

Matériaux diamagnétique, paramagnétique et ferromagnétique

I. Rappels sur le magnétisme

1) Aimantation

Soit \vec{m} un moment magnétique alors l'*aimantation* associée à un volume $d\tau$ d'un matériau magnétique est donnée par :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{m}}{d\tau} \text{ en A.m}^{-1}$$

Ainsi l'*aimantation* désigne la densité volumique de moment magnétique dans un milieu magnétique (c'est-à-dire un milieu qui a la possibilité d'acquérir un moment magnétique macroscopique lorsqu'il est soumis à un champ magnétique extérieur).

2) Densités de courants équivalentes

On peut montrer (cf Cours Électromagnétisme de P.PUZO) que l'aimantation est responsable des densités de courants volumique et surfacique suivantes :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} \text{ et } \vec{J}_M^s = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{n}$$

Dans cette formule, \vec{n} est la sortante au milieu magnétique.

3) Équations de Maxwell et vecteur \vec{H}

Les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Faraday sont inchangées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ et } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

De plus, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit toujours :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libres}$$

Enfin, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j}_{libres} + \vec{j}_M + \vec{j}_{polarisation} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j}_{libres} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} \right) &= \vec{j}_{libres} + \frac{\partial (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{libres} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Dans cette équation, on a posé :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}}, \vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} \text{ et } \vec{j}_{polarisation} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Remarque : Pour le développement sur la polarisation électrique, on regardera à profit les cours de P.PUZO et de R.MONIER.

4) Relation de constitution et susceptibilité magnétique

Dans le cas des corps *diamagnétiques* et *paramagnétiques*, on peut écrire pour un milieu *linéaire* anisotrope :

$$\vec{\mathcal{M}} = [\chi_m] \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Dans cette expression, $[\chi_m]$ est le tenseur des susceptibilités magnétiques. On peut montrer qu'on peut représenter ce tenseur par une matrice tridimensionnelle diagonale.

Pour un milieu *isotrope*, c'est-à-dire un milieu pour lequel les propriétés ne dépendent pas de la direction considérée, alors cette matrice est proportionnelle à la matrice identité tridimensionnelle.

Enfin, pour un milieu *homogène*, c'est-à-dire un milieu pour lequel les propriétés sont indépendantes du point considéré, alors χ_M est indépendant du point où l'on regarde.

Ainsi, on retient que pour un milieu *linéaire*, *homogène* et *isotrope*, on peut écrire :

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_M \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Pour les matériaux diamagnétiques et paramagnétiques, on a toujours :

$$\mathcal{M} \ll \frac{B}{\mu_0}$$

Ainsi,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} \approx \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Ainsi, on peut également retenir :

$$\vec{\mathcal{M}} \approx \chi_M \vec{H}$$

5) Perméabilité magnétique relative

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} &\Leftrightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_M \vec{H} \\ &\Leftrightarrow (1 + \chi_M) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \\ &\Leftrightarrow \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{aligned}$$

Dans cette expression, on a défini la *perméabilité magnétique relative* comme $\mu_r = 1 + \chi_M$.

II. Matériaux diamagnétiques

1) Définition

Cette définition est issue du dictionnaire de physique de R.TAILLET.

Diamagnétisme : Phénomène par lequel l'application d'un champ magnétique extérieur à certains milieux conduit à l'apparition d'une aimantation, elle-même responsable d'un champ induit opposé au champ appliqué. Le diamagnétisme, dont l'origine est le plus souvent quantique (théorème de Bohr-van Leeuwen), s'oppose par cela au paramagnétisme, mais il se distingue également du ferromagnétisme par le fait qu'il disparaît avec le champ extérieur.

Les substances diamagnétiques sont en général celles pour lesquelles il n'y a pas de moment magnétique permanent car toutes les couches électroniques sont complètes (les métaux étant un cas particulier : diamagnétisme de Landau). Une façon imagée de se représenter cet effet est de considérer que, sous l'action du champ externe, les nuages électroniques se déforment, ce qui implique l'apparition de moments magnétiques dont la densité volumique constitue l'aimantation.

Le champ magnétique induit ainsi créé étant faible, il sera négligeable pour les milieux dans lesquels il existe un moment magnétique permanent (en raison d'électrons dépareillés), et qui seront donc la plupart du temps paramagnétiques.

La susceptibilité magnétique des corps diamagnétiques est négative, par définition, et dépend généralement très peu de la température.

