

# L'électromagnétisme

## I – Objectifs

- ✧ L'électromagnétisme est un des domaines les plus aboutis et les plus fondamentaux de la physique.
- ✧ En se limitant à la physique classique (par opposition à la physique quantique et à la relativité), les particules élémentaires n'ont que deux caractères intrinsèques : la masse et la charge.
- ✧ Si nous avons vu en mécanique un certain nombre d'applications qui mettent en œuvre l'aspect massique des objets (par l'inertie et la gravitation), nous allons désormais voir quelques implications de la charge des particules :
  - en tant que source de champ (chapitres 1 et 2)
  - en tant que point matériel subissant des forces engendrées par le champ (chapitre 7 de mécanique)
  - en tant que description moléculaire de la matière (chapitre 3)
- ✧ Nous verrons aussi cette année que l'électromagnétisme permet d'expliquer l'électrocinétique. De même en 2<sup>e</sup> année, l'électromagnétisme permettra d'expliquer les phénomènes optiques.

## II – Limites

- ✧ Même si l'électromagnétisme a pu être incorporée à la fois à la mécanique quantique et à la relativité restreinte, pour notre part, nous nous contenterons d'une approche classique.
- ✧ Cela signifie que ce que nous étudierons :
  - évoluera dans un domaine non microscopique (nous n'expliquerons pas comment un électron reste autour du noyau mais nous étudierons des mouvements d'électrons « dans le vide »)
  - des objets ou des particules qui ont des vitesses non relativistes (soit  $v \leq c/3$ )
- ✧ Et pour cette année, nous nous limiterons à des champs électrique et magnétique statiques (*ie.* indépendants du temps).

# Électromagnétisme

## Chapitre 3

### Les dipôles électromagnétiques

# Les dipôles électromagnétiques

Jusqu'à présent nous avons regardé comment le champ pouvait être créé par « des charges » sans que nous nous posions trop la question d'où venaient ces charges. Dans ce chapitre nous allons poser les bases d'un modèle qui permet de faire le lien entre champ électromagnétique et matière. Ce lien est double car il s'agit à la fois de pouvoir déterminer le champ créé par de la matière qui est globalement neutre mais localement chargée et à la fois de déterminer les actions que cette matière subit de la part d'un champ électromagnétique.

Nous découperons notre études en deux parties. Nous verrons tout d'abord le dipôle électrique, *ie.* le modèle permettant de décrire le comportement de la matière vis-à-vis du champ électrique et ensuite nous verrons tout naturellement le dipôle magnétique dont le nom permet de comprendre qu'il s'agit du modèle de la matière en rapport avec le champ magnétique.

## I – Le dipôle électrostatique

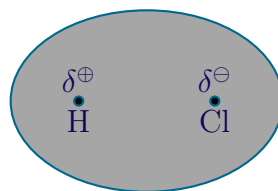
### I.1 – La modélisation

#### I.1.i – ils sont partout

- ◇ Nous savons que la matière est globalement neutre car les atomes le sont : il faut une opération extérieure pour charger la matière ce qui correspond, au niveau atomique, à la capture ou à la cession d'un électron du nuage électronique d'un atome.
- ◇ Une fois la matière chargée, nous sommes ramenés, au niveau de l'interaction avec le champ (en tant que source active ou matière passive) aux cas étudiés dans les chapitres précédents.
- ◇ Que se passe-t-il dans le cas très fréquent où la matière reste globalement neutre ?

#### ★ molécules polaires

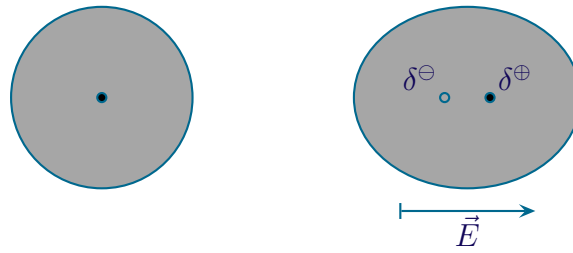
- ◇ Certaines molécules globalement neutres peuvent néanmoins présenter une répartition de charges telle que le barycentre des charges positives  $\delta^+$  ne soit pas superposé au barycentre des charges négatives  $\delta^-$ .
- ◇ C'est le cas de molécules telles que HCl ou H<sub>2</sub>O.



- ◇ Cet effet peut être dû à des électronégativités différentes des différents atomes composant la molécules et / ou à la géométrie particulière de la molécule.

#### ★ atomes polarisables

- ◇ Au delà de ces molécules qui ont intrinsèquement des barycentres de charges  $\delta^+$  et  $\delta^-$  différents, quasiment toutes les molécules peuvent être déformées par un champ extérieur de telle sorte qu'elles aussi voient leurs barycentres  $\delta^+$  et  $\delta^-$  se distinguer.
- ◇ Considérons ainsi une molécule parfaitement sphérique dont les barycentres  $\delta^+$  et  $\delta^-$  sont confondus et soumettons-le à un champ uniforme  $\vec{E}$ .

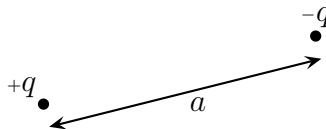


- ✧ Parce que les charges positives subissent une force dans le sens de  $\vec{E}$  alors que les charges négatives subissent une force dans le sens opposé, nous pouvons voir que globalement le champ  $\vec{E}$  a tendance à le déformer et, ainsi, à séparer les deux barycentres  $\delta^+$  et  $\delta^-$ .

### I.1.ii – modèle simple

- ✧ Pour représenter une distribution de charges globalement neutre nous utiliserons le modèle dit du dipôle électrique.

Un *dipôle électrique* est un ensemble de deux charges opposées ponctuelles distantes de  $a$ .



- ✧ Sauf précision contraire, nous prendrons toujours  $a = C^{\text{te}}$  mais rien ne l'oblige *a priori*. Dans ce cas, le dipôle est un dipôle électrostatique.
- ✧ Toujours dans l'idée que ces dipôles vont modéliser des molécules, *ie.* des choses très petites à l'échelle mésoscopique et *a fortiori* à l'échelle macroscopique, nous pourrions toujours considérer que nous nous plaçons à de très grandes distances du dipôle.

L'*approximation dipolaire* consiste à étudier un dipôle à des distances très supérieure à sa taille.

- ✧ Le but, dans un premier temps, va être de trouver le potentiel  $V_{\text{dip}}$  et le champ  $\vec{E}_{\text{dip}}$  créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire.

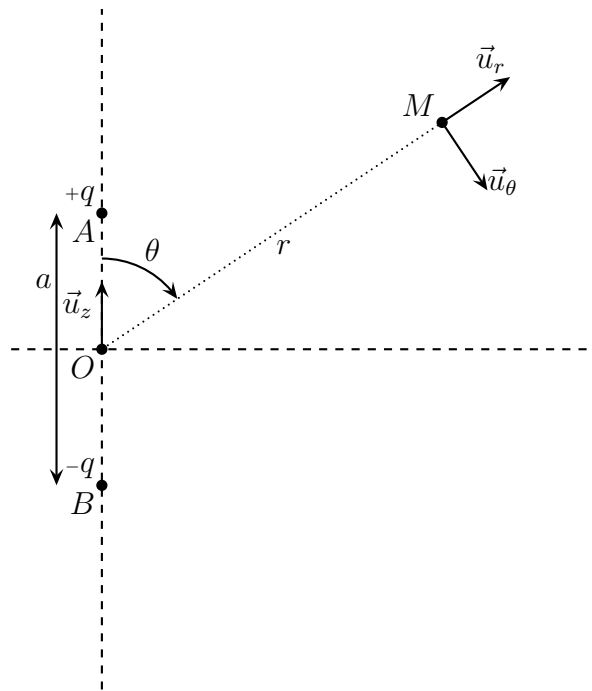
## I.2 – Des champs plus faibles

### I.2.i – analyse

- ✧ Le dipôle est une distribution de type disque puisqu'elle n'admet qu'une invariance par rotation et pas d'invariance par translation.
- ✧ Ici nous pouvons utiliser le repérage cylindrique mais nous allons plutôt utiliser le repérage sphérique car nous savons déjà que l'intérêt du dipôle est d'être utilisé à très grande distance, *ie.* à une distance telle qu'il semble être ponctuel.
- ✧ Nous pouvons donc en déduire que le potentiel ne dépend pas de l'angle  $\varphi$  et que le champ n'en dépendra pas non plus :

$$V(r, \theta, \varphi) \quad \text{et} \quad \vec{E}(r, \theta, \varphi)$$

- ✧ Représentons la situation dans un plan méridien avec  $M$  quelconque.



◇  $M$  étant quelconque :

- le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie des sources
- donc le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie du champ  $\vec{E}$
- donc  $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$  est tangent à  $\mathcal{P}$
- donc  $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$  est porté par  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ .

◇ Ici il n'y a pas assez d'invariance, nous allons donc d'abord calculer le potentiel pour ensuite en déduire le champ grâce à la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ .

◇ Les grandeurs pertinentes :  $q$  pour la distribution,  $a$  pour la géométrie et  $\varepsilon_0$  pour la structure.

