

## Conduction électrique dans un conducteur ohmique

### Références :

Physique tout en un – Dunod PC/PC\*  
Physique des solides – Ashcroft  
Polycopié de Matière Condensée (M1) de P.Mendels  
Polycopié d'électronique de J.NEVEU

---

**Correcteur :** Léa Lachaud

**Niveau :** CPGE

### Prérequis :

- vecteur densité volumique de courant
- PFD et force de Lorentz
- Equations de Maxwell
- Loi d'Ohm
- Théorème d'équipartition de l'énergie
- Notation complexe

### Plan :

1. Modèle de Drude et loi d'Ohm locale
  2. Loi d'Ohm et effet Hall
- 

### **Intro :**

Qu'est-ce qu'un conducteur ohmique ? Un conducteur électrique laisse passer les porteurs de charge (en l'occurrence les électrons dans un métal) qui vérifient la loi d'Ohm (1827) du nom du physicien allemand.

Exemple le plus simple de conducteur ohmique : résistances (SLIDE)

Utilisons un modèle microscopique pour interpréter le mécanisme de la conduction, et retrouver la loi d'Ohm macroscopique.

I.

Paul Drude : physicien allemand qui a développé son modèle éponyme en 1900.

### **1) Hypothèses**

**SLIDE : conducteur métallique**

\*On considère conducteur métallique : ions fixes (réseau ionique) autour desquels peuvent se déplacer librement les électrons, fixe dans le référentiel d'étude

\*Les électrons sont indépendants (pas d'interactions entre les électrons) et libres (pas d'interactions avec les ions du réseau)

\*Ces électrons subissent des collisions, considérées comme instantanées : la vitesse après la collision des électrons suit une distribution aléatoire.

Posons  $\tau$  le temps moyen entre deux collisions pour un électron.

\*Les électrons sont en équilibre thermodynamique avec le milieu.

Tachons de remonter à la loi d'Ohm macro, mais on doit d'abord s'intéresser à la loi d'Ohm locale.

## I.2) Vecteur densité de courant et loi d'Ohm locale

$1/\tau$  = proba par unité de temps qu'un électron collisionne.

Sur un instant  $dt$ , la probabilité qu'un électron collisionne est  $dt/\tau$ , et un électron qui ne collisionne pas avec la proba  $1-dP$  subit uniquement la partie électrique de la force de Lorentz :  $-eE$  (régime statique).

Bilan de quantité de mouvement : terme dû aux électrons qui ne collisionnent pas, et à ceux qui collisionnent.

Finalement,  $d\mathbf{p}/dt = -\mathbf{p}(t)/\tau - e\mathbf{E}$

Ressemble au PFD, avec une force de frottement fluide  $-m\mathbf{v}/\tau$  ( $m$  : masse des électrons).

Solution de la forme :  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{A} \exp(-t/\tau) - e\mathbf{E}\tau/m$ .

On s'intéresse à la conductivité statique, c-à-d le phénomène de conduction en régime permanent : où on atteint la vitesse limite  $\mathbf{v}_{lim} = e\mathbf{E}\tau/m$

Par définition de  $\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v} = -n_0 e \mathbf{v}$  :  $n_0$  : nombre d'électrons /  $m^3$ ,

$\mathbf{j} = n_0 e^2 \tau / m \mathbf{E}$  : **loi d'Ohm locale, qui stipule  $\mathbf{j} = \gamma_0 \mathbf{E}$  avec  $\gamma_0$  la conductivité électrique statique, en S/m.**

Comment peut-on estimer l'ordre de grandeur de  $\tau$  ? A partir de  $\gamma_0$  et  $n_0$ .

## I.3) Ordres de grandeurs

Estimons  $\tau$  pour le cuivre.

$\gamma_0 = 5.9 \cdot 10^6 \text{ S/m}$     $n_0 = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$     $m$  = masse de l'électron =  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$    et  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   
d'où  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ . A quoi le comparer ?

Grâce à l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique moyen, on peut remonter à la valeur du libre parcours moyen :  $l = u^* \tau$  avec  $u^*$  vitesse quadratique moyenne définie par le théorème d'équipartition de l'énergie, telle que  $E = E_c + E_p = 3/2 k_B T$  et  $E_p = 0$  au vu des hypothèses.

