Chapitre 2: Propagation d'une onde dans un milieu diélectrique

Richard Monier

Septembre 2019

Abstract

Ces notes de cours reprennent les éléments du cours donné en Septembre 2019 à la préparation á l'agrégation à Montrouge. Cette partie traite de la propagation dans les diélectriques LHI.

Contents

1 Introduction

2 Propagation dans un milieu diélectrique

2.1 Introduction

Placé dans un champ électrique, un milieu diélectrique se polarise. Le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ est défini comme par la quantité de moment dipolaire par unité de volume. des variations temporelles de la polarisation induisent des courants de polarisation représentés par: $\boxed{\rho_{pol} = -div\overrightarrow{P}}$ et $\boxed{\overrightarrow{j_{pol}} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}}$
Des phénomènes d'aimantation peuvent aussi se produire. Ils sont dus à la présence de dipoles magnétiques élémentaires, représentés à l'échelle macroscopique par l'aimantation, $\overrightarrow{M}$. A cette aimantation est associée une densité volumique de courant:

$$\overrightarrow{j_m} = \overrightarrow{rot\overrightarrow{M}} \tag{1}$$

Ces charges et courants liés à des déplacements d'extension très limitée des charges sont appelés "charges et courants liés".

2.2 Equations de Maxwell

Les propriétés du champ electromagnétique sont contenues dans les équations de Maxwell. Les deux équations qui ne font pas intervenir les charges s'écrivent comme dans le vide:

$$div(\overrightarrow{B}) = 0 \tag{2}$$

et

$$\overrightarrow{rot\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{3}$$

Pour les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, il faut ajoutter aux charges et courants libres, les charges et courants volumiques créés par la polarisation. On utilise le vecteur déplacement électrique $\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$ et le vecteur excitation magnétique, $\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$. Avec ces deux vecteurs, on écrit deux nouvelles équations de Maxwell ne faisant apparaitre que les charges et courants libres ρ et $\overrightarrow{j}$:

- Equation de Maxwell-Gauss (MG): $div\overrightarrow{D} = \rho_l$
- Equation de Maxwell-Ampère (MA): $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{H})} = \overrightarrow{j_l} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$

auxquelles on ajoutte les deux précédentes:

- Equation de Maxwell flux: $div(\overrightarrow{B}) = 0$
- Equation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

Cette formulation des équations de Maxwell a comme principal avantage de faire apparaitre explicitement les densités de charges et de courants libres, ρ_l et $\overrightarrow{j_l}$ dont on connait le comportement dans de nombreux matériaux. Cette avantage s'accompagne de l'introduction de deux nouveaux vecteurs, $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{H}$, qui sont deux "inconnues" supplémentaires.

3 Propagation d'ondes electromagnétiques dans un milieu diélectrique LHI

3.1 Equation de propagation

Les équations de Maxwell dans un milieu LHI, **isolant et non chargé**, s'écrivent pour un champ sinusoidal en notation complexe:
- $div(\overrightarrow{E}) = 0$
- $div(\overrightarrow{B}) = 0$
- $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{E})} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
- $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{B})} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

Par rapport au vide, on a remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, la permittivité complexe du milieu LHI. On en déduit les équations de propagation:

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{B} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

3.2 Relation de dispersion - Indice du milieu

Pour une OPPM de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, l'équation de propagation conduit à la relation de dispersion:

$$\boxed{k^2 = \epsilon_r \mu_0 \omega^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Si on choisit la direction de propagation selon Ox, on a $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$

Définition 3.1 (Indice du milieu)**.** *On définit l'indice complexe n du milieu par la relation* $n^2 = \epsilon_r$

ce qui amène à écrire les solutions de l'équation de dispersion sous la forme:

$$\boxed{k = \pm n \frac{\omega}{c}}$$

L'indice n est complexe et fonction de la pulsation de l'onde: $\boxed{n = n(\omega)}$ ce qui entraine des phénomènes d'absorption et de dispersion.

4 Structure du champ électromagnétique

Comme les équations sont èquivalentes à celles du vide à condition de remplacer la permittivité ϵ_0 du vide par ϵ celle du milieu LHI, on en déduit que la relation de structure:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} && (4) \\ &= n\frac{\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} && (5) \end{aligned}$$

demeure valable. Les vecteurs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{k}$ forment un trièdre direct. Comme $\overrightarrow{k}$ est complexe, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ ne sont pas en phase contrairement au cas du vide.

