

# Mécanique

## Chapitre 1

### Premiers pas en mécanique du point

# Premiers pas en mécanique du point

C'est **LE** chapitre le plus important de la mécanique car c'est celui qui contient toute la base et tous les concepts fondamentaux. Une non maîtrise / connaissance parfaite de ce chapitre sera forcément handicapant un jour ou un autre.

Pour commencer, nous n'allons pas chercher directement à décrire le mouvement des vagues sur la mer : c'est trop difficile pour une première fois étant donné qu'elles se déforment. Nous nous contenterons dans ce chapitre de faire bouger des choses très simples.

## I – Phénoménologie

### I.1 – Bouger !

#### I.1.i – monstration

- ◇ Regardons un pendule osciller et essayons de décrire son mouvement.

Montrer le début du film avec le pendule.

- ◇ Comment « dire » qu'il bouge ?

- il faut imaginer un point de repère indépendant du pendule
- il faut regarder comment évolue, par exemple, le centre du pendule *par rapport* à ce point de repère

#### I.1.ii – qu'est-ce qui bouge ?

- ◇ Ici nous pouvons constater que la seule donnée de la position du centre de la boule est suffisante pour décrire tout ce qui se passe.
- ◇ Nous étudierons **toujours** cette année la trajectoire de points matériels. Un seul la plupart du temps, deux simultanément dans un chapitre ultérieur.

Un *point matériel* est un point géométrique affecté d'une masse  $m > 0$  exprimée en kg.

- ◇ Un point matériel peut représenter deux choses :

- un tout petit objet par rapport à l'espace d'évolution (ex : une molécule dans une pièce)
- un point particulier d'un grand objet : un coin, une extrémité ou ... le centre de masse (ex : le centre de la Terre pour l'étude d'un satellite)

Tout objet solide indéformable se comporte exactement comme un point matériel lorsqu'il ne tourne pas sur lui-même.

- ◇ Nous considérerons donc tout objet, si « gros » soit-il comme un unique point matériel du point de vue mécanique et nous le dessinerons comme tel.
- ◇ Plus tard, pour les gros objets qui tournent ou se déforment, nous les découperons (par la pensée) en morceaux si petits que chacun des morceaux pourra être assimilé à un point matériel que nous pourrions alors étudier.

### I.1.iii – bouger par rapport à

Montrer la fin du film avec le pendule.

- ◇ En voyant la fin du film, il est (très) tentant de dire « en fait c'est la caméra qui bougeait » ... ce qui serait déjà une erreur !
- ◇ En effet au début, le pendule bougeait **vraiment** *par rapport* à la caméra et c'est cela qui compte car bien plus que le repère, il faut définir le référentiel.
- ◇ Dire « c'est la caméra qui bouge » (vs. le pendule bouge) c'est croire et laisser croire que certaines choses bougeraient de manière intrinsèque et pas d'autre. Ce qui est **faux** ! Il n'y a pas de référentiel « absolu », il n'y a que des référentiels plus ou moins naturels (dont le fameux référentiel terrestre).

Le *référentiel* est ce par rapport à quoi quelque chose bouge.

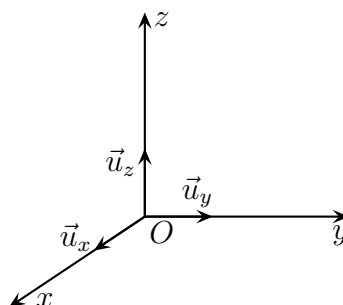
Un référentiel est toujours immobile par rapport à lui-même.

- ◇ Le référentiel est aussi arbitraire que possible : il sera possible de faire de la mécanique dans n'importe quel référentiel.
- ◇ La plupart du temps, nous le ferons dans le référentiel naturel terrestre.
- ◇ Le référentiel terrestre est si naturel qu'il pose des soucis et que lorsque nous disons qu'assis sur notre chaise nous bougeons :
  - à environ  $300 \text{ m.s}^{-1}$  par rapport au référentiel géocentrique
  - à environ  $30 \text{ km.s}^{-1}$  par rapport au référentiel héliocentrique
- ◇ Il est difficile de l'admettre véritablement car nous le ressentons pas. En fait c'est normal car nous verrons que nous ne ressentons pas la vitesse mais les forces, et les forces sont :
  - le poids qui nous fait tourner à quelques centaines de mètres par seconde
  - 1000 fois inférieure au poids pour nous faire avancer à 30 km par seconde
- ◇ Une fois choisi ce par rapport à quoi un objet bouge, il faut pouvoir décrire la manière dont il bouge.

Un *repère* est la manière que nous avons de décrire la façon dont un objet bouge par rapport à un référentiel.

Il existe donc de multiples repère pour un même référentiel.

- ◇ Le plus naturel des repère est le repère dit cartésien : 3 axes orthogonaux de centre  $O$  de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .



## I.1.iv – finalement, c'est quoi un mouvement ?

- ◇ Nous pouvons penser naturellement à la trajectoire, mais il y a bien plus que cela, il y a le fait que l'objet se mette à bouger, s'arrête, revienne en arrière, que le phénomène soit périodique, ...

Le *mouvement* d'un objet ou d'un point matériel est l'ensemble des caractéristiques qui permettent de décrire son déplacement par rapport à un référentiel : position, vitesse et accélération.

La *position* d'un point matériel sera repérée par le *vecteur position*

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z$$

Le vecteur position a une norme en mètre.

La *vitesse* d'un point matériel caractérise la manière dont la position change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Le vecteur vitesse a une norme en  $\text{m.s}^{-1}$ .

- ◇ L'interprétation de la dérivée est bien cohérente avec la définition de la vitesse :  $d\overrightarrow{OM}$  représente une petite variation de position alors que  $dt$  représente une petite durée.  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$  représente donc bien la manière dont la position change lorsque  $t$  change, *ie.* lorsque le temps s'écoule.

La vitesse d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ En effet :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{d}{dt} (x(t) \vec{u}_x) + \frac{d}{dt} (y(t) \vec{u}_y) + \frac{d}{dt} (z(t) \vec{u}_z) \end{aligned}$$

La dérivation de vecteurs se fait comme la dérivation de fonctions usuelles. En particulier, si  $\vec{u}$  est un vecteur constant dans le temps,  $\frac{dx(t) \vec{u}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}$ .

◇ Nous obtenons donc bien  $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$ .

L'accélération d'un point matériel caractérise la manière dont la vitesse change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{a}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

L'accélération est aussi la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Le vecteur accélération a une norme en  $\text{m.s}^{-2}$ .

L'accélération d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \ddot{x}(t) \vec{u}_x + \ddot{y}(t) \vec{u}_y + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ La démonstration est identique à celle faite pour la vitesse.
- ◇ Si nous cherchons à décrire un mouvement avec position, vitesse et accélération c'est parce que les **lois** physiques font intervenir position, vitesse et accélération !
- ◇ Ce n'est pas un choix arbitraire de s'arrêter à la dérivée d'ordre deux.

## I.2 – Origine du mouvement

◇ C'est la question du jour : à cause de quoi un objet se met-il à bouger ?

### I.2.i – les forces

- ◇ La réponse naturelle est « les forces ».
- ◇ Effectivement, mais attention, les forces ne sont pas nécessaires au mouvement (par rapport à un référentiel) mais à la **mise en mouvement** par rapport à ce référentiel.
- ◇ Définir une force s'avère, au fond, délicat cette notion est intimement liée au mouvement qui, lui-même, est défini à partir du référentiel, qui est défini en lien avec les forces (cf. partie IV).
- ◇ Il est bien plus facile de décrire une force.

Une force se représente par un vecteur. Il faut donc trois choses pour la décrire entièrement :

- soit les trois composantes du vecteur dans une base
- soit sa direction, son sens et sa norme en newton

### I.2.ii – forces à distance

- ◇ Comme leur nom l'indique, ces forces peuvent agir à distance. C'est fondamentalement étrange quand nous y réfléchissons.
- ◇ Il y a :
  - l'interaction gravitationnelle, *ie.* le fait que des objets massiques s'attirent (ce sera le poids à la surface de la Terre)
  - l'interaction électromagnétique, *ie.* le fait que des objets chargés aient des influences réciproques
- ◇ Ces deux forces sont deux des quatre forces fondamentales de la physique. Les deux autres sont :
  - l'interaction nucléaire forte responsable de la cohésion du noyau atomique
  - l'interaction nucléaire faible responsable des désintégrations  $\beta^-$

### I.2.iii – forces de contact

- ◇ Là aussi elles portent bien leur nom.

Dès que deux objets sont en contact l'un avec l'autre, ils exercent une force l'un sur l'autre.

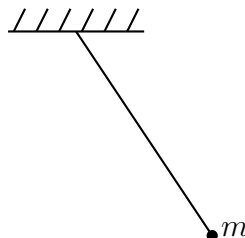
Quand deux objets ne sont pas en contact l'un avec l'autre, ils n'exercent aucune force l'un sur l'autre.

- ◇ C'est une règle et une loi extrêmement simple mais immuable : « PAS CONTACT, PAS FORCE ».
- ◇ Le fait que certaines choses influencent « à distance » le mouvement sera un guide intuitif pour la résolution et pour le choix des lois à écrire mais cela ne doit surtout pas guider l'écriture des lois en elles-mêmes.

## I.3 – Mouvement qualitatif

### I.3.i – la trop fréquente confusion

- ◇ Reprenons le film du pendule, mais un vrai pendule cette fois.
- ◇ La situation sera schématisée, à un instant quelconque de la manière suivante.



- ◇ Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse ?
  - force à distance : le poids
  - force de contact : le fil, l'air (frottement)
- ◇ Point n'a été besoin de savoir si la masse montait ou descendait ! La vitesse est indépendante de la liste des forces qui s'exercent.

Il est complètement inutile de connaître le mouvement d'un corps pour déterminer la nature des forces qui s'exercent sur lui.

- ✧ Tout comme il n'est pas utile de savoir si un condensateur se charge ou se décharge pour choisir entre  $\pm C \frac{du(t)}{dt}$  !
- ✧ Ceci dit, c'est vrai que pour avoir *l'expression* de certaines forces (les frottements), il faudra **parfois** :
  - soit connaître le sens de la trajectoire
  - soit faire des suppositions sur la trajectoire

### I.3.ii – le rôle des frottements

- ✧ Pour mieux déterminer quelles lois écrire, il est très utile de s'imaginer qualitativement le mouvement des objets étudiés.
- ✧ Quels sont les effets qualitatifs d'un frottement ?
- ✧ Nous pensons spontanément : « frottement = ralentissement » alors que c'est physiquement faux. Contre-exemple :
  - les feuilles des arbres qui s'envolent
  - le tapis de caissière
  - la voiture qui avance grâce aux frottements de la route

## II – Il bouge !

- ✧ Dans cette partie, nous allons véritablement commencer à déterminer *a priori* le mouvement d'un point matériel, c'est-à-dire apprendre à trouver, à partir d'une situation réelle décrite,

### II.1 – La loi outil : le principe fondamental de la dynamique

#### II.1.i – énoncé

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel  $M$  de masse  $m$  subissant les forces  $\vec{f}_i$ , nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \quad \text{où} \quad \vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$$

$\vec{p}(t)$  est appelée la *quantité de mouvement*.

- ✧ Les référentiels galiléens sont ceux dans lesquels le PFD est vrai. C'est une question un peu subtile de savoir quand un référentiel est **parfaitement** galiléen ; nous verrons donc cela plus tard.

La quantité de mouvement caractérise le mouvement d'un point matériel.

- ✧ La quantité de mouvement est une grandeur fondamentale en mécanique. La preuve, c'est qu'elle apparaît dans la loi fondamentale de la dynamique.

★ **réécriture usuelle**

- ◇ Bien que la quantité de mouvement soit la grandeur fondamentale, une réécriture usuelle du PFD s'appuie sur le fait que la masse d'un point matériel est une constante ce qui implique

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{dm \vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{et ainsi :}$$

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel  $M$  de masse  $m$  subissant les forces  $\vec{f}_i$ , nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = m \vec{a}(t)$$

- ◇ Lorsqu'en 2<sup>e</sup> année, il faudra étudier des choses dont la masse est variable, la méthode usuelle sera de revenir à la version originelle de la loi, à savoir  $\frac{dp(t)}{dt} = \sum \vec{f}_i$

II.1.ii – **lecture**

- ◇ Comme son nom l'indique, c'est un *principe* : il ne se démontre pas ! Des multitudes d'expériences n'ont pas réussi à le mettre en défaut dans le cadre de ses limites, **donc** il est considéré comme représentant la réalité.
- ◇ C'est le principe fondamental de la **dynamique**. À ne pas confondre avec le principe fondamental de la **mécanique** qui, en soi, n'existe pas. Pour « fabriquer » la mécanique, il faut 3 lois, les 3 lois de NEWTON, celle-ci n'est « que » la 2<sup>e</sup>. Le problème c'est que les deux autres sont trop souvent oubliées ...
- ◇ Il est applicable à n'importe quel point matériel ! C'est un principe absolument universel et il sera toujours vrai.
- ◇ Ce principe relie les forces qui s'exercent sur un point matériel à un instant  $t$  à l'accélération à ce même instant que possède ce point matériel  $\vec{a}(t)$ . D'un point de vue cause et conséquence il est dès lors difficile d'affirmer que ce sont les forces qui *causent* l'accélération.
- ◇ Cette loi relie force et accélération, il est donc possible de la faire fonctionner de deux manières différentes :
- si les expressions des forces sont connues, alors  $\vec{a}(t)$  est connue, ce qui donne, par projection sur les vecteurs de la base, trois équations différentielles du second ordre et « yapuka » résoudre pour avoir  $\overrightarrow{OM}(t)$
  - si les expressions des forces ne sont pas connues, alors en connaissant  $\vec{a}(t)$  il est possible, toujours par projection, de retrouver l'expression des forces
- ◇ Notons tout de suite qu'il y a une grande quantité de forces dont l'expression n'est pas connue, ce sont la plupart des forces de contact. L'utilisation du PFD sera alors délicat car ses projections feront souvent intervenir des grandeurs inconnues.
- ◇ Nous pouvons maintenant répondre à la question « qu'est-ce que la masse ? »

La *masse inertielle* est la grandeur qui caractérise la capacité qu'a un point matériel à résister aux effets des forces.



## II.2 – Aborder un problème de mécanique

- ◇ Il faut avant tout se souvenir qu'un problème de mécanique n'est pas difficile car la partie « analyse physique » se fait de manière intuitive et que la partie « analyse technique » est quasi évidente.
- ◇ La difficulté en mécanique, car il y en a bien une, c'est de ne **pas** utiliser ses intuitions lors de l'utilisation des lois physiques : les explications des phénomènes sont, en effet, fort peu intuitives ... contrairement aux phénomènes eux-mêmes.

### II.2.i – analyse physique et technique

- ◇ L'analyse physique préliminaire consiste à :
  - imaginer dans sa tête le film de ce qu'il se passe, il est important de voir les choses bouger et notamment de déterminer s'il existe plusieurs étapes notablement distinctes, ou si, à la fin, le mouvement s'arrête ou pas. Les étapes se distinguent par le fait que des forces agissent ou non. Par exemple si un objet est lancé puis heurte le sol, jusqu'au moment où il est en l'air, c'est une étape et après c'en est une autre.
  - bien repérer ce qui est contraint (notamment les trajectoires) de ce qui ne l'est pas
  - penser aux grandeurs pertinentes : les grandeurs de descriptions du dispositif (masse, longueur, ...), les efforts qui agissent (forces, ...) et enfin les conditions initiales.
- ◇ L'analyse physique doit déboucher sur une représentation dessinée de la situation **à un instant scalène**, *ie.* à un instant non particulier (point matériel en position d'équilibre, dans une position de vitesse nulle, ...). C'est un genre de photo, donc il ne vaut mieux pas tracer la trajectoire (sauf si elle est contrainte) ni la vitesse.
- ◇ L'analyse technique consiste à :
  - choisir quelle(s) loi(s) utiliser sur qui pour arriver à la réponse
  - utiliser un paramètre permettant les calculs les plus simples possibles
- ◇ Lors de cette analyse technique sont placés le centre du repère et les axes  $(Ox, Oy, Oz)$  ou les vecteurs  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

### II.2.ii – trouver « le » système


Un *système* est une partie arbitraire (donc à préciser explicitement) du dispositif étudié pour lequel les lois seront écrites.

- ◇ Lorsqu'il y a un seul point matériel mis en jeu dans le problème, la question ne se pose pas : le système étudié, *ie.* ce sur quoi nous allons écrire des lois, ne pose aucune difficulté de choix.
- ◇ Lorsqu'il y aura des dispositifs complexes, il faudra systématiquement préciser le système choisi. Nous verrons alors que, souvent, il sera pertinent non pas de subdiviser en plein de petits systèmes, mais au contraire de faire des gros systèmes de manière à écrire les lois de la mécanique pour un gros machin directement.

### II.2.iii – trouver les forces

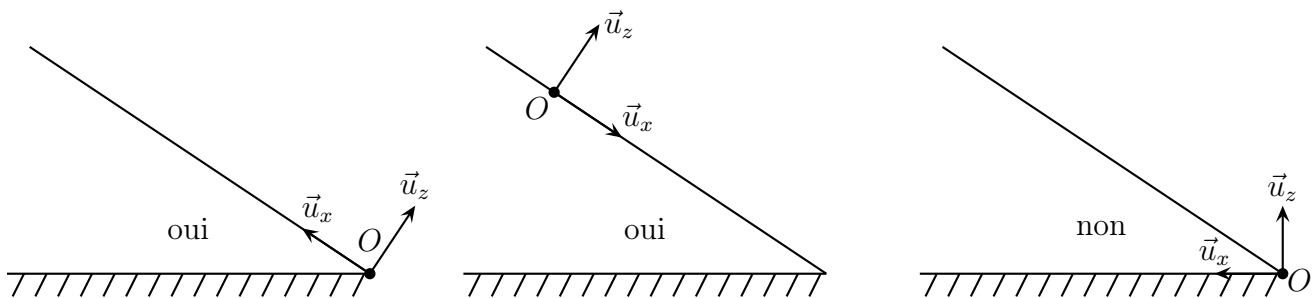
- ◇ Une fois le système (arbitraire) choisi, trouver les forces qui s'exercent sur lui est extrêmement simple :
  - regarder les forces à distance :
    - le poids à la surface de la Terre ou l'attraction gravitationnelle loin de la surface
    - l'interaction électromagnétique si le point matériel est chargé
  - déterminer les forces de contact : **tout ce qui touche et uniquement ce qui touche le système** exerce une force de contact

- ✧ Pour les forces de contact, rien de tel que de regarder le schéma réalisé : il suffit d'entourer le système et de voir tout ce qui est en contact avec le trait.

 C'est une des erreurs classiques en mécanique que de se tromper dans les forces que subissent des objets sous la pression de l'intuition. Ce n'est pas parce que nous pouvons deviner *a priori* que tel ressort aura une *influence* sur le mouvement du point matériel que le point matériel subit la force exercée par le ressort !

## II.2.iv – choisir le bon repère

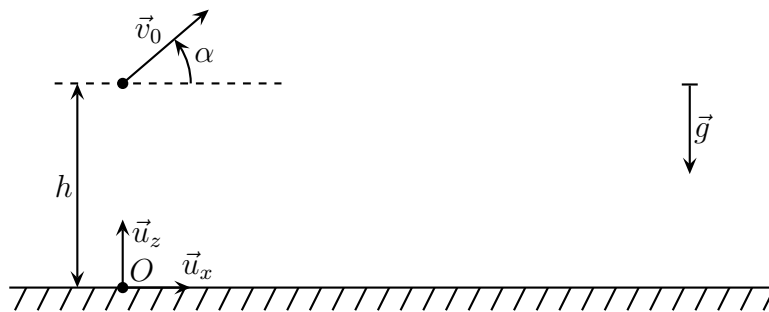
- ✧ Il est évident que pour des raisons naturelles, mieux vaut appeler  $z$  l'axe vertical et garder  $x$  et  $y$  pour les déplacements horizontaux, c'est plus parlant.
- ✧ Cela va avec les exemples, mais il est évident que lorsqu'un support est plan et qu'un objet glisse dessus, il est largement préférable que l'un des axes du repère soit parallèle avec le plan. L'inconvénient c'est qu'alors  $\vec{u}_z$  n'est plus vraiment vertical.



## II.3 – force à distance : le poids

### II.3.i – situation à étudier – analyse

- ✧ Étudions voir ce qu'il se passe lorsqu'un objet, suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme un point matériel, est lancé de la hauteur  $h$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  sous un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.



- ✧ Analyse physique :
- nous sentons bien que l'objet va suivre une trajectoire d'abord montante puis descendante jusqu'à ce qu'il heurte le sol. Après, c'est un autre problème que nous n'étudierons pas
  - il n'y a strictement aucune contrainte de mouvement pour le point matériel, il peut donc *a priori* bouger dans les trois directions de l'espace
- ✧ Analyse technique :
- le choix du repère est assez évident : un axe parallèle au sol, un autre vertical
  - ici nous n'avons guère le choix : c'est le PFD
- ✧ Ici le point matériel constituera le système et le mouvement sera étudié par rapport au référentiel terrestre.
- ✧ La liste des forces qui s'exercent sur le point matériel sont :

- le poids (l'évolution se déroule à la surface de la Terre)
- les actions de l'air sur l'objet :
  - la poussée d'ARCHIMÈDE : négligée ici
  - la force de frottement : négligée ici

◇ Il reste uniquement le poids.

La *chute libre* correspond à un mouvement où un objet est soumis uniquement à son poids.

## II.3.ii – phénoménologie et caractéristiques du poids

### ★ phénoménologie

◇ Elle est connue ! Mais à ne pas oublier et, surtout, à vérifier une fois le résultat obtenu.

Le poids a tendance à entraîner les objets vers le bas.

◇ Le poids est toujours à prendre en compte pour toute évolution qui se déroule sur Terre ! Quelques fois le poids sera négligeable **devant** une autre force, mais il faudra de toute façon le prendre en compte avant de le négliger.

### ★ caractéristiques

Le poids d'un point matériel de masse  $m$  s'écrit  $\vec{P} = m \vec{g}$  où  $\vec{g}$  est l'accélération de pesanteur qui vaut  $\|\vec{g}\| \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

◇ Si sur l'ensemble de la Terre, nous avons en toute rigueur  $\|\vec{g}\| \neq C^{\text{te}}$ , nous pouvons néanmoins considérer que  $\vec{g} = \vec{C}^{\text{te}}$  dans une zone restreinte à l'échelle de la Terre, *ie.* très grande à l'échelle humaine.

Sauf cas très particuliers de mouvements amples par rapport à la Terre, nous pouvons considérer que  $\vec{g} = C^{\text{te}}$ .

◇ Nous verrons plus tard que le poids n'est pas exactement l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un point matériel : il y a un petit quelque chose en plus.

### ★ une autre masse

◇ Nous voyons aussi apparaître ici la masse d'un corps. Toutefois son interprétation est physiquement très différente de celle rencontrée dans le PFD.

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à subir la gravité, *ie.* à être attiré par les autres masses.

◇ Ce qui est tout simplement incroyable, c'est que la masse grave soit égale à la masse inertielle ! Et les mesures les plus précises à  $10^{-10}$  près ne permettent pas de mettre en évidence de différence.

## II.3.iii – mouvement de la masse

### ★ équation différentielle régissant l'évolution

✧ Écrivons le PFD pour le point matériel. Comme l'action de l'air est négligée, il reste :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = \vec{g}}$$

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si tout au long du mouvement l'accélération est vectoriellement constante.

✧ Ici, nous avons bien un mouvement uniformément accéléré.

### ★ équation horaire

✧ Projets le PFD sur les 3 axes du repère et résolvons les équations différentielles.

✧ Notons que la physique est déjà passée : elle était dans le PFD. Ici, il faudra, comme pour les circuits en régime transitoire, faire attention aux conditions initiales qui seront, cette fois, bien plus facile à déterminer.

### 🔗 mouvement sur $\vec{u}_y$

✧ En projection sur  $\vec{u}_y$ , le PFD s'écrit  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$  ce qui est une équation différentielle simple à résoudre !

✧ En primitivant une fois nous avons :  $\frac{dy(t)}{dt} = C^{\text{te}}$ . Or à l'instant initial, comme le montre le schéma, nous avons  $v_y(0) = 0 = C^{\text{te}}$  ce qui donne  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ .

✧ En primitivant une seconde fois, nous avons  $y(t) = C^{\text{te}'}$ . Or à l'instant initial, nous avons  $y(0) = 0 = C^{\text{te}'}$  ce qui donne  $\boxed{y(t) = 0}$ .

Un mouvement uniformément accéléré est un mouvement plan.

### 🔗 mouvement sur $\vec{u}_x$

✧ Même technique sachant que le PFD se projette en  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0$  sur  $\vec{u}_x$ .

✧ Une première intégration donne  $\frac{dx(t)}{dt} = C^{\text{te}}$ . Or à l'instant initial  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha = C^{\text{te}}$  ce qui donne :  $\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \alpha$ .

✧ Une deuxième intégration donne  $x(t) = v_0 (\cos \alpha) t + C^{\text{te}'}$  et comme  $x(0) = 0 = C^{\text{te}'}$  nous trouvons finalement  $\boxed{x(t) = v_0 (\cos \alpha) t}$ .

### 🔗 projeter un vecteur à la physicienne

✧ Par exemple le vecteur  $\vec{v}_0$ .

✧ Nous savons d'avance qu'il y a deux composantes, un cosinus et un sinus, reste à savoir quelle composante est quoi et, surtout, quel est le bon signe.


✧ Méthode :

➔ repérer selon quels vecteurs (orthogonaux !) il se décompose, ici c'est  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$

- repérer quel est l'angle qui change la projection, ici c'est  $\alpha$
- imaginer que  $\alpha = 0$  et en déduire lequel des deux vecteurs porte le cosinus avec quel signe, ici c'est  $+v_0 \cos \alpha \vec{u}_x$
- l'autre composante sera  $\pm \sin$ , reste à déterminer le signe avec la valeur particulière  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ici cela donne  $+v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$

◇ Finalement nous avons  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$ .

◇ Bien sûr, il est fortement déconseillé de se tromper dans la projection de vecteurs.

 la méthode qui consiste à trouver le bon triangle pour appliquer la bonne formule trigonométrique est piégeuse car régulièrement l'angle intéressant et le vecteur à projeter seront séparés ; il faudra alors ramener l'angle intéressant au niveau du vecteur ce qui causera moult dégâts.

### mouvement sur $\vec{u}_z$

- ◇ Toujours la même technique. Le PFD se projette en  $\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -g$  sur  $\vec{u}_z$ .
- ◇ Une première intégration donne  $\frac{dz(t)}{dt} = -gt + C^{\text{te}}$  puis, avec  $v_z(0) = v_0 \sin \alpha = C^{\text{te}}$ , nous trouvons  $\frac{dz(t)}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$ .
- ◇ Une deuxième intégration donne  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha)t + C^{\text{te}'}$  et comme  $z(0) = h = C^{\text{te}'}$ , nous obtenons  $\boxed{z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha)t}$ .

### ★ cas particulier d'une vitesse initiale nulle

- ◇ Si  $v_0 = 0$  alors nous avons :

$$y(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Dans le cas d'une chute libre sans vitesse initiale, la trajectoire est rectiligne.

- ◇ L'impact se fait à l'instant  $t_0$  tel que  $z(t_0) = 0$ , ce qui donne :

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_0^2 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- ◇ La vitesse au point d'impact vaut alors  $\frac{dz}{dt}(t_0)$  avec :

$$\frac{dz(t)}{dt} = -gt \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{dt}(t_0) = -gt_0 = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

La vitesse après une chute libre de hauteur  $h$  sans vitesse initiale a une norme de  $v = \sqrt{2gh}$ .

- ◇ Nous pouvons vérifier que cette loi est homogène et cohérente : plus la hauteur de chute est importante, plus la vitesse acquise sera grande.
- ◇ Nous pouvons constater que cette vitesse est indépendante de la masse : ce qui est plus lourd ne tombe pas plus vite ou alors il faut qu'il y ait d'autres forces en jeu, comme les frottements.

## II.3.iv – quelques caractéristiques du mouvement

### ★ trajectoire

La *trajectoire* est l'ensemble des points par lequel est passé ou passera le point matériel étudié.

- ◇ Formellement parlant, cela signifie que le temps n'a pas d'importance pour la trajectoire. Il faut donc l'éliminer des relations obtenues pour ne conserver que des équations en  $z$  et en  $x$ .
- ◇ Ici, il est facile d'éliminer  $t$  avec  $x$  :

$$x(t) = v_0 (\cos \alpha) t \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

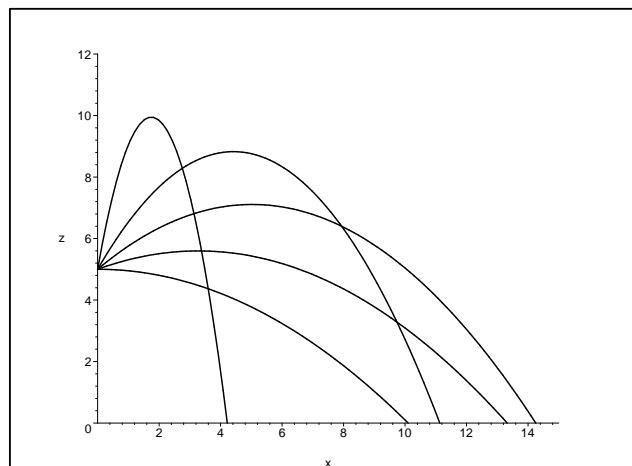
- ◇ Qu'il n'y a plus qu'à introduire dans l'expression de  $z(t)$  :

$$z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) + h \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x + h}$$

- ◇ C'est donc une parabole sauf si  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

Lors d'un mouvement uniformément accéléré, la trajectoire est parabolique ou rectiligne.

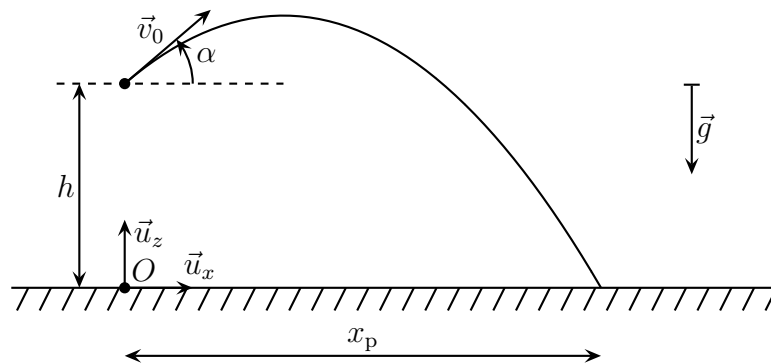
Graphique 1



- ◇ Sur le graphique 1, nous pouvons visualiser quelques trajectoires à  $v_0 = C^{\text{te}}$  et pour différents angles initiaux.

### ★ portée

- ◇ La portée est la distance parcourue entre l'instant initial et l'impact au sol.



◇ Nous avons donc, par définition,  $z(x_p) = 0$ , ce qui donne :

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 + (\tan \alpha) x_p + h \quad \rightsquigarrow \quad x_p^2 - \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} x_p - \frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

◇ En remarquant que  $2 \cos^2 \alpha \tan \alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha)$ , nous obtenons l'équation suivante à résoudre :

$$x_p^2 - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} x_p - \frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

◇ Le discriminant vaut  $\Delta = \frac{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}{g^2} + \frac{8h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$  qui est toujours positif sauf si  $h \leq 0 \dots$

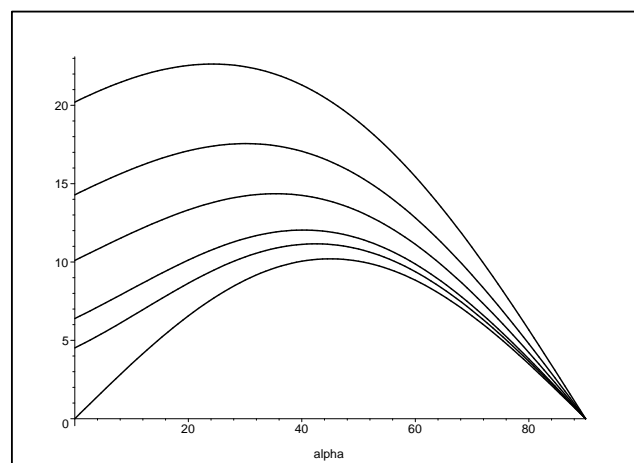
◇ De plus les deux solutions sont telles que  $x_1 x_2 = -\frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \leq 0$ , il y en a donc une et une seule de positive. Il s'agit de :

$$x_p = \frac{\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}{g^2} + \frac{8h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}}{2}$$

$$\rightsquigarrow x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha) + \sqrt{v_0^4 \sin^2(2\alpha) + 8gh v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2g}$$

◇ Nous sommes loin du résultat « intuitif » que la portée est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Graphique 2



◇ Pour  $h = 0$ , le résultat se simplifie en :

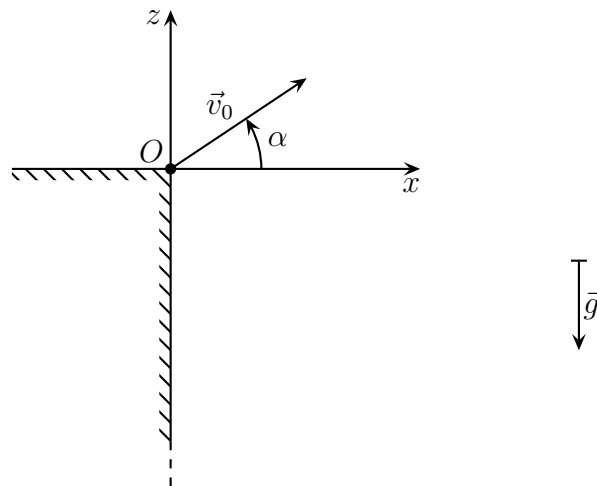
$$x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha) + \sqrt{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

◇ Résultat qui est bien maximal pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

## II.4 – force de contact connue : les frottements fluides

### II.4.i – situation à étudier – analyse

◇ Nous cherchons à déterminer ce qui se passe lorsqu'un caillou est jeté du haut d'un très profond ravin.



◇ Analyse physique :

- le poids va entraîner le caillou vers le bas
- comme il n'y a pas de force sur  $\vec{u}_y$  ni de vitesse initiale sur  $\vec{u}_y$ , le mouvement se fera dans le plan  $(O, x, z)$
- la vitesse va être si grande que les frottements n'auront plus un effet négligeables
- il n'y a *a priori* aucune contrainte de mouvement

◇ Analyse technique :

- le repère est évident, autant mettre le centre au point de départ
- il n'y a que le PFD qui s'offre à nous

### II.4.ii – phénoménologie et caractéristiques des frottements fluides

#### ★ phénoménologie

Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide et qu'il est en mouvement par rapport à celui-ci, il subit une force de *frottement fluide*.

◇ Les fluides considérés sont dans l'écrasante majorité des cas l'air ou l'eau.

Les forces de frottement fluide ont tendance à faire en sorte que la vitesse de l'objet devienne égale à celle du fluide.

◇ Ainsi :



- si le fluide est au repos par rapport au référentiel d'étude, l'objet ralentira par rapport au référentiel d'étude (aspect intuitif des forces de frottement)
- si le fluide est en mouvement par rapport au référentiel d'étude, il a tendance à entraîner l'objet, donc **à le mettre en mouvement**, c'est le cas par exemple des rivières qui charrient les objets qui y sont plongés, ou du vent qui entraîne les feuilles et les graines

### ★ caractéristiques

Pour un fluide au repos dans le référentiel d'étude, la force de frottement est vectoriellement opposée au vecteur vitesse de l'objet subissant la force.

- ◇ Si le fluide n'est pas au repos, il faut prendre en compte non pas la vitesse de l'objet par rapport au référentiel mais la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

La force de frottement fluide a une intensité telle que :

- si la vitesse n'est pas trop importante, elle est proportionnelle à cette dernière, *ie.*  $\|\vec{f}\| = \lambda v$ , soit  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$  : les frottements sont dits *linéaires*
- si la vitesse est importante, elle est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse, *ie.*  $\|\vec{f}\| = h v^2$ , soit  $\vec{f} = -h v \vec{v}$  : les frottements sont dits *quadratiques*  
 $h$  et  $\lambda$  sont des constantes phénoménologiques qui dépendent de l'objet (matériau, forme) et du fluide.

- ◇ La limite entre vitesse importante et vitesse peu importante dépend de l'objet et du fluide. Cette limite sera discutée en 2<sup>e</sup> année.
- ◇ Dans le doute, s'il faut prendre en compte des frottements fluides (parce qu'ils sont physiquement nécessaires ou parce que l'énoncé le demande), nous prendrons des frottements fluides qui permettent de faire des calculs formellement.

## II.4.iii – trajectoires avec le modèle linéaire

### ★ application des lois physiques

- ◇ Appliquons simplement le PFD au caillou une fois lancé :

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}(t) = m \vec{g} - \lambda \vec{v}(t)$$

### ★ trouver la vitesse

- ◇ Projetons le PFD sur  $\vec{u}_z$  :

$$m \frac{dv_z(t)}{dt} = -m g - \lambda v_z(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_z(t) = -g$$

- ◇ Ce qui est une équation différentielle d'un type connu :

$$v_z(t) = A e^{-t/\tau} + v_{z,p}(t) \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$$

- ◇ En cherchant  $v_{z,p} = C^{te}$ , nous trouvons  $v_{z,p}(t) = -g \tau$  soit  $v_z(t) = A e^{-t/\tau} - g \tau$ .

- ◇ La condition initiale donne  $v_z(0) = v_0 \sin \alpha = A - g \tau$  et ainsi  $\boxed{v_z(t) = (g \tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g \tau}$ .