$l = \tau * \sqrt{3k_B T / m} = 2 \text{ nm}$  pour 298K. Le libre parcours moyen est de l'ordre de la distance interatomique, et proportionnel à  $\sqrt{T}$ . A l'époque, Drude l'a interprété comme étant une collision entre les électrons et les ions du réseau, mais il n'a pas pris en compte l'apport de la mécanique quantique, donc ne pouvait pas remonter à l'origine de ce  $\tau$ .

Même si les résultats trouvés via le modèle de Drude sont bons pour la conductivité, ils laissent à désirer pour le libre parcours moyen. Il faut donc compléter via une approche quantique.

#### 1.4) Et en régime variable ?

Que se passe-t-il si on ne se place plus en régime statique ? En régime variable, demandons-nous dans quelle limite la loi d'Ohm locale est valable.

Il faut que  $T$  (période du champ excitateur)  $\gg \tau$ , c'est-à-dire qu'on laisse suffisamment de temps à l'électron pour qu'il puisse suivre le champ. Donc  $f < 1/\tau = 10^{14}$  Hz.

D'après la loi de Maxwell-Ampère :  $\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Si  $E$  dépend du temps : il y a apparition d'un champ  $B$  qui entraîne une force magnétique  $-\mathbf{e} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  ;

Mais faut-il nécessairement modifier tout ce qu'on vient de faire et notamment prendre en compte la partie magnétique de la force de Lorentz ?

Regardons l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des électrons.

Considérons un fil cylindrique de rayon  $R=1$  mm parcouru par un courant  $I=1$  A.

Or  $I=j.S$ , on trouve  $u^* = \frac{I\pi R^2}{ne} = 20 \mu\text{m/s}$ .

Comparons la partie électrique avec la partie magnétique de la force de Lorentz.

Pour des champs  $B < 1$  T (qui sont déjà des champs élevés), la force magnétique est bien inférieure à la force électrique. Ainsi, le bilan des forces est inchangé.

On passe en notation complexe et on en déduit :

$$\mathbf{j} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m} / (1 + i\omega\tau) \mathbf{E} = \gamma_0 / (1 + i\omega\tau) \mathbf{E}$$

Ainsi en régime variable, il y a une modification de la loi d'Ohm locale, qui n'est applicable que pour des champs de fréquence inférieure à  $10^{14}$  Hz.

On a vu la description microscopique de la conduction dans les conducteurs ohmiques, mais peut-on remonter à la loi d'Ohm bien connue  $U=RI$  ?

#### 2.1) Loi d'Ohm macroscopique

La démonstration de la loi d'Ohm macroscopique repose uniquement sur la loi d'Ohm locale et la définition des vecteurs  $\mathbf{j}$  et de la tension.

Considérons un fil cylindrique entre deux points  $A_2$  et  $A_1$ , parcouru par  $\mathbf{j}$ , de section  $S$  et de longueur  $L$ .

Or  $I = \iint \mathbf{j}(\mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{M}) = jS$ .

$$U = V_{A_2} - V_{A_1} = \int \text{grad}(V(P)) \cdot d\mathbf{l}(P) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}(P) = - \frac{1}{\gamma} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{L}{\gamma} \frac{I}{S} = -RI$$

Attention, on s'est placés en convention générateur.  $R$  s'exprime en  $\Omega$ , elle ne dépend que des propriétés du matériau et de sa géométrie.

#### 2.2) Effet Hall

Pour revenir sur la notion de conductivité et la vision microscopique, on va s'intéresser à l'effet Hall (1879). Edwin Hall a remarqué historiquement qu'une différence de potentiel apparaissait dans une feuille d'or quand celle-ci était parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique et qu'elle est parcourue par un courant (attention aux orientations de tous ces champs – cf Dunod).

SLIDE : effet Hall

Les charges sont négatives (électrons) : le champ magnétique provoque une déviation vers la gauche de ces charges (cf règle de la main droite). Il y a alors accumulation de charges négatives à gauche et positives à droite ; il y a apparition du champ de Hall orienté du + vers le -.  
La force électrique  $-eE_H$  est donc dirigée vers la droite.

Quelles sont les applications de cet effet ?

En régime statique, bilan des forces sur les électrons (poids - négligé, force électrique, force magnétique).

Ecriture du PFD et  $\frac{dv}{dt} = 0$  (*régime permanent*).

$E_H = -v \wedge B$  et tension de Hall  $U_H = E_H a$  avec  $a$  la largeur du ruban.