### I.2.ii – d'abord le potentiel

◇ Il s'agit du potentiel créé par deux charges donc cela donne tout de suite :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\overrightarrow{P_i M}\|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 BM}$$

◇ Calculons maintenant  $\frac{1}{AM}$  et, pour cela, passons par  $AM^2$  :

$$\begin{aligned} AM^2 &= \overrightarrow{AM}^2 = \left( \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \right)^2 \\ &= \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} = AO^2 + OM^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{a^2}{4} + r^2 + 2 \times \frac{a}{2} \times r \times \cos(\pi - \theta) = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times r \times \cos \theta \\ &= r^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \end{aligned}$$

◇ Tenons compte maintenant de l'approximation dipolaire  $r \gg a$  qui nous permet de faire un développement limité au premier ordre du résultat précédent avec  $\frac{a}{r}$  d'ordre 1 et  $\frac{a^2}{r^2}$  d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{AM} &= \left(AM^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)\end{aligned}$$

◇ Nous trouvons de même

$$BM^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

◇ Puis avec l'approximation dipolaire

$$\frac{1}{BM} = \left(AM^2\right)^{-1/2} \stackrel{\text{DL}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$$

◇ Il n'y a plus qu'à rassembler le tout :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{1}{r} + \frac{a}{2r} \cos \theta - \frac{1}{r} + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$$

◇ Et finalement nous aboutissons à

$$V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le potentiel dipolaire statique décroît en  $\frac{1}{r^2}$ .

### I.2.iii – puis le champ électrostatique

◇ Utilisons la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  qui s'écrit ici, en coordonnées sphériques :

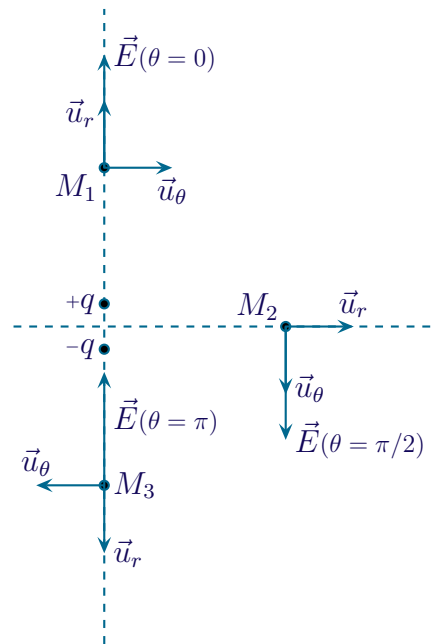
$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}}_{=0} \vec{u}_\varphi$$

◇ Nous trouvons ainsi :

$$\vec{E} = -\frac{2qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{1}{r} \times \frac{-qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Le champ électrostatique dipolaire décroît en  $\frac{1}{r^3}$ .

◇ Regardons ce que cela donne qualitativement.



- ◇ Nous pouvons tout d'abord constater que le champ « fuit » les charges positives.
- ◇ De plus à  $r = r_0$  fixé, nous pouvons constater que le champ est deux fois plus intense dans l'axe du dipôle que dans le plan médiateur.
- ◇ Enfin nous pouvons aussi remarquer que pour  $\theta = \pi/2$  le champ n'est porté que par  $\vec{u}_\theta$ . C'est tout à fait normal étant donné que le plan médiateur est un plan d'antisymétrie des sources donc un plan d'antisymétrie du champ.

### I.2.iv – représentation topographique

- ◇ Cherchons l'expression analytique des isopotentiellles et des lignes de champ.

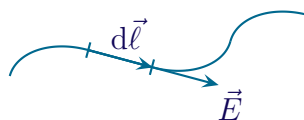
#### ★ les isopotentiellles

- ◇ Une isopotentielle est telle que  $V(M) = V_0 = C^{\text{te}}$ .
- ◇ Ici nous allons chercher  $r(\theta)$  tel que sur la courbe  $r(\theta)$  nous ayons  $V = V_0$ . Cela donne

$$V_0 = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \rightsquigarrow r^2 = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 V_0} \rightsquigarrow r(\theta) = \pm \sqrt{\frac{q a |\cos \theta|}{4 \pi \varepsilon_0 |V_0|}}$$

#### ★ les lignes de champ

- ◇ Une ligne de champ est telle qu'en tout point elle soit tangente au champ.



- ◇ Nous avons donc en tout point  $d\vec{\ell} = \lambda \vec{E}$  avec  $\lambda$  **totalemt** inconnu (et inintéressant en plus!).
- ◇ Comme  $d\vec{\ell}$  est un déplacement élémentaire en sphérique nous pouvons écrire

$$d\vec{\ell} = \lambda \vec{E} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

✧ Cela donne tout d'abord

$$dr = \lambda E_r = \lambda \times \frac{2 q a \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad r d\theta = \lambda E_\theta = \lambda \times \frac{q a \sin \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^3}$$

✧ En divisant ces deux relations pour éliminer  $\lambda$  nous obtenons

$$\frac{dr}{r d\theta} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

✧ Il s'agit d'une équation différentielle à variable séparables déjà séparée que nous pouvons primitiver

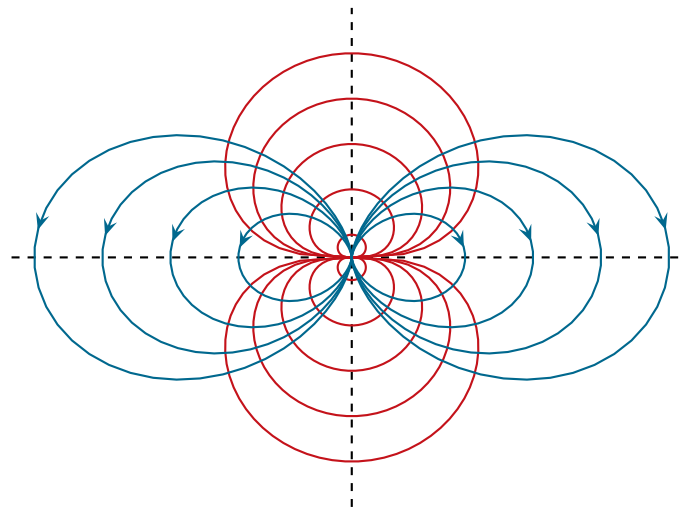
$$\ln \frac{r}{r_0} = 2 \ln |\sin \theta| \quad \rightsquigarrow \quad \frac{r}{r_0} = \sin^2 \theta \quad \rightsquigarrow \quad r = r_0 \sin^2 \theta$$

☞ *Remarque* : il est bien sûr totalement exclu d'apprendre ces expressions par cœur. Ces démonstrations ont été faites pour la méthode, non pour le résultat.

### ★ graphiquement

✧ Sont tracées ci-dessous dans l'approximation dipolaire :

- ➔ en rouge les isopotentielles
- ➔ en bleu les lignes de champ



✧ Nous pouvons constater que les différentes lignes se coupent bien à angle droit.

## I.3 – Le tout en écriture intrinsèque

### I.3.i – loi

#### ★ objectif

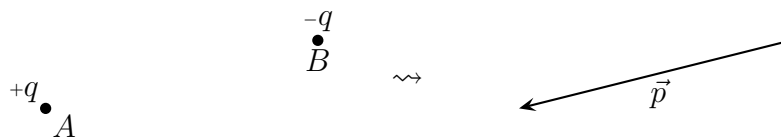
- ✧ Le problème de l'expression  $V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$  est qu'elle dépend du repérage par l'intermédiaire de  $r$  et  $\theta$ .
- ✧ De plus cette loi dépend de  $a$  qui n'est pas une grandeur intéressante car à grande distance le dipôle est véritablement ponctuel !



★ **moment dipolaire**

Le *moment dipolaire* d'un dipôle de charge  $q_A$  en  $A$  et  $q_B$  en  $B$  avec  $q_A + q_B = 0$  s'écrit :

$$\vec{p} \triangleq q_A \overrightarrow{BA} = q_B \overrightarrow{AB}$$



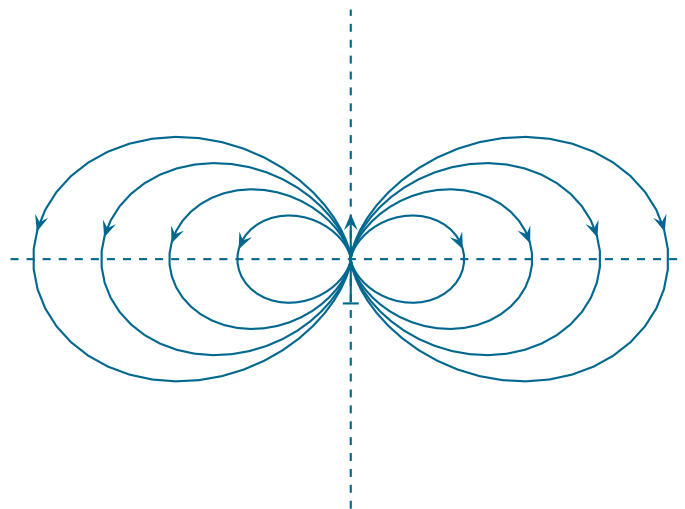
Un moment dipolaire s'exprime en C.m.

◇ Comme  $q_A = -q_B$ , nous avons

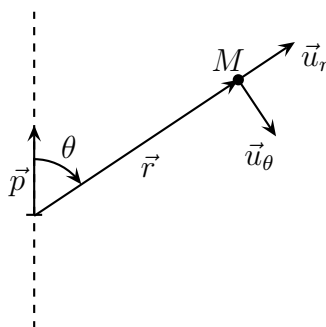
$$q_A \overrightarrow{BA} = (-q_B) \overrightarrow{BA} = q_B \overrightarrow{AB}$$

Le moment dipolaire est intrinsèque au dipôle.