On parle de *diamagnétisme parfait* lorsque le champ induit s'oppose complètement au champ appliqué, comme c'est le cas des substances supraconductrices.

Le diamagnétisme fut découvert en 1845 par Michael FARADAY qui inventa aussi le terme lui-même.

2) Diamagnétisme de Landau

a. Définition

Cette définition est issue du dictionnaire de physique de R.TAILLET.

Contribution négative à la susceptibilité magnétique des métaux due au moment magnétique associé au moment cinétique orbital des électrons de conduction. Elle est de l'ordre de la contribution du paramagnétisme de Pauli, et si les électrons sont considérés libres, la susceptibilité magnétique correspondante est donnée par :

$$\chi_{Landau} = -\frac{1}{3}\chi_{Pauli}$$

Cette contribution est généralement faible devant celle des ions du métal, car le principe d'exclusion de Pauli limite fortement l'alignement des spins des électrons. Sa description, reposant sur un gaz d'électrons libres, est très différente de celle du diamagnétisme usuel où interviennent les couches électroniques.

On développera le calcul associé au diamagnétisme de Landau dans une partie suivante.

III. Matériaux paramagnétiques

1) Définition

Cette définition est issue du dictionnaire de physique de R. TAILLET.

Paramagnétisme : Propriété de certaines substances qui acquièrent un moment magnétique, donc une aimantation, en présence d'un champ magnétique appliqué et pour lesquelles l'aimantation induite est dirigée dans le même sens que ce champ (on parle de diamagnétisme quand elle est dirigée dans le sens opposé). Cette aimantation résulte d'un alignement préférentiel de moments dipolaires présents dans le milieu avant l'application du champ extérieur, le long de celui-ci.

Les substances paramagnétiques sont donc en général celles pour lesquelles il existe des sous-couches électroniques incomplètes.

L'agitation thermique tend à contrarier l'alignement des moments dipolaires microscopiques, et les propriétés paramagnétiques des corps dépendent par conséquent assez fortement de la température.

En particulier, la susceptibilité magnétique obéit dans de nombreux cas à la loi de Curie. Les dipôles étant localisés spatialement et pouvant être considérés indépendants, les systèmes paramagnétiques suivent la statistique de Maxwell-Boltzmann.

Le terme "paramagnétisme" fut introduit par Michael Faraday qui découvrit ce phénomène en 1845.

Une description classique en fut proposée pour la première fois en 1905 (paramagnétisme de Langevin) et une description quantique en 1932 (paramagnétisme de Brillouin).

2) Différents types de paramagnétisme

a. Paramagnétisme de Brillouin

Explication du paramagnétisme, proposée en 1932 par Léon Brillouin, et qui repose sur la physique quantique.

En considérant que la composant du moment magnétique $\vec{\mu}$ de chaque constituant d'un milieu dans la direction du champ $\vec{B} = B\vec{e}_z$ appliqué ne peut prendre que des valeurs discrètes, $\mu_z = g m_J \mu_B$ où g est le *facteur de Landé*, m_J le nombre quantique associé au moment cinétique ($m_J \in \{-J, \dots, J\}$) et μ_B le *magnéton de Bohr*, on peut montrer que l'aimantation d'un matériau de température T est donnée par :

$$\vec{M} = n \vec{\mu}_J \mathcal{B}_J \left(\frac{\mu_J B}{k_B T} \right)$$

Dans cette expression, $\mu_J = ||\vec{\mu}_J|| = g J \mu_B$, n est la densité volumique de moments magnétiques, k_B est la constante de Boltzmann et \mathcal{B}_J est la fonction de Brillouin définie par :

$$\mathcal{B}_J(x) = \frac{1}{2J} \left((2J+1) \coth \left(\frac{2J+1}{2J} x \right) - \coth \left(\frac{x}{2J} \right) \right)$$

Cette fonction se simplifie grandement pour $J = \frac{1}{2}$ en :

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(x) = \tanh(x)$$

Cette description complète celle, classique, du paramagnétisme de Langevin.

b. Paramagnétisme de Langevin

Explication du paramagnétisme, proposée en 1905 par Paul Langevin, qui repose sur la physique classique et fait intervenir des effets antagonistes.