- ◇ Faisons de même sur  $\vec{u}_x$  :

$$m \frac{dv_x(t)}{dt} = -\lambda v_x(t) \rightsquigarrow \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x(t) = 0 \rightsquigarrow v_x(t) = B e^{-t/\tau}$$

◇ Et avec la condition initiale  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ , nous trouvons  $v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}$ .

◇ Nous pouvons alors constater que pour  $t \rightarrow \infty$  :

- $v_z(t) \rightarrow -g\tau = -\frac{gm}{\lambda}$  : il y a une vitesse limite d'autant plus grande que la masse est grande et d'autant plus faible que les frottements sont importants
- $v_x(t) \rightarrow 0$  : il arrive un moment où l'objet n'avance quasiment plus, contrairement à la chute libre

### ★ trouver la position

◇ Cette fois comme nous avons la vitesse, il suffit d'intégrer en tenant compte des conditions initiales.

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = (g\tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g\tau \rightsquigarrow z(t) = -\tau (g\tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g\tau t + C^{\text{te}}$$

◇ Avec la condition initiale  $z(0) = 0$ , nous trouvons ainsi :

$$z(t) = \tau (g\tau + v_0 \sin \alpha) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$$

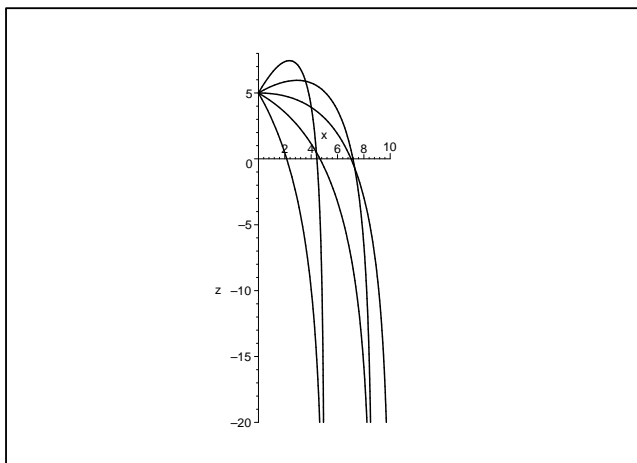
◇ De même pour la position en  $x$  avec  $x(0) = 0$  :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} \rightsquigarrow x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} + C^{\text{te}'} \rightsquigarrow x(t) = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau})$$

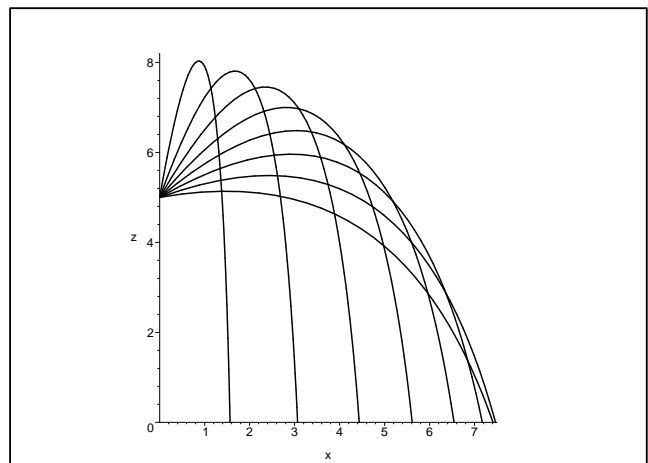
◇ Nous pouvons alors constater que  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tau v_0 \cos \alpha$  pourvu que le ravin soit suffisamment profond nous avons. La portée maximale est obtenue pour un tir à l'horizontale.

### ★ trajectoires

Graphique 3



Graphique 4



◇ Sur les graphiques 3 et 4, nous pouvons voir quelques trajectoires avec un frottement de type linéaire et nous pouvons constater qu'effectivement la portée est la plus longue pour un tir à l'horizontale ... si la profondeur est assez grande.

## II.4.iv – trajectoire avec le modèle quadratique

### ★ lois physiques

◇ Écrivons le PFD appliqué au caillou :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{f} \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}(t) = m \vec{g} - h v \vec{v}$$

◇ Projétons sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  sans oublier que  $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}$  :

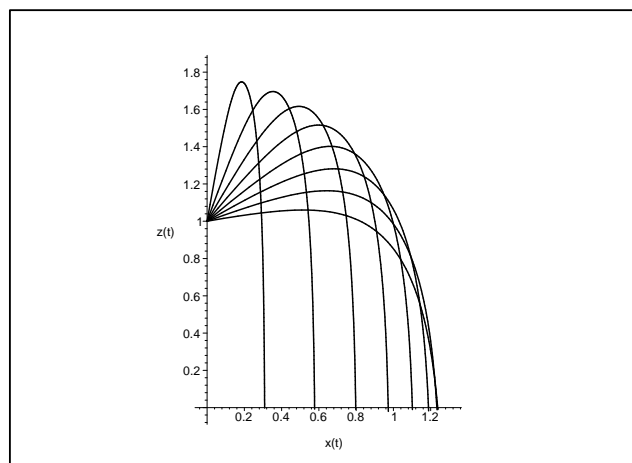
$$\begin{cases} m \frac{dv_x(t)}{dt} = -h v(t) v_x(t) \\ m \frac{dv_z(t)}{dt} = -h v(t) v_z(t) - m g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{h}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_x(t) = 0 \\ \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{h}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_z(t) = -g \end{cases}$$

◇ Ce qui est un système d'équations différentielles pour le moins difficile à résoudre ...

### ★ trajectoires

◇ Numériquement, la résolution de ces équations donne les trajectoires représentées sur le graphique 5.

Graphique 5

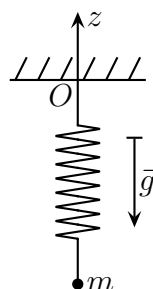


◇ Nous pouvons constater que les trajectoires sont sensiblement différentes de celles avec le frottement linéaire : elles sont moins arrondies.

## II.5 – force de contact connue : la force élastique

### II.5.i – une masse au bout d'un ressort

◇ Étudions les oscillations d'une masse accrochée au bout d'un ressort vertical.



◇ Analyse physique :

- le poids va entraîner la masse vers le bas mais cette dernière va être rappelée vers le haut : il risque d'y avoir oscillations
- nous allons supposer que le mouvement dure suffisamment longtemps, *ie.* qu'il est perpétuel à l'échelle d'observation
- le mouvement est contraint verticalement : les projections horizontales du PFD ne pourront pas servir à déterminer le mouvement horizontale de la masse

◇ Analyse technique :

- le centre du repère est presque naturel. Parfois il est mis là où la masse est à l'équilibre. Ça se fait régulièrement mais c'est piégeux au sens où le centre dépend alors précisément de la situation (masse, ressort) et risque peut-être de fausser des résultats si à la fin un paramètre (masse, ressort) varie
- pas de problème pour l'approche : c'est un PFD

◇ Liste des forces s'exerçant sur la masse :

- force à distance : le poids
- force de contact :
  - la tension exercée par le ressort
  - les contacts avec l'air : la poussée d'ARCHIMÈDE (négligée) et les frottements (négligés)

## II.5.ii – phénoménologie et caractéristiques de la force élastique

### ★ phénoménologie de l'action d'un ressort

- ◇ Prenons un ressort et comprimons le. Nous le sentons « résister » à la compression et ce d'autant plus qu'il est comprimé : le ressort cherche à recouvrer sa longueur naturelle.
- ◇ Il en est de même lorsque nous étirons un ressort.
- ◇ Tant qu'un ressort n'est pas trop étiré ou trop comprimé, il retourne ensuite à sa longueur naturelle.
- ◇ Si un ressort est trop étiré, sa déformation devient permanente, il s'agit d'une déformation plastique.
- ◇ Si un ressort est trop comprimé, les spires se touchent les unes les autres, il devient subitement incompressible

### ★ caractéristiques

Un *ressort idéal* est un ressort sans masse, parfaitement élastique à spires non jointives. Il est caractérisé par sa longueur naturelle  $\ell_0$  et sa constante de raideur  $k$  en  $\text{N.m}^{-1}$ .

- ◇ Il est préférable de parler de longueur naturelle plutôt que de « longueur à vide » car la longueur à vide n'est pas identique à la longueur naturelle lors de ressorts non idéaux.

Plus la constante de raideur  $k$  d'un ressort est grande, plus le ressort est dur.

◇ À la limite :

- une constante de raideur infinie correspond à une barre rigide
- une constante de raideur nulle correspond à une absence de ressort

La force qu'exerce un ressort idéal sur un objet accroché à une de ses extrémités s'exprime sous la forme  $\vec{f} = -k(\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  où :

- $k$  est la constante de raideur
- $\Delta\ell \triangleq \ell - \ell_0 \geq 0$  est l'allongement du ressort
- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent au ressort au niveau de ce qui subit la force



◇ Remarquons que  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  dépend de la position de la masse.



◇ Nous écrirons toujours la force sous la forme  $-k(\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  avant d'exprimer  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  en fonction des vecteurs de la base utilisée.

### ★ et les élastiques

Les élastiques exercent une force élastique de type  $-k(\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  en étirement et n'exercent aucune force en compression.

◇ En fait lorsque nous essayons de comprimer un élastique, il devient lâche et n'exerce plus aucune force.

## II.5.iii – un mouvement déjà connu

### ★ lois physiques

◇ Écrivons le PFD appliqué à la masse et remarquons que  $\vec{u}_{\text{sortant}} = -\vec{u}_z$  :

$$\vec{P} - k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{u}_z = -m g \vec{u}_z + k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z$$

◇ En projection sur  $\vec{u}_z$ , cela donne :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m g + k(\ell(t) - \ell_0)$$

◇ Reste maintenant à relier  $z(t)$  et  $\ell(t)$  et c'est là qu'il faut particulièrement faire attention : c'est de la **pure géométrie**, il serait dommage de se tromper. Nous avons toujours  $\ell(t) > 0$  (c'est une longueur) et ici nous avons  $z(t) < 0$  ce qui donne, étant donné la position du centre  $O$  :  $\ell(t) = -z(t)$ . Nous obtenons ainsi :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m g + k(-z(t) - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} z(t) = -g - \frac{k}{m} \ell_0$$

◇ Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une équation différentielle du second ordre correspondant à des oscillations de pulsations propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La pulsation propre d'une masse accrochée à un ressort de constante de raideur  $k$  vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- ◇ Notons que même verticalement, la gravité  $g$  (donc le poids) n'a aucune influence dans la pulsation propre d'une masse accroché au bout d'un ressort.
- ◇ Si nous nous étions trompé dans le lien entre  $\ell(t)$  et  $z(t)$ , il y aurait eu une erreur de signe dans l'équation différentielle et cela aurait été repérable.

### ★ équations horaires

- ◇ Nous pouvons donc écrire  $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_p(t)$  avec  $A$  et  $\varphi$  dépendant des conditions initiales.
- ◇ Cherchons  $z_p(t)$  sous la forme d'une constante puisque le second membre de l'équation différentielle régissant l'évolution de la masse est constant. Nous trouvons  $z_p(t) = -\ell_0 - \frac{m g}{k}$ .
- ◇ Il s'agit de la position d'équilibre. Son expression est cohérente : elle est négative et ce d'autant plus que  $m g$  est grand ou que  $k$  est faible.

## III – Trajectoires circulaire

- ◇ Comme l'indique le nom de cette partie, nous allons désormais nous concentrer sur les trajectoires circulaires.

Une trajectoire est *circulaire* lorsqu'elle forme un cercle ou un arc de cercle.

### III.1 – Décrire un mouvement circulaire

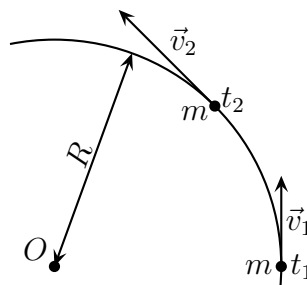
#### III.1.i – phénoménologie

##### ★ de nombreux exemples

- ◇ Bien sûr il y a tout d'abord les vraies trajectoires circulaires (au moins en première approximation) : satellites autour de la Terre, Terre autour du Soleil, manège, ...
- ◇ Mais il y a aussi les trajectoires circulaires qui ne font pas un cercle mais qui sont guidés : le pendule simple (guidé par un fil) ou un wagonnet, une voiture (guidé par des rails, une route, ...)

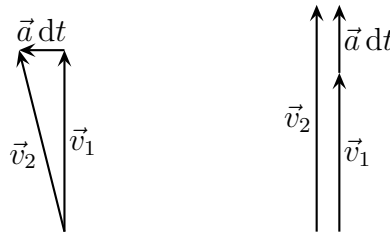
##### ★ deux accélérations

- ◇ Considérons la portion de trajectoire circulaire ci-dessous où la situation est représentée à deux instants  $t_1$  et  $t_2 > t_1$  différents.



- ◇ Nous pouvons tout d'abord constater que le vecteur vitesse est constamment tangent à la trajectoire, ce qui est, somme toute, normal.
- ◇ De plus nous pouvons constater que la vitesse change de deux manières fondamentalement différentes : en direction et en norme.
  - le changement de direction est obligatoire pour une trajectoire circulaire sur laquelle tout objet est constamment obligé de tourner : s'il y a changement de vecteur vitesse, il y aura **toujours** accélération (mais pas au sens usuel). Cette accélération sera orthogonale à la vitesse afin de la faire tourner.
  - le fait d'augmenter la norme de la vitesse est un autre type d'accélération qui correspond plus au sens usuel, mais qui n'est en aucun cas obligatoire. Cette accélération se fera dans la direction de la vitesse.
- ◇ Tout est basé sur la signification même de l'accélération : c'est ce qui caractérise comme évolue le vecteur vitesse.

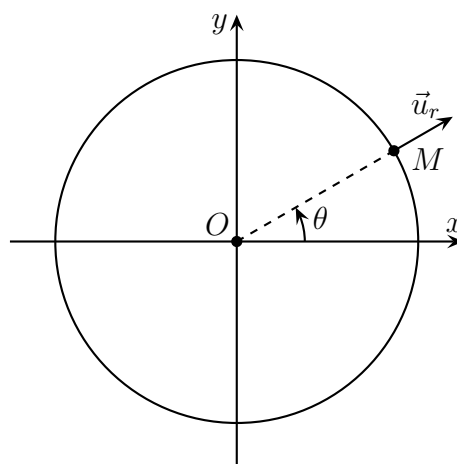
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a} dt$$



### III.1.ii – un repère évident pour un repérage simple

- ◇ Il n'y a pas tellement besoin d'ergoter : lorsque nous avons affaire à un mouvement circulaire, nous avons tendance à centrer le repère sur le centre de la trajectoire. Réjouissons-nous, ce qui paraît le plus naturel conduira aux calculs les plus simples.

Pour repérer un point sur un cercle, il suffit de la donnée d'un seul nombre :  $\theta(t)$ .



Tout le mouvement est contenu dans  $\theta(t)$  lorsque la trajectoire est circulaire.

- ◇ Une fois le repère centré, nous pouvons constater que le repérage par  $x(t)$  et  $y(t)$  ne semble pas pertinent : pour un même  $x(t)$  il existe deux  $y(t)$  (sauf cas trop particulier pour être intéressants).

- ◇ Il paraît plus naturel de repérer la position du point  $M$  par la seule donnée de l'angle algébrique  $\theta(t)$  que nous prendrons, conventionnellement, à partir de l'axe  $(Ox)$ .
- ◇ Notons que les axes  $(Oxy)$  ne constituent pas véritablement le repérage (puisque nous allons repérer avec  $\theta(t)$ ), mais plus le référentiel et est, en ce sens, indispensable.
- ◇ Puisque nous allons avoir besoin de **vecteurs** position, vitesse, accélération, nous allons définir des vecteurs idoines.

Le vecteur position d'un point situé sur un cercle s'écrit  $\overrightarrow{OM}(t) \triangleq R \vec{u}_r$ .

- ◇ La « difficulté » de ce repérage, difficulté qui n'en est pas vraiment une, est qu'il faut savoir où se situe le point  $M$  pour dessiner  $\vec{u}_r$ .

Le vecteur  $\vec{u}_r$  dépend de la position de  $M$  et est donc, en particulier, fonction du temps.

- ◇ Quand il faudra le dériver (pour la vitesse) ça posera quelques soucis.

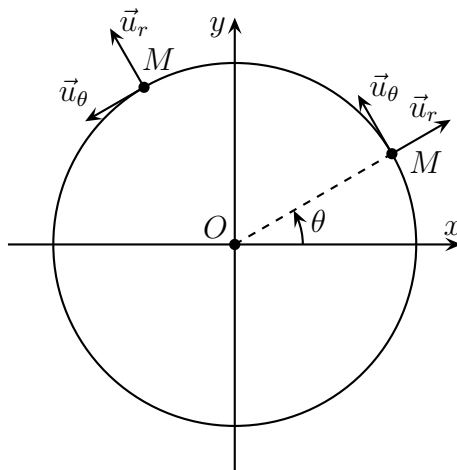
### III.1.iii – la vitesse est toujours tangentielle

- ◇ Nous admettrons très provisoirement le résultat suivant.

Pour un point  $M$  évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$  repéré par  $\theta(t)$ , le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v}(t) = R \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

où  $\vec{u}_\theta$  est le vecteur tangent à la trajectoire dans le sens de  $\theta$ .



- ◇ Remarquons bien que  $\vec{v}$  et  $\vec{u}_\theta$  ne sont pas forcément dans le même sens, surtout si  $\dot{\theta}(t) < 0$  :  $\vec{u}_\theta$  est un vecteur de repérage, il faut donc savoir, pour le dessiner, comment se repère  $M$  et où est  $M$ , inutile de savoir ce que fait  $M$ .
- ◇ Maintenant si nous savons par avance dans quel sens tourne  $M$ , autant prendre  $\vec{u}_\theta$  dans le sens de la vitesse !

### III.1.iv – l'accélération n'est pas toujours normale

- ◇ Nous admettrons très provisoirement le résultat suivant.



Pour un point  $M$  évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$  repéré par  $\theta$ , le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2(t)\vec{u}_r + R\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{a}(t) = -\frac{v^2(t)}{R}\vec{u}_r + \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_\theta.$$

- ◇ La partie sur  $\vec{u}_r$  correspond à l'accélération normale et c'est celle qui permet de faire tourner le point matériel.
- ◇ La partie sur  $\vec{u}_\theta$  correspond à l'accélération tangentielle et c'est celle qui est responsable de l'augmentation (ou de la diminution) de la norme du vecteur vitesse, comme cela se voit avec l'expression  $\frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_\theta$ .
- ◇ Notons que dans l'expression de l'accélération tangentielle, ce n'est pas le vecteur vitesse qui est dérivé mais sa composante sur  $\vec{u}_\theta$ .

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dR\dot{\theta}(t)}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = R\ddot{\theta}(t) \quad \text{et} \quad \frac{v^2(t)}{R} = \frac{R^2\dot{\theta}^2(t)}{R} = R\dot{\theta}^2(t)$$

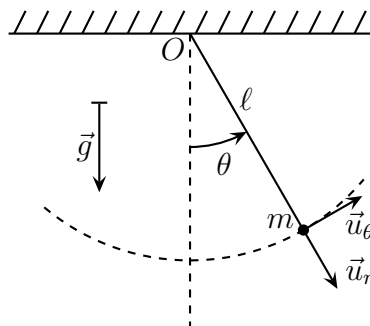
### III.1.v – piqure de rappel préventive

- ◇ Toutes les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération sont à parfaitement maîtriser puisque ce sont celles qui vont permettre de décrire le mouvement circulaire.
- ◇ Si la description du mouvement n'est pas juste, les lois physiques ne peuvent pas être bien transcrites et, de là, quelle que soit les les qualités physiques dont quelqu'un peut faire preuve, il ne pourra pas aller loin.

## III.2 – force de contact inconnue : la tension exercée par un fil

### III.2.i – un pendule simple

- ◇ Étudions les oscillations d'un pendule simple, *ie.* d'une masse accrochée au bout d'un fil.



- ◇ Analyse physique :
  - il va y avoir des oscillations à cause du poids qui entraîne la masse vers le bas et qui remonte grâce au fil. En négligeant l'interaction entre l'air et la masse, les oscillations peuvent durer très longtemps
  - il y a, cette fois, une contrainte du mouvement : la masse est accrochée au bout d'un fil, elle est donc toujours à la distance  $\ell$  du point d'attache, c'est un mouvement circulaire
- ◇ Analyse technique :
  - le repérage va être naturel : le centre  $O$  au point d'attache et l'angle  $\theta$  repéré par rapport à la verticale dont on sent qu'il s'agit de la position d'équilibre au repos
  - nous utiliserons le PFD

◇ La liste des forces qui s'exercent sur la masse sont :

- force à distance : son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$
- force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
- force de contact : les actions exercées par l'air (poussée d'Archimède négligée et frottements fluides négligés)

### III.2.ii – phénoménologie et caractéristiques de la tension exercée par un fil

Un *fil idéal* est un fil sans masse, sans raideur, parfaitement inextensible et infiniment souple

◇ Un fil empêche deux choses de s'éloigner de trop mais n'interdit pas qu'elles se rapproche.

- Un fil idéal exerce une force qui s'écrit  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}}$  avec
- $T$  une norme inconnue et *a priori* fonction du temps
  - $\vec{u}_{\text{sortant}}$  tangent au fil à son extrémité

◇ C'est la difficulté des forces exercées par les fils : la norme est *a priori* inconnue.

⊛ écrire directement à l'intuition, à la logique, la norme exercée par un fil, sans passer par une loi physique, conduit à une erreur ... sauf dans les cas où cette norme est sans intérêt.

### III.2.iii – mouvement du pendule simple

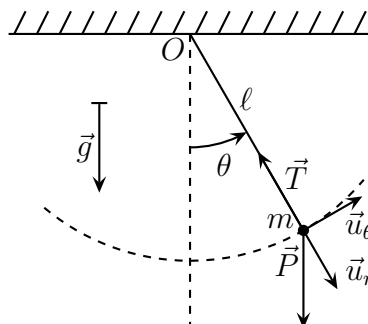
#### ★ traduction des lois physiques

◇ Écrivons le PFD :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a}$$

◇ Rien d'extraordinaire, c'est maintenant qu'il faut bien faire attention à la description des forces :

- $\vec{P} = m g \cos \theta \vec{u}_\theta - m g \sin \theta \vec{u}_r$  (géométrie pure)
- $\vec{T} = -T \vec{u}_r$  (loi physique du fil idéal)
- $\vec{a} = -\ell \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$  (cinématique)



#### ★ équation différentielle régissant le mouvement

◇ Projetons le PFD sur le vecteur  $\vec{u}_\theta$  :

$$-m g \sin \theta + 0 = m \ell \ddot{\theta}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0}$$

- ✧ Ce n'est pas une équation différentielle d'oscillations classiques à cause du  $\sin \theta$ .
- ✧ Les oscillations ne dépendent pas de la masse. Ce qui est très avantageux pour les trapézistes : peu importe la personne à réceptionner, le « top » départ est le même pour tous.

### 🌀 cas des petits angles

- ✧ Lorsque  $|\theta(t)| \ll 1$ , nous avons  $\sin \theta(t) = \theta(t)$  et alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta(t) = 0$$

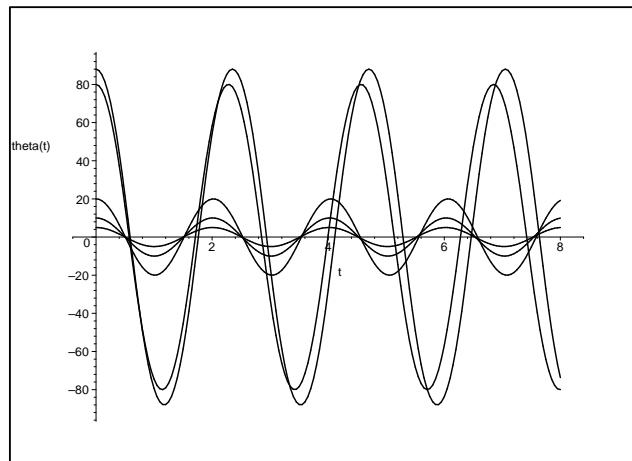
- ✧ Cette fois il s'agit bien d'oscillations de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

Pour un pendule simple de longueur  $\ell$  il y a *isochronisme* des petites oscillations à la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

- ✧ Isochronisme signifie simplement que toutes les petites oscillations se font sur un même rythme.

### 🌀 représentation graphique

Graphique 6



- ✧ Nous pouvons constater sur le graphique 6 que les oscillations de faible amplitude sont bien synchrones, contrairement à celles de grande amplitudes qui ont tendance à se décaler progressivement.

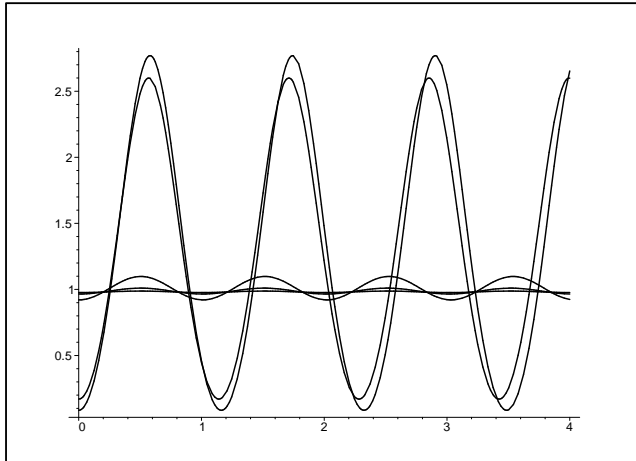
### ★ norme de la tension exercée par le fil

- ✧ Pour déterminer la norme de la tension que le fil exerce sur la masse, nous allons utiliser le revers du PFD.
- ✧ Pour cela projetons le PFD sur  $\vec{u}_r$  :

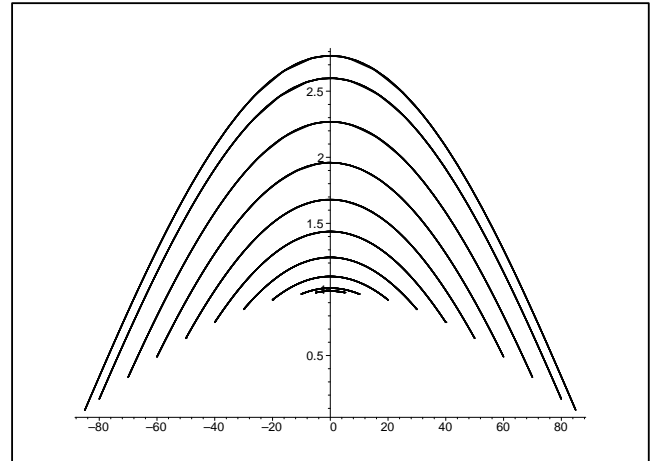
$$m g \cos \theta(t) - T = -m \ell \dot{\theta}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad T = m g \cos \theta(t) + m \ell \dot{\theta}^2(t)$$

- ✧ Pour l'instant nous ne pouvons pas déterminer d'expression plus simple de  $T(t)$ . Toutefois nous pouvons déjà constater que cette tension dépend bien de  $\theta$  et qu'elle est maximale pour  $\theta = 0$ , position pour laquelle non seulement  $\cos \theta$  est maximale mais aussi pour laquelle  $\dot{\theta}$  est maximale.

Graphique 7



Graphique 8

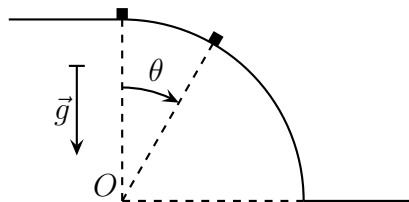


- ✧ Sur le graphique 7, nous pouvons voir  $T(t)$  alors que sur le graphique 8, nous avons tracé  $T(\theta)$ .
- ✧ Nous constatons que la tension dépend non seulement de la position mais aussi du mouvement : à  $\theta = 0$  la tension n'est pas la même suivant que les oscillations sont à faible ou forte amplitude !

### III.3 – force de contact inconnue : action exercée par un support

#### III.3.i – tomber d'une bosse

- ✧ Un objet est initialement posé au sommet d'une bosse de forme circulaire. Il se met à tomber du côté bombé. Où précisément décolle-t-il de la bosse ?



- ✧ Analyse physique :
  - l'objet est dans une position instable et va se mettre à tomber à un moment, il ne suivra pas la bosse jusqu'au bout.
  - tant que l'objet n'a pas décollé, il va avoir une trajectoire circulaire.
  - nous négligerons dans ce problème tout phénomène de frottement
  - étant donné que le problème est de déterminer s'il y a contact ou pas, il va falloir se concentrer sur la détermination de la force de contact
- ✧ Analyse technique :
  - c'est une trajectoire circulaire, le repérage est immédiat
  - il y a des forces inconnues, notamment la force de contact avec le support → il faudra faire attention aux projections du PFD
- ✧ Liste des forces s'exerçant sur l'objet :
  - force à distance : le poids (évidemment)
  - force de contact : l'action de l'air (négligée)
  - force de contact : l'action du support

### III.3.ii – phénoménologie et caractéristiques du contact avec un support

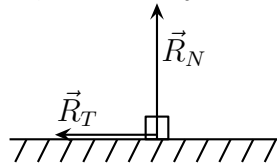
#### ★ phénoménologie

- ◇ Lorsqu'un objet est sur un support, il est important de savoir si l'objet peut, ou non, se séparer (décoller) de son support.
- ◇ Si un objet peut décoller, alors le support ne retient jamais l'objet, il ne fait **que** de le repousser.
- ◇ En plus de cela il peut y avoir des frottements lorsque l'objet glisse sur le support.

#### ★ caractéristique de l'action exercée par le support

L'action exercée par un support sur un objet se décompose en deux composantes :

- l'action normale notée  $\vec{R}_N$  dirigée vers l'extérieur du support caractérisant le fait que l'objet ne peut pas rentrer dans le support
- l'action tangentielle notée  $\vec{R}_T$  parallèle au plan du support et caractérisant les frottements, appelés *frottements solides*, entre l'objet et le support



L'action normale exercée par un support s'écrit  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sortant}}$  avec :

- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  normal au support au point de contact
- $R_N \geq 0$  s'il peut y avoir décollement
- $R_N \leq 0$  s'il ne peut pas y avoir de décollement

- ◇ Comme pour la force exercée par le fil, s'il arrive d'écrire « à l'intuition » directement que la norme de la réaction normale vaut tant, c'est soit juste et parfaitement inutile, soit faux et conduit à des erreurs.

### III.3.iii – angle de rupture

#### ★ traduction du problème

- ◇ Ici tous les frottements sont négligés, en particulier ceux dus au contact solide – solide.
- ◇ L'action du support se réduit donc à la composante normale.
- ◇ Le but du problème est de déterminer une rupture, c'est-à-dire une fin de contact. Comme une force de contact ne s'exerce que s'il y a contact, nous pouvons en déduire que s'il n'y a plus de force, il n'y a plus de contact.

Il y a rupture de contact entre deux objets dès lors que la norme de l'interaction de contact entre les deux devient nulle.

- ◇ Nous allons donc chercher à déterminer  $\vec{R}_N$  et pour cela, rien de tel qu'un bon vieux PFD !

#### ★ expression des lois physique

- ◇ Écrivons le PFD sur l'objet et les expressions des forces

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m \vec{a}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{P} &= -m g \cos \theta \vec{u}_r - m g \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{R}_N &= R_N \vec{u}_r \end{cases}$$

◇ Projétons sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :

$$\begin{cases} -m R \dot{\theta}^2(t) &= -m g \cos \theta + R_N \\ m R \ddot{\theta}(t) &= m g \sin \theta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_N &= -m R \dot{\theta}^2(t) + m g \cos \theta(t) \\ \ddot{\theta}(t) - \frac{g}{R} \sin \theta(t) &= 0 \end{cases}$$

◇ La deuxième équation différentielle est celle vérifiée par  $\theta(t)$ . Son écriture canonique est

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

Les solutions d'une équation différentielle de forme canonique

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)$$

s'écrivent  $\alpha(t) = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t) + \alpha_p(t)$   
où  $A$  et  $B$  sont les constantes d'intégration.

◇ Ici, cela signifie que  $\theta(t) = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t)$ , *ie.* que  $\theta(t)$  diverge. Rien de plus normal pour une position d'équilibre instable !

◇ La première équation différentielle est insuffisante pour déterminer  $R_N$  en fonction de la position, *ie.* en fonction uniquement de  $\theta$ .

### ★ manipulations usuelles

◇ Multiplions l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\theta(t)$  par  $\dot{\theta}(t)$  :

$$R \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) - g \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{R}{2} \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}^2(t) \right) + \frac{d}{dt} (g \cos \theta) = 0$$

◇ Intégrons cette relation **sans oublier les conditions initiales** :  $\dot{\theta}(0) = 0$  (départ sans vitesse initiale) et  $\theta(0) = 0$  (départ en haut) :

$$\frac{R}{2} \dot{\theta}^2(t) - 0 + (g \cos \theta - g) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad R \dot{\theta}^2(t) = 2 g (1 - \cos \theta)$$

◇ Nous pouvons alors remplacer cette expression dans cette de  $R_N$ , ce qui donne :

$$R_N = -m 2 g (1 - \cos \theta) + m g \cos \theta(t) \quad \rightsquigarrow \quad R_N = m g (3 \cos \theta - 2)$$

◇ La force normale exercée sur le support sera nulle pour  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  et donc l'angle de rupture vaut

$$\theta_c = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$$

## IV – Mouvements plus complexes

- ◇ Plus complexes, mais pas plus difficiles ! Avant cela, nous allons voir les deux dernières lois de la mécanique qui sont, parfois, bien utiles.

### IV.1 – Première loi de la mécanique : principe d'inertie

#### IV.1.i – énoncé

Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.

#### IV.1.ii – lecture

- ◇ C'est un énoncé dense !

##### ★ postulat

- ◇ Les référentiels galiléens existent. Donc voilà ! Maintenant il va falloir en trouver, c'est une autre paire de manches.

##### ★ propriété fondamentale d'un référentiel galiléen

- ◇ « tout point » : en tout lieu, en tout temps.  
◇ « trajectoire » : définie par rapport au référentiel  
◇ « rectiligne » : suivant une portion de droite  
◇ « uniforme » : à norme de vitesse constante

Un mouvement d'un point matériel est dit *uniforme* si la norme de son vecteur vitesse est constant.

- ◇ « somme des forces » : c'est appelé aussi la résultante des forces  
◇ « est nulle » : c'est bien la somme totale des forces qui doit être nulle, pas seulement la somme d'une ou deux.

##### ★ 2<sup>e</sup> effet du postulat

- ◇ C'est quelque chose qu'il est difficile de véritablement intégrer à son mode de raisonnement, et pourtant ...

Les forces ne servent pas à faire avancer mais à modifier la quantité de mouvement d'un point matériel.

- ◇ Cela se voit dans la 2<sup>e</sup> loi.

##### ★ utilité pratique

- ◇ Cette loi nous permettra, dans un chapitre ultérieur (le 4 sûrement) de dire quand un référentiel est ou n'est pas galiléen.

★ le principe d'inertie n'est pas ...

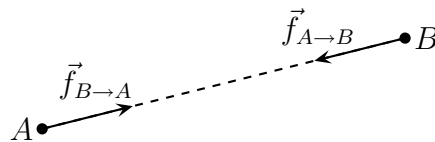
- ◇ Ce principe (pourtant souvent vu, lu, appris) est faux : « Dans un référentiel galiléen, un point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle. »
- ◇ Si tel était le cas, il pourrait se démontrer avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton (le PFD) et deviendrait alors complètement inutile en tant que loi !

## IV·2 – Troisième loi de la mécanique : principe des actions réciproques

### IV·2.i – énoncé

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{A \rightarrow B} \parallel \overrightarrow{AB}$$

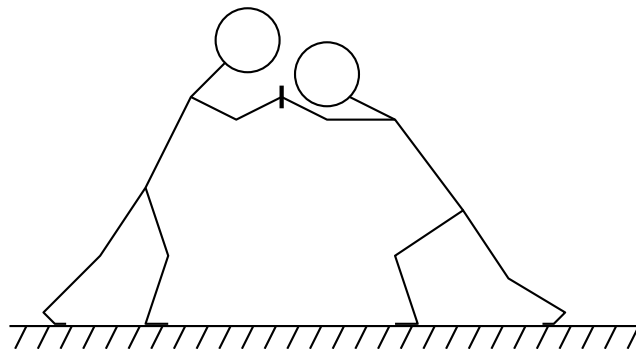


### IV·2.ii – lecture

- ◇ Tout d'abord c'est un énoncé fondamentalement différent des précédents car il parle de deux points matériels.
- ◇ La force que l'un exerce sur l'autre est à tout instant égale à l'opposée de celle que l'autre exerce sur le premier. Le fait que cela soit « à tout instant » est gênant pour l'intuition lorsque les points matériels sont éloignés. Le principe n'est alors pas véritablement faux mais appliqué sous une autre forme.

★ exemple du vas-y que je te pousse

- ◇ Étudions la situation suivante.



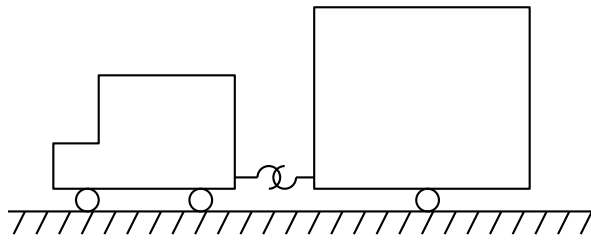
- ◇ Pourquoi l'un va-t-il gagner ? Parce qu'il pousse plus fort que l'autre ? Impossible. Ils se poussent au niveau des mains qui peuvent être considérées comme des points matériels à l'échelle de la situation : la force que l'un exerce sur l'autre est égale à celle qui subit !
- ◇ Regardons bien ce qui permet à l'un des bonhommes d'avancer. Faisons la liste des forces :
  - le poids : bof, ce n'est pas lui qui va jouer un rôle ici
  - la force de contact exercée par l'adversaire : a plutôt tendance à faire reculer



- la force de contact exercée par le sol : il **doit** y avoir des forces tangentielles et tant que le pied ne glisse pas, celles-ci sont inférieures à  $f R_N$
- ◇ Conclusion : pour gagner, mieux vaut :
  - avoir de bonnes chaussures et un sol bien agrippant
  - être lourd de sorte qu’il sera plus facile de pousser dans le sol ( $R_N$  grand)
- ◇ En plus de cela, d’après le PFD, plus la masse est imposante, plus les effets des forces subies est faible. Mieux vaut donc être lourd de telle sorte que l’action de l’autre n’ait que peu d’influence (effet sumo).

