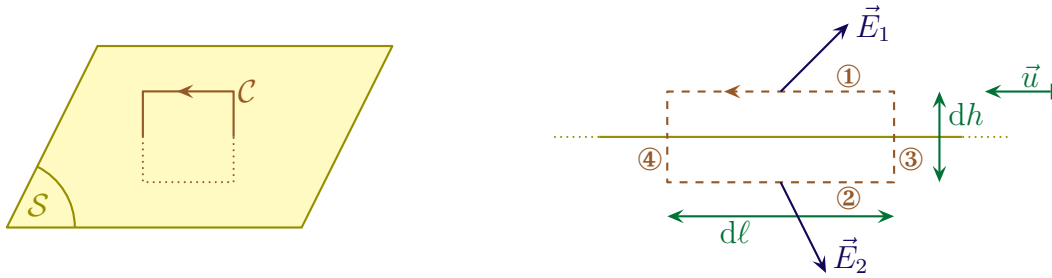
- ✧ Techniquement, les relations écrites ci-dessus permettent de trouver l'expression d'un champ (\vec{E} ou \vec{B}) d'un côté d'une surface connaissant la densité surfacique de courant et le champ de l'autre côté.
- ✧ Physiquement cette situation est assez rare puisque la plupart du temps ce sont les courants et les charges surfaciques qui « s'adaptent » aux champs. Il vaut mieux alors utiliser une des quatre relations vues au début.

★ validité

- ✧ Pour que ces relations de passage soient valides, il faut respecter certaines conditions.
- ✧ La première condition c'est d'avoir, tout d'abord, une distribution surfacique de charge ou de courants.
- ✧ Cela implique que la distance d'observation ou, autrement dit, l'ordre de grandeur des distances caractéristiques du problème, soit très grande devant l'épaisseur de la répartition volumique de charges ou de courant.



- ✧ D'un autre côté, pour montrer ces relations, nous avons considéré des petites surfaces (ou des petits contours) dont la hauteur tendait vers 0.



- ◇ Il faut donc, pour que la démonstration reste valide, que, quel que soit h **même très petit**, h conserve une taille suffisante pour autoriser la modélisation surfacique.
- ◇ En d'autres termes, en notant e l'épaisseur initiale de la distribution volumique et D l'échelle d'observation (*i.e.* la grandeur caractéristique du problème), il faut pouvoir assurer

$$e \ll h \quad \text{et} \quad h \ll D \quad \rightsquigarrow \quad e \lll D$$

- ◇ En d'autre termes, nous avons les deux résultats suivants

Les champs \vec{E} et \vec{B} ne peuvent être discontinus qu'à l'échelle macroscopique.

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont toujours continus à l'échelle mésoscopique.

👉 *Remarque.* Nous ne parlerons pas des champs à l'échelle microscopique car, pour les décrire, il est nécessaire d'utiliser une autre théorie.

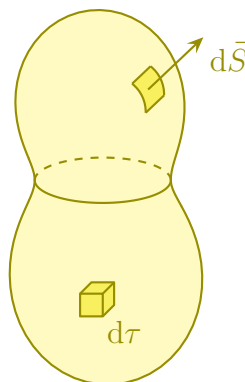
- ◇ En pratique, cela signifie que, pour savoir s'il est possible, ou non, d'utiliser les relations de passage, il sera nécessaire **d'analyser** le problème pour voir si le sujet propose, impose ou laisse sous-entendre une modélisation macroscopique ou mésoscopique.

III.5 – Aspect énergétique

III.5.i – bilan énergétique

★ situation, principe

- ◇ Faisons un bilan de puissance (pour changer) entre t et $t + dt$ pour **le champ électromagnétique** contenu un volume \mathcal{V} quelconque.



- ◇ Nous noterons :

- u_{em} l'énergie volumique contenue dans le champ ;
- \mathcal{P} la puissance *créée* pour le champ ;

→ \vec{J} la densité surfacique de puissance électromagnétique en volume.

◇ Commençons par écrire, comme pour tout bilan,

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME}$$

★ variation

◇ Par extensivité, l'énergie contenue dans le volume \mathcal{V} s'écrit

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} u_{\text{em}}(P) \, d\tau_P$$

◇ La puissance associée à la variation s'écrit donc

$$P_{\text{var}}(t) = \frac{dU_{\text{em}}}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad P_{\text{var}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{P \in \mathcal{V}} u_{\text{em}}(P) \, d\tau_P \right)$$

◇ Comme le volume \mathcal{V} est fixe, nous pouvons rentrer la dérivée sous le signe somme, ce qui donne

$$P_{\text{var}}(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(P) \, d\tau_P$$

◇ Et donc

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(P) \, d\tau_P$$

★ échange

◇ L'échange se fait à travers la surface. Et par extensité de la puissance *reçue*, nous avons

$$P_{\text{éch}} = - \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

◇ Et avec GREEN – OSTROGRADSKI cela donne

$$P_{\text{éch}} = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{J}(P) \cdot d\tau_P$$

◇ Soit

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{J}(P) \cdot d\tau_P$$

★ création

◇ Par simple extensivité de la puissance créée, nous avons

$$P_{\text{créée}}(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}(P) \, d\tau_P$$

◇ Ce qui donne tout de suite

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}(P) \, d\tau_P$$

★ **rassemblement**

◇ En rassemblant nous avons déjà

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(P) d\tau_P = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{J}(P) \cdot d\tau_P + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}(P) d\tau_P$$

◇ En passant tout sous le même signe somme cela donne

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \left(\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(P) + \text{div } \vec{J}(P) - \mathcal{P}(P) \right) d\tau_P = 0$$

◇ Et puisque ce résultat est valable quel que soit le volume \mathcal{V}

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M) + \text{div } \vec{J}(M) - \mathcal{P}(M) = 0$$

◇ Finalement nous arrivons, sans surprise, à la même forme de « loi de conservation » que d'habitude

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M) + \text{div } \vec{J}(M) = \mathcal{P}(M)$$

◇ Il reste maintenant à savoir comment s'expriment les grandeurs intéressantes à savoir u_{em} , \vec{J} et \mathcal{P} .

III.5.ii – **puissance cédée à la matière**★ **expression**

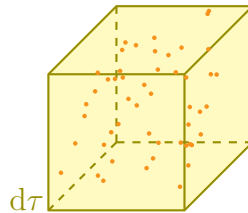
La puissance volumique créée par la matière (et donc fournie au champ électromagnétique) s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{matière} \rightarrow \text{champ}} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

★ **démonstration**

◇ Pour le démontrer, nous allons plutôt chercher la puissance volumique $\mathcal{P}' = -\mathcal{P}$ correspondant à la puissance volumique fournie par le champ à la matière.

◇ Considérons un volume $d\tau$ dans lequel il y a des charges (mobiles ou non)



◇ Une charge située en M_i contenue dans $d\tau$ subit la force de LORENTZ

$$\vec{f}_L = q \left(\vec{E}(M_i) + \vec{v}_i \wedge \vec{B}(M_i) \right)$$

◇ La puissance que cette charge reçoit s'écrit donc

$$p_{\text{re\c{u}e},i} = \vec{v}_i \cdot \vec{f}_L \quad \rightsquigarrow \quad P_{\text{re\c{u}e}} = q \left(\vec{v}_i \cdot \vec{E}(M_i) + \vec{v}_i \cdot \left(\vec{v}_i \wedge \vec{B}(M_i) \right) \right)$$

✧ Ce qui donne, pour *une* charge

$$p_{\text{re\c{e}ue},i} = q \vec{v}_i \cdot \vec{E}(M_i)$$

✧ L'ensemble de la puissance reçue $\delta P_{\text{re\c{e}ue}}$ par toutes les charges s'écrit, par extensivité

$$\delta P_{\text{re\c{e}ue}} = \sum_i p_{\text{re\c{e}ue},i} \quad \rightsquigarrow \quad \delta P_{\text{re\c{e}ue}} = \sum_i \left(q \vec{v}_i \cdot \vec{E}(M_i) \right)$$

✧ À cette échelle (au moins mésoscopique), nous pouvons considérer que le champ est uniforme, ce qui implique

$$\vec{E}(M_i) = \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \delta P_{\text{re\c{e}ue}} = \sum_i \left(q \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E}$$

✧ Et nous voyons apparaître là le courant électrique élémentaire

$$\vec{j} d\tau = \sum_i \left(q \vec{v}_i \right) \quad \rightsquigarrow \quad \delta P_{\text{re\c{e}ue}} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

✧ La puissance volumique reçue par la matière s'écrit donc

$$\mathcal{P}' = \frac{\delta P_{\text{re\c{e}ue}}}{d\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}' = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

✧ Ce qui conduit au résultat attendu

$$\mathcal{P}_{\text{matière} \rightarrow \text{champ}} = -\mathcal{P}' \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{matière} \rightarrow \text{champ}} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

III.5.iii – équation de POYNTING

★ expression

L'équation de POYNTING s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

★ démonstration

✧ Pour montrer l'équation de POYNTING, nous allons partir de $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ et le réécrire autrement.

✧ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

✧ En multipliant scalairement par \vec{E}

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

✧ Utilisons maintenant une relation entre opérateurs vectoriels

$$\operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$$

◇ Cela donne

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \left(-\operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

◇ Avec MAXWELL – FARADAY nous arrivons

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

◇ Et enfin

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right)$$

◇ Il s'agit bien là de l'équation attendue.

III.5.iv – interprétation

★ les grandeurs énergétiques

Le terme $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ est interprété comme l'énergie volumique contenue dans le champ électromagnétique.

◇ De manière assez naturelle (évidente ?) :

- le terme $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ est associé à l'énergie volumique contenue dans le champ électrique ;
- le terme $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ est associé à l'énergie volumique contenue dans le champ magnétique.

Le terme $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est interprété comme la densité surfacique de courant de puissance électromagnétique et s'appelle le *vecteur de POYNTING*.

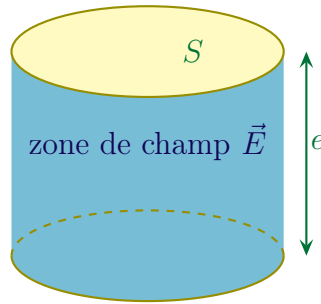
- ◇ Pourquoi cette précaution de vocabulaire ? Pourquoi dire « est interprété comme » et non « est » ?
- ◇ Parce-que l'interprétation vient en fait d'une simple identification entre deux formes identiques d'équations, à savoir

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

- ◇ Rien ne nous assure de manière certaine que nous puissions identifier deux termes *en même temps*. Il n'y en aurait qu'un, oui, sûrement (et encore), mais deux... et en plus des termes non indépendants...
- ◇ Ceci étant, nous allons quand même faire cette identification car elle « marche bien ».

★ condensateur idéal

◇ Considérons un condensateur idéal.



◇ D'après l'expression de l'énergie volumique contenue dans le champ électrique et sachant que le champ électrique est uniforme pour un condensateur idéal, nous avons

$$\mathcal{E}_{\text{condo}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \times \text{volume}$$

◇ De plus nous avons, en notant U la tension aux bornes du condensateur

$$E = \frac{U}{e} \quad \text{et} \quad \text{volume} = S \times e \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{condo}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{e^2} \times S e$$

◇ Nous arrivons ainsi à

$$\mathcal{E}_{\text{condo}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{e} U^2$$

◇ Or nous savons déjà que $\mathcal{E}_{\text{condo}} = \frac{1}{2} C U^2$ avec C la capacité du condensateur.

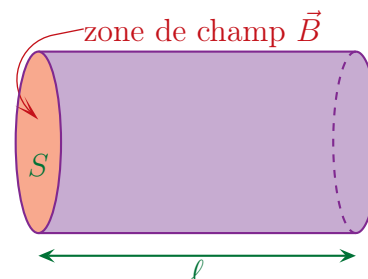
◇ Nous pouvons alors dire, par identification, que la capacité d'un condensateur idéal s'écrit

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

◇ C'est bien le résultat connu. Cela prouve que l'expression de l'énergie électrique volumique est cohérente.

★ bobine idéale

◇ Considérons une bobine idéale.



◇ D'après l'expression de l'énergie volumique contenue dans le champ magnétique et sachant que celui-ci est uniforme dans une bobine idéale, nous avons

$$\mathcal{E}_{\text{bob}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \times \text{volume}$$

✧ De plus nous savons que le champ s'écrit $B = \mu_0 j_s$ soit, en notant N le nombre de spires

$$j_s = \frac{N i}{\ell} \quad \text{et} \quad \text{volume} = S \ell \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{bob}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{\mu_0 \ell^2} \times S \ell$$

✧ Nous arrivons ainsi à

$$\mathcal{E}_{\text{bob}} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \times i^2$$

✧ Or nous savons déjà que $\mathcal{E}_{\text{bob}} = \frac{1}{2} L i^2$ avec L l'inductance de la bobine.

✧ Nous pouvons alors dire, par identification, que l'inductance d'une bobine idéale s'écrit

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

✧ Il s'agit là d'un résultat que nous aurons l'occasion de retrouver dans le chapitre *induction* et qui montre la cohérence de l'expression de l'énergie magnétique volumique.

☆ contre-exemples

✧ En fait il existe des exemples (simples) pour lesquels l'interprétation du vecteur de POYNTING pose quelques difficultés.

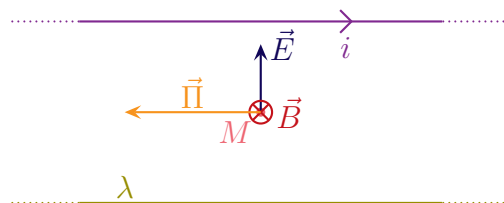
🌀 fils parallèles

✧ Considérons deux fils parallèles :

- ➔ l'un parcouru par un courant d'intensité i créant un champ magnétostatique ;
- ➔ l'autre uniformément chargé de charge linéique λ et créant un champ électrostatique.

✧ Considérons un point M entre ces deux fils, un point pour lequel les deux champs existent de manière indéniable.

✧ Représentons-les.

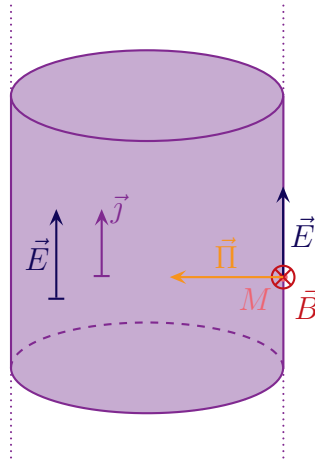


✧ Nous voyons alors qu'en M le vecteur de POYNTING n'est pas nul ce qui laisserait sous-entendre que de l'énergie est en train de bouger.

✧ Dans une situation parfaitement statique, que de l'énergie bouge, c'est étrange...

🌀 fil épais

✧ Considérons maintenant une situation moins originale, à savoir un fil épais parcouru par un courant en volume \vec{j} uniforme.



- ✧ Dans le cas d'un fil électrique usuel, il s'agit d'un conducteur ohmique et la loi d'OHM locale nous permet d'affirmer qu'il existe un champ électrique \vec{E} uniforme dans le conducteur.
- ✧ De plus ce courant est à l'origine d'un champ magnétique orthoradial⁴.
- ✧ En regardant un point M à la surface de conducteur, nous voyons que le vecteur de POYNTING est non nul et **radial**.
- ✧ Alors qu'intuitivement il serait logique de dire que l'énergie suit le conducteur, ici le vecteur de POYNTING laisse à penser que l'énergie qui se dissipe dans le fil vient de l'extérieur de celui-ci, comme si l'énergie ne voyageait pas par les fils...

★ à retenir

Le vecteur de POYNTING \vec{S} s'interprétera toujours comme la densité surfacique de courant de puissance électromagnétique en volume dans le cas des ondes électromagnétiques.

- ✧ Dans les situations stationnaires, il peut apparaître, parfois, des paradoxes.

4. Le calcul complet est fait dans le cours de première année.

IV – Utilisation des équations de MAXWELL

IV.1 – Réécrire MAXWELL dans l'ARQS

IV.1.i – situation

Un dispositif de taille caractéristique D est dit dans l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires) lorsque, soumis à une contrainte de durée caractéristique T , la condition suivante est réalisée

$$D \ll cT \quad \text{où}$$

c est la célérité de la lumière.

- ◇ Ce n'est ni plus ni moins que la définition de l'ARQS vue en électrocinétique en première année.
- ◇ Cette définition implique que \vec{E} et \vec{B} sont uniformes à l'échelle du dispositif, la propagation y est instantanée.

IV.1.ii – champ \vec{B} dans l'ARQS

★ résultat

Les équations de MAXWELL vérifiées par \vec{B} s'écrivent, dans l'ARQS,

$\text{div } \vec{B}_{(M,t)} = 0$	équation de MAXWELL – THOMSON
$\vec{\text{rot}} B_{(M,t)} = \mu_0 \vec{j}_{(M,t)}$	équation de MAXWELL – AMPÈRE

- ◇ Autrement dit

Dans l'ARQS, le courant de déplacement est toujours négligeable devant $\vec{\text{rot}} \vec{B}$.

- ◇ En pratique, cela signifie que

Dans l'ARQS, un champ magnétique créé par un courant se calcule comme dans le cas statique.

★ preuve

- ◇ Commençons par regarder ce que nous dit l'équation de MAXWELL – FARADAY en terme d'ordre de grandeur

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{E}{D} \equiv \frac{B}{T} \rightsquigarrow B \equiv \frac{ET}{D}$$

- ◇ Évaluons maintenant en ODG $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \mu_0 \varepsilon_0 \frac{E}{T} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \frac{E}{c^2 T}$$

◇ Nous pouvons alors le comparer à $\vec{\text{rot}} \vec{B}$

$$\frac{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|}{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \equiv \frac{\frac{B}{D}}{\frac{E}{c^2 T}} \quad \text{et} \quad B \equiv \frac{ET}{D} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|}{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \equiv \left(\frac{cT}{D} \right)^2$$

◇ Par conséquent, dans le cas de l'ARQS nous avons bien

$$\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| \gg \left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$$

◇ Insistons sur le fait que le courant de déplacement est négligé devant le rotationnel du champ magnétique et *pas* devant le courant électrique usuel.

◇ Dans ces conditions, **même lorsque le courant électrique est nul**, il est possible d'écrire dans le cadre de l'ARQS

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$$

IV.1.iii – \vec{j} dans l'ARQS

Dans le cadre de l'ARQS, la conservation de la charge s'écrit
 $\text{div} \vec{j} = 0$

◇ Nous savions que c'était déjà le cas pour un régime statique (cf. la loi de conservation de la charge page 46) mais c'est *a priori* nouveau dans le cas de l'ARQS.

◇ La démonstration est immédiate en prenant le rotationnel de MAXWELL – AMPÈRE version ARQS

$$\text{div} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = \text{div} \left(\mu_0 \vec{j} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{0} = \mu_0 \text{div} \vec{j}$$

IV.1.iv – champ \vec{E} dans l'ARQS

Les équations de MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – FARADAY restent inchangées dans l'ARQS.

◇ C'est de là que viendra la principale différence avec le cas statique.

◇ Ceci étant, nous pouvons constater que, comme l'équation de MAXWELL – GAUSS est inchangée

Un champ électrique créé par une distribution de charges peut toujours se calculer comme dans le cas statique.

IV.1.v – bilan

◇ L'ARQS peut se résumer à ces 5 équations.

$\operatorname{div} \vec{E}_{(M,t)} = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$	équation de MAXWELL – GAUSS
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_{(M,t)} = -\frac{\partial \vec{B}_{(M,t)}}{\partial t}$	équation de MAXWELL – FARADAY
$\operatorname{div} \vec{B}_{(M,t)} = 0$	équation de MAXWELL – THOMSON
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}_{(M,t)} = \mu_0 \vec{j}_{(M,t)}$	équation de MAXWELL – AMPÈRE
$\operatorname{div} \vec{j}_{(M,t)} = 0$	conservation de la charge

◇ Notons que la dernière peut se retrouver à partir de l'équation de MAXWELL – AMPÈRE.

IV.2 – Onde électromagnétique dans un conducteur

IV.2.i – modèle du conducteur

◇ Nous nous placerons dans le modèle suivant : « conducteur dans l'ARQS ».

Un *conducteur* est un matériau qui conduit significativement le courant électrique.

◇ Typiquement, il s'agit des métaux.

◇ Il existe aussi :

- des isolants, qui ne conduisent pas le courant électrique, et correspondent aux *diélectriques* que nous étudierons dans le chapitre 4 ;
- des semi-conducteurs, qui conduisent un peu mais pas trop le courant et qui sont à la base de tous les composants électroniques.

Un conducteur est caractérisé par la loi d'OHM qui s'écrit, au niveau local (ou mésoscopique)

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{où}$$

γ est la *conductivité* du matériau en S.m^{-1} .

◇ L'établissement de la loi d'OHM locale est faite dans le cours de première année (chapitre 7 de mécanique).

La conductivité pour un bon conducteur est de l'ordre de 10^7 S.m^{-1} .

IV.2.ii – densité volumique de charge

★ une densité nulle de charges

🔗 résultat

Un conducteur, dans l'ARQS, possède une charge volumique nulle.

$$\rho = 0$$

🔗 équation vérifiée par ρ

✧ Reprenons l'équation de conservation de la charge dans le cas général.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

✧ En considérant un conducteur de conductivité uniforme, cela nous conduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div}(\vec{E}) = 0$$

✧ Puis, avec l'équation de MAXWELL – GAUSS

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \times \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

✧ Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \rho = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

🔗 ordres de grandeurs

✧ Nous avons tout d'abord

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_0 \sim \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 9 \cdot 10^{16}} \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_0 \sim 10^{-11} \text{ F.m}^{-1}$$

✧ Cela donne

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \quad \rightsquigarrow \quad \tau \sim \tau \sim \frac{10^{-11}}{10^7} \quad \rightsquigarrow \quad \tau \sim 10^{-18} \text{ s}$$

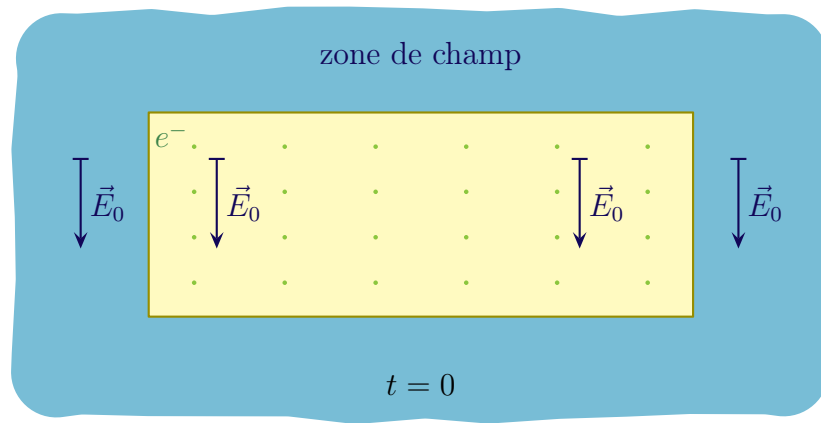
✧ Nous pouvons donc dire qu'au bout de $10\tau = 10^{-17}$ s la charge volumique est nulle partout dans le conducteur.

✧ Nous voyons là une caractérisation numérique de l'ARQS pour un conducteur, à savoir qu'il faut des champs dont la durée caractéristique soit plus grande que 10^{-17} s.

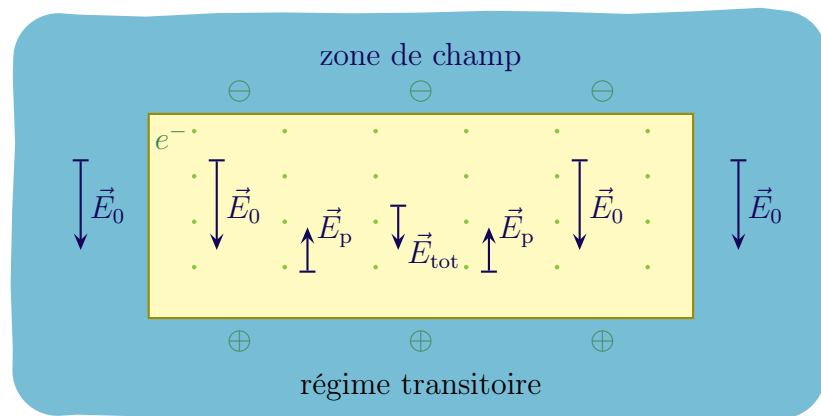
★ interprétation qualitative

✧ Imaginons un bon conducteur plongé dans un champ électrique uniforme et constant \vec{E}_0 .

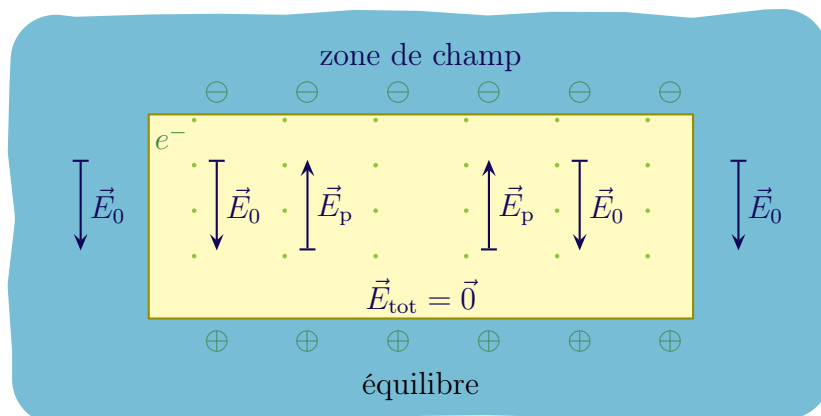
✧ À l'instant initial, le champ électrique est **à l'intérieur** du métal car *aucune* loi interdit au champ de « rentrer » dans la matière.



- ✧ Dans le conducteur, il y a des électrons libres, *i.e.* des électrons qui peuvent bouger quasiment sans entrave.
- ✧ Comme ces électrons libres sont plongés dans un champ \vec{E}_0 , il subissent la force de LORENTZ et commencent à se déplacer dans le sens opposé au champ.
- ✧ Comme les électrons libres ne peuvent pas sortir du conducteurs, il vont avoir tendance à s'accumuler sur une face et à manquer sur l'autre face. Cela crée des charges surfacique puis un champ propre \vec{E}_p , à l'instar du condensateur idéal.



- ✧ Les électons dans le conducteur voient donc désormais le champ total $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + E_p$ et continuent à bouger (donc à s'accumuler sur les côtés) tant que le champ total n'est pas nul.
- ✧ En fait la situation d'équilibre est la suivante :
 - ➔ des électrons libres globalement immobiles ;
 - ➔ des surfaces chargée ;
 - ➔ un champ interne au conducteur nul.



- ◇ La charge surfacique est telle que le champ créé compense exactement le champ extérieur \vec{E}_0 soit, en prenant le modèle du condensateur idéal

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- ◇ D'un autre côté la relation de passage du champ électrique nous dit que le champ électrique est discontinu à la traversé d'une surface chargée soit, ici

$$E_0 - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- ◇ La cohérence de ces deux résultats, au delà de rassurer, permettent de voir que :

- si le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur, ce n'est pas parce que « des agents de sécurités microscopiques » interdisent l'entrée du matériau au champ électrique, mais parce que le conducteur crée lui même le champ qui permettra d'annuler, en son sein, le champ qui *est* rentré ;
- même si la charge volumique est globalement nulle, cela n'interdit pas d'avoir des charges surfaciques.

IV.2.iii – courant de conduction et courant de déplacement

Dans un conducteur dans l'ARQS, le courant de déplacement est négligeable devant le courant électrique.

- ◇ Nous savions déjà que, dans l'ARQS,

$$\|\mu_0 \vec{j}_d\| \ll \|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|$$

- ◇ Nous allons montrer qu'en plus

$$\|\vec{j}_d\| \ll \|\vec{j}\|$$

- ◇ Regardons ce qu'il en est en terme d'ODG

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \equiv \frac{\gamma E}{\varepsilon_0 \frac{E}{T}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_d\|} \equiv \frac{T}{\tau_r} \gg 1$$

- ◇ Dans l'expression précédente, $\tau_r = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ est la durée caractéristique de réaction du conducteur.

IV.2.iv – résumé des lois dans un conducteur dans l'ARQS

- ◇ Toutes ces approximations mises ensemble nous permettent de dire que les lois valables dans un conducteur dans l'ARQS sont

$\operatorname{div} \vec{E}_{(M,t)} = 0$	équation de MAXWELL – GAUSS
$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_{(M,t)} = -\frac{\partial \vec{B}_{(M,t)}}{\partial t}$	équation de MAXWELL – FARADAY
$\operatorname{div} \vec{B}_{(M,t)} = 0$	équation de MAXWELL – THOMSON
$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}_{(M,t)} = \mu_0 \vec{j}_{(M,t)}$	équation de MAXWELL – AMPÈRE
$\vec{j}_{(M,t)} = \gamma \vec{E}_{(M,t)}$	loi d'OHM

IV.2.v – équation de diffusion vérifiée par \vec{j} dans un conducteur

★ résultat

◇ Nous allons montrer que la densité surfacique de courant électrique en volume \vec{j} obéit à l'équation

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

◇ Il s'agit là d'une équation de diffusion à savoir retrouver.

★ démonstration

◇ Comment souvent (voire toujours) pour trouver l'équation vérifiée par un champ vectoriel, nous commencerons à exprimer le rotationnel du rotationnel de deux manières différentes.

◇ Tout d'abord la définition du laplacien vectoriel donne

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{j} \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{j}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j}$$

◇ Rajoutons la loi d'OHM

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{j} \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \gamma \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j}$$

◇ Comme le milieu est uniforme cela donne

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{j} \right) = \gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j}$$

◇ Puis, avec la loi de MAXWELL – GAUSS

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{j} \right) = \vec{0} - \overrightarrow{\Delta} \vec{j}$$

◇ Reprenons le rotationnel du rotationnel en incluant tout de suite la loi d'OHM et l'homogénéité du milieu

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{j} \right) &= \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \gamma \vec{E} \right) \\ &= \gamma \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \right) \end{aligned}$$

◇ Injectons MAXWELL – FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{j} \right) = \gamma \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

◇ Intervertissons les dérivées spatiale et temporelle

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{j} \right) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

◇ Soupoudrons de MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{j} \right) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j})$$

◇ Et sortons les constantes

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{j} \right) = -\gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

◇ En rassemblant les deux expressions, nous arrivons bien au résultat attendu.

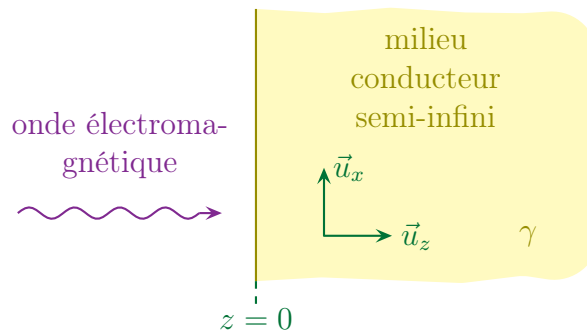
$$-\vec{\Delta} \vec{j} = -\gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

IV.3 – Cas particulier du conducteur semi-infini

IV.3.i – résolution

★ situation, analyse

◇ Considérons un conducteur semi-infini de conductivité homogène γ .



◇ Arrangeons-nous seulement pour que l'onde électromagnétique qui arrive crée, en surface, le courant

$$\vec{j}(z=0,t) = j_0 \cos(\omega t)$$

◇ Dans ces conditions, nous voyons que le dispositif est invariant suivant deux translations, une sur \vec{u}_x et une sur \vec{u}_y , ce qui nous permet de dire que le courant \vec{j} ne dépendra que de z .

◇ Ici, comme nous nous plaçons naturellement en coordonnées cartésiennes, l'équation vectorielle de diffusion se réécrit

$$\vec{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta j_x(z,t) = \gamma \mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial t}(z,t)$$

◇ Analyse technique :

→ le repérage est déjà posé ;

- comme nous avons affaire à une équation aux dérivées partielles linéaire et que la contrainte est sinusoïdale, nous allons utiliser la notation complexe ;
- comme l'équation ici n'est pas une équation de propagation, nous allons rechercher la solution sous la forme POPPM

$$\underline{j}_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

ici, exceptionnellement, nous utiliserons la notation i et non j pour éviter de confondre j et j .

★ vecteur d'onde complexe

◇ Injectons la solution dans l'équation de diffusion

$$-\underline{k}^2 \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = \mu_0 \gamma i \omega \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma i \omega$$

◇ Pour trouver \underline{k} , écrivons $-i$ sous sa forme exponentielle

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times e^{-i\pi/4}$$

◇ Repassons en notation algébrique

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

◇ Ce que nous noterons

$$\underline{k} = \epsilon \times k_0 (1-i) \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \quad \text{et} \quad \epsilon = \pm 1$$

★ solution complète

◇ Ici la solution complète ne peut s'écrire que sous la forme

$$j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - k_0 (1-i)z)} \quad \rightsquigarrow \quad j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{-k_0 z} e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

◇ En effet, comme le milieu est semi-infini, z peut devenir infini. Il faut alors éviter toute divergence mathématique de $j_x(z,t)$ qui ne pourrait pas correspondre, ici, à une solution car le milieu est passif et ne crée **pas** d'énergie.

☕ *Remarque.* Dans le cas d'un milieu conducteur de longueur *finie*, cet argument ne tient plus et nous sommes obligés de garder les deux solutions

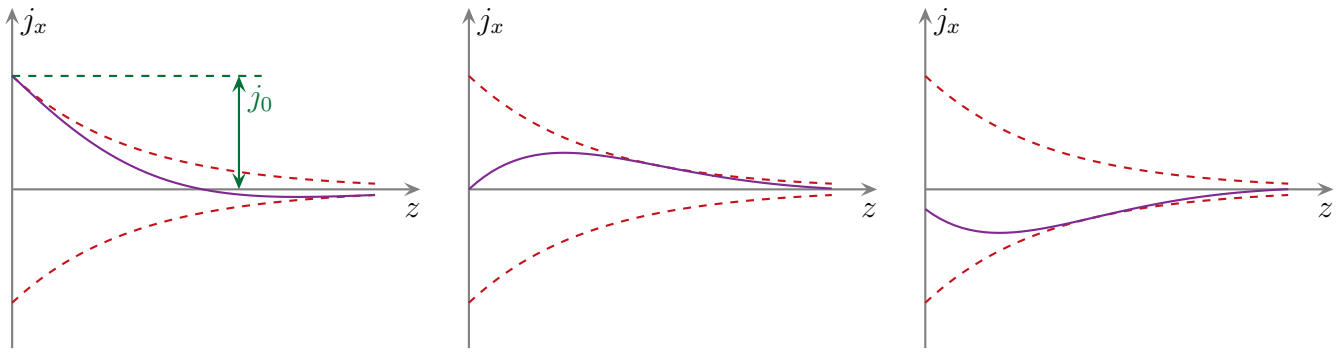
$$j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - k_0 (1-i)z)} + \underline{J}_1 e^{i(\omega t + k_0 (1-i)z)}$$

◇ La condition en $z = 0$ impose

$$j_x(0,t) = j_0 e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad j_x(z,t) = j_0 e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

★ représentation graphique

◇ À t fixé, $j_x(z,t)$ ressemble aux graphiques suivants.



IV.3.ii – épaisseur de peau

☆ interprétation

◇ L'enveloppe de $j_x(z, t)$ est en $e^{-k_0 z}$, enveloppe que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\text{enveloppe} \propto e^{-z/\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{k_0}$$

L'épaisseur de peau, noté δ , est la distance caractéristique d'atténuation de la densité de courant en volume \vec{j} à l'intérieur d'un conducteur.

◇ Ici, avec ce modèle, nous avons

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

◇ Cette expression n'est pas à apprendre mais à savoir retrouver au cas par cas.

◇ À la limite, en repensant aux seules grandeurs pertinentes du problème, il est possible de retrouver, à $\sqrt{2}$ près, l'expression de δ . Les grandeurs pertinentes sont :

- μ_0 qui caractérise le champ électromagnétique décrit par les lois de MAXWELL dans l'ARQS (ε_0 a disparu de MAXWELL – GAUSS ;
- γ qui caractérise le milieu conducteur ;
- ω qui caractérise la contrainte.

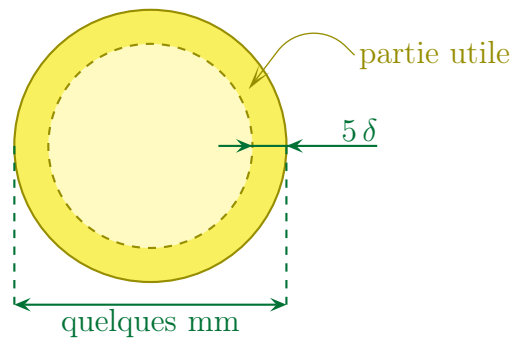
☆ AN

◇ Pour le cuivre, nous trouvons

fréquence	50 Hz	1 MHz	1 GHz
δ	9 mm	65 μm	0,9 μm

◇ En « hautes » fréquences (mais suffisamment faibles pour rester dans l'ARQS), cela signifie que le courant ne passe que dans une portion réduite du conducteur.

◇ En admettant que l'épaisseur de peau est faible devant le rayon d'un fil, cela voudrait dire, par exemple, que le courant ne passe que une couronne d'épaisseur 5δ (cf. schéma ci-dessous).



✧ L'inconvénient d'une telle situation est double :

- cela signifie qu'il y a du fil (donc du cuivre) inutile, ce qui a pu engendrer des frais supplémentaires dont il aurait été possible de se passer ;
- la résistance du fil étant inversement proportionnelle à la *section* effective du fil, la résistance dans une telle situation augmente et / ou est plus grande que prévue.

✧ C'est ce phénomène qui est à l'origine de l'augmentation sensible de la résistance des bobines en électrocinétique (cf. TP oscillations sinusoïdales).

★ conducteur parfait

🌀 modèle

Un conducteur est dit *parfait* lorsque sa conductivité devient infinie.

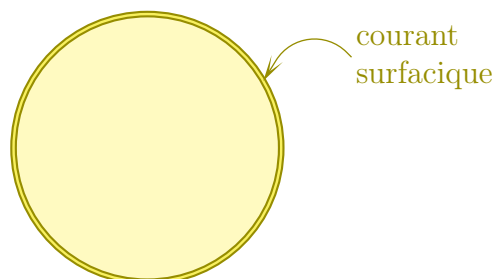
✧ Il ne faut pas confondre « conducteur parfait » et « supra conducteur » qui sont deux notions différentes :

- « conducteur parfait » est une approximation, une limite, d'un modèle de conducteur réel ;
- un « supra conducteur » n'obéit **pas** à la loi d'OHM mais à d'autres lois qui, malheureusement, ont à peu près les mêmes conséquences que « conducteur parfait ».

Un conducteur peut être considéré comme parfait lorsque son épaisseur de peau est très faible devant sa taille caractéristique.

✧ Cela revient en fait au même car

$$\gamma \longrightarrow +\infty \quad \rightsquigarrow \quad \delta \longrightarrow 0$$



🔗 en pratique

La présence d'un conducteur parfait implique :

- l'utilisation d'un modèle macroscopique ;
- la présence de courants surfaciques.

Le champ électromagnétique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.

- ✧ Pour le champ électrique, c'est immédiat puisqu'avec $\delta \rightarrow 0$, le courant $\vec{j}(z,t)$ est partout sauf en $z = 0$ ce qui implique, *via* la loi d'OHM que \vec{E} est nul partout sauf en $z = 0$.
- ✧ Pour \vec{B} nous allons le prouver dans l'étape suivante.

IV.3.iii – champ électromagnétique dans le conducteur

★ champ électrique

- ✧ Nous connaissons $\vec{j}(z,t)$ et nous voulons $\vec{E}(z,t)$. Utilisons tout simplement la loi d'OHM

$$\vec{j}(z,t) = \gamma \vec{E}(z,t) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}(z,t) = \begin{cases} \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_x \\ \frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_x \end{cases}$$

★ champ magnétique

- ✧ Pour trouver $\vec{B}(z,t)$ connaissant $\vec{j}(z,t)$ et $\vec{E}(z,t)$, nous avons le choix entre deux lois :
 - la loi de MAXWELL – AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$;
 - la loi de MAXWELL – FARADAY $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
- ✧ Nous allons choisir la 2^e car il toujours plus facile de calculer un rotationnel puis primitiver en t que d'inverser un rotationnel.
- ✧ Commençons par calculer le rotationnel de \vec{E} **en simplifiant avant**.
- ✧ Nous avons ainsi

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ✧ Il reste donc

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y$$

◇ Le champ \vec{B} n'a donc de composantes que suivant \vec{u}_y et donc, en notation complexe,

$$-\frac{\partial \underline{B}_y}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z}(z,t) \rightsquigarrow -\frac{\partial \underline{B}_y}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \right)$$

◇ Cela nous donne, compte-tenu du fait que dériver par rapport à t revient à multiplier par $i\omega$

$$-i\omega \underline{B}_y(z,t) = -i \underline{k} \frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$$

◇ Puis, en remplaçant \underline{k} par son expression

$$\underline{k} = k_0 (1 - i) \rightsquigarrow \underline{B}_y(z,t) = \frac{j_0 k_0 (1 - i)}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

★ interprétation

◇ Nous pouvons constater que

- il y a de la propagation suivant \vec{u}_z (cf. terme en $e^{i(\omega t - k_0 z)}$);
- \vec{E} est porté par \vec{u}_x qui est orthogonal à \vec{u}_z , \vec{E} est dit *transverse*;
- \vec{B} est porté par \vec{u}_y qui est aussi orthogonal à \vec{u}_z , \vec{B} est dit *transverse*.

◇ Remarquons une propriété que nous rencontrerons plus tard : le champ électromagnétique, lors de sa propagation est souvent, mais pas toujours, orthogonal à la direction de propagation.

◇ Nous pouvons constater que les champs électrique et magnétique sont déphasés.

◇ En effet

$$(1 - i) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \rightsquigarrow \underline{B}_y(z,t) = \frac{j_0 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z - \pi/4)}$$

◇ Dans ces conditions la phase de \underline{E} s'écrit

$$\varphi_E = \arg \left(\underline{E}_x(z,t) \right) \rightsquigarrow \varphi_E = \omega t - k_0 z$$

◇ Et la phase φ_B de \underline{B}

$$\varphi_B = \arg \left(\underline{B}_y(z,t) \right) \rightsquigarrow \varphi_B = \omega t - k_0 z - \frac{\pi}{4}$$

IV.3.iv – bilan énergétique

★ densité volumique d'énergie

🔗 densité volumique d'énergie électrique

✧ Commençons par déterminer la densité volumique moyenne d'énergie électrique.

$$\langle u_{\text{él}} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_x^2 \right\rangle \rightsquigarrow \langle u_{\text{él}} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E_x^2 \rangle$$

✧ Pour déterminer cette moyenne, nous allons utiliser la notation complexe

$$\langle u_{\text{él}} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{E}_x \times \underline{E}_x^* \right) \rightsquigarrow \langle u_{\text{él}} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \times \operatorname{Re} \left(\left| \underline{E}_x \right|^2 \right) \rightsquigarrow \langle u_{\text{él}} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \times \left| \underline{E}_x \right|^2$$

✧ Or nous avons

$$\underline{E}_x(z, t) = \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \rightsquigarrow \left| \underline{E}_x(z, t) \right|^2 = \frac{j_0^2}{\gamma^2} e^{-2k_0 z}$$

✧ Ce qui conduit à

$$\langle u_{\text{él}} \rangle = \frac{\varepsilon_0 j_0^2}{4 \gamma^2} e^{-2k_0 z}$$

🔗 densité volumique d'énergie magnétique

✧ Nous avons de même

$$\langle u_{\text{mg}} \rangle = \left\langle \frac{1}{2 \mu_0} B_u^2 \right\rangle \rightsquigarrow \langle u_{\text{mg}} \rangle = \frac{1}{4 \mu_0} \times \left| \underline{B}_y \right|^2$$

✧ Or

$$\underline{B}_y(z, t) = \frac{j_0 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z - \pi/4)} \rightsquigarrow \left| \underline{B}_y(z, t) \right|^2 = \frac{2 j_0^2 k_0^2}{\omega^2 \gamma^2} e^{-2k_0 z}$$

✧ Et donc

$$\langle u_{\text{mg}} \rangle = \frac{j_0^2 k_0^2}{2 \omega^2 \gamma^2 \mu_0} e^{-2k_0 z}$$

✧ En remplaçant k_0 par son expression

$$k_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \rightsquigarrow \langle u_{\text{mg}} \rangle = \frac{j_0^2}{4 \omega \gamma} e^{-2k_0 z}$$

🔗 comparaison

✧ Le rapport des deux énergies volumique s'écrit

$$\frac{\langle u_{\text{mg}} \rangle}{\langle u_{\text{él}} \rangle} = \frac{\frac{j_0^2}{4 \omega \gamma} e^{-2k_0 z}}{\frac{\varepsilon_0 j_0^2}{4 \gamma^2} e^{-2k_0 z}} \rightsquigarrow \frac{\langle u_{\text{mg}} \rangle}{\langle u_{\text{él}} \rangle} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega}$$

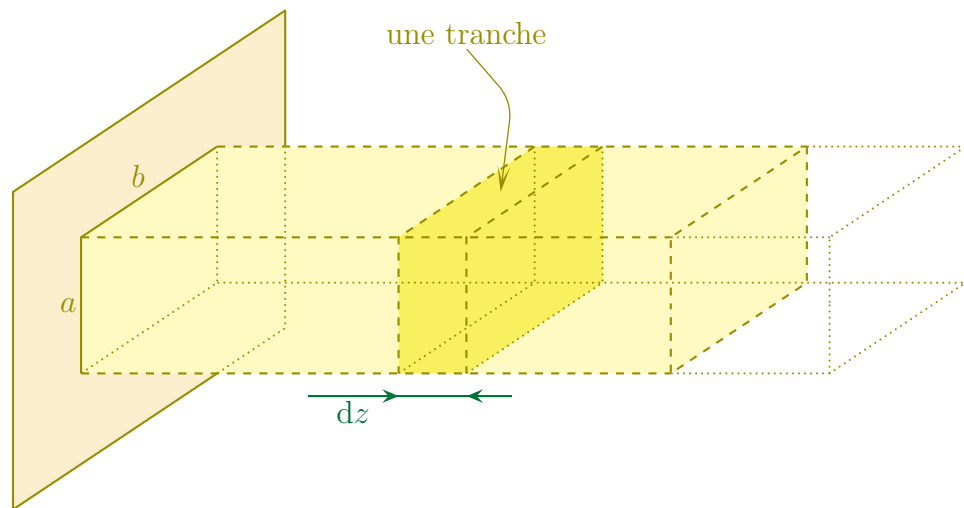
- ◇ Nous voyons apparaître là la durée caractéristique $\tau_r = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ du conducteur, ce qui donne, en notant T la durée caractéristique de l'évolution

$$\frac{\langle u_{\text{mg}} \rangle}{\langle u_{\text{él}} \rangle} = \frac{T}{2\pi\tau} \gg 1$$

- ◇ Cela nous amène à la conclusion que, pour un conducteur dans l'ARQS, l'énergie du champ est essentiellement magnétique.

★ puissance dissipée par effet JOULE

- ◇ Imaginons une carotte semi-infinie de section rectangulaire (cf. schéma ci-dessous) et déterminons la puissance JOULE qui y est dissipée.



- ◇ Par extensivité de la puissance moyenne dissipée, nous pouvons dire que la puissance moyenne totale dissipée n'est autre que la somme des puissances moyennes dissipées dans chaque tranche d'épaisseur dz soit

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \int dP_{\text{joule}}(z) \quad \text{avec} \quad dP_{\text{joule}} = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \times \text{volume}$$

- ◇ Avec la notation complexe, cela donne

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{j_x} \times \underline{E_x}^* \right)$$

- ◇ Cela nous conduit à

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \times j_0 e^{-k_0 z} \times \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \quad \rightsquigarrow \quad dP_{\text{joule}} = \frac{j_0^2}{2\gamma} e^{-2k_0 z} \times a b dz$$

- ◇ « Yapuka » sommer. Rentrons en mode Maple-calcul

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{tot}} &= \int_0^\infty \frac{j_0^2}{2\gamma} e^{-2k_0 z} \times a b \, dz \\
&= \frac{j_0^2 a b}{2\gamma} \times \int_0^\infty e^{-2k_0 z} \, dz \\
&= \frac{j_0^2 a b}{2\gamma} \times \left[\frac{e^{-2k_0 z}}{-2k_0} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{j_0^2 a b}{4k_0 \gamma} \times (0 - 1)
\end{aligned}$$

◇ Et, finalement,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{j_0^2 a b}{4k_0 \gamma}$$

★ puissance apportée par POYNTING

◇ Nous allons chercher la puissance moyenne qui rentre dans la carotte semi-infinie. Pour cela, commençons par déterminer le vecteur de POYNTING moyen

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \times \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

◇ Nous avons

$$\underline{E} = \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{B}(z,t) = \frac{j_0 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z - \pi/4)} \vec{u}_y$$

◇ Ce qui nous mène à

$$\underline{E} \wedge \underline{B}^* = \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \times \frac{j_0 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{-i(\omega t - k_0 z - \pi/4)} \vec{u}_z$$

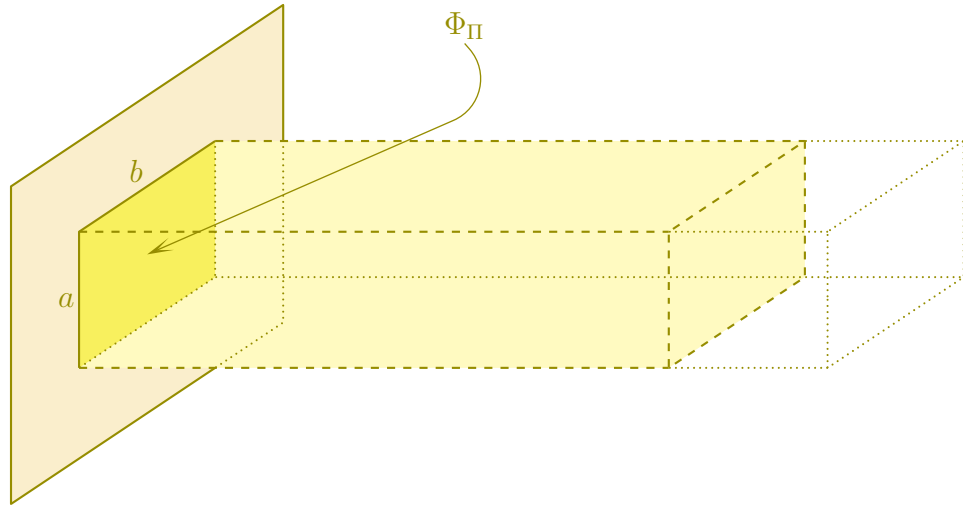
◇ Puis

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{j_0^2 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma^2} e^{-2k_0 z} \times e^{i\pi/4} \vec{u}_z$$

◇ Et ainsi

$$\text{Re} \left(e^{i\pi/4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \times \frac{j_0^2 k_0}{\mu_0 \omega \gamma^2} e^{-2k_0 z} \vec{u}_z$$

◇ Nous pouvons constater que le vecteur de POYNTING n'est dirigé que suivant $+\vec{u}_z$. Cela nous permet de restreindre le calcul de son flux à la face de section rectangulaire située en $z = 0$.



✧ En $z = 0$, le vecteur moyen de POYNTING est uniforme, ce qui donne immédiatement

$$\Phi_{\Pi} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\Pi} = \frac{1}{2} \times \frac{j_0^2 k_0}{\mu_0 \omega \gamma^2} \times a b$$

✧ Vérifions que la puissance apportée par le vecteur de POYNTING correspond bien, en moyenne, à la puissance dissipée par effet JOULE

$$\Phi_{\Pi} \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_{\text{tot}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Phi_{\Pi}}{\mathcal{P}_{\text{tot}}} \stackrel{?}{=} 1$$

✧ Remplaçons Φ_{Π} et \mathcal{P}_{tot} par leurs expressions

$$\frac{\Phi_{\Pi}}{\mathcal{P}_{\text{tot}}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{j_0^2 k_0}{\mu_0 \omega \gamma^2} \times a b}{\frac{j_0^2 a b}{4 k_0 \gamma}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Phi_{\Pi}}{\mathcal{P}_{\text{tot}}} = \frac{2 k_0^2}{\mu_0 \omega \gamma}$$

✧ Et avec l'expression de k_0

$$k_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Phi_{\Pi}}{\mathcal{P}_{\text{tot}}} = 1$$

✧ Ce qui nous permet de vérifier que la loi de conservation de l'énergie est bien respectée (ouf!).