Elle suppose que, d'une part, la présence d'un champ magnétique extérieur \vec{B} tend à aligner les moments magnétiques microscopiques $\vec{\mu}$ des constituants du milieu, et que, d'autre part, l'agitation thermique tend à détruire cet alignement.

L'aimantation pour une température T est alors donné par :

$$\vec{M} = n\vec{\mu} \mathcal{L}\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$$

Dans cette expression, $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ désigne la fonction de Langevin, k_B est la constante de Boltzmann et n est la densité volumique de moments magnétiques.

La prise en compte des effets quantiques conduit à une théorie plus élaborée (paramagnétisme de Brillouin).

c. Paramagnétisme de Pauli

Contribution du moment magnétique associé au spin des électrons de conduction au paramagnétisme des métaux.

Cette contribution est généralement faible devant celles des ions du métal, car le principe d'exclusion de Pauli limite fortement l'alignement des spins des électrons.

Si les électrons sont considérés comme libres, la susceptibilité magnétique est donné par :

$$\chi_{Pauli} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) (a_0 k_F) \approx 10^{-6} \times \frac{2,59}{r_s/a_0}$$

Dans cette expression, α désigne la *constante de structure fine*, a_0 est le *rayon de Bohr*, k_F est l'*impulsion de Fermi* de la distribution électronique et r_s une longueur reliée à la densité d'électrons n_e par $r_s = (4\pi n_e/3)^{-\frac{1}{3}}$. Le moment magnétique est associé au moment cinétique orbital des électrons apporte aussi une contribution au comportement magnétique d'un métal (diamagnétisme de Landau).

d. Paramagnétisme de van Vleck

Paramagnétisme des systèmes dont les constituants ont un moment cinétique total nul, $J = 0$. Dans une approche classique, ou d'après la théorie quantique des perturbations au premier ordre, cet effet ne devrait pas être présent. Pour le comprendre, il faut pousser la théorie des perturbations au second ordre, ce qui explique qu'il est généralement très faible.

Comme le diamagnétisme, il ne dépend pas de la température.

IV. Matériaux ferromagnétiques

Cette définition est issue du dictionnaire de physique de R.TAILLET.

1) Définition

Phénomène par lequel certains corps présentent une aimantation permanente, autrement dit un moment magnétique permanent, en l'absence de champ magnétique extérieur appliqué.

Cette propriété disparaît lorsque le corps est porté à une température supérieure à une température caractéristique du matériau qui le compose et nommée *température de Curie*. Il devient alors paramagnétique (expérience du clou chauffé).

Le passage, réversible, entre ces deux états se fait par une transition de phase. Parmi les corps simples, seuls cinq sont ferromagnétiques (Fe, Ni, Co, Gd, Dy).

En revanche, il existe de nombreux corps ferromagnétiques composés, ne contenant aucun de ces éléments.

Le ferromagnétisme est dû à l'interaction d'échange entre les moments magnétiques associés au moment cinétique des atomes (spin), et non pas directement à l'interaction dipolaire entre ces moments magnétiques.

Il est d'origine quantique, les électrons d'un solide adoptant spontanément une configuration dans laquelle les moments magnétiques atomiques sont alignés. En effet, la partie de la fonction d'onde associée au spin est symétrique dans cette situation, ce qui impose que la partie spatiale soit antisymétrique (les électrons étant des fermions) et permet à l'éloignement spatial entre les électrons d'être maximal, ce qui correspond à une énergie d'interaction électrostatique moindre (interaction d'échange).

Cet effet peut se modéliser par le hamiltonien de Heisenberg, qui prend la même forme que l'interaction dipolaire entre les moments magnétiques.

2) Ferromagnétisme doux

Milieu ferromagnétique dont le champ coercitif est faible ($H_c \leq 10^3 \text{ A.m}^{-1}$). L'aimantation d'un tel milieu change relativement facilement sous l'effet d'un champ externe et sa perméabilité est élevée. Le cycle d'hystérésis associé est réduit et les ferromagnétiques doux sont utilisés en régime variable, notamment dans les transformateurs, dans lesquels ils permettent d'obtenir des pertes fer limitées.

Le fer doux, le permalloy et le mumétal sont des exemples de ferromagnétiques doux.

3) Ferromagnétisme dur

Milieu ferromagnétique dont le champ coercitif est élevé ($H_c \geq 10^3 \text{ A.m}^{-1}$). Ils sont caractérisés par une faible perméabilité magnétique et une aimantation qui change assez difficilement sous l'effet d'un champ externe. Les ferromagnétiques durs sont utilisés dans les aimants permanents.