### ★ camping

- ◇ Pourquoi la voiture avance-t-elle alors qu’elle tire la caravane autant que la caravane ne la tire ?

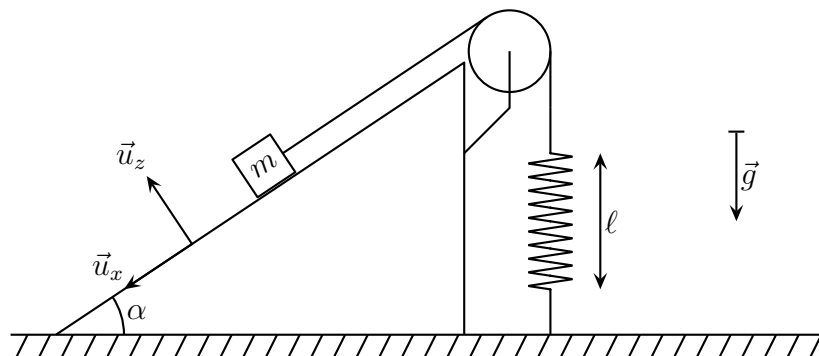


- ◇ Même réponse que ci-dessus : grâce aux frottements que la route exerce sur les pneus. Eh oui, une route sans frottement c’est une route verglacée, légèrement recouverte de produit vaisselle avec des pneus lisses. L’expérience montre qu’il est dès lors très difficile d’avancer.
- ◇ Notons que les pneus, dans le cas recherché, ne glissent pas par rapport à la route, sinon cela constituerait un dérapage.

## IV.3 – Force de contact inconnue : les frottements solides – rôle d’une poulie

### IV.3.i – masse reliée à un ressort

- ◇ Regardons la situation ci-dessous et cherchons la plage de valeurs dans laquelle doit se situer la longueur du ressort pour que la masse  $M$  soit à l’équilibre compte tenu du frottement qui existe entre la masse et le plan incliné.



- ◇ Analyse physique :
  - la position est une position d’équilibre : rien ne bouge
  - si les frottements seuls peuvent retenir la masse, alors le ressort est inutile
  - si le ressort aide à soutenir la masse, alors il est étiré et son action se fait par l’intermédiaire du fil

◇ Analyse technique :

- pas de mouvement ici, donc pas de PFD avec accélération
- pour parler du ressort, nous parlerons de sa longueur  $\ell(t)$  alors que pour parler de l’immobilité de la masse, nous utiliserons la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$

◇ Liste des forces qui s’exercent sur la masse :

- force à distance : le poids
- force de contact : la tension exercée par le fil
- force de contact : la force exercée par le support
- force de contact : l’action de l’air est négligé

◇ Le ressort n’exerce aucune force sur la masse ! Et pourtant c’est grâce à lui si la masse ne tombe pas !

### IV.3.ii – phénoménologie et caractéristiques des frottements solides

◇ Quand un solide est posé sur un plan incliné, il peut parfois rester en équilibre. Cela prouve non seulement l’existence de forces de frottements, mais en plus l’existence de frottements à vitesse nulle !

L’action tangentielle exercée par un support dépend de si l’objet glisse ou non sur le support.

- si l’objet glisse sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est la même que celle de la vitesse qu’a l’objet par rapport au support
  - $\vec{R}_T$  est opposée à la vitesse qu’a l’objet par rapport au support
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vaut  $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement
- si l’objet ne glisse pas sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est inconnue
  - le sens de  $\vec{R}_T$  est inconnu
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vérifie  $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement

◇ Remarquons tout d’abord que la force dépend de la vitesse de l’objet *par rapport* au support. Si le support est fixe, pas de problème, mais si le support bouge, c’est une autre histoire. La logique et l’intuition ne marche (à peu près) que dans les cas où le support est fixe dans le référentiel d’étude.

◇ Pour utiliser la force de frottement solide, il est nécessaire de connaître au moins un peu l’évolution de l’objet : nous prendrons alors l’expression adéquate pour la force. Si l’évolution n’est pas du tout connue, alors il faut faire une supposition, ce qui permet d’écrire une loi connue mais il faut alors vérifier une condition.

hypothèse	loi connue	condition à vérifier
l’objet glisse	$R_T = f R_N$	$\vec{v} \neq \vec{0}$
l’objet ne glisse pas	$\vec{v} = \vec{0}$	$R_T \leq f R_N$

### IV.3.iii – phénoménologie et rôle d’une poulie

◇ Ici la poulie n’a pour rôle que de tordre dans la bonne direction le fil, c’est un simple guide.

Une poulie est dite *idéale* si elle est sans masse et que sa rotation s’effectue sans frottement sur l’axe.

◇ Autrement dit, lorsque quelqu’un tire un fil / une corde qui passe dans une poulie idéale, il ne la sent pas du tout : il ne doit lutter ni contre sa mise en rotation ni contre les frottements qui l’empêcheraient de tourner.

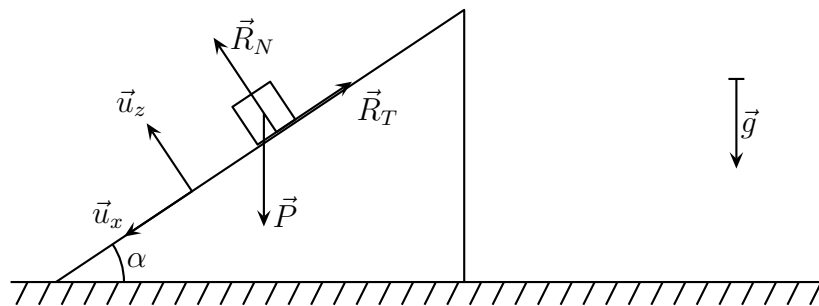
Lorsqu’un fil idéal passe par des poulies idéales, la tension que le fil exerce à chacune de ses deux extrémités est la même à chaque instant mais reste inconnue et de norme variable.

◇ Cela revient à dire que la poulie idéale a un rôle neutre dans l’histoire.

### IV.3.iv – équilibre de la masse

#### ★ équilibre sans fil – ressort

◇ Imaginons dans un premier temps que la masse n’est pas soumise à l’action du fil. Cherchons voir dans quelle condition elle est à l’équilibre.



◇ Le PFD, dans le cas particulier de l’équilibre s’écrit :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} +m g \sin \alpha + R_T = 0 \\ -m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

◇ Comme ici nous **savons** qu’il y a équilibre, nous pouvons écrire (et nous l’avons déjà fait) que  $\vec{v}(t) = \vec{0}$ .

◇ Cet équilibre est vérifié tant que  $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$  or :

$$\begin{cases} R_T = -m g \sin \alpha \\ R_N = m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases} \rightsquigarrow |R_T| = m g \sin \alpha \leq m g f \cos \alpha \rightsquigarrow \boxed{\tan \alpha \leq f}$$

◇ Ce résultat est homogène et cohérent : il existe un angle maximal à ne pas dépasser.

◇ Il est étonnant que cet angle soit indépendant de la masse et pourtant ...

#### ★ équilibre avec fil – ressort

◇ Notons  $f = \tan \alpha_0$  et plaçons-nous dans le cas où  $\alpha > \alpha_0$  alors la masse ne peut pas être en équilibre avec la simple force de frottement exercée par le support.

◇ Le PFD dans le cas de l’équilibre s’écrit :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} +m g \sin \alpha + R_T - T = 0 \\ -m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

◇ Or, avec un fil idéal et une poulie idéale, nous avons  $\|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{masse}}\| = \|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{ressort}}\|$ .

◇ De plus, puisque le ressort est directement attaché au fil, la 3<sup>e</sup> loi de Newton nous permet d’écrire :

$$\|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{ressort}}\| = \|\vec{f}_{\text{ressort} \rightarrow \text{fil}}\| = k(\ell - \ell_0)$$

✧ Nous obtenons alors  $R_T = k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha$  et  $|R_T| \leq f R_N$  se traduit en :

$$\begin{aligned} -f m g \cos \alpha &\leq k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha \leq f m g \cos \alpha \\ -m g \cos \alpha \sin \alpha_0 &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha \cos \alpha_0 \leq m g \cos \alpha \sin \alpha_0 \\ -m g \cos \alpha \sin \alpha_0 + m g \sin \alpha \cos \alpha_0 &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \leq m g \cos \alpha \sin \alpha_0 + m g \sin \alpha \cos \alpha_0 \\ m g \sin(\alpha - \alpha_0) &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \leq m g \sin(\alpha + \alpha_0) \\ \ell_0 + \frac{m g}{k \cos \alpha_0} \sin(\alpha - \alpha_0) &\leq \ell_{\text{éq}} \leq \ell_0 + \frac{m g}{k \cos \alpha_0} \sin(\alpha + \alpha_0) \end{aligned}$$

✧ Que raconte le résultat ?

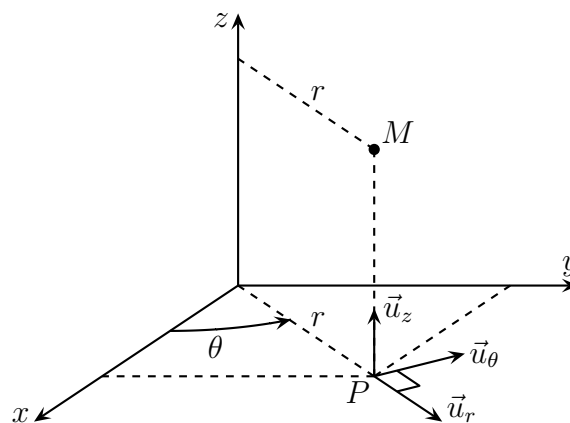
- qu'il existe une valeur minimale pour  $\ell_{\text{éq}}$  supérieure à  $\ell_0$  puisque  $\alpha > \alpha_0$
- que cette valeur minimale correspond au cas où  $R_T < 0$ , *ie.* dirigée vers le haut : la force de frottement empêche le ressort d'empêcher la masse de remonter
- la valeur maximale correspond au cas où  $R_T > 0$  *ie.* dirigée vers le bas : la force de frottement aide à « faire tomber » la masse car le ressort tire trop fort vers le haut

## IV.4 – Dynamique en coordonnées cylindro-polaires

### IV.4.i – grandeurs cinématiques

#### ★ objectif – repérage

✧ Nous allons généraliser le cas particulier du mouvement circulaire et chercher à décrire le mouvement (position, vitesse, accélération) d'un point en coordonnées cylindro-polaires.



Pour repérer un point en coordonnées cylindro-polaires, il faut trois nombres :

- $r(t) \geq 0$ , la distance à l'axe privilégié
- $\theta(t)$ , un angle
- $z(t)$  la cote

## ★ vecteur position

◇ En utilisant la relation de Chasles nous avons directement :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindro-polaire, la position est décrite par la donnée des trois grandeurs  $(r, \theta, z)$  et le vecteur position s'écrit

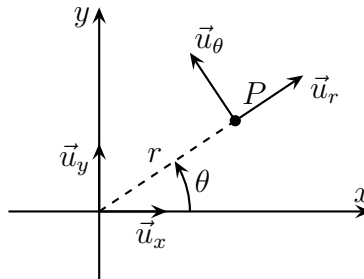
$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

## ★ vecteur vitesse

◇ Dérivons le vecteur position.

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r(t) + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + r(t) \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z$$

◇ Pour pouvoir dériver  $\vec{u}_r(t)$ , écrivons ses composantes dans la base cartésienne fixe.



◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \vec{u}_r(t) = \cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} &= -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \vec{u}_x + \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \vec{u}_y \\ &= \dot{\theta}(t) (-\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y) \end{aligned}$$

Dans la base cylindro-polaire :  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$ .

◇ Et finalement :

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

## ★ vecteur accélération

◇ Avant de dériver le vecteur vitesse, regardons voir ce qui se passe lorsque nous dérivons le vecteur  $\vec{u}_\theta$  par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \vec{u}_x - \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \vec{u}_y = -\dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y)$$

$$\text{Dans la base cylindro-polaire : } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_r.$$

- ◇ Nous pouvons constater que dériver un vecteur unitaire par rapport au temps revient à tourner ce vecteur de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens de rotation et à le multiplier par  $\dot{\theta}(t)$ .
- ◇ Nous pouvons à présent dériver le vecteur vitesse.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{d\dot{r}(t) \vec{u}_r}{dt} + \frac{dr(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta}{dt} + \frac{dz(t) \vec{u}_z}{dt} \\ &= \ddot{r}(t) \vec{u}_r + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + (\dot{r} \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{u}_\theta + (r(t) \dot{\theta}(t)) (-\dot{\theta}(t) \vec{u}_r) + \ddot{z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) \vec{u}_r + (2\dot{r}(t) \dot{\theta} + r(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{u}_\theta + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

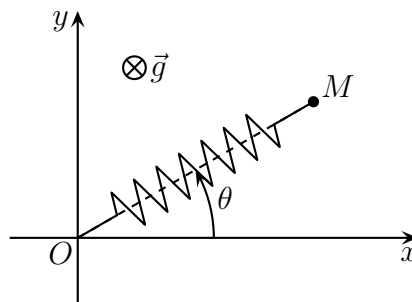
- ◇ Bien sûr dans le cas du mouvement circulaire où  $r(t) = C^{\text{te}}$  et  $z(t) = C^{\text{te}}$ , nous retrouvons les résultats connus :

$$\vec{v}(t) = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + R \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

## IV.4.ii – exemple du ressort tournant

### ★ problème

- ◇ Quelles sont les équations régissant l'évolution d'une masse posée sur un plan sans frottement et reliée à un ressort ?



- ◇ Analyse physique :
- la masse va tourner autour du centre tout en oscillant
  - le poids ne va pas intervenir puisque le mouvement se fait dans un plan horizontal
  - le dispositif est totalement libre, il n'y a pas de contrainte *a priori* de trajectoire
- ◇ Analyse technique :
- étant donné que la masse a tendance à tourner autour du centre, mieux vaut utiliser les coordonnées cylindro-polaire
  - ici les forces intervenant dans le mouvement (tension exercée par le ressort) sont toutes parfaitement connues : un PFD ira très bien.
- ◇ Liste des forces qui s'exercent sur M :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = -m g \vec{u}_z$
- force de contact : la force normale exercée par le plan (sans frottement)  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$
- force de contact : la tension exercée par le ressort  $\vec{T} = -k (\Delta \ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$

### ★ mise en équation

◇ Écrivons le PFD et projetons le sur  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  :

$$m \vec{g} + \vec{R}_N + \vec{T} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{z}(t) = -m g + R_N \\ m (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) = -k (r(t) - \ell_0) \\ m (2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) = 0 \end{cases}$$

- ◇ Comme nous savons que le mouvement est plan,  $z(t) = 0 = \text{C}^{\text{te}}$  ce qui permet à la première équation de nous apprendre que  $R_N = m g$ . Peut-être que nous aurions pu le dire intuitivement. Pour une fois, cela aurait été vrai ... mais parfaitement inutile.
- ◇ Les autres projections forment un système d'équations différentielles couplées qu'il est délicat de résoudre « comme ça ». Nous verrons, dans longtemps, comment aborder ce genre de problème, ce qui constituera un préliminaire à l'étude des satellites.

### ★ un bon départ

- ◇ En supposant que les conditions initiales soient  $\theta(0) = 0, r(0) = L$  et  $v(0) = v_0$ , quelle relation doivent vérifier ces conditions initiales pour que le mouvement soit circulaire ?
- ◇ Supposons le mouvement circulaire. Alors la projection sur  $\vec{u}_\theta$  conduit à :

$$m r(t) \ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta}(t) = \text{C}^{\text{te}} \quad \text{et} \quad v(t) = \text{C}^{\text{te}}$$

- ◇ Si le mouvement est circulaire (forcément de rayon  $L$ ), alors il est uniforme donc se fait avec une vitesse de norme  $v_0$ .
- ◇ Que nous apprend l'autre projection ?

$$-m L \dot{\theta}^2(t) = -k (L - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad -m \frac{v_0^2}{L} = -k (L - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m v_0^2 = k L (L - \ell_0)}$$

# Premiers pas en mécanique du point

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - les définitions de position, vitesse, accélération
  - les définitions de ressort idéal, fil idéal, poulie idéale
  - la définition de l'accélération de pesanteur

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître :
  - les coordonnées cartésiennes, la base cartésienne
  - les coordonnées cylindro-polaire, la base cylindro polaire
- ◇ Connaître les liens entre mètre, seconde, kilogramme, newton

### ★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement quelconque en coordonnées cartésiennes
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement circulaire
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement quelconque en coordonnées cylindro-polaire
  - la seconde loi de Newton
  - la première et la 3<sup>e</sup> loi de Newton

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - la phénoménologie du poids, des forces de frottement
  - la phénoménologie de la force exercée par un ressort
  - la phénoménologie d'un fil idéal, d'une poulie idéale
  - la phénoménologie de l'action d'un support

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir imaginer qualitativement l'évolution mécanique d'un dispositif et surtout savoir maîtriser ses impulsions intuitives explicatives.

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir déterminer quel est le meilleur repérage (cartésien ou cylindro polaire) et agir en conséquence.



## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
  - les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire

### ★ petits gestes

- ◇ Savoir :
  - faire un bilan de forces

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
  - la chute libre
  - le ressort
  - le pendule simple

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Phénoménologie</b>	<b>1</b>
I-1	Bouger ! . . . . .	1
I-1.i	monstration . . . . .	1
I-1.ii	qu'est-ce qui bouge ? . . . . .	1
I-1.iii	bouger par rapport à . . . . .	2
I-1.iv	finalemt, c'est quoi un mouvement ? . . . . .	3
I-2	Origine du mouvement . . . . .	4
I-2.i	les forces . . . . .	4
I-2.ii	forces à distance . . . . .	4
I-2.iii	forces de contact . . . . .	5
I-3	Mouvement qualitatif . . . . .	5
I-3.i	la trop fréquente confusion . . . . .	5
I-3.ii	le rôle des frottements . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Il bouge !</b>	<b>6</b>
II-1	La loi outil : le principe fondamental de la dynamique . . . . .	6
II-1.i	énoncé . . . . .	6
	réécriture usuelle . . . . .	6
II-1.ii	lecture . . . . .	7
II-2	Aborder un problème de mécanique . . . . .	7
II-2.i	analyse physique et technique . . . . .	8
II-2.ii	trouver « le » système . . . . .	8
II-2.iii	trouver les forces . . . . .	8
II-2.iv	choisir le bon repère . . . . .	9
II-3	force à distance : le poids . . . . .	9
II-3.i	situation à étudier – analyse . . . . .	9
II-3.ii	phénoménologie et caractéristiques du poids . . . . .	10
	phénoménologie . . . . .	10
	caractéristiques . . . . .	10
	une autre masse . . . . .	10
II-3.iii	mouvement de la masse . . . . .	10
	équation différentielle régissant l'évolution . . . . .	10
	équation horaire . . . . .	11
	cas particulier d'une vitesse initiale nulle . . . . .	12
II-3.iv	quelques caractéristiques du mouvement . . . . .	12
	trajectoire . . . . .	13
	portée . . . . .	13
II-4	force de contact connue : les frottements fluides . . . . .	14
II-4.i	situation à étudier – analyse . . . . .	14
II-4.ii	phénoménologie et caractéristiques des frottements fluides . . . . .	15
	phénoménologie . . . . .	15
	caractéristiques . . . . .	15
II-4.iii	trajectoires avec le modèle linéaire . . . . .	16
	application des lois physiques . . . . .	16
	trouver la vitesse . . . . .	16
	trouver la position . . . . .	17
	trajectoires . . . . .	17
II-4.iv	trajectoire avec le modèle quadratique . . . . .	17

	lois physiques . . . . .	17
	trajectoires . . . . .	18
II-5	force de contact connue : la force élastique . . . . .	18
II-5.i	une masse au bout d'un ressort . . . . .	18
II-5.ii	phénoménologie et caractéristiques de la force élastique . . . . .	19
	phénoménologie de l'action d'un ressort . . . . .	19
	caractéristiques . . . . .	19
	et les élastiques . . . . .	20
II-5.iii	un mouvement déjà connu . . . . .	20
	lois physiques . . . . .	20
	équations horaires . . . . .	20
<b>III</b>	<b>Trajectoires circulaire</b>	<b>21</b>
III-1	Décrire un mouvement circulaire . . . . .	21
III-1.i	phénoménologie . . . . .	21
	de nombreux exemples . . . . .	21
	deux accélérations . . . . .	21
III-1.ii	un repère évident pour un repérage simple . . . . .	22
III-1.iii	la vitesse est toujours tangentielle . . . . .	23
III-1.iv	l'accélération n'est pas toujours normale . . . . .	23
III-1.v	piqûre de rappel préventive . . . . .	24
III-2	force de contact inconnue : la tension exercée par un fil . . . . .	24
III-2.i	un pendule simple . . . . .	24
III-2.ii	phénoménologie et caractéristiques de la tension exercée par un fil . . . . .	24
III-2.iii	mouvement du pendule simple . . . . .	25
	traduction des lois physiques . . . . .	25
	équation différentielle régissant le mouvement . . . . .	25
	norme de la tension exercée par le fil . . . . .	26
III-3	force de contact inconnue : action exercée par un support . . . . .	27
III-3.i	tomber d'une bosse . . . . .	27
III-3.ii	phénoménologie et caractéristiques du contact avec un support . . . . .	27
	phénoménologie . . . . .	27
	caractéristique de l'action exercée par le support . . . . .	28
III-3.iii	angle de rupture . . . . .	28
	traduction du problème . . . . .	28
	expression des lois physique . . . . .	28
	manipulations usuelles . . . . .	29
<b>IV</b>	<b>Mouvements plus complexes</b>	<b>29</b>
IV-1	Première loi de la mécanique : principe d'inertie . . . . .	29
IV-1.i	énoncé . . . . .	29
IV-1.ii	lecture . . . . .	30
	postulat . . . . .	30
	propriété fondamentale d'un référentiel galiléen . . . . .	30
	2 <sup>e</sup> effet du postulat . . . . .	30
	utilité pratique . . . . .	30
	le principe d'inertie n'est pas . . . . .	30
IV-2	Troisième loi de la mécanique : principe des actions réciproques . . . . .	30
IV-2.i	énoncé . . . . .	31
IV-2.ii	lecture . . . . .	31

	exemple du vas-y que je te pousse . . . . .	31
	camping . . . . .	32
IV·3	Force de contact inconnue : les frottements solides – rôle d’une poulie . . . . .	32
IV·3·i	masse reliée à un ressort . . . . .	32
IV·3·ii	phénoménologie et caractéristiques des frottements solides . . . . .	33
IV·3·iii	phénoménologie et rôle d’une poulie . . . . .	33
IV·3·iv	équilibre de la masse . . . . .	33
	équilibre sans fil – ressort . . . . .	34
	équilibre avec fil – ressort . . . . .	34
IV·4	Dynamique en coordonnées cylindro-polaires . . . . .	35
IV·4·i	grandeurs cinématiques . . . . .	35
	objectif – repérage . . . . .	35
	vecteur position . . . . .	35
	vecteur vitesse . . . . .	36
	vecteur accélération . . . . .	36
IV·4·ii	exemple du ressort tournant . . . . .	37
	problème . . . . .	37
	mise en équation . . . . .	38
	un bon départ . . . . .	38
	Analyse physique . . . . .	39

# Mécanique

## Chapitre 2

### La mécanique autrement qu'en forces

# La mécanique autrement qu'en forces

Dans ce chapitre, nous allons voir comment aborder une situation mécanique autrement qu'avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton et ses projections vectorielles et ses résolutions d'équations différentielles.

Pour commencerons par étudier sous l'angle énergétique des situations dites à évolution conservatives. Ensuite nous examinerons plus en détails la manière dont se font les échanges énergétiques. Enfin, dans une dernière partie nous verrons une toute nouvelle méthode permettant de représenter directement toutes les évolutions possible d'un dispositif.

## I – Évolutions conservatives

### I.1 – Phénoménologie

#### I.1.i – exemples d'évolutions

- ◇ Ce sont des évolutions où tout se passe « parfaitement bien ». Si rigoureusement, elles n'existent jamais, il est néanmoins possible sur des durées d'évolution suffisamment courtes (mais jamais infinitésimales) de les considérer comme telles.
- ◇ Exemples :
  - le pendule simple qui oscille indéfiniment
  - le ressort horizontal ou vertical qui oscille indéfiniment
  - la chute libre sans impact
  - la rotation d'un satellite autour de la Terre
- ◇ Nous sentons bien que ces évolutions sont, certes, idéales mais nous voyons quand même qu'elles ne sont pas inaccessibles.

#### I.1.ii – conditions à respecter

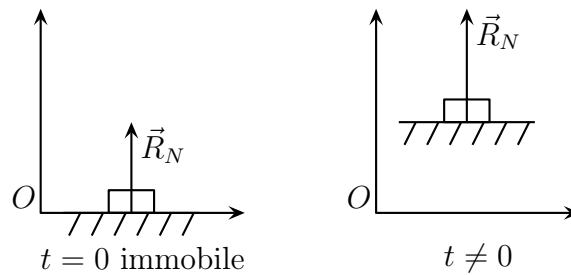
- ◇ La première condition qui saute aux yeux est celle de l'absence de frottements, c'est vrai, mais c'est loin d'être la plus importante. La plus importante c'est avant tout :

Une évolution ne peut être conservative que si elle est libre.

- ◇ Autrement dit, il faut que personne, aucun dispositif n'apporte de l'énergie (le mot est lâché).

Pour une évolution libre soit conservative, il suffit qu'il n'y ait aucun frottements.

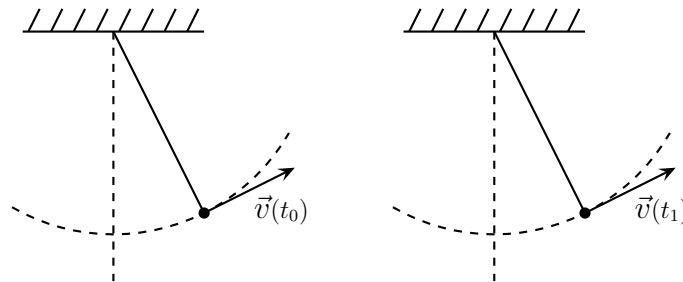
- ◇ C'est une condition suffisante et non nécessaire ! Nous connaissons déjà un cas où (certains) frottements peuvent permettre une évolution parfaite. C'est le cas des voitures qui roulent : les frottements sur la route sont absolument nécessaires pour avancer et ce ne sont pas eux qui ralentissent la voiture ...
- ◇ Que dire de l'évolution suivante ? Est-elle conservative ou non ? L'action du support est sans frottement et c'est bien  $\vec{R}_N$  qui a poussé l'objet vers le haut. Personne d'autre !



- ◇ Réponse : non car il faut qu'un agent extérieur intervienne pour mettre en mouvement le support. L'évolution n'est pas libre bien qu'il n'y ait pas de frottements.
- ◇ Au passage, pour que l'objet monte, il a fallu, obligatoirement  $\|\vec{R}_N\| > \|\vec{P}\|$  ce qui signifie notamment que  $\|\vec{R}_N\| \neq \|\vec{P}\|$  ou encore que les réactions normales ne compensent **pas toujours** le poids !

### I.1.iii – particularité : un lien fort entre vitesse et position

- ◇ Regardons d'un peu plus près une évolution conservative, par exemple le pendule simple et faisons une photo à un instant de la situation.



- ◇ Refaisons plus tard, n'importe quand une photo lorsque la masse est strictement au même endroit (et va dans le même sens).
- ◇ La vitesse est la même, ce qui est normal étant donné que l'évolution est périodique. Avec une évolution non conservative, il est facile d'imaginer que la vitesse diminue un peu à chaque passage

Pour une évolution conservative, la vitesse à un endroit peut être déduite de la donnée des conditions initiales indépendamment du temps écoulé.

- ◇ La conséquence de cette observation va être l'introduction d'une grandeur, l'énergie, qui permettra de relier position et vitesse.

## I.2 – De l'énergie partout

### I.2.i – dans le mouvement

L'énergie cinétique est l'énergie que possède un objet du fait même de son mouvement.

L'énergie cinétique, notée  $E_c$  d'un point matériel de masse  $m$  s'écrit  $E_c = \frac{1}{2} m v^2(t)$ .

- ✧ L'énergie cinétique n'est pas si évidente et si naturelle que cela car elle dépend de la vitesse qui dépend du référentiel.
- ✧ Ainsi lorsque un même dispositif est étudié dans deux référentiels différents, il peut apparaître des phénomènes fondamentalement différents au point de vue énergétique, phénomènes qui peuvent paraître parfois paradoxaux.

### I.2.ii – grâce au poids

- ✧ Le fait que le poids fasse naturellement tomber les objets, même initialement immobile, permet de dire que le poids permet de « créer » de l'énergie cinétique.
- ✧ Comme la physique refuse la création énergétique, nous dirons que cette énergie cinétique était, avant de devenir cinétique, sous une autre forme, sous une forme « potentiellement cinétique ».

L'énergie *potentielle* est une énergie due à la position particulière d'un objet et qui peut se transformer en énergie cinétique ou réciproquement.

L'énergie potentielle due au poids est appelée *énergie potentielle de pesanteur*.

L'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse  $m$  s'écrit :

$$E_{pp} = m g (z - z_{\text{réf}}) \text{ où :}$$

- $\vec{u}_z$  est un axe vertical vers le haut
- $z_{\text{réf}}$  est la cote de référence (arbitraire) pour laquelle l'énergie potentielle de pesanteur est nulle

- ✧ Si l'axe vertical  $\vec{u}_z$  est orienté vers le bas, ce qui arrive parfois, alors l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = -m g (z - z_{\text{réf}})$$

- ✧ De toute façon, il faut toujours vérifier que plus un objet monte, plus son énergie potentielle est grande, en faisant naturellement attention aux valeurs négatives.

### I.2.iii – grâce aux ressorts

L'énergie potentielle due à la force exercée par un ressort est appelée *énergie potentielle élastique*.

L'énergie potentielle élastique d'un point matériel fixé à un bâti par l'intermédiaire d'un ressort s'écrit :  $E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2$  où :

- $k$  est la constante de raideur du ressort
- $(\Delta\ell) = \ell - \ell_0$  est l'allongement du ressort



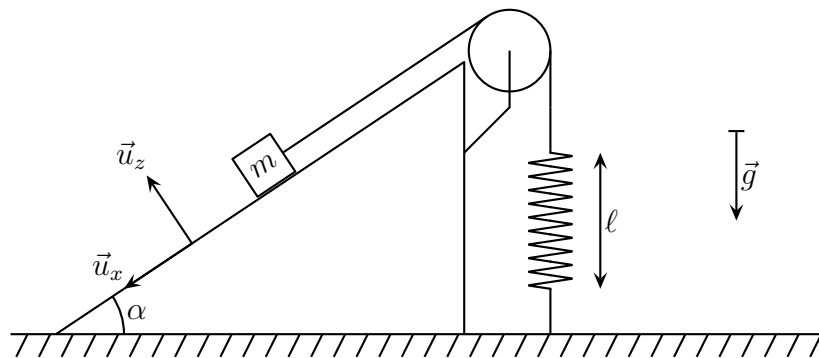
Faire bien attention à l'écriture :  $(\Delta\ell)^2 \neq \Delta\ell^2 = \Delta(\ell^2)$  car  $(\ell - \ell_0)^2 \neq \ell^2 - \ell_0^2$ .



- ◇ Si l'autre extrémité du ressort n'est pas fixe alors la situation est un peu plus complexe que cela car cela signifie :
  - soit que le bâti est mobile et alors l'évolution n'est pas conservative
  - soit que l'autre extrémité du ressort est attaché à un autre point matériel et alors des outils d'études de systèmes de plusieurs points matériels (chapitre 5) seront plus adaptés

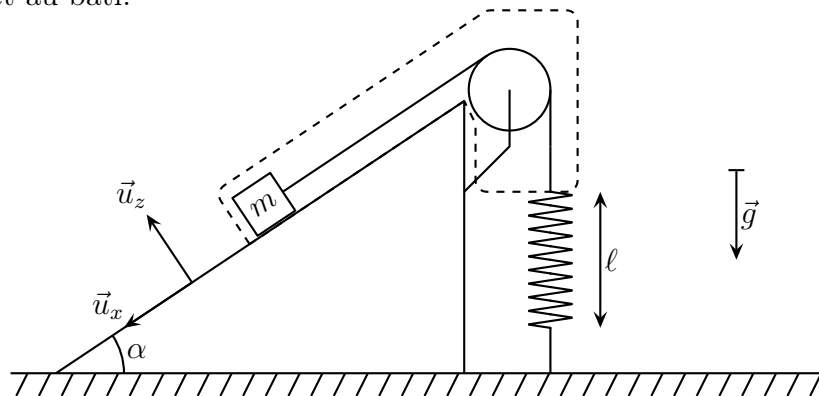
## I.3 – Faire un bilan énergétique

- ◇ Une fois bien repéré le fait que l'évolution soit conservative, faire un bilan énergétique n'est pas difficile mais demande de la rigueur.
- ◇ Comme souvent, la rigueur apportée dans les cas simples semblera superflue, mais lorsque les cas plus complexes arriveront le manque d'entraînement sur ces cas presque intuitifs sera préjudiciable.
- ◇ Regardons ce que cela donne sur une situation déjà connue mais pour laquelle nous considérerons, cette fois, qu'il n'y a aucun frottement nulle part.



### I.3.i – choisir le système

- ◇ Lorsqu'il n'y a qu'un point matériel, c'est assez simple (quoique ...)
- ◇ Dans le cas d'un dispositif complexe tel que celui présenté, mieux vaut arrêter le système aux extrémités des ressorts et au bâti.



### I.3.ii – vérifier la conservation de l'énergie

- ◇ Il faut vérifier tout ce qui n'est pas poids ou ressort, autrement dit, toutes les forces de contact.

Pour qu'il y ait évolution conservative, il ne faut pas de force de frottement fluide.

- ◇ En effet, soit le fluide est au repos et tend à ralentir l'objet, soit il tend à le pousser et alors ce n'est plus un régime libre.

- ✧ Pour les forces de frottement solide, lorsqu'il n'y a pas de frottement, ça va, mais il ne faut pas oublier le cas de la roue qui peut rouler indéfiniment grâce avec des frottements.

Pour qu'il y ait évolution conservative, il faut que les forces de frottement solide soient telles que :

- il y ait glissement sans frottement
- il y ait frottement sans glissement

- ✧ Ici il y a plusieurs endroits où il y a des frottements solides : entre la masse et le plan et dans la poulie qui tourne autour de son axe. Mais tout va bien : la poulie est idéale et il n'y a pas de frottements entre le plan et la masse.

Pour qu'il y ait évolution conservative, les forces de liaison rigide doivent se faire sur des points immobiles.

- ✧ Sur le système étudié, il y a un point qui subit une force de liaison rigide : la barre soutenant la poulie. Ça tombe bien, ce point est immobile dans le référentiel d'étude.
- ✧ Nous pouvons sentir que si la barre de soutien de la poulie avait été mobile, de l'énergie aurait pu rentrer (tige reliée à un moteur) ou sortir (tige bougeant en frottant) à ce niveau là.

### I.3.iii – et yapuka

- ✧ Une fois démontré l'évolution conservative (ce qui peut être plus ou moins délicat suivant le système choisi), il n'y a plus qu'à écrire la loi de conservation.

L'énergie mécanique représente le total de l'énergie intéressante en mécanique et vaut :

$$E_m \triangleq E_c + E_p$$

- ✧ Il existe des énergies plus « totale » que l'énergie mécanique, mais cela fait intervenir des grandeurs autres que des grandeurs purement mécaniques.

Lorsqu'un système  $\mathcal{S}$  subit une évolution conservative par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , son énergie mécanique est constante au cours du temps.

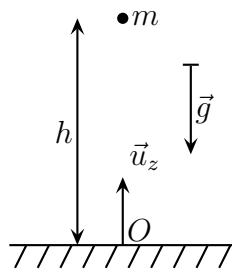
$$E_m = C^{\text{te}}$$

- ✧ Le plus souvent, nous déterminerons cette constante avec les conditions initiales, mais rien ne nous y oblige. Quelques fois, nous nous passerons de l'expression de cette constante.

## I.4 – Exemples

### I.4.i – chute libre

- ✧ Déterminons la vitesse en fin de chute libre pour un objet ponctuel lâché sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$ .
- ✧ Bien sûr sa vitesse finale, après impact est nulle, mais *juste avant* l'impact, qu'en est-il ?



◇ Analyse physique :

- la trajectoire va être rectiligne
- il n'y a pas de frottement (du moins jusqu'à juste avant l'impact) donc l'évolution sera conservative

◇ Analyse technique :

- le repérage est immédiat étant donné que l'évolution est rectiligne
- l'évolution étant conservative et la question ne portant que sur la vitesse sans notion de durée, un bilan énergétique s'impose

◇ L'évolution du point matériel est conservative donc  $E_m = E_c + E_p = C^{\text{te}}$

◇ Étant donné que la vitesse est purement verticale,  $v(t) = \dot{z}(t)$  d'où  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t)$ .