Les équations de Maxwell

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.B.1 Équations locales de l'électromagnétisme

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - source de champ, champ électrique, champ magnétique, charge, courant ;
 - distribution discrète / volumique / surfacique / linéique ;
 - charge volumique / surfacique / linéique, densité surfacique de courant en volume, densité linéique de courant en surface ;
 - symétrie, plan de symétrie / d'antisymétrie, invariance ;
 - circulation, flux, rotationnel ;
 - potentiel scalaire, potentiel vecteur ;
 - courant de conduction / de déplacement ;
 - équation de POISSON, jauge ;
 - relations de passage ;
 - vecteur de POYNTING, énergie volumique électromagnétique ;
 - ARQS ;
 - conducteur ohmique, conductivité, effet de peau, épaisseur de peau ;

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - \vec{E} , \vec{B} ;
 - $\vec{P}_i = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en W.m^{-2} ;
 - $u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ en J.m^{-3} ;
 - $i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ en A.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - théorème de GAUSS, d'AMPÈRE ;
 - équations de MAXWELL ;
 - théorème de STOKES ;
 - relations de passage à travers une distribution surfacique de charge ou de courant ;
 - puissance cédée par le champ à la matière ;
 - équations de MAXWELL dans l'ARQS ;
 - loi d'OHM locale ;
 - principe de CURIE ;
 - principe de superposition.

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - les limites de l'ARQS.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Connaître parfaitement :
 - la distinction entre échelle mésoscopique et échelle macroscopique.

★ Analyse technique

- ◇ Savoir choisir la loi de MAXWELL adaptée à la résolution.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
 - l'expression du rotationnel du rotationnel ;
 - le lien entre les opérateurs différentiels.

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - savoir retrouver les coordonnées du rotationnel à partir de nabla ;
 - savoir retrouver l'équation vérifiée par les potentiels scalaire et vecteur.

★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
 - champ électrostatique créé par un fil infini, un plan infini, une boule ;
 - champ magnétostatique créé par un fil infini, un plan infini ;
 - champ électrostatique créé par un segment dans son plan médiateur, par une spire circulaire sur son axe ;
 - champ magnétostatique créé par une spire circulaire sur son axe ;
 - déterminer le champ électrostatique créé par un condensateur idéal, par une bobine idéale ;
 - savoir retrouver l'équation de conservation de la charge ;
 - savoir retrouver l'équation vérifiée par \vec{j} dans un conducteur ohmique ;
 - savoir retrouver l'épaisseur de peau dans un conducteur ohmique.

Électromagnétisme

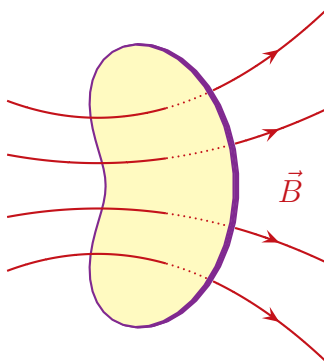
Chapitre 2

Induction

Induction

Alors qu'AMPÈRE avait pu constater qu'un courant électrique pouvait générer un champ magnétique, très vite s'est posée la question inverse : est-il possible de créer un courant électrique à partir d'un champ magnétique ? Après de nombreuses tentatives infructueuses, c'est FARADAY qui trouve et comprend que ce n'est pas un champ magnétique qui peut engendrer un courant mais sa *variation* et plus particulièrement la variation du flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit. Il énonce ainsi la loi très générale

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$



Pour faire varier le flux du champ à travers le circuit il existe deux grandes méthodes qui constitueront chacune une partie de ce chapitre : soit c'est le champ magnétique qui varie en fonction du temps (première partie) soit c'est le circuit qui se déforme par mouvement (deuxième partie).

Table des matières

Biographies succinctes	6
I Circuit fixe dans $\vec{B}(t)$	8
I-1 Origine du courant électrique	8
I-1.i des électrons, ça bouge	8
I-1.ii vision électrocinétique : lien entre \vec{E} et f.é.m.	8
I-2 Induction dans une spire fermée	9
I-2.i de MAXWELL – FARADAY à la loi de FARADAY	9
loi	9
interprétation – modèle électrocinétique	9
schéma de principe	10
démonstration	10
I-2.ii idoinoton – calcul d’un courant	11
situation, analyse	11
loi de FARADAY	12
vision électrocinétique	12
I-2.iii loi de LENTZ	13
loi qualitative	13
application à l’effet de peau	13
I-2.iv idoinoton et loi de LENZ	14
les questions à se poser	14
vérification	14
I-3 Champ électromoteur	15
I-3.i expression	15
loi, interprétation	15
démonstration	15
I-3.ii idoinoton	16
situation	16
version « champ électromoteur »	16
version « loi de FARADAY »	17
morale	18
I-4 Induction dans un volume	18
I-4.i situation, analyse	18
dispositif	18
deux approches différentes	19
I-4.ii vision électrocinétique en spires	19
préliminaire : le découpage en spires	20
étude d’une spire	20
sommation sur toutes les spires	21
homogénéité	22
I-4.iii vision électromagnétique mésoscopique	22
rappel de l’analyse	22
trouver \vec{E}	22
trouver \vec{j} et la puissance dissipée	23
trouver la puissance dissipée totale	24
I-4.iv retour sur l’analyse	24
analyse physique	24
analyse technique	25

I-5	Autoinduction	25
I-5.i	origine physique	25
	modélisation d'une bobine	25
	deux grands types de bobines	26
I-5.ii	inductance d'une bobine	26
	flux propre	26
	inductance	27
	justification de la définition	27
I-5.iii	aspect électrocinétique	28
	où une loi connue depuis très longtemps refait surface	28
	tenir compte de l'autoinduction dans un problème d'induction	29
I-5.iv	aspect énergétique	30
	loi	30
	cas de la bobine idéale	30
I-6	Induction mutuelle	30
I-6.i	analyse	30
	origine	30
	aspect qualitatif	32
	sens du courant induit	32
I-6.ii	aspect électrocinétique	33
	loi	33
	démonstration	33
I-6.iii	aspect énergétique	33
	loi	34
	interprétation	34
	démonstration	34
	plus que deux bobines	35
I-6.iv	coefficient de couplage	35
	résultat	35
	interprétation	36
	démonstration	36
I-6.v	circuits couplés par mutuelle	36
	mise en équation	37
	résolution d'un cas particulier en régime transitoire	37
	résolution en régime sinusoïdal forcé	38
II	Circuit mobile dans un champ statique	40
II-1	Transformation galiléenne des champs	40
II-1.i	courant électrique dans deux référentiels différents	40
	question	40
	réponse	40
	et le courant ?	41
II-1.ii	oui mais non mais si	42
	un contre-exemple facile	42
	morale	43
II-2	Induction dans un circuit en mouvement	43
II-2.i	champ électromoteur	43
	loi	43
	précaution de lecture	43
	démonstration	43

II.2.ii	et la loi de FARADAY ?	44
	loi	44
	idée de démonstration	45
II.2.iii	aspect qualitatif	46
	avec la loi de FARADAY	46
	avec la loi de LENZ	46
II.2.iv	analyser un problème d'induction de LORENTZ	47
II.3	Exemple : rails de LAPLACE	47
II.3.i	présentation	47
	dispositif	47
	analyse	48
II.3.ii	freinage électromagnétique	49
	aspect mécanique	49
	couplage par e_{ind}	49
	aspect électrocinétique	51
	couplage par force de LAPLACE	52
	rassemblement	52
	solution, interprétation	52
II.3.iii	tout ça à cause de LORENTZ	53
II.3.iv	bilan énergétique du freinage	53
	aspect purement mécanique	53
	aspect purement électrique	53
	coïncidence ?	54
II.3.v	moteur linéaire	56
	dispositif, analyse	56
	mise en équation	57
	solution, interprétation	58
II.4	Exemple : le haut parleur	59
II.4.i	présentation	59
II.4.ii	lois de fonctionnement	60
	aspect mécanique	60
	couplage par force de LAPLACE	60
	aspect électrique	61
	couplage par e_{ind}	61
II.4.iii	bilan d'énergie	62
	bilan d'énergie mécanique	62
	bilan d'énergie électrique	63
	bilan total	63
II.4.iv	vision purement électrique	63
	idée	63
	action	63
	interprétation	64
	Fiche de révision	65

Biographies succinctes

Pierre Simon marquis de LAPLACE

(1749 Beaumont en Auge – 1827 Paris)



Né dans une famille aisée, Pierre Simon aurait dû devenir ecclésiastique mais il décide de lui-même de monter à Paris avec une lettre de recommandation. Il fait rapidement ses preuves et Jean le Rond D'ALEMBERT lui trouve un poste rémunéré de professeur de mathématiques. Pierre Simon est élu à l'académie royale des sciences à 24 ans et à l'académie française en 1816. Entre temps son prestige international lui permettra de naviguer dans les hautes sphères aussi bien durant la monarchie que durant la révolution ou sous NAPOLÉON. Pierre Simon de LAPLACE est connu pour le « déterminisme laplacien » pour qui tout le futur et tout le passé est absolument connu à celui qui connaît les lois physiques et tous les mouvements de toutes les particules.

Peter BARLOW

(1776 Norwick, Norfolk – 1862 Woolwich, Londres)



À 30 ans Peter BARLOW devient capitaine mathématique dans la Royal Military Academy, Woolwich, poste qu'il a occupé pendant 41 ans. IL travaillera principalement dans le domaine des chemins de fer, que cela soit pour la locomotion à vapeur ou pour l'ébauche du premier moteur électrique (roue de BARLOW). Il a aussi produit des résultats en résistance des matériaux et en optique (une lentille portant son nom permet d'augmenter le grossissement d'appareils optiques). Ses deux fils Peter et William seront des ingénieurs célèbres du XIXe siècle.

Michael FARADAY

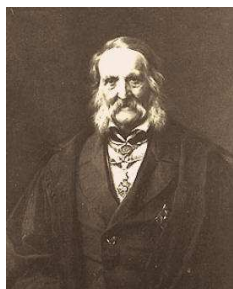
(1791 Newington, Surrey – 1867 Hampton Court, Middlesex)



Le premier métier de Michael est relieur. Cela le met en contact avec de nombreux livres et trouve de l'intérêt à lire ceux de physique-chimie. Il continue en suivant des conférences publiques. En 1813 il obtient un poste de technicien à la Royal Institution grâce au chimiste H. DAVY avec qui il s'est lié d'amitié. En 1822, avec la découverte de ØRSTED (une aiguille aimantée est déviée près d'un conducteur parcouru par un courant), Michael se lance dans l'étude de l'électromagnétisme. Il y obtiendra tellement de succès qu'il sera l'un des principaux inspirateurs de J. MAXWELL. Élevé dans la foi, M. FARADAY restera toute sa vie un homme calme, aimable et simple.

Franz Ernst NEUMANN

(1798 Joachimstahl, Prusse – 1895 Königsberg)



Franz met de côté ses études en 1814 pour s'engager dans l'armée contre Napoléon. Blessé il ne finira pas la guerre mais reprendra dès la fin de celle-ci des études de théologie ... qu'il arrête aussi pour s'orienter vers les sciences. Il commencera par travailler sur la cristallographie et deviendra professeur titulaire de minéralogie en 1829. À partir de 1832 il s'intéresse plus particulièrement à l'optique ondulatoire. Enfin il travaillera sur l'électrodynamique et publiera en 1845 et 1847 deux articles. Franz NEUMANN publie peu mais transmet ses résultats dans des séminaires en partenariat avec Gustav JACOBI et dont un des rares (le seul ?) étudiant célèbre est Gustav KIRCHHOFF.

Heinrich Friedrich Emil LENZ

(1804 Dorpat, Estonie – 1865 Rome)



Après des études dans de nombreux domaines (théologie, physique, chimie, géophysique) Heinrich LENZ entreprend entre 1823 et 1826 un voyage autour du monde durant lequel il étudie la salinité des océans. Il est ensuite nommé professeur à Saint-Petersbourg et travaille sur l'électricité et en particulier sur l'induction découverte par FARADAY. Il étudiera aussi avec précision l'effet PELTIER (production de froid à la soudure de deux conducteurs parcourus par un courant) avant de décéder d'un accident vasculaire cérébral en 1865.

Hendrik Antoon LORENTZ

(1853 Arnhem, Pays-Bas – 1928 Haarlem)



Avant de devenir professeur dans l'université où il fit ses études (Leyde), Hendrik fut enseignant dans le secondaire tout en effectuant, seul, une thèse sur la propagation de la lumière. Ses travaux ont ensuite essentiellement porté sur la théorie électromagnétique de la lumière et en particulier sur son caractère corpusculaire. Il est principalement connu pour les lois qui permettent de passer d'un référentiel à un autre dans le cadre de la relativité. Hendrik LORENTZ reçoit le prix NOBEL en 1902 conjointement avec ZEEMANN (son ancien élève) pour la découverte de l'effet ZEEMANN (déplacement des raies spectrales des atomes soumis à un champ magnétique).

I – Circuit fixe dans $\vec{B}(t)$

Le phénomène d'induction dans un circuit immobile plongé dans un champ magnétique dépendant du temps s'appelle *l'induction de NEUMANN*.

- ✧ Pour notre part, nous nous intéresserons uniquement aux courants induits dans des conducteurs électriques métalliques. Nous mettons donc de côté tout ce qui est solution électrolytique.

I.1 – Origine du courant électrique

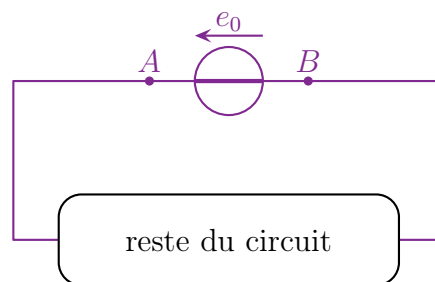
I.1.i – des électrons, ça bouge

- ✧ Le courant électrique, dans un conducteur métallique, est dû aux électrons qui sont mis en mouvement par la force de LORENTZ $\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$.
- ✧ Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent traitant des équations de MAXWELL, chacune de ces charges reçoit la puissance $\mathcal{P} = \vec{v} \cdot (q \vec{E})$.
- ✧ Dans ces conditions, nous pouvons dire que **seul le champ électrique** peut véritablement créer, être à l'origine, d'un courant électrique.
- ✧ Le champ magnétique, lui, ne modifie que de manière marginale le courant électrique (cf. effet HALL).
- ✧ En fait, dans le cas de l'induction, ce n'est pas le champ $\vec{B}(t)$ qui est « directement » à l'origine du courant électrique, mais le champ électrique *via* la loi de MAXWELL – FARADAY

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

I.1.ii – vision électrocinétique : lien entre \vec{E} et f.é.m.

- ✧ Considérons un circuit électrique en exhibant le générateur et en regroupant *tout* le reste sous un seul et même dipôle.



- ✧ Cherchons l'expression de l'énergie reçue de la part du champ électrique par la charge qui va du point A au point B.
- 🔥 *Remarque.* Même si nous savons qu'« en vrai » les charges, à savoir les électrons, vont de B en A, pour notre propos, nous pourrions quand même parler des charges qui se déplacent de A vers B car une charge négative qui recule est physiquement équivalent à une charge positive qui avance.
- ✧ Pour déterminer l'expression de ce travail, rien d'extraordinaire ; il s'agit simplement de trouver le travail fourni par la force de LORENTZ lorsque la charge va de A à B.
- ✧ Ce travail peut s'exprimer de deux manières différentes.
- ✧ Commençons par exprimer la force dans le calcul du travail reçu

$$\mathcal{E}_r = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

◇ Nous voyons apparaître la définition de la circulation

$$\mathcal{E}_r = q C_E(A \rightarrow B)$$

◇ Pour trouver l'énergie reçue, nous pouvons aussi utiliser le fait qu'il s'agit là d'une force conservative

$$\mathcal{E}_r = -\Delta E_p \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = -(q V_B - q V_A)$$

◇ Et nous trouvons, avec e_0 la f.é.m. du circuit,

$$\mathcal{E}_r = -q (V_B - V_A) \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = q e_0$$

◇ Nous voyons alors, et nous aurons l'occasion de l'utiliser tout le temps, que la f.é.m n'est autre que la circulation de \vec{E} sur l'ensemble du circuit.

I.2 – Induction dans une spire fermée

I.2.i – de MAXWELL – FARADAY à la loi de FARADAY

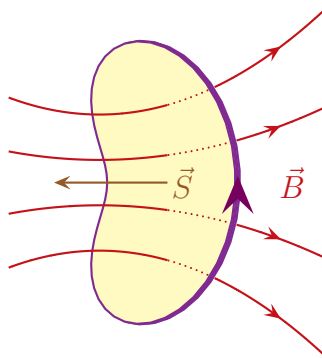
★ loi

Dans un circuit **fermé** et **immobile**, la f.é.m. induite $e_{\text{ind}}(t)$ s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{où :}$$

→ $e_{\text{ind}}(t)$ est dans le sens de i ;

→ Φ_B est calculé avec le vecteur surface \vec{S} orienté dans le sens de i .

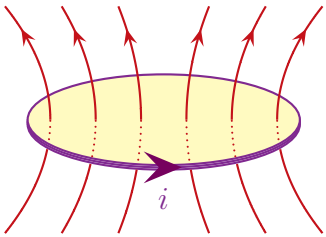
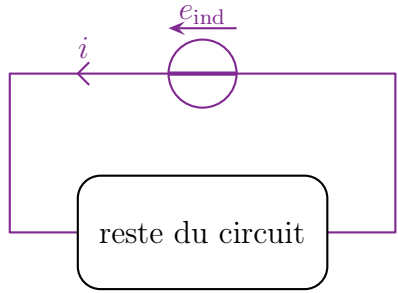


◇ Une des conséquences de cette **obligation** d'orientation est la loi suivante

$$\text{pas de schéma} \implies \text{manque de rigueur} \implies \text{pas de point}$$

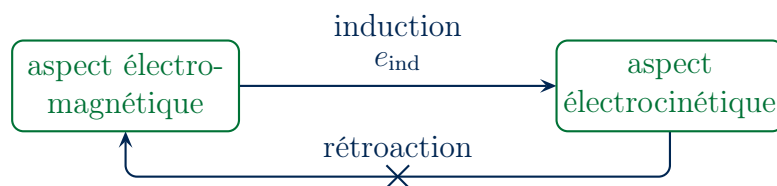
★ interprétation – modèle électrocinétique

◇ La plupart du temps, nous ferons deux schémas : l'un en vision « réelle », l'autre en vision « électrocinétique ».

dispositif réel	modèle électrocinétique
 <p>il n'y a pas de générateur la circulation de \vec{E} est non nulle il y a un champ magnétique $\vec{B}(t)$</p>	 <p>il y a un générateur de f.é.m e_{ind} la circulation de \vec{E} est nulle il n'y a pas de champ magnétique ($\vec{B} = \vec{0}$)</p>
le courant qui circule est i	

★ schéma de principe

✧ Conceptuellement, nous pouvons résumer la situation de la manière suivante.



✧ Autrement dit :

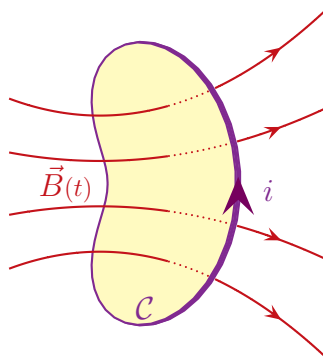
- ➔ la partie « électromagnétisme » engendre des effets électrocinétique *via* la f.é.m. induite ;
- ➔ la partie « électrocinétique » n'engendre **pas** d'effets électromagnétique.

✧ Ce schéma est provisoire car, nous le savons, un courant est source de champ ce qui implique, de fait, qu'un courant variable est source de champ variable, donc est source d'induction.

✧ Nous traiterons ce cas un peu plus tard.

★ démonstration

✧ Considérons un circuit électrique quelconque (mais fermé!) plongé dans un champ magnétique variable.



✧ Calculons la circulation de \vec{E} sur le contour qui coïncide avec le circuit.

- ◇ Comme le circuit est fermé, la circulation se fait sur un contour fermé ce qui donne, avec le théorème de STOKES

$$C_E = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Avec l'équation de MAXWELL – FARADAY, nous avons

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Comme le circuit est immobile, le contour l'est aussi, *donc* la surface \mathcal{S} aussi, *donc* chacune des surfaces élémentaires $d\vec{S}_P$ aussi. Cela nous permet d'écrire

$$C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P)$$

- ◇ Encore une fois, comme le circuit est immobile, la surface \mathcal{S} ne dépend pas du temps et nous pouvons sortir la dérivée du signe somme

$$C_E = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \right)$$

- ◇ Ce qui ne fait apparaître, ni plus ni moins, que la définition du flux

$$C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

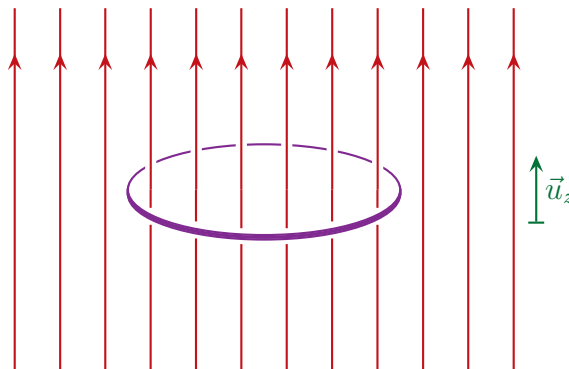
- ◇ Pour conclure, il nous faut ajouter l'argument vu dans le paragraphe précédent, à savoir que la circulation du champ \vec{E} correspond à une f.é.m., f.é.m. que nous appellerons ici « f.é.m. induite »

$$C_E = e_{\text{ind}} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

I·2·ii – idoinoton – calcul d'un courant

★ situation, analyse

- ◇ Considérons une spire circulaire plongée dans un champ uniforme mais non constant.



- ◇ Supposons le champ parallèle à l'axe de la spire et d'expression

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

- ◇ La question est : quel est l'expression du courant $i(t)$ induit ?

- ◇ Analyse physique :

- nous sommes face à un phénomène d'induction de NEUMANN dans un circuit filiforme ;
 - les grandeurs pertinentes sont le rayon a (géométrie), la résistance r de la spire (comportement électrocinétique), B_0 et ω (sources, contraintes).
- ◇ Phénoménologiquement, nous sommes face à un champ $\vec{B}(t)$ qui « crée » une tension, qui « crée » un courant

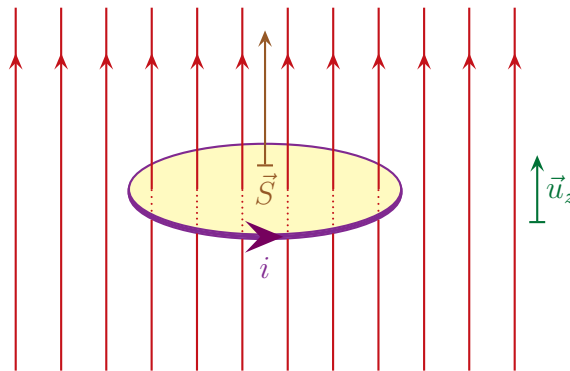
$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}}$$

◇ Analyse technique :

- le repérage est déjà fait ;
- les lois que nous utiliserons sont immédiates compte-tenu de la situation.

★ loi de FARADAY

- ◇ Redessinons le schéma en orientant proprement le circuit **et en faisant apparaître** le vecteur surface \vec{S} .



- ◇ Calculons le flux de \vec{B} à travers une surface qui s'appuie sur le circuit. Choisissons la plus simple : le disque de rayon a (coloriée, ici, en jaune clair).
- ◇ La définition du flux nous permet d'écrire

$$\Phi_B = \iint_{P \in S} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Et comme le champ est *uniforme*, nous avons

$$\vec{B}(P) = \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

◇ Ainsi

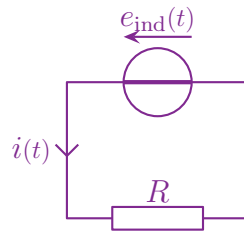
$$\vec{S} = \pi a^2 \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = B_0 \pi a^2 \cos(\omega t)$$

- ◇ La loi de FARADAY nous conduit donc à

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = +B_0 \omega \pi a^2 \sin(\omega t)$$

★ vision électrocinétique

- ◇ Voyons la spire sous l'angle purement électrocinétique en faisant attention de bien mettre $e_{\text{ind}}(t)$ et $i(t)$ **dans le même sens**.



◇ Le circuit est (très) simple, ne tergiversons pas. La loi de POUILLET donne

$$i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = + \frac{B_0 \omega \pi a^2}{R} \sin(\omega t)$$

I.2.iii – loi de LENTZ

★ loi qualitative

LOI DE LENZ – LOI DE MODÉRATION

L'induction, par ses effets, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

◇ Il s'agit là d'une loi qualitative qui permet :

- lors de l'analyse, de « deviner » ce qui va se passer ;
- lors de l'interprétation des résultats, de vérifier les signes obtenus.

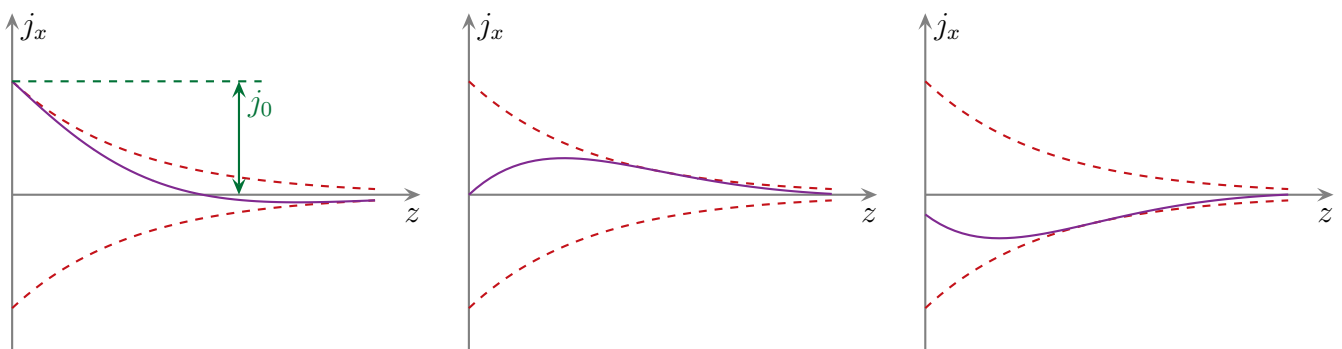
◇ Cette loi vient, en fait, du signe « - » dans la loi de FARADAY

$$e_{\text{ind}}(t) = - \frac{d\Phi_B}{dt}(t)$$

◇ Cette loi, très simple, demande à être utilisée avec précaution car, pour fonctionner, il faut parfaitement identifier les « causes » et les « effets » de l'induction.

★ application à l'effet de peau

◇ Comme nous l'avons vu, la densité de courant en volume diminue avec la profondeur dans le cas d'un conducteur plongé dans un champ électrique variable.

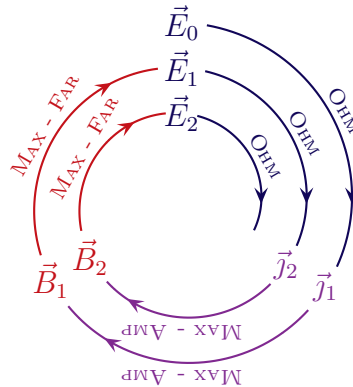


◇ La situation peut être vue de la manière suivante :

- le champ \vec{E}_0 , présent partout, engendre le courant \vec{j}_0 par la loi d'OHM ;
- le courant \vec{j}_0 engendre le champ \vec{B}_0 par la loi de MAXWELL – AMPÈRE ;
- le champ \vec{B}_0 engendre le champ \vec{E}_1 par la loi de MAXWELL – FARADAY ;
- le champ \vec{E}_1 engendre le courant \vec{j}_1 par la loi d'OHM ;
- le courant \vec{j}_1 engendre le champ \vec{B}_1 par la loi de MAXWELL – AMPÈRE ;

- le champ \vec{B}_1 engendre le champ \vec{E}_2 par la loi de MAXWELL – FARADAY ;
- (...)

◇ Ce que nous pouvons symboliser de la manière suivante



◇ Le courant total, le courant final, celui que nous avons déterminé directement avec l'équation vérifiée par \vec{j} n'est autre que

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k$$

☕ *Remarque.* Nous aurions pu établir, par étapes successives, les différentes expressions de \vec{j}_k puis sommer le tout.

◇ Il s'agit bien là de la loi de LENZ : l'effet s'oppose à la cause. Effectivement, la cause, c'est le champ \vec{E}_0 **partout** dans le conducteur et l'effet final c'est qu'il n'y a plus de champ dans le conducteur.

I.2.iv – idoinoton et loi de LENZ

★ les questions à se poser

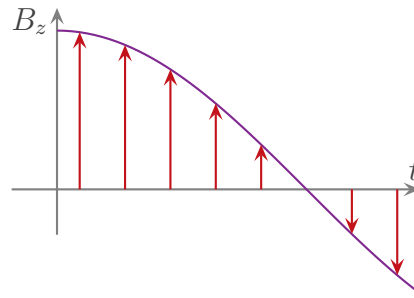
- ◇ La première des questions à se poser est « Quelle est la cause de l'induction ? » ou « Quelle est la cause de $i(t)$? »
- ◇ La première erreur à ne pas commettre est de répondre « C'est le champ magnétique ! ».

C'est faux !

- ◇ Ce n'est **pas** le champ magnétique qui crée le courant induit mais ses *variations*.
- ◇ Cela signifie que les effets de $i(t)$ ne doivent pas s'opposer au champ magnétique mais doivent s'opposer aux *variations* du champ magnétique. La nuance est de taille.
- ◇ Maintenant posons-nous l'autre question : « Quelle est l'effet du courant $i(t)$? »
- ◇ Là, la réponse est plus immédiate, c'est « un champ magnétique ».

★ vérification

- ◇ Nous devons donc vérifier que le champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ créé par le courant induit s'oppose aux *variations* de \vec{B} .
- ◇ Regardons ce qui se passe uniquement autour de $t = 0^+$. À cet instant, le champ \vec{B} est en train de *diminuer*.



- ◇ D'après la loi de LENZ, il faut donc que \vec{B}_1 s'oppose à cette diminution *donc* soit dirigé vers le haut.
- ◇ Or $\vec{B}_1(t)$, qui est créé par $i(t)$, est vers le haut quand $i(t) > 0$ (règle de la main droite).
- ◇ C'est pourquoi, nous pouvons constater qu'autour de $t = 0^+$, le courant $i(t)$ est bien positif.

$$i(t) = \underbrace{K}_{>0} \sin(\omega t) > 0 \quad \text{autour de } t = 0^+$$

- ◇ Donc tout va bien! ☺

I.3 – Champ électromoteur

I.3.i – expression

★ loi, interprétation

Pour un circuit orienté \mathcal{C} fermé ou non, la f.é.m. d'induction comptée dans le sens d'orientation de \mathcal{C} s'écrit

$$e_{\text{ind}} = \int_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

\vec{E}_m est appelé le *champ électromoteur*.

- ◇ Il s'agit là d'une autre manière de déterminer la f.é.m. induite.
- ◇ L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer des f.é.m. directement sur des *portions* de circuits. Maintenant, il est certain que si le circuit électrique n'est pas ouvert il y aura, certe, une f.é.m. mais aucun courant.
- ◇ L'inconvénient, le gros inconvénient même, de cette méthode est que le calcul se base sur la connaissance de \vec{A} , connaissance qui est loin d'être triviale.

★ démonstration

- ◇ D'après les équations de MAXWELL, nous savons déjà que nous pouvons écrire

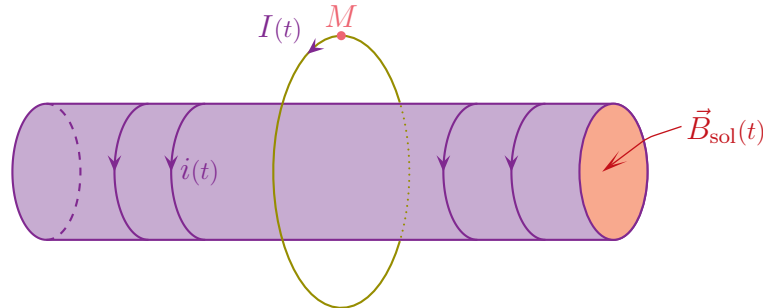
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- ◇ Or nous savons que la circulation de $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ correspond à la f.é.m. « normale », celle due aux générateurs de tension.
- ◇ Il reste donc la f.é.m. due à la circulation de $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui correspond aux effets de la variation du champ magnétique, c'est-à-dire la f.é.m. induite.

I.3.ii – idoinoton

★ situation

- ◇ Considérons une spire circulaire entourant une bobine idéale de rayon a parcourue par un courant d'intensité variable $i(t)$.



- ◇ Avec le repérage usuel ci-dessus, le champ magnétique créé par la bobine :

- est nul en dehors de la bobine ;
- vaut $\vec{B}_{\text{bob}} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ à l'intérieur.

- ◇ Quel est le courant parcourant la spire ?
- ◇ Comparons les deux méthodes

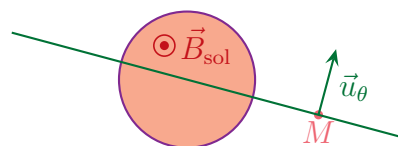
★ version « champ électromoteur »

🔍 déterminer $\vec{A}(t)$

- ◇ Comme nous ne connaissons pas $\vec{A}(t)$, il faut le déterminer et, pour cela, commencer par chercher les symétries et les invariances.
- ◇ Les invariances, cela va très vite puisque ce sont les mêmes que celle de la bobine infinie, à savoir une invariance par translation et une invariance par rotation.
- ◇ Pour les symétries, c'est plus délicat car il faut savoir si \vec{A} est un vrai vecteur (*i.e.* se comporte comme \vec{E} vis-à-vis des plans de symétrie) ou un pseudo-vecteur (comme \vec{B}).
- ◇ La loi de MAXWELL – FARADAY nous montre que l'utilisation du rotationnel change la nature d'un vecteur, nous pouvons donc en conclure que

Le champ potentiel vecteur \vec{A} est un champ de vrai vecteur.

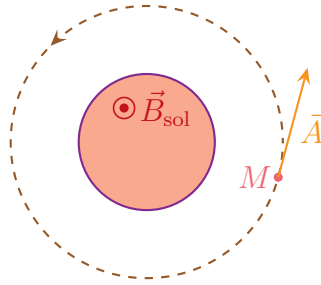
- ◇ Or nous constatons que les plans contenant l'axe de la bobine sont des plans de *symétrie* pour le champ \vec{B} , *i.e.* pour les pseudo-vecteur.
- ◇ Nous pouvons donc en déduire que les plans contenant l'axe de la bobine sont des plans d'*antisymétrie* pour les vrais vecteur, *i.e.* pour le champ \vec{A} .



- ◇ Dans ces conditions, \vec{A} est orthoradial et s'écrit, compte-tenu des invariances

$$\vec{A}_{(M,t)} = A(r,t) \vec{u}_\theta$$

✧ Choisissons un point M quelconque dans l'espace¹ et calculons la circulation de \vec{A} sur le cercle centré sur l'axe passant par M .



✧ Nous avons alors

$$C = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{A}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C = \oint_{P \in \mathcal{C}} A(M) \vec{u}_\theta \cdot (d\vec{\ell}_P \vec{u}_\theta) \rightsquigarrow C = A(r) \times 2\pi r$$

✧ Et en utilisant le théorème de STOKES ainsi que la définition de \vec{A}

$$C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \text{rot } \vec{A}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow C = \Phi_B \rightsquigarrow C = \mu_0 n i(t) \times \pi a^2$$

✧ En rapprochant les deux résultats, nous obtenons

$$\vec{A}_{(r,t)} = \frac{\mu_0 n i(t) a^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

☞ en déduire \vec{E}_m

✧ Nous pouvons calculer maintenant le champ électromoteur

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial A}{\partial t} \rightsquigarrow \vec{E}_m(r,t) = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \times \frac{di}{dt}(t) \vec{u}_\theta$$

☞ puis e_{ind}

✧ Calculons la circulation de \vec{E}_m sur le circuit électrique \mathcal{C} .

$$e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow e_{\text{ind}} = E_m(r,t) \times 2\pi r \rightsquigarrow e_{\text{ind}} = -\mu_0 n \pi a^2 \times \frac{di}{dt}(t)$$

★ version « loi de FARADAY »

✧ Calculons le flux de \vec{B} à travers la surface délimitée par le circuit \mathcal{C} .



1. Vu ce que nous allons faire de \vec{A} après, à savoir ne s'intéresser à lui qu'au niveau du circuit \mathcal{C} , nous aurions pu nous contenter de prendre un point M sur ce circuit.

◇ Comme le champ y est uniforme, nous avons tout de suite

$$\Phi_B = \pi a^2 (\mu_0 n i(t)) \quad \text{et} \quad e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -\mu_0 n \pi a^2 \times \frac{di}{dt}(t)$$

◇ C'est une méthode « un peu » plus rapide.

★ morale

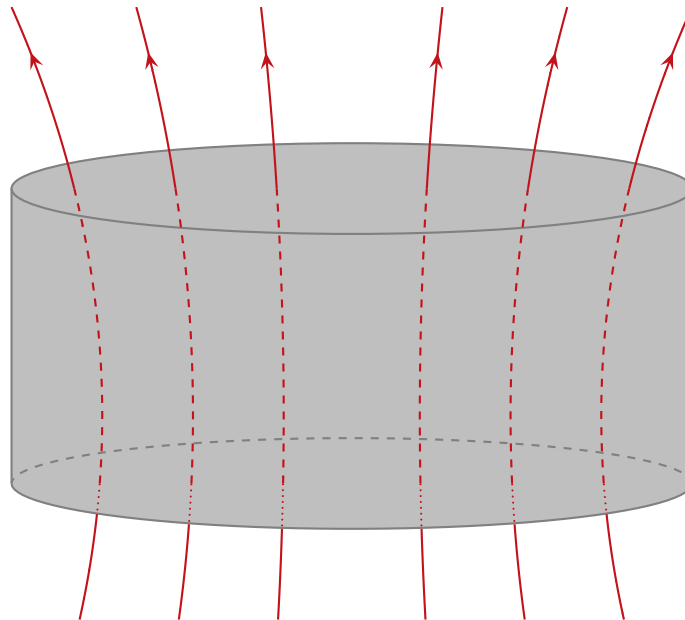
- ◇ Clairement la méthode « champ électromoteur » n'est pas très rentable puisque, pour déterminer \vec{A} , nous devons quand même calculer un flux de \vec{B} . En fait, entre la méthode du « champ électromoteur » et la méthode « loi de FARADAY » la seule différence est le moment où nous calculons la dérivée temporelle.
- ◇ Finalement, lorsque nous ne connaissons pas le potentiel vecteur \vec{A} , nous préférons la méthode « loi de FARADAY ». En revanche si, pour une raison quelconque, nous connaissons déjà *a priori* l'expression de $\vec{A}(M,t)$, là, nous pourrions penser à la méthode « champ électromoteur ».

I.4 – Induction dans un volume

I.4.i – situation, analyse

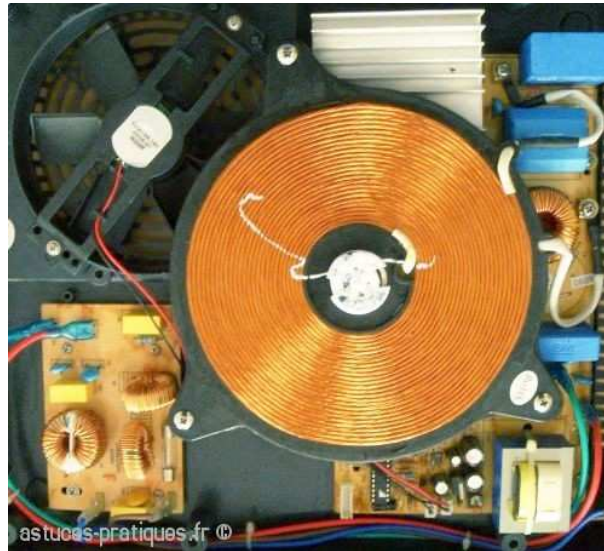
★ dispositif

- ◇ Considérons une pièce métallique épaisse, comme un fond de casserole, plongée dans un champ magnétique uniforme et variable.



- ◇ Dans cette pièce métallique, des courants vont apparaître, courants qui vont dissiper de l'énergie par effet JOULE et ainsi élever la température du matériau. C'est là le principe des plaques de cuisson par induction.
- ◇ Ci-dessous, une photo de plaque à induction montrant les bobines qui génèrent le champ magnétique.²

2. Source : <http://www.astuces-pratiques.fr/images/articles/24/inductance-cuisine-induction.jpg>



- ✧ Cherchons à déterminer la puissance dissipée par effet JOULE.
- ✧ Avant de commencer, signalons que, « en vrai », pour les plaques à induction, tout ne se passe pas exactement comme nous allons le faire. La grande différence est que le matériau des casseroles et autres poêles doit être ferromagnétique pour que « ça marche bien ». En pratique, un matériau ferromagnétique est un matériau qui attire les aimants.
- ✧ Phénoménologiquement, un matériau ferromagnétique « amplifie » l'effet magnétique (*i.e.* le champ \vec{B}) par un coefficient phénoménologique appelée permittivité relative μ_r . Cela signifie que, pour que nous résultats soient théoriquement plus proches de la réalité, il nous suffira de remplacer μ_0 par $\mu_0 \mu_r$.

★ deux approches différentes

- ✧ Analyse physique :
 - nous sommes face à un conducteur immobile dans un champ magnétique variable, c'est de l'induction de NEUMANN ;
 - le champ magnétique est uniforme donc, en tenant compte de la pièce métallique, nous pouvons dire que le dispositif admet une invariance par rotation ;
 - les grandeurs pertinentes sont γ (caractéristique électrique du matériau), R , h (géométrie) et $B(t)$ (contrainte).
- ✧ Analyse technique :
 - le repérage sera (évidemment) le repérage cylindro-polaire ;
 - du point de vue de l'approche, nous avons le choix :
 - soit nous découpons l'ensemble en différentes spires puis nous allons procéder comme suit

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} \mathcal{P}_{J,\text{spire}} \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

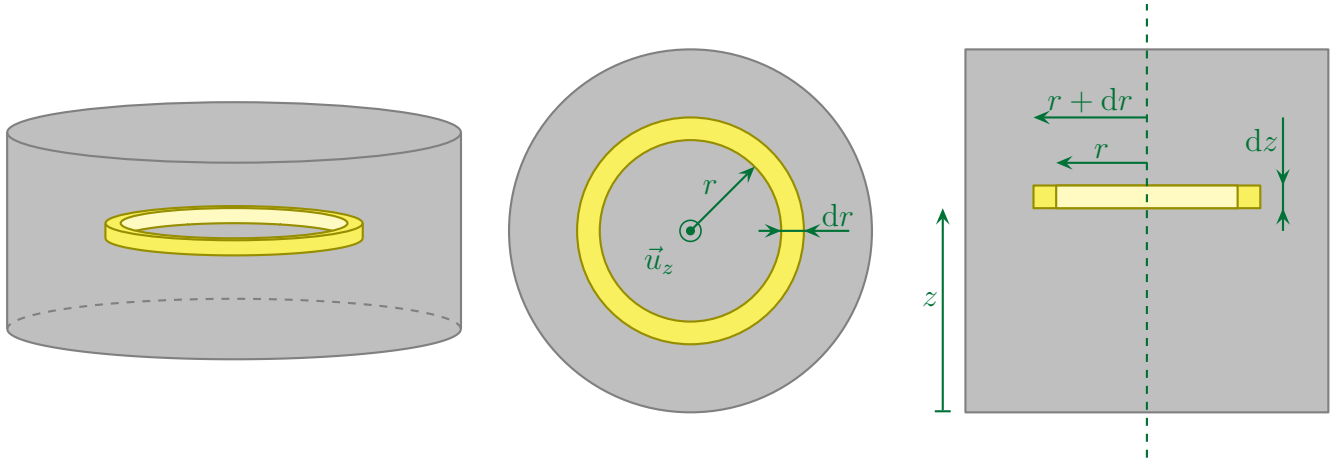
→ soit nous découpons l'ensemble en volume élémentaires puis

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL – FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

I.4.ii – vision électrocinétique en spires

★ préliminaire : le découpage en spires

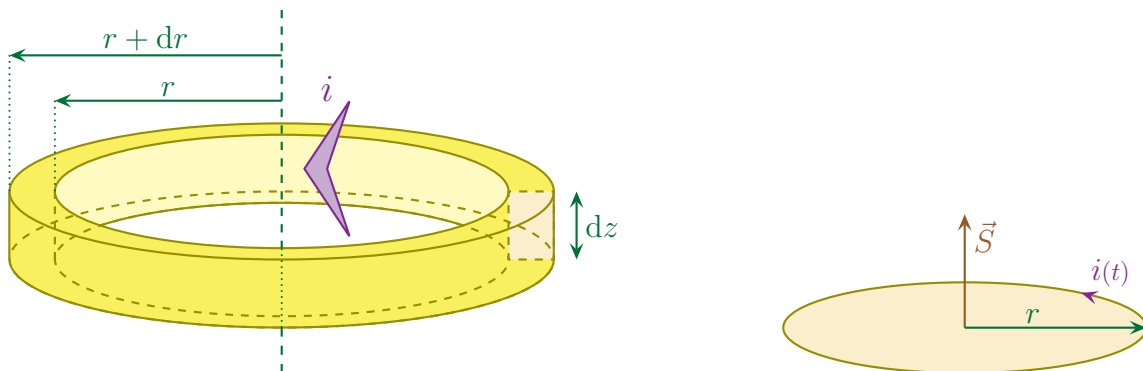
- ✧ Ici, pour choisir une « bonne » spire qui nous facilitera les calculs, nous devons respecter les symétries à la fois pour le champ magnétique et pour le matériau conducteur.
- ✧ Ici le choix va être très rapide (et très simple) : nous allons considérer une spire située à la cote z , de largeur dr et de rayon r .



★ étude d'une spire

🌀 trouver e_{ind}

- ✧ Pour trouver e_{ind} nous allons isoler la spire considérée et la voir comme un circuit usuel filiforme.

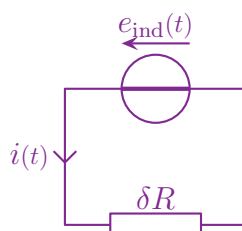


- ✧ Avec la loi de FARADAY nous trouvons très vite

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi_B = \pi r^2 \times B(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}(t)$$

🌀 en déduire i

- ✧ Le modèle électrocinétique de la spire est



✧ La loi de POUILLET donne immédiatement

$$i_{\text{spire}} = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{\delta R}$$

🌀 et la puissance dissipée

✧ La puissance dissipée par le résistor équivalent s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{J,spire}} = \delta R \times i_{\text{spire}}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{J,spire}} = \frac{e_{\text{ind}}^2(t)}{\delta R}$$

✧ Or, parce que la spire est très fine, nous pouvons dire qu'il s'agit d'un conducteur dont la résistance s'écrit

$$\delta R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\text{longueur}}{\text{section}} \quad \rightsquigarrow \quad \delta R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{2\pi r}{dr dz}$$

✧ Et ainsi

$$d\mathcal{P}_{\text{J,spire}} = \frac{\gamma \pi^2 r^4 \dot{B}^2(t)}{2\pi r} \times dr dz \quad \rightsquigarrow \quad d\mathcal{P}_{\text{J,spire}} = \frac{\gamma \pi r^3 \dot{B}^2(t)}{2} \times dr dz$$

★ sommation sur toutes les spires

✧ Nous avons, par simple extensivité de la puissance dissipée

$$\mathcal{P}_{\text{J,tot}} = \int_{\text{spires}} d\mathcal{P}_{\text{J,spire}}$$

✧ Comme une spire dépend de la cote et de son rayon, nous devons sommer pour toutes les cotes et tous les rayons, ce qui donne

$$\mathcal{P}_{\text{J,tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r=R} d\mathcal{P}_{\text{J,spire}}$$

✧ Remplaçons

$$\mathcal{P}_{\text{J,tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\gamma \pi r^3 \dot{B}^2(t)}{2} \times dr dz$$

✧ Réarrangeons

$$\mathcal{P}_{\text{J,tot}} = \frac{\gamma \pi \dot{B}^2(t)}{2} \times \left(\int_{z=0}^{z=h} dz \right) \times \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right)$$

✧ Ce qui donne, tous calculs (rapides) faits

$$\mathcal{P}_{\text{J,tot}} = \frac{\gamma \pi h R^4 \dot{B}^2(t)}{8}$$

✧ Nous pouvons tout d'abord constater que la puissance dissipée est bien positive, ce qui est très rassurant.

✧ De plus, alors que nous voyons que la puissance dissipée est directement proportionnelle à la conductivité (ce qui n'a rien d'évident, bien au contraire), nous pouvons constater qu'elle croît plus vite que le volume. Autrement dit : la puissance dissipée n'est pas uniforme mais dépend de la taille du volume.

- ◇ Ensuite, nous pouvons voir que la dépendance est en B^2 ce qui explique l'utilisation de ferromagnétiques. Avec un ferromagnétique, le champ magnétique efficace³ est multiplié par $\mu_r =$ qq 100aine. Cela permet donc des puissances dissipée multipliée par un facteur allant de 10^4 à 10^6 par rapport à un simple conducteur non ferromagnétique comme le cuivre !
- ◇ Enfin, comme la dépendance est en ω^2 , il est préférable de travailler en hautes fréquences. Toutefois, il ne faut pas non plus travailler en trop hautes fréquences de manière à ne pas créer un effet de peau trop important qui empêcherait le champ magnétique de pénétrer au cœur du matériau et donc d'y créer des courants par induction.

★ homogénéité

- ◇ Pour vérifier l'homogénéité dans le cas de résultat avec l'induction, ce n'est jamais très immédiat. La grande idée pour y parvenir et de faire apparaître la force de LAPLACE homogène à $B i \ell$.
- ◇ Nous avons tout d'abord

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \gamma \times \ell^5 \times \frac{B^2}{\tau^2}$$

- ◇ Ensuite, transformons un B en E en pensant à la force de LORENTZ

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \rightsquigarrow B \equiv \frac{E}{v} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \gamma \times \ell^4 \times \frac{B}{\tau} \times \frac{E}{v} \times \frac{\ell}{\tau}$$

- ◇ Nous pouvons alors utiliser la loi d'OHM

$$j \equiv \gamma E \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \ell^4 \times \frac{B}{\tau} \times j$$

- ◇ Nous reconnaissons une intensité

$$i \equiv j \ell^2 \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \ell^2 \times \frac{B}{\tau} \times i$$

- ◇ Et nous voyons enfin que la puissance peut se mettre sous la forme « force \times vitesse » ce qui prouve bien que c'est une puissance

$$F \equiv B i \ell \quad \text{et} \quad v \equiv \frac{\ell}{\tau} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv F \times v$$

I.4.iii – vision électromagnétique mésoscopique

★ rappel de l'analyse

- ◇ Rappelons le plan de bataille

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL – FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

★ trouver \vec{E}

- ◇ Partons de l'équation de MAXWELL – FARADAY

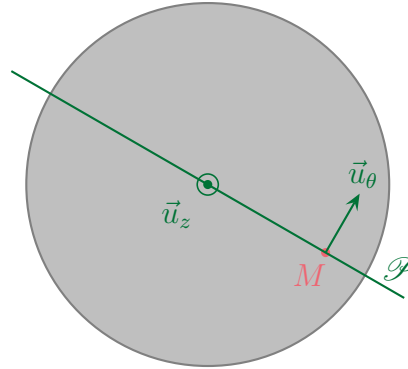
$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- ◇ Comme le champ magnétique est uniforme et porté uniquement par \vec{u}_z , cette équation devient

3. Dénomination non académique.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{dB}{dt}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ Il reste maintenant à inverser le rotationnel...
- ◇ Commençons par bien poser le problème : « \vec{B} est la source de \vec{E} et le but est de chercher \vec{E} ».
- ◇ Pour cela, faisons comme d'habitude en cherchant les invariances et les symétries.
- ◇ Du point de vue des invariances, l'uniformité du champ **et** la symétrie de la pièce cylindrique, nous permettent de dire que le champ \vec{E} est invariant par rotation.
- ◇ De plus, comme \vec{E} et \vec{B} sont de natures différentes, les plans de symétrie de l'un seront des plans d'antisymétrie de l'autre et réciproquement.



- ◇ C'est ainsi qu'en considérant le champ \vec{B} associé à la pièce métallique, nous pouvons dire que, pour un point M quelconque, le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des causes :
 - donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de \vec{E} ;
 - donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$ est orthogonal à \mathcal{P} ;
 - donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$ est porté par \vec{u}_θ .
- ◇ Avec un formulaire, nous pouvons constater que la projection sur \vec{u}_z du rotationnel s'écrit

$$\frac{1}{r} \times \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \times \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{dB}{dt}$$

- ◇ Comme le champ magnétique ne dépend pas de r , nous pouvons primitiver tranquillement

$$\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -r \frac{dB}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad r E_\theta = -\frac{r^2}{2} \times \frac{dB}{dt} + C^{\text{te}}$$

- ◇ La constante est nulle car, par symétrie, nous voyons bien que $E(r=0) = 0$.
- ◇ Il reste donc

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \times \frac{dB}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}(M) = -\frac{r}{2} \times \dot{B}(t) \vec{u}_\theta$$

★ trouver \vec{j} et la puissance dissipée

- ◇ La loi d'OHM donne directement

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = -\frac{\gamma r}{2} \times \dot{B}(t) \vec{u}_\theta$$

- ◇ La puissance dissipée dans le volume $d\tau$ s'écrit donc

$$d\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad \rightsquigarrow \quad d\mathcal{P}_J = +\frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) d\tau$$

★ trouver la puissance dissipée totale

◇ Là aussi, il ne reste plus qu'à sommer sur l'ensemble du volume

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \iiint_V d\mathcal{P}_J \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \iiint_V \frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) d\tau$$

◇ Pour le volume élémentaire, rappelons-nous du déplacement élémentaire

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\tau = r dr d\theta dz$$

◇ Nous avons ainsi

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) r dr d\theta dz$$

◇ Ce qui se réécrit

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\gamma \dot{B}^2(t)}{4} \times \left(\int_{z=0}^{z=h} dz \right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right) \times \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right)$$

◇ Et après calculs (simples)

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\pi}{8} \times \gamma \dot{B}^2(t) \times R^4 h$$

◇ Il s'agit, bien sûr, du même résultat.