Des exemples usuels sont l'acier l'alnico.

4) Cycle d'hystérésis

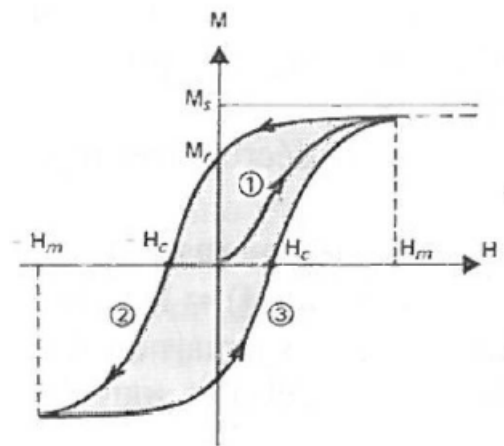


FIGURE 1 – Cycle d'hystérésis décrit par un matériau ferromagnétique

Source : Cours d'électromagnétisme. P.PUZO

H_c est appelé *champ coercitif*.

M_r est appelée *aimantation rémanente*.

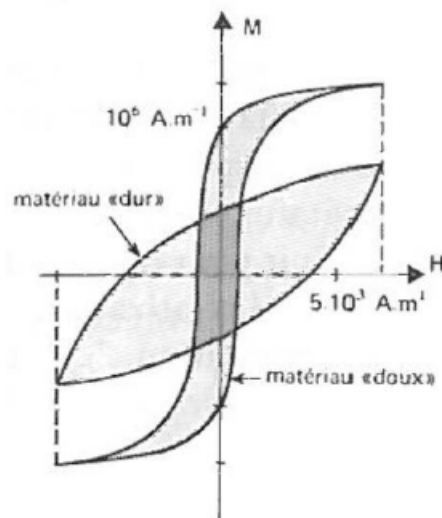


FIGURE 2 – Comparaison entre les cycles pour des matériaux ferromagnétiques doux et durs

Source : Cours d'électromagnétisme. P.PUZO

V. Susceptibilité magnétique pour des matériaux diamagnétiques et paramagnétiques

Corps diamagnétiques	$10^6 \chi_M$	Corps paramagnétiques	$10^6 \chi_M$
Dihydrogène	-0,02	Dioxygène	4,8
Diazote	-0,006	Air	0,37
Eau	-9,1	Sodium	8,50
Diamant	-21,6	Aluminium	20,7
Cuivre	-9,60	Calcium	19,5
Plomb	-9,6	$FeCl_3$	3300
Argent	-23,8		

TABLE 1 – Susceptibilités magnétiques de quelques matériaux

VI. Magnétisme d'un gaz d'électrons bidimensionnel

Cette partie est issue d'un exercice du livre de Physique statistique de C.TEXTIER.

Les propriétés magnétiques d'un gaz d'électrons sans interaction sont contrôlées par deux phénomènes : le *paramagnétisme de Pauli* dû à l'alignement des moments magnétiques électroniques sur le champ magnétique et *diamagnétisme de Landau* induit par le mouvement orbital de charges électroniques. L'hamiltonien de Pauli (pour un électron) qui décrit les deux phénomènes est :

$$H = \frac{(\vec{p} - q_e \vec{A}(\vec{r}))^2}{2m_*} - \mu_z B \text{ avec } \mu_z = \frac{q_e}{m_e} S_z$$

Dans cette expression \vec{A} est le potentiel vecteur, q_e est la charge de l'électron. La *masse effective* m_* des porteurs de charge (les électrons dans le métal) diffère en général de la masse m_e des électrons dans le vide. μ_z est le moment magnétique de l'électron, relié à son spin S_z par le facteur gyromagnétique $\gamma_e = \frac{q_e}{m_e}$.

Nous considérons la situation d'un champ magnétique homogène selon Oz : $B = \delta_x A_y - \delta_y A_x = c^{te}$. Afin de simplifier l'analyse, nous nous placerons en deux dimensions et supposons les électrons confinés dans un plan de surface \mathcal{A} .