◇ Ici seul le poids a une action, donc l'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur.  $E_p = +m g z$  en prenant naturellement le point de référence à la cote nulle.

◇ Nous avons donc :  $\frac{1}{2} m \dot{z}^2(t) + m g z(t) = C^{\text{te}}$ .

◇ À l'instant initiale la vitesse est nulle, la hauteur est maximale : toute l'énergie est sous forme potentielle.  $E_m = m g h$ .

◇ À l'instant final (juste avant l'impact), la hauteur est minimale : toute l'énergie potentielle s'est convertie en énergie cinétique (c'est la raison de vivre de l'énergie potentielle). Nous avons donc  $E_m = \frac{1}{2} m v_f^2$ .

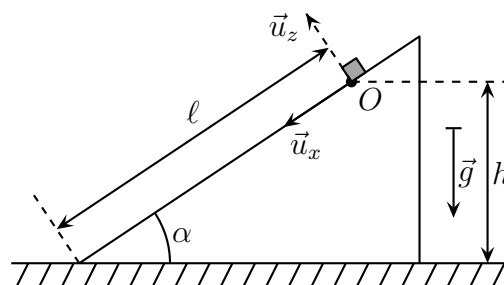
◇ La conservation de l'énergie implique  $\frac{1}{2} m v_f^2 = m g h$  soit le résultat connu  $\boxed{v_f = \sqrt{2 g h}}$ .

◇ Juste après l'impact, l'énergie mécanique est nulle :

- elle ne s'est donc pas conservée pendant l'impact
- c'est à cause de la force que le sol exerce sur l'objet *en mouvement*
- l'énergie n'est pas vraiment perdue : elle a été dissipée, mais c'est une autre histoire

### I.4.ii – descendre une pente

◇ Considérons un objet non susceptible de rouler glissant sur un plan incliné sur une distance  $\ell$ . Quelle sera la vitesse finale s'il n'y a pas de frottements ?



◇ Analyse physique :

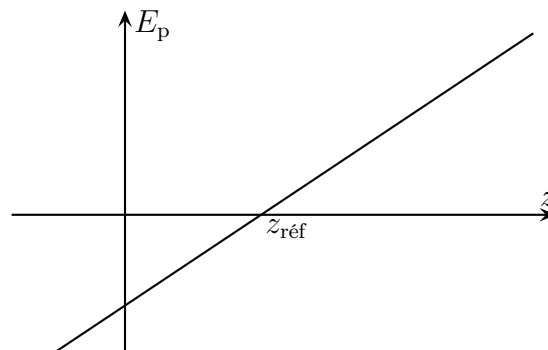
- l'objet va tomber entraîné par son poids

- sa trajectoire est guidée
- il n'y a pas de frottement : l'évolution va être conservative
- ◇ Analyse technique :
  - l'axe est naturel (parallèle à la pente) l'origine est au choix
  - nous cherchons une vitesse sans considération de temps pour une évolution conservative? faisons une approche énergétique
- ◇ Écrivons la conservation de l'énergie mécanique.
- ◇ Au début, l'énergie est uniquement potentielle du type «  $E_p = m g z$  » sauf que  $z$  est déjà une notation réservée. Ici cela donne  $E_m = E_p(0) = m g \ell \sin \alpha$ .
- ◇ En bas, l'énergie est entièrement cinétique et  $E_c = \frac{1}{2} m v_f^2$ .
- ◇ La conservation de l'énergie aboutit à  $\frac{1}{2} m v_f^2 = m g \ell \sin \alpha$  soit  $v_f = \sqrt{2 g \ell \sin \alpha}$ .
- ◇ Ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme  $v_f = \sqrt{2 g h}$  où  $h$  est la hauteur descendue.
- ◇ Ici, bien que la chute soit loin d'être libre, la vitesse acquise à la fin est la même qu'en chute libre. Cela est dû au fait que le support n'a, finalement, pas d'influence énergétique mais a un simple rôle de guide de trajectoire.

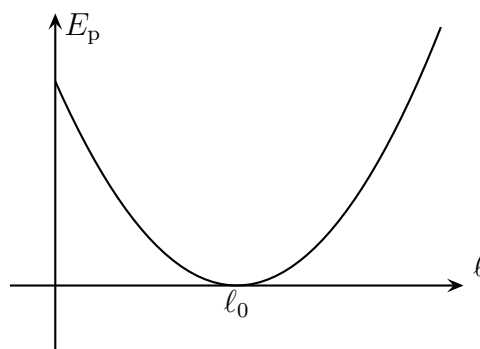
## I.5 – Trouver une position d'équilibre

### I.5.i – lien qualitatif entre force et énergie potentielle

- ◇ Cherchons un lien qualitatif entre force et énergie potentielle.
- ◇ Que « cherche » à faire le poids ? Le poids tend à faire tomber vers le bas.
- ◇ En termes énergétique, faire aller vers le bas consiste à faire diminuer l'énergie potentielle.



- ◇ Que « cherche » à faire un ressort ? Un ressort tend à recouvrer sa longueur naturelle, *ie.* à annuler son allongement.

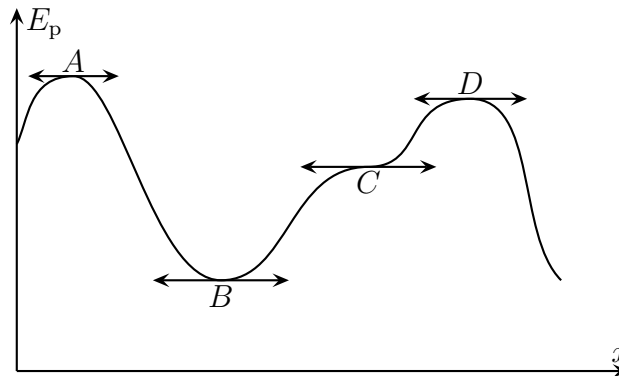


- ◇ En termes énergétique, recouvrer sa longueur naturelle consiste à faire diminuer l'énergie potentielle.

La force est toujours dirigée dans le sens des énergie potentielles décroissantes.

### I.5.ii – une loi fondamentale

- ◇ Si les forces sont telles que naturellement, en régime libre, elles sont dirigées vers zones où l'énergie potentielle décroît, nous pouvons nous demander ce qu'il en est lorsque un point matériel est dans une zone où l'énergie est stationnaire :



- ◇ Nous pouvons imaginer que :

- sur un maximum, physiquement le point matériel est attiré des deux côtés, il est donc en équilibre
- sur un minimum, le point matériel n'est attiré nulle part, il est en équilibre.

Un point matériel est en équilibre en des points où l'énergie potentielle est stationnaire.

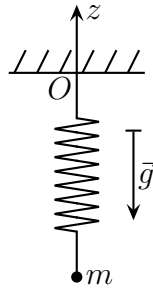
- ◇ Que se passe-t-il si le point matériel n'est pas rigoureusement en un point d'équilibre, mais presque ?
- en une zone où l'énergie potentielle est maximale, le point matériel est irrémédiablement attiré loin de sa position initiale
  - en une zone où l'énergie potentielle est minimale, le point matériel est ramené à sa position initiale.

Les zones de minimum d'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre stable alors que les zones où l'énergie potentielle est maximale correspondent à des équilibres instables.

- ◇ Dans l'exemple ci-dessus, il y a une position d'équilibre stable et trois positions d'équilibre instable.
- ◇ Avec la représentation graphique de l'énergie potentielle, il est toujours possible de sentir la stabilité ou l'instabilité d'une position d'équilibre. Il suffit pour cela d'imaginer que le graphique représente des rails sur lesquels une petite bille peut rouler, l'intuition fera alors le reste.

### I.5.iii – exemple du ressort vertical

- ◇ Reprenons l'exemple du ressort vertical.



✧ Ici le poids et la force exercée par le ressort vont avoir une influence sur l'évolution donc l'énergie potentielle sera la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique, ce qui donne, compte-tenu du fait que  $\ell = -z$  :

$$E_p = E_{pp} + E_{p,él} = m g z + \frac{1}{2} k (-z - \ell_0)^2$$

✧ Le minimum de cette fonction est donc telle que :

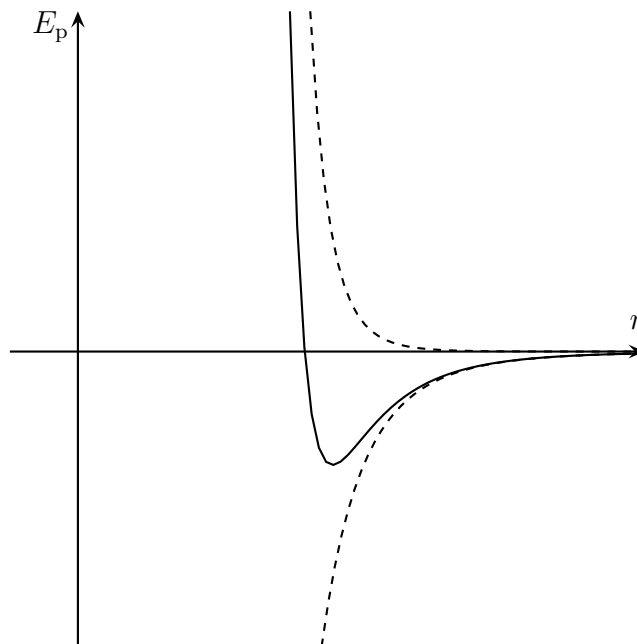
$$\frac{dE_p}{dz} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad m g + \frac{1}{2} k 2(-1)(-z_{eq} - \ell_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z_{eq} = -\ell_0 - \frac{m g}{k}$$

⊛ pour rechercher une **position** d'équilibre, il est naturel de chercher comment l'énergie varie en fonction de la **position**, cela explique le  $\frac{dE_p}{dz}$  : il n'y a aucune notion de temps là-dedans.

### I.5.iv – interaction intermoléculaire

✧ L'énergie que possède une molécule située à la distance  $r$  d'une autre molécule de même type s'écrit :

$$E_p(r) = E_0 \left( \frac{a^{12}}{r^{12}} - \frac{a^6}{r^6} \right)$$



✧ Lorsque nous traçons séparément les deux termes nous pouvons voir que :

→ le terme  $E_0 \frac{a^{12}}{r^{12}}$  est un terme répulsif et est prédominant à courte distance

→ le terme  $-E_0 \frac{a^6}{r^6}$  est un terme attractif et est prédominant à grande distance

◇ La position d'équilibre, celle correspondant à la distance  $r_0$  pour laquelle les deux molécules n'ont tendance ni à s'éloigner, ni à se rapprocher est telle que  $\frac{dE_p}{dr}(r_0) = 0$ . Or :

$$\frac{dE_p(r)}{dr} = E_0 \left( -12 \frac{a^{12}}{r^{13}} + 6 \frac{a^6}{r^7} \right) \rightsquigarrow 12 \frac{a^{12}}{r_0^{13}} = 6 \frac{a^6}{r_0^7} \rightsquigarrow r_0^6 = 2 a^6 \rightsquigarrow \boxed{r_0 = 2^{1/6} a}$$

◇ L'énergie potentielle vaut alors :

$$E_p(r_0) = E_0 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{E_0}{4}$$

◇ Nous pouvons nous assurer de la stabilité de la position d'équilibre en dérivant une seconde fois.

$$\frac{dE_p}{dr} = 6 E_0 \left( -2 \frac{a^{12}}{r^{13}} + \frac{a^6}{r^7} \right) \rightsquigarrow \frac{d^2 E_p(r)}{dr^2} = 6 E_0 \left( 26 \frac{a^{12}}{r^{14}} - 7 \frac{a^6}{r^8} \right)$$

◇ Déterminons le signe de cette dérivée en  $r_0$  qui est tel que  $r_0^6 = 2 a^6$  :

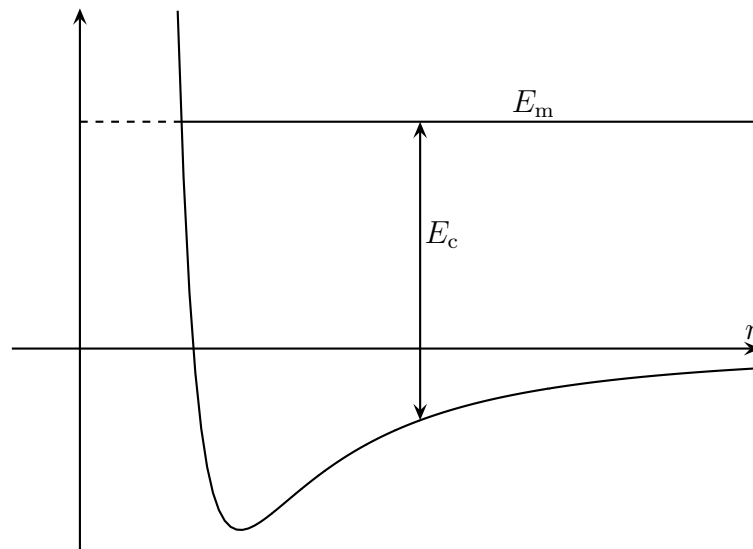
$$\frac{d^2 E_p}{dr^2}(r_0) = 6 E_0 \left( 26 \frac{a^{12}}{4 a^{12} r_0^2} - 7 \frac{a^6}{2 a^6 r_0^2} \right) \rightsquigarrow \frac{d^2 E_p}{dt^2}(r_0) = \frac{6 E_0}{r_0^2} \left( \frac{26}{4} - \frac{7}{2} \right) = 18 \frac{E_0}{r_0^2} > 0$$

## I.6 – Interprétation graphique d'une évolution conservative

### I.6.i – tout est dans l'énergie potentielle

◇ Lorsqu'une évolution est conservative, alors nous pouvons écrire  $E_m = E_c + E_p = C^{\text{te}}$  avec  $E_c \geq 0$ .

◇ Nous pouvons alors représenter sur un même graphique  $E_p$ ,  $E_m$  et  $E_c$ .

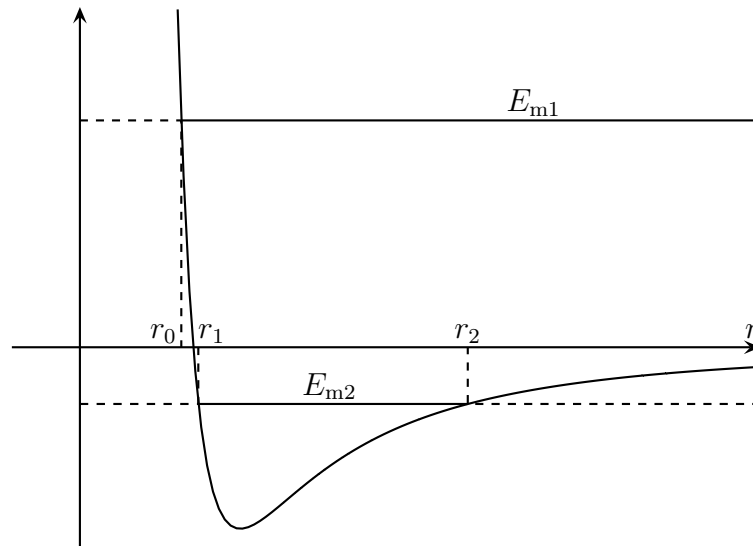


◇ Sur le point représenté :

- $E_p < 0$  et dans la zone attractive
- $E_c > 0$
- $E_m > 0$

### I.6.ii – différents types de mouvements

- ◇ L'énergie cinétique est obligatoirement positive. Dans ces conditions, quelle que soit la valeur de l'énergie mécanique, certaines positions ne seront pas accessibles (pas assez d'énergie).
- ◇ Suivant la valeur de l'énergie mécanique, il y a deux possibilités :
  - soit les positions accessibles pour  $r$  sont comprises entre deux valeurs
  - soit les positions accessibles pour  $r$  ne sont pas bornées



Lorsqu'un dispositif est tel que la variable qui caractérise sa position ne peut pas devenir infinie, l'état dans lequel il est est dit *état lié*.  
Si le paramètre de position peut devenir infini, il s'agit d'un *état de diffusion*.

Un même dispositif peut être dans un état lié ou de diffusion suivant les conditions initiales.

## II – Échanges énergétiques

### II.1 – Phénoménologie

#### II.1.i – caractère résistant ou moteur d'une force

- ◇ Imaginons des dispositifs à évolution non conservative.
- ◇ Tout d'abord le pendule simple réel. L'expérience montre qu'à la fin le pendule s'arrête :
  - l'énergie mécanique a été dissipée
  - la différence entre le réel et l'idéal ce sont les frottements

Une force est dite *résistante* lorsqu'elle a tendance à faire diminuer l'énergie cinétique d'un objet.

- ◇ Mais il existe d'autres cas où des forces (autres que le poids ou les ressorts) permettent de mettre en mouvement.



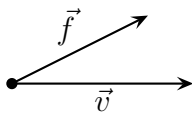
Une force est dite *motrice* lorsqu'elle a tendance à faire augmenter l'énergie cinétique d'un objet.

- ◇ Comme nous l'avons déjà dit, les frottements peuvent être moteurs :
  - entraînement par le vent, par les courants pour les frottements fluides
  - le tapis de caissière qui « tirent » les objets sur lui
- ◇ Les caractères résistant ou moteur d'une force se basent sur l'énergie cinétique, donc la vitesse, d'un objet. Par conséquent ...

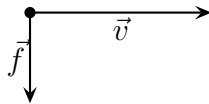
Les caractères « résistant » et « moteur » d'une force dépendent de la force, du dispositif et aussi du référentiel d'étude.

### II·1·ii – allure d'une force motrice ou résistante

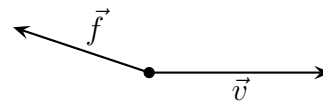
- ◇ Dans les trois cas ci-dessous, quel est le rôle des forces ?



cas ①



cas ②



cas ③

- cas ① : la force sera motrice
- cas ② : la force sera ni motrice ni résistante
- cas ③ : la force sera résistante

Pour qu'une force soit motrice, il faut que le vecteur qui la représente soit dans le même sens que le vecteur vitesse du point matériel.

## II·2 – Les échangeurs d'énergie : les forces

### II·2·i – puissance et travail fournis par une force

#### ★ puissance fournie par une force

La puissance fournie par une force  $\vec{f}$  à un point matériel animé de la vitesse  $\vec{v}$  s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

- ◇ Cette relation nous permet de faire le lien entre W, kg, m et s :

$$[\mathcal{P}] = [\vec{f}][\vec{v}] = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad \rightsquigarrow \quad 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

### ★ énergie fournie par une force

L'énergie fournie par une force s'appelle le *travail* fourni par la force et se note  $W$ .

◇ Pendant la durée  $dt$ , le point matériel parcourt  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  et reçoit l'énergie  $\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v} dt \dots$

Le travail élémentaire fourni par une force  $\vec{f}$  à un point matériel qui se déplace de  $d\vec{r}$  s'écrit :

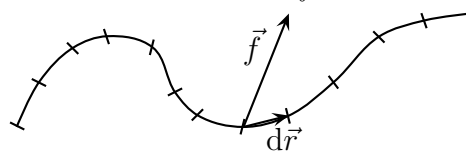
$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

◇ Notons qu'ici le travail élémentaire se note  $\delta W$  et non  $dW$  !

◇ Un point qui ne se déplace pas (dans le référentiel d'étude) ne peut pas recevoir d'énergie (ni en perdre).

◇ Lorsque le point matériel ne parcourt pas une distance infinitésimale mais une grande distance, alors pour déterminer le travail total fourni par la force, il suffit de diviser le chemin parcouru en morceau et de sommer le tout.

Le travail total reçu par un point matériel entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire soumis à la force  $\vec{f}$  s'écrit :



$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

*A priori* le travail fourni par la force entre les deux points  $A$  et  $B$  dépendent de la trajectoire suivie.

◇ C'est la raison fondamentale qui fait que nous devons écrire  $\delta W$  et pas  $dW$ .

### ★ déplacement élémentaire

◇ Quelles sont les coordonnées de  $d\vec{r}$ ?

◇ Pour les trouver, il ne faut pas oublier que  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ . Or :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

◇ De même en coordonnées cylindro-polaires :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

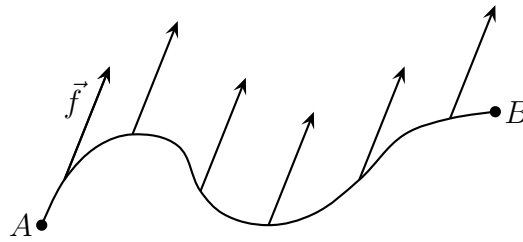
En coordonnées cylindro-polaire, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

- ✧ Bien que cela soit **la** méthode universelle pour calculer le travail fourni par une force, nous l'utiliserons que très rarement.

### II.2.ii – cas particulier des forces vectoriellement constantes

Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante  $\vec{f}$  entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire le travail :



$$W_{AB} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

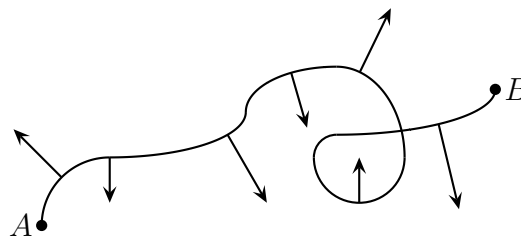
- ✧ En effet, puisque  $\vec{f} = \vec{C}^{\text{te}}$ , nous pouvons la sortir de l'intégrale et :

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \int_A^B d\vec{r} \stackrel{\text{Chasles}}{=} \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- ✧ Une force classique dans ce cas : le poids ... mais nous n'utiliserons pas non plus cette méthode pour calculer le travail que le poids fournit.
- ✧ Sur le schéma présenté, le point matériel peut-il n'être soumis qu'à la force  $\vec{f}$ ? Non car si tel était le cas, la trajectoire serait rectiligne ou parabolique, ce qu'elle n'est visiblement pas.

### II.2.iii – cas particulier des forces toujours orthogonales à la trajectoire

Un point matériel reçoit de la part d'une force  $\vec{f}$  constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.



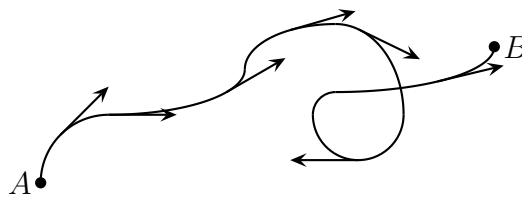
$$W_{AB} = 0$$

- ✧ En effet, pour chaque déplacement élémentaire  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$ , ce qui implique que l'énergie totale reçue est belle et bien nulle.
- ✧ Nous pouvons retrouver ce résultat avec l'expression de la puissance :  $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ .
- ✧ Nous voyons alors bien que le travail n'est pas la primitive de la puissance mais son intégrale : c'est une somme !

- ✧ Ces forces qui fournissent un travail nul ne sont pas inutiles : elles servent à guider le point matériel dans une trajectoire voulue.
- ✧ Ce cas est souvent celui de  $\vec{R}_N$  ... quand le support est immobile !
- ✧ Sur le schéma présenté, le point matériel peut-il n'être soumis qu'à la force  $\vec{f}$  ? Non car la force n'est pas toujours tournée vers la concavité de la trajectoire.

## II.2.iv – cas particulier des forces d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire

Un point matériel reçoit de la part d'une force  $\vec{f}$  constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :

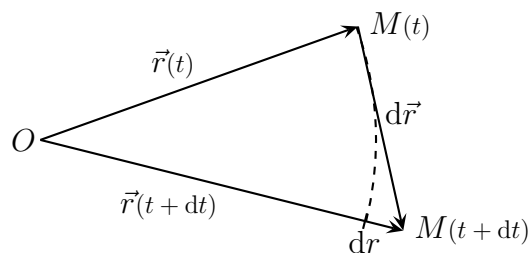


$W_{AB} = \pm \ell_{AB} f$  où  $\ell_{AB}$  est la longueur totale du trajet parcouru entre  $A$  et  $B$  et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.

- ✧ En effet, pour chaque déplacement élémentaire  $d\vec{r}$ , nous avons  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$  et comme  $\vec{f}$  et  $d\vec{r}$  sont colinéaires, cela donne  $\delta W = \pm f d\ell$  où  $d\ell$  est la distance parcourue.
- ✧ Par sommation de tous les travaux élémentaires reçus, nous trouvons bien que le travail total reçu vaut  $W = \pm f \ell$ .

### ★ Notations sur les déplacements élémentaires

- ✧ Il faut noter  $d\ell$  la distance parcourue et non  $dr$  car sinon il y risque de confusion.



- ✧ En effet :

$$\begin{cases} dr &= r(t+dt) - r(t) = \|\vec{r}(t+dt)\| - \|\vec{r}(t)\| \\ d\ell &= \|d\vec{r}\| = \|\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)\| \end{cases} \rightsquigarrow d\ell \neq dr$$

## II.3 – Réservoir officiel d'énergie : les forces conservatives

### II.3.i – expression simple du travail fourni

Une force est dite *conservative* lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle*  $E_p(M)$  ne dépendant que de la position et telle que :

→ le travail élémentaire s'écrit  $\delta W = -dE_p$

→ le travail fourni entre  $A$  et  $B$  s'écrit  $W_{AB} = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$

◇ La relation  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p$  est la relation fondamentale de l'énergie potentielle : c'est elle qui la définit algébriquement.

◇ Les deux relations données sont équivalentes. En effet :

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dE_p = - \int_A^B dE_p = -(E_p(B) - E_p(A))$$

◇ Le signe «  $-$  » est là par convention ...

#### ★ une infinité d'énergie potentielle

L'énergie potentielle associée à une force conservative est définie à une constante arbitraire près.

◇ Montrons que si  $E_p(M)$  est associée à  $\vec{f}$  alors  $E'_p(M) = E_p(M) + E_0$  est aussi associée à  $\vec{f}$ .

$$\begin{aligned} -\Delta E'_p &= -(E'_p(B) - E'_p(A)) = -(E_p(B) + E_0 - E_p(A) - E_0) \\ &= -(E_p(B) - E_p(A)) = W_{AB} \end{aligned}$$

◇ Ce qui prouve bien qu'il est possible de calculer le travail fourni par  $\vec{f}$  et donc que  $E'_p(M)$  est associée à  $\vec{f}$ .

◇ Nous devons donc bien préciser la constante **arbitraire** lorsque nous chercherons l'expression d'une énergie potentielle.

#### ★ des énergies potentielles additives

Si deux forces  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  sont conservatives d'énergies potentielles respectives  $E_{p1}(M)$  et  $E_{p2}(M)$  alors leur résultante  $\vec{F}$  est conservative d'énergie potentielle associée  $E_{p,\text{tot}}(M) = E_{p1}(M) + E_{p2}(M)$ .

◇ Pour cela calculons le travail fourni par la résultante  $\vec{F}$  :

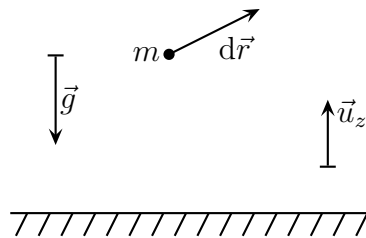
$$\begin{aligned}
W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{f}_2 \cdot d\vec{r} \\
&= W_{AB}(\vec{f}_1) + W_{AB}(\vec{f}_2) = -(E_{p1}(B) - E_{p1}(A)) - (E_{p2}(B) - E_{p2}(A)) \\
&= -\left( (E_{p1}(B) + E_{p2}(B)) - (E_{p1}(A) + E_{p2}(A)) \right) = -(E_{p,\text{tot}}(B) - E_{p,\text{tot}}(A))
\end{aligned}$$

◇ Ce qui prouve bien que  $\vec{F}$  est conservative et que le travail qu'elle fournit se calcule grâce à l'énergie potentielle  $E_{p,\text{tot}}(M)$ .

### II.3.ii – retrouver $E_{pp}$ et $E_{p,\text{él}}$

#### ★ retrouver l'énergie potentielle de pesanteur

◇ Considérons un point matériel dans le champ de pesanteur et effectuant un déplacement  $d\vec{r}$ .



◇ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p$ .

◇ La force subie est le poids  $\vec{P} = -m g \vec{u}_z$  et le déplacement élémentaire vaut  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$  ce qui donne  $\delta W = -m g dz$ .

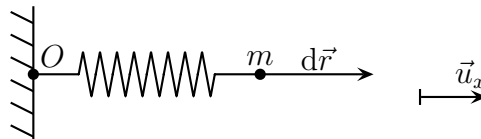
◇ L'énergie potentielle recherchée est alors telle que :

$$-dE_p = -m g dz \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dE_p}{dz} = m g \quad \rightsquigarrow \quad E_p = +m g z + C^{\text{te}}$$

◇ Ce qui est bien le résultat connu en prenant en compte le fait que la constante est choisie de telle sorte que l'énergie potentielle soit nulle à la cote  $z_{\text{réf}}$ .

#### ★ retrouver l'énergie potentielle élastique

◇ Considérons un point matériel accroché à un ressort et effectuant un déplacement  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$ .



◇ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p$ .

◇ La force subie est la tension exercée par le ressort qui vaut  $\vec{f} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x$  et le déplacement élémentaire vaut  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$  ce qui donne  $\delta W = -k(x - \ell_0) dx$ .

◇ L'énergie potentielle recherchée est alors telle que :

$$-dE_p = -k(x - \ell_0) dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = k(x - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad E_p = +\frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2 + C^{\text{te}}$$

Une convention usuelle consiste à choisir l'énergie potentielle nulle à l'endroit où la force associée est nulle.

◇ Nous cherchons donc à avoir  $E_p(\ell_0) = 0$  ce qui donne le résultat connu  $E_{p,el} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2$ .

### II.3.iii – la force à partir de l'énergie potentielle

Si un point matériel a une trajectoire rectiligne d'axe  $Ox$  et possède l'énergie potentielle  $E_p(x)$ , alors la force associée vaut :

$$\vec{f} = -\frac{dE_p(x)}{dx} \vec{u}_x$$

⊞ Attention : cette relation n'est pas valable pour les autres trajectoires. En particulier pour les trajectoires circulaires, nous n'avons pas  $f(\theta) = \frac{dE_p(\theta)}{d\theta}$  : c'est non homogène !

◇ Montrons cette relation. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f} = f(x) \vec{u}_x \\ d\vec{r} = dx \vec{u}_x \end{array} \right. \rightsquigarrow \delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = f(x) dx = -dE_p \rightsquigarrow f(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

◇ Nous retrouvons bien que la force est dirigée vers les zones de bas potentiels :

- si  $E_p(x)$  augmente,  $f(x) < 0$  donc attire vers les  $x$  plus faibles
- si  $E_p(x)$  diminue,  $f(x) > 0$  donc attire vers les  $x$  plus grands

### II.3.iv – retrouver la condition d'équilibre

◇ Nous allons retrouver la condition d'équilibre dans le cas d'une trajectoire rectiligne et admettons la généralisation du résultat.

◇ Considérons un point matériel  $M$  ayant une trajectoire rectiligne d'axe  $Ox$  et soumis à  $\vec{f} = f(x) \vec{u}_x$  dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(x)$ .

◇ Ce point est considéré à l'équilibre lorsque  $\vec{v}(t) = \vec{0}$  ce qui implique (d'après le PFD)  $\vec{a}(t) = \vec{0}$  puis  $\vec{f} = \vec{0}$ .

◇ Or  $f(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$  d'après le paragraphe précédent.

Les positions d'équilibres d'un point matériel possédant l'énergie potentielle  $E_p$  sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

### II.3.v – retrouver la condition de stabilité

◇ Nous allons retrouver la condition d'équilibre dans le cas d'une trajectoire rectiligne et admettons la généralisation du résultat.

◇ Considérons un point matériel  $M$  ayant une trajectoire rectiligne d'axe  $Ox$  et soumis à  $\vec{f} = f(x) \vec{u}_x$  dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(x)$ .

Une position d'équilibre est dite *stable* si un point matériel légèrement écarté de cette position subit des forces qui tend à l'y faire revenir.

Une position d'équilibre est dite *invariante* si un point matériel légèrement écarté de cette position ne subit aucune force.

Dans les autres cas, la position d'équilibre est dite *instable*.

✧ Considérons donc une position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  et un point  $M$  légèrement écarté de cette position et cherchons la force que subit le point matériel.

✧ Aux alentours de  $x_{\text{eq}}$ , l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \times \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} (x - x_{\text{eq}})^2 \times \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}})$$

✧ Ce n'est ni plus ni moins que le développement de Taylor d'une fonction  $f(x)$  mais en notation « à la physicienne » :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0)$$

✧ Pour l'énergie potentielle, compte tenu de la position d'équilibre et en notant  $A_{\text{eq}} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}})$  :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{eq}}) + 0 + \frac{1}{2} (x - x_{\text{eq}})^2 A_{\text{eq}} \quad \rightsquigarrow \quad f(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = 0 - (x - x_{\text{eq}}) A_{\text{eq}}$$

✧ Et ainsi :

Si	il faut	et donc
$x > x_{\text{eq}}$	$f(x) < 0$	$A_{\text{eq}} > 0$
$x < x_{\text{eq}}$	$f(x) > 0$	$A_{\text{eq}} > 0$

Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est minimale.

## II.4 – Théorèmes énergétiques

### II.4.i – version cinétique

#### THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel soumis à une résultante  $\sum \vec{f}$  et étudiée par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) \text{ où :}$$

→  $E_c$  est l'énergie cinétique de  $M$

→  $\mathcal{P}(\vec{f})$  est la puissance fournie par la force  $\vec{f}$

✧ Démontrons ce résultat en commençant par écrire le PFD appliqué au point  $M$  :

$$\sum \vec{f} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

✧ Multiplions scalairement cette équation par  $\vec{v}$  :



$$\vec{v} \cdot \left( m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{v} \cdot \left( \sum \vec{f} \right) = \sum (\vec{v} \cdot \vec{f}) = \sum (\vec{f} \cdot \vec{v}) = \sum \mathcal{P}(\vec{f})$$

$$\diamond \text{ De plus : } \frac{dv^2}{dt} = \frac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

$\diamond$  Nous arrivons ainsi à :

$$m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \mathcal{P}(\vec{f})$$

#### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel soumis à une résultante  $\sum \vec{f}$  et étudiée par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Alors entre deux points  $A$  de sa trajectoire :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{f}) \text{ où :}$$

- $\rightarrow \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$  est la variation d'énergie cinétique de  $M$
- $\rightarrow W(\vec{f})$  est le travail fourni par la force  $\vec{f}$

$\diamond$  La démonstration est immédiate : c'est le théorème de la puissance cinétique intégré entre  $A$  et  $B$ .

$$\int_A^B \frac{dE_c}{dt} dt = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

$\diamond$  Et aussi :

$$\int_A^B \left( \sum \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \sum \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \sum W(\vec{f})$$

### II.4.ii – version mécanique

#### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel soumis à une résultante  $\sum \vec{f}$  et étudiée par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Alors entre deux points  $A$  de sa trajectoire :

$$\Delta E_m = \sum W(\vec{f}_{nc}) \text{ où :}$$

- $\rightarrow \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A)$  est la variation d'énergie mécanique de  $M$
- $\rightarrow W(\vec{f}_{nc})$  est le travail fourni par les forces non conservatives

$\diamond$  Écrivons le TEC pour le point  $M$  en séparant le travail fourni par les forces conservatives du travail fourni par les forces non conservatives :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{f}_c) + \sum W(\vec{f}_{nc}) = -\sum (\Delta E_p) + \sum W(\vec{f}_{nc}) = -\Delta(\sum E_p) + \sum W(\vec{f}_{nc})$$

$\diamond$  Et ainsi :

$$\sum W(\vec{f}_{nc}) = \Delta E_c + \Delta(\sum E_p) = \Delta(E_c + \sum E_p) = \Delta E_m \quad \text{C.Q.F.D.}$$

 écrire  $\Delta E_m = 0$  ou  $E_m = C^{\text{te}}$  n'est **pas** le théorème de l'énergie mécanique mais un cas particulier qu'il convient de redémontrer à chaque fois.

## THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel soumis à une résultante  $\sum \vec{f}$  et étudiée par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) \text{ où :}$$

- $E_m$  est l'énergie cinétique de  $M$
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{nc})$  est la puissance fournie par la force  $\vec{f}$

◇ C'est la dérivée du TEM.

## II.4.iii – quand les utiliser ?

- ◇ Il y a deux styles de théorèmes : ceux en  $\Delta E$  et ceux en  $\frac{dE}{dt}$ . Il y a aussi ceux qui parlent d'énergie cinétique et ceux qui parlent d'énergie mécanique. Tous ces théorèmes sont très proches les uns des autres donc il peuvent quasiment être utilisé indifféremment l'un que l'autre.
- ◇ Toutefois, dans l'esprit :
  - les théorèmes en  $\Delta E$  sont plus adaptés aux question portant sur un bilan sans notion de temps (comme par exemple pour trouver une vitesse à un endroit donné)
  - les théorèmes en  $\frac{dE}{dt}$  expriment comment  $dE$  varie en fonction de  $dt$  : c'est donc plutôt une nouvelle manière de trouver une équation différentielle régissant l'évolution du point matériel, la notion de « temps » y est importante
- ◇ Plutôt énergie cinétique ou énergie mécanique ? C'est quasiment équivalent
  - pour un problème de mécanique « pure », les versions avec l'énergie mécanique seront plus adaptées, c'est presque une évidence car l'énergie mécanique est faite pour cela
  - pour un problème énergétique avec des considérations mécaniques, les versions cinétiques pourront parfois être plus claires en ce qui concerne les échanges énergétiques
- ◇ Il y a un autre facteur à prendre en compte : le nombre d'inconnues de position.

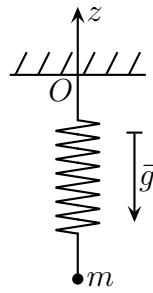
Le nombre minimal de grandeurs permettant de décrire entièrement la position d'un dispositif est appelé le *nombre de degré de liberté*.