◇ Quand nous superposons le moment dipolaire aux lignes de champs, nous pouvons voir que ces dernières « sortent » dans le sens de  $\vec{p}$ .

★ **le potentiel en écriture intrinsèque**

◇ Commençons par faire un schéma.



◇ Nous voyons alors tout de suite

$$q a \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \quad \rightsquigarrow \quad V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi \varepsilon_0 r^3}$$

En écriture intrinsèque, le potentiel créé par un dipôle  $\vec{p}$  situé en  $D$  s'écrit

$$V_{\text{dip}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{DM}}{4 \pi \varepsilon_0 D M^3} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi \varepsilon_0 r^3}$$

### ★ le champ en écriture intrinsèque

◇ Commençons par réécrire le champ avec le moment dipolaire.

$$\vec{E} = \frac{q a}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) = \frac{p}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

◇ Remarquons ensuite que  $\vec{p} = p \cos \theta \vec{u}_r - p \sin \theta \vec{u}_\theta$ .

◇ Nous pouvons alors écrire

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \times (3 p \cos \theta \vec{u}_r - p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \times (3 p \cos \theta \vec{u}_r - \vec{p})$$

◇ Et avec  $p \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r$  nous arrivons à :

$$\vec{E} = \frac{3 (\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} = \frac{3 (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{4 \pi \varepsilon_0 r^5}$$

◇ Ce résultat n'est pas à connaître, mais à savoir reconnaître et, surtout, à savoir qu'il existe.

### I.3.ii – valeurs numériques

◇ Étant donnés les ordres de grandeur des tailles et des charges des charges des molécules, leurs moments dipolaires vaudront à peu près

$$p = q a = e \times r_0 = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29}$$

Pour les molécules, le moment dipolaire est exprimé en debye (D) avec

$$1 \text{ D} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

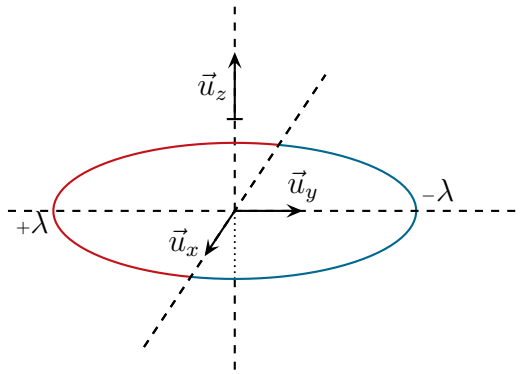
◇ Quelques valeurs :

- pour  $\text{H}_2\text{O}$  :  $p = 1,85 \text{ D}$
- pour  $\text{NH}_3$  :  $p = 1,5 \text{ D}$
- pour  $\text{HCl}$  :  $p = 1,08 \text{ D}$

## I.4 – Idoinotons

### I.4.i – situation

◇ Considérons un cercle globalement neutre chargé pour moitié par la charge linéique  $+\lambda$  et pour moitié opposée par la charge linéique  $-\lambda$ .



◇ Le but va être de chercher le champ créé par cette distribution en tout point de l'axe puis d'interpréter le résultat en terme de dipôle.

◇ Analyse physique :

→ Ici la distribution n'est d'aucun type puisqu'il n'y a aucune invariance. Toutefois, vu que les charges se répartissent sur un cercle nous utiliserons un repérage polaire pour un point situé dessus.

→ Soit  $M$  un point de l'axe :

→ Le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  contenant l'axe du cercle et passant entre les charges  $+λ$  et  $-λ$  est un plan d'antisymétrie des charges

→ donc le plan  $\mathcal{P}$  est un plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$

→ donc  $E(M \in \mathcal{P})$  est orthogonal à ce plan  $\mathcal{P}$

→ donc  $E(M \in \mathcal{P})$  est porté par  $\vec{u}_y$ .

→ Finalement, pour  $M$  sur l'axe, nous avons  $x_M = 0$ ,  $y_M = 0$  et nous allégerons l'écriture en notant  $V_{\text{axe}}(z) \stackrel{\text{not}}{=} V(0,0,z)$  et  $E_{\text{axe}}(z) = E_y(0,0,z)$ .

→ les grandeurs pertinentes sont  $λ$  pour la distribution,  $R$  pour la géométrie et  $\varepsilon_0$  pour la structure

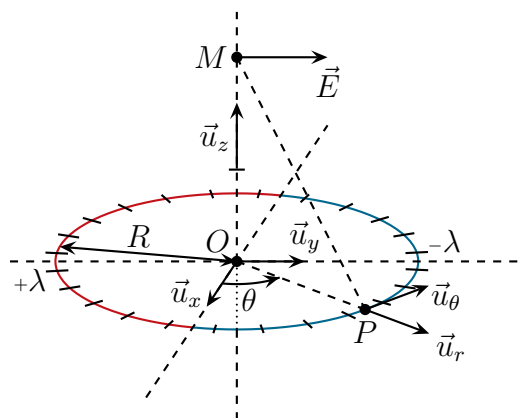
◇ Analyse technique :

→ le repérage est déjà choisi

→ il n'y a pas suffisamment d'invariance pour utiliser le théorème de GAUSS, nous allons donc utiliser la loi de superposition en commençant par le potentiel.

### I.4.ii – d'abord le potentiel

◇ Commençons par découper la distribution en petits morceaux.



◇ Comme il n'y a pas de charges à l'infini, nous pouvons utiliser la loi

$$V_{\text{axe}}(M) = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\lambda(P) d\ell_P}{4 \pi \varepsilon_0 PM}$$

- ✧ Le signe « somme » se note avec un rond car la distribution est fermée.
- ✧ Comme il y a deux zones différentes, nous allons séparer le cercle  $\mathcal{C}$  en deux morceaux : la moitié  $\mathcal{C}^\oplus$  sur laquelle il y a la charge  $+\lambda$  et l'autre moitié  $\mathcal{C}^\ominus$  sur laquelle il y a la charge  $-\lambda$ .
- ✧ Nous avons donc, en séparant les sommes

$$\begin{aligned}
 V_{\text{axe}}(z) &= \int_{P \in \mathcal{C}^\oplus} \frac{+\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM} + \int_{P \in \mathcal{C}^\ominus} \frac{-\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 PM} \\
 &= \int_{P \in \mathcal{C}^\oplus} \frac{+\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} - \int_{P \in \mathcal{C}^\ominus} \frac{+\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \\
 &= \frac{+\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \times \left( \int_{P \in \mathcal{C}^\oplus} d\ell_P - \int_{P \in \mathcal{C}^\ominus} d\ell_P \right) = \frac{+\lambda d\ell_P}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \times (\pi R - \pi R)
 \end{aligned}$$

- ✧ Et nous trouvons  $V_{\text{axe}}(z) = C^{\text{te}} = 0$ .
- ✧ Et malgré la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  nous avons  $\vec{E} \neq \vec{0}$ .
- ✧ La raison est que si nous avons  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  nous n'avons **pas**  $\vec{E}_{\text{axe}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_{\text{axe}}$ .
- ✧ En effet ici nous avons déterminé  $V_{\text{axe}}(z) = V(0,0,z)$ .
- ✧ Nous savons de plus que le champ  $\vec{E}$  n'est porté que par  $\vec{u}_y$  donc la seule chose qui nous intéresse c'est de pouvoir calculer  $\frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z)$ .
- ✧ Or nous ne pouvons pas faire ce calcul puisque nous n'avons pas cherché la dépendance en  $y$  mais seulement celle en  $z$ .
- ✧ Nous pouvons aisément généraliser le résultat suivant :

Un plan d'antisymétrie des charges est un plan d'isopotentielle nulle.

### I.4.iii – ensuite le champ

- ✧ Nous n'avons guère le choix, nous allons utiliser la loi de superposition des champs, en séparant, comme pour le potentiel, en deux parties  $\mathcal{C}^\oplus$  et  $\mathcal{C}^\ominus$

$$\vec{E}_{\text{axe}}(z) = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\lambda(P) d\ell_P \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} = \oint_{P \in \mathcal{C}^\oplus} \frac{+\lambda d\ell_P \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} + \oint_{P \in \mathcal{C}^\ominus} \frac{-\lambda d\ell_P \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3}$$

- ✧ Géométriquement, nous voyons que :

- $d\ell_P = R d\theta$
- $\overrightarrow{PM} = -R \vec{u}_r + z \vec{u}_z$
- $PM^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$
- comme nous voulons uniquement la composante sur  $\vec{u}_y$  nous pouvons d'ores et déjà ajouter

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{PM} \cdot \vec{u}_y = -R \vec{u}_r \cdot \vec{u}_y = -R \sin \theta$$

- ✧ Nous avons ainsi, en ne gardant que la composante non nulle sur  $\vec{u}_y$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{axe}} = \vec{E}_{\text{axe}}(z) \cdot \vec{u}_y &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\lambda R^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} - \int_0^{\pi} \frac{-\lambda R^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \times \left( - \int_{\pi}^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right)
 \end{aligned}$$

◇ Et ainsi :

$$\vec{E}_{\text{axe}}(z) = \frac{\lambda R^2}{\pi \varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_y$$

## I.4.iv – interprétation en terme de dipôle

### ★ champ à grande distance

◇ Plaçons nous à  $z$  tel que  $z \gg R$ .