I.4.iv – retour sur l'analyse

★ analyse physique

◇ Nous voyons qu'il y a deux approches possible :

- l'approche en terme de conducteur filiforme ;
- l'approche *via* la vision mésoscopique.

◇ La vision « conducteur filiforme » donne

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} \mathcal{P}_{J,\text{spire}} \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

◇ L'approche mésoscopique, elle, donne

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL – FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

◇ Les deux visions sont totalement équivalentes. Il est possible de passer de l'une à l'autre :

- $\vec{E} \xrightarrow{\text{circulation}} e_{\text{ind}} ;$
- $\vec{j} \xrightarrow{\text{flux}} i.$

◇ Nous pouvons aussi remarquer que la présence du courant i final **n'engendre pas** un nouveau champ magnétique qui engendrerait à nouveau de l'induction.

◇ Lorsque, dans le paragraphe suivant, il faudra tenir compte de cet effet, nous ne le modéliserons pas par une rétroaction sur \vec{B} mais par une rétroaction sur i *directement*.

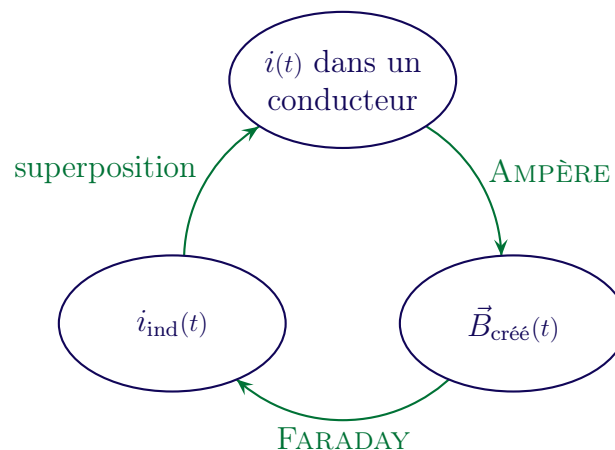
★ analyse technique

- ◇ Techniquement nous utiliserons toujours *a priori* la loi de FARADAY soit en version « circuit filiforme » soit, éventuellement, en version « approche mésoscopique » dans le cas d'une induction en volume.
- ◇ Nous n'utiliserons pas l'approche en terme de champ électromoteur, sauf si le potentiel vecteur \vec{A} est déjà connu.
- ◇ Enfin, *a posteriori*, nous vérifierons :
 - que la loi de LENZ est vérifiée ;
 - que l'épaisseur de peau est négligeable ;
 - que la rétroaction du courant induit sur le champ inducteur est négligeable.
- ◇ Le fait que le courant induit engendre des champs magnétiques suffisamment intenses pour modifier notablement l'induction s'appelle le phénomène d'« autoinduction ».

I.5 – Autoinduction

I.5.i – origine physique

- ◇ L'autoinduction est un phénomène de rétroaction qui peut apparaître dès lors qu'un courant circule dans un conducteur.



- ◇ L'auto-induction est d'autant plus forte que le champ \vec{B} créé est intense, autrement dit le phénomène est important avec les bobines.

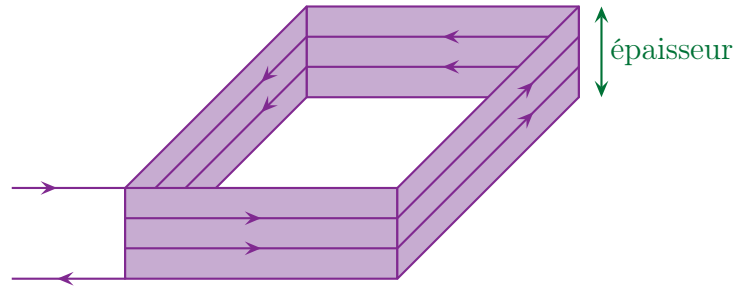
★ modélisation d'une bobine

- ◇ Comme d'habitude, nous modéliserons les bobines non pas par une hélice mais par une association de spires indépendantes.



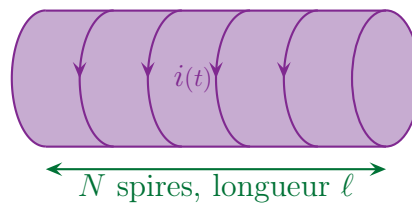
★ deux grands types de bobines

◇ Il existe des bobines dites « plates » pour lesquelles l'épaisseur est faible devant la section.



◇ Ces bobines sont, en général, considérées comme infiniment plates et sont caractérisées par le nombre N de tours que fait le fil.

◇ Il y a aussi les solénoïdes



◇ Les solénoïdes sont caractérisés par leur longueur ℓ et le nombre de spires N .

◇ Rappelons que le champ magnétique créé par un solénoïde infini :

→ est nul en dehors du solénoïde ;

→ vaut $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur du solénoïde.

I.5.ii – inductance d'une bobine

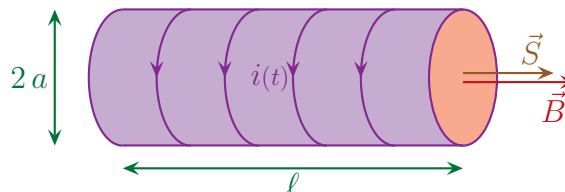
★ flux propre

🕒 définition

Le *flux propre* d'une bobine (ou d'un circuit) est le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers elle-même (lui-même).

🕒 exemple

◇ Prenons l'exemple de la bobine idéale.



◇ Ici, comme la bobine est modélisée par une juxtaposition de N spires indépendantes, nous pouvons dire que

$$\Phi_{\text{propre}} = \Phi_{\text{tot}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_N$$

- ◇ Comme le champ est uniforme dans toute la bobine, le flux traversant chaque spire est le même et s'écrit

$$\Phi_{\text{spire}} = B \times \pi a^2 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi a^2$$

- ◇ Nous avons ainsi

$$\Phi_p = N \times \Phi_{\text{spire}} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i$$

★ inductance

🕒 définition

L'inductance d'une bobine (ou d'un circuit) est la grandeur notée L , mesurée en henry, telle que

$$\Phi_p = L \times i \quad \text{où}$$

i est le courant traversant la bobine (ou le circuit).

L'inductance est toujours positive.

- ◇ L'inductance est forcément positive puisque le vecteur surface \vec{S} utilisé pour calculer le flux propre et le champ magnétique créé par i sont forcément dans le même sens, donné par la main droite.

Le flux magnétique s'exprime en *weber (Wb)* avec

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T.m}^2$$

🕒 exemple

- ◇ Pour la bobine idéale, nous avons tout de suite

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i \quad \rightsquigarrow \quad L_{\text{bob idéale}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$$

🕒 rappel

- ◇ Lors d'un calcul de flux à travers une surface qui s'appuie sur quelque chose :
- ➔ si le quelque chose est un contour fictif (théorème d'AMPÈRE), l'orientation du contour est arbitraire ;
 - ➔ si le quelque chose est un circuit électrique (en induction), l'orientation se fait obligatoirement dans le sens de i .

★ justification de la définition

- ◇ En fait, en regardant les lois, nous pouvons voir que le flux propre est obligatoirement proportionnel à l'intensité du courant qui le crée.
- ◇ En effet, la loi de BIOT et SAVART s'écrit

$$\vec{B}_{\text{propre}}(M) = \int_{P \in \text{bobine}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i \, d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

◇ L'ARQS impose que le courant i est le même dans toute la bobine ce qui donne

$$\vec{B}_{\text{propre}}(M) = i \times \int_{P \in \text{bobine}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \rightsquigarrow \vec{B}_{\text{propre}}(M) = i \times \vec{\kappa}(M)$$

◇ Nous pouvons donc voir que, quel que soit le point M considéré, le champ magnétique est proportionnel à l'intensité i .

◇ Comme le flux (fût-il propre), est proportionnel au champ magnétique, nous voyons que, là aussi, le flux propre est proportionnel à l'intensité.

I.5.iii – aspect électrocinétique

★ où une loi connue depuis très longtemps refait surface

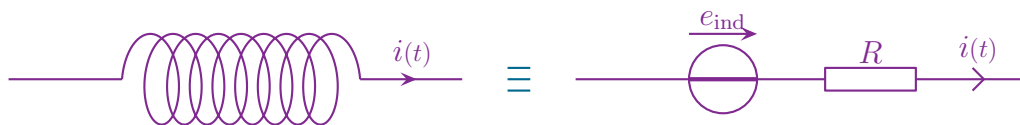
🗨 énoncé

La tension aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R s'écrit, en convention récepteur

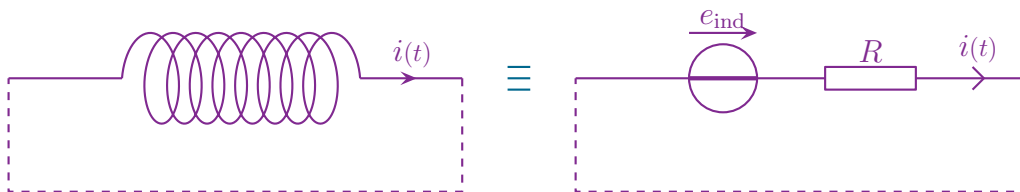
$$u_{\text{bob}} = +L \frac{di}{dt}(t) + R i(t)$$

🗨 démonstration

◇ Considérons une bobine parcourue par un courant. Elle va alors créer un champ magnétique qui, lui-même, va engendrer un phénomène d'induction. Cherchons la f.é.m induite.



◇ Pour cela, calculons la circulation du champ électromoteur sur la bobine court-circuitée de manière à pouvoir en déduire la f.é.m. induite.

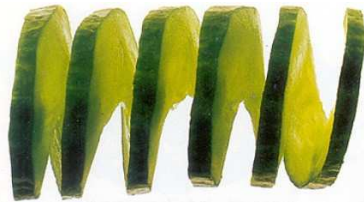


◇ Sur ce circuit *fermé*, nous pouvons utiliser la loi de FARADAY.

◇ Or le flux à travers le circuit se réduit au flux à travers la bobine car le flux à travers la portion qui « referme » le circuit est négligeable.

◇ En effet, la surface qui s'appuie sur la bobine ressemble à une grande hélice, un peu comme cette sculpture sur concombre⁴

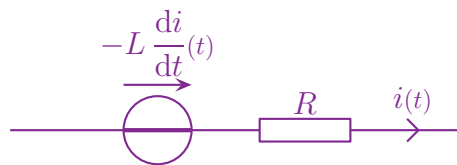
4. Source : <http://i82.servimg.com/u/f82/09/02/30/17/legume17.jpg>



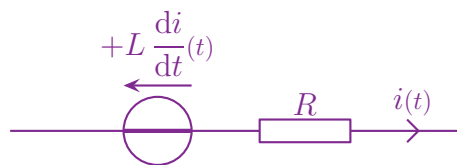
- ◇ Cela implique que la surface formée par le fil qui referme le circuit peut être considérée comme négligeable, surtout si le fil de retour « colle » la bobine.
- ◇ Dans ces conditions, nous avons

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi_p = L i(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}(t)$$

- ◇ Dans ces conditions la bobine peut se modéliser par

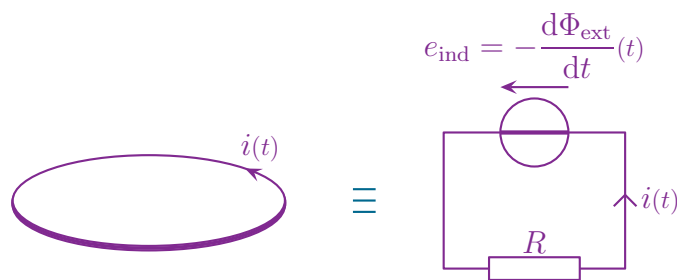


- ◇ Et en convention récepteur, cela donne

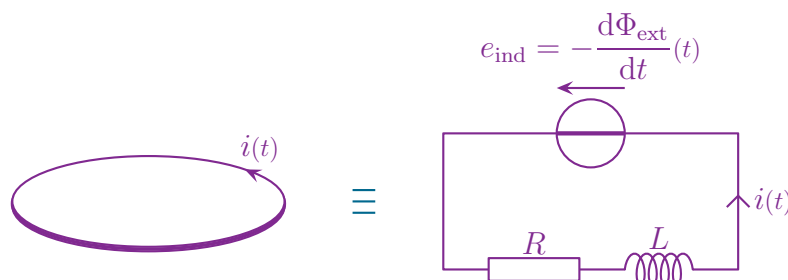


★ tenir compte de l'autoinduction dans un problème d'induction

- ◇ Prenons un circuit plongé dans un champ magnétique variable, donc soumis à induction.
- ◇ S'il s'agit d'une spire toute seule, l'auto-induction est négligeable et nous savons que nous pouvons modéliser l'aspect électrocinétique de la manière suivante.



- ◇ En revanche si, maintenant, le phénomène d'autoinduction n'est plus négligeable, nous n'allons **pas** calculer \vec{B}_{propre} et encore moins Φ_{propre} mais inclure un effet « bobine » dans le circuit modélisé.



- ◇ Dans la modélisation précédente :
 - le flux Φ de la loi de FARADAY est calculé **uniquement** avec le champ extérieur ;
 - **tout** l'effet d'autoinduction est pris en compte dans le L (aussi bien \vec{B}_{propre} que Φ_{propre}).
- ◇ En fait, l'un dans l'autre, en pratique, il est possible d'oublier les notions de flux propre et de champ propre puisque, techniquement, la seule différence entre auto-induction et non auto-induction c'est l'adjonction d'une bobine dans le circuit modélisé.

I.5.iv – aspect énergétique

★ loi

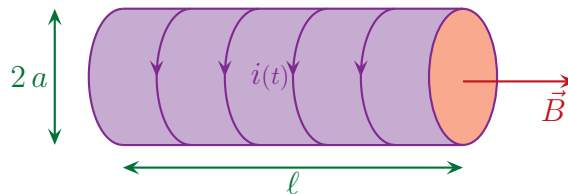
L'énergie contenue dans le champ magnétique d'une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{mag}}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

- ◇ La démonstration de l'énergie contenue dans une bobine a été faite en première année avec une approche électrocinétique.
- ◇ Nous devons maintenant montrer que cette énergie est bien celle contenue dans le champ magnétique créé par la bobine.

★ cas de la bobine idéale

- ◇ Nous allons montrer ce résultat sur un exemple et accepter la généralisation.
- ◇ Considérons une bobine idéale.



- ◇ Nous savons alors qu'elle crée un champ magnétique de norme $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ dans le volume $\mathcal{V} = \pi a^2 \ell$.
- ◇ L'énergie contenue dans le champ magnétique s'écrit donc

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = e_{\text{mag}} \times \mathcal{V} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\mu_0^2}{2 \mu_0} \frac{N^2}{\ell^2} i^2(t) \times \pi a^2 \ell \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \times i^2(t)$$

- ◇ Nous reconnaissons là l'expression de l'inductance d'une bobine idéale ce qui donne

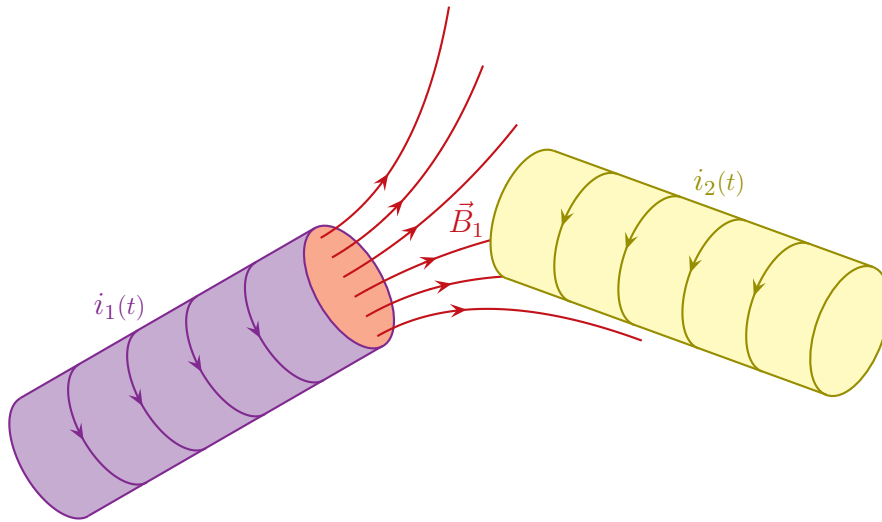
$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times L \times i^2(t)$$

I.6 – Induction mutuelle

I.6.i – analyse

★ origine

- ◇ Considérons deux bobines.



◇ La bobine ① crée un champ magnétique \vec{B}_1 qui engendre un flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ à travers la bobine ②. Nous avons donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} \propto B_1 \quad \text{et} \quad B_1 \propto i_1 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} \propto i_1$$

◇ De même, nous avons

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} \propto B_2 \quad \text{et} \quad B_2 \propto i_2 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} \propto i_2$$

◇ Nous pouvons donc écrire, en introduisant les constantes de proportionnalité

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2$$

◇ M_{12} et M_{21} sont homogènes à des inductances et sont appelés « coefficient de mutuelle inductance ».

Lorsque deux circuits sont en interaction magnétique, le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ que ① crée à travers ② et le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ que ② crée dans ① s'écrivent

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

M est appelé le *coefficient de mutuelle inductance*.

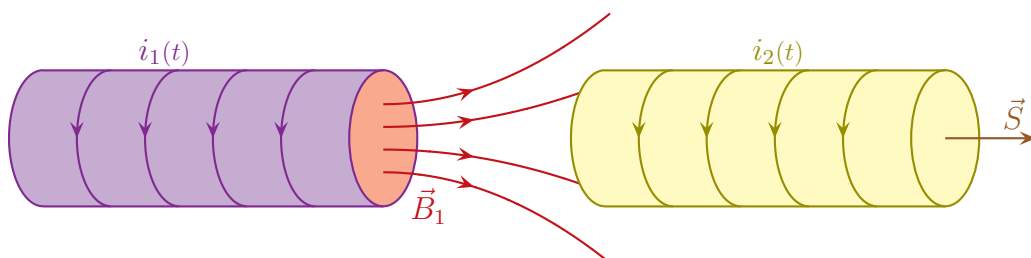
◇ Autrement dit, par rapport à ce qui précède, nous avons

$$M_{12} = M_{21}$$

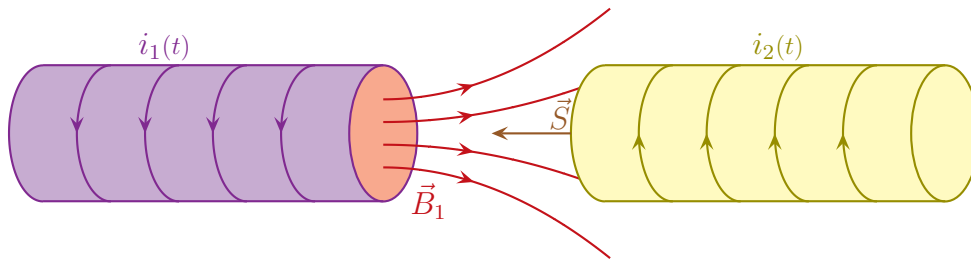
◇ Le résultat précédent est appelé « théorème de NEUMANN » et nous l'admettrons.

Le coefficient de mutuelle inductance dépend de la géométrie des bobines considérées et est positif ou négatif suivant l'orientation (arbitraire) des courants

◇ Sur l'exemple suivant, nous avons $\Phi_{1 \rightarrow 2} > 0$ lorsque $i_1(t) > 0$ donc $M_{12} = M > 0$.



- ◇ Sur l'exemple suivant, la bobine 2 est orientée dans l'autre sens, ce qui implique $\Phi_{1 \rightarrow 2} < 0$ pour $i_1(t) > 0$. De là nous en déduisons $M_{12} = M < 0$.



★ aspect qualitatif

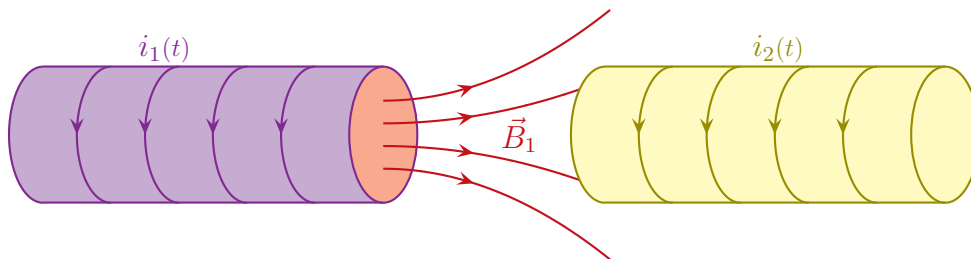
Qualitativement :

- le coefficient d'auto-induction d'une bobine est proportionnel au carré du nombre de spires, $L \propto N^2$;
- le coefficient de mutuelle induction de deux bobines est proportionnel au produit de leurs nombres de spires, $M \propto N_1 N_2$.

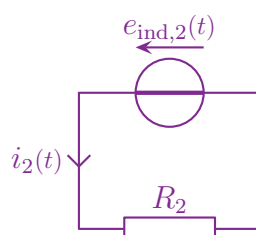
- ◇ En effet, en considérant le coefficient de mutuelle inductance :
- plus il y a de spires dans la bobine ①, plus le champ magnétique créé est intense, d'où la proportionnalité avec N_1 ;
 - plus il y a de spires dans la bobine ②, plus le flux engendré par le champ magnétique ① est grand, d'où la proportionnalité avec N_2 .
- ◇ Pour le coefficient d'auto-inductance, c'est le même nombre de spires N qui joue les deux rôles ci-dessus.

★ sens du courant induit

- ◇ Considérons l'exemple suivant et constatons que le coefficient de mutuelle inductance est positif.



- ◇ Imaginons que le courant $i_1(t)$ augmente. Alors :
- le flux $\Phi_2 = M i_1(t)$ augmente ;
 - la f.é.m. induite est négative $e_{\text{ind}2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} < 0$;
 - le courant $i_2(t)$ est alors négatif comme le montre le schéma électrocinétique suivant.



✧ Nous pouvons le vérifier avec la loi de LENZ :

- la cause de $i_2(t)$, ce sont les *variations* de \vec{B}_1 ;
- \vec{B}_1 est de plus en plus grand vers la droite ;
- les conséquences de $i_2(t)$ doivent donc créer un champ \vec{B}_2 vers la gauche, pour modérer \vec{B}_1 ;
- la règle de la main droite nous dit alors que le courant $i_2(t)$ doit être négatif.

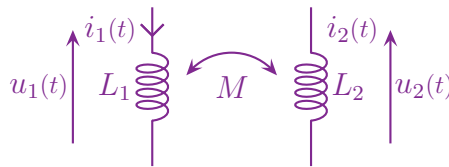
I.6.ii – aspect électrocinétique

★ loi

Deux bobines idéales en interaction magnétique dans des circuits électrocinétiques ont pour loi caractéristique, en convention récepteur,

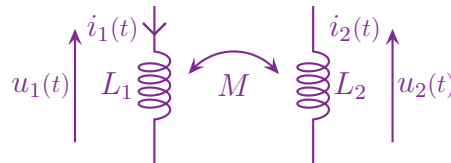
$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = +L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) \quad \text{où}$$

$$L_1 > 0 \quad L_2 > 0 \quad M \geqslant 0$$



★ démonstration

✧ Considérons deux bobines en interaction magnétique et représentons-les par leurs modèles électrocinétiques équivalents.



✧ Mettons de côté l'aspect résistif des bobines.

✧ Par linéarité du champ magnétique, et donc du flux, nous pouvons dire que le flux traversant la bobine ① est dû au champ magnétique propre et au champ magnétique engendré par l'autre bobine. Cela donne

$$\Phi_1 = \Phi_p + \Phi_{2 \rightarrow 1} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_1 = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$

✧ Et la loi de FARADAY nous permet de dire que la f.é.m. qui apparaît aux bornes de la bobine dans le sens du courant, *i.e.* en convention générateur, est

$$e_{\text{ind1}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind1}}(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt}(t) - M \frac{di_2}{dt}(t)$$

✧ Et en repassant en convention récepteur, nous obtenons bien le résultat énoncé au début.

I.6.iii – aspect énergétique

★ loi

Dans le cas de deux bobines en influence mutuelle, l'énergie contenue dans le champ magnétique s'écrit, avec des notations naturelles

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

★ interprétation

- ◇ Comme nous pouvons le constater, l'énergie contenue dans le champ magnétique *semble* ne plus être extensive car, naïvement, nous aurions pu croire que celle-ci s'écrirait

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$$

- ◇ En fait, l'énergie est *bien* extensive.
- ◇ Ce qu'il faut comprendre, c'est que l'énergie $\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t)$ est l'énergie contenue dans le champ magnétique créé par la bobine ① toute seule et $\frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$ est l'énergie contenue dans le champ magnétique créé par la bobine ② toute seule.
- ◇ Mais lorsque les deux bobines sont ensemble, il n'est **pas possible** de dire : « ceci est le champ magnétique créé par la première et ceci est le champ magnétique créé par la deuxième. » Il n'existe qu'un champ magnétique, celui créé par les deux bobines en même temps !
- ◇ C'est ainsi que si l'énergie est bien extensive, il faut voir qu'en chaque point de l'espace, la densité volumique d'énergie magnétique s'écrit

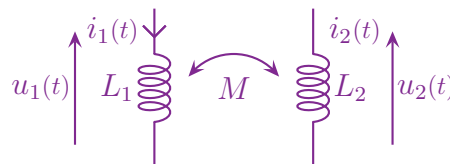
$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \rightsquigarrow u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 \rightsquigarrow u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_2^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$$

- ◇ C'est le troisième terme qui, une fois sommé sur tout l'espace donne la résultante $M i_1(t) i_2(t)$.

☕ *Remarque.* Le fait d'associer à chaque bobine un champ « personnel » est très fréquent, même dans la vulgarisation, avec la notion de « lignes de champ » qui sortent d'une bobine et qui semblent donc, visuellement, avoir été créées par celle-ci uniquement ce qui est, bien évidemment, faux.

★ démonstration

- ◇ Nous allons faire la démonstration *via* l'aspect électrocinétique des bobines.
- ◇ Considérons deux bobines idéales en interaction mutuelle.



- ◇ Les tensions à leurs bornes s'écrivent, en convention récepteur

$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = +L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t)$$

- ◇ Les puissances respectives qu'elles reçoivent s'écrivent donc

$$\mathcal{P}_{r1}(t) = u_1(t) \times i_1(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r2}(t) = u_2(t) \times i_2(t)$$

◇ La puissance totale reçue s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{tot}}(t) &= \mathcal{P}_{r1}(t) + \mathcal{P}_{r2}(t) \\ &= L_1 i_1(t) \times \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + M i_1(t) \times \frac{di_2}{dt}(t) + L_2 i_2(t) \times \frac{di_2}{dt}(t) + M i_2(t) \times \frac{di_1}{dt}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right) \end{aligned}$$

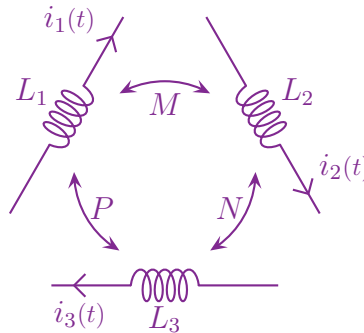
◇ Résultat que nous pouvons interpréter sous la forme

$$\mathcal{P}_{\text{tot}}(t) = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mg}}}{dt}(t)$$

◇ Ce qui est le résultat attendu.

★ plus que deux bobines

◇ Dans le cas (rarissime) où trois ou plus bobines sont en interaction, il faut compter tous les termes de couplage.



◇ Avec la situation ci-dessus, l'énergie magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + \frac{1}{2} L_3 i_3^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + N i_2(t) i_3(t) + P i_1(t) i_3(t)$$

◇ Remarquons qu'il n'y a pas de terme énergétique d'interaction « à trois » proportionnel à $i_1(t) \times i_2(t) \times i_3(t)$. Le lecteur pourra s'en convaincre aisément en développant le terme d'énergie volumique

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

I.6.iv – coefficient de couplage

★ résultat

Pour deux bobines d'inductance L_1 et L_2 ,
le coefficient de mutuelle inductance est tel que

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Deux bobines d'inductance L_1 et L_2 sont dites en *couplage parfait* lorsque

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Le *coefficient de couplage* k de deux bobines est défini par

$$k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{avec} \quad -1 \leq k \leq 1$$

★ interprétation

- ◇ Physiquement le couplage parfait correspond au cas où *toutes* les lignes de champ créées par une bobine traversent toutes les spires de l'autre bobine.
- ◇ En pratique ce cas idéal n'est jamais réalisé⁵ et c'est la raison pour laquelle le coefficient de mutuelle inductance est majoré.

★ démonstration

- ◇ Rappelons que l'énergie magnétique possède deux expressions différentes, suivant la vision (électrocinétique ou électromagnétique) adoptée

$$\mathcal{E}_{\text{mg}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{mg}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2 \mu_0} B^2(P) d\tau_P$$

- ◇ La deuxième expression montre de manière immédiate que l'énergie \mathcal{E}_{mg} est **toujours** positive.
- ◇ Cela implique

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad i_1^2 \left(\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \frac{i_2^2}{i_1^2} + M \frac{i_2}{i_1} \right) \geq 0$$

- ◇ En divisant par $i_1^2 \geq 0$, nous voyons apparaître un trinôme en $X \stackrel{\text{not}}{=} \frac{i_2}{i_1}$ qui est toujours positif

$$\frac{1}{2} L_2 X^2 + M X + \frac{1}{2} L_1 \geq 0$$

- ◇ Nous savons alors que ce trinôme ne peut être tout le temps positif que si son discriminant est *négatif*. Cela implique

$$M^2 - 4 \times \frac{1}{2} L_2 \times \frac{1}{2} L_1 \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad M^2 \leq L_1 L_2$$

I-6.v – circuits couplés par mutuelle

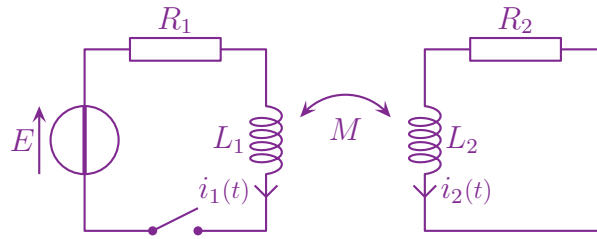
- ◇ Il s'agit là d'un exemple détaillé de l'utilisation en condition réelle de bobines couplées.

⁵. Mais il est possible de s'en rapprocher avec des matériaux qui « canalisent » les lignes de champ. Ce genre de pratiques est utilisée dans les transformateurs.

★ mise en équation

🔗 présentation de la situation

✧ Considérons les deux circuits couplés ci-dessous.



✧ L'interrupteur K est fermé à un instant considéré comme initial. Quelles sont les expressions des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$?

🔗 traduction du problème

✧ L'analyse est excessivement rapide ici :

➔ nous avons deux circuits à une maille, deux inconnues en intensité, nous allons choisir une approche maillière ;

➔ les grandeurs pertinentes sont R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , M et E .

✧ Les deux lois des mailles s'écrivent sans difficulté

$$E - R_1 i_1(t) - L_1 \frac{di_1}{dt}(t) - M \frac{di_2}{dt}(t) = 0 \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

✧ Ce qui donne

$$L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R_1 i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

✧ Il s'agit là d'équation différentielle couplées, pas forcément simples à résoudre.

★ résolution d'un cas particulier en régime transitoire

🔗 changement de problème

✧ Pour faciliter les calculs, nous allons considérer la simplification suivante

$$R_1 = R_2 \stackrel{\text{not}}{=} R \quad \text{et} \quad L_1 = L_2 \stackrel{\text{not}}{=} L$$

✧ Les équations se réécrivent alors

$$L \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R i_2(t) = 0$$

✧ En posant $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$ nous pouvons découpler facilement les équations précédentes en les additionnant et en les soustrayant.

✧ Commençons par les additionner

$$L \frac{dS}{dt}(t) + M \frac{dS}{dt}(t) + R S(t) = E \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dS}{dt}(t) + \frac{1}{\tau_S} S(t) = \frac{E}{L + M} \quad \text{avec} \quad \tau_S = \frac{L + M}{R}$$

✧ La soustraction donne, quant à elle,

$$L \frac{dD}{dt}(t) - M \frac{dD}{dt}(t) + R D(t) = E \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dD}{dt}(t) + \frac{1}{\tau_D} D(t) = \frac{E}{L-M} \quad \text{avec} \quad \tau_D = \frac{L-M}{R}$$

✧ Compte-tenu des conditions initiales $i_1(0) = 0$ et $i_2(0) = 0$, nous trouvons très vite

$$S(0) = 0 \quad \text{et} \quad D(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad S(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right) \quad \text{et} \quad D(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_D}\right)$$

🔗 retour au problème initial

✧ À partir des expressions de $S(t)$ et $D(t)$, nous trouvons

$$i_1(t) = \frac{S(t) + D(t)}{2} \quad \text{et} \quad i_1(t) = \frac{S(t) - D(t)}{2}$$

✧ Cela conduit à

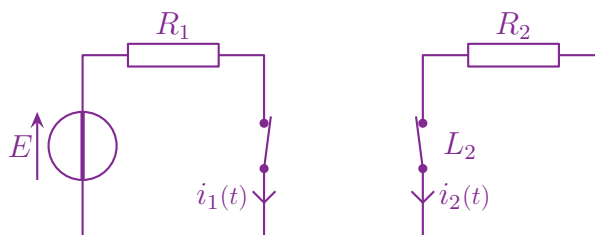
$$i_1(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} \left(e^{-t/\tau_S} + e^{-t/\tau_D}\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = \frac{E}{2R} \left(e^{-t/\tau_D} - e^{-t/\tau_S}\right)$$

🔗 interprétation

- ✧ Nous voyons apparaître deux temps caractéristiques : τ_S et τ_D .
- ✧ Ces deux durées caractéristiques sont forcément positives car $|M| \leq L$, ce qui prouve que les deux courants ont bien une valeur limite finie (ouf).
- ✧ Tout se passe donc exactement comme dans le cas d'un circuit du 2^e ordre en régime aperiodique.
- ✧ Nous voyons aussi que

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i_2(\infty) = 0$$

- ✧ Vérifions la cohérence du résultat précédent en représentant les équivalents des circuits en régime permanent stationnaire. Pour cela, il suffit de remplacer les bobines par des fils (qui ne peuvent, alors, avoir d'influence mutuelle). Cela donne



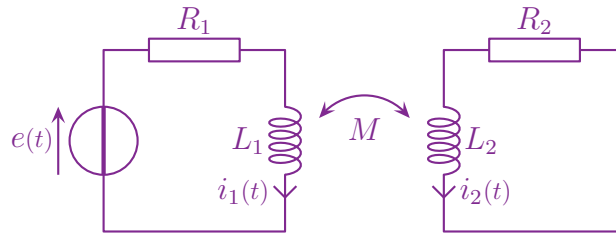
- ✧ Nous voyons donc immédiatement que nous avons bien

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i_2(\infty) = 0$$

★ résolution en régime sinusoïdal forcé

🔗 retour au problème initial

- ✧ Reprenons la situation initiale mais avec un GBF et cherchons uniquement $i_1(t)$ en régime permanent.



- ✧ Comme nous avons affaire ici avec un régime sinusoïdal forcé et que les lois sont linéaires, nous allons naturellement utiliser la notation complexe.
- ✧ Les lois des mailles s'écrivent toujours

$$L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R_1 i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

- ✧ Traduisons ces lois en version complexe. Pour cela remplaçons chaque dérivée temporelle par $j\omega$. Cela donne

$$j L_1 \omega \underline{I}_1 + j M \omega \underline{I}_2 + R_1 \underline{I}_1 = E \quad \text{et} \quad j L_2 \omega \underline{I}_2 + j M \omega \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 = 0$$

- ✧ Nous pouvons réécrire ces deux lois sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} (R_1 + j L_1 \omega) \underline{I}_1 + j M \omega \underline{I}_2 = E \\ j M \omega \underline{I}_1 + (R_2 + j L_2 \omega) \underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

- ✧ La solution tombe alors très vite

$$\underline{I}_1 = \frac{E (R_2 + j L_2 \omega)}{(R_1 + j L_1 \omega) \times (R_2 + j L_2 \omega) - (j M \omega)^2}$$

- ✧ Cela peut se réécrire

$$\underline{I}_1 = \frac{E}{R_1 + j L_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + j L_2 \omega}} \rightsquigarrow \underline{I}_1 = \frac{E}{R_1 + j L_1 \omega + \underline{Z}_{\text{mut}}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{mut}} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + j L_2 \omega}$$

- ✧ Autrement dit, la présence d'un circuit couplé au premier revient à adjoindre une impédance supplémentaire au premier.
- ✧ Ce principe est utilisé dans la détection de métaux. En effet, un morceau de métal joue le rôle d'un circuit électrique conducteur influencé (donc couplé) avec un autre circuit. En rapprochant un circuit de référence (le détecteur) en régime sinusoïdal forcé d'un morceau de métal, le coefficient de couplage M change. Une mesure de la valeur efficace de l'intensité traversant le circuit de référence permet de contrôler cette variation et donc de déclencher une alarme en cas de présence de métal.

II – Circuit mobile dans un champ statique

L'induction qui existe dans un circuit mobile se déplaçant dans un champ magnétique constant (uniforme ou non) est appelée *induction de LORENTZ*.

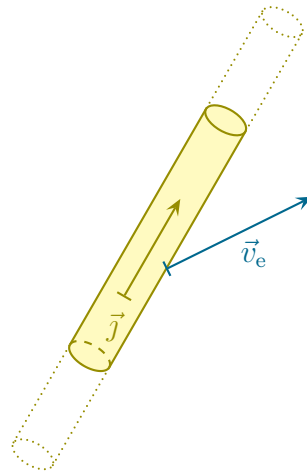
- ◇ Dans toute cette partie il ne faudra pas confondre « constant » (qui ne varie pas dans le temps) et « uniforme » (qui ne varie pas dans l'espace).

II.1 – Transformation galiléenne des champs

II.1.i – courant électrique dans deux référentiels différents

★ question

- ◇ Regardons une portion de circuit électrique.



- ◇ Cette portion :
- est parcourue par un courant \vec{j} ;
 - est animée de la vitesse \vec{v}_e ;
 - est plongée dans (\vec{E}, \vec{B}) .
- ◇ Question. Dans le référentiel \mathcal{R}' lié au conducteur (*i.e.* dans le référentiel où le conducteur est immobile), que deviennent les champs électrique et magnétique ?

★ réponse

🧠 énoncé

Dans un référentiel \mathcal{R}' en translation à la vitesse \vec{v}_e par rapport à \mathcal{R} , les champs électrique et magnétique s'écrivent

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

🧠 démonstration

- ◇ Commençons par rappeler une loi fondamentale.

INVARIANCE GALILÉENNE DES FORCES

La force subie par un point matériel est la même quel que soit le référentiel galiléen choisi.

- ◇ Considérons une charge dans le conducteur.
- ◇ Les forces qu'elle subit dans les référentiel \mathcal{R} et \mathcal{R}' s'écrivent respectivement

$$\vec{f}_{|\mathcal{R}} = q \left(\vec{E} + \vec{v}_{|\mathcal{R}} \wedge \vec{B} \right) \quad \text{et} \quad \vec{f}_{|\mathcal{R}'} = q \left(\vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}' \right)$$

- ◇ L'invariance galiléenne des forces implique

$$\vec{f}_{|\mathcal{R}} = \vec{f}_{|\mathcal{R}'} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} + \vec{v}_{|\mathcal{R}} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}'$$

- ◇ Or la loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{|\mathcal{R}'}, \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}'$$

- ◇ Ce résultat doit être vrai quelle que soit la vitesse $\vec{v}_{|\mathcal{R}'}$. Cela implique donc le résultat attendu à savoir

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}'$$

★ et le courant ?

🗨 énoncé

Le courant est le même quel que soit le référentiel.

🗨 démonstration

- ◇ Rappelons que dans un conducteur il y a trois types de charges :
 - ➔ les électrons libres, qui bougent par rapport au conducteur ;
 - ➔ les électrons de valence, fixes par rapport au conducteur ;
 - ➔ les noyaux atomiques, fixes aussi par rapport au conducteur.
- ◇ La densité de courant en volume pour le référentiel \mathcal{R} s'écrit, par définition, en notant i chaque type de charge, n_i la densité particulaire associée et q_i la charge d'un porteur

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{|\mathcal{R}}(i)$$

- ◇ Avec la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire cette densité de courant sous la forme

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i n_i q_i \left(\vec{v}_e + \vec{v}_{|\mathcal{R}'}(i) \right)$$

- ◇ En séparant la somme en deux, nous obtenons

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i (n_i q_i \vec{v}_e) + \sum_i (n_i q_i \vec{v}_{|\mathcal{R}'}(i))$$

- ✧ Nous pouvons remarquer que, pour le premier terme, \vec{v}_e est indépendant de la charge, nous pouvons donc le factoriser. De plus nous reconnaissons dans le 2^e terme, la densité de courant en volume dans le référentiel \mathcal{R}'

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \left(\sum_i (n_i q_i) \right) \times \vec{v}_e + \vec{j}_{|\mathcal{R}'}$$

- ✧ Or le fait même que le conducteur soit globalement neutre implique

$$\sum_i (n_i q_i) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j}_{|\mathcal{R}} = \vec{0} + \vec{j}_{|\mathcal{R}'}$$

- ✧ Ce qui est bien le résultat recherché.

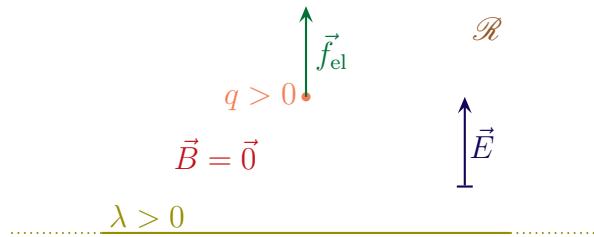
II.1.ii – oui mais non mais si



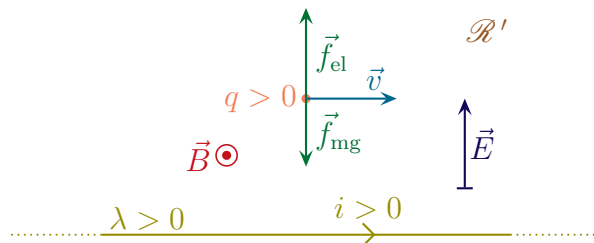
Ce qui suit est un terrain miné. Mieux vaut ne pas être le premier à en parler à l'oral.

★ un contre-exemple facile

- ✧ En fait les lois de transformations précédentes ne sont pas universelles et ont des contre-exemples simples, même en mécanique newtonienne.
- ✧ Considérons une charge $q > 0$ à proximité d'un fil infini chargé linéiquement $\lambda > 0$.



- ✧ Le fil crée un champ électrique \vec{E} radial et va « pousser » la charge.
- ✧ Considérons la même situation mais dans le référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme *vers la gauche*.
- ✧ Dans ces conditions, les charges semblent bouger vers la droite, ce qui implique que :
- ➔ q a une vitesse vers la droite ;
 - ➔ le fil est parcouru par un courant i orienté vers la droite.



- ✧ D'après les lois que nous connaissons, nous pouvons dire que le courant i crée un champ magnétique \vec{B}' comme orienté sur la figure et que le champ \vec{E}' est toujours radial **et** le même que \vec{E} (vu que $\vec{B} = \vec{0}$)
- ✧ Dans ces conditions, nous arrivons à une contradiction car la force de LORENTZ fait apparaître une composante magnétique non nulle $\vec{f}_m = q \vec{v}' \wedge \vec{B}'$ qui l'empêche d'être la même que dans le référentiel \mathcal{R} .

★ morale

- ◇ Les « vraies » lois de transformations font appel à la relativité restreinte mais sont identiques à celles que nous avons trouvées lorsque :
 - la charge globale est nulle ;
 - les vitesses sont faibles.
- ◇ Comme ces deux hypothèses seront toujours vérifiées, nous n'aurons pas de problème.
- ◇ Insistons une dernière fois : la démonstration que nous avons faite pour la transformation des champs, est *fausse* dans le cas générale. En revanche, sa faible longueur permet d'en faire un moyen mnémotechnique très utile pour retenir la loi.

II.2 – Induction dans un circuit en mouvement

II.2.i – champ électromoteur

★ loi

Le champ électromoteur \vec{E}_m induit lors d'une induction de LORENTZ s'écrit

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

La f.é.m. induite dans un circuit dans le cas d'une induction de LORENTZ s'écrit

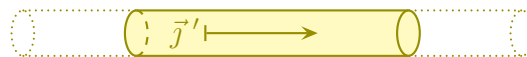
$$e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \text{circuit}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \qquad e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \text{circuit}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

★ précaution de lecture

- ◇ Il faut faire très attention à l'utilisation trop rapide des lois précédentes.
- ◇ Pour déterminer la f.é.m., il faut bien sommer $\left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$, *i.e.* il faut faire très attention au fait que le champ *et* la vitesse d'entraînement **peuvent dépendre** de P .

★ démonstration

- ◇ Considérons les référentiels \mathcal{R} où le conducteur est mobile et \mathcal{R}' lié au conducteur.
- ◇ Le but est de trouver le courant i dans \mathcal{R} . Sauf qu'avec un conducteur mobile, ce n'est pas évident. C'est pourquoi nous allons plutôt chercher i' , le courant dans \mathcal{R}' car le conducteur est immobile dans \mathcal{R}' et parce que nous savons déjà que $i = i'$.
- ◇ Intéressons-nous à la densité de courant \vec{j}' .



- ◇ La loi d'OHM nous dit que

$$\vec{j}' = \gamma \vec{E}'$$

- ◇ Avec la loi de composition des champs, cela s'écrit

$$\vec{j}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right)$$

✧ Or le champ électrique \vec{E} dans \mathcal{R} s'écrit (cf. lois de MAXWELL)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

✧ Sauf que dans le référentiel \mathcal{R} , le champ magnétique est statique, ce qui implique

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j}' = \gamma \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right)$$

✧ Nous pouvons écrire ce résultat sous la forme

$$\vec{j}' = \gamma \vec{E}' \quad \text{avec} \quad \vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

✧ Rappelons que, pour l'induction de NEUMANN nous avons

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_m \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire, par analogie, que, pour l'induction de LORENTZ

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

II.2.ii – et la loi de FARADAY ?

★ loi

🗨 énoncé

Un circuit continuellement défini plongé dans un champ magnétique statique possède une f.é.m. induite e_{ind} telle que

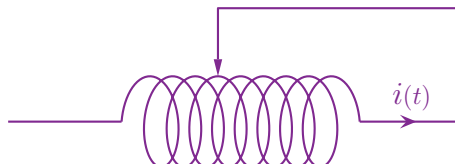
$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{où}$$

Φ_B est le flux de \vec{B} à travers le circuit orienté par i .

🗨 précaution

✧ Ici, pour que la loi fonctionne, il faut que le circuit soit défini à chaque instant.

✧ Imaginons la situation suivante : un contact électrique bouge le long d'une bobine, le tout plongé dans un champ magnétique.



✧ Nous avons bien un circuit électrique, mobile (le curseur), plongé dans un champ magnétique.

✧ Et pourtant il n'y a pas d'induction.

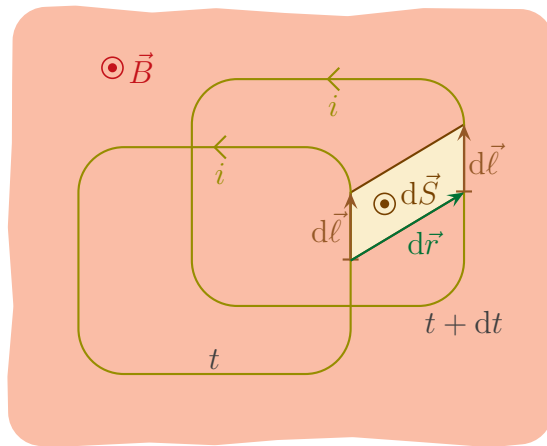
✧ Le fait est qu'ici le circuit n'est pas défini à *chaque instant*. En effet, entre le moment où le curseur « quitte » une spire pour aller rejoindre l'autre, le circuit est ouvert et le flux n'est plus définissable⁶.

6. Il en est de même si le curseur touche les deux spires en même temps.

- ✧ Cela explique pourquoi la loi de FARADAY n'est pas applicable ici et, donc, pourquoi il n'y a pas d'induction.
- ✧ Notons que ce genre de situation est rarissime dans les exercices (et ce d'autant plus que cela ne présenterait guère d'intérêt).

★ idée de démonstration

- ✧ Considérons un circuit mobile plongé dans un champ magnétique statique et dessinons-le à deux instants séparés de dt .



- ✧ Quelle est la f.é.m. élémentaire induite δe_{ind} dans la portion $d\vec{\ell}$ du circuit ?
- ✧ Par définition de la f.é.m. induite, nous avons

$$\delta e_{\text{ind}} = \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad \rightsquigarrow \quad \delta e_{\text{ind}} = (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

- ✧ Le produit mixte nous permet donc d'écrire

$$\delta e_{\text{ind}} = (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}_e) \cdot \vec{B}$$

- ✧ Et en multipliant par dt , nous voyons apparaître le déplacement $d\vec{r}$ de la portion de circuit

$$\delta e_{\text{ind}} dt = (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}_e dt) \cdot \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \delta e_{\text{ind}} dt = (d\vec{\ell} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

- ✧ Or le vecteur $d\vec{\ell} \wedge d\vec{r}$ est un vecteur orthogonal à $d\vec{\ell}$ et à $d\vec{r}$ et de norme égale à l'aire dS de la surface coloriée en jaune.

- ✧ Toutefois, avec la règle de la main droite et compte-tenu de l'orientation choisie pour $d\vec{S}$, nous avons

$$d\vec{\ell} \wedge d\vec{r} = -d\vec{S}$$

- ✧ Et ainsi

$$\delta e_{\text{ind}} dt = -d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

- ✧ Nous reconnaissons là le flux de \vec{B} à travers une portion de surface qui n'existait pas à l'instant t , *i.e.* nous pouvons dire qu'il s'agit de la *variation* du flux de \vec{B} à la travers la surface orientée dans le sens habituel, *i.e.* dans le sens donné par i .

- ✧ Techniquement, cela signifie que nous avons

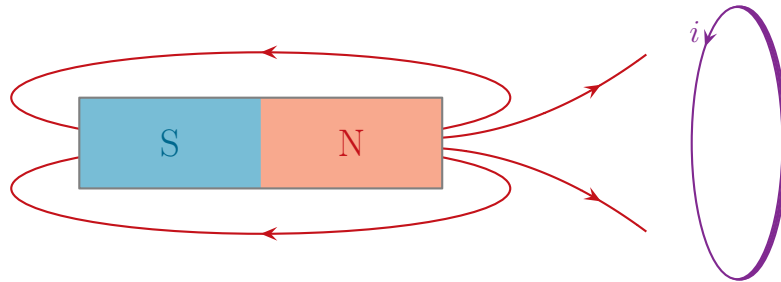
$$\delta e_{\text{ind}} dt = -\delta \Phi_B$$

- ✧ Par sommation, nous voyons que la f.é.m. induite est liée à la variation temporelle du flux de \vec{B} .

II.2.iii – aspect qualitatif

★ avec la loi de FARADAY

- ◇ Considérons un aimant permanent créant un champ magnétique non uniforme et approchons une spire circulaire de la face nord cet aimant ⁷.