- ◇ Il y a un seul degré de liberté, par exemple quand :
  - la trajectoire est rectiligne :  $x(t)$  ou  $z(t)$
  - la trajectoire est circulaire :  $\theta(t)$
  - la trajectoire est guidée :  $\ell(t)$
- ◇ De manière générale, plus il y a de contraintes sur la trajectoire, moins il y a de degré de liberté.
- ◇ Il faut savoir que les méthodes énergétiques sont extrêmement performantes sur les problèmes à un degré de liberté, que l'évolution soit conservative ou non.

## II.5 – Une nouvelle méthode pour des exemples connus

## II.5.i – ressort vertical

- ◇ Retrouvons l'équation différentielle vérifiée par une masse accrochée à un ressort vertical.



◇ Comme nous cherchons une équation différentielle, nous allons écrire le TPM.

◇ La masse est soumise :

→ à son poids d'énergie potentielle  $E_{pp} = m g z$

→ à la force exercée par le ressort d'énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k (-z - \ell_0)^2$

→ il n'y a pas de forces non conservatives

◇ L'énergie cinétique s'écrivant  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t)$  (trajectoire rectiligne) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t) \right) + \frac{d}{dt} \left( m g z(t) + \frac{1}{2} k (-z(t) - \ell_0)^2 \right) = 0$$

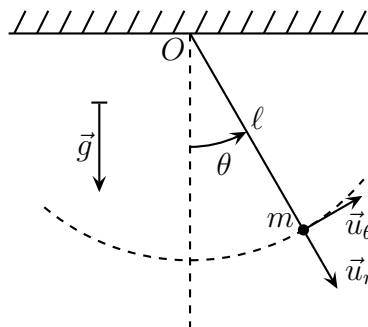
$$\rightsquigarrow m \ddot{z}(t) \dot{z}(t) + m g \dot{z}(t) - k \dot{z}(t) (-z(t) - \ell_0) = 0$$

◇ Et en simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{z}(t) = 0$  correspondant à l'équilibre :

$$m \ddot{z}(t) + k z(t) = -m g - k \ell_0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} z(t) = -g - \frac{k}{m} \ell_0$$

## II.5.ii – pendule simple

◇ Reprenons l'exemple du pendule simple.



◇ La masse est soumise :

→ à son poids qui est une force conservative

→ à la tension exercée par le fil qui ne travaille pas étant donné la trajectoire et l'idéalité du fil

◇ Analyse technique :

→ repérage polaire obligatoire

→ un bon petit théorème énergétique, le TPM

◇ Pour l'énergie potentielle, nous avons  $E_p = +m g z = -m g \ell \cos \theta$ .

◇ Et pour l'énergie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2(t)$

◇ Et le TPM donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2(t) \right) + \frac{d}{dt} (-m g \ell \cos \theta) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad m \ell^2 \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) m g \ell \sin \theta(t) = 0$$

✧ Et en simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{\theta}(t) = 0$  correspondant à l'équilibre, nous obtenons :

$$m \ell^2 \ddot{\theta}(t) + m g \ell \sin \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

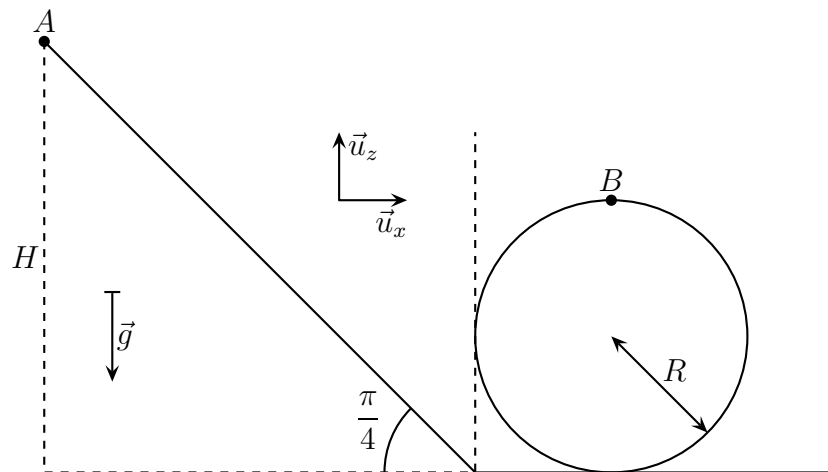
✧ L'avantage ? Pas de forces à projeter ...

## II.6 – Looping sur un grand 8

✧ Travaillons maintenant sur une situation où les théorèmes énergétiques ne serviront pas « que » à trouver la réponse directement.

### II.6.i – une attraction connue

✧ Considérons le looping suivant.



✧ Un chariot suffisamment petit pour être considéré ponctuel roule sur des rails. L'ensemble des frottements est assimilé à une force  $\vec{f}$  d'intensité constante et toujours opposée à la vitesse.

✧ Le chariot est lâché en A sans vitesse initiale.

### II.6.ii – vitesse au sommet

✧ Première question que nous pouvons nous poser c'est : « Le chariot, dont le but est de faire le tour, va-t-il arriver en B et si oui, à quelle vitesse ? »

✧ Analyse physique :

- le chariot va déjà descendre de plus en plus vite, entraîné par son poids (et ralenti par les frottements) puis va remonter en ralentissant
- le dispositif est à trajectoire connue il y aura donc des forces inconnues
- l'évolution globale n'est pas conservative à cause des frottements

✧ Analyse technique :

- ici il n'y a pas vraiment de repérage à faire étant donné que la situation est étudiée à un endroit. Dans ces conditions, nous allons utiliser les coordonnées les plus naturelles pour repérer B et A : les cartésiennes

→ comme aucune notion de temps n'est requise, un bon bilan énergétique sera parfait pour répondre à la question

### ★ écriture du théorème

◇ Le chariot est soumis à trois forces :

- force à distance : le poids (conservatif donc ☺)
- la réaction normale des rails (les frottements sont comptés avec  $\vec{f}$ ) : pas conservatif
- les frottements : pas conservatifs

◇ Nous avons donc pour ce chariot :

$$\Delta E_m = W(\vec{R}_N) + W(\vec{f})$$

◇ Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m(A) = \frac{1}{2} m v^2(A) + m g z(A) = 0 + m g H \\ E_m(B) = \frac{1}{2} m v^2(B) + m g z(B) = \frac{1}{2} m v^2(B) + m g 2 R \end{array} \right. \rightsquigarrow \Delta E_m = \frac{1}{2} m v^2(B) + m g (2 R - H)$$

### ★ travaux fournis par les différentes forces

◇ Comme  $\vec{R}_N$  est normal à la trajectoire (contact sans frottement d'un support immobile), le travail fourni est nul, *ie.*  $W(\vec{R}_N) = 0$ .

◇  $\vec{f}$  est une force résistante d'intensité constante, le travail qu'elle fournit vaut donc  $W(\vec{f}) = -f \ell_{AB}$  où  $\ell_{AB}$  est la longueur de la trajectoire entre  $A$  et  $B$ . Ici cela donne :  $W(\vec{f}) = -f (H \sqrt{2} + R + \pi R)$ .

### ★ regroupement et interprétation

◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2(B) + m g (2 R - H) &= -f (H \sqrt{2} + R + \pi R) \\ \rightsquigarrow \frac{1}{2} m v^2(B) &= m g (H - 2 R) - f (H \sqrt{2} + R + \pi R) \end{aligned}$$

◇ Pour que le chariot arrive en  $B$ , il faut naturellement que le membre de droite soit positif (*ie.* que le poids ait fourni plus d'énergie que les frottements n'en ont dissipés), ce qui donne :

$$\begin{aligned} m g (H - 2 R) &\geq f (H \sqrt{2} + R + \pi R) \\ (m g - f \sqrt{2}) H &\geq f (\pi + 1) R + 2 R m g \\ H &\geq \frac{2 m g + (\pi + 1) f}{m g - \sqrt{2} f} \end{aligned}$$

◇ Le fait que  $H$  possède une valeur minimale est rassurant.

◇ Si  $f \sqrt{2} = m g$  alors la force de frottement compense exactement la partie du poids qui fait avancer.

◇ Si  $f \sqrt{2} > m g$  la valeur limite de  $H$  semble être négative, ce qui contre-intuitif. En fait le cas  $f \sqrt{2} > m g$  car cela signifierait que les frottements poussent le chariot vers le haut ...

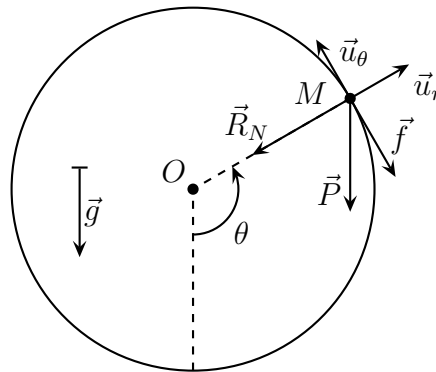
◇ La vitesse associée en  $B$  vaut donc  $v(B) = \sqrt{2 g (H - 2 R) - \frac{2 f}{m} (\sqrt{2} H + (\pi + 1) R)}$ .

◇ Nous pouvons dire que :

- la vitesse est bien d'autant plus faible que les frottements sont importants
- un chariot de masse élevée subit moins l'influence des frottements
- si les frottements sont nuls ( $f = 0$ ) nous retrouvons le cas de la chute libre guidée :  $v(B) = \sqrt{2g(H - 2R)}$

### II.6.iii – tombera ? tombera pas ?

- ◇ Le tout n'est pas vraiment d'arriver en haut, mais de faire le tour du looping : il ne faut pas que le chariot se décroche du rail.
- ◇ Analyse technique :
  - comme tout va se passer dans le looping, nous allons repérer le chariot dans le looping avec les coordonnées polaires
  - nous cherchons une force  $\vec{R}_N$  qui permettra de dire si le contact est rompu ou non : il faut du PFD
- ◇ La situation à un instant quelconque est la suivante.



- ◇ Les forces subies par le chariot s'écrivent :

- $\vec{P} = p \cos \theta \vec{u}_r - p \sin \theta \vec{u}_\theta$
- $\vec{f} = -f \vec{u}_\theta$
- $\vec{R}_N = -R_N \vec{u}_r$

#### ★ première expression de $\vec{R}_N$

- ◇ Pour avoir une première expression de  $\vec{R}_N$ , projetons le PFD sur  $\vec{u}_r$  :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m g \cos \theta - R_N = -m \frac{v^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad R_N = m g \cos \theta + m \frac{v^2}{R}$$

#### ★ intervention de l'énergie mécanique

- ◇ Ecrivons le TEM entre le point A et un point quelconque du looping repéré par  $\theta$  :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \Delta E_p = \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0} + W(\vec{f})$$

- ◇ Or  $\Delta E_p = m g R (1 - \cos \theta) - m g H = m g (R - H - R \cos \theta)$ .
- ◇ De plus  $W(\vec{f}) = -f \ell_{AM} = -f (H \sqrt{2} + R + r \theta)$ .
- ◇ Et ainsi :

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g (R - H - R \cos \theta) = -f (H \sqrt{2} + R + r \theta)$$

$$\leadsto m v^2 = 2 m g (R \cos \theta + H - R) - 2 f (H \sqrt{2} + R + r \theta)$$

☞ *Remarque* : si nous l'avions connu, nous aurions pu utiliser le TEM pour déterminer  $\dot{\theta}^2$  dans l'exemple de l'objet qui tombe d'une bosse. Mais nous ne connaissions pas ce théorème à l'époque et nous avons utilisé le PFD ... avec succès.

### ★ rassemblement

◇ Avec  $R_N = m \frac{v^2}{R} + m g \cos \theta$  nous obtenons :

$$R_N = \frac{2 m g}{R} (R \cos \theta + H - R) - \frac{2 f}{R} (H \sqrt{2} + R + r \theta) + m g \cos \theta$$

### ★ condition minimale de sécurité : cas sans frottement

◇ Faisons  $f = 0$  dans l'expression précédente. Il reste :

$$R_N = \frac{2 m g}{R} (R \cos \theta + H - R) + m g \cos \theta = \frac{2 m g}{R} (H - R) + 3 m g \cos \theta$$

◇ Il faut que cette fonction ne s'annule pas. Sans l'étudier avec toute la rigueur qui devrait s'imposer, nous voyons bien que puisque la seule dépendance en  $\theta$  se fait pas un  $\cos \theta$ , que le minimum est atteint en  $\theta = \pi$ .

◇ La condition revient donc à  $R_N(\pi) > 0$  or :

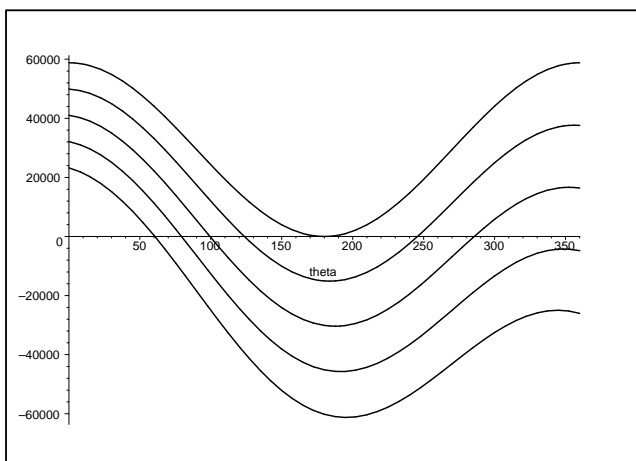
$$R_N(\pi) = \frac{2 m g}{R} (H - R) - 3 m g = \frac{m g}{R} (2 H - 5 R)$$

◇ La condition minimale de sécurité vaut donc  $\boxed{H \geq \frac{5}{2} R}$ . Il est très rassurant de voir que  $H_{\min} \geq 2 R$ .

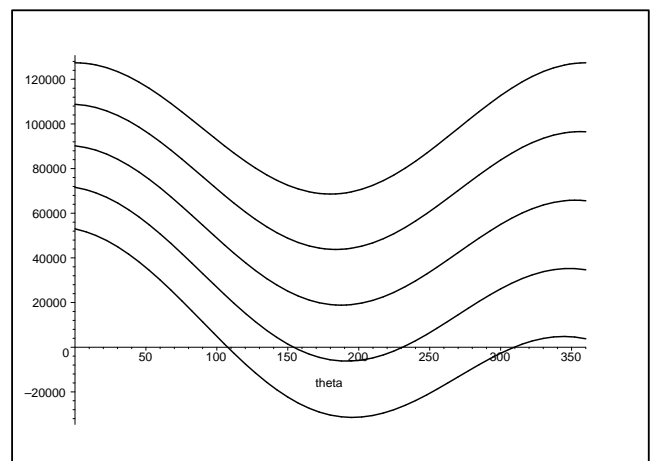
### ★ cas avec frottement

◇ Utilisons maple.

Graphique 1



Graphique 2



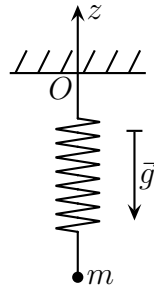
◇ Les valeurs utilisées sont  $m = 1,0 \text{ t}$  et  $R = 5 \text{ m}$ .

- ◇ Sur le graphique 1,  $H = \frac{5}{2} R$  et nous avons représenté ce qu’il se passe dans 5 cas de frottements ( $f = 0$ ;  $f = 0,1 P$ ;  $f = 0,2 P$ ;  $f = 0,3 P$ ;  $f = 0,4 P$ ). Seul un cas passe : celui pour lequel les frottements sont nuls. Deux cas sont dangereux car le décolage se fait après  $\frac{\pi}{2}$ .
- ◇ Sur le graphique 2,  $H = 6 R$  et nous avons représenté ce qu’il se passe dans 5 cas de frottements ( $f = 0$ ;  $f = 0,1 P$ ;  $f = 0,2 P$ ;  $f = 0,3 P$ ;  $f = 0,4 P$ ). Cette fois, ça passe mieux.

## II.7 – Oscillations autour d’une position d’équilibre stable

### II.7.i – ressort vertical

- ◇ C’est une situation connue.



- ◇ Rappelons les résultats :
- l’évolution est conservative
  - l’énergie mécanique vaut  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t) + \frac{1}{2} k (-z(t) - \ell_0)^2 + m g z(t)$
  - la position d’équilibre est en  $z_{\text{eq}} = -\ell_0 - \frac{m g}{k}$
- ◇ Cherchons comment le ressort évolue autour de sa position d’équilibre, *ie.* cherchons l’équation différentielle régissant l’évolution de  $\varepsilon(t)$  tel que  $z(t) = z_{\text{eq}} + \varepsilon(t)$ .
- ◇ Remplaçons  $z(t)$  par son expression dans l’énergie mécanique et écrivons que l’évolution est conservative, *ie.*  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ . Remarquons au passage que  $\ddot{z}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$ .

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{1}{2} k (-z_{\text{eq}} - \varepsilon(t) - \ell_0)^2 + m g (z_{\text{eq}} + \varepsilon(t))$$

$$\rightsquigarrow m \ddot{\varepsilon}(t) \dot{\varepsilon}(t) - k \dot{\varepsilon}(t) (-z_{\text{eq}} - \varepsilon(t) - \ell_0) + m g \dot{\varepsilon}(t) = 0$$

- ◇ En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l’équilibre  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$  nous obtenons :

$$m \ddot{\varepsilon}(t) + k \varepsilon(t) = -k z_{\text{eq}} - k \ell_0 - m g$$

- ◇ Soit, avec la condition d’équilibre :

$$m \ddot{\varepsilon}(t) + k \varepsilon(t) = 0$$

- ◇ L’évolution est sinusoïdale, ce qui n’est guère surprenant, toutefois ...

### II.7.ii – interaction intermoléculaire

- ◇ Reprenons l’interaction moléculaire où une molécule possède l’énergie potentielle  $E_p(r)$  et simplifions le problème en supposant qu’elle ne se déplace que sur l’axe repéré par  $r$ . Nous avons donc :



$$E_p = E_0 \left( \frac{a^{12}}{r^{12}} - \frac{a^6}{r^6} \right) \quad \text{et} \quad r_0^6 = 2 a^6$$

◇ Le PFD s'écrit donc :

$$m \ddot{r}(t) = -\frac{dE_p}{dr} = 12 E_0 \frac{a^{12}}{r^{13}(t)} - 6 E_0 \frac{a^6}{r^7(t)}$$

◇ Cherchons le mouvement autour de la position d'équilibre :  $r(t) = r_0 + \varepsilon(t)$  avec  $|\varepsilon(t)| \ll r_0$  et simplifions en conséquence :

$$\begin{aligned} m \ddot{\varepsilon}(t) &= 12 E_0 \frac{a^{12}}{(r_0 + \varepsilon(t))^{13}} - 6 E_0 \frac{a^6}{(r_0 + \varepsilon(t))^7} \\ &= 12 E_0 \frac{a^{12}}{r_0^{13} \left( 1 + \frac{\varepsilon(t)}{r_0} \right)^{13}} - 6 E_0 \frac{a^6}{r_0^7 \left( 1 + \frac{\varepsilon(t)}{r_0} \right)^7} \\ &= 12 E_0 \frac{a^{12}}{r_0^{13}} \left( 1 - 13 \frac{\varepsilon(t)}{r_0} \right) - \frac{6 E_0 a^6}{r_0^7} \left( 1 - 7 \frac{\varepsilon(t)}{r_0} \right) \\ &= \cancel{12 E_0 \frac{a^{12}}{r_0^{13}}} - \cancel{\frac{6 E_0 a^6}{r_0^7}} + \left( -12 \times 13 \frac{E_0}{4 r_0} + 6 \times 7 \frac{E_0}{2 r_0} \right) \frac{\varepsilon(t)}{r_0} \quad \text{cf. condition d'équilibre} \\ &= -18 \frac{E_0}{r_0^2} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

◇ Et ainsi :  $m \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + 18 \frac{E_0}{r_0^2} \varepsilon(t) = 0$ , ce qui est aussi une équation d'évolution sinusoïdale.

### II.7.iii – ce n'est pas une coïncidence

Les petites évolutions autour d'une position d'équilibre stable sont toujours sinusoïdales.

◇ Pour y arriver, après avoir introduit le petit déplacement  $\varepsilon(t)$ , il y a deux méthodes :

- développer l'énergie à l'ordre deux et utiliser un théorème version puissance
- utiliser le PFD et ensuite utiliser des DL à l'ordre 1

◇ Dans les deux cas, la condition d'équilibre **doit** être utilisée de manière à aboutir à une équation du type  $\ddot{\varepsilon}(t) + \omega_0^2 \varepsilon(t) = 0$ .

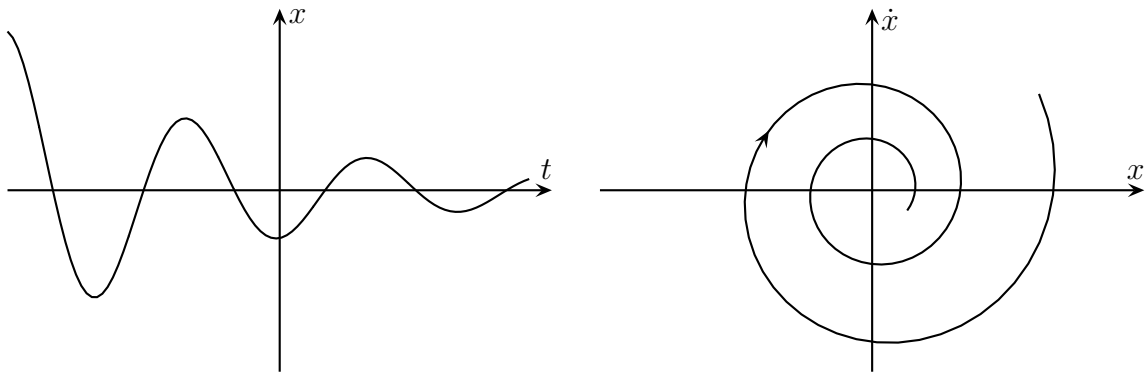
## III – Visualiser toutes les évolutions en un graphique

### III.1 – Le plan de phase

◇ Dans tout ce qui suit, nous allons parler de l'évolution d'un dispositif à un seul degré de liberté que nous noterons  $x(t)$  mais qui pourra très bien être  $\theta(t)$ .

### III.1.i – présentation

- ◇ Nous allons chercher à représenter l'évolution de  $x$  non pas en fonction du temps  $x(t)$  mais plutôt  $\dot{x}(x)$ .

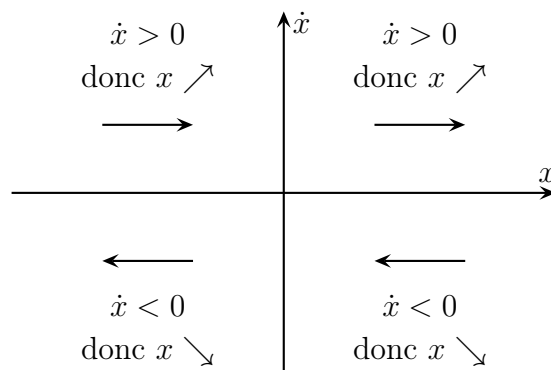


- ◇ C'est très bizarre mais :  
 → avec l'habitude, ça va  
 → c'est extrêmement pratique

Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

### III.1.ii – des cadrans orientés

- ◇ Les trajectoires vont forcément dans une certaine direction suivant le cadran.



Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.

Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des abscisses.

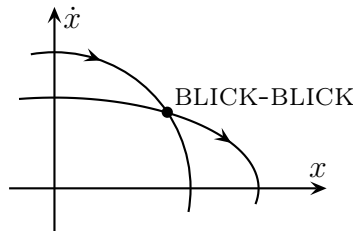
### III.1.iii – une et une seule trajectoire par évolution libre

- ◇ Imaginons une PFD presque quelconque :  $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$ .  
 ◇ Cela correspond à un régime libre parce que l'ED peut se réécrire  $\ddot{x} - f(\dot{x}, x) = 0$  ce qui fait que toutes les inconnues sont du même côté, il n'y a pas de terme de source.

- ◇ Prenons un point de la trajectoire dans le plan de phase :  $(\dot{x}(t_0), x(t_0))$ . Dans ces conditions, d'après le PFD :  $\ddot{x}(t_0) = f(\dot{x}(t_0), x(t_0))$ .
- ◇ Dès lors, le point suivant,  $dt$  plus tard est parfaitement connu grâce à la méthode d'Euler :

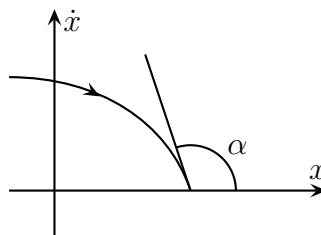
$$\begin{cases} x(t_0 + dt) = x(t_0) + \dot{x}(t_0) dt \\ \dot{x}(t_0 + dt) = \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0) dt \end{cases}$$

Dans le plan de phase, en régime libre, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser.



### III.1.iv – intersection avec l'axe des abscisses

- ◇ Reprenons un cas de régime libre tel que  $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$  et cherchons  $\alpha$ .



- ◇ Par définition de la dérivée :

$$\tan \alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} \rightsquigarrow \tan \alpha = \frac{\frac{d\dot{x}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

- ◇ Sauf que sur l'axe des abscisse  $\dot{x} \rightarrow 0$ , il y a donc deux cas :

- si  $\ddot{x} \neq 0$  alors  $\tan \alpha \rightarrow \infty$  et  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- si  $\ddot{x} = 0$  alors  $\tan \alpha \rightarrow \frac{0}{0}$  et nous ne pouvons rien dire

Pour un régime libre, la trajectoire dans le plan de phase coupe perpendiculairement l'axe des abscisses en des points où il n'y a pas d'équilibre.

## III.2 – De nombreuses informations

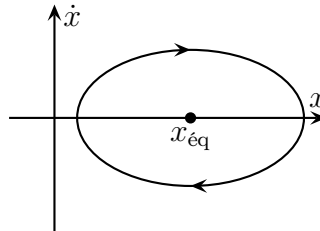
### III.2.i – positions d'équilibre et stabilité

- ◇ Les positions d'équilibre sont forcément telles que  $\dot{x} = 0$  donc elles sont situées sur l'axe des abscisses.

### ★ position d'équilibre stable

◇ Nous savons qu'il y a des oscillations sinusoïdales autour des positions d'équilibre stable, donc :

$$\begin{cases} x(t) = x_{\text{eq}} + x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

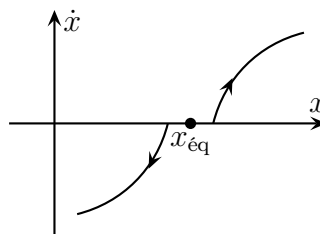


Dans le plan de phase, les trajectoires autour d'une position d'équilibre stable sont elliptiques.

◇ Nous pouvons constater que légèrement écarté de sa position d'équilibre (et lâché sans vitesse initiale), le point a effectivement tendance à retourner vers sa position d'équilibre.

### ★ position d'équilibre instable

◇ Légèrement écarté de sa position d'équilibre instable, un point a tendance à le fuir. Cela donne, graphiquement :



Dans le plan de phase, les trajectoires ont tendance à s'écarter des positions d'équilibre instables.

## III.2.ii – frottement ou non

◇ En régime libre, s'il y a des frottements, alors à la fin, le point matériel finit par s'arrêter et donc sa trajectoire, dans le plan de phase, se finit sur l'axe des abscisses.

Dans le plan de phase, toutes les trajectoires d'un régime libre pour laquelle il y a des frottements finissent sur l'axe des abscisses.

◇ Les points terminaux de ces trajectoires sont évidemment des points d'équilibre et comme ils « attirent » les trajectoires, ils sont appelés « attracteurs ».

### III.2.iii – mouvement périodique

- ◇ Considérons un mouvement périodique de période  $T$ . Par définition du mouvement périodique, l'évolution se répète identique à elle-même soit :

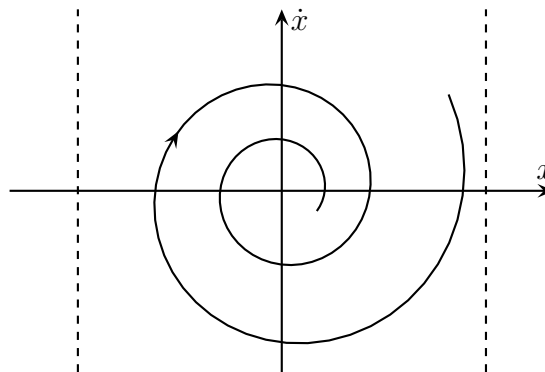
$$\begin{cases} x(t_0 + T) = x(t_0) \\ \dot{x}(t_0 + T) = \dot{x}(t_0) \end{cases}$$

- ◇ Autrement dit le point représentatif de  $t_0 + T$  est le même que celui représentatif de  $t_0$ .

Dans le plan de phase, un mouvement périodique correspond à une trajectoire fermée.

### III.2.iv – état lié ou de diffusion

- ◇ Pour un état lié, le paramètre de position ne peut pas devenir infini, donc la trajectoire est restreinte à une bande verticale du plan de phase.

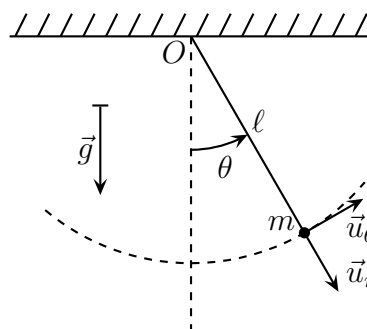


Dans le plan de phase, les états de diffusion ont des trajectoires qui partent vers l'infini sur l'axe des abscisses.

## III.3 – Exemple du pendule simple rigide

### III.3.i – mise en équation

- ◇ La situation est identique à celle du pendule simple sauf qu'il ne s'agit pas d'un fil mais d'une tige rigide. Il n'y a pas de frottement au niveau de l'axe, mais il y en a au niveau de la masse :  $\vec{f} = -h \vec{v}$ .



- ◇ Analyse physique :

- suivant les conditions initiales, le pendule va osciller
- la trajectoire de  $M$  est obligatoire circulaire
- ◇ Analyse technique :
  - le repérage est immédiat : coordonnées cylindro-polaire
  - le problème c'est qu'ici il n'est plus possible de dire que l'action exercée par la tige est colinéaire à  $\vec{u}_r$  : ce n'est pas un fil, c'est une tige donc il faut dire au revoir au PFD
- ◇ Le point matériel possède donc l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2(t) - m g \ell \cos \theta$$

- ◇ Écrivons le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad m \ell^2 \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) m g \ell \sin \theta = -h \ell \dot{\theta}(t) \ell \dot{\theta}(t)$$

- ◇ En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\theta}(t) = 0$ , nous obtenons :

$$m \ell^2 \ddot{\theta}(t) + m g \ell \sin \theta = -h \ell \dot{\theta}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

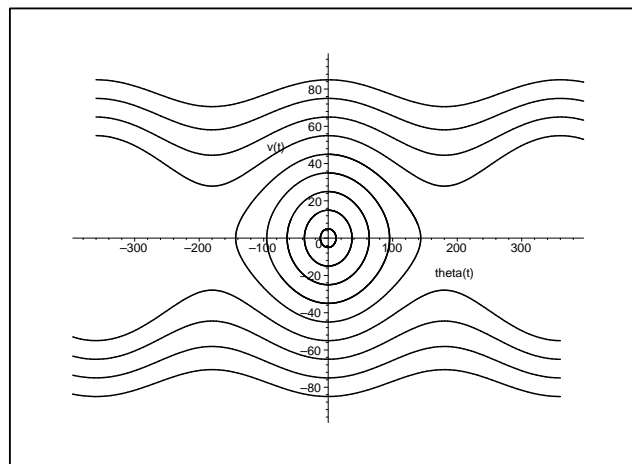
### III.3.ii – sans frottement

- ◇ Faisons  $h = 0$  dans l'équation précédente, cela donne :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

- ◇ C'est l'équation du pendule simple sauf qu'elle est valable aussi pour  $\theta > \frac{\pi}{2}$ .

Graphique 3

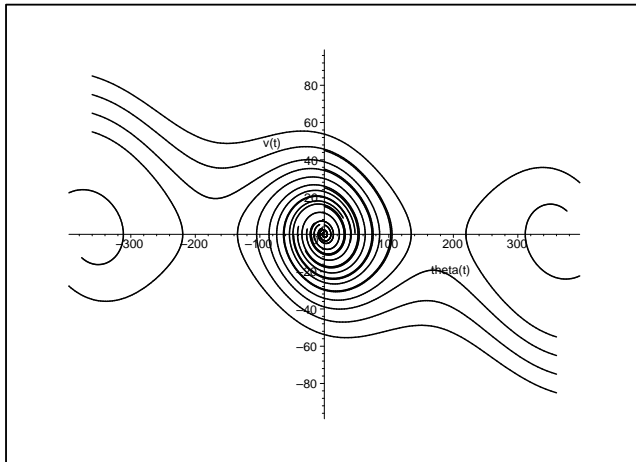


- ◇ Sur le plan de phase, nous pouvons voir :
  - qu'aucune trajectoire n'en croise une autre : cela confirme le régime libre
  - qu'il y a des états liés
  - qu'il y a des états de diffusion (le pendule n'arrête pas de tourner)
  - qu'il y a des oscillations quasi-sinusoïdales pour des faibles amplitudes
  - qu'il y a des oscillations non sinusoïdales pour des amplitudes un peu plus grandes

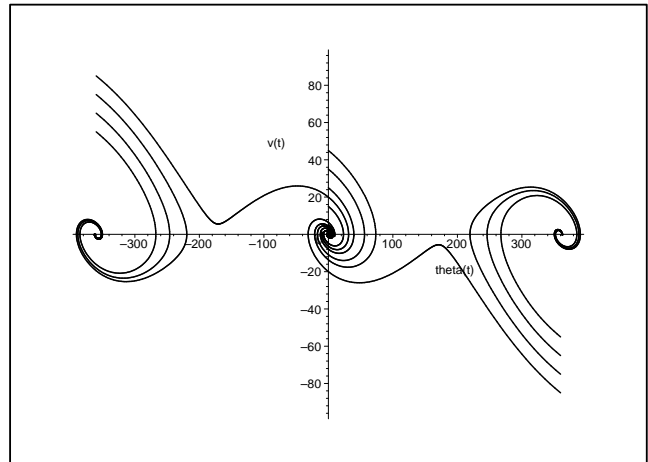
### III.3.iii – avec frottement

- ◇ Reprenons l'équation complète et traçons les trajectoires dans le plan de phase pour trois valeurs de frottements.

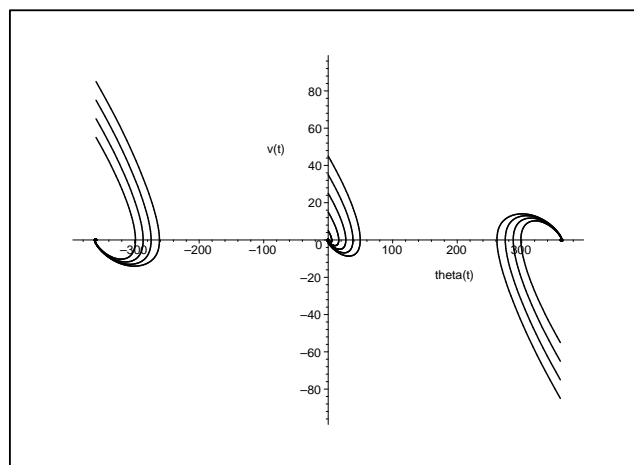
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



◇ Nous voyons :

- qu'aucune trajectoire n'en croise une autre : cela confirme le régime libre
- les points attracteurs situés à  $0, 2\pi, -2\pi$  de façon absolument non étonnante
- qu'il y a des oscillations sur les graphiques 4 et 5 : le régime est pseudo périodique
- qu'il n'y a pas d'oscillations sur le graphique 6 : le régime est aperiodique

# La mécanique autrement qu'en forces

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - les définitions d'énergie cinétique, potentielle, mécanique
  - les définitions de travail fourni par une force
  - la définition du nombre de degrés de liberté
  - la définition du plan de phase
- ◇ Connaître les liens entre mètre, seconde, kilogramme, newton, joule, watt

### ★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
  - les théorèmes énergétiques
  - les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique
  - la relation fondamentale de l'énergie potentielle
  - la caractérisation de l'équilibre et de la stabilité en terme énergétique

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - la phénoménologie d'une évolution conservative
  - la phénoménologie des forces motrices et résistantes
  - le type d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable
  - savoir interpréter une évolution à partir de la représentation graphique de l'énergie potentielle
  - savoir interpréter un ensemble de trajectoires dans le plan de phase

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir :
  - savoir compter le nombre de degrés de liberté d'un problème
  - repérer les forces qui fournissent un travail et celles qui n'en fournissent pas

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir déterminer quelle est la meilleure approche (force ou énergie) pour répondre à une question.