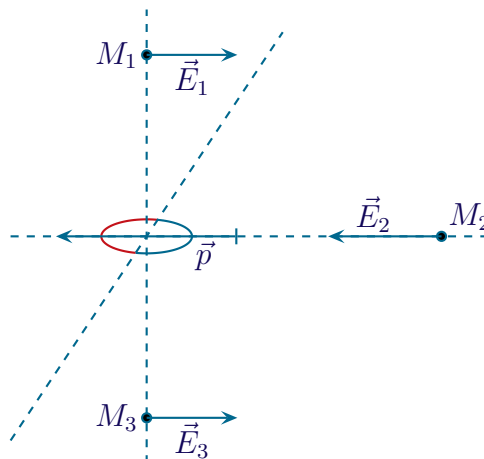
◇ Alors le champ tend vers :

$$\vec{E}_{\text{dip,axe}}(z) = \frac{\lambda R^2}{\pi \varepsilon_0 z^3} \vec{u}_y$$

◇ Nous retrouvons une décroissance en  $\frac{1}{r^3}$  ce qui est conforme à un champ dipolaire.

### ★ dipôle équivalent

◇ représentons qualitativement le champ électrique en quelques points.



◇ Précédemment nous avons trouvé l'expression suivante du champ dipolaire

$$\vec{E} = \frac{q a}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

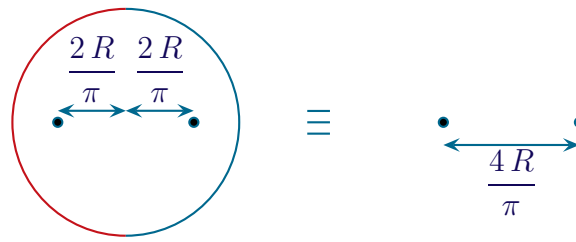
◇ Ici nous sommes dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $r = z$ .

◇ Autrement dit, pour que l'analogie soit juste, il faut :

$$\frac{q a}{4 \pi \varepsilon_0 z^3} = \frac{\lambda R^2}{\pi \varepsilon_0 z^3} \quad \rightsquigarrow \quad q a = 4 \lambda R^2$$

◇ En faisant le choix naturel de prendre  $q = \lambda \pi R$  qui correspond à la totalité de la charge  $+\lambda$  portée par  $\mathcal{C}^\oplus$ , nous arrivons à  $a = \frac{4 R}{\pi}$ .

◇ Le résultat précédent signifie qu'à **grande distance** la répartition précédente de charges se comporte comme un ensemble de deux charges ponctuelles séparées de  $a = \frac{4 R}{\pi}$ .



### ★ retrouver l'équivalence d'avance

- ◇ Il est possible de trouver le champ dipolaire créé par la distribution sans passer par le calcul exact.
- ◇ Pour cela il faut connaître à quelle dipôle (caractérisé par sa charge  $q$  et la distance  $a$ ) est équivalent la distribution.

Dans l'approximation dipolaire, le comportement d'un ensemble globalement neutre de charge est équivalent à celui de deux charges positives et négatives situées aux barycentres des charges positives et négatives et de charges les charges totales respectives.

- ◇ Nous admettrons ce résultat.
- ◇ Si les deux barycentres sont confondus<sup>1</sup>, alors le champ n'est plus dipolaire mais quadripolaire ... et c'est un autre problème.
- ◇ Regardons ce qu'il en est pour la distribution précédente.

### 🔍 trouver un barycentre

- ◇ Partons de l'expression de la cote du barycentre des masses pour deux points, barycentre appelé aussi « centre d'inertie »

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \quad \rightsquigarrow \quad z_g = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

- ◇ Nous pouvons réécrire cette somme de manière continue avec  $m_i z_i \longrightarrow dm_P z_P$ .
- ◇ Cela nous conduit à l'expression

$$z_G = \frac{\int_{P \in \mathcal{C}} z_P dm_P}{\int_{P \in \mathcal{C}} dm_P} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \times \int_{P \in \mathcal{C}} z_P dm_P$$

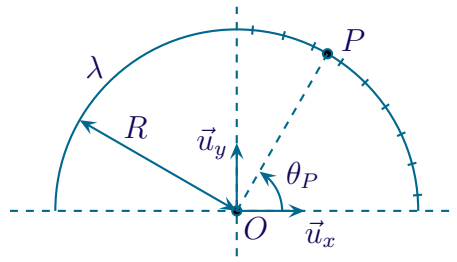
- ◇ Pour une autre grandeur extensive, ici la charge au lieu de la masse, nous avons donc directement

$$z_G = \frac{1}{q_{\text{tot}}} \times \int_{P \in \mathcal{C}} z_P dq_P$$

### 🔍 calcul et vérification

- ◇ Cherchons la cote du barycentre des charges d'un demi-cercle.

<sup>1</sup>Exemple : deux charges identiques positives sur des sommets opposés d'un carré et deux charges négatives opposées sur les autres sommets.



◇ Avec les notations précédentes, nous avons

$$\rightarrow z_P = R \sin \theta$$

$$\rightarrow dq_P = \lambda d\ell_P = \lambda R d\theta$$

$$\rightarrow q_{\text{tot}} = \lambda \pi R$$

◇ Cela nous mène à

$$z_G = \frac{1}{\lambda \pi R} \times \int_0^\pi \lambda R d\theta R \sin \theta = \frac{\lambda R^2}{\lambda \pi R} \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad \rightsquigarrow \quad z_G = \frac{2R}{\pi}$$

◇ Et nous retrouvons bien le résultat précédent à savoir que dans le cas de l'approximation dipolaire le cerceau est équivalent à deux charges  $\lambda \pi R$  séparées de  $2 \times \frac{2R}{\pi}$ .

## I.5 – Forces subies par un dipôle rigide

### I.5.i – rigidité d'un dipôle

Un dipôle est dit *rigide* lorsque la distance entre ses charges ne varie pas.



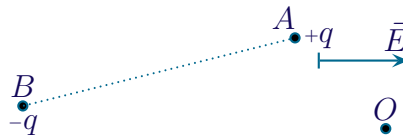
◇ Un dipôle rigide peut bouger, avancer, tourner sur lui-même, mais **pas** se déformer : tout se passe comme s'il s'agissait d'un solide.

◇ Un dipôle rigide permet de modéliser des molécules polaires.

### I.5.ii – résultante

#### ★ champ uniforme

◇ Représentons les deux charges modélisant le dipôle et calculons la résultante des forces exercées par le champ  $\vec{E}_0$  uniforme



◇ La force totale s'écrit

$$\vec{f} = -q \vec{E}(B) + (+q) \vec{E}(A) = -q \vec{E}_0 + q \vec{E}_0 = \vec{0}$$

Dans un champ électrique uniforme un dipôle électrique subit une résultante de force nulle.

★ **champ non uniforme**🌀 **loi**

✧ Pour la résultante, le début est identique

$$\vec{f} = -q \vec{E}(B) + (+q) \vec{E}(A) = -q \vec{E}(B) + q \vec{E}(A)$$

✧ Développons l'expression précédente en précisant les positions de  $B$  et  $A$

$$\vec{r}_A = \vec{OA} \quad \text{et} \quad \vec{r}_B = \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{OA} + \vec{a}$$

✧ Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \vec{f} = -q \vec{E}(\vec{r}_B) + q \vec{E}(\vec{r}_A) &= -q \vec{E}(\vec{OA} + \vec{a}) + q \vec{E}(\vec{OA}) = -q \left( E_x(\vec{OA} + \vec{a}) - E_x(\vec{OA}) \right) \vec{u}_x \\ &\quad -q \left( E_y(\vec{OA} + \vec{a}) - E_y(\vec{OA}) \right) \vec{u}_y \\ &\quad -q \left( E_z(\vec{OA} + \vec{a}) - E_z(\vec{OA}) \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

✧ Comme  $a$  est très petit devant toutes les grandeurs caractéristiques du problème (notamment celle concernant la variation du champ électrique), nous pouvons écrire

$$E_x(\vec{OA} + \vec{a}) - E_x(\vec{OA}) = dE_x = \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \cdot \vec{a}$$

✧ En effectuant cette opération sur les trois composantes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -q \begin{pmatrix} dE_x \\ dE_y \\ dE_z \end{pmatrix} = -q \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_y) \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_z) \cdot \vec{a} \end{pmatrix} \\ &= -q \times \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_y) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_z) \end{pmatrix} = -q \times \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &= - \left( q \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E} \end{aligned}$$

✧ Et avec  $\vec{p} = q \vec{a}$  nous arrivons à

La force subie par un dipôle rigide  $\vec{p}$  plongé dans un champ  $\vec{E}$  non uniforme s'écrit

$$\vec{f} = \left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$$

📱 l'opérateur  $\left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$  est bien moins difficile qu'il n'y paraît **et** sera revu en 2<sup>e</sup> année.

🛑 ne pas confondre

➔  $\left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$  qui signifie qu'il faut **d'abord** effectuer  $\left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$  et seulement **après** l'appliquer à chacune des composantes de  $\vec{E}$



→ avec  $\vec{p} \cdot \left( \overrightarrow{\text{grad}} \vec{E} \right)$  qui n'a strictement aucune signification puisque le gradient doit agir sur un champ scalaire

◇ En effectuant  $\left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$  nous trouvons

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

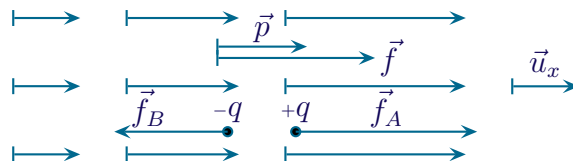
◇ Cela signifie que, tout étant développé, nous avons

$$\vec{f} = - \begin{pmatrix} p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

☕ *Remarque* : heureusement que dans les cas pratiques il y a **beaucoup** de simplifications !