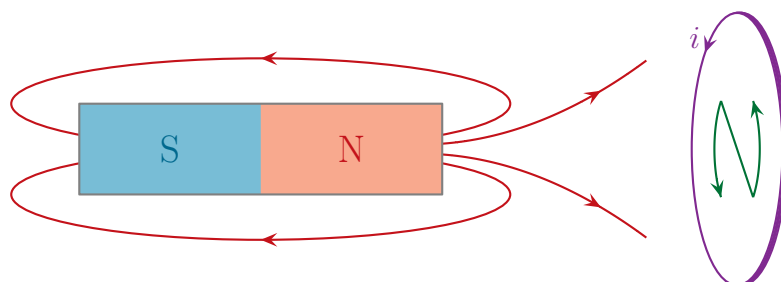
- ◇ Loin de l'aimant, le champ est plus faible, donc $|\Phi_B|$ est petit.
 ◇ Près de l'aimant, le champ est plus intense, donc $|\Phi_B|$ est grand.
 ◇ Or, étant donné l'orientation de la spire, nous pouvons dire que $\Phi_B < 0$.
 ◇ Dans ces conditions, lorsque la spire se rapproche, le flux passe de « un peu négatif » à « très négatif », *i.e.* le flux **diminue**.
 ◇ Nous avons donc $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$, ce qui implique $i > 0$.

★ avec la loi de LENZ

- ◇ Avec la loi de LENZ nous pouvons retrouver ce résultat rapidement (et avec bien moins de risque d'erreur).
 ◇ En effet, lorsque la spire se rapproche de la face nord de l'aimant, la loi de LENZ nous dit que les conséquences doivent s'opposer aux causes.
 ◇ Pour s'opposer aux causes, il faut donc que la spire s'oppose au rapprochement, *i.e.* que sa face à gauche se comporte comme une face « nord ».
 ◇ Or quand nous regardons une spire de face, la nature « nord » ou « sud » de la face vue est donnée simplement par



- ◇ Reprenons le schéma initial et dessinons une face « nord » sur la face de gauche de la spire (la face qui se rapproche de l'aimant).

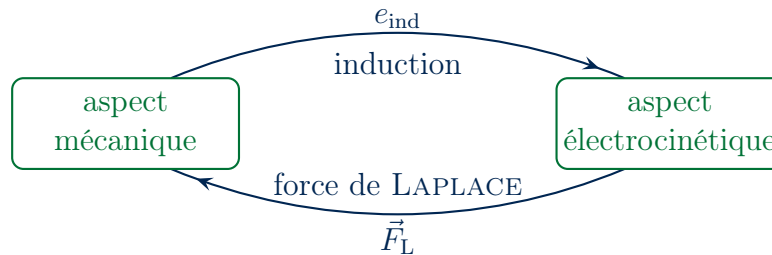


- ◇ Nous voyons que cela implique $i > 0$.

⁷. Rappelons que la partie « nord » d'un aimant est appelé ainsi parce qu'elle est attirée par le pôle nord géographique de la Terre. Cela implique que le pôle nord de la Terre est un pôle « sud » magnétique.

II.2.iv – analyser un problème d'induction de LORENTZ

- ◇ La base de l'analyse est le schéma suivant qui montre le couplage entre les aspects mécanique et électrique.



- ◇ Dans l'aspect mécanique :
- nous décrirons le mouvement par une (ou des) variable(s) de description $x(t)$, $\theta(t)$...
 - nous chercherons une loi *mécanique* (TCI, TMC...).
- ◇ Dans l'aspect électrocinétique :
- nous décrirons le circuit par un (rarement deux) courant(s) i ;
 - nous écrirons une loi *électrocinétique* (très souvent – toujours ? – une loi des mailles).
- ◇ Pour le couplage mécanique \rightarrow électrocinétique, le but sera de déterminer e_{ind} . Pour cela trois méthodes :
- la loi de FARADAY ;
 - la circulation de \vec{E}_m (méthode qui marche bien mieux que pour l'induction de NEUMANN) ;
 - la loi du couplage parfait que nous verrons dans la suite.
- ◇ Pour le couplage électrocinétique \rightarrow mécanique, le but sera de déterminer la force (ou le moment) de LAPLACE. Pour cela une seule méthode :
- commencer par découper la partie mobile en morceaux ;
 - déterminer l'expression de la force élémentaire (ou du moment élémentaire) de LAPLACE ;
 - sommer le tout.
- ◇ Comme nous pouvons le voir, l'induction de LORENTZ est un phénomène *complexe* puisqu'il fait intervenir de nombreux aspects et que ce n'est que lorsque tous ont été déterminés qu'il est possible d'avancer.
- ◇ En revanche, comme le lecteur pourra le constater, les situations sont la plupart assez *faciles* car les calculs techniques se font très bien et, notamment, bien plus facilement que pour l'induction de NEUMANN.

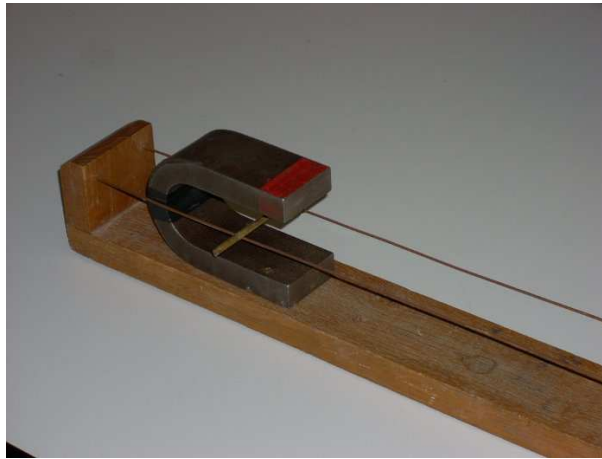
II.3 – Exemple : rails de LAPLACE

II.3.i – présentation

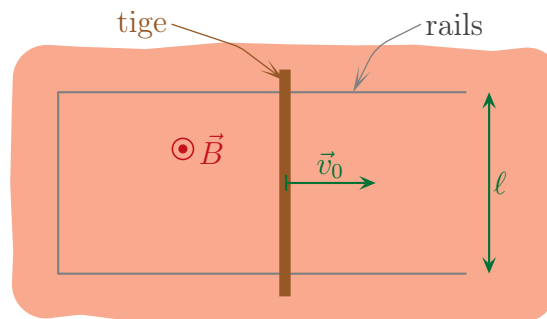
★ dispositif

- ◇ Considérons une barre métallique posée sur deux rails horizontaux et plongée dans un champ magnétique uniforme⁸.

8. Source : <http://lpo.lycee-carnot-bruay.com:8080/physique.carnot/images/magn1.JPG>.



◇ Schématiquement, vu de dessus, la situation peut se représenter de la manière suivante



◇ À $t = 0$, la vitesse de la tige est \vec{v}_0 .

◇ Quelle est l'évolution de la tige ?

★ analyse

◇ Nous avons, ici, un conducteur en mouvement dans un champ magnétique statique.

◇ Nous pouvons résumer la situation de la manière suivante

- un circuit est en mouvement dans un champ magnétique ;
- il y a donc induction et apparition d'une f.é.m. induite ;
- comme le circuit est fermé, cela implique la création d'un courant ;
- la présence du courant implique l'existence d'une force de LAPLACE ;
- la force de LAPLACE va influencer le mouvement de la tige.

◇ Comme la loi de LENZ implique que les effets de l'induction doivent s'opposer à la cause, nous pouvons dire que la force de LAPLACE va *freiner* la tige.

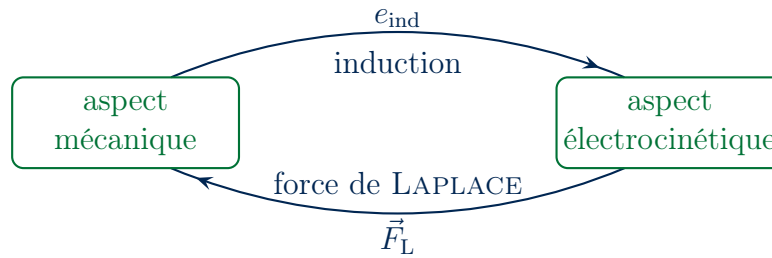
◇ Et comme il n'y a pas de source énergétique extérieure, nous pouvons en déduire que cette force de freinage va faire tendre vers 0 la vitesse.

◇ Les grandeurs pertinentes sont :

- pour l'inertie : m (nous négligeons l'aspect « roulement » de la tige et, donc, J_Δ n'interviendra pas) ;
- pour les actions : B_0 mais pas g (mouvement purement horizontal) ni f , les frottements (négligés) ;
- pour l'aspect électrique : R la résistance totale du circuit (nous négligeons l'aspect auto-induction et, donc, L).

II.3.ii – freinage électromagnétique

◇ Rappelons que nous avons deux aspects à étudier, avec deux couplages.



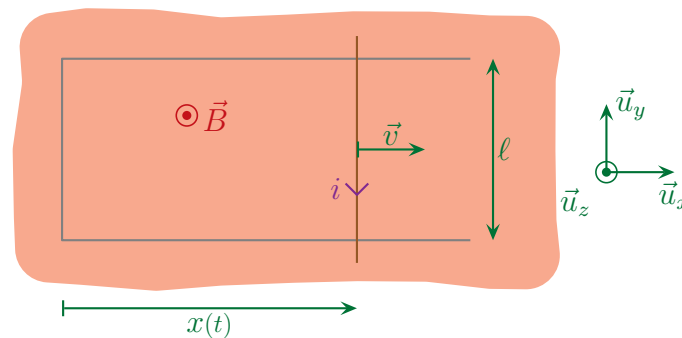
◇ Commençons par un bout et faisons le tour.

★ aspect mécanique

◇ Analyse :

- ici nous sommes face à une évolution à 1 DD, libre mais pas conservative ;
- nous ferons une approche en terme de force (comme systématiquement en induction) et écrirons, ici, le TCI.

◇ Reprenons la situation et posons un repérage pertinent.



◇ Liste de forces :

- forces à distance :
 - le poids, vertical, de projection nulle sur l'axe \vec{u}_x ;
 - la force de LAPLACE, notée \vec{F}_L ;
- forces de contact :
 - l'action du support, vertical car sans frottement⁹ ;
 - les forces de frottement exercés par l'air, négligés ici.

◇ Finalement le TCI projeté directement sur \vec{u}_x donne :

$$m \ddot{x}(t) = 0 + F_{L,x} + 0$$

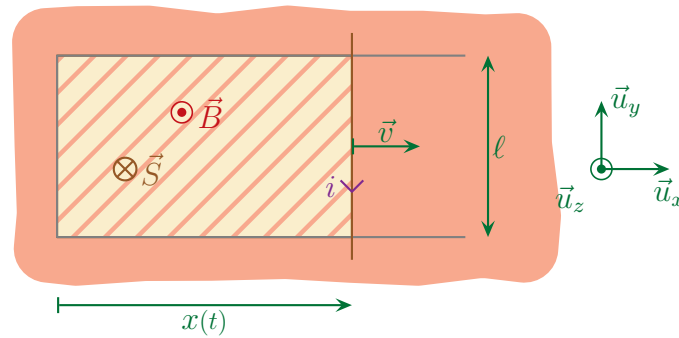
★ couplage par e_{ind}

◇ Pour une fois, faisons les deux méthodes pour retrouver e_{ind} : *via* la loi de FARADAY puis avec le champ électromoteur.

9. Rappelons que la prise en compte de la rotation de la tige implique des forces de frottement à projection horizontale. Toutefois, nous avons montré, dans le chapitre 2 de mécanique, qu'un mouvement de roulement sur un plan et sans glissement équivaut un mouvement sans rotation et sans frottements à condition de prendre la masse effective $m' = m + J/r^2$ avec r le rayon.

🔗 **version loi de FARADAY**

✧ Commençons par bien représenter la situation.



✧ La loi s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t)$$

✧ Φ_B est calculé dans le sens de i (cf. sens de \vec{S}). Comme \vec{B} est uniforme partout, nous avons

$$\Phi_B = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

✧ Or géométriquement nous voyons que

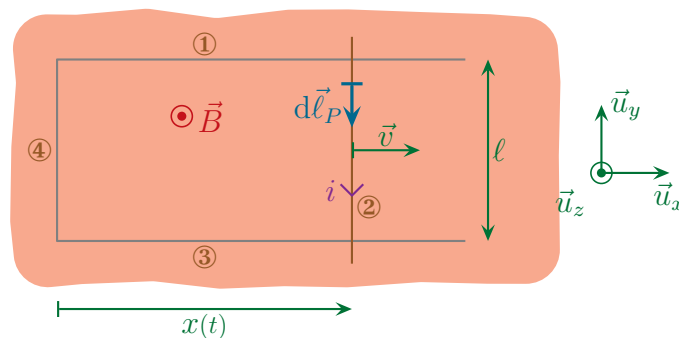
$$\vec{S} = -x(t) \ell \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = -B_0 \ell x(t)$$

✧ Et ainsi

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = +B_0 \ell \frac{dx}{dt}(t)$$

🔗 **version champ électromoteur**

✧ Commençons là aussi par bien représenter la situation.



✧ La f.é.m. induite s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = \oint_{P \in \text{circuit}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = \oint_{P \in \text{circuit}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

✧ Ici nous pouvons tout naturellement couper la circulation en 4 morceaux.

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{1}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P + \int_{P \in \textcircled{2}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P (\dots) \\ (\dots) + \int_{P \in \textcircled{3}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P + \int_{P \in \textcircled{4}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Or, sur les portions ①, ③ et ④, nous avons

$$\vec{v}_e(P) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}_m(P) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \int_{P \in \textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{4}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Il reste

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Sur la portion ②, tous les points P ont la même vitesse **et** le champ y est uniforme, ce qui donne

$$\vec{E}_m(P \in \textcircled{2}) = (\dot{x}(t) \vec{u}_x) \wedge (B_0 \vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}_m(P \in \textcircled{2}) = -\dot{x}(t) B_0 \vec{u}_y$$

◇ La circulation (à prendre dans le sens de i) s'écrit donc

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} \left(-\dot{x}(t) B_0 \vec{u}_y \right) \cdot \left(-d\ell_P \vec{u}_y \right) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} +\dot{x}(t) B_0 d\ell_P$$

◇ Ce qui donne

$$e_{\text{ind}}(t) = +\dot{x}(t) B_0 \ell$$

◇ Il s'agit bien du même résultat (et heureusement).

🔗 différence entre les deux méthodes

◇ La loi de Faraday :

➔ est pratique et rapide ;

➔ nécessite de connaître \vec{B} sur une vaste zone (« dans » tout le circuit).

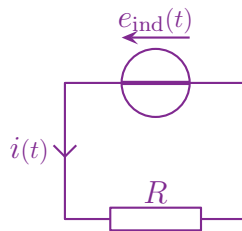
◇ La circulation du champ électromoteur

➔ est un peu plus technique ;

➔ ne nécessite de connaître \vec{B} qu'au niveau de la portion mobile.

★ aspect électrocinétique

◇ Faisons le schéma électrocinétique équivalent du dispositif en prenant soin de mettre $e_{\text{ind}}(t)$ dans le sens de i .

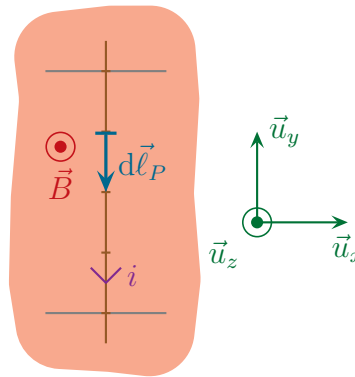


◇ Sans tergiversation, nous avons immédiatement

$$i(t) = \frac{e_{\text{ind}}}{R}$$

★ couplage par force de LAPLACE

✧ Pour trouver la résultante de la force de LAPLACE qui s'exerce sur la tige, découpons-la en morceaux.



✧ Nous avons alors, en faisant attention de ne sommer que sur la tige, et plus précisément sur la portion de la tige parcourue par un courant,

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}$$

✧ Or, sur un point de la tige, comme la sommation se fait dans le sens de i

$$d\vec{\ell}_P = -d\ell_P \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = -i d\ell_P B_0 \vec{u}_x$$

✧ Et ainsi

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} -i d\ell_P B_0 \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{F}_L = -i B_0 \ell \vec{u}_x$$

★ rassemblement

✧ Nous avons quatre lois, quatre « équations »

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x} ; \quad e_{\text{ind}} = +B_0 \ell \dot{x}(t) ; \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \text{et} \quad F_{L,x} = -B_0 i(t) \ell$$

✧ En remplaçant successivement, nous avons tout d'abord

$$i(t) = +\frac{B_0 \ell v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad F_{L,x} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} \times v(t)$$

✧ Nous voyons apparaître là une force de frottement puisqu'opposée à la vitesse.

✧ Continuons à remplacer.

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} \times v(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{dt}(t) + \frac{B_0^2 \ell^2}{m R} \times v(t) = 0$$

★ solution, interprétation

✧ Il s'agit là d'une équation différentielle d'ordre 1 dont la solution, compte-tenu de la condition initiale $v(0) = v_0$ est (quasi) immédiate

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

- ◇ Pour vérifier l'homogénéité, multiplions et divisons la durée caractéristique par i^2 de manière à faire apparaître des petites lois connues comme $R i^2$ (puissance) ou $B i \ell$ (force)

$$\tau \equiv \frac{m R i^2}{B^2 i^2 \ell^2} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{m \mathcal{P}}{F^2} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{m F v}{F \times F} \equiv \frac{m v}{F}$$

- ◇ Enfin, avec le PFD, nous savons que $F \equiv m a$ d'où

$$\tau \equiv \frac{m v}{m a} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{v}{a} \rightsquigarrow \tau \equiv t$$

- ◇ En ce qui concerne l'expression de τ , nous pouvons constater que, conformément à l'intuition, la durée caractéristique est d'autant plus grande que :

- l'inertie mécanique m est grande ;
- la résistance électrique R est grande (faiblesse du couplage).

II.3.iii – tout ça à cause de LORENTZ

- ◇ Il ne faut pas oublier qu'en « réalité » les électrons libres responsables du courant électriques sont mis en mouvement grâce à la force de LORENTZ.
- ◇ En effet, ceux-ci étant initialement immobiles par rapport à la barre, quand cette dernière se déplace vers la droite suivant $+\vec{u}_x$, les électrons, eux, vont subir la force

$$\vec{f}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} \rightsquigarrow \vec{f}_L = (-e) v \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_z \rightsquigarrow \vec{f}_L = +e B_0 \vec{u}_y$$

- ◇ Dans ces conditions, nous voyons bien que l'électron est accéléré suivant $+\vec{u}_y$ ce qui implique, parce qu'il a une charge négative, que le courant engendrée circule suivant $-\vec{u}_y$.
- ◇ Nous trouvons donc un courant négatif, ce qui est cohérent avec la relation

$$i(t) = -\frac{B_0 \ell v(t)}{R}$$

II.3.iv – bilan énergétique du freinage

★ aspect purement mécanique

- ◇ Le théorème de l'énergie mécanique nous donne

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W(\vec{R}_N) + W(\vec{F}_L)$$

- ◇ Or la variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle et la réaction normale du support ne travaille pas car nous avons supposé que le contact se faisait sans frottement. Il reste ainsi, entre l'instant initial et $t = +\infty$

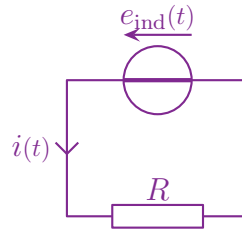
$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + W(\vec{F}_L) \rightsquigarrow W(\vec{F}_L) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

- ◇ Nous pouvons constater que le travail de la force de LAPLACE, dont nous avons déjà remarqué le caractère résistant, est bien négatif.

★ aspect purement électrique

- ◇ D'après le schéma électrocinétique ci-dessous équivalent au dispositif, la conservation de l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{fournie par le générateur}} = \mathcal{E}_{\text{reçue par le résistor}}$$



◇ Déterminons l'expression de l'énergie fournie par le générateur. Par définition, nous avons

$$\mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \int_0^\infty u_{\text{géné}}(t) \times i(t) dt$$

◇ Avec ce que nous avons trouvé précédemment nous avons

$$u_{\text{géné}}(t) = e_{\text{ind}}(t) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \int_0^\infty \frac{e_{\text{ind}}^2(t)}{R} dt$$

◇ Et en remplaçant par l'expression de la f.é.m. induite $e_{\text{ind}}(t) = B_0 \ell \dot{x}(t)$, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,\text{géné}} &= \int_0^\infty \frac{B_0^2 \ell^2}{R} v^2(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{B_0^2 \ell^2}{R} v_0^2 e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \left[\frac{e^{-2t/\tau}}{-2/\tau} \right]_0^\infty \\ &= \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \left(0 + \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

◇ En remplaçant par l'expression de τ , nous avons

$$\tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \frac{m R}{2 B_0^2 \ell^2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

◇ Et là nous constatons qu'il s'agit *exactement* de l'énergie qu'a fait perdre la force de LAPLACE...

★ coïncidence ?

🔗 loi de couplage parfait

Dans le cadre d'une induction de LORENTZ, la puissance (resp. l'énergie) fournie par le générateur induit au circuit électrique est l'opposé de la puissance (resp. l'énergie) fournie par les forces de LAPLACE au conducteur qui bouge.

$$\mathcal{P}_{f,\text{ind}} + \mathcal{P}_{f,\text{Laplace}} = 0$$

🔗 interprétation

✧ C'est une loi qui a de très grande répercussions pratiques. En effet elle implique

$$|\mathcal{P}_{f,\text{ind}}| = 1 \times |\mathcal{P}_{f,\text{Laplace}}|$$

✧ Cela signifie que *toute* l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique.

Le couplage électro-mécanique en induction de LORENTZ est parfait.

✧ Il s'agit là d'une situation non triviale car, rappelons-le, en thermodynamique, le couplage n'est **pas** parfait puisque le rendement de n'importe quelle machine est limitée :

→ $\eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ pour les moteurs ;

→ $e_{\text{max}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ pour les pompes à chaleur.

✧ Le couplage étant parfait, en pratique, il est utilisé dans deux grandes situations :

- la transformation mécanique → électrique a lieu dans toutes les centrales électriques (à gaz, charbon, nucléaire, éolienne, hydraulique...) ainsi que dans les dynamos ;
- la transformation électrique → mécanique a lieu dans tous les moteurs électriques.

🔗 démonstration

✧ Considérons un volume $d\tau$. La puissance fournie par la force de LAPLACE ce volume s'écrit

$$\mathcal{P}_{f,L} = d\vec{F}_L \cdot \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{f,L} = (\vec{j}d\tau \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

✧ À l'aide du produit mixte, nous pouvons réécrire ce resultat sous la forme

$$\mathcal{P}_{f,L} = (\vec{B} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{j}d\tau$$

✧ Or, dans ce même volume, la puissance fournie par le champ électromoteur au circuit électrique s'écrit, parce que l'induction est une induction de LORENTZ

$$\mathcal{P}_{f,\text{ind}} = \vec{E}_m \cdot \vec{j}d\tau \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{f,\text{ind}} = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{j}d\tau$$

✧ Et nous pouvons constater que nous avons bien, pour chaque volume élémentaire

$$\mathcal{P}_{f,L} = -\mathcal{P}_{f,\text{ind}}$$

🔗 aspect technique

Dans le cadre de l'induction de LORENTZ, pour un circuit d'une seule maille en translation, le couplage parfait se traduit par

$$e_{\text{ind}} \times i + F_L \times v = 0$$

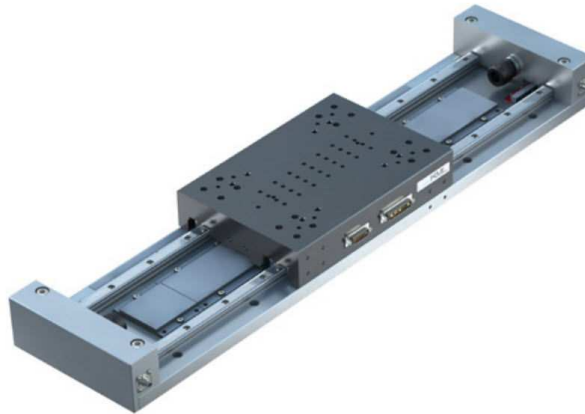
Dans le cadre de l'induction de LORENTZ, pour un circuit d'une seule maille en rotation, le couplage parfait se traduit par

$$e_{\text{ind}} \times i + \mathcal{M}(\vec{F}_L) \times \Omega = 0$$

- ✧ La loi de couplage est très pratique pour déterminer l'expression de e_{ind} dans le cas où le calcul de Φ_B est délicat.

II.3.v – moteur linéaire

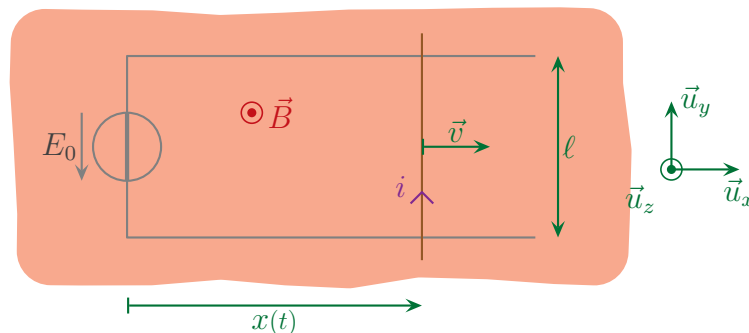
- ✧ Le moteur qui suit est dit « linéaire » car il génère directement un mouvement de translation alors même que la majorité des moteurs créent des mouvement de rotation (qui sont, après, convertis en translation).
- ✧ Voici une photo de moteur linéaire¹⁰.



★ dispositif, analyse

🕒 présentation

- ✧ Considérons une modélisation simple d'un moteur linéaire.



- ✧ Le dispositif ci-dessus ressemble beaucoup aux rails de LAPLACE vus au dessus. Il y a une tige mobile sans frottement sur deux rails, le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme. La grande différence est que, cette fois, il y a un générateur dans le circuit.
- ✧ À $t = 0$, l'interrupteur est fermé, la vitesse de la tige est nulle. Que se passe-t-il ensuite ?

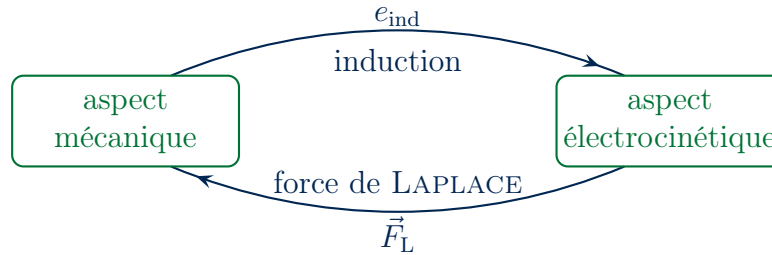
🕒 analyse

- ✧ Une fois l'interrupteur fermé :
- ➔ du courant va circuler dans la tige ;
 - ➔ le courant va engendrer une force de LAPLACE ;
 - ➔ la tige va se mettre en mouvement ;

¹⁰. Source : http://img.directindustry.fr/images_di/photo-g/unite-lineaire-motorisee-a-moteur-lineaire-63228-2847211.jpg

→ la tige en mouvement dans un champ magnétique va créer une f.é.m. induite qui va modifier le courant.

◇ Nous sommes face à une situation d'induction de LORENTZ classique qui peut se représenter par



◇ Les grandeurs pertinentes sont :

- pour l'inertie mécanique, m (roulement négligé) ;
- pour la géométrie, ℓ ;
- pour l'aspect électrique, R (auto-induction négligée) ;
- pour la contrainte extérieure, B_0 , E_0 .

◇ Au niveau de l'analyse technique :

- pour le repérage, nous allons le choisir centré sur la position initiale de la tige ;
- pour e_{ind} , nous choisirons la méthode du couplage parfait (parce qu'elle est rapide et pour essayer).

★ mise en équation

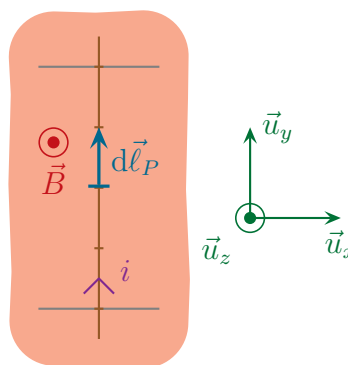
🕒 aspect mécanique

◇ Ici la tige est en translation et cela donne, exactement comme pour le dispositif des rails de LAPLACE

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x}$$

🕒 couplage par force de LAPLACE

◇ Commençons par découpons la tige en morceaux.



◇ Nous avons alors, comme toujours

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}$$

◇ En faisant attention au sens de sommation

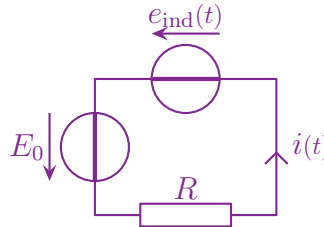
$$d\vec{\ell}_P = +d\ell_P \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = +i d\ell_P B_0 \vec{u}_x$$

✧ Et ainsi

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} +i \, d\ell_P \, B_0 \, \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{F}_L = +i \, B_0 \, \ell \, \vec{u}_x$$

🔗 aspect électrique

✧ Ici, plus qu'avant, il faut faire attention au sens de e_{ind} car un autre générateur est dans le circuit. De toute façon **le générateur induit est dans le sens du courant**. Cela donne, ici,



✧ Et nous avons aussitôt

$$i = \frac{E_0 + e_{\text{ind}}}{R}$$

🔗 couplage par e_{ind}

✧ La loi du couplage parfait s'écrit pour ce circuit à une maille en translation

$$e_{\text{ind}} \times i + F_{L,x} \times v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = -B_0 \ell v(t)$$

🔗 rassemblement

✧ Nous avons quatre équations

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x} ; \quad e_{\text{ind}} = -B_0 \ell \dot{x}(t) ; \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t) + E_0}{R} \quad \text{et} \quad F_{L,x} = +B_0 i(t) \ell$$

✧ En remplaçant successivement, nous avons

$$i(t) = \frac{E_0 - B_0 \ell v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad F_{L,x} = \frac{E_0 B_0 \ell - B_0^2 \ell^2 v(t)}{R}$$

✧ Et en injectant dans le PFD

$$m \frac{dv}{dt}(t) = \frac{E_0 B_0 \ell - B_0^2 \ell^2 v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{dt}(t) + \frac{B_0^2 \ell^2}{m R} \times v(t) = \frac{E_0 B_0 \ell}{m R}$$

★ solution, interprétation

🔗 solution

✧ L'équation différentielle se réécrit

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times v(t) = \frac{E_0 B_0 \ell}{m R} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

✧ La solution s'écrit, compte-tenu de la condition initiale $v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{E_0}{B_0 \ell} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

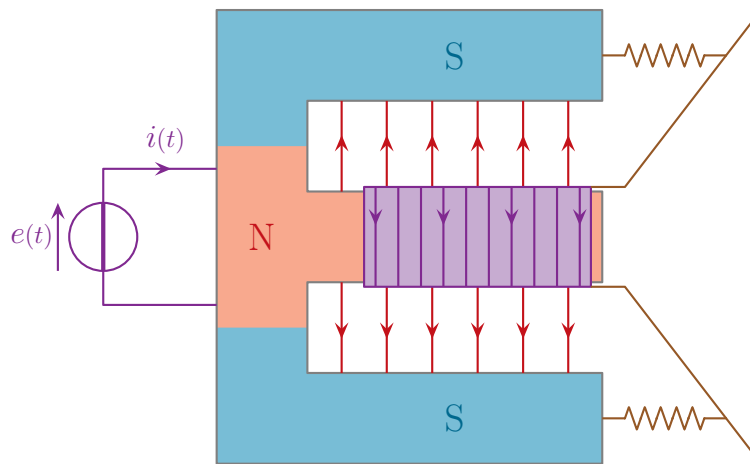
🕒 lecture du résultat

- ✧ Nous avons déjà vérifié l'homogénéité de l'expression de la constante de temps.
- ✧ Nous voyons que la vitesse tend vers la valeur limite $v_{\text{lim}} = \frac{E_0}{B_0 \ell}$.
- ✧ Cette vitesse correspond à celle qui crée une f.é.m. induite qui s'oppose *exactement* à E_0 . De la sorte, la f.é.m. totale dans le circuit est nulle et, donc, le courant aussi.
- ✧ Dès lors qu'il n'y a plus de courant, il n'y a plus de force de LAPLACE et la tige va à vitesse constante.

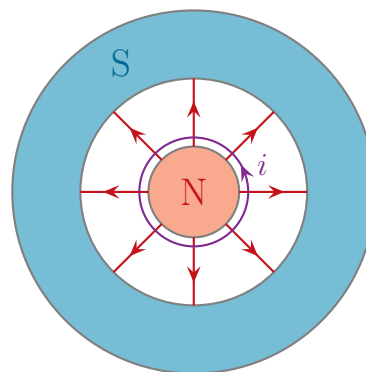
II.4 – Exemple : le haut parleur

II.4.i – présentation

- ✧ Un haut-parleur est un dispositif électro-mécanique qui transforme une tension en un son.
- ✧ Schématiquement le dispositif est équivalent à la représentation ci-dessous.



- ✧ Une bobine ①, reliée à un circuit externe, est mobile sans frottement le long d'un aimant ②. Cette bobine, lors de son mouvement, entraîne une membrane ③ dont la fixation (modélisée ici par les ressorts ④) la ramène à sa position de repos.
- ✧ L'aimant est un peu particulier car il est fabriqué de telle sorte que les lignes de champs soient radiales.



- ✧ Qualitativement :
 - ➔ la tension imposée par le circuit extérieur crée un courant qui traverse la bobine ;
 - ➔ la bobine parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique, subit une force de LAPLACE ;
 - ➔ la bobine, mue par la force de LAPLACE se déplace et entraîne avec elle la membrane ;
 - ➔ la membrane engendre des mouvements d'air qui se propagent, c'est le son.
- ✧ Il s'agit bien, ici, d'induction de LORENTZ puisque la bobine est un conducteur mobile dans un champ magnétique statique.

II.4.ii – lois de fonctionnement

★ aspect mécanique

◇ Considérons le système \mathcal{S} { bobine + membrane }.

◇ Ce système subit

→ forces à distance :

→ le poids de projection nulle sur l'axe \vec{u}_x ;

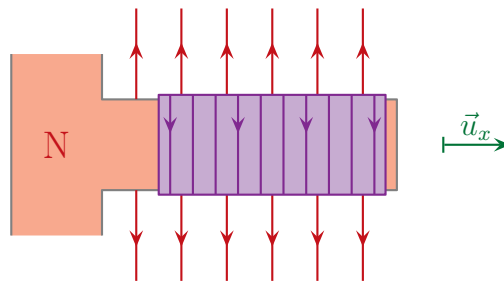
→ la force de LAPLACE ;

→ force de contact :

→ la force exercée par les ressorts $\vec{f}_r = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$;

→ la force de contact au niveau de la bobine, de projection sur \vec{u}_x nulle puisque sans frottement ;

→ la force de frottement exercée par l'air $\vec{f}_a = -\lambda \vec{v}$, force que nous ne pouvons négliger puisqu'il s'agit là du phénomène qui permet de représenter l'énergie qui est transformée en énergie acoustique.



◇ La projection du TCI sur l'axe \vec{u}_x donne tout de suite

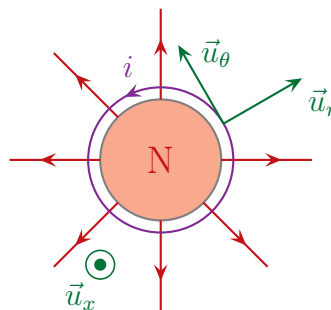
$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_{L,x} - k (\ell(t) - \ell_0) - \lambda \frac{dx}{dt}(t)$$

◇ Choisissons l'origine du repère telle que $x(t) = \ell(t) - \ell_0$. Cela donne

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_{L,x} - k x(t) - \lambda \frac{dx}{dt}(t)$$

★ couplage par force de LAPLACE

◇ Regardons d'un peu plus près la bobine.



◇ La force de LAPLACE s'écrit toujours, par découpage,

$$\vec{F}_L = \int d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

◇ Ici, avec le repérage choisi, nous avons $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_\theta$.

- ◇ De plus comme le champ magnétique est radial, nous avons $\vec{B} = B(r) \vec{u}_r$. Sauf que, comme la bobine est enroulée autour de l'aimant, le circuit qui la constitue est à $r = r_0 = C^{\text{te}}$. Autrement dit, chaque point de la bobine « voit » un champ magnétique de norme uniforme et c'est pourquoi nous noterons

$$\vec{B}_{(\text{bobine})} = B_0 \vec{u}_r$$

- ◇ Cela donne donc

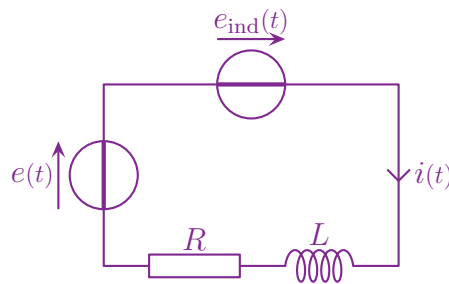
$$d\vec{F}_L = i d\ell \vec{u}_\theta \wedge (B_0 \vec{u}_r) \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = -i B_0 d\ell \vec{u}_x$$

- ◇ Et en sommant sur la totalité de la longueur de la bobine

$$\vec{F}_L = -i B_0 \ell \vec{u}_x$$

★ aspect électrique

- ◇ Faisons le schéma équivalent du dispositif.

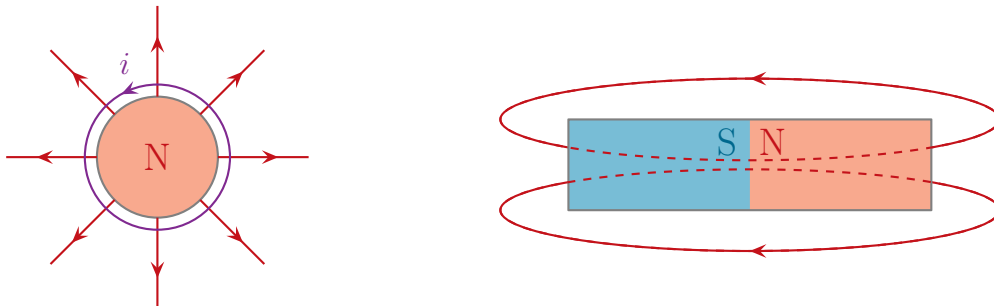


- ◇ Ici, comme nous parlons d'une *bobine*, nous ne pouvons faire abstraction de l'auto-induction. De même nous ne pouvons totalement négliger l'aspect résistif des fils.
- ◇ La loi des mailles nous donne donc

$$e(t) + e_{\text{ind}}(t) - R i(t) - L \frac{di}{dt}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - e_{\text{ind}}(t)$$

★ couplage par e_{ind}

- ◇ Ici, s'il y a bien une méthode que nous ne pouvons pas utiliser, c'est la loi de FARADAY.
- ◇ En effet, si nous regardons la bobine « de face » nous voyons que nous aurons un problème pour calculer le flux qui la traverse étant donné que nous ne connaissons **pas** le champ magnétique à l'intérieur de l'aimant.



- ◇ Faisons les deux autres méthodes, pour voir.

🔗 version champ électromoteur

- ◇ Comme seule la bobine est mobile, nous pouvons limiter le calcul de la circulation du champ électromoteur sur elle. Cela donne

$$e_{\text{ind}} = \int_{P \in \text{bobine}} \vec{E}_{\text{m}}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = \int_{P \in \text{bobine}} \left(\vec{v}(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

- ◇ Or, pour chaque point de la bobine

$$\vec{v}(P) = \dot{x}(t) \vec{u}_x ; \quad \vec{B}(P) = B_0 \vec{u}_r \quad \text{et} \quad d\vec{\ell}_P = d\ell_P \vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \left(\vec{v}(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P = \dot{x}(t) B_0 d\ell_P$$

- ◇ Et en sommant sur toute la bobine

$$e_{\text{ind}} = \dot{x}(t) B_0 \ell$$

🔗 version couplage parfait

- ◇ Il s'agit d'un circuit à une maille et en translation donc nous avons

$$e_{\text{ind}} \times i + F_{\text{L},x} \times v = 0 \quad \text{et} \quad F_{\text{L},x} = -i B_0 \ell \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = \dot{x}(t) B_0 \ell$$

- ◇ C'est quand même plus rapide...

- ◇ Le seul (vrai) inconvénient, c'est que si le calcul de $F_{\text{L},x}$ est faux, e_{ind} le sera aussi.

II.4.iii – bilan d'énergie

★ bilan d'énergie mécanique

- ◇ Reprenons le TCI en remplaçant le terme de couplage

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -i B_0 \ell - k x(t) - \lambda v$$

- ◇ Pour faire apparaître les échanges énergétiques élémentaires, multiplions le TCI par $v dt = dx$. Cela donne

$$\underbrace{m dv v}_{\text{I}} = \underbrace{-i B_0 \ell v dt}_{\text{II}} \quad \underbrace{-k x dx}_{\text{III}} \quad \underbrace{-\lambda v^2 dt}_{\text{IV}}$$

- ◇ Les différents termes sont :

- ➔ I : la variation infinitésimale d'énergie cinétique dE_c ;
- ➔ II : le petit travail fourni par la force de LAPLACE $\delta \mathcal{E}_{\text{f,L}}$;
- ➔ III : l'énergie élémentaire emmagasinée sous forme d'énergie potentielle élastique $-dE_p$;
- ➔ IV : l'énergie élémentaire fournie par l'air au haut parleur, naturellement négative puisque le rôle d'un haut-parleur est de fournir de l'énergie à l'air $\delta \mathcal{E}_{\text{f,air}} = -\delta \mathcal{E}_{\text{r,air}}$.

- ◇ Et ainsi

$$dE_c = \delta \mathcal{E}_{\text{f,L}} - dE_p - \delta \mathcal{E}_{\text{r,air}}$$

★ bilan d'énergie électrique

◇ Reprenons la loi des mailles en remplaçant le terme de couplage

$$e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - v(t) \ell B_0$$

◇ Pour faire apparaître les échanges énergétiques élémentaires, multiplions la par $i(t) dt$. Cela donne

$$\underbrace{e(t) i(t) dt}_A = \underbrace{+R i^2(t)}_B + \underbrace{+L i(t) di}_C - \underbrace{v(t) \ell B_0 i(t) dt}_D$$

◇ Les différents termes sont :

- A : l'énergie élémentaire fournie par le générateur $\delta\mathcal{E}_{f,\text{gén}}$;
- B : l'énergie élémentaire dissipée par effet JOULE $\delta\mathcal{E}_J$;
- C : l'énergie élémentaire emmagasinée sous forme d'énergie potentielle magnétique $-dE_g$;
- D : l'énergie élémentaire reçue de la part du générateur induite $\delta\mathcal{E}_{r,\text{ind}} = -\delta\mathcal{E}_{f,\text{ind}}$.

◇ Et ainsi

$$\delta\mathcal{E}_{f,\text{gén}} = \delta\mathcal{E}_J + dE_{\text{mg}} - \delta\mathcal{E}_{f,\text{ind}}$$

★ bilan total

◇ En s'appuyant sur le couplage parfait qui nous dit que $-\delta\mathcal{E}_{f,\text{ind}} = \delta\mathcal{E}_{f,L}$, le bilan complet s'écrit

$$\underbrace{\delta\mathcal{E}_{f,\text{gén}}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\delta\mathcal{E}_J}_{\textcircled{2}} + \underbrace{dE_c + dE_{\text{mg}} + dE_p}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\delta\mathcal{E}_{r,\text{air}}}_{\textcircled{4}}$$

◇ Nous voyons quatre termes :

- ① : c'est le fournisseur d'énergie de l'ensemble, c'est normal de le retrouver ici ;
- ② : c'est de l'énergie complètement perdue, c'est à réduire autant que possible ;
- ③ : c'est de l'énergie récupérable, c'est bien, mais dont la rétention momentanée peut créer des distorsions dans la conversion du son ;
- ④ : rappelons que c'est l'objectif du haut-parleur que de convertir l'énergie électrique en énergie acoustique.

II.4.iv – vision purement électrique

★ idée

◇ Nous allons modéliser tous les phénomènes sous le seul aspect électrocinétique.

◇ Pour ce faire, nous allons utiliser la notation complexe car toutes les lois sont linéaires.

★ action

◇ Rappelons les deux lois (TCI et loi des mailles)

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -i(t) B_0 \ell - k x(t) - \lambda v(t) \quad \text{et} \quad e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - v(t) \ell B_0$$

◇ Avec la notation complexe, cela donne

$$\begin{cases} m j \omega \underline{V} = -\underline{I} B_0 \ell - k \frac{\underline{V}}{j \omega} - \lambda \underline{V} \\ E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} - \underline{V} \ell B_0 \end{cases}$$

✧ Réorganisons

$$\begin{cases} \left(m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda \right) \underline{V} = -\underline{I} B_0 \ell \\ E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} - \ell B_0 \underline{V} \end{cases}$$

✧ Et exprimons la seule grandeur qui nous intéresse, \underline{I}

$$E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} + \ell B_0 \times \frac{\underline{I} B_0 \ell}{m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda} \quad \rightsquigarrow \quad E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} + \frac{B_0^2 \ell^2}{m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda} \times \underline{I}$$

★ interprétation

✧ Nous pouvons écrire \underline{I} (ou plutôt la loi qui le donne) sous la forme

$$\underline{I} = \left(R + j L \omega + \frac{1}{\frac{m j \omega}{B_0^2 \ell^2} + \frac{k}{j \omega B_0^2 \ell^2} + \frac{\lambda}{B_0^2 \ell^2}} \right) \underline{E}$$

✧ Ce que nous pouvons encore réinterpréter sous la forme

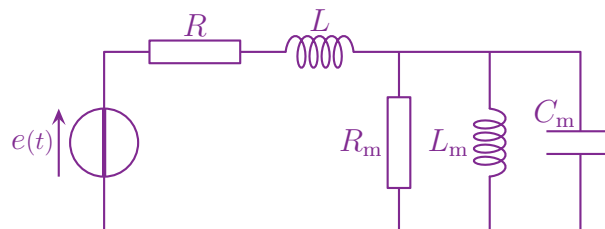
$$\underline{I} = \left(R + j L \omega + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{j L_m \omega} + j C_m \omega} \right) \underline{E}$$

✧ Nous avons posé

$$C_m = \frac{m}{B_0^2 \ell^2} ; \quad \frac{1}{L_m} = \frac{k}{B_0^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_m} = \frac{\lambda}{B_0^2 \ell^2}$$

✧ L'indice « m » fait référence à l'aspect « motionnel » des composants.

✧ Cela correspond à l'intensité dans le circuit schématisé ci-dessous.



Induction

Au niveau du cours

★ Programme concerné

◇ Programme de 2^e année :

- I.B.2 Induction électromagnétique : cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps
- I.B.3 Induction électromagnétique : cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- induction, induction de NEUMANN, induction de LORENTZ ;
- champ électromoteur ;
- auto-induction, champ propre, flux propre, inductance ;
- solénoïde, bobine ;
- induction mutuelle, couplage, mutuelle inductance, coefficient de couplage ;
- transformation galiléenne des champs.

★ Les grandeurs

◇ Connaître les unités de :

- $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ en $V.m^{-1}$;
- $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2(t)$ en J ;
- M en H.

★ Les lois

◇ Sont à connaître :

- la loi de FARADAY et notamment toutes les **obligations** de choix de sens de courant, de signe, d'intégration... ;
- le lien entre f.é.m. et champ électromoteur ;
- le champ électromoteur de NEUMANN, de LORENTZ ;
- la relation courant – tension pour une bobine ;
- la relation courant – tension pour une paire de bobines couplées ;
- l'expression de l'énergie électrocinétique pour une paire de bobines couplées ;
- les valeurs limites pour le coefficient de couplage ;
- les expressions de \vec{E} , \vec{B} , \vec{j} lors d'un changement de référentiel ;
- la loi de couplage parfait.

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- les conditions d'applications de l'induction de NEUMANN, de LORENTZ ;
- la loi de LENZ et son utilisation ;
- la modélisation d'un bobinage par une juxtaposition de spires indépendantes ;

- le lien entre inductance et nombre de spires pour un solénoïde ;
- le lien entre sens de parcours du courant dans une spire et « face » d'un aimant ;
- le principe de fonctionnement d'un haut-parleur.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Connaître parfaitement :

- le schéma d'analyse linéaire pour une induction de NEUMANN ;
- le schéma d'analyse circulaire pour une induction de LORENTZ.

★ Analyse technique

◇ Savoir choisir entre :

- l'approche mésoscopique et l'approche en terme de spire pour une induction de NEUMANN en volume ;
- les trois méthodes possible de calcul de la f.é.m. induite pour une induction de LORENTZ.

Au niveau des savoir-faire

★ exercices classiques

◇ Savoir refaire :

- le calcul du courant induit dans une spire circulaire immobile plongée dans $\vec{B}(t)$;
- l'interprétation de l'énergie électrocinétique contenue dans une bobine en terme d'énergie électromagnétique ;
- l'exemple de l'évolution d'une tige dans le dispositif des rails de LAPLACE avec et sans générateur ;
- un bilan énergétique sur le dispositif des rails de LAPLACE.

Électromagnétisme

Chapitre 3

Onde électromagnétique

Onde électromagnétique

La synthèse de la théorie électromagnétique par MAXWELL mit un point « final » au débat sur la nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière même si, nous le savons, EINSTEIN, puis la mécanique quantique, reviendront dessus. Toutefois, avec ces lois, il est désormais clair qu'il existe des ondes électromagnétiques et c'est HERTZ qui, le premier, a réussi à les mettre en évidence.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à ces ondes électromagnétiques. Nous verrons ainsi, dans une première partie, les ondes en tant que telles : l'équation à laquelle elles obéissent, la manière de les décrire, etc. Dans une deuxième partie nous verrons comment interagissent une onde et un atome. Enfin, dans une dernière partie, nous verrons en détails deux exemples d'ondes.

Table des matières

Biographies succinctes	6
I Propagation	7
I-1 Équations de propagation	7
I-1.i pour \vec{E} et \vec{B}	7
pour \vec{E}	7
pour \vec{B}	8
I-1.ii interprétation	9
I-2 Solutions en OPP et OPPM	9
I-2.i de l'OPP à l'OPPM	9
visualisation	9
traduction pour une OPP	9
version OPPM	10
I-2.ii équations de MAXWELL et OPPM	10
réécrire nabla	10
réécrire MAXWELL	11
relation de dispersion	11
I-2.iii relation de structure	12
énoncé	12
représentation	13
démonstration	13
I-2.iv spectre électromagnétique	13
I-2.v retour à l'OPP	14
I-3 États de polarisation d'une OPPM	14
I-3.i onde polarisée ?	14
I-3.ii différentes polarisations	15
I-3.iii traduction formelle de la polarisation	17
I-3.iv à retenir	23
I-3.v lumière polarisée	23
I-4 Énergétique des OPPM	24
I-4.i densité volumique d'énergie	24
lien entre les champs	24
les densités instantanées	25
I-4.ii vecteur de POYNTING	25
I-4.iii à partir de la notation complexe	26
I-5 Ondes sphériques	26
I-5.i solution analytique	26
évidence expérimentale	26
résultat	26
démonstration partielle	27
I-5.ii structure locale	27
quelle coïncidence !	27
démonstration	28
I-5.iii interprétation	29
résultat	29
démonstration	29

II Ondes au niveau atomique	31
II-1 Description dipolaire de la matière	31
II-1.i origine, description	31
dipôle électrique	31
dipôle magnétique	32
II-1.ii champ créé	32
approximation dipolaire	32
champ \vec{E} créé par un dipôle électrique	33
champ \vec{B} créé par un dipôle magnétique	33
hors approximation dipolaire	34
II-1.iii actions subies	34
qualitativement	34
expression	35
réinterprétation pour le dipôle magnétique	36
II-2 Atomes comme source de champ : rayonnement dipolaire	36
II-2.i modèle d'une particule polarisable	36
II-2.ii échelle d'observation	36
II-2.iii zone statique	37
voir l'approximation	37
retrouver le potentiel	38
retrouver le champ \vec{E}	39
II-2.iv zone de rayonnement	39
résultat à ne pas connaître	39
encore une coïncidence pour la structure	40
puissance rayonnée	40
puissance rayonnée totale	42
II-3 Atome dans un champ : polarisation électronique	43
II-3.i modèle de l'électron élastiquement lié	43
description	44
modélisation des phénomènes en terme de forces	44
II-3.ii moment dipolaire créé	45
situation	45
moment dipolaire	46
approximation	46
PFD	47
II-3.iii puissance rayonnée : diffusion RAYLEIGH	48
considérations numériques pour l'atmosphère	48
puissance rayonnée	48
réécriture	49
interprétation	49
II-3.iv couleur du ciel	50
en plein jour par temps dégagé	50
en plein jour par temps légèrement couvert	53
en plein jour par temps couvert	53
la nuit	54

III Exemples	55
III.1 Conducteur électrique	55
III.1.i modèle de DRÜDE	55
III.1.ii mise en équation – approximation	55
III.1.iii conductivité complexe	56
expression	56
première interprétation	57
III.1.iv lois dans le conducteur	57
conservation de la charge	57
les équations de MAXWELL	58
relation de dispersion	58
III.1.v basse fréquences : effet de peau	59
simplification de la relation de dispersion	59
vecteur d'onde complexe	60
retrouvailles	60
vitesses	61
III.1.vi haute fréquence : réflexion, transparence	61
simplifier la relation de dispersion	61
premier cas : $\omega > \omega_p \gg 1/\tau$	62
premier cas : $\omega_p > \omega \gg 1/\tau$	62
III.2 Guide d'onde	63
III.2.i présentation	63
guide d'onde réel	63
modélisation	64
contraintes	64
III.2.ii champ \vec{E}	65
contrainte	65
contrainte de l'équation de propagation	65
résolution	65
III.2.iii champ \vec{B}	67
expression	67
interprétation	68
III.2.iv relation de dispersion	69
premier cas : $k^2 < 0$	69
deuxième cas : $k^2 > 0$	69
III.2.v aspect énergétique	71
moyenne de la densité volumique d'énergie	71
moyenne du vecteur de POYNTING	72
vitesse de transport de l'énergie	72
III.2.vi vision en OPPM	73
transformation technique	73
visualisation	73
Fiche de révision	75

Biographies succinctes

Georg OHM

(1789 Erlangen, Bavière – 1854 Munich)



Georg reçoit de son père, serrurier de profession, une solide formation en science (mathématique, physique, chimie, philosophie). À 15 ans il entre à l'université d'Erlangen mais, trop peu concentré sur ses études (il préfère jouer au billard et faire du patin à glace) il est envoyé en Suisse un an plus tard. Bien qu'ayant eu son doctorat en 1811 il végète sur de petits postes qui lui permettent tout juste de joindre les deux bouts. En 1817 un livre qu'il a écrit seul impressionne Frédéric-Guillaume III de Prusse qui le nomme professeur à Cologne. Georg entrera à l'école polytechnique de Nuremberg en 1833 avant d'être promu professeur 1852, deux ans avant sa mort.