## Au niveau des savoir-faire

### ★ petits gestes

- ◇ Savoir :
  - calculer le travail fourni par une force vectoriellement constante
  - calculer le travail fourni par une force toujours orthogonale à la trajectoire
  - calculer le travail fourni par une force d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire



★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire :

- le looping sans frottement
- tout sur le ressort vertical (mise en équation, position d'équilibre, oscillations autour de l'équilibre) à l'aide de méthodes énergétiques
- tout sur le pendule simple à l'aide de méthodes énergétiques

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Évolutions conservatives</b>	<b>1</b>
I-1	Phénoménologie . . . . .	1
I-1.i	exemples d'évolutions . . . . .	1
I-1.ii	conditions à respecter . . . . .	1
I-1.iii	particularité : un lien fort entre vitesse et position . . . . .	2
I-2	De l'énergie partout . . . . .	2
I-2.i	dans le mouvement . . . . .	2
I-2.ii	grâce au poids . . . . .	3
I-2.iii	grâce aux ressorts . . . . .	3
I-3	Faire un bilan énergétique . . . . .	4
I-3.i	choisir le système . . . . .	4
I-3.ii	vérifier la conservation de l'énergie . . . . .	4
I-3.iii	et yapuka . . . . .	5
I-4	Exemples . . . . .	5
I-4.i	chute libre . . . . .	5
I-4.ii	descendre une pente . . . . .	6
I-5	Trouver une position d'équilibre . . . . .	7
I-5.i	lien qualitatif entre force et énergie potentielle . . . . .	7
I-5.ii	une loi fondamentale . . . . .	8
I-5.iii	exemple du ressort vertical . . . . .	8
I-5.iv	interaction intermoléculaire . . . . .	9
I-6	Interprétation graphique d'une évolution conservative . . . . .	10
I-6.i	tout est dans l'énergie potentielle . . . . .	10
I-6.ii	différents types de mouvements . . . . .	11
<b>II</b>	<b>Échanges énergétiques</b>	<b>11</b>
II-1	Phénoménologie . . . . .	11
II-1.i	caractère résistant ou moteur d'une force . . . . .	11
II-1.ii	allure d'une force motrice ou résistante . . . . .	12
II-2	Les échangeurs d'énergie : les forces . . . . .	12
II-2.i	puissance et travail fournis par une force . . . . .	12
	puissance fournie par une force . . . . .	12
	énergie fournie par une force . . . . .	13
	déplacement élémentaire . . . . .	13
II-2.ii	cas particulier des forces vectoriellement constantes . . . . .	14
II-2.iii	cas particulier des forces toujours orthogonales à la trajectoire . . . . .	14
II-2.iv	cas particulier des forces d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire . . . . .	15
	Notations sur les déplacements élémentaires . . . . .	15
II-3	Réservoir officiel d'énergie : les forces conservatives . . . . .	15
II-3.i	expression simple du travail fourni . . . . .	16
	une infinité d'énergie potentielle . . . . .	16
	des énergies potentielles additives . . . . .	16
II-3.ii	retrouver $E_{pp}$ et $E_{p,él}$ . . . . .	17
	retrouver l'énergie potentielle de pesanteur . . . . .	17
	retrouver l'énergie potentielle élastique . . . . .	17
II-3.iii	la force à partir de l'énergie potentielle . . . . .	18
II-3.iv	retrouver la condition d'équilibre . . . . .	18

II.3.v	retrouver la condition de stabilité . . . . .	18
II.4	Théorèmes énergétiques . . . . .	19
II.4.i	version cinétique . . . . .	19
II.4.ii	version mécanique . . . . .	20
II.4.iii	quand les utiliser ? . . . . .	21
II.5	Une nouvelle méthode pour des exemples connus . . . . .	21
II.5.i	ressort vertical . . . . .	21
II.5.ii	pendule simple . . . . .	22
II.6	Looping sur un grand 8 . . . . .	23
II.6.i	une attraction connue . . . . .	23
II.6.ii	vitesse au sommet . . . . .	23
	écriture du théorème . . . . .	24
	travaux fournis par les différentes forces . . . . .	24
	regroupement et interprétation . . . . .	24
II.6.iii	tombera ? tombera pas ? . . . . .	25
	première expression de $\vec{R}_N$ . . . . .	25
	intervention de l'énergie mécanique . . . . .	25
	rassemblement . . . . .	26
	condition minimale de sécurité : cas sans frottement . . . . .	26
	cas avec frottement . . . . .	26
II.7	Oscillations autour d'une position d'équilibre stable . . . . .	27
II.7.i	ressort vertical . . . . .	27
II.7.ii	interaction intermoléculaire . . . . .	27
II.7.iii	ce n'est pas une coïncidence . . . . .	28
<b>III</b>	<b>Visualiser toutes les évolutions en un graphique</b>	<b>28</b>
III.1	Le plan de phase . . . . .	28
III.1.i	présentation . . . . .	29
III.1.ii	des cadrans orientés . . . . .	29
III.1.iii	une et une seule trajectoire par évolution libre . . . . .	29
III.1.iv	intersection avec l'axe des abscisses . . . . .	30
III.2	De nombreuses informations . . . . .	30
III.2.i	positions d'équilibre et stabilité . . . . .	30
	position d'équilibre stable . . . . .	31
	position d'équilibre instable . . . . .	31
III.2.ii	frottement ou non . . . . .	31
III.2.iii	mouvement périodique . . . . .	32
III.2.iv	état lié ou de diffusion . . . . .	32
III.3	Exemple du pendule simple rigide . . . . .	32
III.3.i	mise en équation . . . . .	32
III.3.ii	sans frottement . . . . .	33
III.3.iii	avec frottement . . . . .	33
	Analyse physique . . . . .	35

# Mécanique

## Chapitre 3

### Oscillateur harmonique

# Oscillateur harmonique

Dans ce chapitre, nous allons étudier les oscillateurs sous toutes les coutures. En effet les oscillateurs sont à la base de très nombreux modèles de physique, ils sont donc très utilisés et leur maîtrise est indispensable dans tous les domaines de la physique.

Nous commencerons par l'étude de l'oscillateur mécanique harmonique en régime libre qui ira vite car tout a déjà été (presque) fait. Ensuite nous verrons deux exemples d'oscillations non linéaires et les méthodes adaptées pour les étudier. Enfin nous finirons par l'étude de l'oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé, ce qui nous permettra d'introduire un nouvel outil ô combien important en physique : la notation complexe.

## I – Oscillateur harmonique amorti en régime libre

### I.1 – Oscillateur harmonique ?

◇ Tout d'abord la définition.

Un dispositif se comporte comme un *oscillateur harmonique* lorsque la force de rappel qui tend à le ramener à sa position d'équilibre stable est proportionnelle à son écart avec cette position d'équilibre.

- ◇ Il faut bien voir que c'est un modèle et que donc, en soi, il sera rarement « exactement parfait ».
- ◇ Toutefois, c'est un modèle dont nous pouvons sentir aisément qu'il sera très utilisé car il correspond, en fait, à des approximation à l'ordre 1 des forces autour de l'équilibre.
- ◇ Imaginons une position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$ . Alors, en notant naturellement  $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$  la force qui s'exerce sur ce point matériel, nous avons naturellement  $f(x_{\text{eq}}) = 0$  et donc, quelle que soit la force, nous pouvons écrire, **autour de cette position** :

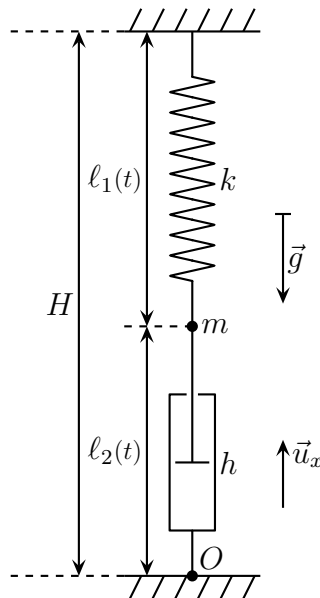
$$f(x) = f(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \frac{df}{dx}(x_{\text{eq}}) = (x - x_{\text{eq}}) \frac{df}{dx}(x_{\text{eq}}) \propto (x - x_{\text{eq}})$$

- ◇ Ainsi, en première approximation, (presque) **tout** se comporte comme un oscillateur harmonique autour d'une position d'équilibre.
- ◇ Nous comprenons ainsi aisément pourquoi les oscillateurs sont des modèles largement utilisés pour étudier des situations proches d'une position d'équilibre.

### I.2 – Modélisation mécanique

#### I.2.i – montage

- ◇ Considérons le dispositif ci-dessous dans lequel une masse considérée comme ponctuelle est accrochée à un ressort et à un amortisseur.



◇ Analyse physique :

- la masse va osciller verticalement en étant freinée par l'amortisseur : ce n'est pas une évolution conservative
- la trajectoire est contrainte, il y a un seul degré de description
- grandeurs pertinentes :  $m$ ,  $H$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $\ell_0$  et  $h$  qui caractérise l'amortisseur

◇ Ici nous cherchons l'équation différentielle régissant l'évolution de  $x(t)$ .

◇ Analyse technique :

- le repérage est simple : l'axe sera vertical et le centre sera choisi soit en haut soit en bas, mieux vaut en bas histoire d'avoir des  $x(t)$  positifs
- nous avons le choix entre un PFD et une méthode énergétique : peu importe ici

## I.2.ii – phénoménologie et caractéristique d'un amortisseur

- ◇ Un amortisseur est, comme son nom l'indique, fait pour amortir les mouvements : il résiste à l'étirement quand il est en train d'être étiré et résiste à la compression lorsqu'il est en train d'être comprimé. Il y en a sur les coffres de voiture par exemple.
- ◇ Lorsqu'un amortisseur ne change pas de longueur, il n'exerce aucune force.

Un amortisseur est caractérisé par sa constante d'amortissement  $h$  exprimé en  $\text{N.s.m}^{-1}$ . Plus la constante d'amortissement  $h$  d'un amortisseur est grande, plus l'amortisseur est dur.

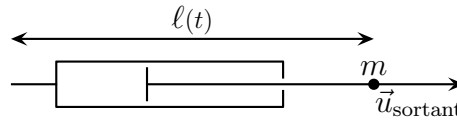
◇ À la limite, c'est comme pour les ressorts :

- une constante d'amortissement infinie correspond à une barre rigide
- une constante d'amortissement nulle correspond à une absence d'amortisseur

La force qu'exerce un amortisseur sur un objet accroché à une de ses extrémité

s'exprime sous la forme  $\vec{f} = -h \frac{d\ell(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sortant}}$  où :

- $h$  est la constante d'amortissement
- $\ell(t)$  est la longueur de l'amortisseur
- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent à l'amortisseur au niveau de ce qui subit la force



- ◇ Il n'est en rien étonnant que la force exercée par un amortisseur ressemble beaucoup à une force de frottement fluide étant donné qu'un amortisseur est rempli d'un fluide à l'intérieur duquel bouge un piston.

### I.2.iii – équation différentielle régissant l'évolution

- ◇ Faisons la liste des forces qui s'exercent sur  $M$  :
- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m \vec{u}_x$
  - force de contact :
    - la tension exercée par le ressort :

$$\vec{T} = -k (\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = +k (H - x(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

- la force exercée par l'amortisseur :

$$\vec{f} = -h \frac{d\ell_2(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sortant},2} = -h \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \ell_2(t) = x(t)$$

- ◇ Écrivons le PFD sur la masse et projetons le sur  $\vec{u}_x$ .

$$\vec{P} + \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{am}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -m g - k (H - x(t) - \ell_0) (-1) - h \frac{dx(t)}{dt} (+1) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

- ◇ En simplifiant nous obtenons :

$$-m g + k (H - x(t) - \ell_0) - h \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0)$$

#### ★ position d'équilibre

- ◇ Déterminons la position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$ .
- ◇ L'équilibre est un mouvement particulier, c'est donc une solution de l'équation différentielle régissant  $x(t)$ .
- ◇ Introduisons donc la solution  $x(t) = x_{\text{éq}} = C^{\text{te}}$  dans l'équation différentielle :

$$0 + 0 + \frac{k}{m} x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{m g}{k}}$$

- ◇ Ce résultat en plus d'être homogène est cohérent :

- plus  $H$  est grand plus  $x_{\text{éq}}$  est grand

- plus  $\ell_0$  est grand plus  $x_{\text{éq}}$  est petit
- plus  $m$  est grand plus  $x_{\text{éq}}$  est petit
- plus  $k$  est grand plus  $x_{\text{éq}}$  est grand
- et surtout  $h$ , ie. l'amortisseur, n'intervient pas dans le résultat !

### ★ écart à l'équilibre

- ◇ Cherchons l'équation différentielle vérifiée par  $X(t) \triangleq x(t) - x_{\text{éq}}$ . Pour cela, remplaçons, dans l'équation différentielle régissant l'évolution  $x(t)$  par  $x_{\text{éq}} + X(t)$  :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) + \frac{k}{m} x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0)$$

- ◇ Et avec la condition d'équilibre :

$$\boxed{\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = 0}$$

- ◇ Oh oh ... voilà une équation qui a un gros air de déjà vu ! Le fait que le second membre soit nul est rassurant :  $X(t)$  est l'écart à l'équilibre donc  $X(t) = 0$  est forcément une solution.
- ◇ Nous remarquons aussi que, comme pour le ressort vertical tout seul, la pesanteur n'intervient pas dans le mouvement.

### ★ écriture canonique

- ◇ Identifions avec l'écriture canonique :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

- ◇ Et ainsi  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \omega_0 \frac{m}{h} = \frac{\sqrt{k m}}{h}$ .

- ◇ Le facteur de qualité est d'autant plus faible que l'amortissement est grand. Rien de plus naturel !

## I.3 – Cas sans frottement

### I.3.i – équation horaire

- ◇ Si l'amortissement est nul  $h = 0$ , alors l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega_0^2 X(t) = 0$$

- ◇ Cette équation différentielle admet comme solution  $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $X_0$  et  $\varphi$  qui dépendent des conditions initiales.

Un oscillateur harmonique oscille sinusoïdalement autour de sa position d'équilibre.

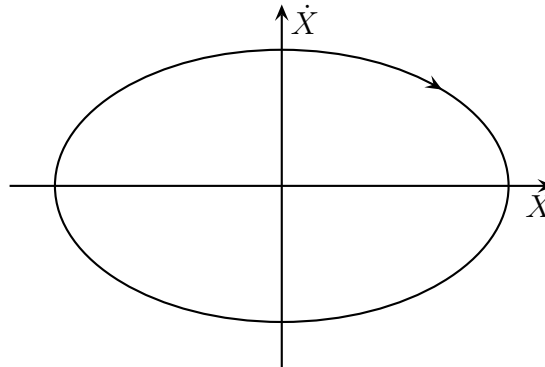


### I.3.ii – représentation dans le plan de phase

- ◇ Cherchons la vitesse :  $\dot{X}(t) = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .
- ◇ Pour éliminer les  $t$  et trouver le lien entre  $\dot{X}$  et  $X$ , rien de plus facile avec une bonne vieille formule trigo :

$$\cos^2() + \sin^2() = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{X^2}{X_0^2} + \frac{\dot{X}^2}{\omega_0^2 X_0^2} = 1$$

- ◇ C'est l'équation d'une ellipse.



Un oscillateur harmonique non amorti en régime libre a une trajectoire elliptique dans le plan de phase.

### I.3.iii – aspect énergétique

#### ★ valeur moyenne de l'énergie cinétique

- ◇ Calculons la moyenne de l'énergie cinétique.
- ◇ Comme le mouvement est périodique, nous avons naturellement :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{X}^2(t) dt$$

- ◇ Avec  $\dot{X}(t) = -X_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , cela donne :

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{2T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega_0 t + \varphi)}{2} dt = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4T} \left[ t - \frac{\sin(2\omega_0 t + \varphi)}{2\omega_0} \right]_0^T \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4T} \left( T - \frac{\sin(2\omega_0 T + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega_0} \right) = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4} \end{aligned}$$

La valeur moyenne temporelle d'un  $\cos(\omega t)$  ou d'un  $\sin(\omega t)$  est nulle :

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

La valeur moyenne temporelle d'un  $\cos^2(\omega t)$  ou d'un  $\sin^2(\omega t)$  vaut  $\frac{1}{2}$  :

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

✧ Et avec l'expression de  $\omega_0$  nous arrivons à  $\langle E_c \rangle = \frac{k X_0^2}{4}$ .

### ★ valeur moyenne de l'énergie potentielle

✧ Cherchons tout d'abord l'énergie potentielle associée à la force subie par l'oscillateur harmonique qu'est  $X(t)$ .

✧ L'équation différentielle vérifiée par  $X(t)$  est  $\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} X(t) = 0$  ce qui donne le PFD équivalent :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2}(t) = -k X(t)$$

✧ Tout se passe comme si la masse était soumise uniquement à la force  $-k X(t) \vec{u}_x$ .

✧ Comme le déplacement élémentaire est vertical, il se réduit à  $dX \vec{u}_x$  et le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -k X dX \stackrel{?}{=} -dE_p \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dE_p}{dX} = k X \quad \rightsquigarrow \quad E_p = \frac{1}{2} k X^2 + C^{te}$$

✧ Et en prenant la constante nulle là où la force est nulle aussi, *ie.* en  $X = 0$ , nous trouvons  $E_p = \frac{1}{2} k X^2$ .

✧ Nous pouvons donc maintenant déterminer l'énergie potentielle moyenne :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k X^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

✧ Ce qui donne, avec le résultat précédent :  $\langle E_p \rangle = \frac{k X_0^2}{4}$ .

### ★ résultat et interprétation

✧ Nous pouvons constater que  $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$ .

En régime libre, un oscillateur harmonique non amorti possède, en moyenne, autant d'énergie potentielle que d'énergie cinétique.

✧ Remarquons une fois de plus que les oscillations ont pour origine un échange énergétique entre deux formes différentes d'énergie : cinétique et potentielle.

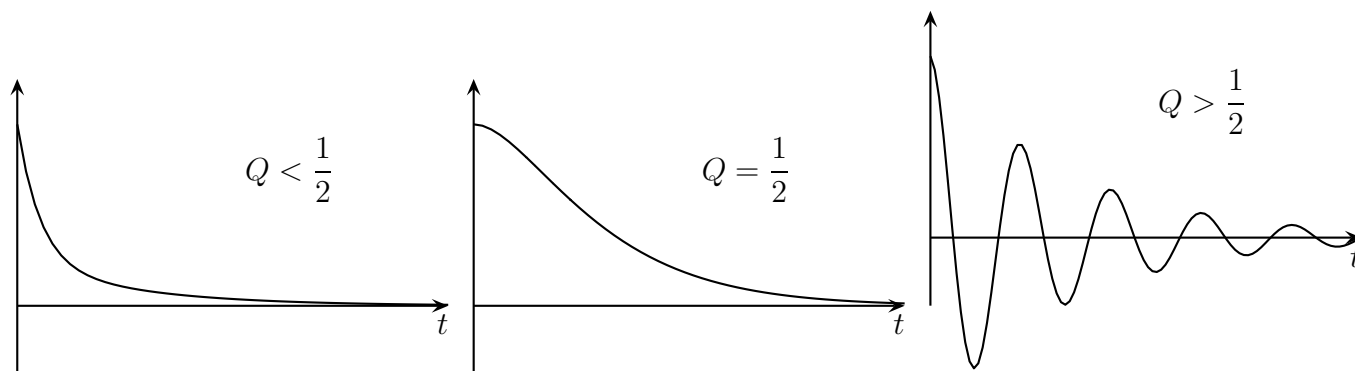
## I.4 – Oscillations avec frottements

### I.4.i – pour une évolution connue

✧ L'équation différentielle vérifiée par  $X(t)$  s'écrit :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = 0$$

✧ Nous savons déjà la résoudre (cf. circuits en régime transitoire). Le type de solution dépend du facteur de qualité :

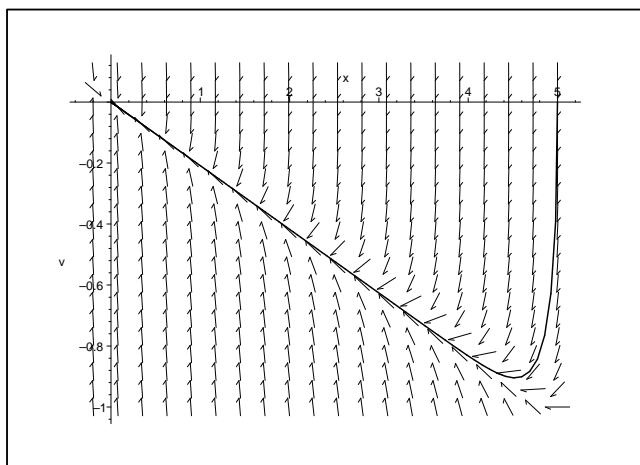


### I.4.ii – vue dans le plan de phase

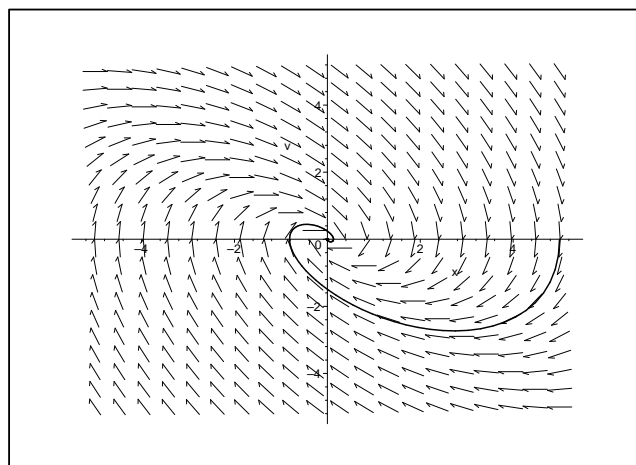
◇ Regardons les 6 trajectoires suivantes dans le plan de phase où seul le facteur de qualité varie. Il vaut : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 50.

◇ Jouons à « qui est qui ? »

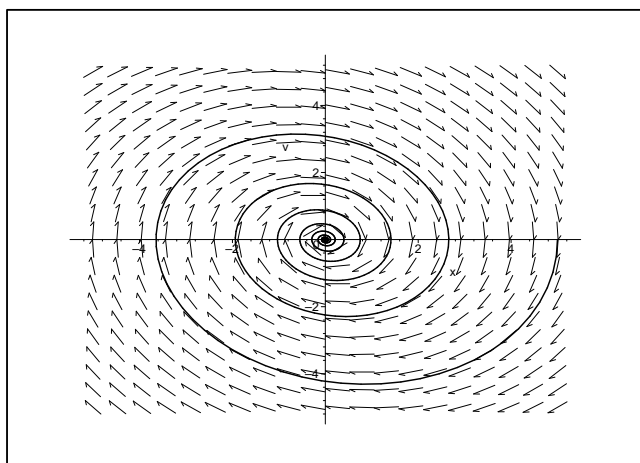
Graphique 1



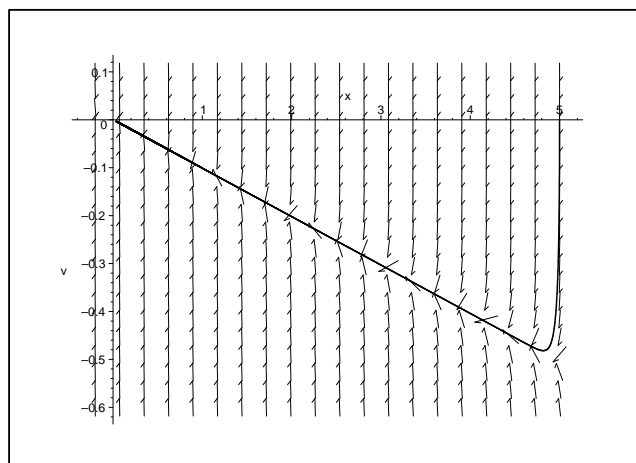
Graphique 2



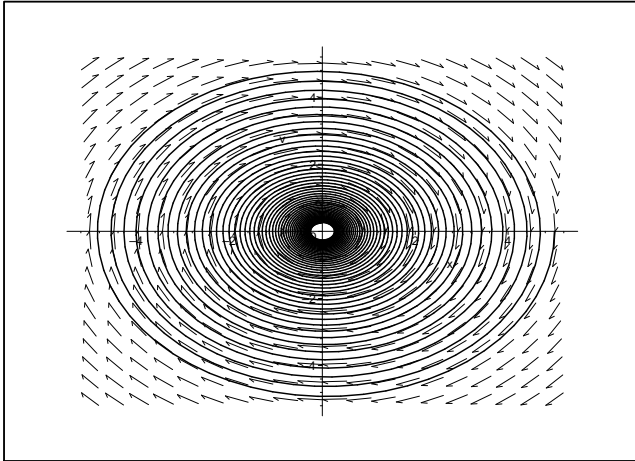
Graphique 3



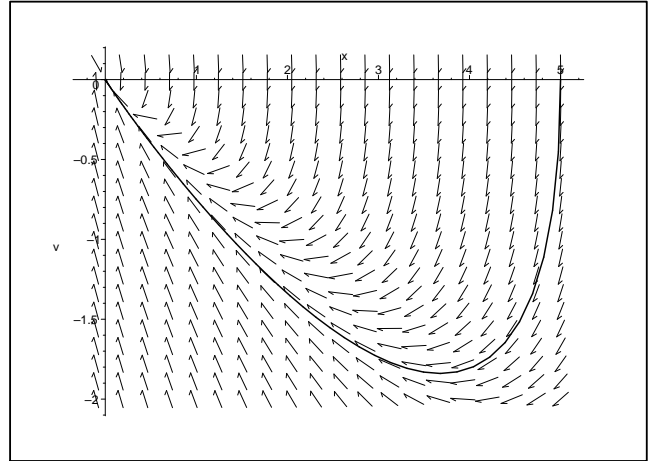
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



- ◇ Repérer les trajectoires correspondant aux régimes pseudo-périodique est facile : il y a oscillation **donc** la trajectoire passe aussi en  $X(t) < 0$ . Associer les bons facteurs de qualité ne pose pas non plus de soucis particulier : plus il y a d'oscillations, plus le facteur de qualité est grand.
- ◇ Et pour les autres ? Nous ne pouvons plus nous fier aux oscillations puisqu'il n'y en a plus. La seule différence, c'est la rapidité avec laquelle l'OH atteint son régime permanent. Malheureusement, cette durée n'est pas visible sur les plans de phase. Cependant comme les conditions initiales et le régime permanent sont tous identiques, les évolutions les plus courtes seront les plus rapides. Il nous suffit donc de regarder les valeurs de vitesse pour savoir qui est le plus rapide. Nous obtenons donc que  $Q = 0,5$  correspond au graphique 6, que  $Q = 0,2$  correspond au graphique 1 et  $Q = 0,1$  au graphique 4.

## I.5 – Analogie avec le circuit $R, L, C$ série

- ◇ Allons au-delà de la simple constatation de la similarité de l'équation différentielle.
- ◇ Cherchons quelles grandeurs caractéristiques jouent des rôles analogues.
- ◇ Nous avons ainsi :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longleftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \longleftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

- ◇ Vu que les grandeurs physiques mises en jeu  $R, L, C, h, k$  et  $m$  sont non homogènes, il existera plusieurs analogies possibles. Cherchons la plus simple.
- ◇ Remarquons que  $R$  et  $h$  n'interviennent qu'à un endroit et posons  $(R \leftrightarrow h)$ . Il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{LC}} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sqrt{\frac{L}{C}} \longleftrightarrow \sqrt{km} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left( \begin{array}{l} \frac{1}{C} \longleftrightarrow k \\ L \longleftrightarrow m \end{array} \right)$$

- ◇ Les analogies permettent d'étudier expérimentalement des dispositifs à partir de montages sensiblement différents. Par exemple ici il est possible d'étudier les oscillations d'une masse à partir d'un circuit  $R, L, C$  série.



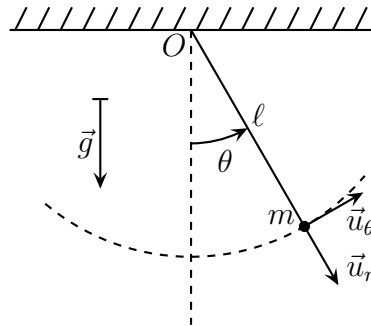
L'analogie n'est pas ici entre la mécanique et l'électrocinétique, mais entre un montage particulier en mécanique et un montage particulier en électrocinétique.

## II – Oscillations non linéaires

## II.1 – Pendule simple rigide

### II.1.i – encore lui !

◇ Reprenons le pendule simple rigide non amorti.



◇ Rappelons les résultats :

$$E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2(t) - m g \cos \theta(t) = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

### II.1.ii – évolution au premier ordre

◇ En considérant  $|\theta(t)| \ll 1$ , nous avons  $\sin \theta(t) = \theta(t)$  et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta(t) = 0$$

◇ De solution  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

◇ Nous constatons alors que la pulsation des oscillations ne dépend pas de  $\theta_0$  (pourvu seulement que  $\theta_0$  soit suffisamment faible).

Pour le pendule simple, il y a isochronisme des petites oscillations.

### II.1.iii – apparition d'harmoniques

◇ Que se passe-t-il si  $\theta(t)$  reste petit mais moins ?

#### ★ une nouvelle équation différentielle

◇ Pour  $\theta(t)$  petit mais moins, nous pouvons écrire :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

◇ Et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3(t) = 0$$

◇ C'est une équation différentielle **non linéaire** ce qui fait qu'elle demande, pour être résolue, des méthodes particulière.

## ★ idée de base

- ◇ Nous savons déjà que le mouvement va être périodique, mais nous ignorons *a priori* la pulsation  $\omega$ . Nous allons donc chercher **une** solution de la forme :

$$\theta(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t)$$

- ◇ Comme nous cherchons une solution pour  $\theta(t)$  petit, nous **savons** que la solution est proche de celle que nous avons trouvé avant, *ie.* que :

$$\begin{aligned} \rightarrow a_2 &\ll a_1 \\ \rightarrow \omega &\simeq \omega_0 \end{aligned}$$

- ◇ Nous allons en plus supposer que :

- $a_1$  est du premier ordre, *ie.* que  $a_1 \ll 1$ , ce qui est normal vu que  $\theta(t)$  suffisamment petit pour pouvoir faire un DL de  $\sin \theta(t)$
- $a_2 \ll a_1$ , ce qui est normal vu qu'il s'agit d'un terme correctif par rapport à la solution au premier ordre :  $a_2$  est donc un infiniment petit du second ordre
- $a_3 \ll a_2$ , car nous allons considérer que le 3<sup>e</sup> terme est un terme correctif du second :  $a_3$  est donc un infiniment petit du 3<sup>e</sup> ordre

- ◇ Il est normal de chercher une solution « à l'ordre 3 » étant donné que l'équation différentielle (et notamment le sinus) a été développée à l'ordre 3. Cela implique qu'il **faudra** s'arrêter à l'ordre 3 et que tous les termes d'ordre 4, 5, ... devront être négligés.

- ◇ Ainsi  $a_3 a_1$  est du 4<sup>e</sup> ordre,  $a_2^2$  aussi,  $a_2 a_3$  est du 5<sup>e</sup> ordre, ...

## ★ c'est une nouvelle solution

- ◇ Introduisons l'expression de  $\theta(t)$  dans l'équation différentielle et regardons ce que cela donne.

- ◇ Pour  $\theta^3(t)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \theta^3(t) &= (a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t))^3 \\ &= a_1^3 \cos^3(\omega t) + \underbrace{a_1^2 a_2 \cos^2(\omega t) + \cos(2\omega t) + a_1^2 a_3 \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) + \dots}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

- ◇ Et ainsi :  $\theta^3(t) = a_1^3 \cos^3(\omega t) = a_1^3 \times \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4}$

- ◇ Soyons organisés : en introduisant  $\theta(t)$  dans l'équation différentielle, nous allons voir apparaître des  $\cos(\omega t)$ ,  $\cos(2\omega t)$  et  $\cos(3\omega t)$ . Regroupons les dans un tableau :

$\theta(t) =$	$a_1 \cos(\omega t)$	$a_2 \cos(2\omega t)$	$a_3 \cos(3\omega t)$
$\dot{\theta}(t) =$	$-a_1 \omega \sin(\omega t)$	$-a_2 2\omega \sin(2\omega t)$	$-a_3 3\omega \sin(3\omega t)$
$\ddot{\theta}(t) =$	$-a_1 \omega^2 \cos(\omega t)$	$-a_2 4\omega^2 \cos(2\omega t)$	$-a_3 9\omega^2 \cos(3\omega t)$
$\omega_0^2 \theta(t) =$	$a_1 \omega_0^2 \cos(\omega t)$	$+a_2 \omega_0^2 \cos(2\omega t)$	$+a_3 \omega_0^2 \cos(3\omega t)$
$-\frac{\omega_0^2}{6} \theta^3(t) =$	$-\frac{\omega_0^2}{6} a_1^3 \frac{3}{4} \cos(\omega t)$		$-\frac{\omega_0^2}{6} a_1^3 \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$

- ◇ La somme des trois dernière ligne doit être nulle, ce qui donne :

$$\underbrace{\left(-a_1 \omega^2 + a_1 \omega_0^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 a_1^3\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=} A} \cos(\omega t) + \underbrace{\left(-a_2 4 \omega^2 + a_2 \omega_0^2\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=} B} \cos(2 \omega t) + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\left(-9 a_3 \omega^2 + a_3 \omega_0^2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 a_1^3\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=} C} \cos(3 \omega t) = 0$$

◇ Pour que cette somme soit constamment nulle, il faut que chacun des coefficients soit nul.

### ★ conséquences de $A = 0$

◇  $A = 0$  donne  $a_1 \omega^2 = a_1 \omega_0^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{8}\right)$ .

◇ Et comme  $a_1 \neq 0$  (sinon c'est la solution correspond à  $\theta(t) = 0$  ce qui n'est guère intéressant), nous trouvons, en n'oubliant pas que  $a_1 \ll 1$  :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{8}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a_1^2}{16}\right)}$$

◇ Ici la pulsation dépend bien de l'amplitude  $a_1$ . La correction est d'ordre 2.

L'isochronisme des oscillations n'est pas une loi générale.

### ★ conséquences de $B = 0$

◇  $B = 0$  donne  $(\omega_0^2 - 4 \omega^2) a_2 = 0$ .

◇ Comme  $\omega \simeq \omega_0$ , il n'est pas possible d'avoir  $(\omega_0^2 - 4 \omega^2) = 0$ , c'est donc que  $a_2 = 0$ .

◇ Il n'y a pas d'harmonique paire.

### ★ conséquences de $C = 0$

◇  $C = 0$  donne  $(\omega_0^2 - 9 \omega^2) a_3 - \frac{a_1^3 \omega_0^2}{24} = 0$ .

◇ Ici, si nous voulons écrire  $\omega$  à l'ordre 2, cela donnerait, avec  $a_3$  un terme d'ordre 5 que nous **devons** négliger. Par conséquent, nous écrirons simplement  $\omega = \omega_0$  et cela donne :

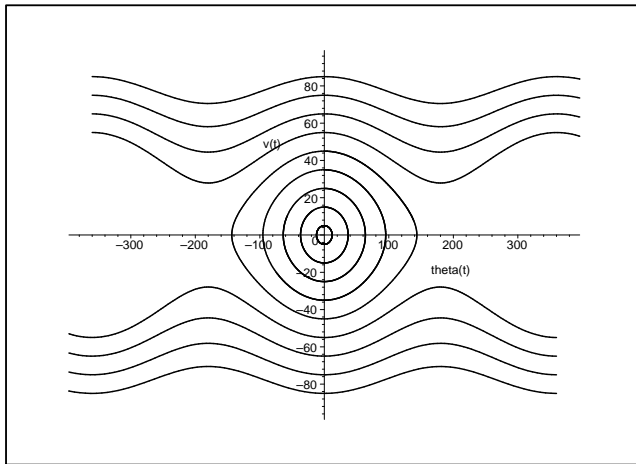
$$-8 \omega_0^2 a_3 = \frac{a_1^3 \omega_0^2}{24} \quad \rightsquigarrow \quad a_3 = -\frac{a_1^3}{192}$$

◇ Nous pouvons vérifier que  $a_3$  est bien du 3<sup>e</sup> ordre.

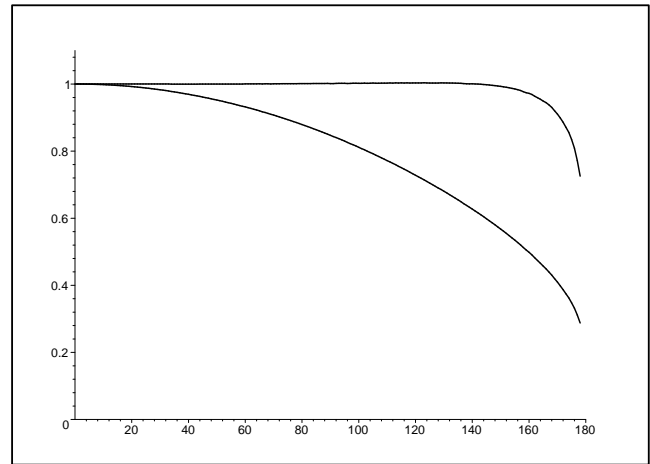
### ★ comparaison avec des résultats numériques

◇ Sur le graphique 7, nous avons tracé le plan de phase sur lequel nous pouvons visualiser les mouvements périodiques mais non sinusoïdaux.

Graphique 7



Graphique 8



✧ Sur le graphique 8, nous avons tracé :

→ la valeur approchée  $\frac{\omega_{\text{approx}}}{\omega_0} = 1 - \frac{a_1^2}{16}$

→ le rapport  $\frac{\omega_{\text{calc}}}{\omega_{\text{approx}}}$  où  $\omega_{\text{calc}}$  est la pulsation des oscillations obtenues après une résolution numérique de l'équation différentielle en  $\sin \theta$ .

✧ Nous voyons alors bien que l'approximation est excellente jusqu'à  $a_1 = 160^\circ$ , *ie.* que l'approximation  $|\theta(t)| \ll 1$  est parfaitement justifiée jusqu'à  $\theta = \frac{160}{180} \pi = 2,8 \dots$

## II.2 – Oscillateur de VAN DER POL

### II.2.i – équation d'évolution

✧ L'équation de VAN DER POL modélise de manière purement mathématique un oscillateur.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \left( 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right) \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

✧ Comme nous allons le voir, cette équation permet la naissance et la stabilisation d'oscillations, ce qui peut être utile pour représenter des évolutions de phénomènes naturels.

### II.2.ii – résolution « avec les mains »

✧ Supposons tout d'abord que  $|x(t)| \ll x_0$ , alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

✧ Cela ressemble à une équation différentielle du second ordre dont nous avons l'habitude, **sauf que** le second terme possède un coefficient négatif, un peu comme si le facteur de qualité était négatif.

✧ Du point de vue des solutions, cela signifie qu'au lieu d'être exponentiellement décroissantes en  $e^{-t/\tau}$ , elles seront exponentiellement croissantes en  $e^{+t/\tau}$  : c'est à ce moment que les oscillations vont apparaître.