Par définition de la vitesse  $j/nq = I/nqab$  ( $b$  épaisseur du ruban), on peut retrouver  $E_H$  :

$$E_H = \frac{IB}{nqab}$$

Donc  $U_H = E_H a = \frac{IB}{nqb}$ . On voit que  $U_H$  est proportionnelle à  $I$  et à  $B$ , ce pourquoi on utilise l'effet Hall dans les sondes des teslamètres pour mesurer des champs magnétiques.

Conclusion : Le modèle étudié possède des limites, notamment le fait qu'il ne soit pas enrichi de la théorie quantique et qu'il ne permet pas forcément de retrouver le bon ordre de grandeur du libre parcours moyen.

## Questions :

**\* Commentaire sur l'aspect historique du modèle de Drude ?** George Ohm mentionne la loi d'Ohm en 1827, bien avant le modèle de Drude (1900). Mais il ne s'agissait sans doute que de constatations expérimentales, l'aspect macroscopique ne nécessite pas l'interprétation microscopique.

**\*Peux-tu en dire plus (nuancer) sur la collision des électrons avec les ions du réseau ?** Drude, en aboutissant à un libre parcours moyen de l'ordre de la distance interatomique, a conclu que les électrons devaient subir des collisions avec les ions du réseau. Cependant, on mesure en réalité des libre parcours moyen bien plus grands, parfois de l'ordre du cm, ce qui s'explique par la mécanique quantique.

Les collisions ont en fait lieu avec les impuretés, les défauts du réseau (loi de Matthiessen). Il ne s'agit pas réellement de collisions élastiques entre deux sphères dures. Ce sont en fait des collisions entre les électrons et les phonons.

**Et pour un métal absolument parfait (pas de défauts du réseau), qu'est ce que ça implique sur sa construction phononique donc la conduction ?** Il y a quand même des phonons (structure phononique uniforme mais pas de frottements), mais plus de collisions, donc conductivité infinie.

**\*Qu'est-ce que ça veut dire équilibre thermo des électrons ?** La thermalisation est due aux collisions, la vitesse d'un électron après collision dépend juste de la température à l'endroit où a lieu la collision et pas de la vitesse avant la collision.

**\* Tu as dit que tu avais négligé la composante magnétique de la force de Lorentz car tu te places en régime statique : quel est le lien cause à effet ?** Pas de rapport entre négligence de la force magnétique et régime statique.

D'ailleurs cette composante peut aussi être négligée en régime variable. C'est ce qui a été démontré après, négligeable du fait de la vitesse de déplacement des charges => possible tant que les électrons ne sont pas relativistes.

**\*Comment expliquerais-tu à tes élèves que l'électricité se déplace instantanément à la vitesse de la lumière dans un conducteur dans la mesure où les électrons se déplacent seulement à quelques mm par seconde ?**

Il faut distinguer le mouvement de l'électron en soi et la propagation d'onde qu'est l'électricité. En cela c'est analogue au son, qui se transmet par une suite de compressions des molécules du milieu, et non par le déplacement d'une molécule.

**\* Tu as choisi de modéliser la friction contre les phonons par une force de frottement fluide, pourquoi est-ce visqueux d'être proportionnel à  $v$  ?** Energétiquement, comment on voit ça ? En  $v^2$  quand beaucoup de frottements (phénoménologiquement)

**\* Le modèle de Drude sous-estime le libre parcours moyen, pourquoi ?**

Ca vient du fait que l'hypothèse libre des électrons est douteuse, car ils se situent dans un potentiel périodique. Mais avec cet argument, il est trivial que le libre parcours moyen soit modifié, mais pas sous-estimé.

**Il y a une autre raison, du point de vue quantique. L'hypothèse des électrons indépendants est-elle vraiment valable ?**

Non, à cause du caractère fermionique des électrons. **Qu'est-ce que ça implique, pourquoi ils ne sont pas indépendants ?** Les électrons ne peuvent pas être sur le même état quantique (Pauli).

**Et donc en termes de vitesse des électrons ?** Seuls les électrons qui sont proches du niveau de Fermi interviennent dans le phénomène de conductivité et donc leur vitesse (vitesse de Fermi) est bien plus grande que la vitesse quadratique moyenne.

**\* Qu'est ce qui t'autorise à utiliser la notation complexe ?** La linéarité des équations. **Comment on le sait qu'elles sont linéaires, est-ce évident ? Pourquoi sommes-nous sûrs que les électrons répondent avec la même fréquence à un champ statique ? De quelle propriété du métal ça vient ?** L'électron a une inertie extrêmement faible, et parviennent facilement à suivre le champ.