John William STRUTT, baron de Rayleigh

(1842 Landford Grove, Angleterre – 1919 Witham, Angleterre)



John STRUTT de santé fragile étudie à Cambridge et finit major en mathématique de sa promotion. Il succède à son père prématurément décédé pour gérer le domaine familiale mais transmet rapidement cette charge à son jeune frère afin de pouvoir poursuivre ses recherches scientifiques. Professeur à Cambridge puis directeur du laboratoire Cavendish de 1879 à 1884 il s'intéresse tout particulièrement aux molécules et aux atomes et à leurs dimensions. Il est l'auteur de 445 articles scientifiques dans de nombreux domaines et reçoit le prix Nobel de physique en 1904.

Heinrich Rudolf HERTZ

(1857 Hambourg – 1894 Bonn)



Heinrich commence par des études technique à Francfort-sur-le-Main mais se ré-orienter vers des études plus scientifiques afin de ne pas être confronté aux problèmes industriels et économiques. C'est ainsi qu'en 1879, à l'institut de physique de Berlin, il est élève de KIRCHHOFF et HELMHOLTZ. En 1885, il est nommé professeur à l'École polytechnique de Karlsruhe et se marie l'année suivante avec Elisabeth Doll. C'est en 1888 qu'il découvre les ondes électromagnétiques. La légende raconte qu'il aurait dit, après une démonstration à ses étudiants, qu'il n'y aurait jamais d'application à ces ondes. Heinrich décède trop tôt pour voir MARCONI le démentir, même pas 7 ans plus tard.

Paul Carl Ludwig DRÜDE

(1863 Brunswick – 1906 Berlin)



Paul DRÜDE commence des études de mathématiques mais en 1894 il s'oriente vers la physique théorique. Il enseigne à Leipzig et travaille essentiellement sur les cristaux où il réalise des mesures très précises de constantes optiques de divers matériaux. C'est lui qui introduit en 1894 la notation c pour la célérité de la lumière. En 1900 il introduit le modèle qui porte désormais son nom sur le comportement des électrons dans un solide.

I – Propagation

I.1 – Équations de propagation

- ✧ C'est la base de la base que de savoir retrouver les équations de propagation pour les champs électrique et magnétique.

I.1.i – pour \vec{E} et \vec{B}

★ pour \vec{E}

🕒 loi

L'équation vérifiée par le champ électrique dans le vide est une équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

🕒 démonstration

- ✧ Commençons par réécrire les équations de MAXWELL dans le vide, *i.e.* dans un milieu sans charge ni matière.

$$\begin{array}{ll} \text{MAXWELL – GAUSS} & \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{MAXWELL – FARADAY} & \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} \text{MAXWELL – THOMSON} & \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{MAXWELL – AMPÈRE} & \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

- ✧ Nous constatons que les équations de MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE sont bien des équations de couplage, car elles font appel à des dérivées spatiale et temporelle des deux grandeurs que nous pouvons déjà soupçonner d'être duales : \vec{E} et \vec{B} .
- ✧ « Comme d'habitude », calculons le rotationnel du rotationnel de \vec{E} de deux manières différentes en commençant par la définition du laplacien vectoriel.

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{E} \right) - \vec{\Delta} \vec{E}$$

- ✧ Et avec l'équation de MAXWELL – GAUSS, nous obtenons

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{E}$$

- ✧ Reprenons le rotationnel du rotationnel et utilisons MAXWELL – FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

- ✧ Nous pouvons intervertir les dérivées spatiale et temporelle (théorème de SCHWARZ)

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

- ✧ Et là nous pouvons utiliser la loi de MAXWELL – AMPÈRE

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

◇ Ce qui donne, en regroupant

$$-\vec{\Delta} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

★ pour \vec{B}

◇ Nous avons la même loi

L'équation vérifiée par le champ magnétique dans le vide est une équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

◇ Pour le montrer, nous allons utiliser le même principe que pour le champ électrique

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{B} \right) - \vec{\Delta} \vec{B}$$

◇ L'équation de MAXWELL – THOMSON donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{B}$$

◇ En reprenant le rotationnel du rotationnel et en utilisant MAXWELL – AMPÈRE

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

◇ Intervertissons les dérivées spatiale et temporelle (SCHWARZ)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right)$$

◇ Puis MAXWELL – FARADAY

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

◇ Ce qui donne, en regroupant

$$-\vec{\Delta} \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

I.1.ii – interprétation

- ◇ Nous pouvons constater que les champs électrique et magnétique vérifient des équations de propagation. Les solutions sont donc en « $r - ct$ », même s'il s'agit d'un laplacien vectoriel.
- ◇ Le champ électrique est associé à l'énergie volumique $u_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ et le champ magnétique est associé à l'énergie volumique $u_{mg} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$. L'énergie est bien sous deux formes différentes, elle peut se propager et les champs électrique et magnétique sont les deux grandeurs duales.
- ◇ Remarquons enfin que les deux grandeurs duales vérifient la *même* équation de propagation, ce qui est fréquent mais non universel.

I.2 – Solutions en OPP et OPMP

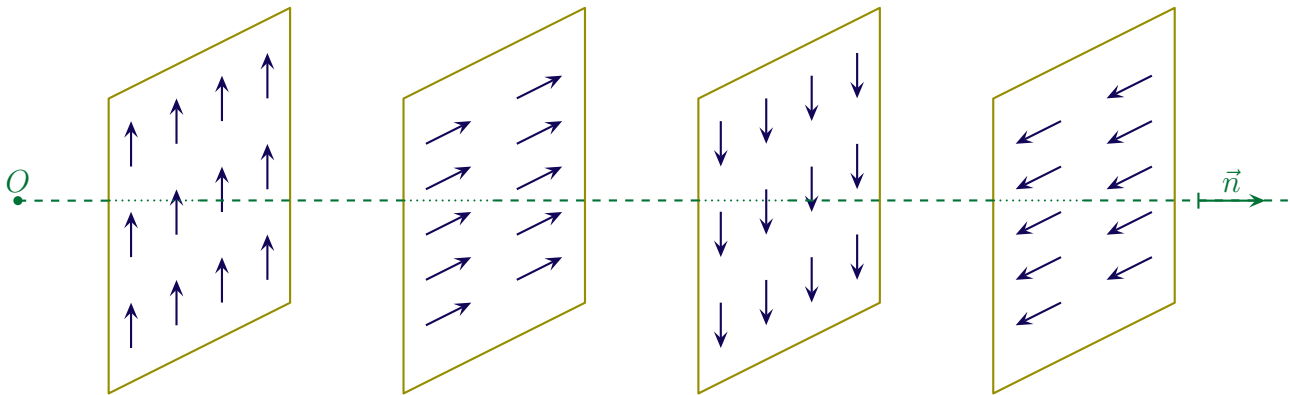
- ◇ Ici nous allons nous limiter aux OPP et OPMP. Attention de **ne pas** généraliser les résultats à des ondes quelconques !

I.2.i – de l'OPP à l'OPMP

★ visualisation

Une onde est dite *plane* lorsqu'à tout instant les surfaces d'onde sont des plans.

- ◇ À un instant fixé (*i.e.* une photo), cela donne par exemple quelque chose comme ça



★ traduction pour une OPP

- ◇ Nous voyons ci-dessus que \vec{E} ne dépend que de l'abscisse sur l'axe \vec{n} , *i.e.* ne dépend que de $x \stackrel{\text{not}}{=} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}$.
- ◇ En coordonnées **cartésiennes**, le laplacien vectoriel s'écrit

$$\vec{\Delta} \vec{E} = (\Delta E_x) \vec{u}_x + (\Delta E_y) \vec{u}_y + (\Delta E_z) \vec{u}_z$$

- ◇ Dans ces conditions, la projection de l'équation de propagation donne, par exemple sur \vec{u}_x ,

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

- ◇ Il s'agit là d'une équation de propagation dont nous connaissons les solutions en OPP

$$E_x(M, t) = E_{0,x}(t - \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}/c) + E_{0,x}(t + \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}/c)$$

✧ Nous reconnaissons là la somme d'une OPP \blacktriangleright et d'une OPP \blacktriangleleft .

Les solution en OPP pour une propagation en 3D sont en

$$t - \frac{\vec{OM} \cdot \vec{n}}{c}$$

✧ Pour avoir le cas correspondant à $t + \frac{\vec{OM} \cdot \vec{n}}{c}$, il suffit de prendre $\vec{n}' = -\vec{n}$.

★ version OPMP

✧ Considérons une OPMP se propageant suivant \vec{n} tel que $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$.

✧ Dans ces conditions une OPMP d'un champ électrique avec trois composantes s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(M,t)} = & E_{0,x} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x\right) \vec{u}_x + \\ & E_{0,y} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y\right) \vec{u}_y + \\ & E_{0,z} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z\right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

✧ En notation complexe, cela donne

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} E_{0,x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0,y} e^{j\varphi_y} \\ E_{0,z} e^{j\varphi_z} \end{pmatrix}$$

Une OPMP *quelconque* s'écrit, en notation complexe,

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

☕ *Remarque.* Cela ne présage en **rien** de l'état de polarisation de l'onde (cf. infra).

I.2.ii – équations de MAXWELL et OPMP

★ réécrire nabra

Dans le cas d'une OPMP en notation complexe et **seulement pour une OPMP**, nous avons

$$\vec{\nabla} = -j \vec{k}$$

✧ Pour le montrer, reprenons l'OPMP en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

✧ Exprimons le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{OM}$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

◇ Dans ces conditions, nous voyons que, **pour une OPM en notation complexe** :

- dériver par rapport à x revient à multiplier par $-j k_x$;
- dériver par rapport à y revient à multiplier par $-j k_y$;
- dériver par rapport à z revient à multiplier par $-j k_z$.

◇ Et donc, finalement, pour nabl

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j k_x \\ -j k_y \\ -j k_z \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} = -j \vec{k}$$

★ réécrire MAXWELL

◇ Reprenons les équations de MAXWELL dans le vide et réécrivons-les pour une OPM complexe.

◇ MAXWELL – GAUSS donne

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

◇ MAXWELL – FARADAY donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j \omega \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j \omega \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

◇ MAXWELL – THOMSON donne

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

◇ MAXWELL – AMPÈRE donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = j \omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = j \omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

★ relation de dispersion

Pour une OPM dans le vide, la relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

◇ La relation ne présente pas de surprise. Toutefois sa démonstration n'est pas aussi triviale que nous pourrions l'imaginer et ce, à cause de l'aspect 3D de l'onde.

- ◇ Calculons $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})$ de deux manières différentes. Commençons par développer le double produit vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) &= (\vec{k} \cdot \vec{E}) \times \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \times \vec{E} \\ &\stackrel{\text{M-G}}{=} 0 - k^2 \vec{E}\end{aligned}$$

- ◇ Calculons maintenant avec les autres lois de MAXWELL

$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) &\stackrel{\text{M-F}}{=} \vec{k} \wedge (\omega \vec{B}) \\ &= \omega (\vec{k} \wedge \vec{B}) \\ &\stackrel{\text{M-A}}{=} \omega \times (-\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E})\end{aligned}$$

- ◇ En rassemblant

$$-k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad k^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

- ◇ Et comme cette relation est valable quel que soit le champ qui se propage, nous pouvons en déduire la relation de dispersion bien connue

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

I.2.iii – relation de structure

La *structure* d'un champ (\vec{E}, \vec{B}) est l'ensemble des caractères du trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$.

★ énoncé

Pour une OPPM se propageant dans le vide, le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est normal et direct.

Un champ vectoriel propagatif \vec{E} est dit *transverse* lorsqu'à tout instant \vec{E} est normal à la direction de propagation.

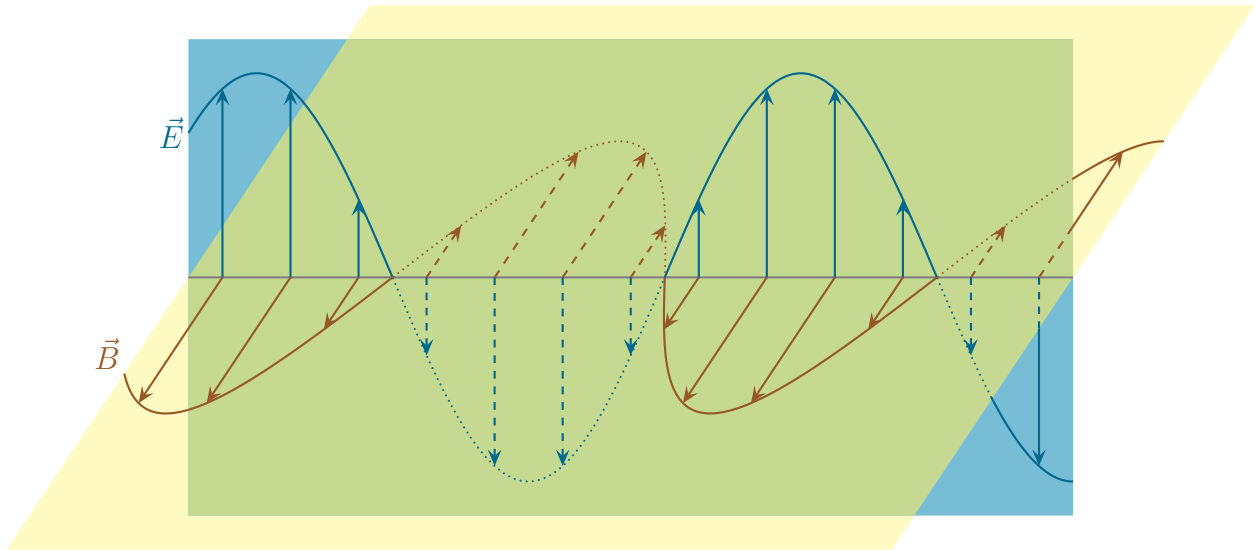
Pour une OPPM dans le vide, \vec{E} et \vec{B} sont transverses.

Pour une OPPM dans le vide

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

★ **représentation**

◇ Visuellement, à un instant donné, cela donne quelque chose comme ça.



◇ Comme nous le verrons plus bas, ceci est une onde très particulière, puisqu'il s'agit d'une onde polarisée rectilignement. Dans le cas plus général d'une onde polarisée elliptiquement, il faudrait imaginer que les plans bleu et jaune ci-dessus se vrillent tout en avançant.

★ **démonstration**

- ◇ Les démonstrations sont immédiates à partir de la réécriture des équations de MAXWELL en version complexe.
- ◇ Les équations de MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON montrent que les champs sont transverses

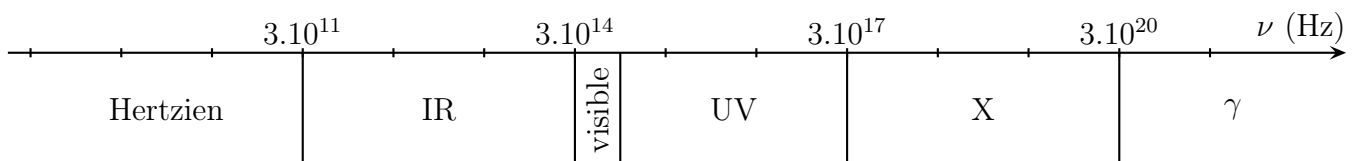
$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

◇ Quant à l'équation de MAXWELL – FARADAY, elle montre le lien entre \vec{B} et \vec{E} et prouve, du même coup que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

I.2.iv – **spectre électromagnétique**

◇ Rappelons ici le spectre électromagnétique.



◇ Les différents rayonnements sont les suivants

- le rayonnement hertzien est celui utilisé pour les communications (radio, satellite, portable), il y a trop peu d'énergie transportée pour que cela soit utilisable (sauf dispositifs idoines comme les fours à micro-onde) ;

- le rayonnement IR est celui émis naturellement par les corps à température ambiante (lunette IR pour voir dans la nuit ou mode de cuisson au barbecue), du point de vue énergétique, cela se sent ;
- le visible, c'est le visible ;
- les UV sont des rayonnements plus énergétiques donc potentiellement plus dangereux, c'est pour cette raison que notre peau essaie de s'en prémunir en bronzant. D'ailleurs s'il n'y avait plus de couche d'ozone, nous aurions « quelques » problèmes ;
- les rayons X sont des rayons très pénétrants qui permettent de faire des radiographies, ils sont suffisamment énergétiques pour que des précautions soient prises à chaque radio ;
- mieux vaut ne pas être exposé à des rayons γ car, très énergétiques, ils peuvent pénétrer à l'intérieur des cellules et détruire des morceaux d'ADN qui, s'ils ne sont pas naturellement réparés, donnent naissance à des cellules cancéreuses.

I.2.v – retour à l'OPP

Pour une OPP se propageant dans le vide, le trièdre $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ est normal et direct.

Pour une OPP, \vec{E} et \vec{B} sont transverses.

Pour une OPP dans le vide se propageant dans la direction \vec{n}

$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$$

- ✧ Les démonstrations sont identiques à celles pour l'OPPM mais sont un peu plus lourde du fait qu'il faille gérer les fonctions quelconques (et leurs dérivées) correspondant aux ondes sur les différents vecteurs de base.

I.3 – États de polarisation d'une OPPM

I.3.i – onde polarisée ?

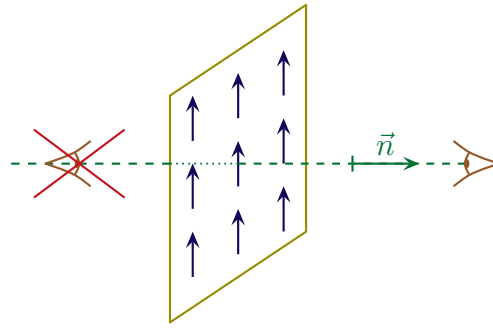
- ✧ Pour une onde transverse (se propageant par exemple sur \vec{u}_z), il y a donc deux composantes : une sur \vec{u}_x et une sur \vec{u}_y .

La *polarisation* d'une onde caractérise la manière dont évoluent les composantes transverses d'une onde.

- ✧ Ici, il y a deux grandeurs transverses.

Par convention, la polarisation d'une onde est celle de son champ électrique.

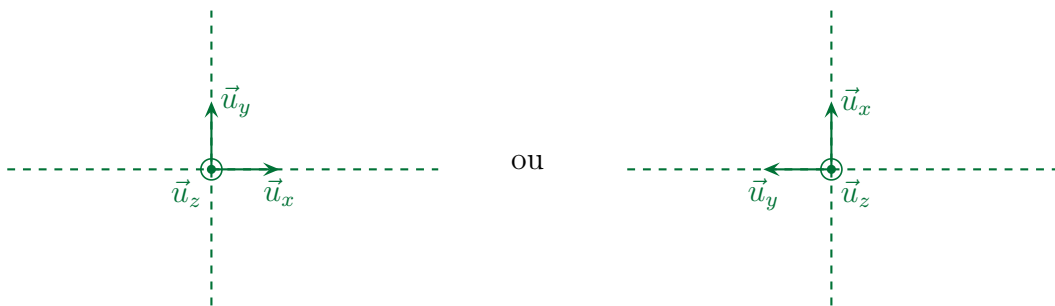
- ✧ Imaginons une onde et la manière dont le champ évolue sur un plan d'onde. Nous pouvons observer la situation de deux points de vue : de face ou de dos.



- ✧ Ces deux points de vue sont opposés, il faut en choisir un.

Pour déterminer la polarisation d'une onde, il faut se placer **face** à l'onde

- ✧ Autrement dit, il faut que l'onde se dirige **vers** l'observateur.
 ✧ Pour une onde se propageant suivant $+\vec{u}_z$, le plan d'onde **vu de face** se représente donc de la manière suivante



- ✧ Comme les composantes sur \vec{u}_x et \vec{u}_y obéissent à l'équation de propagation, nous avons, en toute généralité

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(\omega t - k z + \varphi_x) \\ E_{0,y} \cos(\omega t - k z + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'état de polarisation d'une onde est la courbe que dessine la pointe du champ \vec{E} dans un plan d'onde vu de face.

- ✧ Insistons sur le fait que, quelle que soit la polarisation, le fait d'être « incliné » n'est pas physique puisque cela dépend des axes choisis. C'est ainsi qu'une onde ne peut pas être inclinée puisqu'il est toujours possible d'imposer les axes idoines pour qu'elle ne le soit pas. En revanche, deux ondes peuvent être inclinées l'une par rapport à l'autre et, ça, c'est très intéressant et très utile.

I.3.ii – différentes polarisations

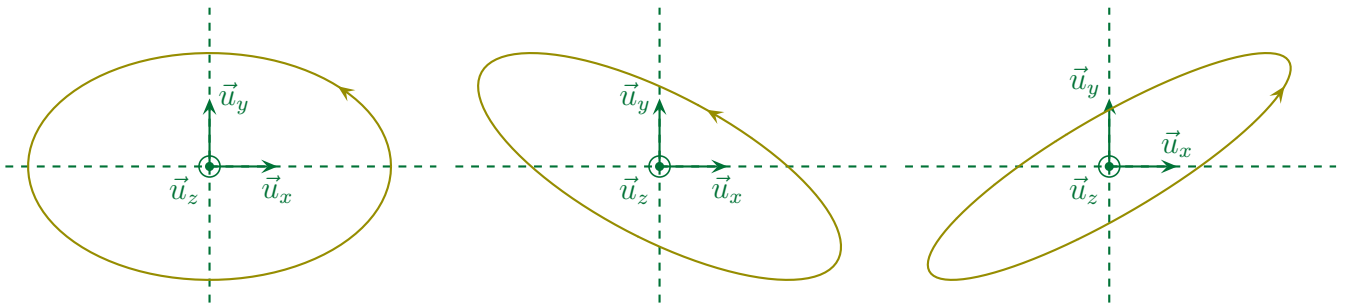


Ce qui suit n'est pas à apprendre et à connaître en tant que tel car les résultats dépendent énormément du repérage choisi. En revanche la multiplicité des exemples est là pour montrer que la méthode, elle, est à connaître et savoir refaire. Quant aux résultats à connaître, ils suivent immédiatement cette section.

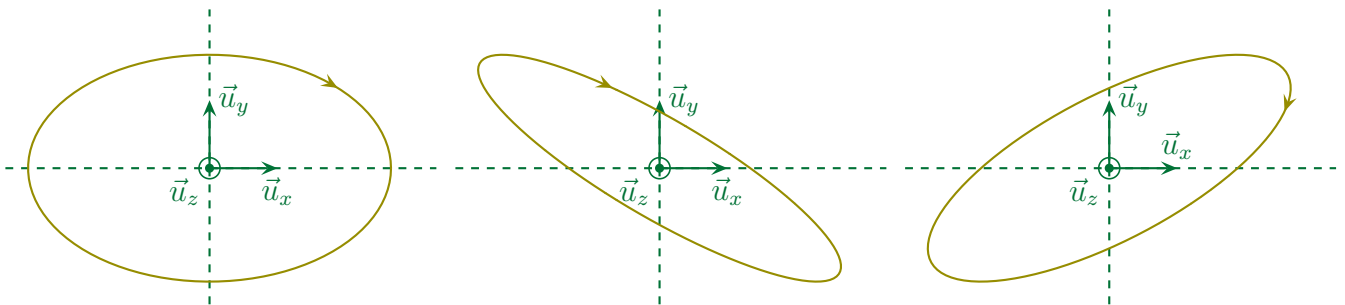
- ✧ L'état de polarisation d'une onde correspond à la forme de la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} X(t) = E_{0,x} \cos(\omega t - k z + \varphi_x) \\ Y(t) = E_{0,y} \cos(\omega t - k z + \varphi_y) \end{cases}$$

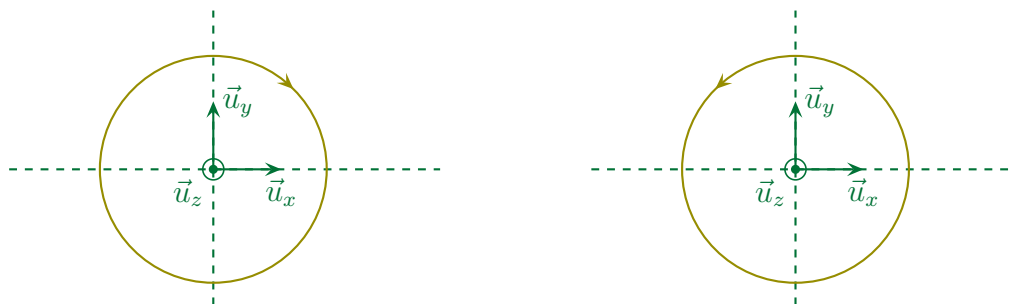
- ◇ Dans les expressions précédentes, z est fixé.
- ◇ Nous savons que cela correspond à une ellipse dans le cas général, mais cela regroupe en fait bon nombre de cas particuliers.
- ◇ Il y a tout d'abord la *polarisation elliptique gauche* qui correspond à une ellipse (pourquoi pas inclinée) dessinée en tournant sur la gauche.



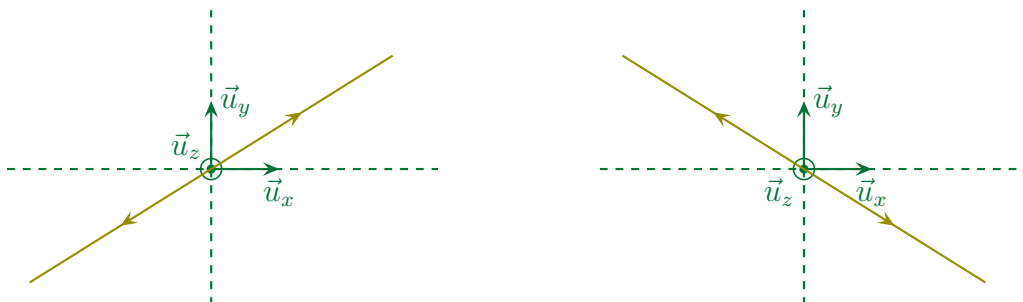
- ◇ Il y a, de manière analogue *polarisation elliptique droite* qui correspond à une ellipse (éventuellement inclinée) dessinée en tournant sur la droite.



- ◇ Mais il y a aussi la *polarisation circulaire* qui peut être *droite* ou *gauche* suivant que le sens de rotation se fait sur la droite ou sur la gauche.



- ◇ Enfin, il y a la *polarisation rectiligne* qui correspond à une portion rectiligne, éventuellement inclinée





La polarisation d'une onde peut être :

- elliptique droite ou gauche ;
- circulaire droite ou gauche ;
- rectiligne.

I.3.iii – traduction formelle de la polarisation

◇ Reprenons les composantes du champ

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{0,x} \cos(\omega t - k z + \varphi_x) \\ E_y(t) = E_{0,y} \cos(\omega t - k z + \varphi_y) \end{cases}$$

◇ Redéfinissons l'instant initial tel que

$$\omega t' = \omega t - k z + \varphi_x$$

◇ Nous avons alors

$$\omega t - k z + \varphi_y = \omega t - k z + \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \quad \rightsquigarrow \quad \omega t - k z + \varphi_y = \omega t' + \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

◇ Il reste ainsi

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\pi \leq \Delta\varphi \leq +\pi$$

◇ Et maintenant « yapuka » passer en revue tous les cas de déphasage possible.

★ $\Delta\varphi = 0$

◇ Réécrivons tout d'abord les coordonnées du champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases}$$

◇ Pour tracer la courbe correspondant à la polarisation, la méthode sera toujours la même :

- ① tracer le « rectangle de polarisation » qui correspond au rectangle de demi-largeur $E_{0,x}$ et $E_{0,y}$ dans lequel s'inscrit obligatoirement la courbe ;
- ② tracer le point correspondant à $\omega t'_1 = 0$ (en bleu dans les schémas qui suivent) ainsi que son symétrique correspondant à l'instant $\omega t'_3 = \pi$ (en violet dans les schémas qui suivent) ;

- ③ tracer le point correspondant à $\omega t'_2 = \pi/2$ (en rouge dans les schémas qui suivent) ;
- ④ finir la courbe « à la main » et interpréter.

◇ Le point $\omega t'_3 = \pi$ est bien le symétrique du point $\omega t'_1 = 0$ car

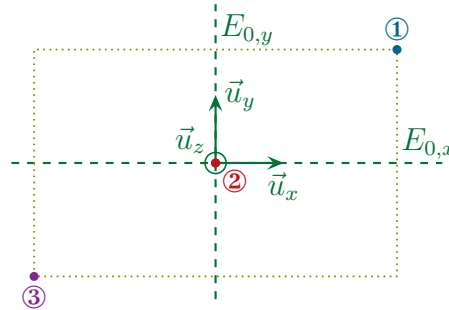
$$E_{0,x} \cos(\omega t'_3) = E_{0,x} \cos \pi = -E_{0,x}$$

$$E_{0,y} \cos(\omega t'_3 + \Delta\varphi) = E_{0,y} \cos(\pi + \Delta\varphi) = -E_{0,y} \cos(\Delta\varphi)$$

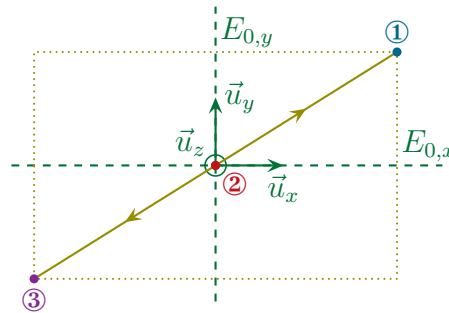
◇ Ici, nous avons très vite

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \end{pmatrix}$$

◇ Cela donne le schéma ci-dessous



◇ Puis la polarisation



◇ Nous avons affaire à une *polarisation rectiligne*. Cela peut aussi se voir par le fait que les deux composantes sont proportionnelles

$$E_y(t') = \frac{E_{0,y}}{E_{0,x}} E_x(t')$$

★ $0 < \Delta\varphi < \pi/2$

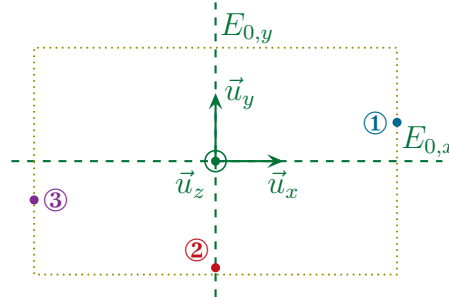
◇ Même principe que ci-dessus. Commençons par réécrire le champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases}$$

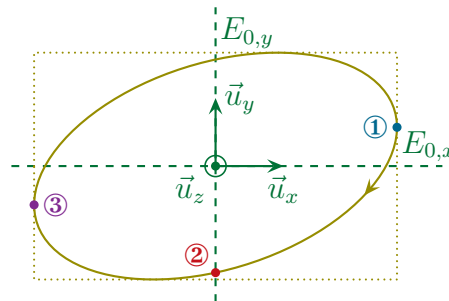
◇ Nous avons ainsi, sans oublier que $0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}_{(t_1)} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}_{(t_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{(t_3)} = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}$$

✧ Cela donne les trois points suivants



✧ Et nous pouvons prolonger



✧ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique droite*.

★ $\Delta\varphi = \pi/2$

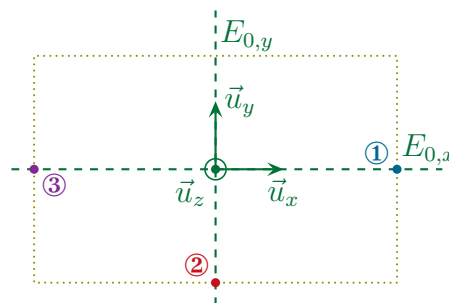
✧ La réécriture du champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \sin(\omega t') \end{cases}$$

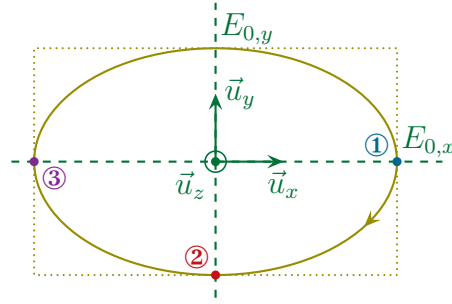
✧ Nous avons donc

$$\vec{E}_{(t_1)} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}_{(t_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} < 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{(t_3)} = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

✧ Cela donne les trois points suivants

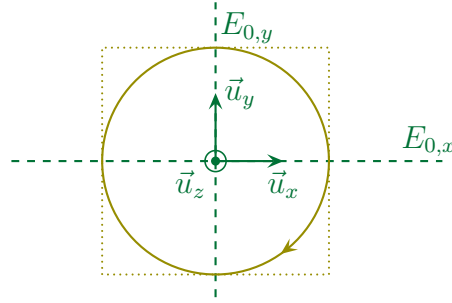


✧ Et nous pouvons prolonger



◇ Cela donne toujours une *polarisation elliptique droite*.

◇ Dans le cas particulier où $E_{0,x} = E_{0,y} \stackrel{\text{not}}{=} E_0$, nous avons cette fois une *polarisation circulaire droite*.



★ $\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$

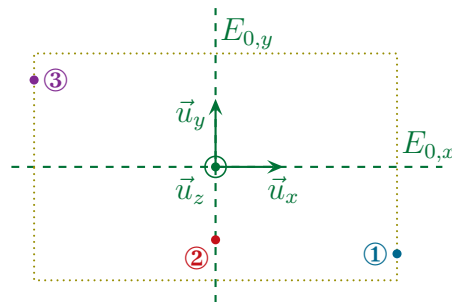
◇ Toujours pareil

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases}$$

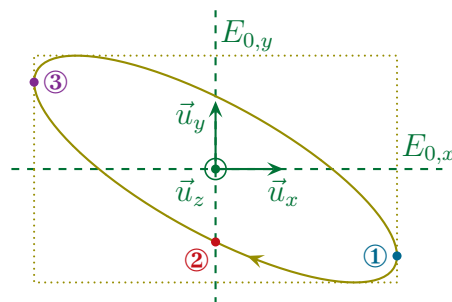
◇ Nous avons ainsi, sans oublier que $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}$$

◇ Cela donne les trois points suivants



◇ Et nous pouvons prolonger



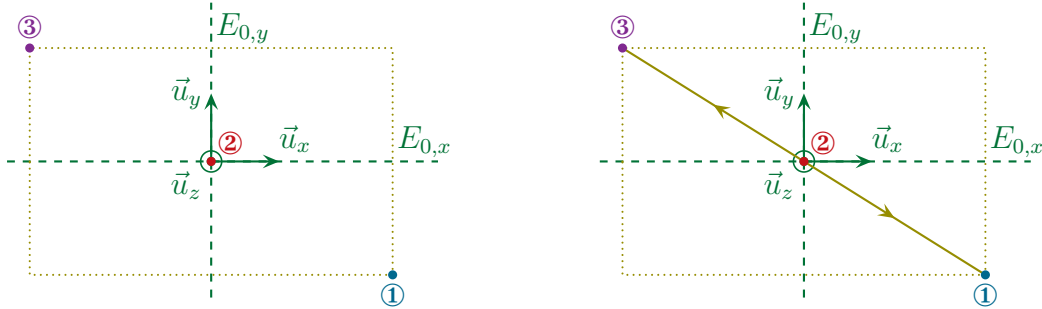
◇ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique droite*.

★ $\Delta\varphi = \pi$

◇ Les composantes

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases}$$

◇ Nous voyons que les deux composantes sont proportionnelles, nous avons donc bien une *polarisation rectiligne*.



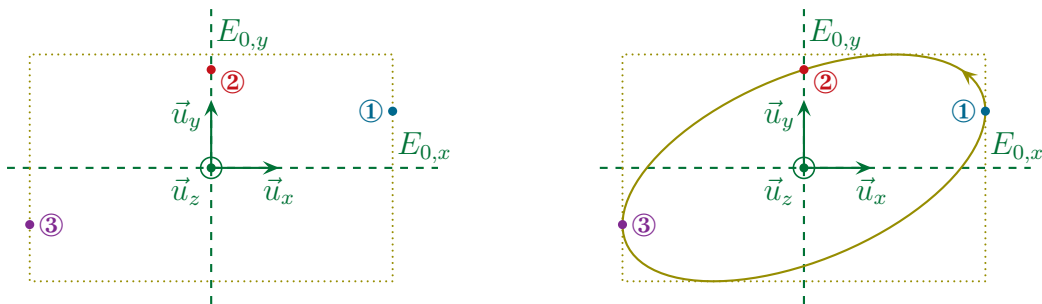
★ $-\pi/2 < \Delta\varphi < 0$

◇ Pas de surprise

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases}$$

◇ Puis, avec $-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < 0$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}$$



◇ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique gauche*.

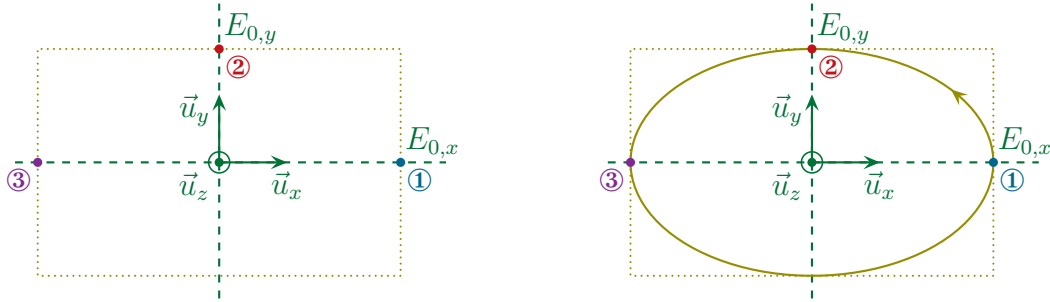
★ $\Delta\varphi = -\pi/2$

◇ Le champ

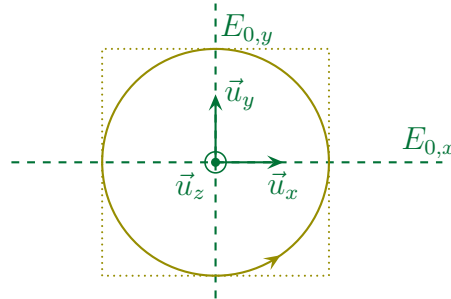
$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \sin(\omega t') \end{cases}$$

◇ Ce qui donne

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0,y} > 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$



✧ Cela donne une *polarisation elliptique gauche* et, dans le cas particulier où $E_{0,x} = E_{0,y} \stackrel{\text{not}}{=} E_0$, nous avons cette fois une *polarisation circulaire gauche*.



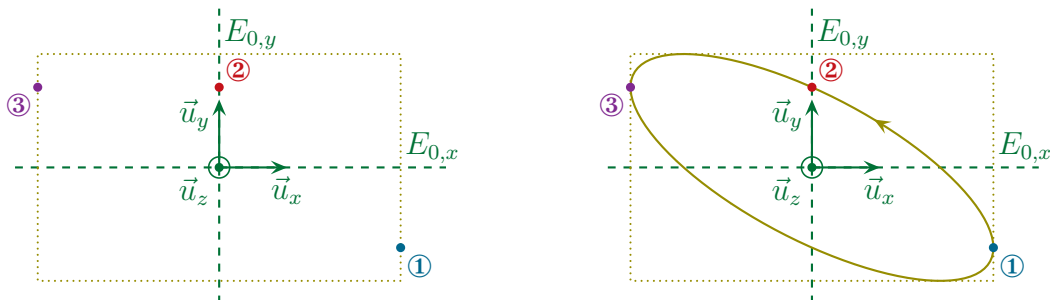
$$\star -\pi < \Delta\varphi < -\pi/2$$

✧ C'est reparti¹

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases}$$

✧ Cette fois $-\pi < \Delta\varphi < -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}$$



✧ Nous retrouvons une *polarisation elliptique gauche*.

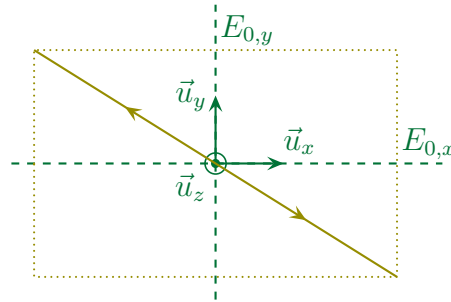
1. Vive le copier-coller !

$$\star \Delta\varphi = -\pi$$

◇ C'est le dernier cas (ouf!)

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases}$$

◇ Nous voyons que les deux composantes sont proportionnelles, nous avons donc bien une *polarisation rectiligne*.



I.3.iv – à retenir

◇ Il y a trop de cas à retenir, concentrons-nous sur les aspects vraiment importants.

Pour qu'une onde soit polarisée rectilignement, il faut :

- soit une composante nulle ;
- soit des composantes en phase ($\Delta\varphi = 0$) ou en opposition de phase ($\Delta\varphi = \pm\pi$).

Pour qu'une onde soit polarisée circulairement, il faut :

- les deux composantes de même amplitude ;
- **et** les deux composantes en quadrature de phase $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.



Il est vivement déconseillé d'apprendre par cœur les liens droite-gauche avec $\Delta\varphi$ car ils dépendent :

- du sens de propagation ;
- des repérages ;
- de la convention pour $\Delta\varphi$.

I.3.v – lumière polarisée

Chaque onde a sa propre polarisation et n'en change pas à moins de traverser un milieu particulier.



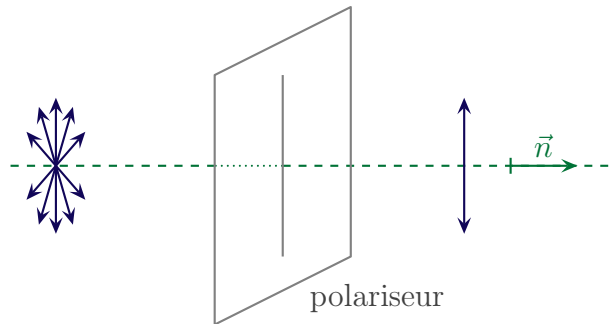
Les lames biréfringentes font parti des « milieux particuliers » permettant de changer la polarisation d'une onde.

La lumière naturelle est dite *non polarisée* car chaque train d'onde émis a une polarisation aléatoire. Cela se représente de la manière suivante



De la lumière est dite *polarisée* lorsque tous ses trains d'onde ont la même polarisation

- ◇ Dans le cas particulier de la production de lumière laser, il est parfois possible que celle-ci soit polarisée rectilignement.
- ◇ Pour polariser rectilignement, une lumière non polarisée, le plus simple est de la faire traverser un *polariseur* qui va absorber une composante plutôt qu'une autre.



- ◇ Nous verrons, dans le dernier TP de l'année, d'autres moyens de polariser une lumière.
- ⚠ Rappelons qu'il est possible de polariser une lumière aussi par diffusion (de RAYLEIGH) et par réflexion (sous l'angle de BREWSTER).

I.4 – Énergétique des OPPM

I.4.i – densité volumique d'énergie

☆ lien entre les champs

Pour une OPPM dans le vide, en norme,

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

- ◇ Reprenons la relation de structure en notation réelle

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

- ◇ Comme \vec{k} et \vec{E} sont orthogonaux (cf. structure), en norme, cela donne

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{k}\| \times \|\vec{E}\|}{\omega} \quad \text{et} \quad \omega = k c \quad \rightsquigarrow \quad \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

★ les densités instantanées

◇ La densité volumique d'énergie électrique s'écrit

$$u_{\text{él}}(M,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M,t)$$

◇ Pour la densité volumique d'énergie magnétique, nous avons

$$u_{\text{mg}}(M,t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M,t) \rightsquigarrow u_{\text{mg}}(M,t) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2(M,t) \rightsquigarrow u_{\text{mg}}(M,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M,t)$$

◇ Autrement dit, en chaque point à chaque instant, nous avons

$$u_{\text{él}}(M,t) = u_{\text{mg}}(M,t)$$

◇ De plus, à un instant en un point quelconque, nous avons

$$u_{\text{elmg}}(M,t) = u_{\text{él}}(M,t) + u_{\text{mg}}(M,t) \rightsquigarrow u_{\text{elmg}}(M,t) = \varepsilon_0 E^2(M,t)$$

◇ Notons quand même, au passage, que la nature même de la propagation fait qu'il n'est pas étonnant de trouver un résultat du type

$$\langle u_{\text{él}}(M,t) \rangle = \langle u_{\text{mg}}(M,t) \rangle$$

I.4.ii – vecteur de POYNTING

◇ Cherchons l'expression du vecteur de POYNTING en un point à un instant.

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}$$

◇ Avec la relation de structure pour les OPP, cela donne

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} \right)$$

◇ Développons le double produit vectoriel

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0 c} \left((\vec{E}(M,t) \cdot \vec{E}) \times \vec{n} - (\vec{E}(M,t) \cdot \vec{n}) \vec{E} \times \right)$$

◇ Et comme $\vec{E}(M,t) \cdot \vec{n} = 0$ (onde transverse), il reste

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{E^2(M,t)}{\mu_0 c} \times \vec{n}$$

◇ Faisons apparaître la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{\text{elmg}}(M,t) = \varepsilon_0 E^2(M,t)$

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M,t)}{\varepsilon_0 \mu_0 c} \times \vec{n} \rightsquigarrow \vec{\Pi}(M,t) = c u_{\text{elmg}}(M,t) \times \vec{n}$$

◇ Comme nous l'avons déjà montré dans le chapitre 3 de mécanique (celui traitant de la propagation), la relation précédente caractérise le fait que l'énergie se déplace à la célérité c .

Pour une OPP, le vecteur de POYNTING représente l'énergie qui se déplace à la célérité c dans la direction \vec{n} .

I.4.iii – à partir de la notation complexe

- ✧ Pour la notation complexe, **et la notation complexe uniquement**, nous pouvons calculer les valeurs moyennes de la manière suivante.
- ✧ Pour la densité volumique d'énergie électrique

$$u_{\text{el}}(M,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M,t) \quad \rightsquigarrow \quad \langle u_{\text{el}}(M,t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \times \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{E} \times \underline{E}^*)$$

- ✧ Pour la densité volumique d'énergie magnétique

$$u_{\text{mg}}(M,t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M,t) \quad \rightsquigarrow \quad \langle u_{\text{mg}}(M,t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{B} \times \underline{B}^*)$$

- ✧ Pour le vecteur de POYNTING

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$$

I.5 – Ondes sphériques

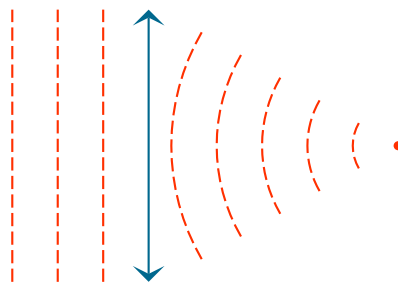
I.5.i – solution analytique

★ évidence expérimentale

- ✧ Les sources lumineuses génèrent spontanément des ondes sphériques divergentes



- ✧ Mais il y a aussi des ondes sphériques convergentes comme le montre l'expérience courante réalisée avec une lentille.



★ résultat

Pour une onde sphérique électrique, *i.e.* pour une onde telle que $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(r,t)$, il n'y a de composantes que sur \vec{u}_θ et sur \vec{u}_φ et ses composantes s'écrivent

$$E_{\theta \text{ ou } \varphi} = \frac{1}{r} \times (f(r-ct) + g(r+ct)) \quad \text{où}$$

f et g sont des fonctions quelconques

★ démonstration partielle

- ◇ La démonstration commence par le calcul du laplacien vectoriel dans le cas d'une fonction *vectorielle* ne dépendant spatialement que de r .
- ◇ Le lecteur pourra montrer (avec le formulaire de son choix) que, pour un champ électrique ne dépendant que de r , $\vec{E}(r,t)$, nous avons

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \rightsquigarrow (\dots) \rightsquigarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta E_\theta \\ \Delta E_\varphi \end{pmatrix}$$

- ◇ La grande surprise de ce calcul purement technique vient de la présence du 0 sur \vec{u}_r . Nous pouvons maintenant projeter l'équation de propagation tridimensionnelle sur \vec{u}_θ et \vec{u}_φ

$$\Delta E_\theta(r,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2}(r,t) \quad \text{et} \quad \Delta E_\varphi(r,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2}(r,t)$$

- ◇ Regardons à nouveau le formulaire donnant l'expression du laplacien pour une fonction en coordonnées sphérique et ne dépendant spatialement que de r . Nous trouvons

$$\Delta E_\theta(r,t) = \frac{1}{r} \times \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \times E_\theta(r,t))$$

- ◇ Nous avons ainsi

$$\frac{1}{r} \times \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \times E_\theta(r,t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2}(r,t) \rightsquigarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \times E_\theta(r,t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \times E_\theta(r,t))$$

- ◇ Dans ces conditions, nous pouvons voir que $r \times E_\theta(r,t)$ obéit à l'équation d'onde. Nous connaissons alors la solution

$$r \times E_\theta(r,t) = f(r - ct) + g(r + ct)$$

- ◇ Et en divisant par r , nous obtenons bien le résultat attendu.
- ◇ Bien évidemment, la démonstration est la même pour la composante sur \vec{u}_φ .

I.5.ii – structure locale

★ quelle coïncidence !

Une onde sphérique a la même structure locale qu'une OPP, à savoir, pour une onde divergente

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

- ◇ En introduisant le vecteur $\vec{k} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{c} \vec{u}_r$, nous avons, pour une OSM

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$



L'écriture précédente est *extrêmement* dangereuse car elle fait apparaître une notation \vec{k} qui n'est **pas** un vecteur d'onde. En effet, le faux vecteur $\vec{k} = k \vec{u}_r$ dépend du point M choisi et, donc, ne peut

pas montrer la direction de propagation de l'onde. De plus, avec cette notation, il peut parfois être tentant d'utiliser la traduction en terme de \vec{k} de $\vec{\nabla}$. Et là, ça devient faux puisque cette traduction n'est vraie que pour les ondes **planes** progressives monochromatiques. Pourquoi utiliser une telle notation si elle est dangereuse ? À cause de mauvaises et vieilles habitudes...

★ démonstration

◇ Repartons de l'équation de MAXWELL – FARADAY

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

 **Attention !** Traduire cette équation sous la forme $-\mathbf{j} \vec{k} \wedge \vec{E} = -\mathbf{j} \omega \vec{B}$ est une **erreur** ici car l'onde n'est **pas** une OPPM.

◇ Avec un formulaire, et compte-tenu du fait que le champ \vec{E} ne dépend spatialement que de r , nous avons

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0 \times \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(0 - \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - 0 \right) \vec{u}_\varphi$$

◇ Projétons l'équation de MAXWELL – FARADAY sur \vec{u}_θ . Cela donne

$$-\frac{1}{r} \times \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial(r \times B_\theta)}{\partial t}$$

◇ Notons

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \times (f(r - ct) + g(r + ct))$$

◇ Nous avons alors

$$\frac{\partial(r \times B_\theta)}{\partial t} = f'(r - ct) + g'(r + ct)$$

◇ Et en primitivant

$$r \times B_\theta = \frac{1}{c} (-f(r - ct) + g(r + ct)) + \text{termes non propagatifs}$$

◇ Ce qui conduit à

$$B_\theta = \frac{1}{r c} (-f(r - ct) + g(r + ct))$$

◇ En faisant la même chose avec la composante sur \vec{u}_φ de \vec{B} (introduire $F(r - ct)$ et $G(r + ct)$), le lecteur pourra montrer que

→ $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$ pour la composante divergente (en $f(r - ct)$ et $F(r - ct)$);

→ $\vec{B} = \frac{(-\vec{u}_r) \wedge \vec{E}}{c}$ pour la composante convergente (en $g(r + ct)$ et $G(r + ct)$).