1) Paramagnétisme de Pauli

Dans cette partie nous étudions l'effet du champ magnétique sur les moments magnétiques des électrons du gaz bidimensionnel. L'hamiltonien pour un électron est :

$$H_p = \frac{\vec{p}^2}{2m_*} - \mu_z B \text{ où } \vec{p} = (p_x, p_y)$$

Pour un tel hamiltonien, on peut écrire :

$$\varepsilon_{\vec{k}, \pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_*} \mp \mu_B B$$

Dans cette expression, μ_B est le *magnéton de Bohr* qui est une constante physique :

$$\mu_B = \frac{\hbar q_e}{2m_e}$$

Ainsi, les deux densités d'états sont données (pour $\varepsilon_B = -\mu_B B$) par :

$$\rho_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \rho_0 \theta_H(\varepsilon \pm \varepsilon_B)$$

Dans cette expression, on définit $\rho_0 = \frac{\mathcal{A}m_*}{\pi \hbar^2}$ lorsque le champ magnétique est nul.

Dans un premier temps, nous considérons une température et un potentiel chimique fixés. Ainsi, avec $n(\varepsilon; \mu)$ la distribution de Fermi-Dirac, on a :

$$N_{\pm} = \frac{\rho_0}{2} \int_{\mp \varepsilon_B}^{\infty} d\varepsilon n(\varepsilon; \mu) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^{\infty} d\varepsilon n(\varepsilon; \mu \pm \varepsilon_B) = \frac{\rho_0}{2\beta} \ln \left(1 + e^{\beta(\mu \pm \varepsilon_B)} \right)$$

En supposant N le nombre d'électrons fixé.

$$\begin{aligned} N = N_+ + N_- &= \frac{\rho_0}{2\beta} \ln \left(1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon_B)} \right) + \frac{\rho_0}{2\beta} \ln \left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_B)} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2\beta N}{\rho_0} &= \ln \left(1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon_B)} \right) + \ln \left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_B)} \right) \\ \Leftrightarrow \ln \left(e^{\frac{2\beta N}{\rho_0}} \right) &= \ln \left[\left(1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon_B)} \right) \left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_B)} \right) \right] \\ \Leftrightarrow e^{\frac{2\beta N}{\rho_0}} &= \left(1 + e^{\beta(\mu + \varepsilon_B)} \right) \left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_B)} \right) \\ \Leftrightarrow e^{2\beta \varepsilon_F} &= 1 + 2 \cosh(\beta \varepsilon_B) e^{\beta \mu} + e^{2\beta \mu} \end{aligned}$$

Dans la dernière expression, nous avons défini $\varepsilon_F = \frac{N}{\rho_0}$.

On peut réécrire la dernière équation comme un polynôme du second degré dont la variable est $e^{\beta \mu}$ sous la forme suivante :

$$\left(e^{\beta \mu} \right)^2 + 2 \cosh(\beta \varepsilon_B) e^{\beta \mu} + 1 - e^{2\beta \varepsilon_F} = 0$$

L'unique solution positive liée à ce polynôme est :

$$e^{\beta \mu} = \sqrt{\cosh^2(\beta \varepsilon_B) + e^{2\beta \varepsilon_F} - 1} - \cosh(\beta \varepsilon_B)$$

Ainsi, le potentiel chimique s'exprime comme suit :

$$\mu(T, B) = \frac{1}{\beta} \ln \left[\sqrt{\cosh^2(\beta \varepsilon_B) + e^{2\beta \varepsilon_F} - 1} - \cosh(\beta \varepsilon_B) \right]$$

On remarque que pour un champ magnétique nul $B = 0$, on a :

$$\cosh(\beta \varepsilon_B) = 1$$

$$\text{Donc, } \mu(T, B) = \frac{1}{\beta} \ln(e^{\beta \varepsilon_F} - 1)$$

On peut également considéré le cas $T \mapsto 0$, c'est-à-dire le cas pour lequel $\beta \mapsto \infty$ pour lequel il faut différentier deux cas possibles.

Dans le cas où $\varepsilon_F > |\varepsilon_B|$, on peut approcher le terme entre crochets de $\mu(T, B)$ par $e^{\beta \varepsilon_F}$. Ainsi, on en déduit $\mu(0, B) \approx \varepsilon_F$. Le potentiel chimique est indépendant du champ magnétique : cette situation est illustrée par la figure ci-dessous, partie de gauche.

Dans le cas où $\varepsilon_F < |\varepsilon_B|$, on peut écrire le développement de la racine carré de l'expression de $\mu(T, B)$, ce qui permet d'écrire : $\mu(0, B) = 2\varepsilon_F - |\varepsilon_B|$. Cela correspond à la situation où le gaz est complètement polarisée en spin (partie de droite de la figure ci-dessous).