**\* Et si tu penses au plasma ?** Il existe une pulsation plasma : à partir de cette pulsation, les électrons changent de comportement. **De quelles grandeurs cette pulsation dépend-elle ?** La masse, la densité de porteurs de charges.

**Pourquoi l'onde ne peut pas se propager en dessous de la pulsation plasma ?**

**A basse fréquence, on peut vaincre l'inertie ou pas ?** Oui, car le champ évolue lentement, l'électron n'a pas de mal à le suivre. Ici, l'électron réémet en opposition de phase, d'où l'impossibilité pour l'onde de se propager.

Dans le plasma il n'y a pas de dissipation, pas de réseau, et les électrons peuvent restituer toute l'énergie qui leur a été communiquée (la puissance qu'ils absorbent est donc nulle). Ex des ondes radio, qui se réfléchissent sur l'ionosphère.

Mais à haute fréquence, l'inertie devient un problème, les électrons n'ont pas le temps de stocker l'énergie puis de la réémettre, d'où le fait qu'une onde EM puisse se propager dans un plasma à haute fréquence.

**\* Qu'est-ce qu'un conducteur parfait ?** Conductivité infinie. **Vient de quelles propriétés ?** Masse de l'électron nulle (dans ce cas on introduit de l'inertie) et diminution de  $\tau$  (car pas de défaut du métal) (dans ce cas on introduit de la dissipation).

**A quoi ressemblent les équations de Maxwell pour un conducteur parfait ?**

Maxwell-flux et Maxwell-Faraday restent inchangées. On peut montrer que  $\rho$  est nulle, et  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ .

$\mu_0 \mathbf{j}$  est nul aussi car  $\mathbf{j} = 0$  (champ à l'intérieur d'un conducteur est nul). **Est-ce obligé ?** Les seuls courants présents sont surfaciques, il n'existe pas de charges volumiques (en l'absence de source de champ).

**\* Que peut-on dire de la structure de l'onde à la surface du conducteur ? Est-elle toujours transverse ?** Oui, transverse électrique et magnétique (on le voit en passant les équations de Maxwell Flux et Gauss en complexe).

**Que peut-on dire du champ magnétique dans un conducteur ?** Il est nul. **Tout le temps ?** Au moins constant. **Grâce à quelle équation ?** Maxwell-Faraday (car le champ électrique est nul dans le conducteur).

**Dans quel type de matériau  $\mathbf{B} = 0$  ? Effet Meissner ?** Dans les supraconducteurs. Cf manip : lévitation de l'aimant. Les supraconducteurs s'opposent à la pénétration des lignes de champs magnétiques en leur sein.

**\* Dans le conducteur parfait, l'onde est réémise avec un déphasage de  $\pi$  (entre le champ électrique incident et le champ électrique réémis), d'où ça vient physiquement ?** Lié aux relations de passage, à l'interface se forme un dipôle électrostatique.

**Allure des lignes de champ pour le dipôle électrostatique ?** Elles divergent depuis + et convergent vers -.

**Pourquoi est-ce interdit pour un dipôle de dessiner les lignes de champ proches des charges ?** Il

faut respecter l'approximation dipolaire. On ne peut pas dessiner non plus les Ldc entre les charges.

**Comment est dirigé le champ électrique une fois réfléchi ?** Du + vers le -, vers le bas, contrairement au champ incident, d'où le déphasage.

**\*Tu n'as pas fait d'interprétation de la loi d'Ohm locale. Peux-tu préciser les limites, les différents régimes en fonction de la fréquence, physiquement ?** A basse fréquence, régime continu ( $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega \ll 1/\tau = 10^{14} \text{ Hz}$ ).  **$10^{14} \text{ Hz}$ , c'est quel type d'onde ?** Du visible, donc c'est toujours vérifié avec les ondes en électricité en TP : c'est le régime de l'ARQS.

**\*Pourquoi un conducteur ohmique dissipe-t-il toujours de l'énergie ?**  $P = \gamma E^2 > 0$

**\* $E = -\text{grad } V$  valable quand ?** En électrostatique. **Oui, et aussi, moins restrictif ?**  $E = -\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}$  :  
Donc valable en ARQS.

**\*De quoi dépend un bon conducteur ? Quelles caractéristiques ?** - grande conductivité

- grande surface (dépend de la géométrie, de la section et de la longueur)

**Quelle est la grandeur « intensive » associée, qui ne dépend pas de la géométrie du matériau, et qui caractérise la capacité d'un matériau à résister au passage du courant ?** Résistivité, l'inverse de la conductivité.