I.5.iii – interprétation

★ résultat

La décroissance en $\frac{1}{r}$ d'une onde sphérique caractérise la conservation de l'énergie.

◇ Comme nous allons le voir, la diminution de l'amplitude est due à *l'étalement* de l'énergie et pas du tout à une absorption quelconque.

★ démonstration

🕒 vecteur de POYNTING

◇ Déterminons le vecteur de POYNTING pour une onde sphérique divergente. Pour cela, utilisons la relation de structure

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{\vec{E}_{(M,t)} \wedge \vec{B}_{(M,t)}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{(M,t)} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_{(M,t)}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{\vec{E}_{(M,t)}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_{(M,t)}}{c} \right)$$

◇ Développons le double produit vectoriel

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\left(\vec{E}_{(M,t)} \cdot \vec{E}_{(M,t)} \right) \times \vec{u}_r - \left(\vec{E}_{(M,t)} \cdot \vec{u}_r \right) \times \vec{E}_{(M,t)} \right)$$

◇ Et comme $\vec{E}_{(M,t)} \cdot \vec{u}_r = 0$ (l'onde \vec{E} est bien transverse puisqu'elle n'a de composante que sur \vec{u}_θ et \vec{u}_φ), il reste

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{E^2(M,t)}{\mu_0 c} \times \vec{u}_r$$

◇ Introduisons les composantes du champ

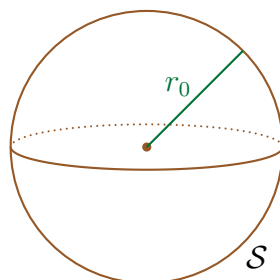
$$E_\theta(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} \quad \text{et} \quad E_\varphi(r,t) = \frac{F(r-ct)}{r}$$

◇ Nous avons alors

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{f^2(r-ct) + F^2(r-ct)}{\mu_0 c r^2} \times \vec{u}_r$$

🕒 flux traversant une sphère

◇ Calculons le flux Φ_Π traversant une sphère \mathcal{S} centrée en O et de rayon r_0



✧ Par définition du flux, nous avons

$$\Phi_{\Pi} = \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Les expressions particulières du vecteur de POYNTING et du vecteur surface donnent

$$\Phi_{\Pi} = \oint_{P \in \mathcal{S}} \left(\frac{f^2(r_P - ct) + F^2(r_P - ct)}{\mu_0 c r_P^2} \times \vec{u}_r \right) \cdot (dS_P \vec{u}_r)$$

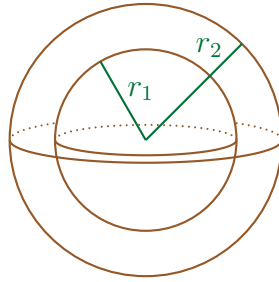
✧ Comme $r_P = C^{\text{te}} = r_0$, nous avons

$$\Phi_{\Pi} = \oint_{P \in \mathcal{S}} \frac{f^2(r_0 - ct) + F^2(r_0 - ct)}{\mu_0 c r_0^2} \times dS_P \rightsquigarrow \Phi_{\Pi} = \frac{f^2(r_0 - ct) + F^2(r_0 - ct)}{\mu_0 c r_0^2} \times \oint_{P \in \mathcal{S}} dS_P$$

✧ Et finalement

$$\Phi_{\Pi} = 4\pi \times \frac{f^2(r_0 - ct) + F^2(r_0 - ct)}{\mu_0 c}$$

✧ Ce résultat montre que le flux est propagatif, *i.e.* que toute l'énergie qui passe à travers la sphère de rayon r_1 à l'instant t_1 passera à travers la sphère de rayon r_2 à l'instant t_2 .



✧ Cela prouve bien que l'énergie se conserve.

II – Ondes au niveau atomique

- ✧ Dans la suite, et sauf précision contraire, nous nous placerons dans le cas d'un milieu peu dense de manière à pouvoir considérer chaque atome, chaque molécule, isolé(e) et seul(e) face au champ électromagnétique.

II.1 – Description dipolaire de la matière

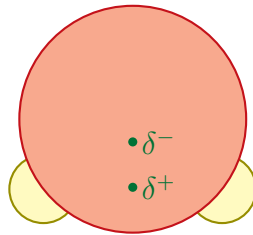
II.1.i – origine, description

- ✧ Rappelons que la matière est faite d'atome composés de noyaux (chargés positivement) et d'électrons (chargés négativement) pour une charge totale nulle.
- ✧ Toutefois, la présence de charges peut potentiellement engendrer des champs électrique et magnétique.

★ dipôle électrique

Un *dipôle électrique* (ou *dipôle*) est une répartition de charge globalement nulle mais dont le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

- ✧ L'exemple canonique est celui de la molécule d'eau. Son géométrie coudée et la plus forte électro-négativité de l'oxygène par rapport à l'hydrogène, déplacent le barycentre des charges négatives un peu plus vers l'oxygène.



Un dipôle est caractérisé par son *moment dipolaire électrique* \vec{p} (ou *moment dipolaire*).

$$q_A + q_B = 0 \quad \text{et} \quad \vec{p} = q_A \overrightarrow{BA} = q_B \overrightarrow{AB}$$

$q_A > 0$ • • $q_B < 0$

- ✧ Comme le moment dipolaire caractérise le dipôle, nous le retrouverons à la fois dans le champ que le dipôle crée et dans les actions que subit le dipôle une fois plongé dans un champ.

Un moment dipolaire électrique s'exprime en *debye* (D) tel que

$$1 \text{ D} \simeq \frac{1}{3} 10^{-19} \text{ C.m}$$

- ✧ La définition réelle du debye est

$$1 \text{ D} = 10^{-18} \text{ statC.cm}$$

- ◇ Le statC? C'est l'unité de charge de FRANKLIN qui correspond à la charge (en valeur absolue) contenue dans une mole d'électron.

★ dipôle magnétique

- ◇ Normalement le moment magnétique est dû au mouvement des charges.
- ◇ Le problème, est que la définition du « mouvement » est très problématique à l'échelle atomique à cause du principe d'incertitude d'HEISENBERG qui énonce que, lorsque nous connaissons la position à Δx près et la vitesse à Δv_x près, alors nous avons²,

$$\Delta x \times \Delta v_x \sim \hbar \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- ◇ Autrement dit : mieux nous connaissons la position, moins bien nous connaissons la vitesse, et réciproquement. Comment définir la trajectoire dans ces conditions?
- ◇ En fait, au niveau quantique, ce qui compte c'est la dernière couche d'électrons :

→ quand la dernière couche est pleine, le milieu est dit *diamagnétique*



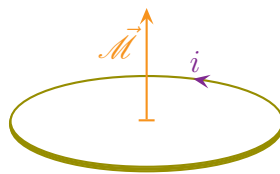
→ quand la dernière couche est incomplète, le milieu est dit *paramagnétique*



- ◇ Les aimants naturels sont *ferromagnétiques* à cause de l'interaction entre les atomes.
- ◇ Finalement, sauf pour les ferromagnétiques, les effets magnétiques dus à l'aspect quantique se caractérisent par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

Un *moment magnétique* (ou *moment dipolaire magnétique*) peut être décrit par une boucle de courant de surface \vec{S} et parcourue par i .

$$\vec{\mathcal{M}} = i \times \vec{S}$$



- ◇ Bien sûr, le vecteur surface est orienté par le sens du courant.

II.1.ii – champ créé

★ approximation dipolaire

L'*approximation dipolaire* consiste à se placer à des distances très grandes devant les distances caractéristiques du dipôle.

- ◇ Typiquement, si a est la distance entre les deux charges du dipôle (ou les deux barycentres), alors l'approximation dipolaire consiste à faire

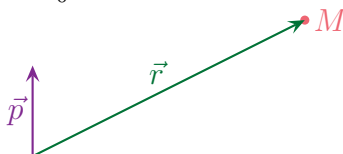
$$r \gg a$$

². \hbar est appelée « la constante réduite de PLANCK ».

★ champ \vec{E} créé par un dipôle électrique

Dans l'approximation dipolaire, le potentiel créé par un dipôle électrique s'écrit

$$V_{\text{dip}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \quad \text{avec} \quad V_{\text{dip}}(M) \sim \frac{1}{r^2}$$

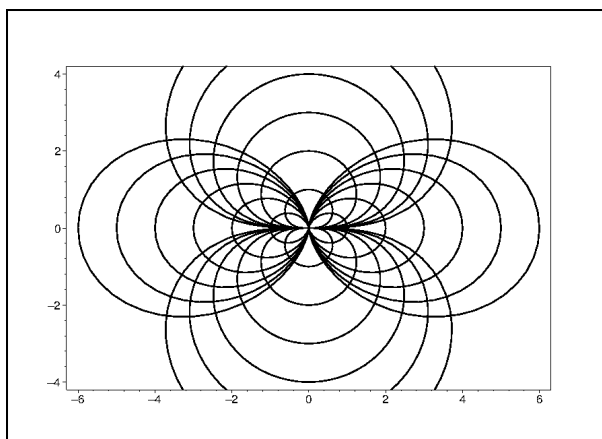


◇ Toujours dans l'approximation dipolaire, le champ créé s'écrit

$$\vec{E}_{\text{dip}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \rightsquigarrow (\dots) \rightsquigarrow \vec{E}_{\text{dip}} = \frac{3 (\vec{p} \cdot \vec{r}) \times \vec{r} - r^2 \times \vec{p}}{4 \pi \varepsilon_0 r^5}$$

◇ L'écriture précédente n'est pas à connaître. L'auteur la donne juste pour information pour montrer qu'il est possible d'exprimer le champ créé par un dipôle de manière intrinsèque.

Dans l'approximation dipolaire, les lignes de champ électrique et les isopotentielles créées par un dipôle ressemblent à



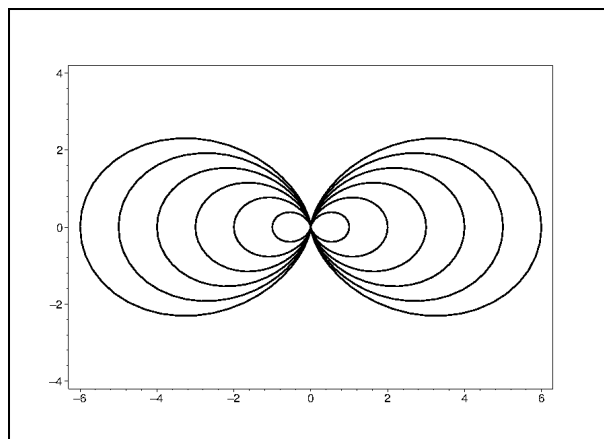
★ champ \vec{B} créé par un dipôle magnétique

◇ Par analogie, nous pouvons dire que

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \mu_0 \times \frac{3 (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \times \vec{r} - r^2 \times \vec{\mathcal{M}}}{4 \pi r^5}$$

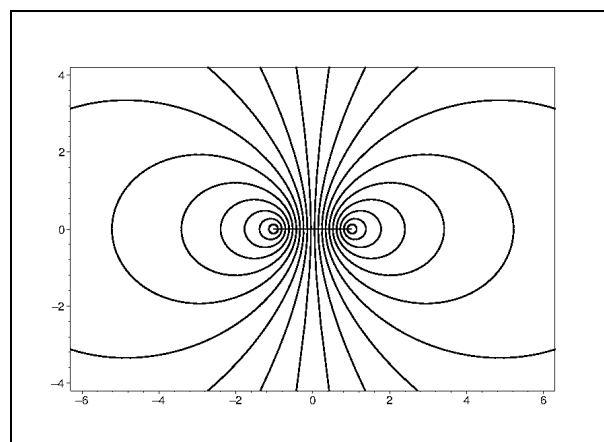
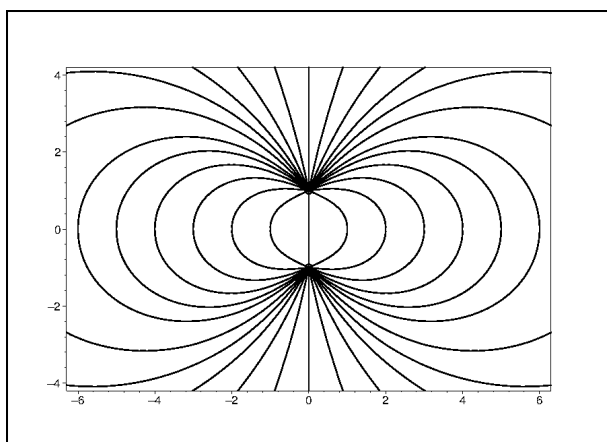
Dans l'approximation dipolaire, les lignes de champ électrique et magnétique sont identiques.

Dans l'approximation dipolaire, les lignes de champ magnétique créées par un dipôle magnétique ressemblent à



☆ hors approximation dipolaire

◇ Hors approximation dipolaire, les lignes de champ électrique et magnétique ne se ressemblent pas du tout comme le montrent respectivement les deux graphes suivants.



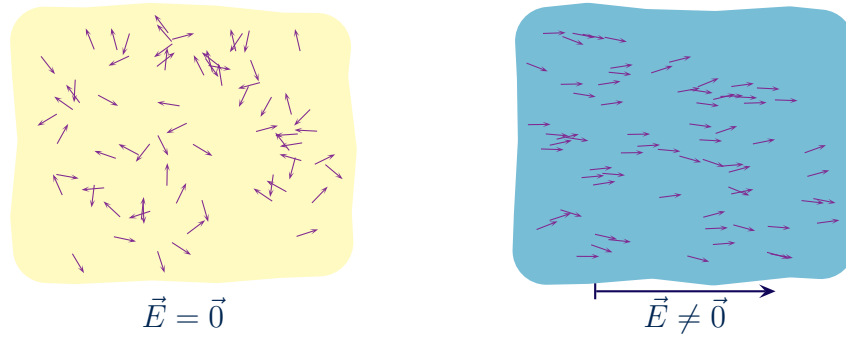
◇ Nous pouvons constater que près des sources :

- les lignes de champ électriques se rejoignent ;
- les lignes de champ magnétique forment des boucles.

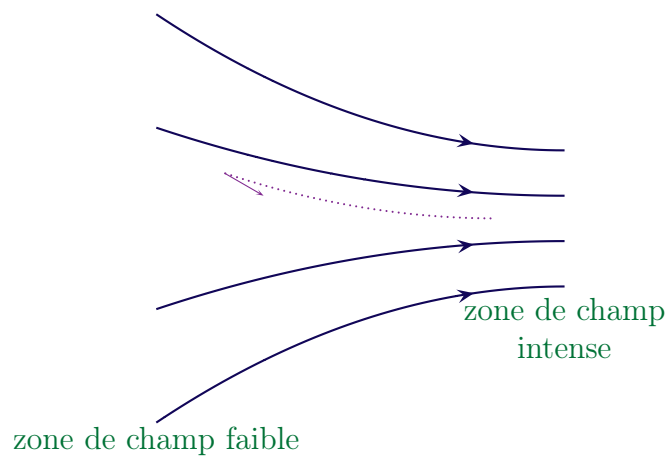
II.1.iii – actions subies

☆ qualitativement

Les dipôles ont tendance à s'orienter dans le sens des lignes de champ.



Quand un dipôle est orienté dans le sens du champ, il a tendance à aller vers les zones de champ intense.



✧ Bien sûr, en pratique, l'orientation et le déplacement se font de conserve et c'est la raison pour laquelle un bâton électrisé attirera toujours un mince filet d'eau³.

★ expression

L'énergie contenue dans un dipôle rigide s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{dip}} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_{\text{dip}} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

✧ La minimisation de l'énergie montre qu'effectivement les dipôles ont tendance à s'orienter dans le sens du champ.

Le moment subi par un dipôle rigide s'écrit

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

La force subie par un dipôle rigide s'écrit

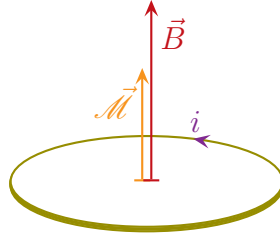
$$\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{p}=\text{cst}} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{\mathcal{M}}=\text{cst}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$$

3. Le lecteur pourra aller voir l'explication détaillée de cette expérience dans le cours de première année, chapitre 3 d'électromagnétisme.

- ◇ Une fois le dipôle \vec{p} (ou $\vec{\mathcal{M}}$) fixé en direction et si \vec{p} (ou $\vec{\mathcal{M}}$) est dans le sens du champ (de sorte que le produit scalaire soit positif), alors nous voyons bien que la force est dirigée dans le sens des $\|\vec{E}\|$ (ou $\|\vec{B}\|$) intense.

★ réinterprétation pour le dipôle magnétique

- ◇ Regardons ce qu'il en est pour le dipôle magnétique.



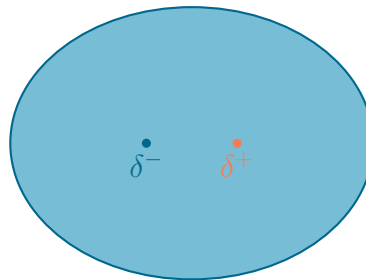
- ◇ La minimisation de l'énergie conduit à :
- la minimisation de $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$;
 - la maximisation de $+\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$;
 - la maximisation de $+\vec{S} \cdot \vec{B}$;
 - la maximisation de Φ_B .
- ◇ Et le mieux dans tout cela, c'est que nous pouvons généraliser.

Une boucle de courant subit des actions telles que le flux du champ magnétique tende à augmenter.

II.2 – Atomes comme source de champ : rayonnement dipolaire

II.2.i – modèle d'une particule polarisable

- ◇ Regardons un nuage électronique qui se déforme pour une raison quelconque (présence d'un champ extérieur, d'une autre molécule...)



- ◇ Nous voyons qu'une telle déformation peut engendrer l'apparition d'un moment dipolaire \vec{p} .
- ◇ La question est alors : que se passe-t-il lorsque le moment dipolaire est variable avec le temps ?
- ◇ Pour notre part, nous allons nous intéresser au cas d'oscillations à la pulsation ω .

II.2.ii – échelle d'observation

- ◇ L'observation se fait en un point M tel que $r_M = r$.
- ◇ Il apparaît alors une première longueur naturelle : la taille a du dipôle oscillant.

- ✧ Mais comme le moment dipolaire est variable, il va y avoir un couplage électro-magnétique et, donc, des ondes vont apparaître.
- ✧ Cela nous mène directement à la deuxième longueur naturelle : λ , la longueur d'onde de l'onde engendrée.

Dans tout ce qui suit, la longueur des ondes engendrée par un dipôle sera très grande devant la longueur caractéristique du dipôle.

$$\lambda \gg a$$

- ✧ Nous pouvons alors définir trois zones d'observation.

Pour un dipôle engendrant des ondes de grande longueur d'onde devant sa propre taille, nous appellerons

- *zone quantique*, l'échelle d'observation telle que $r \lesssim a$;
- *zone statique*, l'échelle d'observation telle que $a \ll r \ll \lambda$;
- *zone de rayonnement*, l'échelle d'observation telle que $r \gtrsim \lambda$.

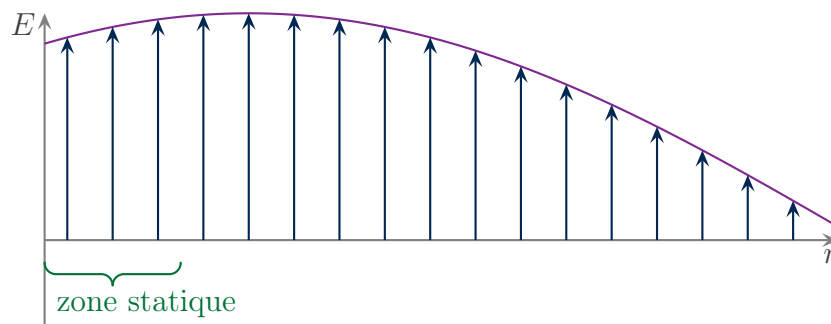


II.2.iii – zone statique

- ✧ Pour être plus juste et plus rigoureux, nous devrions dire « zone quasi-statique ».

★ voir l'approximation

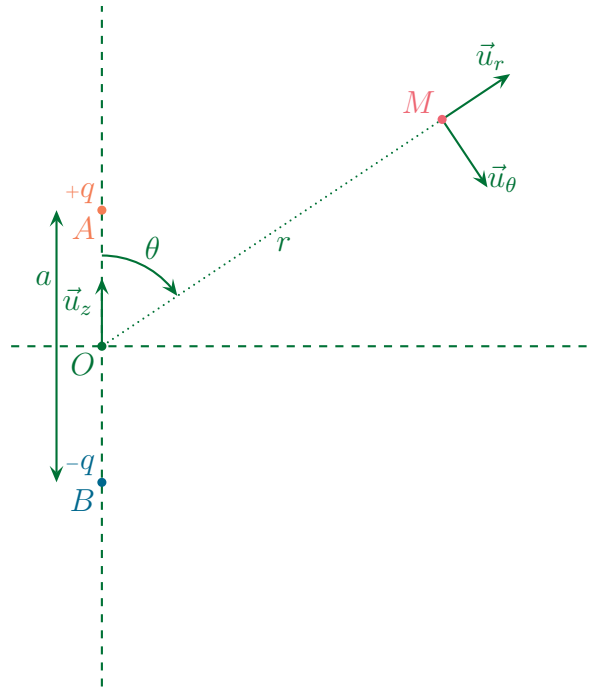
- ✧ Représentons qualitativement une des composantes du champ à un instant en fonction de r .



- ✧ Insistons : la représentation précédente concerne une onde. Il faut donc voir des « vagues » qui avancent.
- ✧ La zone statique correspond à la zone très proche de l'origine. C'est une zone dans laquelle les variations *spatiales* du champ sont faibles devant les variations *temporelles*.
- ✧ En fait dans cette zone, la propagation est si rapide (relativement parlant) que c'est comme si elle était instantanée.
- ✧ C'est bien une zone « statique ». Enfin... « quasi-statique ».

★ retrouver le potentiel

◇ Commençons par le schéma.



◇ Le potentiel en M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

◇ Pour trouver AM , commençons par chercher AM^2

$$\begin{aligned} AM^2 &= \overrightarrow{AM}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \right)^2 \\ &= \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times r \times \cos \theta \end{aligned}$$

◇ Nous avons ainsi

$$AM = r \times \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos \theta} \quad \rightsquigarrow \quad AM \stackrel{\text{DL1}}{=} r \times \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

◇ Ce qui nous donne

$$\frac{1}{AM} \stackrel{\text{DL1}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

◇ De même pour BM nous trouvons

$$\frac{1}{BM} \stackrel{\text{DL1}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

◇ Et ainsi

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) \quad \rightsquigarrow \quad V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

◇ Nous constatons que nous pouvons synthétiser cette expression sous la forme

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = q a \vec{u}_z$$

★ retrouver le champ \vec{E}

◇ Calculons simplement, puisque nous sommes dans la zone statique,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

◇ Ici, étant donné l'indépendance du potentiel vis-à-vis de φ , nous avons

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \times \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

◇ Tout calculs faits, nous trouvons

$$\vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

◇ Nous constatons que le champ diminue en $\frac{1}{r^3}$. Mais comme la densité volumique d'énergie est en E^2 , elle diminue, elle, en $\frac{1}{r^3}$.

◇ Dans le même temps, une calotte sphérique de rayon r et d'épaisseur dr a un volume en $4\pi r^2 dr$.

◇ Le produit des deux montre que l'énergie contenue dans une calotte sphérique diminue en $\frac{1}{r^4}$.

◇ Cela montre que l'énergie reste confinée près du dipôle. Elle (l'énergie) est prise au piège.

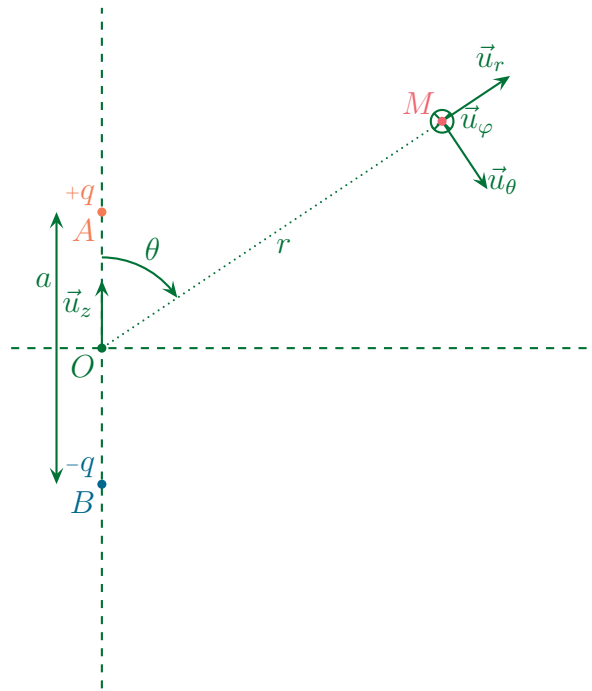
II.2.iv – zone de rayonnement

★ résultat à ne pas connaître

◇ Nous admettrons que, dans la zone de rayonnement, les champs \vec{E} et \vec{B} créés par un dipôle $\vec{p}(t) = p(t) \vec{u}_z$ s'écrivent

$$\vec{E}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r} \times \sin \theta \times \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \times \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{r} \times \sin \theta \times \vec{u}_\varphi$$

◇ Refaisons le schéma.



- ◇ Nous pouvons constater que les champs respectent les symétries puisque le plan du schéma est :
 - plan de symétrie pour les charges, sources de \vec{E} ;
 - plan de symétrie pour les courants, sources de \vec{B} .
- ◇ Dans ces conditions, pour un point du plan de symétrie (*i.e.* pour tout point du plan du schéma) :
 - \vec{E} soit être dans le plan, donc être porté par \vec{u}_θ est cohérent ;
 - \vec{B} soit être normal au plan et donc ne peut être porté que par \vec{u}_φ , ce qui est bien le cas.

★ encore une coïncidence pour la structure

- ◇ La présence du terme propagatif en $t - \frac{r}{c}$ montre que nous avons affaire à des ondes *divergentes*. Ce qui est rassurant vu que la source de l'onde est le dipôle lui-même.
- ◇ De plus nous pouvons constater que

$$\vec{B}_{\text{ray}} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_{\text{ray}}}{c}$$

L'onde rayonnée par un dipôle a la même structure locale qu'une onde plane :

- les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses ;
- en chaque point $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre normal et direct.

★ puissance rayonnée

🔗 expression

- ◇ Cherchons l'expression du vecteur de POYNTING

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{\vec{E}_{\text{ray}} \wedge \vec{B}_{\text{ray}}}{\mu_0}$$

- ◇ Avec la relation de structure, cela donne

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{1}{\mu_0} \times \vec{E}_{\text{ray}} \wedge \left(\frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_{\text{ray}}}{c} \right)$$

◇ En développant le double produit vectoriel

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{1}{\mu_0 c} \times \left(E_{\text{ray}}^2 \vec{u}_r - \left(\vec{E}_{\text{ray}} \cdot \vec{u}_r \right) \times \vec{E}_{\text{ray}} \right)$$

◇ Et comme le champ est transverse, nous avons $\vec{E}_{\text{ray}} \cdot \vec{u}_r = 0$, ce qui conduit à

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{E_{\text{ray}}^2}{\mu_0 c} \times \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{1}{\mu_0 c} \times \frac{\mu_0^2}{16 \pi^2} \times \frac{\ddot{p}^2 (t - r/c)}{r^2} \times \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

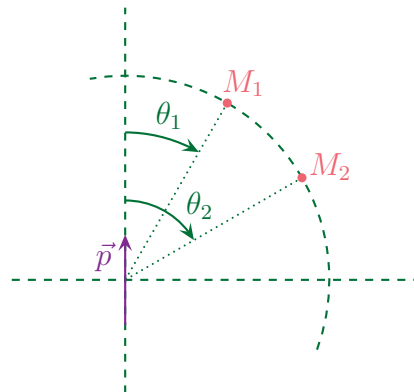
◇ Et en simplifiant

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \times \ddot{p}^2 (t - r/c) \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r$$

◇ Nous voyons que la composante sur \vec{u}_r du vecteur de POYNTING est bien positive sur \vec{u}_r , ce qui signifie que l'énergie se déplace bien dans le sens de \vec{u}_r , *i.e.* « fuit » le dipôle. Ce qui est plus que rassurant.

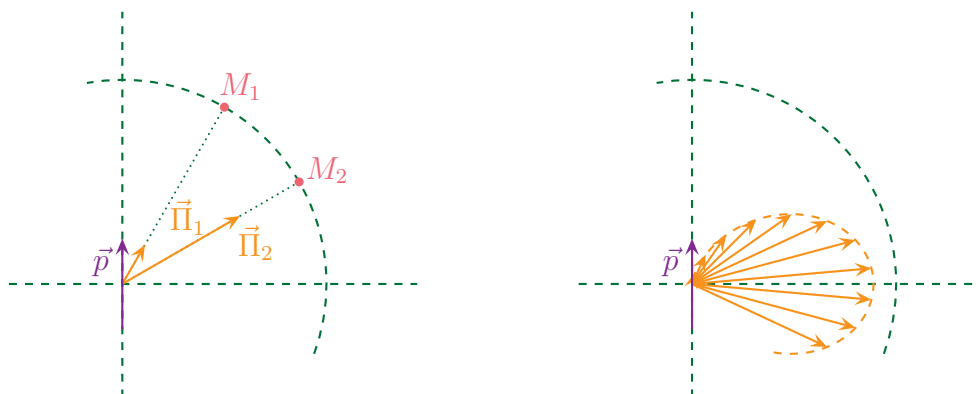
📌 représentation

◇ Choisissons deux points M_1 et M_2 à la même distance r_0 du dipôle mais pas dans la même direction.

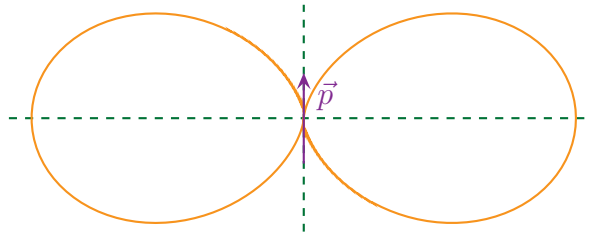


◇ L'expression précédente montre que la puissance rayonnée n'est pas la même pour M_1 et pour M_2 .

◇ Représentons, à l'échelle, le vecteur de POYNTING pour différente direction.



◇ Cette représentation est un peu lourde, confuse. Ne représentons que la position de la pointe du vecteur de POYNTING.



- ◇ Ce qui précède est appelé le *lobe d'émission* du dipôle.
- ◇ Nous pouvons constater que, qualitativement :
 - un dipôle ne rayonne pas dans sa direction ;
 - un dipôle rayonne dans son plan médiateur.
- ◇ Pour l'image, nous dirons que le dipôle rayonne « en crabe » : il faut se mettre sur son flanc pour voir de la lumière arriver.

★ puissance rayonnée totale

- ◇ Calculons la puissance rayonnée à travers une sphère \mathcal{S} de rayon r_0 .
- ◇ La puissance rayonnée n'est autre que le flux du vecteur de POYNTING, ce qui donne

$$\mathcal{P} = \Phi_{\Pi} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}_{\text{ray}}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Comme tous les points P appartiennent à la sphère de rayon r_0 , nous avons $r_P = C^{\text{te}} = r_0$.

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \times \frac{\ddot{p}^2(t - r_0/c)}{r_0^2} \times \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

- ◇ Pour alléger les notations, réécrivons le vecteur de POYNTING sous la forme suivante

$$\vec{\Pi}_{\text{ray}} = \kappa_0 \times \sin^2 \theta \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \kappa_0 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \times \frac{\ddot{p}^2(t - r_0/c)}{r_0^2}$$

- ◇ Nous avons ainsi, avec $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_r$

$$\mathcal{P} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \kappa_0 \sin^2 \theta dS_P \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P} = \kappa_0 \times \iint_{P \in \mathcal{S}} \sin^2 \theta dS_P$$

- ◇ Or, en sphérique, le déplacement élémentaire à r fixé nous permet de trouver la surface élémentaire associée

$$d\vec{r}_{\text{sphé}} = \vec{0} + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad \rightsquigarrow \quad dS_P = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

- ◇ Nous avons donc, en remplaçant

$$\mathcal{P} = \kappa_0 \times \iint_{P \in \mathcal{S}} \sin^2 \theta r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

- ◇ Compte-tenu des bornes d'intégration pour θ et φ , cela donne

$$\mathcal{P} = \kappa_0 r_0^2 \times \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right)$$

- ◇ Passons le calcul technique (basé sur la relation $\sin^3 \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$)

$$\mathcal{P} = \kappa_0 r_0^2 \times \frac{4}{3} \times 2\pi$$

✧ Reremplaçons κ_0 par son expression

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \times \frac{\ddot{p}^2(t - r_0/c)}{r_0^2} \times r_0^2 \times \frac{4}{3} \times 2 \pi$$

✧ Et nous obtenons, en simplifiant

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6 \pi c} \times \ddot{p}^2(t - r_0/c)$$

✧ N'oublions pas d'interpréter ! Ce résultat montre deux choses :

- ➔ que la puissance est propagative (cf. terme en $t - r/c$) ;
- ➔ que la puissance est constante (car \mathcal{P} ne dépend pas de r).

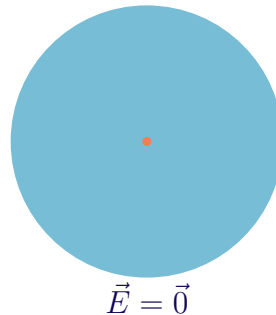
✧ Mais la conclusion principale c'est quand même celle-ci

Un atome qui se déforme engendre un champ (\vec{E}, \vec{B}) qui rayonne de l'énergie.

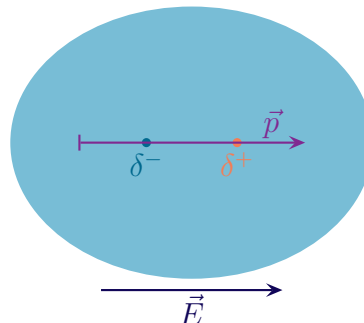
II.3 – Atome dans un champ : polarisation électronique

II.3.i – modèle de l'électron élastiquement lié

✧ Considérons un atome isolé (cf. hypothèse du milieu peu dense).



✧ Si cet atome est plongé dans un champ électrique, le noyau va avoir tendance à aller dans la direction du champ alors que le nuage électronique va plutôt avoir tendance à aller dans l'autre sens.



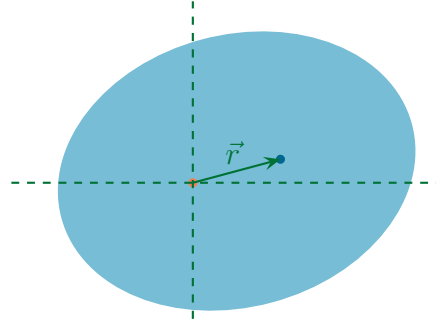
✧ Le résultat est que le barycentre des charges positives et négatives ne coïncident plus : un dipôle est né.

✧ Si le champ électrique oscille, alors le dipôle oscillera aussi et rayonnera de l'énergie, c'est ce que nous allons étudier.

✧ Pour l'instant, concentrons-nous sur le passage $\vec{E}_{\text{ext}} \longrightarrow \vec{p}_{\text{créé}}$.

★ description

- ◇ Dans tout ce qui suit, il ne faudra pas oublier que nous regardons des phénomènes à l'échelle atomique, *i.e.* régit par la mécanique quantique.
- ◇ En d'autres termes ce qui suit est un modèle *classique* d'un comportement quantique.
- ◇ Nous allons nous intéresser à ce qui se passe pour l'atome dans son référentiel barycentrique.



- ◇ Comme chaque nucléon (proton et neutron) est environ 2000 fois plus massique qu'un électron et qu'il y a plus de nucléons que d'électrons, nous pouvons faire l'approximation justifiée que le noyau est immobile dans le référentiel barycentrique.
- ◇ Nous allons considérer un électron, ou plutôt le barycentre du nuage associé de telle sorte qu'au repos, sans excitation extérieure, sa position soit

$$\vec{r}_{\text{eq}} = \vec{0}$$

- ◇ Insistons : l'électron n'est *pas* en $r = 0$ (sinon gare aux divergences des forces électrostatiques) mais son centre d'inertie l'est. Nuance.

★ modélisation des phénomènes en terme de forces

🌀 force de rappel

- ◇ Pour ce que nous allons désormais appeler abusivement « l'électron » en lieu et place du « nuage électronique », la position $\vec{r}_{\text{eq}} = \vec{0}$ est une position d'équilibre *stable*.
- ◇ Si tel n'était pas le cas, l'électron s'écarterait de l'atome créant ainsi un ion.
- ◇ Il y a donc un mécanisme de *rappel* de l'électron vers sa position au repos. Nous allons *modéliser* cette action par une force de rappel élastique du type

$$\vec{f}_{\text{rappel}} = -\kappa \vec{r}$$

- ◇ κ est la « constante » de raideur de la force de rappel. Pour des raisons pratiques qui seront plus claires dans la suite, nous allons noter cette force sous la forme

$$\vec{f}_{\text{rappel}} = -m \omega_0^2 \vec{r}$$

- ◇ m est la masse d'un électron et ω_0 une pulsation caractéristique. Une pulsation propre en fait.
- ◇ Insistons : même si la force électrostatique est en $\frac{1}{r}$ et devrait, donc, diverger en $r = 0$, ici, avec la force de rappel élastique, nous faisons que traduire la stabilité de l'électron soumis à toutes les forces qui agissent sur lui.
- ◇ Énergétiquement, une position d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie dont le développement de TAYLOR fait apparaître un terme en r^2 , terme qui, traduit avec la notion de force, fait apparaître une dépendance en r .

🌀 force de frottement

- ◇ Considérons l'électron qui bouge.
- ◇ Nous savons que cela va correspondre, en fait, à un dipôle fonction du temps, donc à un dipôle qui *rayonne*.
- ◇ Or le rayonnement, nous l'avons vu au-dessus, fait obligatoirement diminuer l'énergie du dipôle.
- ◇ Pour traduire cette perte énergétique due au rayonnement dipolaire, nous allons introduire une *force de frottement*

$$\vec{f}_{\text{perte}} = -h \vec{\nu}$$

- ◇ Pour des raisons qui ne vont pas tarder à arriver, notons directement cette force sous la forme

$$\vec{f}_{\text{perte}} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

- ◇ Insistons : il n'y a **pas** de frottement entre l'électron et le noyau ou autre chose. Tout cela se passe au niveau atomique et en terme quantique. Cette force « de frottement » est bien plus un « machin » pour faire en sorte que l'énergie diminue.

🌀 résumé

La stabilité de l'atome et la perte énergétique par rayonnement peuvent se traduire par l'existence de deux forces

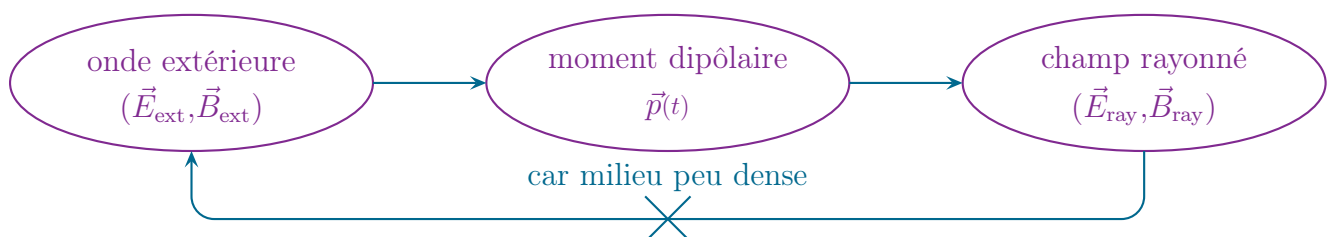
$$\vec{f}_{\text{rappel}} = -m \omega_0^2 \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{\text{perte}} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Ce modèle est appelé *modèle de l'électron élastiquement lié*.

II.3.ii – moment dipolaire créé

★ situation

- ◇ Rappelons la situation :
 - ➔ un champ extérieur $(\vec{E}_{\text{ext}}, \vec{B}_{\text{ext}})$ engendre un moment dipolaire $\vec{p}(t)$;
 - ➔ le dipôle oscillant rayonne un champ $(\vec{E}_{\text{ray}}, \vec{B}_{\text{ray}})$;
 - ➔ le champ rayonné ne perturbe pas le champ extérieur (milieu peu dense).
- ◇ Cela peut se résumer par le schéma suivant.



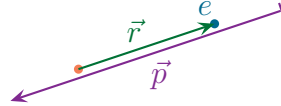
- ◇ Nous allons nous restreindre à l'étude des conséquences d'une OPPMPR pour \vec{E} . Une OPPMPR est une OPPM Polarisée Rectilignement.
- ◇ Dans le cas d'une onde autre que polarisée rectilignement, nous pouvons utiliser le principe de superposition d'autant plus facilement que le modèle que nous avons adopté est bien linéaire.

★ **moment dipolaire**

- ◇ Dans la modélisation que nous avons adoptée, le moment dipolaire est dû au déplacement d'un seul électron.

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{p}(t) = -e \vec{r}(t)$$

★ **approximation**🌀 **énoncé**

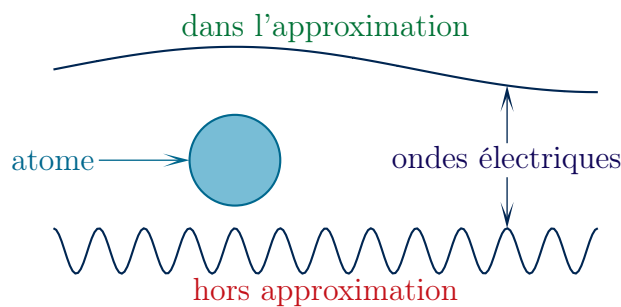
Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, l'électron est considéré comme non relativiste. Cela se traduit par

$$v \ll c$$

🌀 **conséquence 1 : un champ \vec{E} uniforme**

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié et non relativiste, le champ électrique est uniforme à l'échelle de l'atome.

- ◇ Schématiquement, cela signifie que la longueur d'onde de l'onde électrique est grande devant la taille de l'atome.



- ◇ L'onde électrique s'écrit

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- ◇ Rappelons que le fait d'avoir une amplitude \vec{E}_0 réelle (vs. complexe) implique que la polarisation est bien rectiligne.
- ◇ Comparons les deux termes de phase

$$\frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{k}{\omega} \times \frac{r}{t} \rightsquigarrow \frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{1}{c} \times v \rightsquigarrow \frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{v}{c} \ll 1$$

- ◇ Nous pouvons donc négliger le terme en $\vec{k} \cdot \vec{r}$ devant le terme en ωt .

- ✧ Cela signifie que la variation *spatiale* de l'onde est négligeable devant la variation *temporelle*. En d'autres termes, nous retrouvons bien le fait que l'onde est uniforme à l'échelle atomique.
- ✧ Nous pouvons toutefois le montrer en reprenant les ODG

$$\frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{k}{\omega T} \times r \quad \rightsquigarrow \quad \frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{k}{2\pi} r \quad \rightsquigarrow \quad \frac{k r}{\omega t} \equiv \frac{r}{\lambda}$$

- ✧ Or, nous venons de prouver que

$$\frac{k r}{\omega t} \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{r}{\lambda} \ll 1$$

- ✧ Finalement, si l'onde qui arrive sur l'atome s'écrit $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, l'atome, lui, ne « voit » que le champ

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

🔗 conséquence 2 : action de \vec{B} négligeable

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié non relativiste, l'action du champ magnétique \vec{B} est négligeable devant l'action du champ électrique \vec{E} .

- ✧ En effet, la force que subit l'électron dans ce modèle est la force de LORENTZ qui s'écrit

$$\vec{f}_{\text{Lo}} = -e \left(\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \right)$$

- ✧ En comparant les deux actions, nous avons, en ODG

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}\|}{\|\vec{E}_{\text{ext}}\|} \equiv \frac{v B_{\text{ext}}}{E_{\text{ext}}}$$

- ✧ Et comme le champ extérieur correspond à une onde dans le vide, nous avons

$$B_{\text{ext}} \equiv \frac{E_{\text{ext}}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}\|}{\|\vec{E}_{\text{ext}}\|} \equiv \frac{v}{c} \ll 1$$

- ✧ Ce qui prouve le résultat.

★ PFD

- ✧ Le PFD appliqué à l'électron s'écrit, compte-tenu des approximations

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}(t) = \overrightarrow{\text{poids}} + \left(-m \omega_0^2 \vec{r}(t) \right) + \left(-\frac{m}{\tau} \vec{v}(t) \right) + (-e) \left(\vec{E}_{\text{ext}}(t) + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \right)$$

- ✧ Ce qui donne, en divisant par m ,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}(t) + \frac{1}{\tau} \vec{v}(t) + \omega_0^2 \vec{r}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}_{\text{ext}}(t)$$

- ✧ Passons en notation complexe

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}(t) + \frac{1}{\tau} \frac{d \underline{r}}{dt}(t) + \omega_0^2 \underline{r}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

- ✧ Ce qui donne

$$-\omega^2 \vec{r}(t) + \frac{j\omega}{\tau} \vec{r}(t) + \omega_0^2 \vec{r}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

◇ Et puis, avec $\vec{r}(t) = \underline{\vec{r}}_0 e^{j\omega t}$

$$\underline{\vec{r}}_0 = \frac{-\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \times \vec{E}_0$$

II.3.iii – puissance rayonnée : diffusion RAYLEIGH

★ considérations numériques pour l'atmosphère

◇ Prenons le cas de l'atmosphère, milieu peu dense.

◇ L'onde excitatrice est la lumière solaire telle que

$$\omega \sim 2,5 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1} \longrightarrow 5 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

◇ Les molécules principales composant l'atmosphère sont O₂ et N₂, sensibles à l'UV $\lambda_0 \sim 80 \text{ nm}$. Cela donne

$$\omega_0 \sim 2 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

◇ Enfin, pour O₂ et N₂, la constante de temps vaut environ

$$\tau \sim 10^{-7} \text{ s} \longrightarrow 10^{-9} \text{ s}$$

◇ Le dénominateur de $\underline{\vec{r}}_0$ est donc tel que

$$\underbrace{\omega_0^2}_{4 \cdot 10^{32}} - \underbrace{\omega^2}_{4 \cdot 10^{30}} + \underbrace{\frac{j\omega}{\tau}}_{10^{22}} \sim \omega_0^2$$

◇ Finalement il reste

$$\underline{\vec{r}}_0 = -\frac{e}{m\omega_0^2} \times \vec{E}_0 \quad \text{et} \quad \underline{\vec{p}}_0 = +\frac{e^2}{m\omega_0^2} \times \vec{E}_0$$

☕ *Remarque.* Le facteur de qualité pour un tel oscillateur vaut $Q = \omega_0 \times \tau \sim 10^8$, ce qui est considérable. Cela correspond à $2Q$ oscillations, *i.e.* à des trains d'onde de longueur $\ell_c \sim 2Q\lambda \sim 1 \text{ km}$... Il est clair que le modèle est naïf sur ce point.

★ puissance rayonnée

◇ Nous avons trouvé plus haut que la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r s'écrit

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \times \dot{\vec{p}}^2(t-r/c)$$

◇ En valeur moyenne cela donne

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \times \frac{1}{2} \text{Re} \left(\ddot{\vec{p}} \cdot \ddot{\vec{p}}^* \right) \quad \text{avec} \quad \ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \underline{\vec{p}}$$

◇ Nous avons ainsi

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{12 \pi c} \times \left(-\frac{\omega^2 e^2}{m \omega_0^2} \times \vec{E}_0 \right)^2$$

◇ Ce qui donne

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 e^4}{12 \pi c m^2} \times E_0^2 \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

★ réécriture

◇ Notons I_0 l'intensité moyenne du vecteur de POYNTING de l'onde incidente. Pour une OPPM, nous avons déjà montré que

$$I_0 = \frac{1}{2} \times \varepsilon_0 E_0^2 \times c \rightsquigarrow I_0 = \frac{1}{2 \mu_0 c} \times E_0^2 \rightsquigarrow E_0^2 = 2 \mu_0 c I_0$$

◇ Remplaçons dans l'expression de $\langle \mathcal{P} \rangle$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 e^4}{12 \pi c m^2} \times 2 \mu_0 c I_0 \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

◇ Finalement

$$\langle \mathcal{P} \rangle = I_0 \times \frac{\mu_0^2 e^4}{6 \pi m^2} \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \stackrel{\text{not}}{=} I_0 \times \sigma \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

◇ Le coefficient $\sigma \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\mu_0^2 e^4}{6 \pi m^2}$ est un paramètre phénoménologique qui ne dépend que de l'atome considéré.

◇ De plus comme $\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$, nous pouvons réécrire la puissance moyenne rayonnée sous la forme

$$\langle \mathcal{P} \rangle = I_0 \times \sigma \times \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

★ interprétation

La *diffusion de RAYLEIGH* est la diffusion liée au rayonnement dipolaire des molécules excitées par une onde incidente.

◇ L'expression de la puissance rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle = I_0 \times \sigma \times \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$ montre que celle-ci est proportionnelle à l'éclairement incident. Comme l'éclairement n'est autre que de la puissance surfacique, ce résultat paraît assez naturel et logique.

◇ Mais il y a une dépendance fonctionnelle en plus en λ ...

La puissance rayonnée par diffusion de RAYLEIGH est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda^4}$.

◇ Comme $\lambda_{\text{rouge}} \sim 2 \lambda_{\text{bleu}}$ nous avons

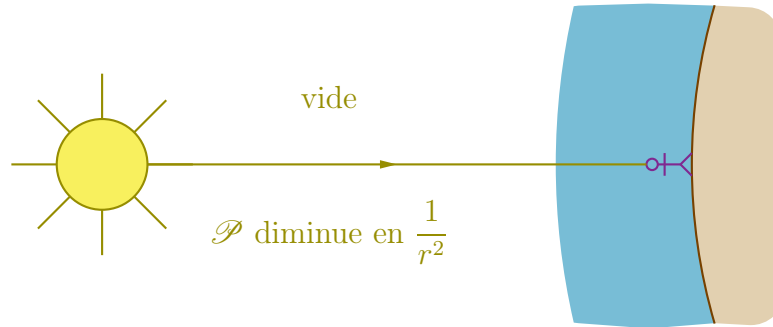
$$\mathcal{P}_{\text{RAYLEIGH}(\text{rouge})} = \frac{\mathcal{P}_{\text{RAYLEIGH}(\text{bleu})}}{16}$$

II.3.iv – couleur du ciel

★ en plein jour par temps dégagé

🕒 modélisation

◇ Considérons un bonhomme recevant de la puissance de la part du Soleil.

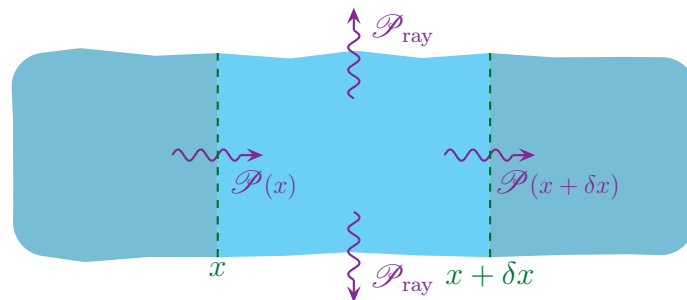


◇ Entre le Soleil et la Terre, la puissance surfacique diminue en $\frac{1}{r^2}$ du seul fait de la distance.

◇ En revanche, à travers l'atmosphère, le rayonnement est en partie diffusé par les molécules, ce qui fait que le bonhomme ne perçoit pas *toute* la puissance provenant du Soleil.

🕒 bilan de puissance

◇ Faisons un bilan de puissance électromagnétique pour une tranche d'atmosphère d'épaisseur δx et de section S entre t et $t + dt$.



◇ Comme tout bilan, nous pouvons écrire

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME}$$

◇ Ici, nous considérons une situation stationnaire donc

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = 0$$

◇ De plus ce n'est l'atmosphère qui va *créer* de l'énergie, donc

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = 0$$

◇ Il reste

ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE = 0

✧ Nous avons ici 3 termes d'échange :

- la puissance $\mathcal{P}(x) S$ qui entre ;
- la puissance $-\mathcal{P}(x + \delta x) S$ qui sort ;
- la puissance rayonnée $-\delta \mathcal{P}_{\text{ray}}$ qui sort.