### 🕒 interprétation

◇ Considérons un champ porté par  $\vec{u}_x$ , ne dépendant que de  $\vec{u}_x$  et un dipôle  $\vec{p}$  porté lui aussi par  $\vec{u}_x$ .



◇ Nous avons alors

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x \rightsquigarrow \left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) = p_x \frac{d}{dx} \rightsquigarrow f_x = p_x \frac{dE_x}{dx}$$

◇ Dans le cas représenté  $p_x > 0$  et  $\frac{dE_x}{dx} > 0$  donc  $f_x > 0$  : le dipôle est attiré vers la droite.

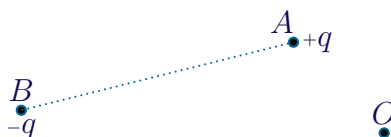
◇ Au niveau des charges nous pouvons constater que la charge positive est légèrement plus à droite que la charge négative donc elle subit une force légèrement plus intense.

Un dipôle orienté dans le sens du champ a tendance à se déplacer vers les zones de champ intense.

### I.5.iii – moment

#### ★ champ uniforme

◇ Reprenons la situation précédente et considérons le champ uniforme.



◇ Calculons le moment par rapport à  $O$  des forces exercées par le champ électrique

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{f}) &= \vec{OA} \wedge \vec{f}_A + \vec{OB} \wedge \vec{f}_B = \vec{OA} \wedge (q \vec{E}_0) + \vec{OB} \wedge (-q \vec{E}_0) \\ &= q (\vec{OA} - \vec{OB}) \wedge \vec{E}_0 = q \vec{BA} \wedge \vec{E}_0\end{aligned}$$

Le moment subit par un dipôle plongé dans un champ  $\vec{E}$  s'écrit  

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

◇ Remarquons que ce moment est indépendant du point par rapport auquel il est calculé.

### ★ champ non uniforme

- ◇ Il n'est pas utile de faire le cas où le champ n'est pas uniforme car le moment n'est pas nul avec un champ uniforme.
- ◇ La situation était différente pour le cas de la résultante qui était nulle avec un champ uniforme : nous n'avions pas eu le choix que de regarder le cas non uniforme.

### ★ équilibre, interprétation

◇ Un dipôle est à l'équilibre lorsque le moment qu'il subit est nul.

Un dipôle subit un moment nul lorsque son moment dipolaire  $\vec{p}$  est dans la même direction que le champ électrique.

◇ Prenons un dipôle aligné avec le champ mais de sens opposé et écartons-le de sa position d'équilibre.



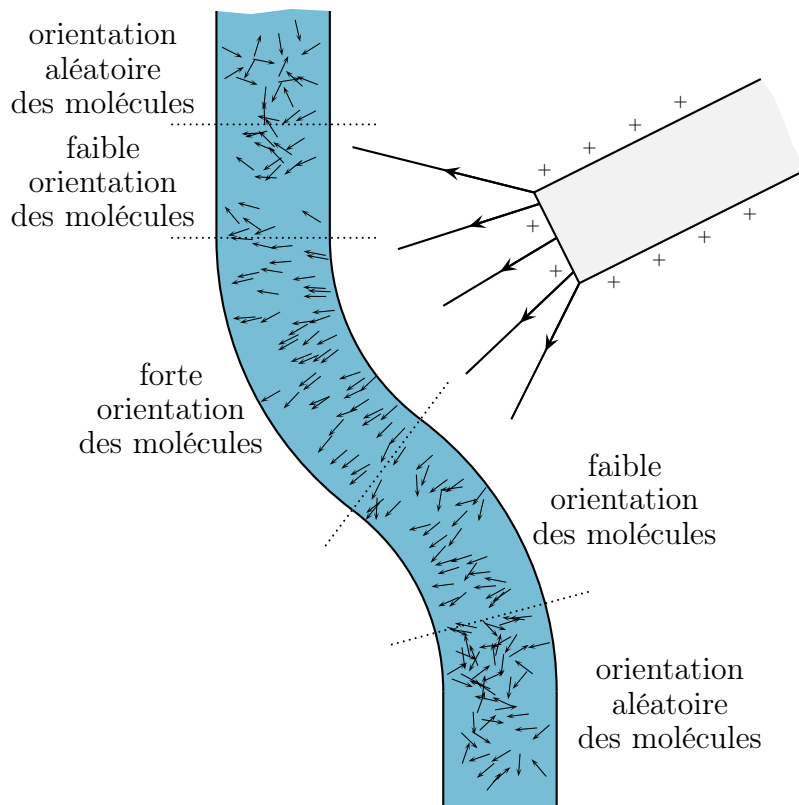
- ◇ Nous voyons que le moment subi a tendance à rabattre encore davantage le dipôle sur le champ : la position d'équilibre est instable.
- ◇ Pour un dipôle initialement dans le même sens que  $\vec{E}$  c'est le contraire : la position d'équilibre est stable.



Les dipôles ont tendance à pointer dans la même direction et dans le même sens que le champ  $\vec{E}$ .

## I.5.iv – bilan

- ◇ L'eau est composé de molécules polaires autrement dit, de dipôles.
- ◇ Prenons un bâton de plastique et électrisons-le par frottement.
- ◇ En rapprochant le bâton de l'eau, nous constatons que celle-ci est attirée.



✧ En fait il se passe les phénomènes suivants :

- les molécules d'eau arrivent de manière totalement désordonnée
- lorsque le champ électrique commence à se faire sentir, les molécules ont tendance à s'orienter dans la direction et le sens du champ
- les molécules plus ou moins alignées et dans le sens de  $\vec{E}$  sont attirées vers les zones de sens intenses c'est-à-dire vers le bâton : le filet d'eau est dévié
- la gravité aidant les molécules d'eau s'éloignent des zones de champ et les molécules perdent leurs orientations

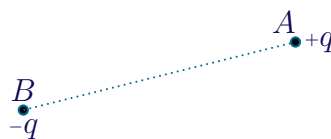
## I.6 – Point de vue énergétique pour un dipôle rigide

### I.6.i – l'énergie potentielle ...

L'énergie potentielle que possède un dipôle rigide électrostatique s'écrit

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

✧ La démonstration est simple, elle consiste à sommer les énergies potentielles des deux charges.



✧ Nous avons tout d'abord

$$E_p(\text{dip}) = E_p(A) + E_p(B) = qV_A + (-q)V_B = q(V_A - V_B) = qdV_{BA}$$

✧ À l'aide de la relation fondamentale du gradient et de la définition de  $v$  nous pouvons écrire

$$dV_{BA} = (\overrightarrow{\text{grad}} V) \cdot \overrightarrow{BA} \quad \rightsquigarrow \quad E_{\text{p(dip)}} = q \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{p} \cdot -\vec{E}$$

### I.6.ii – ... permet de retrouver la force

✧ Partons de la définition d'une force conservative

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{\text{p}} = -\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

✧ Pour que cette relation soit égale à  $-\left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{E}$  il **faut** que  $\vec{p} = \overrightarrow{C^{\text{te}}}$ .

✧ Nous pouvons donc réécrire la force subie par un dipôle sous la forme

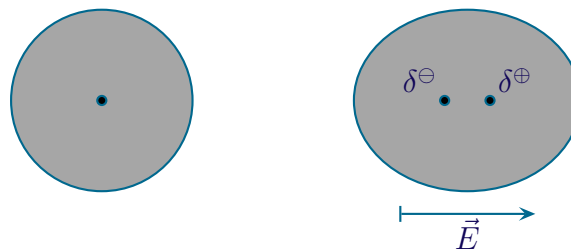
$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})|_{\vec{p}=\overrightarrow{C^{\text{te}}}}$$

✧ Cette expression n'est pas forcément plus intéressante que l'autre, elle n'est donc donnée qu'à titre indicatif.

## I.7 – Cas du dipôle non rigide

### I.7.i – molécule déformable

- ✧ Il s'agit d'une molécule dont la répartition des électrons est suffisamment symétrique pour que le barycentre associé se confonde avec le noyau.
- ✧ Dans un champ électrique, il y a une légère déformation du nuage électronique ce qui permet à la molécule d'acquérir un moment dipolaire.



Le *coefficient de polarisabilité*  $\alpha$  d'une entité (atome, molécule, ...) est défini par

$$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$$

$\alpha$  est en  $\text{m}^3$

✧ La dimension de  $\alpha$  se retrouve aisément à partir de celle de  $E$  :

$$E = \frac{p}{\alpha \varepsilon_0} \equiv \frac{(\text{C}) \times (\text{m})}{\varepsilon_0 (\text{m})^3} \equiv \frac{(\text{C})}{\varepsilon_0 (\text{m})^2}$$

- ✧ Il s'agit bien là de la dimension du champ électrique.
- ✧ Comme les dimensions à l'échelle des molécules sont de l'ordre de  $10^{-10}$  m nous pouvons en déduire que pour les molécules  $\alpha \simeq 10^{-30} \text{ m}^3$ .

**I.7.ii – la force peut se négocier ...**

- ✧ En reprenant le même raisonnement que celui effectué pour le dipôle rigide, le lecteur pourra vérifier que la force s'écrit de la même manière.