**\*Tu nous as dit qu'à l'équilibre, la force magnétique et la force électrique apparue par effet Hall se compensent. A partir de quand c'est vrai ?** On allume le champ B, les charges dévient d'un côté ou de l'autre, il faut attendre un certain temps pour percevoir l'accumulation de charges. **Elles continuent de s'accumuler tout le temps ?** Non car dès l'instant où la force électrique apparaît, elle va avoir tendance à les ramener de l'autre côté. **Donc les charges bougent ?** Retour à la Slide.  
**Discussion sur les composantes et l'évolution de la vitesse des charges en régime permanent. Seuls les électrons subissent ces forces ?** Non, les ions aussi, le matériau va se déformer un peu.

**\*Quelle différence fais-tu entre la force de Lorentz et la force de Laplace ?** L'une travaille et pas l'autre. **Ce n'est pas intéressant ici. Qui subit ces forces ?** La force de Laplace est issue de l'intégration de la force de Lorentz. La force de Lorentz s'applique sur une charge, la force de Laplace sur l'ensemble des charges, sur le conducteur lui-même, le réseau métallique. La force de Lorentz s'applique sur les charges libres, la force de Laplace sur les charges fixes du réseau.

**\*Que peux-tu me dire sur la constante de Hall ?** Elle est négative pour des charges négatives. **Pour les teslamètres en TP, faut-il utiliser des matériaux avec une petite ou une grande constante de Hall ?** On veut que le courant utilisé soit raisonnable, donc une grande constante de Hall pour éviter les pertes, et voir des petits champs, donc être plus précis.

**Quel matériau utilise-t-on en général pour les sondes à effet Hall ?** Des semi-conducteurs. **Pourquoi est-ce mieux d'utiliser un semi-conducteur pour mesurer un champ magnétique avec une bonne sensibilité qu'un métal normal ?** **Peux-tu comparer les densités de porteurs dans ces deux matériaux ?** Elle est plus faible pour un semi-conducteur ( $10^{20} \text{ m}^{-3}$  contre  $10^{26} \text{ m}^{-3}$  pour un métal classique), donc la constante de Hall est plus élevée.

**\* Un bon conducteur d'électricité est-il un bon conducteur de chaleur ? Que pensait Drude à ce niveau ?** Pour Drude, les 2 étaient liés.

**Qu'est ce qui assure la conduction thermique dans les conducteurs ohmiques ?** Les phonons, ce que Drude ne savait pas, pour lui c'était seulement des électrons qui transportent l'énergie cinétique dans le métal, et ils ont une distribution Boltzmannienne. Il a sous-estimé la vitesse des électrons d'un facteur 100, mais leur capacité de stockage thermique a été surestimée d'un facteur 100, les deux erreurs se sont compensées.

**Il a trouvé une relation entre la conductivité thermique et électrique, tu la connais ?** Elle marchait assez bien de façon étonnante, du fait des deux erreurs compensées (degrés de libertés des phonons oubliée et statistique de Boltzmann au lieu de Fermi. Relation de Wiedemann-Franz, il s'agit d'une relation de proportionnalité entre les conductivités en fonction de la température.

**Commentaires :**

- \* Super leçon, claire, tableau soigné, hypothèses rigoureuses, calculs d'ordre de grandeur.
- \* Bien de lier le libre parcours moyen avec le temps de collision via le théorème d'équipartition, il faut savoir que c'est faux.
- \* Modèle de Drude-Sommerfeld apporte la correction en remplaçant la statistique Boltzmanienne par celle de Fermi. Mais il n'y a pas vraiment le temps d'en parler dans cette leçon, c'est bien de savoir ça pour les questions.
- \* Exploitation du régime variable assez faible : soit on en parle pas, soit on en parle plus (comportement à hautes fréquences (propagation + absorption) et basses fréquences (absorption), très très hautes fréquences (propagation, comparable au vide) et épaisseur de peau).
- \* Peut-être ajouter quelques commentaires sur l'aspect énergétique.
- \* Le titre de cette leçon est exactement celui d'une partie du programme de prépa, le plan devrait très bien convenir aux attentes du jury.
- \* Vaut le coup de trouver une animation claire sur l'effet Hall :  
[https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Charges/hall.php](https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/hall.php) (par exemple)  
Commentaire personnel de Rémy : j'ai vu cette animation en préparation mais je pense qu'elle n'apporte rien et il faudrait sans doute une animation avec la visualisation de la déviation des charges (mais je n'ai pas trouvé).