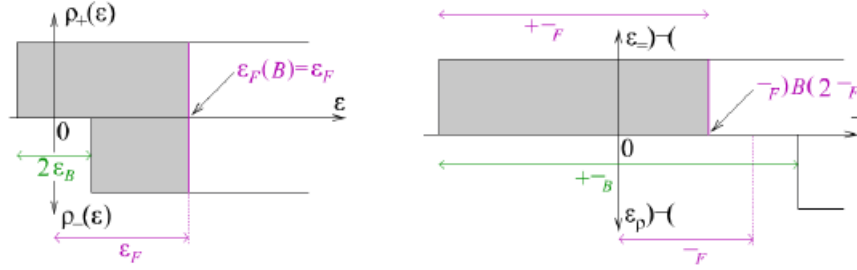


FIGURE 3 – Figure

Source : *Physique statistique. C.TEXTIER. Dunod*

En considérant un champ magnétique d'environ 1 T, ce qui est déjà un champ magnétique très fort, nous observons $\varepsilon_B \approx 50 \mu\text{eV}$ soit l'équivalent de 0,5 K.

D'une part cette énergie est beaucoup plus faible que l'énergie de Fermi dans un gaz d'électrons 2D (quelques 10 K), d'autre part, à moins de considérer des très basses températures (cryostat) c'est plutôt plus petit que $k_B T$.

Dans la limite $\varepsilon_B \ll k_B T \ll \varepsilon_F$, on peut alors considérer $\mu(T, B) \approx \mu(0, B) \approx \varepsilon_F$ est indépendant du champ magnétique. De plus, on a :

$$N_{\pm} = \frac{\rho_0}{2} (\varepsilon_F \pm \varepsilon_B)$$

L'aimantation est donnée par :

$$\mathcal{M}_z^{para} = \mu_B (N_+ - N_-) = \rho_0 \mu_B^2 B$$

Ainsi, la susceptibilité liée au paramagnétisme de Pauli est donnée par :

$$\chi_{Pauli} = \rho_0 \mu_B^2$$

Notons que cette susceptibilité est toujours positive, quelle que soit la charge des porteurs, ce qui traduit simplement l'alignement des moments magnétiques sur le champ.

2) Diamagnétisme de Landau

Nous étudions maintenant l'effet du champ magnétique sur le mouvement orbital des électrons. On oublie le couplage au spin étudié dans la partie précédente et on considère l'hamiltonien de Landau :

$$H = \frac{(\vec{p} - q_e \vec{A}(\vec{r}))^2}{2m_*}$$

Cet hamiltonien décrit une particule chargée, sans spin et soumise à un champ magnétique homogène selon Oz . Le spectre des énergies est un spectre d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_c = \frac{q_e B}{m_e}$.

Pour la suite de l'étude, on suppose ($q_e B > 0$) :

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Chaque niveau porte un dégénérescence d_L proportionnelle à la surface du plan $d_L = \frac{q_e B A}{2\pi\hbar}$. Ce spectre est appelé *spectre de Landau*.

Par définition du grand potentiel,

$$J = -\frac{1}{\beta} \sum_{\lambda} \ln \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} \right)$$

Dans le cas du spectre de Landau, la somme sur les états individuels prend la forme :

$$\sum_{\lambda} \rightarrow 2_s d_L \sum_{n=0}^{\infty}$$

En remarquant que $2_s d_L = \rho \hbar \omega_c$, nous obtenons ;

$$J(T, \mathcal{A}, \mu, B) = -\rho \frac{\hbar \omega_c}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\beta \left(\hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \mu \right)} \right)$$

On peut utiliser la formule d'Euler-MacLaurin :

$$a \sum_{n=0}^{\infty} f \left(a \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \underset{a \rightarrow 0}{=} \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{a^2}{24} f'(0) + \mathcal{O}(a^3)$$

où $f(x)$ est une fonction qui décroît suffisamment rapidement. Ainsi, pour $B \mapsto 0$ on peut écrire :

$$\text{On l'utilise pour } a = \hbar \omega_c \text{ et } f(x) \mapsto -\frac{\rho_0}{\beta} \ln \left(1 + e^{-\beta(x - \mu)} \right).$$