La force subie par un dipôle  $\vec{p}$  plongé dans un champ  $\vec{E}$  non uniforme s'écrit

$$\vec{f} = \left( \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$$

**I.7.iii – ... mais pas l'énergie potentielle**

- ✧ Prenons le cas simple où le champ n'est porté que par  $\vec{u}_x$ .  
 ✧ Nous avons alors  $\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$  soit  $p_x = \alpha \varepsilon_0 E_x$ .  
 ✧ Ainsi la force s'écrit

$$f_x = p_x \frac{dE_x}{dx} = \alpha \varepsilon_0 E_x \frac{dE_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 E_x^2 \right) = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{2} p_x E_x \right)$$

- ✧ Et cette relation est bien différente de

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \quad \text{avec} \quad E_p = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E}$$

## II – Le dipôle magnétostatique

### II.1 – Modélisation

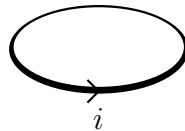
#### II.1.i – origine atomique

- ◇ Bien qu'il s'agisse de mécanique quantique, les électrons au sein d'un atome possèdent une sorte de mouvement.
- ◇ Or une charge en mouvement n'est autre qu'un courant électrique.
- ◇ Dans ces conditions, en tant que « courant électrique », l'électron sera à la fois source de champ magnétique et subira des forces de la part de celui-ci.
- ◇ Insistons : le concept de mouvement n'existe pas à l'échelle atomique. C'est seulement que, pour ce que nous allons traiter, « tout se passe comme si ». Alors faisons « comme si ».

#### II.1.ii – modèle simple

##### ★ une boucle de courant

- ◇ Nous modéliserons le « mouvement » d'un électron par un mouvement circulaire.
- ◇ Dans ces conditions, tout se passe comme s'il se comportait comme une spire circulaire de courant.



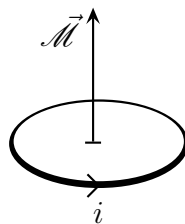
- ◇ Dans la suite, nous allons nous concentrer sur cette spire circulaire de courant en oubliant qu'il s'agit en fait d'un électron qui ne bouge pas vraiment mais que tout se passe comme si.

##### ★ grandeur caractéristique

Le *moment dipolaire magnétique* d'un dipôle magnétique s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}} = i \times \vec{S}$$

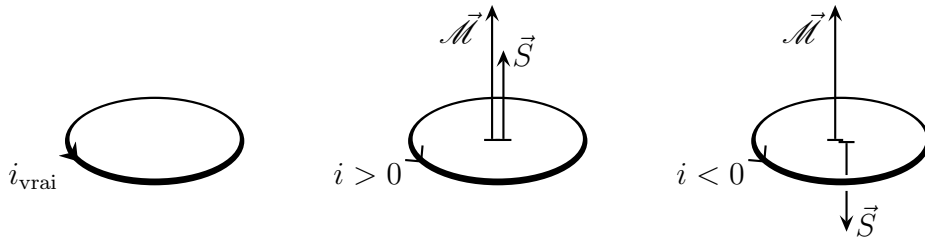
où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de la boucle de courant pris dans le sens de  $i$ .



- ◇ Il faut remarquer la différence de vocabulaire entre « moment dipolaire » et « moment dipolaire magnétique ».
- ◇ Pour le premier, il faudrait en toute rigueur parler de « moment dipolaire électrique » sauf que son utilisation est si courante que l'usage autorise le raccourci « moment dipolaire » en sous-entendant « électrique » ;
- ◇ En revanche, pour le dipôle magnétique, il faudra **systématiquement** préciser « magnétique ». L'usage autorise le raccourci « moment magnétique » où cette fois est sous-entendu l'aspect « dipolaire ».

Le moment dipolaire magnétique est une grandeur intrinsèque.

- ◇ Considérons une boucle de courant dans laquelle circule un courant dont nous connaissons le sens et cherchons le moment magnétique que cela donne suivant le sens dans lequel nous fléchons la boucle.



- ◇ Nous voyons que dans les deux cas nous avons le même moment magnétique ce qui confirme bien le caractère intrinsèque de cette grandeur.

### ★ approximation dipolaire

- ◇ Tout comme le dipôle électrique, le dipôle magnétique va être étudié à grande distance.

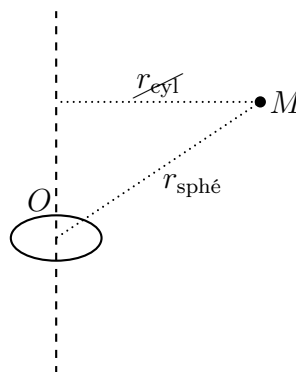
L'approximation dipolaire pour le dipôle magnétique consiste à étudier le dipôle à des distances très grandes devant le rayon de la boucle de courant.

## II.2 – Source de champ

- ◇ L'objectif est de déterminer le champ magnétique dans tout l'espace créé par un dipôle magnétique à grande distance.

### II.2.i – situation, analyse

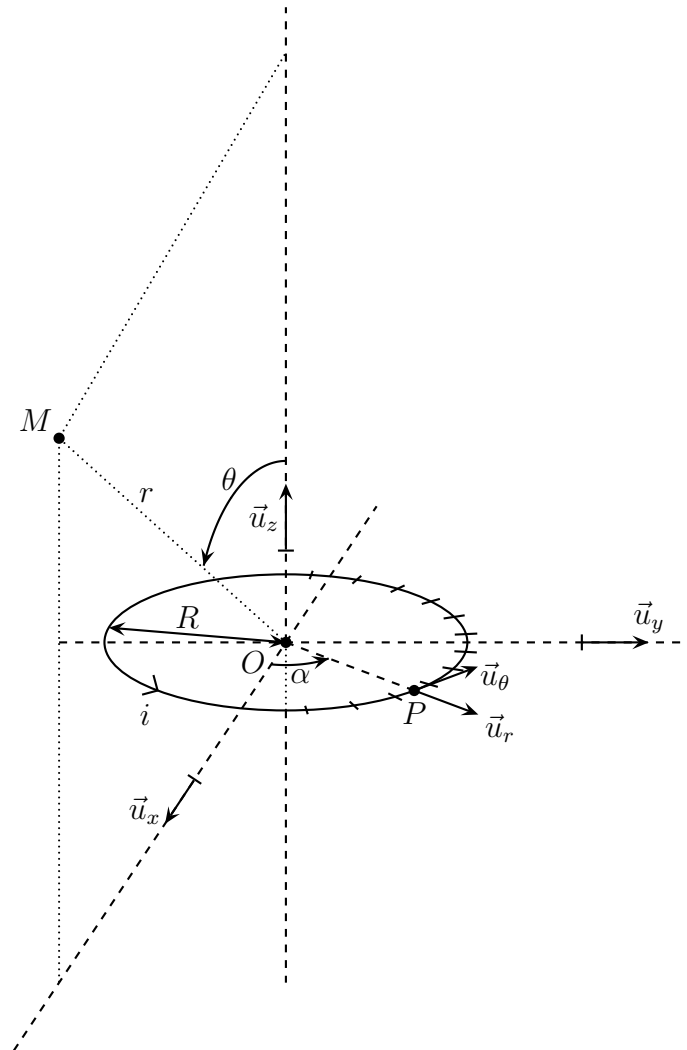
- ◇ Nous avons, comme pour le dipôle électrique, une distribution de type « disque » qui n'admet qu'une seule invariance par rotation.
- ◇ Toutefois, comme nous allons étudier le dipôle à grande distance, celui-ci sera représenté par un *point* et, dans ces conditions, la distance  $r_{\text{sphé}}$  paraît bien plus pertinente que la distance  $r_{\text{cyl}}$ .



- ◇ Nous allons donc choisir les coordonnées sphériques.
- ◇ Avec l'invariance par rotation, nous pouvons d'ores et déjà écrire que  $\vec{B}(r, \theta, \varphi)$ .
- ◇ Les grandeurs pertinentes sont  $i$  pour la distribution,  $R$  pour la géométrie et  $\mu_0$  pour la structure.
- ◇ Étant donné le peu d'invariances, nous pouvons mettre de côté toute autre méthode que la loi de BIOT et SAVART.

## II.2.ii – une intégrale vectorielle ...

◇ Commençons par bien poser les choses en prenant notamment le point  $M$  dans le plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ , ce qui ne particularise pas le résultat.



◇ La loi de BIOT et SAVART s'écrit

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

◇ Notons  $(x, 0, z)$  les coordonnées de  $M$  et  $(X, Y, 0)$  les coordonnées de  $P$ .