5 Polarisation, dispersion et absorption

5.1 Modèle classique de la polarisation

Pour exprimer la permittivité diélectrique du milieu, on propose à l'échelle microscopique un modèle classique de l'interaction du champ électromagnétique avec les charges (traitable rigoureusement en mécanique quantique).

5.1.1 Le modèle de la charge élastiquement liée

Ce modèle est du à Lorentz (1853-1928) pour rendre compte de la diffusion du rayonnement solaire par les molécules atmosphériques. Le vecteur $\overrightarrow{E}$ de l'OPPM met en mouvement les charges liées du milieu où elle se propage. Si la réponse est linéaire, l'onde force les oscillations de ces charges à la pulsation ω.
Hypothèses:
La charge liée de masse m et de charge q est soumise:
• à une force de rappel élastique proportionnelle à son déplacement à l'équilibre: $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{r}$
• à une force rendant compte des phénomènes de dissipation d'énergie (collision,rayonnement,...) en introduisant un temps de relaxation τ: $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$
• á la force de Lorentz dans laquelle on négligera classiquement l'action du champ magnétique: $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$

Remarque: Le champ de l'onde est uniforme à l'échelle de la molécules si sa longueur d'onde est très supérieure aux dimensions des particules du milieu (typiquement 1 $\mathbb{P}$ pour un atome). L'équation du mouvement de la charge est donc:

$$m\overrightarrow{a} = -k\overrightarrow{r} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{r} + q\overrightarrow{E} \tag{6}$$

soit

$$\overrightarrow{r}^{\cdot\cdot} + \frac{k}{m}\overrightarrow{r} + \frac{1}{\tau}\overrightarrow{r} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E} \tag{7}$$

On utilise $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre de cet oscillateur amorti et $Q = \omega_0\tau$ son facteur de qualité ce qui conduit à:

$$\overrightarrow{r}^{\cdot\cdot} + \frac{\omega_0}{Q}\overrightarrow{r}^{\cdot} + \omega_0^2\overrightarrow{r} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E} \tag{8}$$

En régime sinusoidal forcé, on a $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} e^{j\omega t}$, on arrive à:

$$\overrightarrow{r} = \frac{\frac{q}{m\omega_0^2}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \overrightarrow{E} \tag{9}$$

5.2 Propagation en régime sinusoidal

Au déplacement $\overrightarrow{r}$ de la charge q est associé le moment dipolaire $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{r}$. On écrit donc: $\boxed{\overrightarrow{p} = \alpha \overrightarrow{E}}$ où α est appelé **la polarisibilité**. Si le milieu contient N charges liées identiques par unité de volume, le vecteur de polarisation est $\overrightarrow{P} = N\overrightarrow{p} = \epsilon_0 \chi_e \overrightarrow{E}$ avec:

$$\chi_e = \frac{\chi_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{10}$$

et $\chi_0 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$ est la susceptibilité statique ($\omega = 0$). La susceptibilité χ_e est complexe et peut s'écrire $\chi_e = \chi_1 - j\chi_2$ avec:

$$\chi_1(\omega) = \frac{\chi_0(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2} \tag{11}$$

$$\chi_2(\omega) = \frac{\chi_0(\frac{\omega}{Q\omega_0})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2} \tag{12}$$

Remarques:

- Dans $\overrightarrow{p} = \alpha \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{E}$ est le champ local microscopique vu par la particule polarisée par le champ.
- Dans $\overrightarrow{P} = \epsilon_0 \chi_0 \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{E}$ est le champ macroscopique. On admettra que le champ créé par les autres particules perturbe peu le champ appliqué à la matière. Ceci est vrai pour les milieux dilués.