On obtient :

$$J(T, \mathcal{A}, \mu, B) \underset{B \rightarrow 0}{=} J(T, \mathcal{A}, \mu, 0) + \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-\beta\mu} + 1} \frac{\rho}{12} \left(\frac{\hbar q_e B}{m_*} \right)^2 + \dots$$

L'aimantation diamagnétique est :

$$\mathcal{M}_z^{dia} = -\frac{\partial J}{\partial B}$$

Combinant cela avec la définition de la susceptibilité diamagnétique :

$$\chi_{Landau} \stackrel{def}{=} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{M}_z^{dia}}{\partial B} = - \left. \frac{\partial^2 J}{\partial B^2} \right|_{B=0}$$

La comparaison avec le développement précédent permet d'identifier la susceptibilité de Landau :

$$\chi_{Landau} = -\frac{1}{3} \rho (\mu_B^*)^2 \frac{1}{e^{-\beta\mu} + 1} \text{ où } \mu_B^* \stackrel{def}{=} \frac{q_e \hbar}{2m_*}$$

À température nulle ($\beta \mapsto \infty$ et $\mu \mapsto \varepsilon_F$) on obtient $\chi_{Landau} = -\frac{1}{3} \rho (\mu_B^*)^2$.

Cette susceptibilité est négative : la présence du champ provoque le mouvement cyclotron (circulaire) des électrons. La rotation des charges génère un champ qui s'oppose au champ responsable du mouvement (loi de Lenz), d'où $\chi_{Landau} < 0$.

La susceptibilité totale est donc donnée par :

$$\chi = \chi_{Pauli} + \chi_{Landau} = \rho_0 \mu_B^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{m_e}{m_*} \right)^2 \right)$$

Si $m_* = m_e$, le paramagnétisme domine et la susceptibilité est positive (cas usuel dans un métal). En revanche si la masse effective est assez faible $m_* < \frac{m_e}{\sqrt{3}}$, le diamagnétisme peut devenir dominant.

VII. Loi de Curie

Cette partie est issue du livre de physique statistique de C.TEXTIER.

Dans un solide cristallin de N atomes formant un réseau cristallin, l'atome i porte un moment magnétique, proportionnel au spin des électrons (ou au spin nucléaire) : $\vec{m}^{(i)} = \gamma \vec{S}^{(i)}$, où γ est le *facteur gyromagnétique*.

Pour simplifier, nous supposons ici que le spin est égal à $s = \frac{1}{2}$. Le spin i peut se trouver dans deux états quantiques, $|\uparrow\rangle_i$ ou $|\downarrow\rangle_i$, tels que $S_z^{(i)} = \pm \frac{\hbar}{2}$.

Les microétats du cristal sont donc des états produits tensoriels que nous noterons $|\uparrow\rangle_1 \times |\downarrow\rangle_2 \times \dots \times |\uparrow\rangle_N = |\uparrow\downarrow \dots \uparrow\rangle$. D'autre part, nous négligerons les interactions entre les moments et nous supposons le cristal soumis à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Son énergie (magnétique) est :

$$H_{mag} = -BM_z = -B\gamma \sum_{i=1}^N S_z^{(i)}$$

où $\vec{M} = \sum_i \vec{m}^{(i)}$ est l'aimantation totale.

L'énergie de chaque spin peut donc prendre deux valeurs $\varepsilon_{\pm} = \mp \varepsilon_B = \mp \frac{\hbar\gamma B}{2}$.

L'état où le moment magnétique est aligné sur le champ est donc plus favorable énergétiquement (état $|\uparrow\rangle$ si $\gamma B > 0$). Ce problème est donc le plus simple auquel on puisse penser : un ensemble de N systèmes à deux niveaux.