✧ La puissance rayonnée n'est autre que la somme de toutes les puissances rayonnées par chacun des dipôles. En notant n^* leur densité, cela donne

$$\delta \mathcal{P}_{\text{ray}} = dN \times \mathcal{P}_{\text{ray par 1 dip}} \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathcal{P}_{\text{ray}} = n^* S \delta x \times \mathcal{P}_{\text{ray par 1 dip}}$$

✧ Nous avons trouvé précédemment que

$$\mathcal{P}_{\text{ray par 1 dip}} = \mathcal{P}(x) \times \sigma \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

✧ En regroupant, cela donne

$$\mathcal{P}(x) S - \mathcal{P}(x + \delta x) S - \mathcal{P}(x) \times \sigma \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \times n^* S \delta x = 0$$

✧ En réarrangeant et en faisant tendre δx vers 0

$$\frac{\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x + \delta x)}{\delta x} + \mathcal{P}(x) \times \sigma \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \times n^* = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mathcal{P}}{dx}(x) + n^* \sigma \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \times \mathcal{P}(x) = 0$$

✧ Il s'agit là d'une équation différentielle que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx}(x) + \frac{1}{\ell(\omega)} \times \mathcal{P}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\ell(\omega)} = n^* \sigma \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

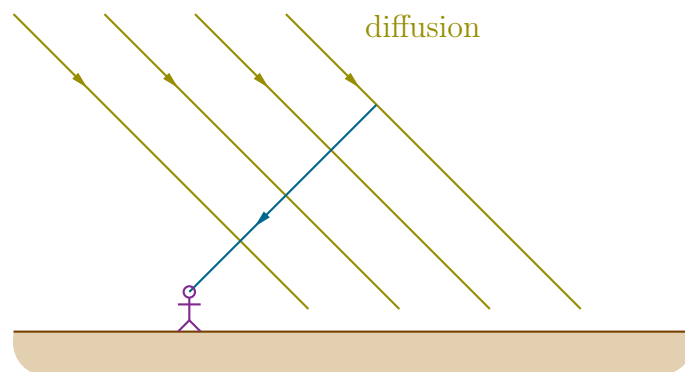
✧ La solution est alors connue

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_0 e^{-x/\ell(\omega)}$$

✧ Ici, nous avons affaire à une atténuation de l'onde mais *sans* absorption.

☯ un ciel bleu

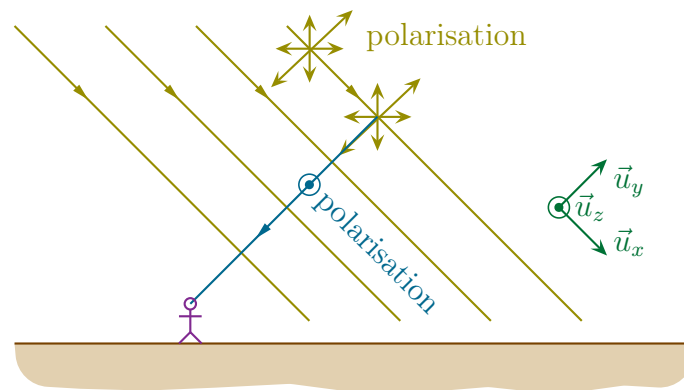
✧ Regardons ce qui se passe pour un observateur sur le sol.



- ✧ Si l'observateur regarde le rayonnement solaire en face⁴, il verra à peu près toutes les radiations étant donné que la couche atmosphérique n'est pas très épaisse.
- ✧ En revanche s'il regarde à côté du Soleil, il verra quand même de la lumière. Cela peut paraître étrange sur le papier, mais c'est extrêmement naturel en fait.
- ✧ En effet, en regardant à côté, il ne voit que les rayonnements qui proviennent des molécules de l'atmosphère.
- ✧ Or ce rayonnement est d'autant plus intense que la longueur d'onde est courte : il y a plus de violet et de bleu diffusé que de rouge.
- ✧ C'est la raison pour laquelle en regardant le ciel, mais pas dans la direction du Soleil, il nous apparaît bleu.
- ✧ Notons que si cette diffusion RAYLEIGH n'existait pas, alors, en plein jour, en regardant à côté du Soleil, nous ne verrions que du « noir », ça serait « la nuit ».

☉ un ciel polarisé

- ✧ Regardons d'un peu plus près le rayonnement RAYLEIGH de l'atmosphère.
- ✧ La lumière solaire n'est pas polarisée, ce qui signifie que (cf. schéma ci-dessous), le rayonnement solaire est porté par \vec{u}_y et \vec{u}_z .



- ✧ Les dipôles engendrés sont donc des dipôles suivant \vec{u}_y et \vec{u}_z .
- ✧ Sauf qu'un dipôle ne rayonne pas dans sa direction. Sauf que l'observateur est dans la direction \vec{u}_y .
- ✧ Cela signifie que l'observateur voit essentiellement le rayonnement dû aux dipôles en \vec{u}_z : la lumière diffusée est polarisée.
- ✧ En pratique, la lumière n'est pas totalement polarisée car elle ne provient pas exclusivement de la zone représentée sur le schéma précédent.
- ✧ Ce phénomène est utilisé en photographie où l'utilisation de filtre sélectionnant la bonne polarisation permet de « bleuir » le ciel directement lors de la prise de vue. Maintenant, avec les logiciels de traitement d'image, ce n'est plus très utile.

La diffusion RAYLEIGH permet de polariser partiellement la lumière.

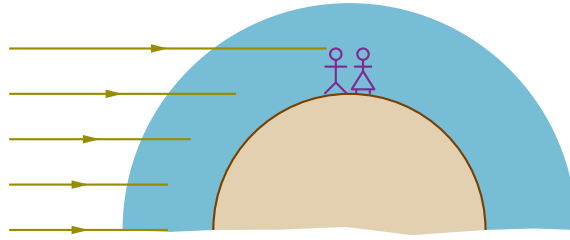
☉ un soleil couchant

- ✧ Numériquement, nous avons

$$\ell(\text{bleu}) = 560 \text{ km} \quad \text{et} \quad \ell(\text{rouge}) = 4300 \text{ km}$$

4. Ce qui est très dangereux et risque de causer des lésions irréversibles à la rétine.

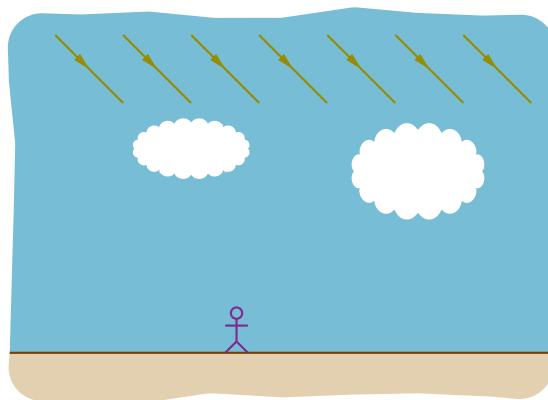
- ✧ Cela signifie que lorsque nous regardons le soleil à travers une grande épaisseur d'atmosphère (ce qui arrive au lever et au coucher du Soleil), nous percevons essentiellement les radiations rouges, car elles ont été moins diffusées.



- ✧ C'est d'ailleurs la raison pour laquelle quand la Lune se trouve juste dans l'alignement de la Terre et du Soleil⁵, la Terre cache le Soleil, mais la réfraction de la lumière solaire par l'atmosphère permet quand même à la Lune d'être éclairée.
- ✧ Sauf qu'elle sera éclairée par de la lumière qui aura traversé de grandes épaisseurs d'atmosphère, de la lumière composée essentiellement de radiation rouges. La Lune sera rousse.

★ en plein jour par temps légèrement couvert

- ✧ Imaginons un petit nuage.

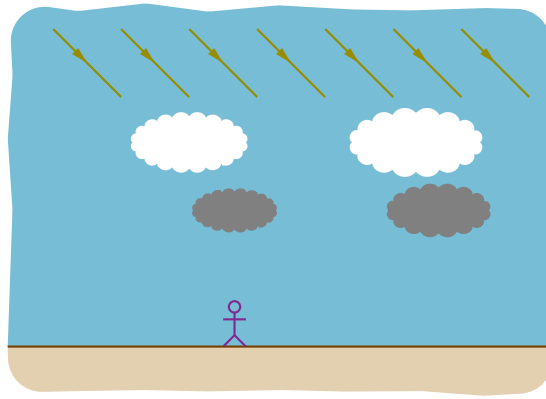


- ✧ Un nuage, c'est un brouillard dans le ciel. Autrement dit, c'est constitué de fines gouttellettes d'eau.
- ✧ Ces gouttellettes d'eau absorbent *indifféremment* toutes les longueurs d'onde et les rémettent dans toutes les directions.
- ✧ C'est la raison pour laquelle le nuage paraît blanc.

★ en plein jour par temps couvert

- ✧ Pourquoi, parfois, un nuage semble gris ?
- ✧ Non pas parce que, comme le pense les jeunes enfants, il est « sale », mais tout simplement parce qu'il est dans l'ombre d'un autre nuage !

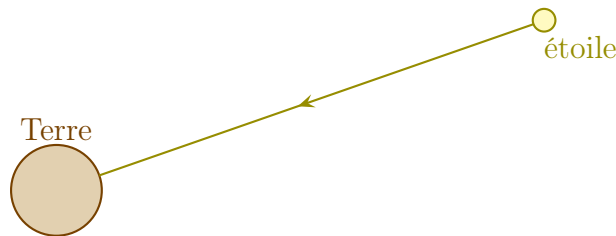
5. Ce n'est ni plus ni moins que le phénomène d'éclipse de Lune.



- ◇ Il y a un autre cas de nuages gris, ce sont les nuages si gros qu'ils absorbent de manière très significative toute la lumière qu'ils reçoivent.
- ◇ Des nuages aussi gros, ce n'est pas vraiment bon signe en terme météorologique...

★ la nuit

- ◇ Une (vieille) question est « Pourquoi la nuit est-elle noire ? »
- ◇ En effet, imaginons une étoile, au loin.



- ◇ La puissance qu'elle émet diminue, du fait de la distance en $\frac{1}{r^2}$.
- ◇ La puissance *totale* reçue de la part de toutes les étoiles s'écrit donc, en notant $n^*(r)$ la densité d'étoile à la distance r de la Terre, et en sommant sur les calottes sphériques

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \int_0^\infty n^*(r) \times \frac{\mathcal{P}_0}{r^2} \times d\tau$$

- ◇ Or, le volume d'une calotte sphérique de rayon r et d'épaisseur dr s'écrit

$$d\tau = 4\pi r^2 dr \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{tot}} = \int_0^\infty n^*(r) \times \frac{\mathcal{P}_0}{r^2} \times 4\pi r^2 dr \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{tot}} = 4\pi \mathcal{P}_0 \times \int_0^\infty n^*(r) dr$$

- ◇ En faisant l'hypothèse raisonnable que la densité des étoiles est à peu près uniforme dans l'univers, nous avons

$$n^*(r) \sim n_0^* \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{tot}} = \infty$$

- ◇ Or, n'importe quelle personne qui s'est balladé un jour la nuit a pu constaté qu'elle n'était pas éblouie par la puissance lumineuse reçue de la part des étoiles.
- ◇ Ce paradoxe a longtemps chagriné les physiciens.
- ◇ Pour le lever, c'est très simple. Ce calcul (juste) associé à l'expérience commune d'une ballade nocturne, montre que, contrairement à l'intuition, la densité d'étoile n'est **pas** uniforme dans l'univers.
- ◇ Nous pouvons même aller plus loin en remarquant que la puissance reçue est finie. Cela prouve que la densité d'étoile diminue très vite avec la distance (du moins plus vite qu'en $1/r$).
- ◇ En clair, il y a vraiment très peu d'étoiles dans l'univers. Très peu... par rapport à ce qu'il pourrait contenir.

III – Exemples

III.1 – Conducteur électrique

III.1.i – modèle de DRÛDE

Le *modèle de DRÛDE* est un modèle permettant de décrire l'évolution des électrons libres dans un conducteur.

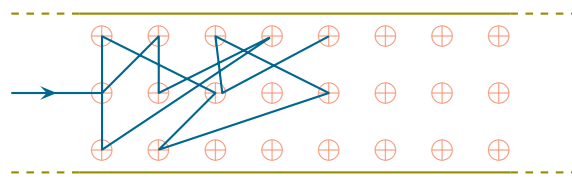
- ◇ Dans un conducteur, il y a trois types de charges :
 - les noyaux atomiques, chargés positivement, immobiles ;
 - les électrons de valence et de cœur, chargés négativement, immobiles aussi ;
 - les électrons libres, chargés négativement, mobiles.
- ◇ Quand un courant circule dans un conducteur, l'expérience montre le conducteur s'échauffe *via* l'effet JOULE.
- ◇ Cela montre que les électrons, responsables du courant électrique, perdent une partie de leur énergie au profit du réseau cristallin.
- ◇ Nous allons modéliser cette perte énergétique par une force de frottement que nous noterons

$$\vec{f} = -h \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{f}^{\text{not}} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

- ◇ τ s'interprète comme la durée entre deux interactions successives entre l'électron libre et le réseau cristallin.

Pour un bon conducteur, la durée entre deux interactions électron – réseau cristallin est de l'ordre de
 $\tau \sim 10^{-14}$ s

- ◇ N'oublions pas que l'électron va très vite (à cause de l'agitation thermique) entre deux interactions. En revanche, globalement, sur une « longue » durée, il va plutôt lentement.



III.1.ii – mise en équation – approximation

- ◇ Considérons un électron libre non relativiste et écrivons le PFD. Cela donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \overrightarrow{\text{poids}} + (-e) \left(\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \right) + \left(-\frac{m}{\tau} \vec{v} \right)$$

- ◇ Comme l'électron est non relativiste, nous avons, pour une onde électromagnétique

$$B_{\text{ext}} \sim \frac{E_{\text{ext}}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \|\vec{E}_{\text{ext}}\| \gg \|\vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}\|$$

- ◇ De plus, pour les raisons que nous avons montré lors du modèle de l'électron élastiquement lié, que l'hypothèse « électron non relativiste » impliquait que nous pouvions considérer l'onde électrique homogène à l'échelle de l'électron.

✧ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}(t) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(t) = \operatorname{Re} \left(\underline{\vec{E}}(t) \right) \quad \text{où} \quad \underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t}$$

III.1.iii – conductivité complexe

★ expression

✧ Rappelons que la conductivité γ est définie par la relation

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

✧ La densité de courant électrique s'écrit, en notant n la densité particulaire d'électron libre

$$\vec{j} = \ll n q \vec{v} \gg \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = -e n \vec{v}$$

✧ Nous allons directement rechercher cette densité de courant en notation complexe

$$\underline{j}(t) = \underline{j}_0 e^{i\omega t}$$

✧ Passons le PFD en notation complexe

$$\frac{d\underline{v}}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \underline{v}(t) = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}(t)$$

✧ Utilisons des notations usuelles

$$\underline{\vec{r}}(t) = \underline{\vec{r}}_0 e^{i\omega t}; \quad \underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t};$$

✧ Nous arrivons alors à

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right) \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t} = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t}$$

✧ Ce qui conduit d'abord à

$$\underline{\vec{v}}_0 = \frac{-\frac{e}{m}}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$$

✧ Puis à

$$\underline{j}_0 = -n e \underline{\vec{v}}_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{j}_0 = \frac{\frac{n e^2}{m}}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \times \underline{\vec{E}}_0$$

✧ Nous pouvons alors réécrire ce résultat sous la forme

$$\underline{j}_0 = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega \tau} \times \underline{\vec{E}}_0 \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

✧ Nous voyons apparaître la conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega \tau} \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

★ première interprétation

◇ Dans le cas de fréquences faibles telles que $\omega \tau \ll 1$, nous avons

$$\underline{j}_0 = \gamma_0 \underline{E}_0$$

◇ Nous retrouvons la loi d'OHM locale.

◇ En revanche, si $\omega \tau \gg 1$, nous avons

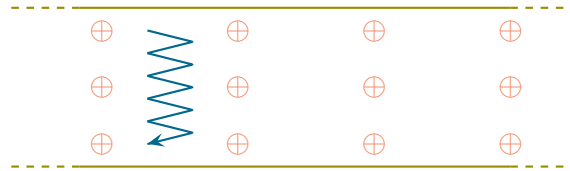
$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{i \omega \tau} \underline{E}_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\gamma} = -i \frac{\gamma_0}{\omega \tau} \underline{E}_0$$

◇ La puissance moyenne dissipée s'écrit donc

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{j} \cdot \underline{E}^* \right) \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-i \frac{\gamma_0}{\omega \tau} E_0^2 \right) = 0$$

◇ Il n'y a pas d'effet JOULE dans le conducteur.

◇ Cela s'explique très bien en fait car si le champ change trop rapidement, l'électron n'a pas le temps de se déplacer entre deux noyaux. Il ne peut plus interagir avec le réseau, il ne perd donc plus d'énergie.



III.1.iv – lois dans le conducteur

◇ Considérons toujours une OPPM comme champ extérieur.

★ conservation de la charge

◇ La conservation de la charge se traduit par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

◇ Avec la notation complexe, cela donne

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$$

◇ Introduisons la conductivité

$$i \omega \underline{\rho} + \operatorname{div} \left(\underline{\gamma} \underline{E} \right) = 0$$

◇ Comme le milieu est uniforme, nous pouvons « sortir » $\underline{\gamma}$ de la divergence

$$i \omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \operatorname{div} \underline{E} = 0$$

◇ Puis MAXWELL – GAUSS donne

$$i \omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$$

◇ Ce qui conduit à

$$\left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \times \underline{\rho} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\rho} = 0$$

Dans un conducteur soumis à une onde électromagnétique, la charge volumique est nulle.

★ les équations de MAXWELL

- ◇ Nous allons chercher comment une OPPM peut se propager dans un conducteur. L'onde électrique s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}})}$$

- ◇ En fait, nous venons d'écrire la forme d'une solution pour une POPPM puisque nous autorisons les valeurs complexes pour $\underline{\vec{k}}$.
 ◇ Dans ces conditions, nabla s'écrit

$$\vec{\nabla} = -i \underline{\vec{k}}$$

- ◇ Nous pouvons réécrire à présent les équations de MAXWELL.
 ◇ L'équation de MAXWELL – GAUSS s'écrit, compte-tenu du résultat précédent

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

- ◇ Pas de surprise pour l'équation de MAXWELL – THOMSON

$$\text{div } \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

- ◇ Pour MAXWELL – FARADAY, cela donne

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

- ◇ Enfin, pour MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{j}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 (i\omega) \underline{\vec{E}} \right)$$

- ◇ Et finalement

$$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = i\mu_0 \left(\underline{\gamma} + \varepsilon_0 (i\omega) \right) \underline{\vec{E}}$$

★ relation de dispersion

- ◇ Rappelons que la relation de dispersion n'est autre que l'équation de « propagation » dans laquelle nous injectons une solution (en général une OPPM) pour trouver une condition nécessaire d'existence.
 ◇ Or, pour trouver l'équation de « propagation » nous partons du calcul de $\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} () \right)$. Sauf qu'ici, le rotationnel est équivalent à un produit vectoriel avec $\underline{\vec{k}}$.
 ◇ Calculons donc, pour changer, $\underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right)$

$$\underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \left(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} \right) \times \underline{\vec{k}} - \left(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{k}} \right) \times \underline{\vec{E}}$$

✧ Avec MAXWELL – GAUSS cela donne

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = 0 - k^2 \vec{E}$$

✧ Reprenons le double produit vectoriel et injectons MAXWELL – FARADAY

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k} \wedge (\omega \wedge \vec{B}) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \omega \times \vec{k} \wedge \vec{B}$$

✧ Et avec MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = i \omega \mu_0 (\underline{\gamma} + \varepsilon_0 i \omega) \vec{E}$$

✧ En rapprochant les deux résultats, nous avons ainsi

$$-k^2 \vec{E} = i \omega \mu_0 (\underline{\gamma} + \varepsilon_0 i \omega) \vec{E}$$

✧ Et comme cette relation est vérifiée quelle que soit l'onde électrique envisagée

$$k^2 = -i \omega \mu_0 (\underline{\gamma} + \varepsilon_0 i \omega)$$

✧ Réécrivons cette relation sous une autre forme en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et en remplaçant la conductivité complexe par son expression

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - i \omega \mu_0 \underline{\gamma} \quad \rightsquigarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \omega \mu_0 \times \frac{\gamma_0}{1 + i \omega \tau}$$

III.1.v – basse fréquences : effet de peau

★ simplification de la relation de dispersion

✧ En basses-fréquences nous avons

$$\omega \tau \ll 1$$

✧ La relation de dispersion se simplifie donc en

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \omega \mu_0 \gamma_0$$

✧ Comparons les deux termes

$$\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega}$$

✧ Or, numériquement,

$$\gamma_0 \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 \sim 10^{-11} \text{ F.m}^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} \sim \frac{10^{18}}{\omega}$$

✧ Sauf que nous avons supposé les BF, ce qui implique, numériquement

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$$

✧ Nous pouvons donc en conclure que

$$\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} \sim \frac{10^{18}}{\omega} \gg 1$$

◇ Ce qui permet de simplifier la relation de dispersion en

$$\underline{k}^2 = -i \omega \mu_0 \gamma_0$$

★ vecteur d'onde complexe

◇ Pour trouver le vecteur d'onde complexe, utilisons la technique habituelle, à savoir écrire $-i$ sous sa forme exponentielle

$$\underline{k}^2 = \omega \mu_0 \gamma_0 \times e^{-i\pi/2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0} \times e^{-i\pi/4}$$

◇ Et en repassant en notation algébrique, cela donne

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0} \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} \stackrel{\text{not}}{=} k_0 (1-i) \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\frac{\omega \gamma_0 \mu_0}{2}}$$

★ retrouvailles

◇ Nous retrouvons bien l'effet de peau.

◇ En effet, l'expression du champ s'écrit, en prenant $\vec{k} = \underline{k} \vec{u}_z$

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 (1-i) z)}$$

◇ Et en séparant partie réelle et partie imaginaire de \underline{k}

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \times e^{-z/\delta} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{k_0} = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma_0 \mu_0}}$$

◇ δ est bien l'épaisseur de peau.

👉 *Remarque.* Dans ce chapitre, nous sommes parti d'un cas général, pour une fréquence (presque) quelconque et nous n'avons simplifié qu'après l'obtention de la relation de dispersion. Lorsque nous avons parlé de l'effet de peau dans le chapitre 1, nous avons commencé par nous placer en ARQS et nous avons trouvé la solution après.

◇ Rappelons quelques résultats de l'effet de peau.

◇ L'expression de $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, de par la présence d'un vecteur d'onde *complexe*, montre que les champs magnétique et électrique sont déphasés.

◇ Les ondes électrique et magnétique sont transverses (cf. MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON).

◇ L'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma_0 \mu_0}}$ diminue avec la fréquence et la conductivité.

◇ Un conducteur parfait est tel que $\delta \rightarrow 0$ et est tel que les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur du conducteur.

◇ Rappelons qu'il ne faut pas confondre « conducteur parfait » et « supra-conducteur » car si les deux ont bien des champs électrique et magnétique nuls en leur sein, le courant dans un supra-conducteur n'est pas en surface mais en volume.

★ vitesses

◇ Reprenons l'expression du vecteur d'onde complexe

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{2}} (1 - i) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = k'(\omega) + i k''(\omega)$$

🕒 vitesse de phase

◇ Par définition, nous avons

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

◇ Cela donne tout de suite

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}$$

◇ Le fait que la vitesse de phase dépende de la pulsation montre qu'il y a de la dispersion.

🕒 vitesse de groupe

◇ La vitesse de groupe s'écrit, quant à elle

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}}$$

◇ Reste à calculer

$$v_g = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{2\omega}}} \quad \rightsquigarrow \quad v_g = 2 \times \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = 2 v_\varphi$$

◇ Nous pouvons constater que la vitesse de groupe n'est pas du tout égale à la vitesse de phase.

III.1.vi – haute fréquence : réflexion, transparence

★ simplifier la relation de dispersion

◇ Reprenons la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0 \times \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

◇ Simplifions dans le cas des hautes fréquences, du moins pour les fréquences telles que $\omega\tau \gg 1$. Cela donne

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0 \times \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau}$$

◇ Utilisons l'expression que nous avons obtenue pour γ_0

$$\gamma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{\mu_0 n e^2 c^2}{m}}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}}{c^2}$$

◇ Nous voyons que la durée τ disparaît du résultat.

- ✧ Ce n'est pas très étonnant quand nous pensons à l'approximation que nous venons de faire : la fréquence est si élevée que les électrons n'ont plus le temps d'interagir avec le réseau cristallin.
- ✧ Réécrivons la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}$$

- ✧ ω_p est appelée la pulsation plasmon (ou pulsation plasma).
- ✧ Numériquement

$$\omega_p^2 \sim \frac{10^{29} \times 10^{-38}}{10^{-30} \times 10^{-11}} \sim 10^{32} \quad \rightsquigarrow \quad \omega_p \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

★ premier cas : $\omega > \omega_p \gg 1/\tau$

- ✧ Dans ces conditions, nous avons

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$$

- ✧ Le vecteur d'onde est réel et nous avons

$$\underline{k} = k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

- ✧ Nous voyons alors que :

- il n'y a pas d'atténuation (car le vecteur d'onde est réel) ;
- il va y avoir de la dispersion (car k n'est pas proportionnel à ω).

- ✧ Dans ces conditions, l'onde électromagnétique *traverse* le conducteur *sans* s'atténuer : le milieu est parfaitement transparent.

★ premier cas : $\omega_p > \omega \gg 1/\tau$

- ✧ Dans ce cas, la relation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$$

- ✧ Le vecteur d'onde est donc imaginaire pur et nous avons

$$\underline{k} = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \stackrel{\text{not}}{=} \epsilon i k_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1$$

- ✧ Le fait qu'il n'y ait pas de partie réelle montre qu'il n'y a **pas** de propagation.
- ✧ En revanche, il y a de l'atténuation car $\text{Im}(\underline{k}) \neq 0$.

🌀 une « onde » non propagative

- ✧ Pour une OPPM polarisée rectilignement sur \vec{u}_x , cela donne

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{i(\omega t - i \epsilon k_0 z)} \times \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{\epsilon k_0 z} \times e^{i \omega t} \times \vec{u}_x$$

- ✧ Et en notation réelle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{\epsilon k_0 z} \times \cos(\omega t) \times \vec{u}_x$$

- ✧ Nous pouvons effectivement constater que le résultat n'est pas une onde propagative car elle ne s'écrit pas sous la forme $\omega t - k_0 z$.
- ✧ « L'onde » ainsi obtenue est appelée *onde évanescente*.

🔗 interprétation énergétique

◇ Le vecteur de POYNTING vaut, en moyenne,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

◇ Or, avec la relation de structure, nous avons

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}^* \wedge \vec{E}^*}{\omega} \right)$$

◇ En développant le double produit vectoriel et en utilisant la relation de structure

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{E^2}{\omega} \vec{k}^* - 0$$

◇ Et ainsi

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{E^2}{\omega \mu_0} \vec{k}^* \right)$$

◇ Sauf que le vecteur d'onde est imaginaire pur, ce qui implique

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

◇ Autrement dit, il y a atténuation, mais *sans* absorption puisqu'aucune puissance n'est transportée par le vecteur de POYNTING.

◇ La question est : « Où part l'énergie ? »

◇ Si de l'énergie arrive mais qu'elle n'est pas conservée par le milieu, c'est qu'elle repart.

◇ Autrement dit, nous avons affaire ici à un phénomène de *réflexion*.

◇ Nous venons tout simplement de montrer que les métaux réfléchissent les ondes électromagnétique de hautes-fréquences.

◇ C'est exactement comme ça que fonctionnent les miroirs métalliques.

III.2 – Guide d'onde

III.2.i – présentation

★ guide d'onde réel

◇ Le but d'un guide d'onde est de transmettre une onde d'un point à un autre sans perte.

◇ Pour les ondes lumineuses, le lecteur connaît sûrement les guides d'onde associés : ce sont les *fibres optique*.

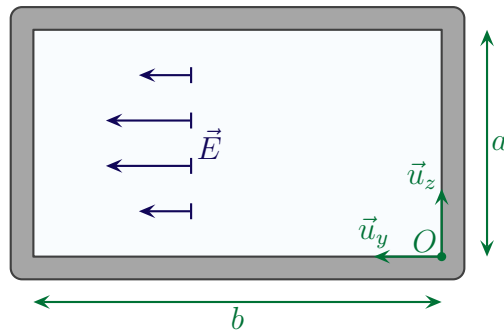
◇ Pour les ondes de plus basses fréquences, utilisées notamment dans les radars de détections, le guide est un simple tube creux de section rectangulaire et dont les parois sont métallique comme le montre la photo ci-dessous⁶

6. Source : <http://www.electronique.biz/photos/large/414056.JPG>



★ modélisation

◇ Vu de face la section du guide ressemble au schéma ci-dessous.



◇ Vu de profil, la situation est la suivante.




◇ Nous ferons aussi l'approximation que les conducteurs métalliques limitant le guide sont parfaits.

★ contraintes

◇ Nous allons chercher à faire propager suivant \vec{u}_x l'onde électrique suivante

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E(y,z) \times \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

◇ Il s'agit d'une onde polarisée rectilignement horizontalement.

 Attention ! Rien ne nous dit *a priori* qu'il s'agit d'une OPPM.

◇ L'onde doit obéir aux lois physiques :

- les équations de MAXWELL dans le vide (à l'intérieur du guide) ;
- les conditions aux limites (au niveau des parois métalliques).

III.2.ii – champ \vec{E}

★ contrainte

- ◇ La première chose à vérifier, puisque nous imposons une certaine forme de solution, est que la solution proposée respecte la structure du champ électrique telle que l'imposent les lois de MAXWELL.
- ◇ Commençons par MAXWELL – GAUSS qui s'écrit, dans le vide,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

- ◇ Ici, comme il n'y a de composantes de \vec{E} que sur \vec{u}_y la divergence se simplifie en

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

- ◇ Cela implique que le champ électrique ne dépend pas de y , donc qu'il s'écrit

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E(z) \times \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

★ contrainte de l'équation de propagation

- ◇ Pour faire en sorte que le champ électrique vérifie l'autre équation de MAXWELL, nous devons « éliminer » \vec{B} des équations, ce qui revient à trouver l'équation de propagation vérifiée par \vec{E} .
- ◇ Après la démonstration usuelle (basée sur le calcul de $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E})$), nous trouvons, comme d'habitude et parce que *dans* le guide d'onde le milieu est vide

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- ◇ En projetant cette équation sur \vec{u}_y (et parce que le laplacien vectoriel se projette très bien dans la base cartésienne), nous avons

$$\Delta E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

- ◇ L'expression du laplacien (toujours en coordonnées cartésiennes) donne, ici,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

- ◇ Et en remplaçant par l'expression recherchée pour le champ, nous obtenons

$$-(-k)^2 E(z) \cos(\omega t - kx) + \frac{d^2 E}{dz^2}(z) \times \cos(\omega t - kx) = -\frac{\omega^2}{c^2} \times \cos(\omega t - kx)$$

- ◇ Ce qui conduit à

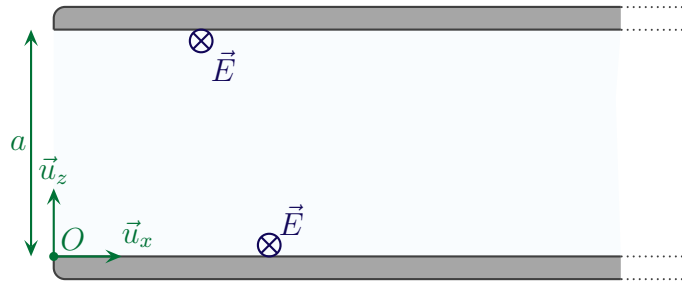
$$\frac{d^2 E}{dz^2}(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(z) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 E}{dz^2}(z) + K^2 E(z) = 0 \quad \text{avec} \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

★ résolution

- ◇ Le type de solution va dépendre du signe de K^2 .
- ◇ Mais avant, regardons les conditions aux limites.

🔗 les conditions aux limites

- ✧ Nous cherchons une solution en z , nous devons donc regarder ce qui se passe aux limites de z , *i.e.* en $z = 0$ et en $z = a$.



- ✧ Nous pouvons remarquer qu'en $z = 0^-$ et en $z = a^+$, nous avons des conducteurs parfaits, ce qui implique

$$\vec{E}(x, y, 0^-, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(x, y, a^+, t) = \vec{0}$$

- ✧ Remarquons aussi que, pour les plans en $z = 0$ et $z = a$, le champ dans le guide d'onde est tangentiel.
 ✧ Comme la composante tangentielle d'un champ électrique est continue à la traversée d'une surface chargée, nous pouvons en déduire que

$$E_y(x, y, 0^+, t) = 0 \quad \text{et} \quad E_y(x, y, a^-, t) = 0$$

🔥 *Remarque.* Nous ne pouvons rien dire en ce qui concerne les plans verticaux en $y = 0$ et $y = b$. L'écriture des relations de passage impliquerait sûrement l'existence de charges surfaciques.

🔗 premier cas

- ✧ Si $K^2 < 0$, posons

$$\alpha^2 = -K^2 > 0$$

- ✧ Alors l'équation pour $E(z)$ s'écrit

$$\frac{d^2 E}{dz^2}(z) - \alpha^2 E(z) = 0$$

- ✧ Les solutions sont du type

$$E(z) = A \cosh(\alpha z) + B \sinh(\alpha z)$$

- ✧ Or les conditions aux limites impliquent :

➔ $E(0) = 0$, soit $A = 0$;

➔ $E(a) = 0$, soit $B = 0$.

- ✧ Autrement dit, il n'y a pas d'onde qui puisse vérifier

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$$

🔗 deuxième cas

◇ Avec $K^2 > 0$, l'équation à résoudre est

$$\frac{d^2 E}{dz^2}(z) + K^2 E(z) = 0$$

◇ Les solutions sont

$$E(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

◇ La condition à la limite $z = 0$ implique

$$E(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A = 0$$

◇ La condition à la limite $z = a$ implique, en excluant la solution inintéressante $B = 0$ correspondant à l'absence d'onde,

$$E(a) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad B \sin(Ka) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad Ka = n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

◇ Autrement dit, il peut y avoir des solutions pourvu que

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = K^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad \rightsquigarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

🔗 conclusion

◇ La solution s'écrit, finalement,

$$E_y(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \times \cos(\omega t - k_n x) \quad \text{avec} \quad k_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

III.2.iii – champ \vec{B}

★ expression

◇ L'erreur la plus courante est d'utiliser la relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

◇ Ici, cette relation est inapplicable. En effet :

- ➔ nous avons bien une onde qui se propage dans le vide ;
- ➔ nous avons bien une onde progressive ;
- ➔ nous avons bien une onde monochromatique ;
- ➔ **mais** nous n'avons pas une onde plane car nous ne pouvons pas l'écrire sous la forme d'une fonction de $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$.

◇ Ce dernier point est rédhibitoire. Nous devons donc revenir à la base, *i.e.* aux équations de MAXWELL.

◇ Reprenons les deux équations de couplage, à savoir MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

◇ La première sera clairement plus facile à utiliser car il est plus aisé, techniquement, de primitiver par rapport à t que d'inverser un rotationnel.

◇ Commençons par simplifier le rotationnel avant de le calculer.

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

◇ Nous avons donc

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z \\ &= -E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \times \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_x + k_n E_0 \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \times \sin(\omega t - k_n x) \vec{u}_z \end{aligned}$$

◇ Primitivons par rapport à t (sans oublier le changement de signe imposé par la loi de MAXWELL – FARADAY) en omettant directement les termes non propagatifs.

$$\vec{B}(x, z, t) = E_0 \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \times \sin(\omega t - k_n x) \vec{u}_x + \frac{k_n E_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \times \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_z$$

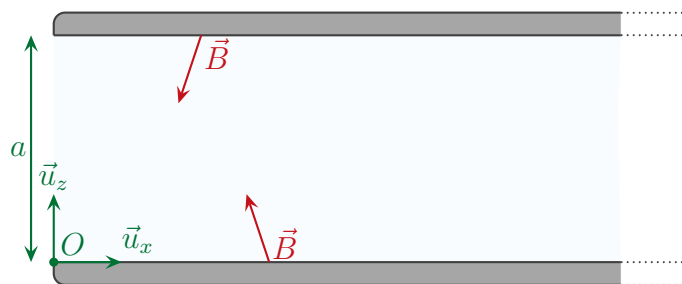
★ interprétation

◇ Nous pouvons constater aisément que

$$\vec{B} \cdot \vec{u}_x \neq 0$$

◇ Autrement dit, bien que le champ électrique soit transverse, le champ magnétique **n'est pas** transverse.

◇ Regardons ce qu'impliquent les relations de passage en champ magnétique au niveau de $z = 0$ et $z = a$.



◇ Il doit y avoir continuité de la composante normale. Or :

- la composante normale pour les deux plans considérés est la composante sur \vec{u}_z ;
- le champ magnétique dans le conducteur parfait est nul.

◇ Nous devons donc avoir

$$B_z(x, 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad B_z(x, a, t) = 0$$

◇ Ces relations sont vérifiées, tout va bien.

- ✧ En ce qui concerne la composante tangentielle *qui existe*, nous pouvons voir qu'elle implique la présence de courant surfaciques.
- ✧ Les traductions des relations de passage en $z = 0$ et $z = a$ permettent de calculer ce courant surfacique, et s'écrivent

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \vec{u}_z \wedge (\vec{B}(x,0,t) - \vec{0}) = \mu_0 \vec{j}_s(x,0,t) \\ \vec{u}_z \wedge (\vec{0} - \vec{B}(x,a,t)) = \mu_0 \vec{j}_s(x,a,t) \end{cases}$$

III.2.iv – relation de dispersion

- ✧ Reprenons la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

★ premier cas : $k^2 < 0$

- ✧ Si $k^2 < 0$, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$k^2 = (\mathrm{i} k'')^2 \quad \rightsquigarrow \quad k = \epsilon \mathrm{i} k'' \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1$$

- ✧ La solution, en complexe, s'écrit donc

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi z}{a}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi z}{a}\right) e^{\mathrm{i}^2 k'' \epsilon x} \times e^{\mathrm{i} \omega t} \vec{u}_y$$

- ✧ Et en ne gardant que la solution qui diminue avec x

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi z}{a}\right) e^{-k'' x} \times e^{\mathrm{i} \omega t} \vec{u}_y \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi z}{a}\right) e^{-k'' x} \times \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

- ✧ Ce n'est plus vraiment une onde puisque le champ n'est pas propagatif.
- ✧ Nous retrouvons là une onde *évanescence*.
- ✧ En pratique, cela signifie que, à n donné, il y a une pulsation limite en dessous de laquelle le champ ne peut plus se propager.

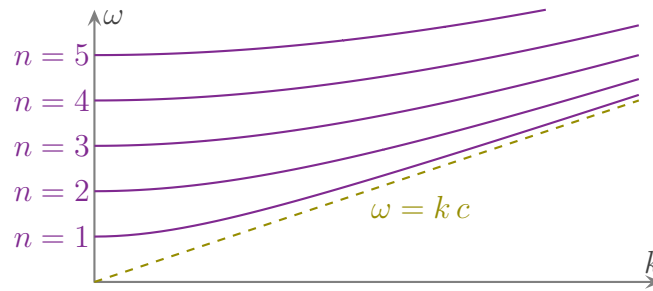
★ deuxième cas : $k^2 > 0$

🔴 un filtre passe-haut

- ✧ Avec $k^2 > 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \omega = c \times \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$$

- ✧ Graphiquement, pour plusieurs valeurs de n , cela donne



- ◇ Sur le graphique ci-dessus, nous avons représenté en pointillé la relation de dispersion $\omega = k c$.
- ◇ Nous remarquons aussi que, pour chaque valeur de n , il y a une pulsation minimale telle que

$$\omega_{c,n} = \frac{n \pi c}{a}$$

- ◇ D'une certaine manière, le guide d'onde agit comme un filtre qui ne laisserait passer que les pulsations assez-haute. Un filtre passe-haut, en somme, dont la fréquence de coupure serait $\omega_{c,n}$.

🌀 vitesse de phase

- ◇ La vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad \rightsquigarrow \quad v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}}$$

- ◇ Comme la vitesse de phase dépend de ω , nous pouvons dire qu'il y aura de la *dispersion*.
- ◇ Réécrivons la vitesse de phase en faisant apparaître la pulsation de coupure $\omega_{c,n} = \frac{n \pi c}{a}$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}} \quad \rightsquigarrow \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}} > c$$

- ◇ La vitesse de phase est plus grande que la célérité de la lumière !
- ◇ En fait, ce n'est pas grave car, ici, comme dans la très grande majorité des cas, l'énergie se déplace à la vitesse de groupe.

🌀 vitesse de groupe

- ◇ La vitesse de groupe s'écrit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- ◇ Pour la calculer simplement, partons de la relation de dispersion

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2}$$

- ◇ En différenciant, cela donne

$$2 \omega d\omega = c^2 2 k dk \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

- ◇ Et nous obtenons bien

$$v_g = c \times \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}} < c$$

III.2.v – aspect énergétique

◇ Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'énergie se déplace effectivement à une célérité égale à la vitesse de groupe.

★ moyenne de la densité volumique d'énergie

◇ La densité volumique d'énergie s'écrit

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

◇ Pour alléger les écriture, notons

$$\xi = \frac{n \pi z}{a} \quad \text{et} \quad \varphi = \omega t - k_n x$$

◇ Nous avons alors, en reprenant les expressions de \vec{E} et \vec{B}

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \xi \cos^2 \varphi + \frac{1}{2 \mu_0} \left(\frac{E_0^2 k_n^2}{\omega^2} \sin^2 \xi \cos^2 \varphi + \frac{E_0^2 n^2 \pi^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \xi \sin^2 \varphi \right)$$

◇ Prenons la valeur moyenne aussi bien dans le temps $\langle u_{\text{em}} \rangle$ que dans l'espace $\langle \overline{u_{\text{em}}} \rangle$. Cela implique que

$$\overline{\sin^2 \xi} = \overline{\cos^2 \xi} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$$

◇ Nous avons alors

$$\langle \overline{u_{\text{em}}} \rangle = \frac{1}{8} \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{8 \mu_0} \left(\frac{E_0^2 k_n^2}{\omega^2} + \frac{E_0^2 n^2 \pi^2}{a^2 \omega^2} \right)$$

◇ Utilisons les relations suivantes

$$\frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2 \quad \text{et} \quad \frac{n^2 \pi^2}{a^2 \omega^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{k_n^2}{\omega^2}$$

◇ Cela nous permet de factoriser

$$\langle \overline{u_{\text{em}}} \rangle = \frac{1}{8} \varepsilon_0 E_0^2 \times \left(1 + \frac{k_n^2 c^2}{\omega^2} + \left(1 - \frac{k_n^2 c^2}{\omega^2} \right) \right)$$

◇ Il reste alors, après simplifications

$$\langle \overline{u_{\text{em}}} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2$$

★ **moyenne du vecteur de POYNTING**

◇ Commençons par exprimer le vecteur de POYNTING

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \times \left(E_0 \sin \xi \cos \varphi \vec{u}_y \wedge \left(\frac{k_n E_0}{\omega} \sin \xi \cos \varphi \vec{u}_z + \frac{n \pi E_0}{a \omega} \cos \xi \sin \varphi \vec{u}_x \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \times \left(\frac{E_0^2 k_n}{\omega} \sin^2 \xi \cos^2 \varphi \vec{u}_x - \frac{n \pi E_0^2}{a \omega} \cos \xi \sin \xi \sin \varphi \cos \varphi \vec{u}_z \right)\end{aligned}$$

◇ Or, en prenant la valeur moyenne, tant spatiale que temporelle, nous pouvons constater que

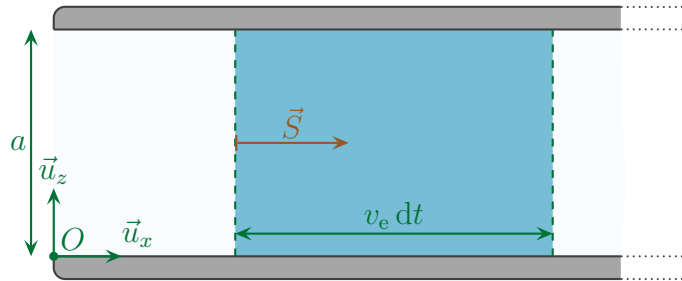
$$\langle \sin \varphi \cos \varphi \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2 \varphi) \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle \sin \varphi \cos \varphi \rangle = 0$$

◇ La composante sur \vec{u}_z du vecteur de POYNTING est donc nulle en moyenne, ce qui fait qu'il reste

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k_n}{4 \mu_0 \omega} \vec{u}_x$$

★ **vitesse de transport de l'énergie**

◇ Comptons de deux manière différente l'énergie qui traverse la section S du guide d'onde pendant la durée dt .



◇ Nous pouvons dire, de manière immédiate, que l'énergie qui traverse la section S n'est autre que le flux du vecteur de POYNTING que multiplie la durée. Cela donne

$$\delta \mathcal{E} = \Phi_{\Pi} dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathcal{E} = \langle \vec{\Pi} \rangle S dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathcal{E} = \frac{E_0^2 k_n S}{4 \mu_0 \omega} dt$$

◇ Comme l'énergie ne cesse de bouger, nous pouvons aussi dire que l'énergie qui a traversé la section S durant dt se retrouve dans le volume $d\mathcal{V}$ de section S et de longueur $v_e dt$, où v_e est la vitesse de l'énergie.

◇ Cela donne

$$\delta \mathcal{E} = \langle \overline{u_{em}} \rangle \times S v_e dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathcal{E} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 S v_e dt$$

◇ En égalant les deux résultats, nous trouvons

$$\frac{E_0^2 k_n S}{4 \mu_0 \omega} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 S v_e \quad \rightsquigarrow \quad v_e = \frac{k_n}{\omega \mu_0 \varepsilon_0}$$

◇ Et ainsi

$$v_e = \frac{k_n c^2}{\omega} \rightsquigarrow v_e = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

◇ Nous venons bien de prouver que, dans le cas étudié, l'énergie se déplace à la vitesse v_g . C'est donc cette vitesse, et uniquement celle-ci, qui se **doit** d'être inférieure à la célérité de la lumière.

III.2.vi – vision en OPPM

★ transformation technique

◇ Reprenons l'expression du champ électrique.

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

◇ Utilisons la relation trigonométrique

$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

◇ Cela donne

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t - kx + \frac{n\pi z}{a}\right) \vec{u}_y - \frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t - kx - \frac{n\pi z}{a}\right) \vec{u}_y$$

◇ Ce que nous pouvons écrire

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right) \vec{u}_y - \frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}\right) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{k}_1 = k \vec{u}_x - \frac{n\pi}{a} \vec{u}_z \\ \vec{k}_2 = k \vec{u}_x + \frac{n\pi}{a} \vec{u}_z \end{cases}$$

★ visualisation

◇ Ainsi \vec{E} est la superposition de deux OPPM

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

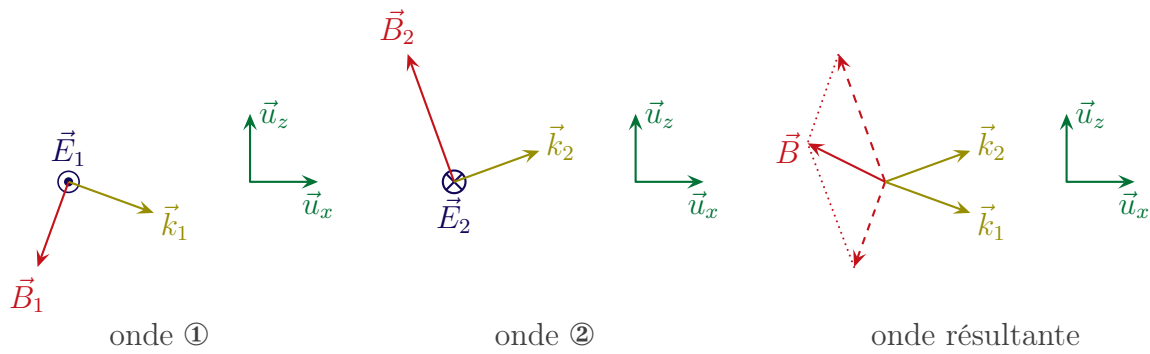
◇ Pour chaque OPPM, nous pouvons utiliser la relation de structure. Cela donne

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$$

◇ Et comme \vec{B} est, par linéarité, la superposition de ces deux OPPM, nous avons

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

◇ Schématiquement, nous comprenons alors pourquoi \vec{B} a une composante tangentielle.



- ◇ Sur les schémas précédents, nous avons fait attention à :
- mettre \vec{E}_1 et \vec{E}_2 en sens opposés (cf. expressions trouvées) ;
 - mettre \vec{B}_1 et \vec{B}_2 orthogonaux à \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ;
 - ne pas mettre exactement les mêmes normes à \vec{B}_1 et \vec{B}_2 à cause du déphasage introduit par la cote z .
- ◇ Enfin, comme \vec{E}_1 est une OPPM, nous pouvons utiliser la relation de dispersion

$$\ll k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \gg$$

- ◇ Sauf qu'il faut bien faire attention, ici, à prendre la *norme* au carré du vecteur d'onde.
- ◇ Et cela donne

$$k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- ◇ C'est bien la relation de dispersion que nous avons trouvée.

Onde électromagnétique

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1^{re} année :
 - III.D.1. Électrostatique (dipôles)
 - III.D.3. Magnétostatique (dipôles)
- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.C.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - équation de propagation, champ électromagnétique ;
 - onde plane / sphérique, onde transverse ;
 - structure d'une onde électromagnétique ;
 - polarisation d'une onde / d'une lumière, polarisation elliptique / circulaire / rectiligne, polarisation droite / gauche ;
 - moments dipôlares, polarisation ionique ;
 - onde évanescence ;
 - zone statique / de rayonnement ;
 - diffusion de RAYLEIGH ;
 - effet de peau.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - moment dipolaire (C.m).
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
 -
 - $\vec{p} = -e \vec{r}$, moment dipolaire ;
 - $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{n} \wedge E}{c}$.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - potentiel créé par un dipôle électrostatique ;
 - actions subies par un dipôle électrique / magnétique ;
 - savoir réécrire les équations de MAXWELL pour une OPPM ;
 - savoir caractériser les polarisations rectilignes, circulaires, elliptique en terme de déphasage.

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - connaître les différents domaines du spectre électromagnétique ;
 - savoir interpréter la décroissance en $\frac{1}{r}$ d'une onde sphérique ;

- connaître les raisons microscopiques de la description dipolaire de la matière ;
- savoir interpréter les actions subies par un dipôle ;
- connaître les échelles d'observations d'un dipôle rayonnant ;
- savoir interpréter l'expression du champ électromagnétique rayonné par un dipôle ;
- savoir décrire et expliquer le modèle de l'électron élastiquement lié ;
- savoir décrire et expliquer le modèle de DRÜDE pour la conduction électrique ;
- savoir interpréter l'expression de la conductivité complexe en HF et en BF.

Au niveau des savoir-faire

★ exercices classiques

◇ Savoir refaire / retrouver :

- la structure d'une onde plane ;
- le type de polarisation à partir de l'expression analytique et inversement ;
- l'interprétation de l'OPPM en terme énergétique ;
- l'expression du potentiel et du champ électrique créés par un dipôle électrostatique ;
- la puissance totale rayonnée par un dipôle à la distance r ;
- le moment dipolaire induit avec le modèle de l'électron élastiquement lié ;
- l'explication la couleur bleue du ciel ;
- l'expression de la conductivité complexe.

Électromagnétisme

Chapitre 4

Ondes dans un milieu diélectrique

Ondes dans un milieu diélectrique

Dans le chapitre précédent nous avons étudié comment les ondes électromagnétiques se propageaient et quelles étaient leurs structures. Toutefois nous nous sommes cantonné au cas où les ondes se propageaient soit dans le vide soit dans des milieux suffisamment peu denses pour pouvoir négliger la rétroaction.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au cas de la propagation dans les milieux diélectriques qui sont, en première approximation, des milieux isolants. Le chapitre sera naturellement divisé en deux : la première partie fera la part belle à la description et la modélisation de tels milieux tandis que dans la deuxième partie nous verrons comment les ondes s'y propagent et en particulier nous démontrerons les lois de SNELL – DESCARTES.