✧ Supposons maintenant que  $|x(t)| \gg x_0$ , alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \varepsilon \omega_0 \frac{x^2(t)}{x_0^2} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

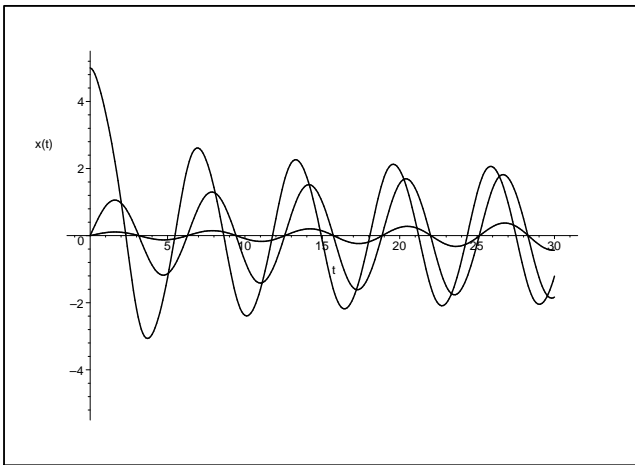


- ◇ Cette fois le terme d'amortissement  $\varepsilon \omega_0 \frac{x^2(t)}{x_0^2} \frac{dx(t)}{dt}$  est non négligeable et, en plus, est d'autant plus élevé que  $|x(t)|$  est grand : les oscillations ne peuvent croître jusqu'à l'infini.

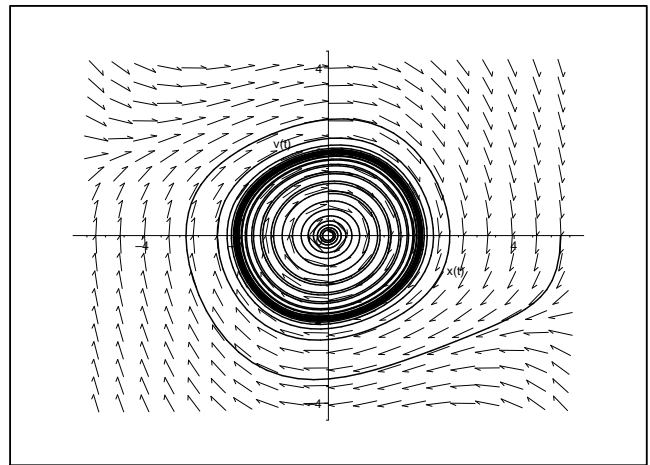
### II.2.iii – évolutions dans le plan de phase

- ◇ Regardons l'évolution d'un oscillateur de VAN DER POL pour lequel  $\varepsilon = 0,1$  en mode temporel et dans le plan de phase pour trois conditions initiales différentes.

Graphique 9

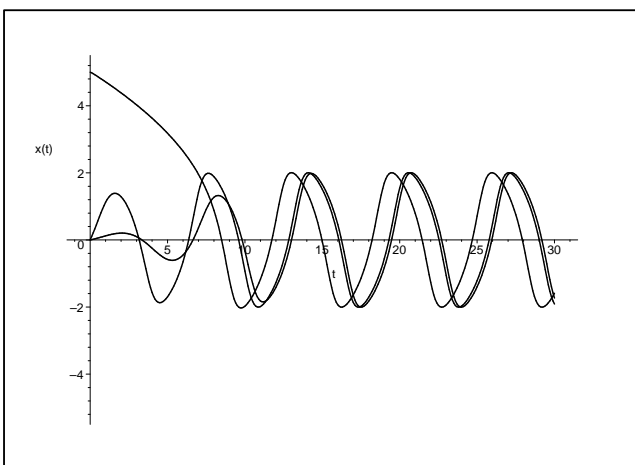


Graphique 10

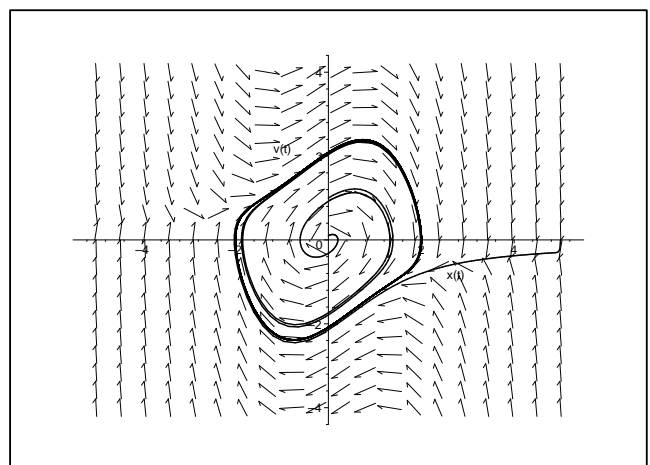


- ◇ Nous pouvons constater que quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire dans le plan de phase tend vers un cycle limite, *ie.* vers une trajectoire correspondant à un mouvement périodique.
- ◇ Notons qu'ici, comme dans les évolutions suivantes, que les trajectoires ne se coupent pas : l'oscillateur de VAN DER POL est en régime libre.
- ◇ Pour  $\varepsilon = 0,7$ , cela donne, avec les mêmes conditions initiales :

Graphique 11

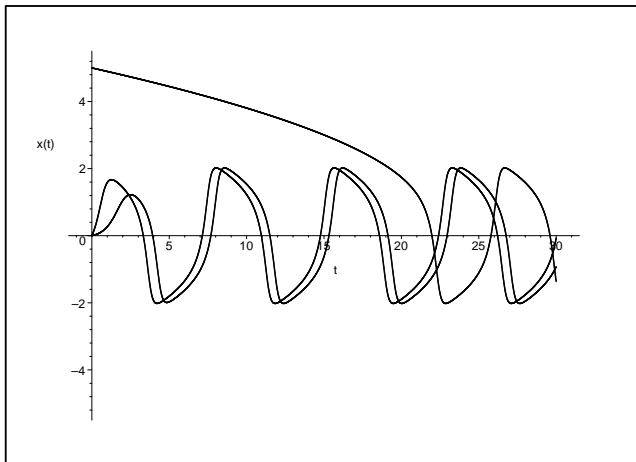


Graphique 12

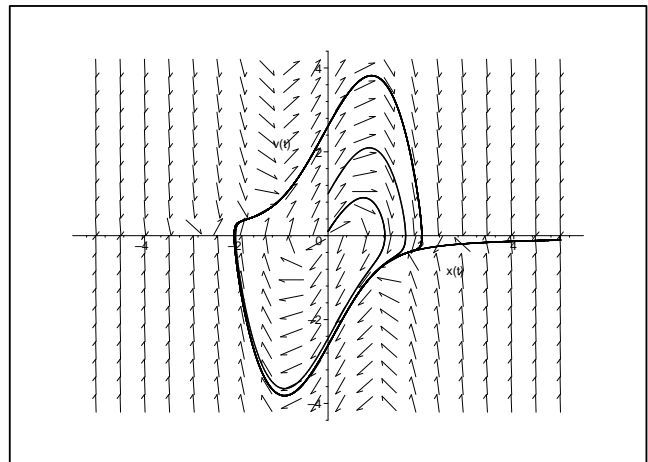


- ◇ Comme cela se voit avec l'évolution temporelle, le régime permanent est atteint beaucoup plus vite et ne ressemble vraiment plus à une évolution sinusoïdale.
- ◇ Pour  $\varepsilon = 2$ , cela donne, avec les mêmes conditions initiales :

Graphique 13



Graphique 14



✧ L'effet est amplifié : le régime permanent est atteint encore plus rapidement et le cycle limite n'est plus du tout sinusoïdal.

## III – Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

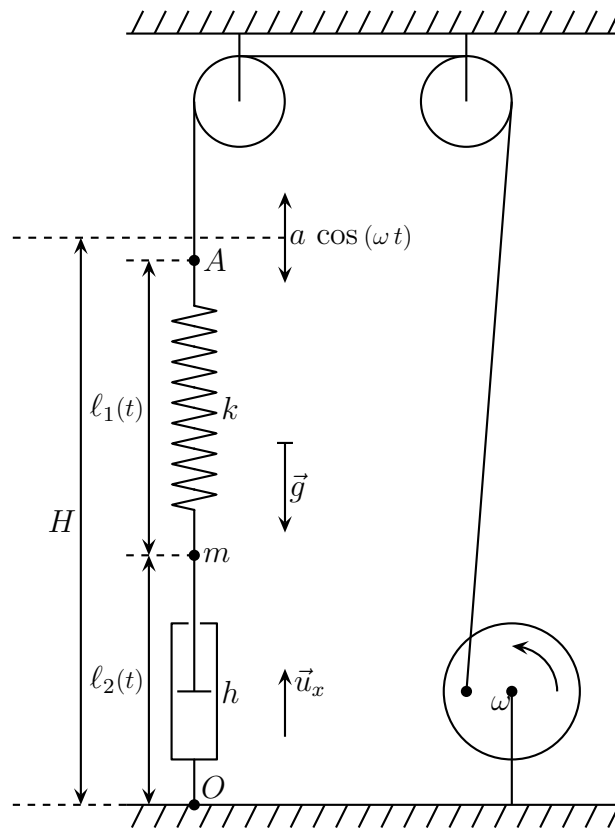
### III.1 – Modélisation mécanique

#### III.1.i – montage

✧ Introduisons dans le montage précédent un excitateur. C'est moins évident qu'avec un circuit électrocinétique, mais quand même possible.

✧ Au repos (moteur éteint), le point  $A$  est à la hauteur  $H$  et lorsque le moteur tourne, la cote de  $A$  vaut  $x_A(t) = H + a \cos(\omega t)$ .

✧ Le moteur tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ .



◇ Analyse physique :

- le moteur va faire osciller la masse va osciller verticalement tout étant freinée par l'amortisseur mais le moteur n'agit pas directement sur la masse !
- la trajectoire est contrainte, il y a un seul degré de description mais l'évolution est forcée.
- les grandeurs pertinentes :  $m, H, a, \omega, g, k, \ell_0, h$

◇ Analyse technique :

- le repérage est simple : l'axe sera vertical et le centre sera choisi soit en haut soit en bas, mieux vaut en bas histoire d'avoir des  $x(t)$  positifs
- ici, vu que nous ne savons pas comment le moteur va intervenir énergétiquement parlant, mieux vaut utiliser un PFD.

### III.1.ii – équation différentielle régissant l'évolution

◇ Les forces qui s'exercent sur la masse sont physiquement les mêmes que lorsque le régime n'était pas forcé :

$$\vec{P} + \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{am}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -mg - k(\ell_1(t) - \ell_0)(-1) - h \frac{d\ell_2(t)}{dt}(+1) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

◇ Écrivons maintenant (et c'est là que nous allons voir apparaître l'influence du moteur) tout avec un seul degré de description, ici  $x(t)$  :

$$\ell_1(t) = x_A(t) - x(t) = H + a \cos(\omega t) - x(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = x(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\ell_2(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$$

◇ En remplaçant nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 -mg + k(H + a \cos(\omega t) - x(t) - \ell_0) - h \frac{dx(t)}{dt} &= m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\
 \rightsquigarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) &= -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0) + \frac{k}{m} a \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

- ◇ C'est la même équation différentielle que précédemment avec seulement le terme  $a \cos(\omega t)$  en plus dans le second membre.

### ★ équation différentielle en $X(t)$

- ◇ Introduisons la position d'équilibre  $x(t) = x_{\text{éq}} + X(t)$  où  $x_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{mg}{k}$  :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k}{m} x_{\text{éq}} + \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \rightsquigarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} (x(t) - x_{\text{éq}}) = \frac{k}{m} a \cos(\omega t)$$

- ◇ Et ainsi puisque  $\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$  :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \rightsquigarrow \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

- ◇ Cherchons maintenant à résoudre cette équation.

## III.1.iii – phénoménologie et premiers pas vers la solution

### ★ phénoménologie

- ◇ Nous savons que la solution sera du type  $X(t) = X_{\text{libre}}(t) + X_{\text{p}}(t)$  où :
- $X_{\text{libre}}(t)$  est une solution de type régime libre (apériodique, critique ou pseudo périodique)
  - $X_{\text{p}}$  est une solution particulière, la seule qui restera en régime permanent, qui sera du type  $X_0 \cos(\omega t + \varphi)$
- ◇ En d'autres termes la solution complète va tendre, de toute façon, vers une solution sinusoïdale de même pulsation que l'excitation.

La réponse d'un dispositif linéaire à une excitation sinusoïdale est elle aussi sinusoïdale de même pulsation que la pulsation d'excitation.

- ◇ Cela n'a l'air de rien, mais la loi précédente est absolument fondamentale. Elle l'est tellement et nous l'utiliserons de manière tellement naturelle que nous aurons tendance à oublier qu'elle n'est en rien évidente.
- ◇ Le corollaire de cette loi est que si nous voulons « créer » une pulsation  $2\omega$  à partir d'une excitation  $\omega$  il va être nécessaire d'utiliser un dispositif non linéaire.

### ★ trouver la solution particulière

- ◇ Cherchons la solution sous la forme  $X_{\text{p}}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .
- ◇ Cette solution est une solution de l'équation différentielle, calculons donc les différents termes.

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 X(t) &= A \omega_0^2 \cos(\omega t) + B \omega_0^2 \sin(\omega t) \\
 \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} &= + \frac{B \omega_0 \omega}{Q} \cos(\omega t) - \frac{A \omega_0 \omega}{Q} \sin(\omega t) \\
 \frac{d^2X(t)}{dt^2} &= -A \omega^2 \cos(\omega t) - B \omega^2 \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

✧ La somme de tous ces termes doit valoir, d'après l'équation différentielle,  $a \cos(\omega t)$  ce qui donne :

$$\left( A \omega_0^2 + \frac{B \omega_0 \omega}{Q} - A \omega^2 \right) \cos(\omega t) + \left( B \omega_0^2 - \frac{A \omega_0 \omega}{Q} - B \omega^2 \right) \sin(\omega t) = a \cos(\omega t)$$

✧ Pour que cette équation soit vérifiée à tout instant, il faut :

✧ Il ne reste plus qu'à résoudre en  $A$  et  $B$  ...

✧ Ce n'est pas tant que cette méthode ne marche pas, bien au contraire, mais c'est qu'elle est assez pédestre et, surtout, qu'elle ne permet pas de déterminer les paramètres véritablement importants comme, notamment, l'amplitude des oscillations.

✧ C'est pourquoi nous allons utiliser une autre et nouvelle méthode.

## III.2 – Un puissant outil : la notation complexe

### III.2.i – une grandeur sinusoïdale ...

Pour une grandeur sinusoïdale  $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  :

- $X_m$  est l'amplitude
- $\omega$  est la pulsation
- $\omega t + \varphi$  est la phase instantannée
- $\varphi$  est la phase à l'origine (des dates)

### III.2.ii – ... peut se représenter par une grandeur complexe ...

Une grandeur sinusoïdale réelle  $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par la *grandeur complexe* notée  $\underline{X}(t)$  qui vaut :

$$\underline{X}(t) \triangleq X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \stackrel{\text{not}}{=} \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{X}_m \text{ est l'amplitude complexe.}$$

✧ Pour passer du réel en complexe, il suffit de faire  $\cos() \longrightarrow e^{j\theta}$ .

✧ Si nous avons l'expression complète de la grandeur complexe alors il est très simple de retrouver la grandeur réelle.

Entre une grandeur réelle  $X(t)$  et sa grandeur complexe associée  $\underline{X}(t)$  nous avons :

$$X(t) = \operatorname{Re}(\underline{X}(t))$$

✧ La pulsation  $\omega$  est imposée par le moteur. Il faut donc trouver, pour la solution particulière,  $X_m$  et  $\varphi$ . Or, justement :  $X_m = |\underline{X}_m|$  et  $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$ .

Toutes les informations intéressantes d'une grandeur sinusoïdale sont dans l'amplitude complexe.

### III.2.iii – ... pour être facilement dérivée

✧ Soit une grandeur quelconque  $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  et sa notation complexe  $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ .

◇ Cherchons l'expression de  $\frac{dX(t)}{dt}$  :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

◇ Et cherchons la notation complexe de  $\frac{dX(t)}{dt}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= X_m \omega e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)} = X_m \omega e^{j\pi/2} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= X_m \omega j e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{X}(t) \end{aligned}$$

◇ Tout se passe comme si nous avions dérivé directement  $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$  !

La représentation complexe d'une dérivée est la dérivée de la représentation complexe.

Pour dériver une grandeur sinusoïdale complexe, il suffit de multiplier par  $j\omega$ .

◇ Nous avons donc  $\ddot{\underline{X}}(t) = (j\omega)^2 \underline{X}(t) = -\omega^2 \underline{X}(t)$ .

### III.3 – Des expressions complexes mais simples

◇ À partir de maintenant, bien que nous continuons à chercher  $X_p(t)$ , nous allons noter cette solution particulière  $x(t)$ .

◇ En fait, nous allons chercher  $\underline{X}(t)$ .

#### III.3.i – pour l'élongation

◇ Passons l'équation différentielle en notation complexe avec  $\cos() \longrightarrow e^{j0}$  :

$$\ddot{X}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \ddot{\underline{X}}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{X}}(t) + \omega_0^2 \underline{X}(t) = \omega_0^2 a e^{j\omega t}$$

◇ Avec  $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$  ;  $\dot{\underline{X}}(t) = j\omega \underline{X}$  et  $\ddot{\underline{X}}(t) = -\omega^2 \underline{X}(t)$ , nous arrivons à :

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = \omega_0^2 a e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \left( \omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) \underline{X}_m = \omega_0^2 a$$

◇ Et ainsi :  $\underline{X}_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \times a$

#### ★ écriture canonique

◇ Introduisons la grandeur  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ . C'est une grandeur sans dimension proportionnelle à la pulsation  $\omega$ .

Une grandeur *réduite* est une grandeur adimensionalisée à partir d'une grandeur caractéristique de référence.

◇ En divisant par  $\omega_0^2$  au numérateur et au dénominateur, nous obtenons :

$$\underline{X_m} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \times a \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{X_m} = \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times a}$$

### III.3.ii – pour la vitesse

◇ Rien de plus simple :  $\dot{\underline{X}}(t) = j \omega \underline{X}(t)$  donc, en notant  $\dot{\underline{X}}(t) = \underline{V_m} e^{j\omega t}$  :

$$\underline{V_m} = j \omega \underline{X_m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_m} = \frac{j \omega \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \times a$$

#### ★ écriture canonique

◇ Notons  $V_0 = a \omega_0$  et divisons par  $\omega_0^2$  numérateur et dénominateur :

$$\underline{V_m} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \times V_0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{V_m} = \frac{j u}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times V_0}$$

## III.4 – Résonance en élongation

### III.4.i – amplitude

◇ Nous allons nous intéresser à l'amplitude réelle  $X_m = |\underline{X_m}|$  qui représente le débattement de la masse.

$$X_m = |\underline{X_m}| = \left| \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times a \right| = \frac{a}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

◇ Mieux vaut travailler en comportement asymptotique dans un premier temps.

#### ★ comportement qualitatif

◇ Pour trouver le comportement qualitatif de l'amplitude complexe, nous allons rechercher son comportement asymptotique en 0 et en  $+\infty$  ainsi que sa valeur pour une valeur particulière.

Pour déterminer le comportement asymptotique d'une fonction, il suffit de garder le ou les termes prédominants.

◇ Procédons par ordre.

$$\begin{array}{llll}
\text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 & \text{et } \underline{X_m} \sim a & \text{donc } \begin{cases} X_m \sim a \longrightarrow a \\ \varphi \longrightarrow 0 \end{cases} \\
\\
\text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty & \text{et } \underline{X_m} \sim \frac{a}{-u^2} = -\frac{a}{u^2} & \text{donc } \begin{cases} X_m \sim \frac{a}{u^2} \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow \pm\pi \end{cases} \\
\\
\text{Si } \omega = \omega_0 & \text{alors } u = 1 & \text{et } \underline{X_m} = \frac{a}{\frac{j}{Q}} = -j a Q & \text{donc } \begin{cases} X_m = Q a \\ \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}
\end{array}$$

◇ Cette dernière valeur nous permet de dire que  $\varphi \xrightarrow{u \rightarrow \infty} -\pi$ .

### ★ maximum ?

◇ Oui, il va y avoir un maximum : il sera situé au minimum de  $D(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$ . Or :

$$\frac{dD(u)}{du} = 2(1 - u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q} = 2u \left( \frac{1}{Q^2} - 2(1 - u^2) \right)$$

◇ Et ainsi la condition d'extrémalité  $\frac{dD(u)}{du} = 0$  donne deux solutions  $u$

◇ La première c'est  $u = 0$  : il y a une tangente horizontale à l'origine.

◇ La 2<sup>e</sup> est telle que  $\frac{1}{Q^2} - 2(1 - u_r^2) = 0$  soit  $u_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ .

◇ Pour que  $X_m$  présente un maximum, il faut que  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ , *ie.* il faut que  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , et alors

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Il y a *résonance* dès lors que la réponse d'un dispositif est supérieure à l'excitation.

La résonance en élongation n'existe que si  $Q$  est assez grand. Quand elle existe, elle n'est pas exactement située à la pulsation propre sauf si  $Q \gg 1$ .

◇ Pour trouver la valeur maximale de  $X_m$ , il suffit de remplacer  $u_r^2$  par son expression :

$$X_{m,\max} = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}}$$

◇ Et donc  $X_{m,\max} = \frac{Q a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ .



★ cas  $Q \gg 1$ 

◇ À partir de quelle valeur avons-nous  $u_r = 1$  à 1 % près ?

$$1 - \frac{1}{100} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \rightsquigarrow \quad 1 - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

◇ Cette expression sera vérifiée à partir de  $4Q^2 = 100$ , ie. à partir de  $Q = 5$ .

◇ À partir de quelle valeur avons-nous  $X_{m,\max} = Qa$  à 1 % près ?

$$1 + \frac{1}{100} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \rightsquigarrow \quad 1 + \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{8Q^2}$$

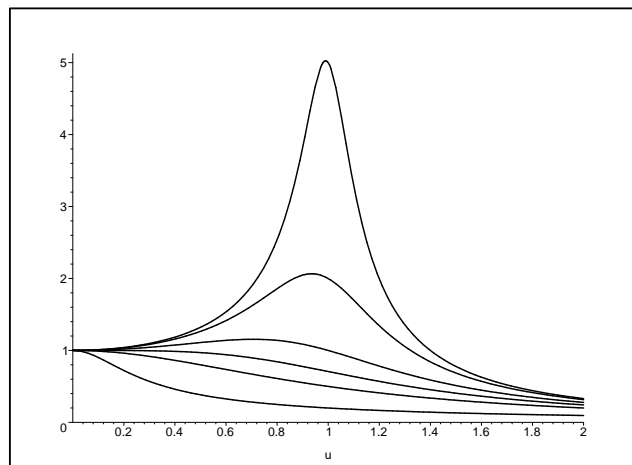
◇ Cette expression sera vérifiée à partir de  $8Q^2 = 100$ , ie. à partir de  $Q = \frac{5}{\sqrt{2}}$ .

En ce qui concerne le régime sinusoïdal forcé, nous pouvons dire  $Q \gg 1$  dès que  $Q > 5$ .

## ★ tracés

◇ Sur le graphique 15, nous avons tracé  $X_m(u)$  pour différentes valeurs de  $Q$  : 0,2 ; 0,5 ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ; 1 ; 2 et 5 et avec  $a = 1$  U.A..

Graphique 15



La résonance est dite *aigüe* lorsque le pic de résonance est étroit.

## III.4.ii – déphasage

◇ Nous cherchons  $\varphi = \arg(\underline{X_m})$  avec  $\underline{X_m} = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \times a$ .

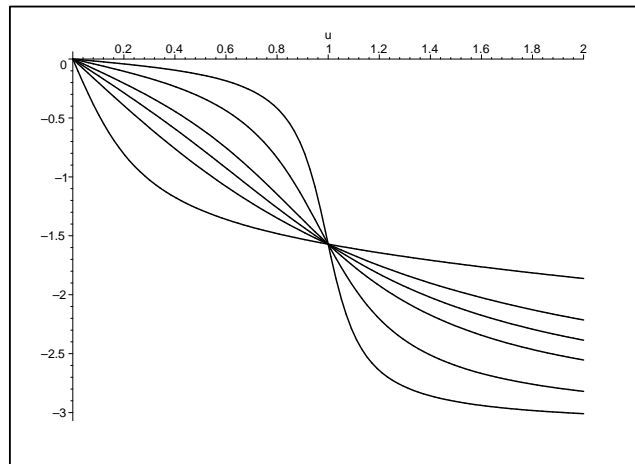
◇ Ne cherchons pas pour l'instant l'expression exacte de  $\varphi$  ; contentons-nous de l'allure qualitative.

◇ Rappelons les résultats trouvés précédemment :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 & \text{et } \varphi \longrightarrow 0 \\ \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty & \text{et } \varphi \longrightarrow \pm\pi \\ \text{Si } \omega \longrightarrow \omega_0 & \text{alors } u \longrightarrow 1 & \text{et } \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

✧ Cela donne les tracés suivants de  $\varphi(u)$  avec les facteurs de qualité  $Q : 0,2 ; 0,5 ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 1 ; 2$  et  $5$ .

Graphique 16



✧ Pour trouver qui est qui, pensons au cas limite :  $Q = +\infty$ . Alors  $\underline{X_m} = \frac{1}{1-u^2} a$  réel donc d'argument 0 ou  $\pi$ . Ainsi : plus le facteur de qualité est élevé, plus la représentation graphique de  $\varphi$  doit coller aux à 0 et  $\pi$ .

## III.5 – Résonance en vitesse

### III.5.i – amplitude

✧ Nous avons  $\underline{V_m} = \frac{j u}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times V_0$  d'où  $V_m = \|\underline{V_m}\| = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \times V_0$ .

#### ★ comportement qualitatif

✧ Procédons par ordre

$$\begin{array}{llll}
 \text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 & \text{et } \underline{V_m} \sim \frac{j u}{1} V_0 = j u V_0 & \text{donc } \begin{cases} V_m \sim u V_0 \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
 \\
 \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty & \text{et } \underline{V_m} \sim \frac{j u}{-u^2} V_0 = -\frac{j}{u} V_0 & \text{donc } \begin{cases} V_m \sim \frac{1}{u} V_0 \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases} \\
 \\
 \text{Si } \omega = \omega_0 & \text{alors } u = 1 & \text{et } \underline{V_m} \sim \frac{j}{\frac{j}{Q}} V_0 = Q V_0 & \text{donc } \begin{cases} V_m = Q V_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

#### ★ maximum ?

✧ Réécrivons d'abord  $V_m : V_m = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}}$ .

◇ Nous pouvons alors constater que  $V_m$  est maximal pour  $\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{1}{u} - u\right)^2$  minimal, *ie.* pour  $\boxed{u_r = 1}$ .

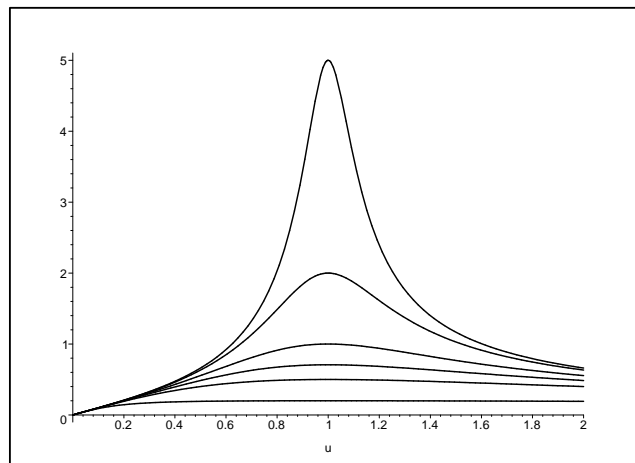
◇ Nous avons alors  $\boxed{V_{m,\max} = Q V_0}$

La résonance en vitesse existe toujours et se fait à la pulsation propre.

### ★ tracés

◇ Sur le graphique 17, nous avons tracé  $V_m(u)$  avec toujours  $Q$  parmi 0,2 ; 0,5 ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ; 1 ; 2 et 5 et  $V_0 = 1$  U.A..

Graphique 17



◇ En regardant la valeur maximale, il est facile de déterminer quelle courbe correspond à quel facteur de qualité.

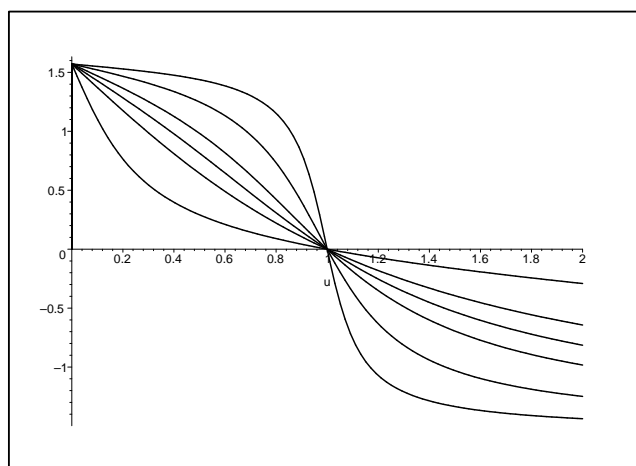
### III.5.ii – déphasage

◇ Rappelons les résultats déjà obtenus.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 & \text{et } \varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\
 \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty & \text{et } \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \\
 \text{Si } \omega = \omega_0 & \text{alors } u = 1 & \text{et } \varphi \longrightarrow 0
 \end{array}$$

◇ Sur le graphique 18, nous avons tracé  $\varphi(u)$  avec toujours  $Q$  parmi 0,2 ; 0,5 ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ; 1 ; 2 et 5.

Graphique 18



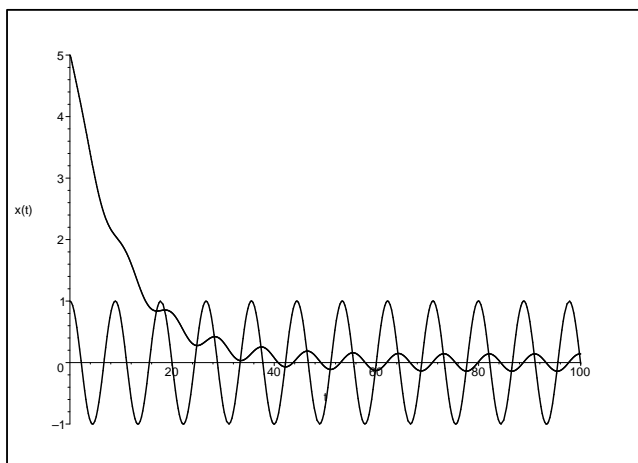
✧ Pour retrouver qui est qui, faisons comme avec l'élongation : étudions le cas  $Q = +\infty$ . Nous avons alors  $\underline{V}_m = \frac{j u}{1 - u^2} V_0$  qui est toujours un imaginaire pur donc d'argument  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, plus le facteur de qualité est élevé, plus la courbe  $\varphi(u)$  correspondante doit coller aux valeurs  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

## III.6 – Évolution complète

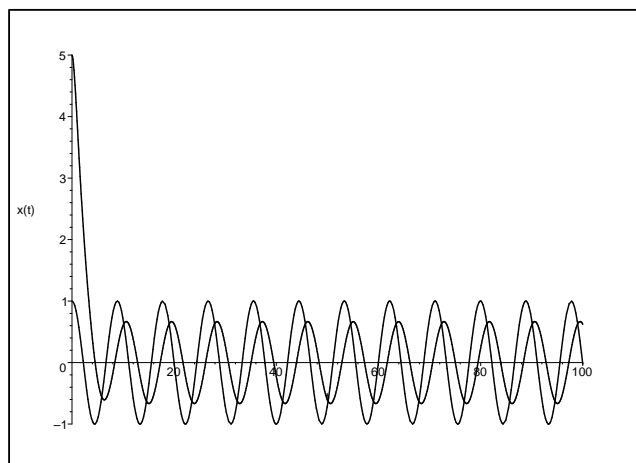
### III.6.i – représentation temporelle

✧ Regardons les solutions complètes d'un oscillateur en régime forcé avec comme condition initiales  $X(0) = 5$  et  $\dot{X}(0) = 0$  et interprétons les courbes obtenues.

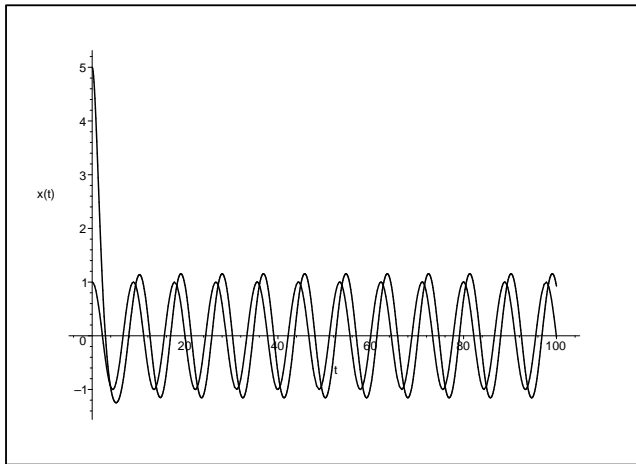
Graphique 19



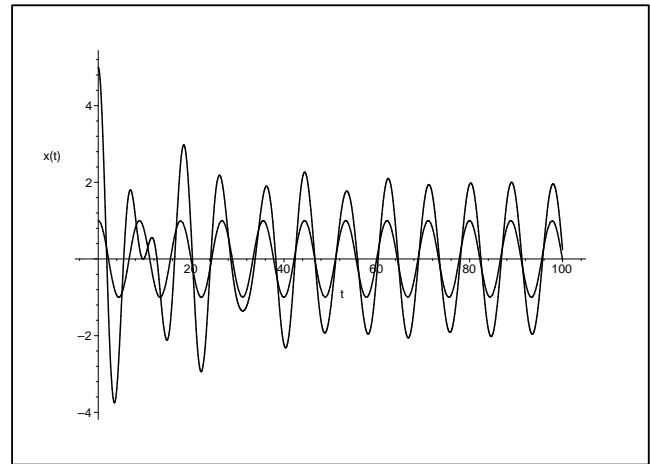
Graphique 20



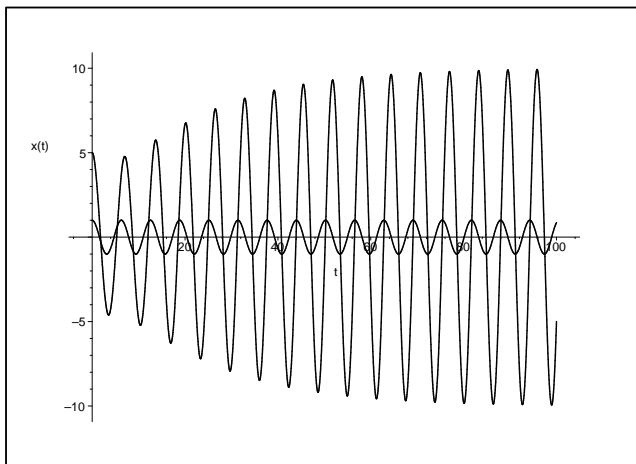
Graphique 21



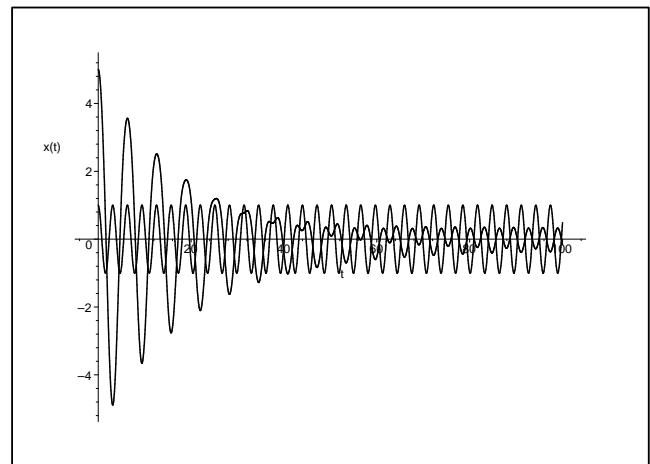
Graphique 22



Graphique 23



Graphique 24



✧ Les caractéristiques sont les suivantes :

- sur le graphique 19, nous avons  $u = 1/\sqrt{2}$  et  $Q = 0,1$
- sur le graphique 20, nous avons  $u = 1/\sqrt{2}$  et  $Q = 0,5$
- sur le graphique 21, nous avons  $u = 1/\sqrt{2}$  et  $Q = 1$  (c'est la pulsation de résonance pour ce facteur de qualité)
- sur le graphique 21, nous avons  $u = 1/\sqrt{2}$  et  $Q = 10$
- sur le graphique 22, nous avons  $u = 1$  et  $Q = 10$
- sur le graphique 23, nous avons  $u = 2$  et  $Q = 10$

✧ Nous pouvons aisément voir sur chaque graphique les parties en régime transitoire et les parties en régime permanent où les oscillations se font à la même pulsation que l'excitation.