La fonction de partition pour un spin et pour le cristal sont donc données par :

$$z_{spin} = e^{\beta\varepsilon_B} + e^{-\beta\varepsilon_B} = 2 \cosh(\beta\varepsilon_B) \text{ et } Z = z^N$$

Ainsi, on peut écrire l'énergie libre associée pour le spin et pour le cristal :

$$f_{spin} = -k_B T \ln(2 \cosh(\beta\varepsilon_B)) \text{ et } f_{cristal} = -N k_B T \ln(2 \cosh(\beta\varepsilon_B))$$

L'aimantation locale est donnée par :

$$m = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i \right\rangle$$

Ainsi,

$$m(T, B) = -\frac{\partial f_{spin}}{\partial B} = -\frac{-k_B T \ln(2 \cosh(\mu\beta B))}{\partial B} = \mu \tanh(\mu\beta B)$$

Donc,

$$\chi \stackrel{def}{=} N \left. \frac{\partial m}{\partial B} \right|_{B=0} = \frac{N\mu^2}{k_B} \times \frac{1}{T}$$

La loi de Curie stipule que dans le cas tridimensionnel :

$$\chi = \frac{C}{T} \text{ avec } C = \frac{N\mu^2}{3k_B}$$

VIII. Loi de Curie-Weiss

Nous allons maintenant considérer les interactions d'un spin avec ses voisins. Pour cela, il est utile d'introduire le concept de champ local.

L'hamiltonien que nous considérons maintenant est l'hamiltonien d'Ising :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

Isolons les termes faisant intervenir le spin σ_i dans l'hamiltonien :

$$-J \sum_{j \in \text{vois}(i)} \sigma_i \sigma_j - B \sigma_i = -B_i^{(\text{loc})} \sigma_i \text{ avec } B_i^{(\text{loc})} = B + J \sum_{j \in \text{vois}(i)} \sigma_j$$

$\text{vois}(i)$ est l'ensemble des q voisins du site i où q est la coordonnée du réseau ($q = 2d$ pour un réseau hypercubique en dimension d).

Le champ local $B_i^{(\text{loc})}$ définit une direction selon laquelle σ_i préfère s'aligner.

C'est une quantité qui fluctue de configuration et configuration, dont la moyenne :

$$\langle B_i^{(\text{loc})} \rangle = J \sum_{j \in \text{vois}(i)} \langle \sigma_j \rangle + B = J q m + B$$

est contrôlée par l'aimantation locale moyenne $m \stackrel{def}{=} \langle \sigma_i \rangle$, supposé uniforme à travers le réseau.

L'*approximation de champ moyen* consiste à négliger les fluctuations en supposant que l'aimantation moyenne est elle-même contrôlée par $\langle B_i^{(loc)} \rangle$.

Ainsi, on montre que :

$$m = \tanh [\beta(Jqm + B)]$$

La résolution de cette équation fournit l'expression de l'aimantation en fonction de la température, que nous notons $m_*(T)$. Plaçons-nous à champ nul.

Il est clair que $m = 0$ est toujours solution de l'équation précédente : elle correspond à un état paramagnétique.

Cherchons maintenant une solution $m \neq 0$, c'est-à-dire un état ferromagnétique. Pour cela remarquons que nous pouvons exprimer la température en fonction de m :

$$T(m) = \frac{Jq}{k_B} \frac{m}{\tanh^{-1}(m)} \text{ où } \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

La courbe représentative de cette fonction met en évidence qu'au-dessus d'une certaine température T_c , appelée *température critique*, l'unique solution est $m = m_*(T) = 0$ (phase paramagnétique), alors qu'au dessous de T_c , deux solutions non nulles $m = \pm m_*(T)$ apparaissent, correspondant à la phase *ferromagnétique*.

La *température critique* correspond au maximum de la fonction $T(m)$, qui est atteint en $m = 0$. En utilisant $\tanh^{-1}(m) \approx m$ pour $m \mapsto 0$, on obtient $T_c = T(m \mapsto 0)$:

$$T_c \stackrel{def}{=} \frac{Jq}{k_B}$$

dont l'ordre de grandeur est contrôlé par J . La solution ferromagnétique décrit bien la courbe d'aimantation d'un bon nombre de composés.

Par définition,

$$\chi(T) \stackrel{def}{=} \left. \frac{\partial m}{\partial B} \right|_{B=0} = \frac{1 - m(T)^2}{k_B(T - [1 - m(T)^2]T_c)}$$

De plus, on montre une divergence autour du point critique. En particulier comme $m(T) = 0$ pour $T > T_c$, la susceptibilité se simplifie en :

$$\chi(T) = \frac{1}{k_B(T - T_c)}$$

L'ajustement des données expérimentales à l'aide de cette loi permet une mesure précise de T_c .

De plus, $\chi(T) = \frac{\partial m}{\partial B} = -\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}$, nous pouvons conclure que les dérivées secondes de l'énergie libre sont singulières à la transition. La transition à $B = 0$ est donc du second ordre.