Table des matières

Biographies succinctes	5
I Milieux diélectriques	6
I-1 Présentation	6
I-1 <i>·i</i> kesako ?	6
I-1 <i>·ii</i> modélisation	6
I-2 Comportement du matériau : vecteur polarisation	7
I-2 <i>·i</i> définition microscopique	7
I-2 <i>·ii</i> courant de polarisation	7
expression	8
démonstration	8
I-2 <i>·iii</i> charges de polarisation	9
expression, interprétation	9
démonstration	9
I-2 <i>·iv</i> petit résumé	10
I-3 Susceptibilité	10
I-3 <i>·i</i> conditions d'étude	10
I-3 <i>·ii</i> susceptibilité complexe	11
définition	11
expression	11
I-3 <i>·iii</i> représentation de la susceptibilité	12
parties réelle et imaginaire	12
graphiques	12
trois domaines	12
I-3 <i>·iv</i> généralisation	13
expression	13
cas de l'eau	13
I-3 <i>·v</i> milieu LHI	14
Linéaire	15
Homogène	15
Isotrope	15
II Ondes électromagnétiques	16
II-1 Au milieu d'un milieu	16
II-1 <i>·i</i> équations de MAXWELL dans un milieu polarisable	16
II-1 <i>·ii</i> structure d'une OPPM dans un milieu DLHI	16
et encore une coïncidence !	16
champs transverse	16
permittivité relative	17
II-1 <i>·iii</i> équation de propagation	17
équation d'onde	17
célérité	18
relation de dispersion	18
II-1 <i>·iv</i> champ électromagnétique	19
champ \vec{E}	19
champ \vec{B}	19
vecteur de POYNTING	19
II-1 <i>·v</i> indice complexe	20

	apparition	20
	mais... c'est une loi connue!	20
II.2	Passage d'un milieu à l'autre	22
II.2.i	situation envisagée	22
II.2.ii	lois physiques	22
	préliminaire	22
	relations de passage	23
II.2.iii	lois de SNELL – DESCARTES	23
	préliminaire	23
	lois de la réflexion	24
	lois de la réfraction	25
	morale	26
II.2.iv	coefficient de réflexion et transmission d'amplitude	26
	situation, solution <i>a priori</i>	26
	traduction des conditions aux limites	27
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{E}	27
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{B}	27
	interprétation	28
	remarque	28
II.2.v	coefficients de réflexion et transmission en puissance	29
	expression du vecteur de POYNTING	29
	les coefficients	29
	conservation de l'énergie	30
	exemple numérique	30
	Fiche de révision	31

Biographies succinctes

Willebrord SNELL

(1580 Leyde – 1626 Leyde)



Le père de Willebrord est professeur de mathématiques à l'université de Leyde et bien que ce dernier l'incite à suivre des études de droit, il préfère les mathématiques. À 20 ans il quitte les Pays-Bas pour faire un petit tour d'Europe (durant lequel il rencontrera Tycho BRAHÉ et KÉPLER) avant de revenir en 1608 et de devenir professeur à l'université de Leyde. Ce n'est qu'en marge de ses travaux mathématiques qu'il découvre la loi de la réfraction en 1621 mais ne la publie pas. Il meurt à 46 ans alors qu'il allait être nommé recteur.

René DESCARTES

(1596 La Haye, Touraine – 1650 Stockholm)



De père conseiller au parlement et de mère issue de la noblesse, René n'aura guère de soucis financier dans sa vie. Il fait ses études au lycée de La Flèche et reçoit une solide formation en mathématique, physique et philosophie. Après les rencontres avec BEEKMAN et le père MERSENNE il écrit *Le discours de la méthode* en 1637, ouvrage dans lequel il expose sa méthode qui lui permettra d'écrire LA DIOPTRIQUE et *La géométrie*. Il publie la loi de la réfraction que SNELL avait découverte sans la publier mais il existe un doute sur le fait que DESCARTES avait connaissance de ces travaux, doutes émis par HUYGENS en particulier.

Augustin CAUCHY

(1789 Paris – 1857 Sceaux, Hauts-de-Seine)



Arrivé deuxième au concours d'entrée à l'école Polytechnique, Augustin fut au cœur des bouleversements politiques de l'époque. Il reste malgré tout l'un des plus grands mathématiciens français avec plus de 800 publications et 7 ouvrages. La loi de CAUCHY connue en optique n'est qu'un tout petit résultat face à ce qu'il a fait en probabilité, géométrie, algèbre, analyse et analyse complexe.

I – Milieux diélectriques

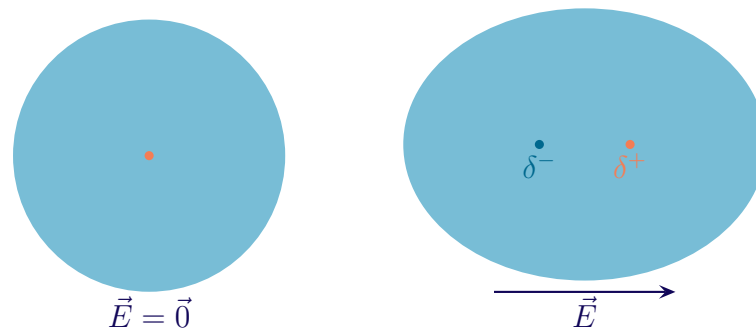
I.1 – Présentation

I.1.i – kesako ?

- ✧ Même si nous préciserons plus loin ce qu'est un diélectrique, pour l'instant nous pouvons considérer qu'un diélectrique est un *isolant* électrique.
- ✧ Les deux archétypes d'isolants sont l'air et le verre, mais il y a aussi tous les matériaux plastiques, les minéraux. . .
- ✧ L'eau est un cas particulier¹ mais, en ce qui concerne les ondes lumineuses, nous pouvons la considérer comme diélectrique.
- ✧ L'expérience montre que lorsqu'une onde arrive sur un matériau diélectrique, pourvu qu'il soit transparent, nous observons des phénomènes particuliers comme la réfraction ou la dispersion (effet prisme).

I.1.ii – modélisation

- ✧ Pour expliquer de tels phénomènes, nous allons modéliser la matière à l'échelle microscopique *mais* nous l'étudierons à l'échelle mésoscopique, de manière à pouvoir considérer simultanément de (très) grandes quantités de molécules et pouvoir faire des moyennes statistiques.
- ✧ Ce type d'approche a déjà été utilisée lors de la théorie cinétique des gaz parfait (cf. cours de première année).
- ✧ C'est ainsi que, dans la suite – sauf précision contraire –, lorsque nous parlerons d'un milieu diélectrique, nous ferons l'hypothèse qu'il est *parfaitement* isolant.
- ✧ Dans ces conditions, pour un milieu diélectrique, il n'y aura pas d'électrons libres, mais uniquement des électrons de cœur et de valence.
- ✧ Ces derniers, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, sont associés à des « nuages » qui vont légèrement se déformer en présence d'un champ.



- ✧ Ces déformations, nous le savons, vont correspondre à des mouvements de charges, donc à des courants électriques.
- ✧ Ce courant électrique est différent du courant électrique usuel car il est dû à des électrons qui, globalement, restent « attachés » à leurs noyaux. Dès lors, le courant associé aurait pu s'appeler « courant attaché », mais l'usage l'appelle *courant lié*.
- ✧ Remarquons que, comme les électrons responsables du courant ne peuvent pas s'éloigner de trop de leur point de départ, nous pouvons d'ores et déjà dire que le courant lié ne peut pas être continu. Il sera obligatoirement alternatif.

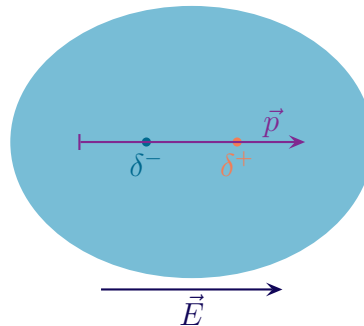
1. Nous apprenons tous, très tôt, que l'eau conduit l'électricité et que c'est la raison pour laquelle il faut faire très attention dans une salle de bain.

- ✧ Insistons. Le courant lié est un *vrai* courant électrique car il correspond vraiment à des charges en mouvement. Seul le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ n'est pas vraiment un courant électrique puisqu'il existe même dans le vide.

I.2 – Comportement du matériau : vecteur polarisation

I.2.i – définition microscopique

- ✧ Considérons un matériau ne comportant pas d'électron libre.
 ✧ Les nuages électroniques peuvent se déformer, en particulier sous l'influence d'un champ électrique extérieur.



Un matériau est dit *diélectrique* lorsque ses constituants microscopiques acquièrent un moment dipolaire en présence d'un champ électrique.

- ✧ En fait tous les matériaux sont diélectriques, même les métaux, mais seuls ceux qui ne sont *que* diélectriques présentent des phénomènes qui leur sont propres.
 ✧ Rappelons que, pour nous, diélectrique implique « non conducteur ».
 ☕ *Remarque.* Il est possible de définir, de même, des matériaux *diamagnétiques*.

Le *vecteur polarisation* \vec{P} est défini par

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P} d\tau \quad \text{où :}$$

- $d\tau$ est un volume élémentaire quelconque ;
 → \vec{p}_i est le moment dipolaire de chaque molécule.

Le vecteur polarisation est la densité volumique de moment dipolaire.

Le vecteur polarisation est une grandeur intensive et, en terme d'unité

$$[\vec{P}] = \text{C.m}^{-2}$$

- ✧ Sachant qu'un moment dipolaire \vec{p} est en C.m, le résultat tombe immédiatement.

I.2.ii – courant de polarisation

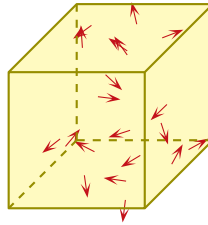
★ **expression**

Des courants électriques dus à la modification de la polarisation d'un milieu sont appelés *courants de polarisation*.

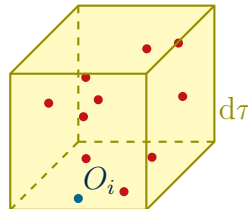
Le courant de polarisation \vec{j}_p d'un milieu est relié à son vecteur polarisation \vec{P} par

$$\vec{j}_p(M,t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(M,t)$$

- ◇ À ce niveau, peu importe l'origine de la polarisation du milieu.
- ◇ Dans le cas particulier où la polarisation associée à un courant de polarisation est due à la polarisation d'un milieu diélectrique, le courant de polarisation obtenu est le *courant lié*.

★ **démonstration**

- ◇ Considérons un volume élémentaire $d\tau$ et cherchons la densité de courant électrique en volume \vec{j} .



- ◇ Nous savons que la densité de courant électrique s'écrit

$$\vec{j} = n q \vec{v}_{\text{moy}}$$

- ◇ Ici n est la densité particulière de charges, q la charge d'une particule en mouvement et \vec{v}_{moy} leur vitesse moyenne.
- ◇ Par définition de la densité particulière puis de la vitesse moyenne, nous avons

$$n = \frac{dN}{d\tau} \rightsquigarrow \vec{j} = \frac{dN}{d\tau} q \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{q}{d\tau} \times (dN \vec{v}_{\text{moy}}) \rightsquigarrow \vec{j} = \frac{q}{d\tau} \times \sum \vec{v}_i$$

- ◇ Considérons un matériau diélectrique pour lesquelles, les seules charges qui bougent sont des électrons autour de leurs noyaux.
- ◇ Notons M_i la position d'un électron et O_i la position de son noyau. Nous avons alors, comme le noyau est immobile

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_i}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_iM_i}}{dt} \rightsquigarrow \vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{O_iM_i}}{dt}$$

- ◇ En reprenant l'expression de \vec{j} , cela donne

$$\vec{j} = \frac{q}{d\tau} \times \sum \frac{d\overrightarrow{O_i M_i}}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \sum \frac{d}{dt} \left(q \overrightarrow{O_i M_i} \right)$$

◇ Nous reconnaissons la définition du moment dipolaire engendré par l'électron i , ce qui conduit, par linéarité de la dérivée, à

$$\vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{p}_i \right)$$

◇ Et avec la définition du vecteur polarisation, nous arrivons à

$$\vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \frac{d\vec{P} d\tau}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

◇ Et comme \vec{P} dépend de l'espace et du temps, et que nous avons raisonné à lieu fixé, nous avons bien

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

I.2.iii – charges de polarisation

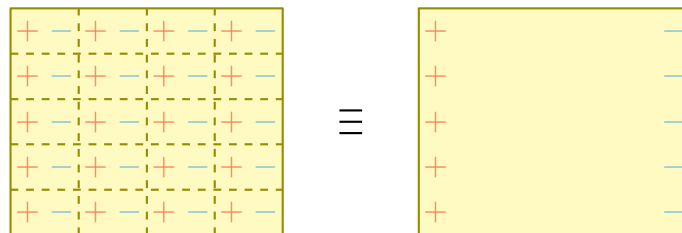
★ expression, interprétation

Les *charges de polarisation* sont les charges qui apparaissent lors de la polarisation d'un milieu.

La densité volumique des charges de polarisation s'écrit

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

◇ Qualitativement, lorsqu'un milieu se polarise, chaque petite zone « sépare » une charge positive et une charge négative qui se voit alors compensée par la voisine.



★ démonstration

◇ Écrivons l'équation de conservation de la charge pour les charges associées à la polarisation

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_p = 0$$

◇ Avec l'expression du courant de polarisation, cela donne

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\text{div} \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right)$$

✧ Nous pouvons intervertir les dérivées spatiales et temporelles, ce qui conduit à

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{P})$$

✧ Et en primitivant par rapport au temps

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P} + \rho_{p0}(\vec{r})$$

✧ Le terme supplémentaire est forcément nul puisque nous avons un milieu neutre lorsqu'il n'y a pas de polarisation.

I.2.iv – petit résumé

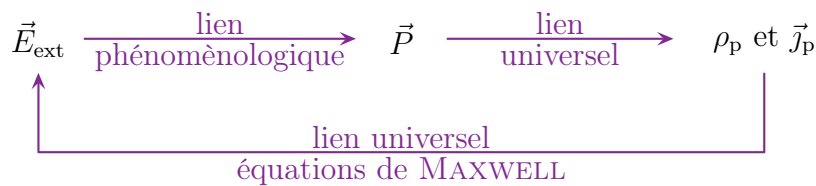
✧ Les matériaux diélectriques sont tels que :

- lorsque $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$, la matière est globalement neutre ;
- lorsque $\vec{E}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de courant électrique car il s'agit d'un isolant *mais* il y a création :
 - d'un moment dipolaire \vec{p} pour chaque atome, molécule... (vision microscopique) ;
 - d'un vecteur polarisation \vec{P} dans un volume $d\tau$ (vision mésoscopique).

✧ Le vecteur polarisation \vec{P} décrit la « réaction » du milieu face à \vec{E}_{ext} et engendre :

- un courant de polarisation $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$;
- des charges de polarisation $\vec{j}_p = -\text{div } \vec{P}$.

✧ L'ensemble peut se résumer ainsi



I.3 – Susceptibilité

I.3.i – conditions d'étude

✧ Nous allons chercher à généraliser à l'échelle mésoscopique ce que nous avons trouvé à l'échelle microscopique.

- Nous voulons pouvoir négliger le champ créé par un dipôle sur ses proches voisins. Pour ce faire, il *faut* que le matériau ne soit pas trop dense.
- Le moment dipolaire \vec{p} créé ne l'est que par l'action du champ \vec{E}_{ext} . Dans le cas de moment dipolaires intrinsèques (comme pour la molécule d'eau), nous utiliserons le principe de superposition.

✧ Nous allons donc regarder le comportement d'un atome plongé dans le champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

✧ Reprenons le modèle de l'électron élastiquement lié :

- il y a une force de rappel du type « élastique » pour modéliser l'action du noyau

$$\vec{f} = -m \omega_0^2 \vec{r}$$

→ il y a une force de frottement pour modéliser la perte énergétique due au rayonnement

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

→ l'électron est non-relativiste, ce qui implique que :

→ l'action de \vec{B} est négligeable devant l'action de \vec{E} ;

→ \vec{E} est uniforme à l'échelle de l'atome, ce qui nous permet d'écrire

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

I.3.ii – susceptibilité complexe

★ définition

La *susceptibilité complexe* $\underline{\chi}(\omega)$ d'un milieu est définie par

$$\underline{\vec{P}} \triangleq \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \underline{\vec{E}}$$

★ expression

◇ Posons le PFD sur un électron (en négligeant, bien évidemment, le poids)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E} + \vec{0}$$

◇ En notation complexe, cela donne

$$j\omega m \underline{\vec{V}} = -m\omega_0^2 \underline{\vec{r}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{V}} - e \underline{\vec{E}}$$

◇ Or $\underline{\vec{P}}$ s'écrit, avec n la densité particulaire,

$$\underline{\vec{P}} = n \times \underline{\vec{p}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{P}} = -n e \underline{\vec{r}}$$

◇ Nous pouvons isoler $\underline{\vec{r}}$

$$\underline{\vec{V}} = j\omega \underline{\vec{r}} \quad \rightsquigarrow \quad \left(-m\omega^2 + m\omega_0^2 + j\omega \frac{m}{\tau} \right) \underline{\vec{r}} = -e \underline{\vec{E}}$$

◇ Et ainsi

$$\underline{\vec{P}} = -n e \times \frac{-e \underline{\vec{E}}}{-m\omega^2 + m\omega_0^2 + j\omega \frac{m}{\tau}}$$

◇ Ce que nous pouvons réécrire

$$\underline{\vec{P}} = \frac{\frac{n e^2}{m \varepsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \times \varepsilon_0 \times \underline{\vec{E}}$$

◇ Par identification, nous obtenons

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}$$

◇ ω_p est appelée la pulsation plasma.

I.3.iii – représentation de la susceptibilité

★ parties réelle et imaginaire

◇ Séparons les parties imaginaires et réelles de la susceptibilité

$$\underline{\chi}(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \chi'(\omega) + j \chi''(\omega)$$

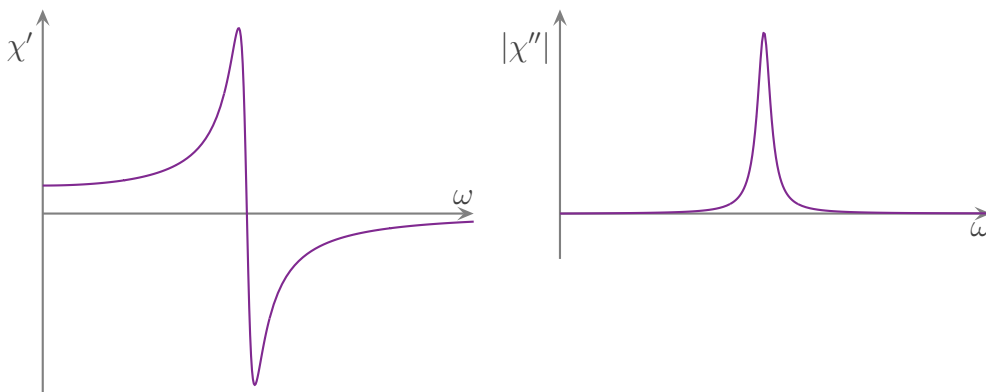
◇ Nous avons, en multipliant par la quantité conjuguée

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2 \times \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{j\omega}{\tau} \right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

◇ Et ainsi

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_p^2 \times (\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = - \frac{\omega_p^2 \times \frac{\omega}{\tau}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

★ graphiques



◇ Les dessins ci-dessus ne sont pas à l'échelle car, numériquement, nous avons

$$\omega_0 \tau \sim 10^{-3}$$

◇ Cela correspond à des facteurs de qualité (*i.e.* à des finesse de pic) de l'ordre de 10^3 .

★ trois domaines

🕒 basses fréquences

◇ Pour $\omega \ll \omega_0$, la susceptibilité tend vers

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$$

- ✧ Nous pouvons constater, alors, que la susceptibilité est réelle, ce qui signifie que \vec{P} et \vec{E} sont des vecteurs colinéaires et dans le même sens.

$$\vec{P} = \chi(\omega) \times \varepsilon_0 \times \vec{E}$$

- ✧ C'est tout à fait normal : en basses fréquences, les atomes ont « le temps » de réagir et, donc, de s'aligner sur le champ \vec{E} .

🕒 à la pulsation propre

- ✧ Pour $\omega = \omega_0$, la susceptibilité vaut

$$\underline{\chi}(\omega_0) = -j \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \tau}$$

- ✧ \vec{P} et \vec{E} sont en quadrature.
 ✧ C'est à cette pulsation que les effets dissipatifs se font le plus sentir comme le montre la présence de τ dans l'expression de la susceptibilité.

🕒 hautes fréquences

- ✧ Pour $\omega \gg \omega_0$, la susceptibilité tend vers

$$\underline{\chi}(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- ✧ Plus la pulsation est grande, plus la susceptibilité est faible, *i.e.* plus la polarisation engendrée par le champ diminue.
 ✧ À la limite, le vecteur polarisation est nulle, tout se passe comme si l'onde « voyait » du vide, le milieu est *transparent*.

- 👉 *Remarque.* Bien sûr, il faut des hautes fréquences, mais pas trop pour ne pas entrer en contradictions avec les hypothèses de départ.

I.3.iv – généralisation

★ expression

- ✧ Pour chaque type d'électron dans un molécule constituant un matériau, nous pouvons associer une susceptibilité complexe $\underline{\chi}_i(\omega)$ et ainsi, la susceptibilité totale s'écrit, par superposition

$$\underline{\chi}(\omega) = \sum \underline{\chi}_i(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\chi}(\omega) = \sum \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_i}}$$

★ cas de l'eau

- ✧ L'eau est un cas particulier de par la nature même de sa molécule déjà polaire.
 ✧ Schématiquement, les parties réelles et imaginaires de sa susceptibilités peuvent se représenter par les graphiques ci-dessous²

2. Source : Cours de physique, *Électromagnétisme 4, milieux diélectriques et milieux aimantés*, M. BERTIN, J.-P. FAROUX, J. RENAULT, éd. Dunod.

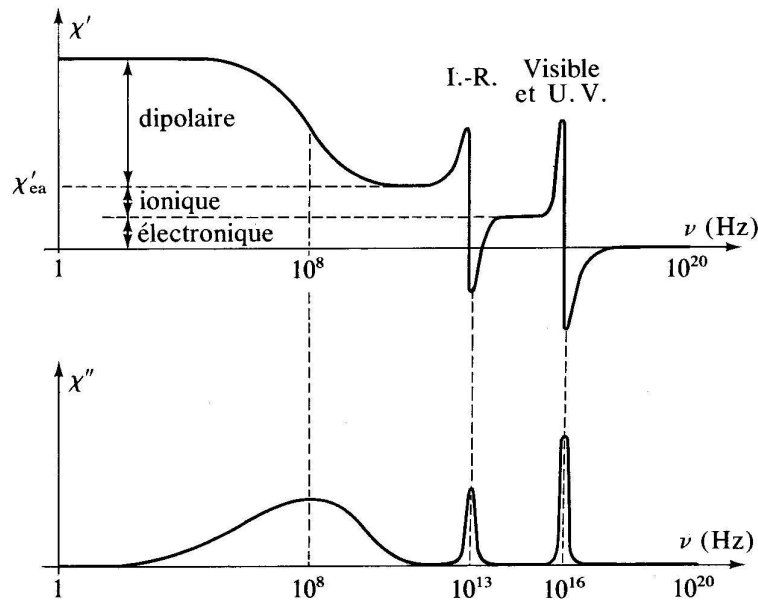


Fig. 7. L'étude de χ' et χ'' en fonction de la fréquence permet de préciser le rôle des divers types de polarisation.

- ◇ Les trois domaines sont liés à des variations de la polarisation de la molécule suivant trois procédés différents :
 - la polarisation dipolaire est associée à la rotation de la molécule d'eau sur elle-même ;
 - la polarisation ionique est associée à la déformation de la molécule d'eau ;
 - la polarisation électronique est associée à la déformation des nuages électroniques plongés dans un champ (c'est ce que nous venons de faire).
- ◇ L'absorption (caractérisée par χ'') autour de 10^8 Hz constitue le principe de base d'un four à micro-ondes. Un tel four ne chauffe « que » les molécules d'eau et comme la majorité des aliments en sont constitués...
- ◇ L'absorption dans l'infra-rouge est très pratique lors de la dégustation d'une raclette. En effet, pour éviter que son verre de vin³ ne chauffe, il est très facile d'interposer entre celui-ci et l'appareil, un verre d'eau. Transparent au spectre visible, il est très absorbant dans l'infra-rouge et limitera l'échauffement du vin⁴.

I.3.v – milieu DLHI

Un milieu *DLHI* est un milieu Diélectrique, Linéaire, Homogène, Isotrope.

Quand un milieu est un DLHI, nous pouvons écrire

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \underline{\vec{E}}$$

3. À consommer avec modération.

4. Pour préserver un verre du chauffage créé par l'appareil, il est aussi possible de l'entourer de papier aluminium. L'auteur se dégage de toute responsabilité quant aux réactions des autres convives face à quelqu'un qui emballerait son verre ainsi.

★ Linéaire

- ◇ « Linéaire » signifie que le vecteur polarisation et le champ électrique sont proportionnels.
- ◇ Si tel n'était pas le cas, il faudrait ajouter une composante du type

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}^{(\omega)} \times \vec{E} + \underline{\alpha}^{(\omega)} \times \|\vec{E}\| \times \vec{E}$$

★ Homogène

- ◇ La susceptibilité ne dépend pas du point considéré.
- ◇ Techniquement parlant, cela signifie que nous pouvons « sortir » $\underline{\chi}^{(\omega)}$ des opérateurs de dérivation spatiale

$$\operatorname{div} \left(\vec{P} \right) = \operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \times \underline{\chi}^{(\omega)} \times \vec{E} \right) = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}^{(\omega)} \times \operatorname{div} \left(\vec{E} \right)$$

★ Isotrope

- ◇ Avec un matériaux non isotrope, la composante sur \vec{u}_x de la polarisation pourrait dépendre de la composante sur \vec{u}_y du champ.
- ◇ Cela donnerait une relation du type

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \times \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

II – Ondes électromagnétiques

II.1 – Au milieu d'un milieu

II.1.i – équations de MAXWELL dans un milieu polarisable

◇ Réécrivons les deux lois de MAXWELL contenant des termes de source.

◇ L'équation de MAXWELL – GAUSS s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \times \operatorname{div} \vec{P}$$

◇ Pour trouver ce résultat, nous avons supposé que les seules charges dans le matériau étaient dues à la polarisation de celui-ci.

◇ Nous allons faire de même en ce qui concerne le courant et supposer que le seul qui existe soit dû à la polarisation. Dans ces conditions, l'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

II.1.ii – structure d'une OPPM dans un milieu DLHI

◇ Nous allons rechercher une onde sous la forme d'une OPPM (pourquoi pas complexe), soit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \vec{k} = k' + j k''$$

◇ De plus, comme le milieu est supposé DLHI, cela implique

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E}$$

★ et encore une coïncidence !

Une onde électromagnétique dans un DLHI est une onde transverse pour les deux champs électrique et magnétique. De plus le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

★ champs transverse

◇ Avec la loi des DLHI, l'équation de MAXWELL – GAUSS donne

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \times \operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E} \right) = -\operatorname{div} \left(\underline{\chi}(\omega) \times \vec{E} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \left((1 + \underline{\chi}(\omega)) \vec{E} \right) = 0$$

◇ Et comme, pour une OPPM, nous avons $\vec{\nabla} = -j \vec{k}$, nous trouvons

$$-j(1 + \underline{\chi}(\omega)) \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

◇ Ce qui prouve le caractère transverse du champ électrique.

◇ Le caractère transverse du champ magnétique se prouve à l'aide de l'équation de MAXWELL – THOMSON.

◇ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne, quant à elle,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

◇ Et avec l'écriture équivalent de nabla

$$-\text{j} \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \text{j} \omega \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \omega}$$

★ permittivité relative

La *permittivité relative* $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ est définie par

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega)$$

◇ C'est une définition qui n'a l'air de rien mais qui, en fait, est très pratique car, comme nous avons pu le voir au-dessus, au sein de la matière, c'est davantage la grandeur $1 + \chi$ qui va être intéressante, bien plus que χ tout seul.

II.1.iii – équation de propagation

★ équation d'onde

◇ Avant de commencer, simplifions les équations de MAXWELL et commençons par MAXWELL – GAUSS

$$\text{div} \left((1 + \chi) \vec{E} \right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_r \text{div} \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{div} \vec{E} = 0$$

◇ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne, quant à elle,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

◇ Nous pouvons alors faire la méthode usuelle.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \vec{\Delta} \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

◇ De plus

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

◇ Ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

◇ Et, finalement

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

◇ En fait, dans ce qui précède, si nous supposons que la susceptibilité dépend de ω , c'est comme si nous nous restreignons, déjà, à une OPPM.

- ✧ Toutefois, nous pouvons remarquer que nous n'avons pas *précisément* besoin de savoir de quelle grandeur est fonction χ . Après tout, nous pourrions très bien essayer de le déterminer pour autre chose qu'une OPPM. Mais les calculs seraient, pour le coup, bien plus compliqués. Et cela ne nous empêcherait pas de le considérer comme une constante par rapport au temps.

★ célérité

- ✧ Nous pouvons remarquer tout de suite que, la plupart du temps⁵

$$|\varepsilon_r| > 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c^2} > \mu_0 \varepsilon_0$$

- ✧ En d'autres termes

$$c_{\text{milieu DLHI}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c_{\text{vide}}$$

- ✧ Nous venons de prouver que les ondes ont une célérité plus faible dans la matière que dans le vide. Ce que nous savions déjà⁶.
- ✧ De plus, la célérité dans les milieux dépend de ε_r , lui-même associé à χ qui est une fonction de ω . Nous voyons poindre là le phénomène de dispersion.

★ relation de dispersion

- ✧ Recherchons directement la relation de dispersion pour une OPPM complexe.

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \times \vec{k} - \vec{k}^2 \times \vec{E}$$

- ✧ Le premier terme est nul (cf. MAXWELL – GAUSS) donc il reste

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\vec{k}^2 \times \vec{E}$$

- ✧ De plus, l'équation de MAXWELL – FARADAY implique

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k} \wedge (\omega \vec{B}) = \omega \times \vec{k} \wedge \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

- ✧ En rapprochant les deux résultats et sachant qu'il est vrai quel que soit \vec{E}

$$\vec{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

- ✧ Ce que nous noterons, avec c la célérité dans le vide

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \times \varepsilon_r$$

5. Pour cela, il suffit d'avoir $\text{Re}(\chi') > 0$, ce qui est vrai la plupart du temps, du moins pour le visible avec des milieux usuels. Le cas où $-2 < \text{Re}(\chi') < 0$ et qui implique $v_\varphi > c$ demande une étude particulière.

6. Ceci étant, nous avons déjà rencontré des ondes dont la vitesse de phase est plus grande que c . Mais nous avons aussi montré que ce n'était pas grave et que ce qui comptait, c'était la vitesse de déplacement de l'information, *i.e.* de l'énergie.

II.1.iv – champ électromagnétique

◇ Comme $\underline{\chi}(\omega)$ comporte une partie imaginaire, il en sera de même pour $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ et, donc, pour \underline{k} , que nous allons noter

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + j k''(\omega)$$

◇ Nous savons déjà que k'' caractérise l'atténuation, c'est donc bien que χ'' aussi.

★ champ \vec{E}

◇ Considérons une onde polarisée rectilignement sur \vec{u}_y et se propageant suivant \vec{u}_x .

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y$$

◇ En développant \underline{k} cela donne

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - k'x)} e^{+k''x} \vec{u}_y$$

◇ Puis en notation réelle

$$\vec{E} = E_0 e^{+k''x} \cos(\omega t - k'x) \vec{u}_y$$

◇ Avec $k' > 0$ (propagation suivant $+\vec{u}_x$), nous voyons qu'il faut $k'' < 0$ dans le cas d'un milieu passif infini pour éviter une divergence du champ électrique et, donc, de l'énergie.

★ champ \vec{B}

◇ La relation de structure (provenant de l'équation de MAXWELL – FARADAY) s'écrit

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\underline{k} E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_z$$

◇ En développant

$$\underline{\vec{B}} = \frac{(k' + j k'') E_0}{\omega} e^{j(\omega t - k'x)} e^{+k''x} \vec{u}_z$$

◇ Puis en notation réelle

$$\vec{B} = \frac{k_0 E_0}{\omega} e^{+k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad \underline{k} \stackrel{\text{not}}{=} k_0 e^{j\varphi}$$

◇ Il est important de remarquer que la partie imaginaire non nulle de \underline{k} engendre un déphasage entre les champs magnétique et électrique. Autrement dit, à un endroit et à un instant donné, l'un des deux champs peut être nul sans que l'autre ne le soit.

★ vecteur de POYNTING

◇ Nous avons, comme d'habitude

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

◇ En remplaçant, nous obtenons

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{E_0^2 e^{2k''x}}{\omega \mu_0} \times (k' - j k'') \vec{u}_x \right)$$

◇ Ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 \times k'}{2 \omega \mu_0} \times e^{2k''x} \vec{u}_x$$

◇ Là aussi nous retrouvons le fait que si l'énergie va suivant $+\vec{u}_x$, ce qui correspond, ici, à $k' > 0$, alors la passivité du milieu implique que $k'' < 0$ pour éviter la divergence de l'énergie.

II.1.v – indice complexe

★ apparition

L'indice complexe \underline{n} d'un milieu est défini pour une OPPM par

$$\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

◇ Comme toute grandeur complexe, nous pouvons écrire

$$\underline{n} = n' + j n''$$

◇ De plus le vecteur d'onde s'écrit

$$\underline{k} = k' + j k'' \quad \text{avec}$$

→ k' qui caractérise la propagation ;

→ k'' qui caractérise l'atténuation.

◇ Nous pouvons donc en conclure

$n'(\omega)$ caractérise la propagation et $n''(\omega)$ caractérise l'atténuation.

◇ Dans ces conditions, nous avons

La vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$$

★ mais... c'est une loi connue !

◇ Rappelons l'expression de la susceptibilité complexe

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$$

◇ Cherchons l'expression de \underline{n} suivant les étapes suivantes

$$\underline{\chi} \xrightarrow{\text{déf}} \underline{\varepsilon}_r \xrightarrow{\text{déf}} \underline{n} \xrightarrow{\text{approximation}} n$$

◇ Nous avons tout d'abord

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$$

◇ La relation de dispersion conduit à

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \underline{k}^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$$

◇ Considérons le cas particulier où l'absorption est négligeable.

◇ Dans ces conditions, il faut négliger le terme en $j \frac{\omega}{\tau}$ car

→ le terme en $j \frac{\omega}{\tau}$ caractérise les pertes énergétiques ;

→ techniquement c'est ce terme qui apporte une partie imaginaire.

◇ Et maintenant, simplifions n^2

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \\ &= \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \times \left(1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \times \left(1 + \alpha \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

◇ En prenant la racine, cela nous conduit à

$$n \stackrel{\text{DL}}{=} \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \left(1 + \frac{\alpha}{2} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

◇ Et avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ cela nous donne

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \times \frac{1}{\lambda_0^2}$$

◇ Ce qui peut s'écrire

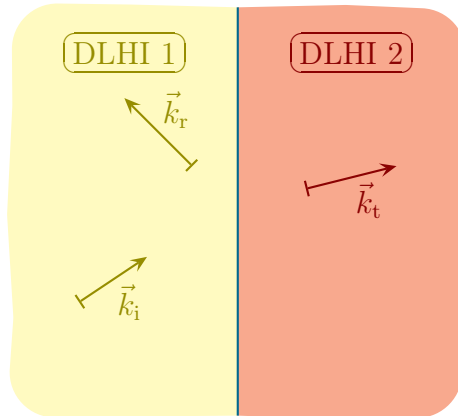
$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

◇ Il s'agit ni plus ni moins que la loi de CAUCHY !

II.2 – Passage d'un milieu à l'autre

II.2.i – situation envisagée

◇ Considérons une OPPM arrivant sur un dioptré plan.



◇ L'OPPM étant *quelconque*, nous pouvons écrire le champ électrique associé sous la forme ⁷

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

- ◇ Qualitativement, les particules présentes dans le milieu ② vont être excitées par l'onde incidente (qui pénètre dans le milieu ② puisqu'aucune loi physique ne l'interdit).
- ◇ Ces molécules vont, dès lors, rayonner, *i.e.* vont engendrer une nouvelle onde qui va se superposer à l'onde incidente dans le milieu ② pour « fabriquer » l'onde transmise.
- ◇ Ceci étant, l'onde rayonnée peut aussi ressortir. Cela donne ni plus ni moins que l'onde réfléchie.
- ◇ Comme tous les phénomènes qui ont lieu sont *linéaires*, nous pouvons d'ores et déjà dire que les pulsations de toutes ces ondes (incidente, transmise et réfléchie) sont identiques.

II.2.ii – lois physiques

★ préliminaire

◇ Commençons par traduire le fait que les ondes sont des ondes planes.

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

◇ Comme nous l'avons vu précédemment, le vecteur d'onde d'une onde plane se propageant au sein d'un milieu matériel s'écrit

$$\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i = n_1 k_0 \vec{u}_i ; \quad \vec{k}_t = k_t \vec{u}_t = n_2 k_0 \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = k_r \vec{u}_r = n_1 k_0 \vec{u}_r$$

7. Rappelons que dans le cas d'une polarisation rectiligne, nous aurions écrit

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

★ relations de passage

- ◇ Cherchons, à l'aide du moyen mnémotechnique rencontré dans le chapitre 1 d'électromagnétisme, les relations de passage (Rel. Pa.).
- ◇ Pour MAXWELL – THOMSON cela donne

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

- ◇ Pour MAXWELL – FARADAY

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{DLHI}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

- ◇ MAXWELL – AMPÈRE

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \xrightarrow{\text{DLHI}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{0}$$

- ◇ Et, la dernière, MAXWELL – GAUSS

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{n}_{12} \cdot \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\varepsilon_0} \right)$$

- ◇ Nous allons donc retenir les lois suivantes.

Le champ magnétique \vec{B} est continu à l'interface entre deux milieux DLHI.

La composante tangentielle du champ électrique est continu à l'interface entre deux milieux DLHI.

- ◇ Nous n'utiliserons pas la *discontinuité* du champ électrique à l'interface entre deux milieux DLHI.

II.2.iii – lois de SNELL – DESCARTES

★ préliminaire

- ◇ Reprenons donc la situation et traduisons la continuité de la composante normale du champ magnétique, composante notée « sur \vec{u}_z ».
- ◇ Dans le milieu ①, le champ magnétique est la superposition du champ magnétique de l'onde incidente et du champ magnétique de l'onde réfléchi.

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$$

- ◇ Dans le milieu ②, le champ magnétique se réduit au champ magnétique de l'onde transmise.

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_t$$

- ◇ La continuité de la composante sur \vec{u}_z du champ magnétique se traduit donc par

$$\underline{B_{1z}}(\text{surface}, t) = \underline{B_{2z}}(\text{surface}, t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B_{i,z}}(\text{surface}, t) + \underline{B_{r,z}}(\text{surface}, t) = \underline{B_{t,z}}(\text{surface}, t)$$

◇ Nous avons donc

$$\underline{B_{i0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} + \underline{B_{r0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} = \underline{B_{t0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM})}$$

◇ En simplifiant par $e^{j\omega t}$ nous obtenons

$$\underline{B_{i0,z}} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}} + \underline{B_{r0,z}} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}} = \underline{B_{t0,z}} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{OM}}$$

◇ Comme ceci est vrai **pour tout point** M de la surface, nous pouvons en déduire que les trois arguments dans les exponentielles sont les mêmes. Cela donne, pour tout point M de la surface

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = \vec{k}_r \cdot \vec{OM} \quad \text{et} \quad \vec{k}_i \cdot \vec{OM} = \vec{k}_t \cdot \vec{OM}$$

◇ En considérant un autre point N de la surface, nous avons

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OM} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{ON} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{MN} = 0$$

◇ De même

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OM} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{ON} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{MN} = 0$$

★ lois de la réflexion

◇ Reprenons l'expression précédente vraie pour tous points M et N de l'interface

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{MN} = 0$$

◇ Cette relation traduit le fait $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ est orthogonal à tout vecteur tangent à l'interface.

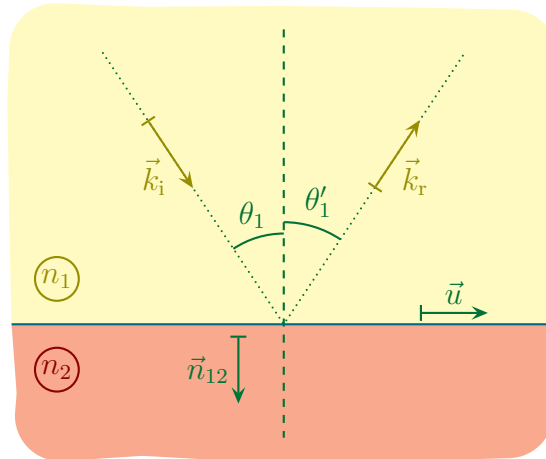
◇ Dans ces conditions $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ ne peut être que normal à l'interface, ce qui peut s'écrire

$$\vec{k}_i - \vec{k}_r = \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_r = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12}$$

◇ Nous voyons que \vec{k}_r est combinaison linéaire de \vec{k}_i et \vec{n}_{12} , *i.e.* le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est dans le plan constitué par le vecteur d'onde incident et par le vecteur normal à l'interface.

Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

◇ Faisons le schéma dans le plan d'incidence et notons \vec{u} le vecteur unitaire de ce plan tangent à l'interface.



◇ Nous avons ainsi

$$\vec{k}_r = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_r \cdot \vec{u} = \vec{k}_i \cdot \vec{u} + 0$$

◇ Ce qui nous donne

$$k_r \sin \theta'_1 = k_i \sin \theta_1 \quad \text{et} \quad k_r = k_i = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \theta'_1 = \sin \theta_1$$

Dans le cas de la réflexion, les angles d'incidence et de réflexion sont identiques.

★ lois de la réfraction

◇ Pour la réfraction, c'est le même raisonnement.

◇ Tout d'abord

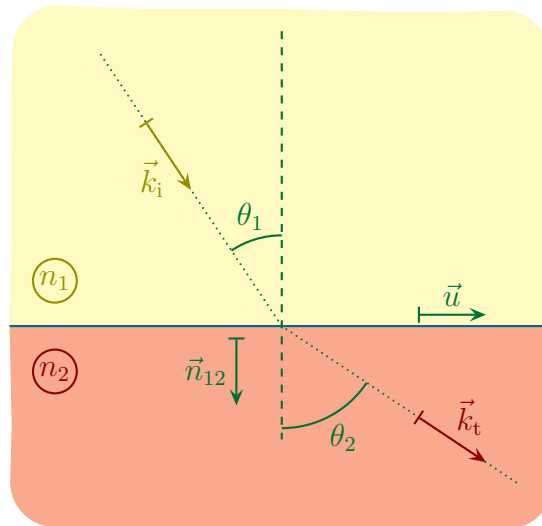
$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

◇ Ainsi $\vec{k}_i - \vec{k}_t$ ne peut être que normal à l'interface, ce qui peut s'écrire

$$\vec{k}_i - \vec{k}_t = \beta \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_t = \vec{k}_i - \beta \vec{n}_{12}$$

Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

◇ Reprenons le schéma dans le plan d'incidence.



◇ Nous avons de même

$$\vec{k}_t = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_t \cdot \vec{u} = \vec{k}_i \cdot \vec{u} + 0$$

◇ Puis

$$k_t \sin \theta_2 = k_i \sin \theta_1 \quad \text{avec} \quad k_t = n_2 \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_i = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

Dans le cas de la réflexion, les angles d'incidence et de réfraction sont tels que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

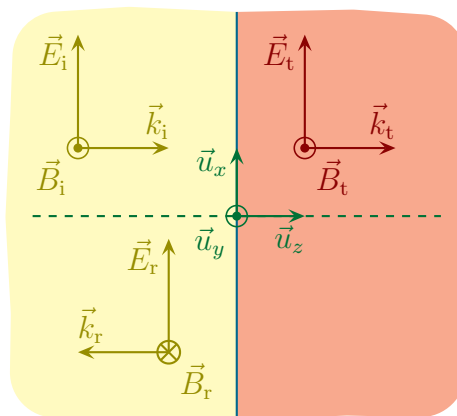
★ morale

- ◇ Comme nous venons de le voir, les lois de SNELL – DESCARTES sont contenues dans :
 - les lois de MAXWELL ;
 - le modèle du milieu DLHI.
- ◇ Insistons pour dire que nous n'avons pas prouvé que la loi de la réflexion est la même sur les milieux métalliques.
- ◇ Le lecteur curieux pourra s'y essayer sachant que la méthode est la même, à savoir la traduction des relations de passage, sans oublier que dans un métal (parfait), le champ électromagnétique est nul.

II.2.iv – coefficient de réflexion et transmission d'amplitude

★ situation, solution *a priori*

- ◇ Regardons le cas particulier de l'incidence normale.
- ◇ Imaginons une onde électromagnétique qui arrive sur une interface entre deux milieux DLHI. Cela engendre à la fois une onde réfléchie et une onde transmise.



- ◇ Considérons une onde électromagnétique polarisée rectilignement.
- ◇ Le caractère « onde polarisée rectilignement » ne restreint pas la généralité de l'étude qui suit *dans le cas d'une incidence normale*. En effet :
 - l'invariance par rotation du problème autour de l'axe normal à l'interface nous assure que les coefficients que nous trouverons seront les mêmes quelle que soit la polarisation ;
 - le caractère linéaire des phénomènes nous permet de considérer chaque composante séparément.
- ◇ Dans ces conditions, avec le repérage choisi, l'onde électrique incidente s'écrit

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{E_{0i}} e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$$

- ◇ Comme il s'agit d'une OPPM, nous pouvons utiliser la relation de structure et ainsi

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{(+k_1 \vec{u}_z) \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega} \rightsquigarrow \underline{\vec{B}}_i = \frac{E_{0i} k_1}{\omega} e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_y$$

- ◇ De même, sans oublier que $\vec{k}_r = -k_1 \vec{u}_z$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E_{0r}} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_r = -\frac{\underline{E_{0r}} k_1}{\omega} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_y$$

◇ Et pour l'onde transmise

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E_{0t}} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_t = \frac{\underline{E_{0t}} k_2}{\omega} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_y$$

★ traduction des conditions aux limites

- ◇ Nous avons déjà traduit le fait que le milieu ② s'étendait à l'infini en ne faisant pas intervenir d'onde retour dans le milieu ②.
- ◇ Reste l'interface...
- ◇ Nous avons affaire à trois ondes, dont deux sont considérées comme inconnues (l'onde incidente est censée être quelconque).
- ◇ Il nous faut donc *deux* conditions aux limites que seront les continuités des champs électrique *et* magnétique.
- ◇ La continuité de la composante sur \vec{u}_x du champ électrique impose

$$E_1(0^-) = E_2(0^+) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{E_{i0}} + \underline{E_{r0}} = \underline{E_{0t}}$$

◇ De même, la continuité du champ magnétique sur \vec{u}_y donne

$$\frac{\underline{E_{i0}} k_1}{\omega} - \frac{\underline{E_{r0}} k_1}{\omega} = \frac{\underline{E_{0t}} k_2}{\omega} \quad \text{et} \quad k = \frac{n \omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad n_1 \underline{E_{i0}} - n_1 \underline{E_{r0}} = n_2 \underline{E_{0t}}$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{E}

◇ Les deux conditions aux limites donnent

$$-\underline{E_{r0}} + \underline{E_{0t}} = \underline{E_{i0}} \quad \text{et} \quad n_1 \underline{E_{r0}} + n_2 \underline{E_{0t}} = n_1 \underline{E_{i0}}$$

◇ Il s'agit là d'un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont

$$\underline{E_{r0}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \times \underline{E_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{E_{0t}} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \times \underline{E_{i0}}$$

◇ Ce qui conduit aux coefficients de réflexion et de transmission en amplitude électrique

$$r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t_E = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{B}

◇ Nous avons, par définition du coefficient de réflexion en amplitude pour \vec{B}

$$r_B = \frac{\underline{B_{r0}}}{\underline{B_{i0}}}$$

◇ Avec le lien qui existe entre champs électrique et magnétique, nous obtenons successivement

$$\underline{B_{r0}} = -\frac{k_1}{\omega} \underline{E_{r0}} \quad \text{et} \quad \underline{B_{i0}} = +\frac{k_1}{\omega} \underline{E_{i0}} \quad \rightsquigarrow \quad r_B = -\frac{\underline{E_{r0}}}{\underline{E_{i0}}} = -r_E = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

◇ De même, pour le coefficient de transmission en amplitude pour \vec{B}

$$t_B = \frac{B_{t0}}{B_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{B_{t0}} = + \frac{k_2}{\omega} \underline{E_{i0}} \quad \rightsquigarrow \quad r_B = \frac{k_2 \underline{E_{t0}}}{k_1 \underline{E_{i0}}} = \frac{n_2}{n_1} t_E = \frac{2 n_2}{n_1 + n_2}$$

★ interprétation

- ◇ Si $n_1 = n_2$ il n'y a pas de réflexion **même avec deux milieux matériels différents**.
- ◇ En plongeant ainsi une bouteille de verre remplie de glycérine, d'indice très proche, dans de la glycérine celle-ci disparaît presque⁸.



- ◇ Nous constatons aussi que suivant le signe de $n_1 - n_2$, le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique peut être positif ou négatif :
 - $r_E > 0$ pour $n_1 > n_2$, *i.e.* E_{r0} et E_{i0} sont *phase*;
 - $r_E < 0$ pour $n_1 < n_2$, *i.e.* E_{r0} et E_{i0} sont *en opposition de phase*.
- ◇ C'est la raison pour laquelle, en optique ondulatoire, lorsqu'il y avait une réflexion vitreuse, *i.e.* une réflexion telle que $n_2 > n_1$, il fallait rajouter un déphasage de π .
- ◇ Rappelons que, comme c'est le champ E qui interagit avec la matière dans le cas des ondes électromagnétiques, c'est lui dont la phase est importante.

★ remarque

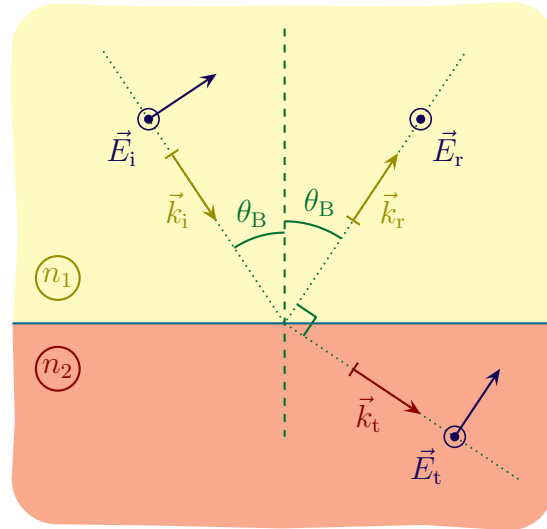
- ◇ Ici nous avons fait les calculs avec un indice n réel.
- ◇ Ce sont les mêmes raisonnements (et les mêmes calculs) pour des milieux avec des indices complexes.
- ◇ En revanche, si l'incidence n'est plus normale, les raisonnements sont identiques (traduction des relations de passage) mais les calculs sont plus lourds.
- ◇ En particulier l'angle d'incidence influence les coefficients de réflexion et de transmission.
- ◇ Si l'expression générale de ces coefficients n'est pas à connaître, un résultat l'est.

L'angle de BREWSTER est l'angle d'incidence tel que le vecteur d'onde réfléchi et le vecteur d'onde transmis sont orthogonaux.

8. Il s'agit d'une expérience facile à réaliser à la maison car la glycérine est un produit en vente libre. L'image est issue d'un film amateur dont le lien est :

<http://tapas.palats.com/video/1976/comment-rendre-bouteille-invisible.html>

Quand l'angle d'incidence est l'angle de BREWSTER, alors le champ électrique réfléchi est tangent à l'interface.



II.2.v – coefficients de réflexion et transmission en puissance

★ expression du vecteur de POYNTING

✧ Nous avons, par définition,

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$$

✧ Cela donne donc

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0} \right)$$

✧ Ce qui conduit, très vite, à (pour un indice réel)

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{i0}^2}{\omega} \vec{k}_i$$

✧ De même, nous obtenons rapidement

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{r0}^2}{\omega} \vec{k}_r \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{t0}^2}{\omega} \vec{k}_t$$

★ les coefficients

✧ Définissons le coefficient de réflexion R en puissance par

$$R = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$$

✧ Nous obtenons donc

$$R = \frac{E_{r0}^2}{E_{i0}^2} = r_E^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

✧ De même, définissons le coefficient de transmission en puissance par

$$T = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$$

✧ Et nous trouvons

$$T = \frac{k_2 E_{t0}^2}{k_1 E_{i0}^2} = \frac{n_2}{n_1} \times t_E^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

★ conservation de l'énergie

✧ Le lecteur vérifiera aisément que

$$R + T = 1$$

✧ Ce qui traduit la conservation de l'énergie au niveau de l'interface.

★ exemple numérique

✧ Prenons

$$n_{\text{air}} = 1 \quad \text{et} \quad n_{\text{verre}} = 1,5$$

✧ Nous trouvons alors

$$R = 0,04 \quad \text{et} \quad T = 0,96$$

✧ Cela signifie que, dans la vie de tous les jours, 4 % (environ) de la lumière est réfléchi par la simple interface air – verre.

Ondes dans un milieu diélectrique

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.C.5 Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - milieu diélectrique / isolant, diélectrique parfait, diamagnétique ;
 - échelle mésoscopique ;
 - courant de polarisation, charges de polarisation ;
 - susceptibilité ;
 - milieu linéaire, homogène, isotrope ;
 - permittivité / permittivité relative d'un milieu ;
 - indice complexe.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - vecteur polarisation ;
 - susceptibilité ;
 - indice.
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leurs interprétations :
 - $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$: vecteur polarisation \vec{P} ;
 - $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi_e} \underline{\vec{E}}$.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - expressions des courants et des charges de polarisation.

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - savoir interpréter d'où viennent les courants et les charges de polarisation ;
 - connaître les conditions d'étude permettant de trouver l'expression de la susceptibilité complexe ;
 - connaître la structure d'une OPPM dans un milieu diélectrique LHI, la différence avec une OPPM dans le vide.

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - savoir réécrire les équations de MAXWELL dans un milieu diélectrique LHI.

★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire / retrouver :

- l'expression de la susceptibilité complexe d'un milieu ;
- les lois de SNELL – DESCARTES ;
- les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas de l'incidence normale.