◇ De là, nous avons tout d'abord

$$d\vec{\ell}_P = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - X \\ 0 - Y \\ z \end{pmatrix}$$

◇ Nous pouvons alors exprimer  $PM^2$

$$\begin{aligned} PM^2 &= (x - X)^2 + (-Y)^2 + z^2 &= x^2 + X^2 - 2xX + Y^2 + z^2 \\ &= (x^2 + z^2) + (X^2 + Y^2) - 2xX &= r^2 + R^2 - 2xX \end{aligned}$$



✧ Nous avons ainsi, en utilisant l'approximation dipolaire  $r \gg R$

$$\begin{aligned}
 PM^{-3} &= (PM^2)^{-3/2} \quad \left(r^2 + R^2 - 2xX\right)^{-3/2} \\
 &= r^{-3} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2xX}{r^2}\right)^{-3/2} \stackrel{\text{DL}}{=} r^{-3} \left(1 + \left(-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2xX}{r^2}\right)\right)\right) \\
 &= r^{-3} \left(1 + \frac{3xX}{r^2}\right)
 \end{aligned}$$

✧ Nous avons de plus

$$d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x - X \\ -Y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z dY \\ -z dX \\ -Y dX - (x - X) dY \end{pmatrix}$$

✧ Et donc

$$\frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3xX}{r^2}\right) \times \begin{pmatrix} z dY \\ -z dX \\ -Y dX - (x - X) dY \end{pmatrix}$$

✧ Finalement le champ magnétique s'écrit

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{(M)} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \times \left( \oint_{P \in \mathcal{C}} \left(1 + \frac{3xX}{r^2}\right) z dY \vec{u}_x \right. \\
 &\quad + \oint_{P \in \mathcal{C}} \left(1 + \frac{3xX}{r^2}\right) (-z dX) \vec{u}_y \\
 &\quad \left. + \oint_{P \in \mathcal{C}} \left(1 + \frac{3xX}{r^2}\right) \times (-Y dX - (x - X) dX) \vec{u}_z \right)
 \end{aligned}$$

## II.2.iii – ... donne 7 intégrales scalaires ...

### ★ décompte

✧ Seuls  $X$  et  $Y$  varient puisque relatifs à  $P$  alors que  $x$  et  $z$  sont constants.

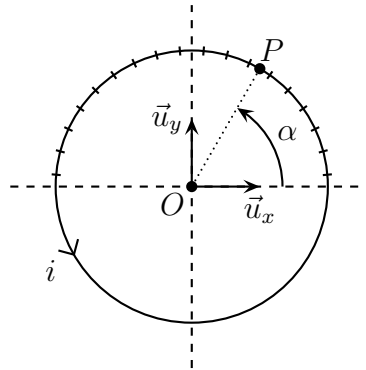
✧ Nous avons donc 7 intégrales à calculer :

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \text{sur } \vec{u}_x : I_1 &= \oint_{P \in \mathcal{C}} dY \text{ et } I_2 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X dY \\
 \rightarrow \text{sur } \vec{u}_y : I_3 &= \oint_{P \in \mathcal{C}} dX \text{ et } I_4 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X dX \\
 \rightarrow \text{sur } \vec{u}_z : I_5 &= \oint_{P \in \mathcal{C}} Y dX ; I_6 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X Y dX \text{ et } I_7 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X^2 dY
 \end{aligned}$$

## ★ calcul

- ◇ Maintenant qu'il faut *effectivement* les calculer, il est évident que le repérage polaire pour  $P$  est plus adapté.
- ◇ Avec le schéma ci-dessous, nous avons donc :

$$\begin{cases} X = R \cos \alpha \\ Y = R \sin \alpha \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} dX = -R \sin \alpha d\alpha \\ dY = R \cos \alpha d\alpha \end{cases}$$



- ◇ Nous pouvons donc procéder aux substitutions et aux calculs.
- ◇ Pour  $I_1$ , nous avons

$$I_1 = \oint_{P \in \mathcal{C}} dY = \int_0^{2\pi} R \cos \alpha d\alpha = 0$$

- ◇ Pour  $I_2$ , nous avons, en notant  $S = \pi R^2$

$$I_2 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X dY = \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{R^2}{2} \times 2\pi = S$$

- ◇ Pour  $I_3$

$$I_3 = \oint_{P \in \mathcal{C}} dX = \int_0^{2\pi} -R \sin \alpha d\alpha = 0$$

- ◇ Pour  $I_4$

$$I_4 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X dX = \int_0^{2\pi} -R^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \left[ \frac{R^2}{2} \cos^2 \alpha \right]_0^{2\pi} = 0$$

- ◇ Pour  $I_5$ , toujours avec  $S = \pi R^2$

$$I_5 = \oint_{P \in \mathcal{C}} Y dX = \int_0^{2\pi} -R^2 \sin^2 \alpha d\alpha = -S$$

- ◇ Pour  $I_6$  ensuite

$$I_6 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X Y dX = \int_0^{2\pi} -R^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha d\alpha = \left[ -\frac{R^3}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{2\pi} = 0$$

- ◇ Et enfin pour  $I_7$

$$I_7 = \oint_{P \in \mathcal{C}} X^2 dY = \int_0^{2\pi} -R^3 \cos^3 \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} -R^3 (1 - \sin^2 \alpha) \cos \alpha d\alpha = 0$$

★ **rassemblement**

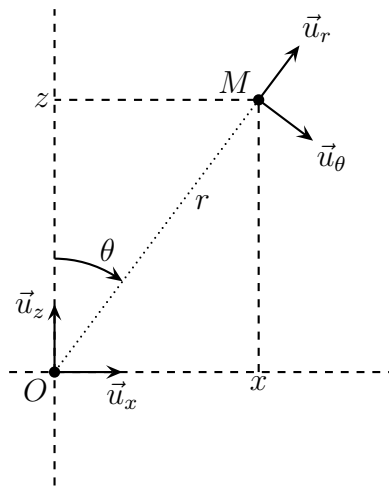
◇ Finalement il reste

$$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0 i}{4 \pi r^3} \times \begin{pmatrix} \frac{3x}{r^2} z \times S \\ 0 \\ +S + S - \frac{3x^2}{r^2} \times S \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 i S}{4 \pi r^3} \times \begin{pmatrix} \frac{3xz}{r^2} \\ 0 \\ +2 - \frac{3x^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

## II.2.iv – ... pour un résultat déjà vu

◇ Il faut maintenant réécrire tout cela avec les coordonnées choisies initialement à savoir les coordonnées sphériques.

◇ Représentons-les.



◇ Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \vec{u}_x &= \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta \\ &= \frac{x}{r} \vec{u}_r + \frac{z}{r} \vec{u}_\theta \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \vec{u}_z &= \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta \\ &= \frac{z}{r} \vec{u}_r - \frac{x}{r} \vec{u}_\theta \end{aligned} \quad \text{et}$$

◇ Cela donne donc, en remplaçant

$$\begin{aligned} \vec{B}_{(M)} &= \frac{\mu_0 i S}{4 \pi r^3} \times \left( \frac{3xz}{r^2} \times \left( \frac{x}{r} \vec{u}_r + \frac{z}{r} \vec{u}_\theta \right) + \left( 2 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \times \left( \frac{z}{r} \vec{u}_r - \frac{x}{r} \vec{u}_\theta \right) \right) \\ &= \frac{\mu_0 i S}{4 \pi r^3} \times \left( \left( \frac{3xz}{r^2} + \frac{2z}{r} - \frac{3xz}{r^2} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{3x(z^2 + x^2)}{r^3} - \frac{2x}{r} \right) \vec{u}_\theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 i S}{4 \pi r^3} \times \left( \frac{2z}{r} \vec{u}_r + \frac{x}{r} \vec{u}_\theta \right) \end{aligned}$$

◇ Ce qui donne, en notant  $\mathcal{M} = i S$

$$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4 \pi r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Fonctionnellement les champs dipôlaire magnétique et électrique sont rigoureusement identiques.

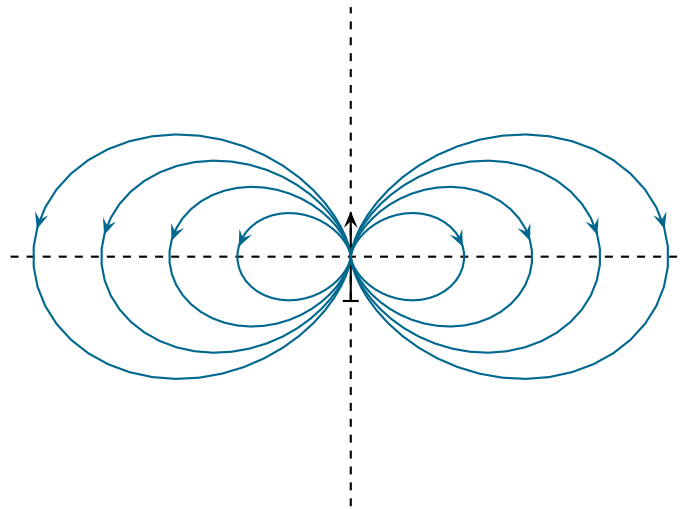
◇ En particulier nous pouvons écrire tout de suite en écriture intrinsèque

$$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

## II.2.v – topographie

### ★ avec l'approximation dipolaire

◇ Le champ magnétique étant identique, nous pouvons tracer immédiatement les lignes de champ.