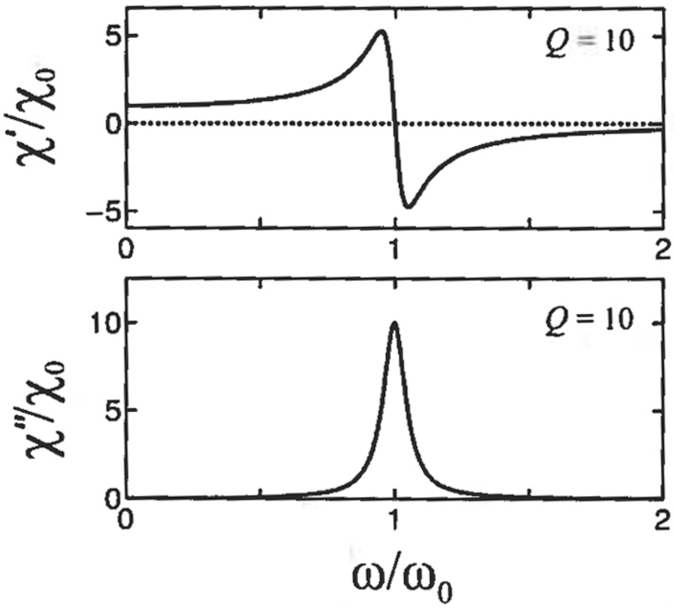

Figure 5.1– Variations de χ au voisinage de la résonance ω_0.

Figure 1: Graphes de $\frac{\chi_1}{\chi_0}$ et $\frac{\chi_2}{\chi_0}$

χ_1 s'annule pour $\omega = \omega_0$ et χ_2 est maximale pour cette valeur. χ_1 atteint un maximum pour $\omega_M \simeq \omega_0(1 - \frac{1}{2Q})$, ce maximum est proche de $\chi_{1M} \simeq \chi_0\frac{Q}{2}$ et atteint un minimum pour $\omega_m \simeq \omega_0(1 + \frac{1}{2Q})$, ce minimum est proche de $\chi_{1m} \simeq= -\chi_0\frac{Q}{2}$.

La puissance moyenne dissipée au sein du milieu LHI s'écrit:

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{P}> &= \frac{1}{2}\mathcal{R}\rceil(\overrightarrow{j_{pol}}.\overrightarrow{E^*}) && (13)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{R}\rceil(j\omega\overrightarrow{P}.\overrightarrow{E^*}) && (14)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{R}\rceil(j\omega\epsilon_0\chi_e\overrightarrow{E}.\overrightarrow{E^*}) && (15)\\
&= \frac{1}{2}\omega\epsilon_0\chi_2(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{E^*}) && (16)
\end{aligned}
$$

La dissipation d'énergie est donc liée à la partie imaginaire $\chi_2 = -Im(\chi_e)$ de la susceptibilité complexe du milieu. On peut aussi calculer la puissance dissipée d'une autre manière en utilisant le terme dissipatif $-\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$:

$$
\begin{aligned}
<\mathcal{P}> &= -N\frac{1}{2}\mathcal{R}\rceil(-\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}\overrightarrow{v^*}) && (17)\\
&= \frac{Nm\omega_0}{2Q}|\frac{j\omega\overrightarrow{P}}{qN}|^2 && (18)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0\omega^2\frac{|\chi_2|^2}{Q\omega\chi_0}(\overrightarrow{E}.\overrightarrow{E^*}) && (19)
\end{aligned}
$$

Dans la zone $\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}$, χ_2 est importante et donc l'absorption d'énergie électromagnétique dans le milieu l'est aussi. En dehors de cette zone, χ_2 est très faible et le milieu est transparent.

5.3 Polarisation totale du milieu

Le milieu contient à priori plusieurs types de charges liées susceptibles de se déplacer sous l'action du champ $\overrightarrow{E}$ de l'onde électromagnétique:
• les électrons des atomes et molécules
• les noyaux
• les ions (cas de solides ioniques)
Toutes ces charges liées différentes ayant des charges q_i et des masses m_i correspondent à différentes types d'oscillateurs, de pulsations propres ω_i et de facteurs de qualité Q_i et donc de déplacements $\overrightarrow{r_i}$ vérifiant:

$$\overrightarrow{r_i} = \frac{\frac{q_i}{m_i\omega_{0i}^2}}{1 + \frac{j\omega}{Q_i\omega_{0i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}}\overrightarrow{E} \tag{20}$$

Si on a a_i particules de même masses m_i, charge q_i, ω_{0i} et Q_i et si on a N particules élémentaires (atomes, ..., ions) par unité de volume, alors le vecteur polarisation du milieu s'écrit:

$$\overrightarrow{P} = N(\sum_i \frac{\frac{a_i q_i^2}{m_i\omega_{0i}^2}}{1 + \frac{j\omega}{Q_i\omega_{0i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2}})\overrightarrow{E} \tag{21}$$

A chaque type d'oscillateur correspond une zone d'absorption. Entre ces zones, la dissipation d'énergie au sein du milieu est faible.