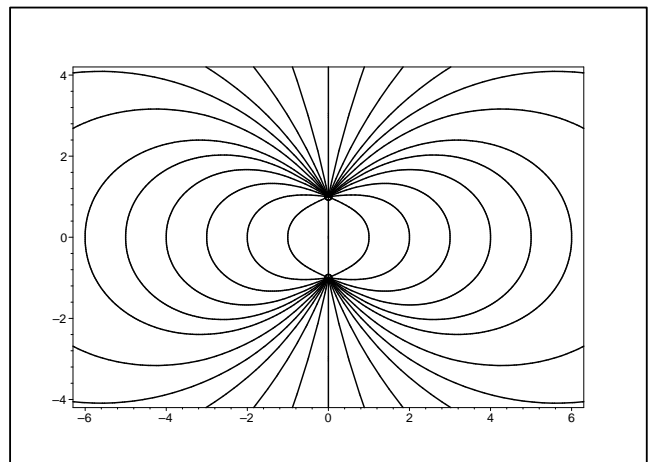
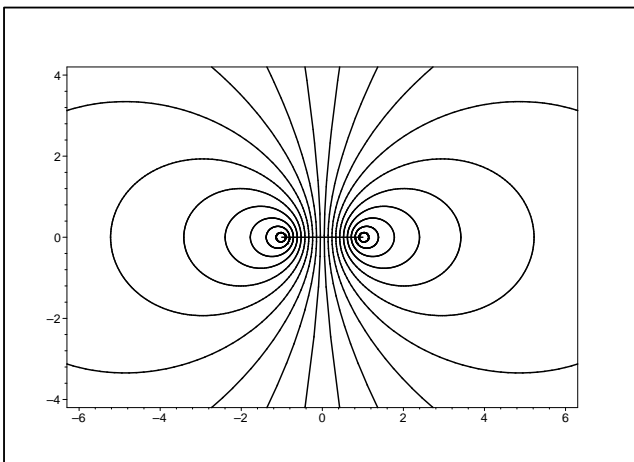


### ★ hors approximation dipolaire

◇ Bien que les lignes de champs électrique et magnétique soient identiques à grande distance pour les dipôles éponymes, la situation est, en revanche, bien différente à courte distance.

Graphique 1

Graphique 2



◇ Sont représentés :

- sur le graphique 1, les lignes de champ magnétique près d'une boucle de courant
- sur le graphique 2, les lignes de champ magnétique près de deux charges opposées

### ★ une analogie explicable

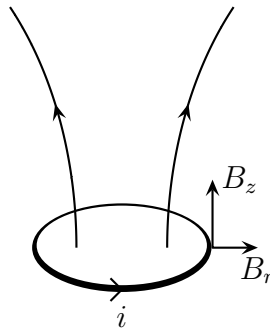
- ◇ Le fait que les lignes de champ se ressemblent furieusement est explicable.
- ◇ En effet **loin** des sources il n'y a ni courant ni charges, donc la zone est *vide*.
- ◇ Or le théorème de GAUSS implique que dans une zone vide de l'espace le flux de  $\vec{E}$  soit toujours nul ... comme l'est celui du champ magnétique.
- ◇ De même le théorème d'AMPÈRE implique que dans une zone vide de l'espace la circulation de  $\vec{B}$  soit toujours nulle ... comme l'est celle du champ électrique.
- ◇ Finalement nous sommes face à deux champs qui obéissent aux mêmes lois, il est donc normal ou au moins pas très surprenant, qu'ils soient similaires.

## II.3 – Actions subies

### II.3.i – origine physique

Les forces de LAPLACE sont à l'origine des forces subies par le dipôle magnétique.

- ◇ Bien sûr, cela est vrai dans le modèle de la boucle de courant car, encore une fois, au niveau atomique ...
- ◇ Regardons d'un peu plus près ce qui se passe.



- ◇ Comme la force de LAPLACE s'écrit, sur chaque portion de la boucle  $d\vec{f}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  et en notant  $\vec{u}_z$  la direction du vecteur surface  $\vec{S}$ , nous pouvons constater que la composante intéressante du champ magnétique est  $B_r$ .

Pour qu'un dipôle magnétique subisse une force, il faut des lignes de champ magnétiques évasées, *ie.* un champ magnétique non uniforme.

### II.3.ii – des résultats analogues

- ◇ Nous allons faire directement l'analogie suivante

$$\vec{B} \longleftrightarrow \vec{E}; \quad \vec{\mathcal{M}} \longleftrightarrow \vec{p} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

### ★ résultante

- ◇ Nous pouvons écrire tout de suite

Un dipôle magnétique subit, dans un champ magnétique  $\vec{B}$  une force

$$\vec{f} = - \left( \vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B}$$

Un dipôle magnétique qui pointe dans le sens du champ magnétique est attiré vers les zones de champ intense.

### ★ moment

Un dipôle magnétique subit, dans un champ magnétique  $\vec{B}$  un moment

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Les dipôles magnétiques ont tendance à pointer dans la même direction et le même sens que le champ magnétique.

◇ Donc globalement, les dipôles magnétiques, tout comme les dipôles électriques, s'orientent dans le sens de  $\vec{B}$  puis sont attirés vers les zones de champ intense.

### ★ énergie potentielle

◇ Encore par analogie

Un dipôle magnétique plongé dans un champ  $\vec{B}$  possède l'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

### ★ tout ça pour la chimie

- ◇ L'interaction dipôle magnétique – champ magnétique est au cœur du fonctionnement de la RMN (Résonance Magnétique Nucléaire) appelé maintenant IRM (Imagerie par Résonance Magnétique).
- ◇ Le but d'une IRM est de sonder la matière pour en déterminer ses constituants.
- ◇ C'est très utilisé aussi en médecine pour imager le fonctionnement du cerveau.

# Les dipôles électromagnétiques

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - approximation dipolaire
  - dipôle rigide
  - moment dipôle électrique, dipôle magnétique

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître la dimension / l'unité d'un moment dipolaire électrique, d'un moment dipolaire magnétique

### ★ Les lois

- ◇ Connaître :
  - l'expression du potentiel créé par un dipôle électrostatique
  - la force subie par un dipôle électrique, un dipôle magnétique
  - le moment subi par un dipôle électrique, un dipôle magnétique
  - l'énergie potentielle d'un dipôle électrique, un dipôle magnétique

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - la dépendance en  $r$  du potentiel dipolaire, du champ dipolaire
  - l'allure des isopentiels et des lignes de champ créées par un dipôle électrique
  - l'allure des lignes de champ créées par un dipôle magnétique
  - l'effet des actions des champs électrique et magnétique sur les dipôles

### ★ les exemples fondamentaux

- ◇ Savoir retrouver le potentiel et le champ électrique créé par un dipôle électrostatique.

## Au niveau des savoir-faire

### ★ petits gestes

- ◇ Il faut savoir :
  - exprimer un moment dipolaire
  - repérer si une distribution de charges peut constituer ou non un dipôle
  - adapter l'expression intrinsèque du potentiel dipolaire à une situation quelconque

### ★ exercices classiques

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Le dipôle électrostatique</b>	<b>1</b>
I-1	La modélisation . . . . .	1
I-1·i	ils sont partout . . . . .	1
	molécules polaires . . . . .	1
	atomes polarisables . . . . .	1
I-1·ii	modèle simple . . . . .	2
I-2	Des champs plus faibles . . . . .	2
I-2·i	analyse . . . . .	2
I-2·ii	d'abord le potentiel . . . . .	3
I-2·iii	puis le champ électrostatique . . . . .	4
I-2·iv	représentation topographique . . . . .	5
	les isopotentiels . . . . .	5
	les lignes de champ . . . . .	5
	graphiquement . . . . .	6
I-3	Le tout en écriture intrinsèque . . . . .	6
I-3·i	loi . . . . .	6
	objectif . . . . .	6
	moment dipolaire . . . . .	7
	le potentiel en écriture intrinsèque . . . . .	7
	le champ en écriture intrinsèque . . . . .	8
I-3·ii	valeurs numériques . . . . .	8
I-4	Idoinotons . . . . .	8
I-4·i	situation . . . . .	8
I-4·ii	d'abord le potentiel . . . . .	9
I-4·iii	ensuite le champ . . . . .	10
I-4·iv	interprétation en terme de dipôle . . . . .	11
	champ à grande distance . . . . .	11
	dipôle équivalent . . . . .	11
	retrouver l'équivalence d'avance . . . . .	12
I-5	Forces subies par un dipôle rigide . . . . .	13
I-5·i	rigidité d'un dipôle . . . . .	13
I-5·ii	résultante . . . . .	13
	champ uniforme . . . . .	13
	champ non uniforme . . . . .	14
I-5·iii	moment . . . . .	15
	champ uniforme . . . . .	15
	champ non uniforme . . . . .	16
	équilibre, interprétation . . . . .	16
I-5·iv	bilan . . . . .	16
I-6	Point de vue énergétique pour un dipôle rigide . . . . .	17
I-6·i	l'énergie potentielle . . . . .	17
I-6·ii	... permet de retrouver la force . . . . .	18
I-7	Cas du dipôle non rigide . . . . .	18
I-7·i	molécule déformable . . . . .	18
I-7·ii	la force peut se négocier . . . . .	19
I-7·iii	... mais pas l'énergie potentielle . . . . .	19



<b>II Le dipôle magnétostatique</b>	<b>20</b>
II.1 Modélisation . . . . .	20
II.1.i origine atomique . . . . .	20
II.1.ii modèle simple . . . . .	20
une boucle de courant . . . . .	20
grandeur caractéristique . . . . .	20
approximation dipolaire . . . . .	21
II.2 Source de champ . . . . .	21
II.2.i situation, analyse . . . . .	21
II.2.ii une intégrale vectorielle . . . . .	22
II.2.iii ... donne 7 intégrales scalaires . . . . .	23
décompte . . . . .	23
calcul . . . . .	24
rassemblement . . . . .	25
II.2.iv ... pour un résultat déjà vu . . . . .	25
II.2.v topographie . . . . .	26
avec l'approximation dipolaire . . . . .	26
hors approximation dipolaire . . . . .	26
une analogie explicable . . . . .	27
II.3 Actions subies . . . . .	27
II.3.i origine physique . . . . .	27
II.3.ii des résultats analogues . . . . .	27
résultante . . . . .	27
moment . . . . .	28
énergie potentielle . . . . .	28
tout ça pour la chimie . . . . .	28