5.4 Ordres de grandeurs de quelques pulsations charactéristiques

• pour la polarisation électronique, $\omega_{0e} \simeq 10^{14} - 10^{15}$ Hz se situe dans le visible et l'UV.
• Dans un cristal ionique, les pulsations propres associées aux mouvements des molécules ou des ions (beaucoup plus massifs que les ions) sont plus faibles, de l'ordre de 10^{12} à 10^{14} Hz et se situent dans l'IR. On parle de polarisation atomique ou ionique.

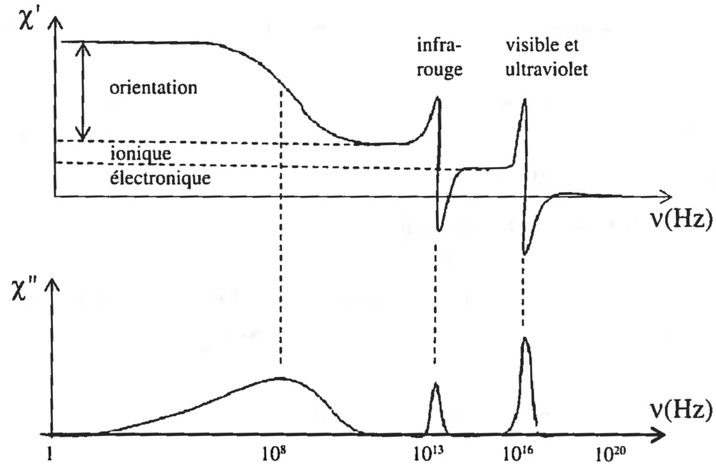

Figure 5.3 – Les différents types de susceptibilité électrique.

Figure 2: allure des graphes $\chi_1(\omega)$ et $\chi_2(\omega)$ pour une seule pulsation de chaque type

Dans l'IR lointain et le domaine hertzien, une molécule polaire peut osciller dans le champ de l'onde.

5.5 Indice de réfraction et d'extinction

Rappelons la relation de dispersion: $k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$ soit $k = k_1 - jk_2 = \pm n\frac{\omega}{c}$. L'indice n est complexe et fonction de ω et vérifie $n^2 = \epsilon_r$. On pose: $n = n_1 - jn_2 = (\epsilon_r)^{\frac{1}{2}}$ avec $\epsilon_r = \epsilon_1 - j\epsilon_2$ ce qui conduit à deux équations:

$$n_1^2 - n_2^2 = \epsilon_1 \tag{22}$$

$$2n_1 n_2 = \epsilon_2 \tag{23}$$

Le champ électrique transverse d'une OPPM se propageant selon Ox s'écrit:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)} \tag{24}$$

avec $k_1 = n_1\frac{\omega}{c}$ et $k_2 = n_2\frac{\omega}{c}$, deux réels positifs. En notations réelles ceci donne:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x) \tag{25}$$

• l'indice n_1 est l'indice de réfraction, utilisé en optique. La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}$, l'indice n_1 caractérise la dispersion du milieu.
• l'indice n_2 caractérise l'absorption de l'onde par le milieu: c'est l'indice d'extinction.

5.6 Zones de transparence

Dans une zone de transparence, la dispersion et l'absorption sont faibles. On a $\epsilon_r = \epsilon_1 \gg \epsilon_2$. L'indice du milieu vérifie $n \simeq n_1 \gg n_2$ et il est réel. Dans le domaine de fréquences où l'indice est réel, l'OPPM se propage sans atténuation: le milieu est transparent à cette onde.

5.7 Zone d'absorption

Proche de la pulsation propre du milieu, n_2 n'est plus négligeable. L'amplitude varie comme $e^{-k_2 x} = e^{-n_2 \frac{\omega x}{c}}$. Dans le domaine de fréquence où $\epsilon_r = n^2$ est complexe, le milieu absorbe les ondes électromagnétiques qui le traversent.

References

[1] Brébec, J-Ph. *Electromagnétisme, Spéciales PC*, Hachette Sup, 1996