✧ Sur les 4 premiers nous pouvons voir l'influence du facteur de qualité :

- pour un oscillateur en régime aperiodique, la durée pour atteindre le RP est long
- pour un oscillateur en régime critique, la durée pour atteindre le RP est très court
- pour un oscillateur avec  $Q = 1$ , il peut y avoir résonance, même si elle est faible
- pour un oscillateur avec  $Q = 10$ , il peut y avoir amplification, même si la pulsation d'excitation n'est pas à la résonance

✧ Pour les trois dernière évolutions, nous pouvons voir l'influence de la pulsation d'excitation :

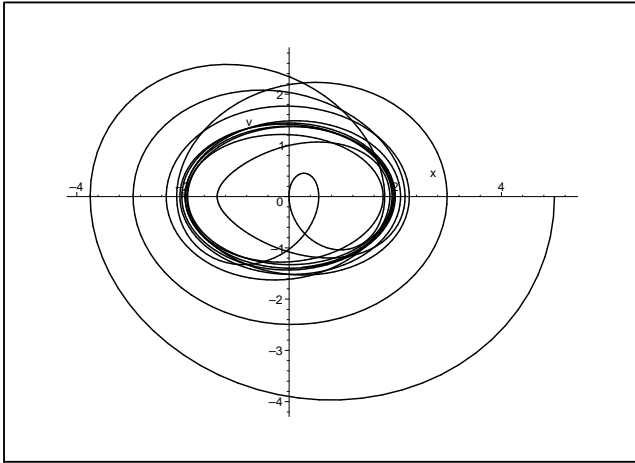
- il peut y avoir amplification même si l'oscillateur n'est pas excité à sa pulsation propre
- à la résonance, l'amplification des oscillations est maximale
- même avec un oscillateur à facteur de qualité très élevé, il n'y a pas toujours amplification des oscillations

✧ Dans les trois cas, le régime permanent est long à arriver.

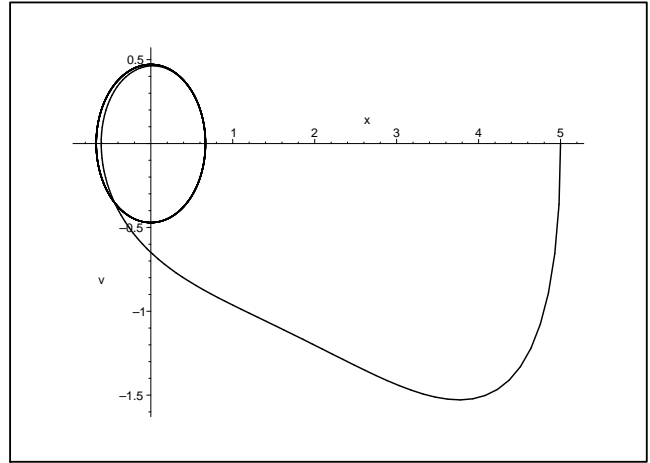
### III.6.ii – des trajectoires qui se coupent dans le plan de phase

◇ Représentons les évolutions précédentes dans le plan de phase et cherchons qui est qui.

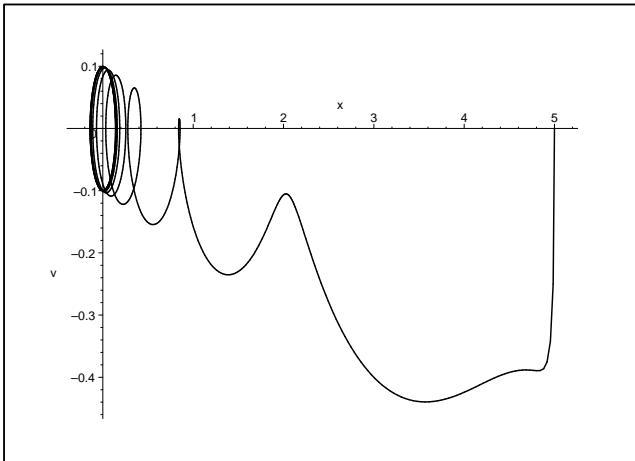
Graphique 25



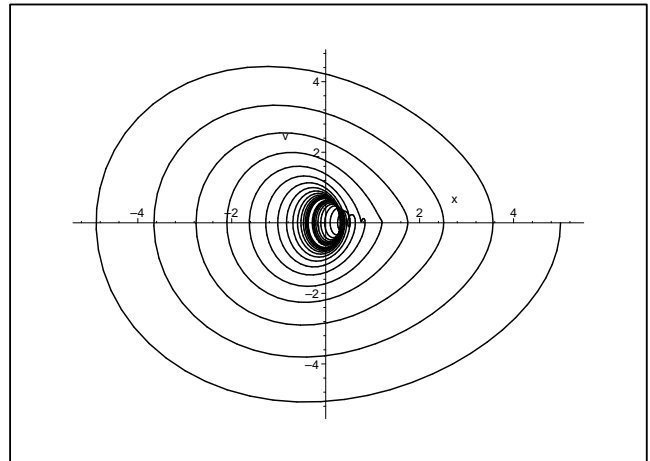
Graphique 26



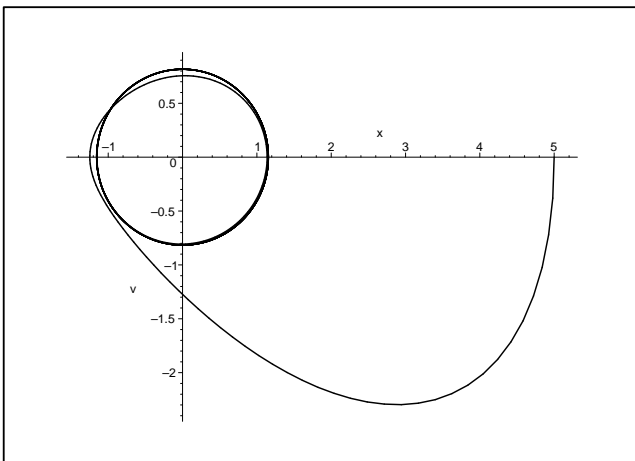
Graphique 27



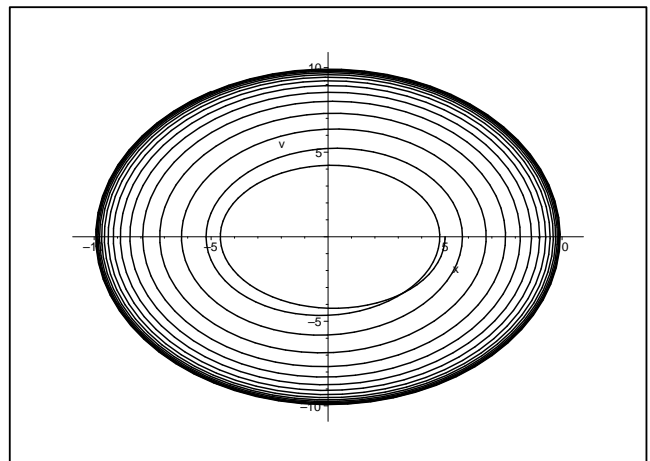
Graphique 28



Graphique 29



Graphique 30



◇ Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il s'agit bien d'évolution en régime forcé : la trajectoire dans le plan de phase se coupe elle-même.

◇ Le plus simple, c'est le graphique 27 qui n'oscille pas avant de tendre vers son cycle limite. Il correspond à l'évolution en régime apériodique 19.

◇ Ensuite les évolutions 26 et 29 tendent quasiment à la première oscillation vers leurs cycles limite : elles correspondent donc aux graphiques 20 et 21. Pour voir qui est qui précisément, comme il n'y a pas de notion précise de temps dans les plans de phase, regardons les cycles limites et notamment

l'amplitude des oscillations. Elle est inférieure à 1 pour le graphique 26, il y a donc atténuation, il s'agit de l'évolution 20. Donc le graphique 29 correspond à l'évolution 21.

- ✧ Pour départager les évolutions 25, 28 et 30 (qui font beaucoup d'oscillation avant d'arriver à leur cycle limite, ce qui confirme le fait que le facteur de qualité soit élevé), regardons les cycles limites :
- pour l'évolution 25, le cycle limite est d'amplitude presque 2 : il y a une faible amplification donc cela correspond à l'évolution du graphique 22.
  - pour l'évolution 28, le cycle limite est d'amplitude inférieure à 1 : il y a une atténuation donc cela correspond à l'évolution du graphique 24
  - pour l'évolution 30, le cycle limite est d'amplitude environ 10 : il y a une forte amplification donc cela correspond à l'évolution du graphique 23

# Oscillateur harmonique

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - grandeur sinusoïdale, amplitude, phase instantanée, phase à l'origine, pulsation
  - notation complexe, amplitude complexe
  - résonance

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - la phénoménologie d'une évolution en régime forcé d'un oscillateur harmonique amorti
  - la phénoménologie de la réponse en élongation d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal
  - la phénoménologie de la réponse en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir associer la notation complexe aux régimes sinusoïdaux forcés.

## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
  - comment passer une grandeur réelle en notation complexe
  - comment passer une équation différentielle réelle en notation complexe
  - la manipulation des nombres complexes (module, argument, ...)

### ★ petits gestes

- ◇ Savoir dériver en notation complexe.

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
  - tout sur l'élongation complexe (recherche de résonance, ...)
  - tout sur la vitesse complexe (recherche de résonance, ...)
  - retrouver l'équation différentielle régissant l'évolution d'un oscillateur harmonique amorti à partir d'un montage mécanique



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Oscillateur harmonique amorti en régime libre</b>	<b>1</b>
I-1	Oscillateur harmonique ? . . . . .	1
I-2	Modélisation mécanique . . . . .	1
I-2.i	montage . . . . .	1
I-2.ii	phénoménologie et caractéristique d'un amortisseur . . . . .	2
I-2.iii	équation différentielle régissant l'évolution . . . . .	3
	position d'équilibre . . . . .	3
	écart à l'équilibre . . . . .	4
	écriture canonique . . . . .	4
I-3	Cas sans frottement . . . . .	4
I-3.i	équation horaire . . . . .	4
I-3.ii	représentation dans le plan de phase . . . . .	5
I-3.iii	aspect énergétique . . . . .	5
	valeur moyenne de l'énergie cinétique . . . . .	5
	valeur moyenne de l'énergie potentielle . . . . .	6
	résultat et interprétation . . . . .	6
I-4	Oscillations avec frottements . . . . .	6
I-4.i	pour une évolution connue . . . . .	6
I-4.ii	vue dans le plan de phase . . . . .	7
I-5	Analogie avec le circuit $R, L, C$ série . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Oscillations non linéaires</b>	<b>8</b>
II-1	Pendule simple rigide . . . . .	9
II-1.i	encore lui ! . . . . .	9
II-1.ii	évolution au premier ordre . . . . .	9
II-1.iii	apparition d'harmoniques . . . . .	9
	une nouvelle équation différentielle . . . . .	9
	idée de base . . . . .	10
	c'est une nouvelle solution . . . . .	10
	conséquences de $A = 0$ . . . . .	11
	conséquences de $B = 0$ . . . . .	11
	conséquences de $C = 0$ . . . . .	11
	comparaison avec des résultats numériques . . . . .	11
II-2	Oscillateur de VAN DER POL . . . . .	12
II-2.i	équation d'évolution . . . . .	12
II-2.ii	résolution « avec les mains » . . . . .	12
II-2.iii	évolutions dans le plan de phase . . . . .	13
<b>III</b>	<b>Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé</b>	<b>14</b>
III-1	Modélisation mécanique . . . . .	14
III-1.i	montage . . . . .	14
III-1.ii	équation différentielle régissant l'évolution . . . . .	15
	équation différentielle en $X(t)$ . . . . .	16
III-1.iii	phénoménologie et premiers pas vers la solution . . . . .	16
	phénoménologie . . . . .	16
	trouver la solution particulière . . . . .	16
III-2	Un puissant outil : la notation complexe . . . . .	17
III-2.i	une grandeur sinusoïdale . . . . .	17

III.2.ii	... peut se représenter par une grandeur complexe . . . . .	17
III.2.iii	... pour être facilement dérivée . . . . .	17
III.3	Des expressions complexes mais simples . . . . .	18
III.3.i	pour l'élongation . . . . .	18
	écriture canonique . . . . .	18
III.3.ii	pour la vitesse . . . . .	19
	écriture canonique . . . . .	19
III.4	Résonance en élongation . . . . .	19
III.4.i	amplitude . . . . .	19
	comportement qualitatif . . . . .	19
	maximum ? . . . . .	20
	cas $Q \gg 1$ . . . . .	21
	tracés . . . . .	21
III.4.ii	déphasage . . . . .	21
III.5	Résonance en vitesse . . . . .	22
III.5.i	amplitude . . . . .	22
	comportement qualitatif . . . . .	22
	maximum ? . . . . .	22
	tracés . . . . .	23
III.5.ii	déphasage . . . . .	23
III.6	Évolution complète . . . . .	24
III.6.i	représentation temporelle . . . . .	24
III.6.ii	des trajectoires qui se coupent dans le plan de phase . . . . .	26

# Mécanique

## Chapitre 4

### Mécanique en référentiel non galiléen

# Mécanique en référentiel non galiléen

Jusqu'à présent, nous avons fait de la mécanique du point dans un référentiel galiléen. Toutefois rien ne dit *a priori* que les référentiels naturels (*ie.* ce par rapport à quoi le mouvement est décrit) soient tous galiléens. En fait, comme nous allons le voir, c'est loin d'être le cas. Nous précisons donc comment se modifient les lois de la mécanique dans le cas de référentiels non galiléens : de manière très simple en rajoutant une ou deux forces *ad hoc*.

Pour ce faire, nous commencerons par le cas où un référentiel est en translation par rapport à un référentiel galiléen puis nous verrons dans un deuxième temps le cas où un référentiel est en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen. Ensuite, nous précisons très rapidement ce qui se passe dans le cas général d'un référentiel en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen avant de terminer par étudier quelques situations usuelles en référentiels dits terrestres.

## I – Référentiel en translation

### I.1 – Voir dans deux référentiels différents

#### I.1.i – qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ?

- ✧ Nous approfondirons la question plus tard car la réponse est loin d'être triviale tant du point de vue technique que du point de vue « philosophique ».
- ✧ Pour faire court et, forcément, non parfaitement exact, nous dirons qu'un référentiel est non galiléen lorsqu'il bouge par rapport à un autre référentiel galiléen.
- ✧ Par exemple, une voiture bouge par rapport à la route. Si le sol, définissant le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, alors un référentiel lié à la voiture sera en général non galiléen.
- ✧ Autre grand exemple classique : le manège. Ce dernier tourne par rapport au sol donc tout référentiel lié à lui est non galiléen.

Ce ne sont pas les choses ou les objets qui sont non galiléens, ce sont les éventuels référentiels qui leur sont liés.

- ✧ Nous pouvons constater aisément qu'il n'est pas toujours facile de boire dans une voiture, de marcher dans un train, de rester debout dans le bus, de marcher droit sur un manège, ...
- ✧ Nous pouvons aussi remarquer qu'il est bien plus facile de marcher dans un wagon d'un train qui démarre que dans un wagon de train Corail lancé à pleine vitesse en campagne.

Tout mouvement dans un référentiel non galiléen peut sembler bizarre et les référentiels non galiléens peuvent être plus ou moins non galiléens.

- ✧ Évitions d'interpréter trop vite ce qui se passe car les glissements de sens sont légion en référentiels non galiléens.

Rien n'*appartient* à un référentiel, personne ni rien n'est *dans* un référentiel, seuls les mouvements se décrivent **par rapport** à tel ou tel référentiel.

- ✧ En fait, c'est là l'aspect « difficile » des référentiels non galiléens : l'interprétation. Comme nous le verrons, étudier le mouvement dans un référentiel galiléen est très facile. Interpréter, dans la plupart des cas, c'est aussi très facile.
- ✧ En revanche, si l'interprétation se fait trop tôt, elle est la plupart du temps fausse car basée sur des lois « intuitives » et l'analyse physique s'en trouve perturbée. Il va donc falloir, là plus qu'ailleurs, faire preuve d'une extrême humilité, poser les questions usuelles et y répondre de manière rigoureuse avant d'écrire la moindre loi le tout **sans essayer d'y inclure déjà la réponse finale**.

### I.1.ii – pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ?

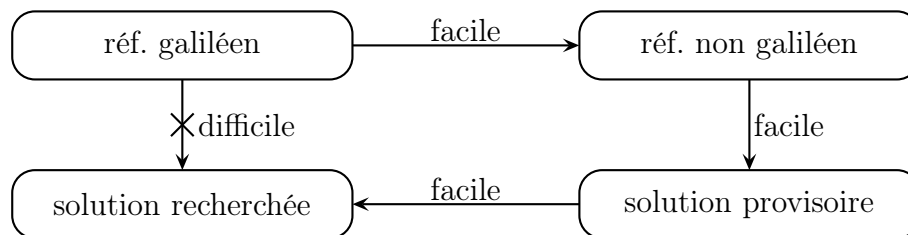
#### ★ la meilleure des raisons

- ✧ C'est une raison physique !
- ✧ Il est utile d'étudier quelque chose par rapport un référentiel non galiléen lorsqu'il s'agit d'un référentiel naturel.
- ✧ Comme nous l'avons dit, lors d'un transport il est plus utile de connaître le mouvement des objets transporté par rapport au camion, au wagon, que de connaître leurs mouvement par rapport au sol.
- ✧ Comme nous le verrons, le référentiel terrestre n'est pas parfaitement galiléen, mais c'est un référentiel naturel : tout le monde se repère par rapport au sol, c'est une évidence même ! Il va donc falloir tenir compte de son côté non galiléen.
- ✧ Toutefois le caractère non galiléen du référentiel terrestre est, comme nous le verrons dans la dernière partie de ce chapitre, humainement insensible. Pour que le caractère non galiléen se fasse sentir, il faut soit des mouvements à l'échelle terrestre (masses d'air), soit des expériences délicates spécialement prévues pour (pendule de FOUCAULT).

Sauf indication contraire et bien que non galiléen, le référentiel terrestre sera considéré comme *suffisamment* galiléen.

#### ★ une autre bonne (?) raison

- ✧ C'est une raison plus technique.
- ✧ Il peut s'avérer que, parfois, les lois soient plus faciles à écrire dans un référentiel non galiléen que dans un référentiel galiléen.
- ✧ La plupart du temps, il s'agira d'écrire des vitesses (comme en SI).

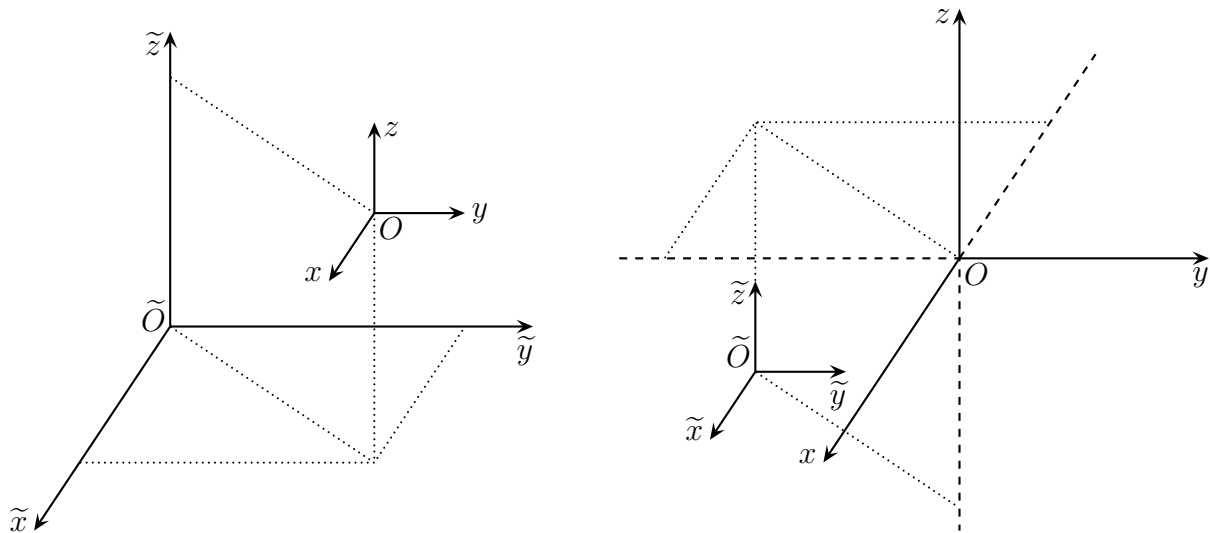


### I.1.iii – décrire deux référentiels en translation

- ✧ Il faut tout d'abord deux référentiels. Notons-les  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .

Deux référentiels sont dits *en translation*, lorsque leurs axes ont les mêmes directions, mais que leurs centres sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

- ✧ Représentons-les.



Pour mieux visualiser le mouvement par rapport à un certain référentiel, mieux vaut dessiner ce référentiel au centre du schéma, les axes non inclinés par rapport à la feuille.

Deux référentiels *en translation* sont parfaitement décrits par le mouvement du centre de l'un par rapport au centre de l'autre.

◇ Rappelons que par « mouvement », nous entendons position, vitesse et accélération.

### I.1.iv – objectif

- ◇ Grâce aux lois de NEWTON, nous savons déjà faire de la mécanique en référentiel galiléen et nous cherchons à faire de la mécanique directement en référentiel non galiléen, c'est plus pratique.
- ◇ Fixons donc les idées de manière arbitraire :
  - $\tilde{\mathcal{R}}$  sera le référentiel supposé galiléen
  - $\mathcal{R}$  sera le référentiel *a priori* non galiléen.
- ◇ Nous pouvons donc facilement écrire les lois de la mécanique par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . En considérant un point matériel soumis à  $\sum \vec{f}$ , nous pouvons écrire :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \sum \vec{f}$$

- ◇ Il faut donc maintenant faire en sorte de transformer cette grandeur de mouvement  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t)$  de  $M$  par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  en grandeur de mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour décrire le mouvement d'un point par rapport à un référentiel non galiléen, il est nécessaire de connaître le mouvement de ce référentiel non galiléen par rapport à un référentiel galiléen.

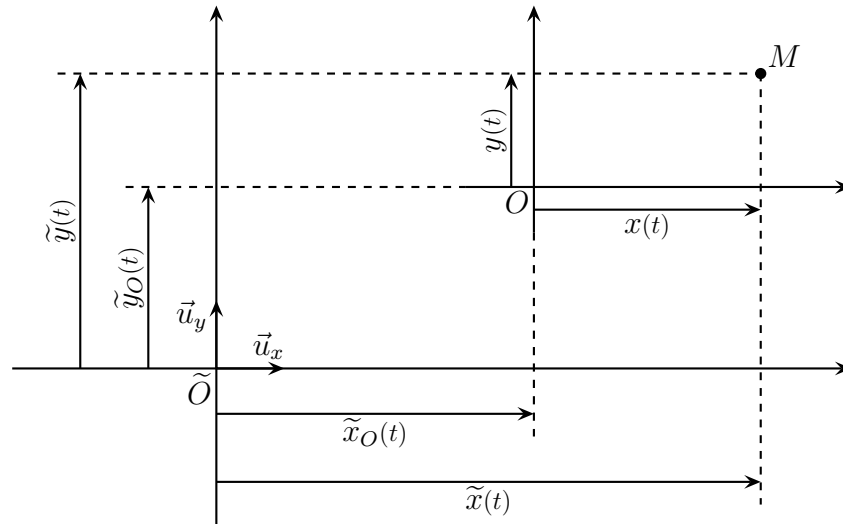
- ◇ Ici, cela signifie que nous connaissons parfaitement :

$$\overrightarrow{O\tilde{O}}(t) ; \quad \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t) \quad \text{et} \quad \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O, t)$$

## I.2 – Des mouvements différents dans les deux référentiels

### I.2.i – bien poser les notations

- ◇ Pour mieux visualiser la situation, nous allons représenter une situation en deux dimensions et généraliser à la 3<sup>e</sup> dimension.



- ◇ Les grandeurs concernant  $O$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont :

→ la position :

$$\overrightarrow{\tilde{O}O} = \tilde{x}_O(t) \vec{u}_x + \tilde{y}_O(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \frac{d\overrightarrow{\tilde{O}O}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

- ◇ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont :

→ la position :

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \tilde{x}(t) \vec{u}_x + \tilde{y}(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \frac{d\overrightarrow{\tilde{O}M}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

- ◇ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont :

→ la position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

### I.2.ii – relier les positions

◇ Nous cherchons le lien entre le vecteur position dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et celui dans  $\mathcal{R}$ , ie. entre  $\overrightarrow{\tilde{OM}}$  et  $\overrightarrow{OM}$ .

La loi de composition des vecteurs positions s'écrit :

$$\overrightarrow{\tilde{OM}} = \overrightarrow{\tilde{OO}} + \overrightarrow{OM}$$

◇ C'est une simple relation de CHASLES.

◇ Cela se voit sur le schéma :  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t)$  et  $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_O(t) + y(t)$ .

### I.2.iii – relier les vitesses

La loi qui permet de relier les vitesses (resp. les accélérations) d'un point par rapport à deux référentiels différents est appelée *loi de composition des vitesses* (resp. *loi de composition des accélérations*.)

◇ Nous cherchons le lien entre vecteur vitesse dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\mathcal{R}_0$ , ie. entre  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

La loi de composition des vecteurs vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$

◇ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d\overrightarrow{\tilde{OM}}}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t) \vec{u}_x}{dt} + \frac{d\tilde{y}(t) \vec{u}_y}{dt} = \frac{d(\tilde{x}_O(t) + x(t))}{dt} \vec{u}_x + \frac{d(\tilde{y}_O(t) + y(t))}{dt} \vec{u}_y \\ &= \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \\ &= \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y \right) + \left( \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \right) \\ &= \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \end{aligned}$$

☛ *Remarque* : il a été fondamental de supposer ici que  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  ne dépendaient pas du temps, ie. que les référentiels étaient en translation l'un par rapport à l'autre.



### I.2.iv – relier les accélérations

- ◇ C'est le même principe : nous cherchons le lien entre vecteur accélération dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\mathcal{R}_0$ , *ie.* entre  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

La loi de composition des vecteurs accélération s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$

- ◇ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \right) \\ &= \left( \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_y \right) + \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y \right) \\ &= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) \end{aligned}$$

### I.2.v – du mauvais vocabulaire

- ◇ Traditionnellement, les lois de compositions s'écrivent de la manière suivante.

Loi de composition lorsque  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  sont en translation l'un par rapport à l'autre :

- loi de composition des vitesses :  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{v}_e(M)$  où  $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O)$  est appelée la *vitesse d'entraînement*.
- loi de composition des accélérations :  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{a}_e(M)$  où  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O)$  est appelée l'*accélération d'entraînement*.

- ◇ Il faut bien comprendre que le vocable « entraînement » est intrinsèquement mauvais car il ne reflète en rien l'entraînement de quelque chose. En effet le référentiel  $\mathcal{R}$  n'entraîne **pas** le point  $M$ .
- ◇ Imaginons un point  $M$  fixe par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , par exemple un élève assis, immobile par rapport au référentiel terrestre.
- ◇ Imaginons un autre référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Par exemple le professeur qui marche.
- ◇ Alors l'élève bouge dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et il est difficile de voir en quoi l'élève est entraîné par le référentiel professeur.
- ◇ Ce vocabulaire se comprend lorsque nous l'analysons de la manière suivante.
- ◇ Supposons un point  $M$  **réellement fixé** dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* qui se déplace avec  $\mathcal{R}$ . C'est souvent le cas lorsque le référentiel est naturel, *ie.* correspond à quelque chose de concret : une voiture, un train, la Terre, ...
- ◇ Alors, lorsque  $M$  est immobile **par rapport à  $\mathcal{R}$** , sa vitesse par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  se réduit à la vitesse d'entraînement.

La vitesse d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

L'accélération d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à l'accélération qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- ◇ Le vocabulaire est là, il faut s'y adapter mais il faut y faire attention. Il a été choisi de sorte que **dans certains cas** il porte bien son nom.
- ☞ *Remarque* : nous avons rencontré le même genre de problème en optique avec objet / image, réel / virtuel

### I.2.vi – observation importante

- ◇ Ces lois ont nécessité pour leurs démonstrations :
- le fait que  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t)$ , ce qui est une relation géométrique
  - la définition des vecteurs vitesse et accélération
  - le fait que  $\vec{u}_x = \vec{C}^{\text{té}}$ , *ie.* que les référentiels étaient en translation
- ◇ En revanche, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser le caractère galiléen ou non des référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ . En conséquence :

Les lois de composition sont des lois cinématiques indépendantes du caractère galiléen, de nature physique, des référentiels.

## I.3 – Les lois de la mécanique

### I.3.i – le principe fondamental aux forceps

#### ★ énoncé

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , référentiel non galiléen est tel que :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M) = \left( \sum \vec{f} \right) + \vec{f}_{\text{ie}} \quad \text{où}$$

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{\text{e}}(M) = -m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) \text{ est la force d'inertie d'entraînement.}$$

- ◇ En fait nous pouvons voir que rien n'est fondamentalement changé : le PFD se transforme, nous ne pouvons plus dire « officiellement » que c'est le PFD, mais sa nouvelle écriture est rigoureusement identique à celle déjà connue.
- ◇ La différence entre le PFD usuel et le PFD en référentiel non galiléen, c'est l'ajout d'une force dite d'inertie.
- ◇ Dans la suite, par mauvaise habitude, nous nommerons encore cette loi le PFD.

#### ★ démonstration

- ◇ La démonstration est toute simple. Commençons par écrire le PFD dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \sum \vec{f}(t)$$

◇ Avec la loi de composition des accélérations, cela donne :

$$m (\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t)) = \sum \vec{f}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \sum \vec{f}(t) - m \vec{a}_e(M,t)$$

◇ Ce qui est bien le résultat en notant  $\vec{f}_{ie} \stackrel{\text{not}}{=} -m \vec{a}_e(M,t)$ .

### ★ invariance galiléenne des forces

Les forces physiques, celles qui représentent l'interaction entre deux choses sont invariantes par changement de référentiel, même non galiléen.

◇ Ainsi même par rapport à une voiture, la force qu'exerce un ressort s'écrit :

$$\vec{f} = -k (\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}}$$

## I.3.ii – une nouvelle force

### ★ un nom compréhensible

- ◇ La force s'appelle « force d'inertie » car elle fait intervenir la masse inertielle.
- ◇ Voir la démonstration pour s'en convaincre.

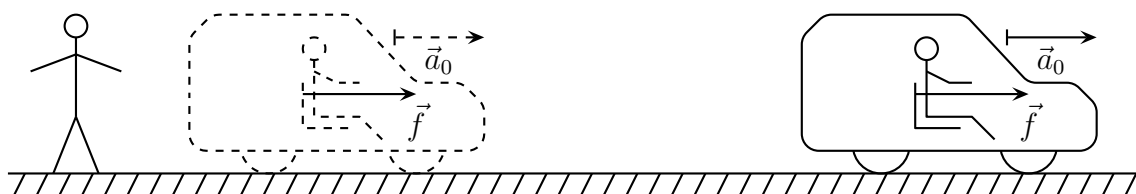
### ★ ce n'est pas une force physique

- ◇ Elle n'est pas invariante par changement de référentiel car, justement, elle dépend du référentiel dans lequel elle est utilisée car elle fait intervenir  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(O)$ .

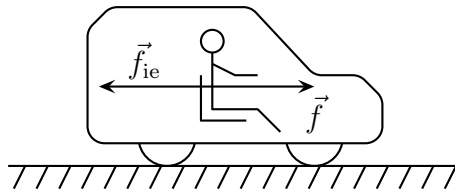
Montrer le film de la bille sur la rigole tournante.

### ★ pourquoi la ressent-on alors ?

- ◇ Prenons l'exemple d'une voiture qui démarre.
- ◇ Quelqu'un à l'intérieur de la voiture se sent « plaqué contre le siège », comme si quelque chose le tirait en arrière : il traduit cela par une force **vers l'arrière**.
- ◇ En fait, non seulement cette force n'existe pas, mais la seule force que subit le passager est une force **vers l'avant**.
- ◇ Pour cela, prenons l'exemple d'une voiture qui accélère vers l'avant et qui est initialement arrêtée.



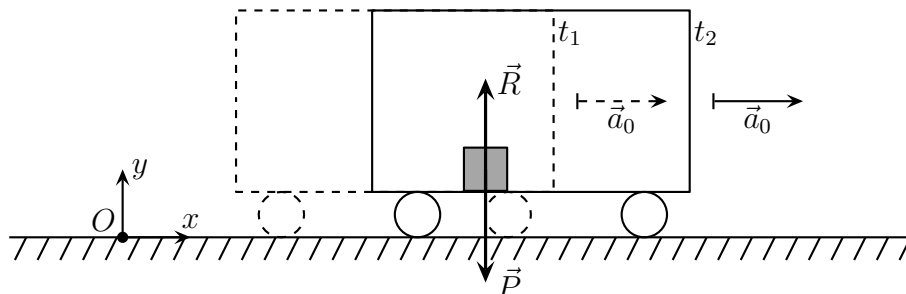
- ◇ Comme le passager « suit » la voiture, il faut qu'il ait la même accélération que la voiture c'est-à-dire  $\vec{a}_0$ .
- ◇ Or, d'après NEWTON qui ne peut mentir, cela implique que le passager subit la force  $\vec{f} = \vec{a}_0/m$ .
- ◇ Cette force ne peut venir que du siège, seul objet en contact avec le passager.
- ◇ Pour simplifier, nous pouvons dire que le siège agit un peu comme un ressort. Ainsi pour qu'il exerce une force vers la droite (ici) il **faudrait** qu'il soit comprimé.
- ◇ Le passager est donc bien plaqué contre le siège mais **parce qu'il** subit de ce dernier une force vers l'avant.
- ◇ Ceci étant le passager interprète la situation de son point de vue : pour lui il est **immobile**. Dans ses conditions, comme il ressent le siège qui le pousse vers l'avant, il *faudrait* qu'une force le pousse vers l'arrière.



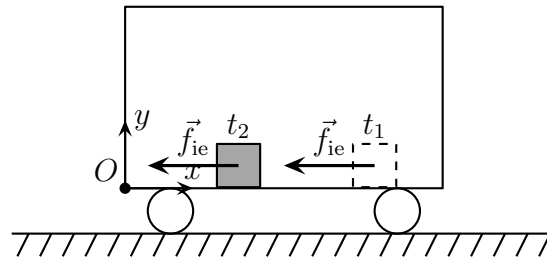
- ◇ C'est cette force vers l'arrière qui est interprétée comme une force d'inertie **bien qu'elle n'existe pas**.
- ◇ En fait tout se passe comme si le passager était « catapulté » par le siège.
- ◇ Remarquons ainsi que sans dossier c'est plus difficile d'accélérer en voiture. De même, sans portière gauche, difficile de tourner à droite sans que le chauffeur ne soit éjecté !

### ★ juste un glaçon

- ◇ Prenons un autre exemple pour montrer que les forces d'inertie n'existent pas, qu'il s'agit que d'une illusion, certes extrêmement pratique, mais d'une simple illusion dangereuse.
- ◇ Imaginons un glaçon dans un wagon, le tout étant initialement immobile.
- ◇ Le wagon se met en mouvement.
- ◇ Comme le glaçon est fondant (et sur un support plastique) tout se passe comme s'il n'y avait pas de frottement : poids et réaction normale se compensent, la résultante des forces sur le glaçon est nulle, son accélération l'est donc aussi.
- ◇ Le glaçon est **immobile** par rapport au sol : le wagon « glisse » sous lui !



- ◇ En revanche, la même situation représentée dans le référentiel du wagon donne lieu à une tout autre interprétation.
- ◇ Comme nous pouvons le voir : au début le glaçon est immobile à l'avant du wagon alors qu'à la fin il fonce de plus en plus vite vers l'arrière. Tout se passe donc comme si une force le poussait vers l'arrière : c'est la force d'inertie.
- ◇ Dans le référentiel du wagon, le glaçon subit une force d'inertie bien qu'il soit en réalité immobile !



- ◇ Quand vous bougez la tête, **tous les objets, choses, personnes, étoiles, maison, ...** subissent des forces d'inertie par rapport à vous. Mais ils n'en sont pas écrasés pour autant !

### I.3.iii – vision énergétique

#### ★ les lois

- ◇ Les questions à se poser sont :

- la force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?
- peut-on associer une énergie potentielle à une force d'inertie d'entraînement ?

Dans le cas de référentiels en translation, la force d'inertie d'entraînement n'est pas conservative.

- ◇ La raison est simple.
- ◇ Une énergie potentielle, donc la force associée, ne doit dépendre que de l'espace et pas du temps.
- ◇ Or la force d'inertie s'écrit  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(t)$  ce qui signifie qu'elle dépend furieusement du temps par l'intermédiaire de l'accélération d'entraînement !
- ◇ Ceci étant, si l'accélération d'entraînement est constante, ...

#### ★ cas particulier d'une force d'inertie constante

Lorsque l'accélération d'entraînement est constante, le travail fourni par la force d'inertie d'entraînement à un point de masse  $m$  qui bouge entre  $A$  et  $B$  s'écrit :

$$W_{AB} = \vec{f}_{ie} \cdot \overrightarrow{AB}$$

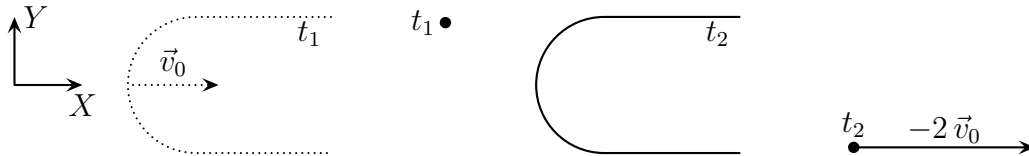
- ◇ Il s'agit en fait d'un cas particulier du travail fourni par une force constante.

#### ★ paradoxe dans un raisonnement énergétique

- ◇ Considérons la situation suivante : une bille de masse  $m$  avance à la vitesse  $\vec{v}_0$  sur un plan horizontal sans frottement.
- ◇ Nous pouvons alors dire que s'il n'y a aucun obstacle, elle conserve une vitesse vectoriellement constante.
- ◇ Mettons un rail courbé sur sa route de sorte que ce rail (sans frottement lui non plus) renvoie la bille dans la direction initiale.
- ◇ Alors une fois rééjectée du rail, la bille aura encore la vitesse  $\vec{v}_0$  et, pour l'ensemble du mouvement, la variation totale d'énergie cinétique sera nulle, ce qui est cohérent avec le fait que  $\Delta E_c = W = 0$ .



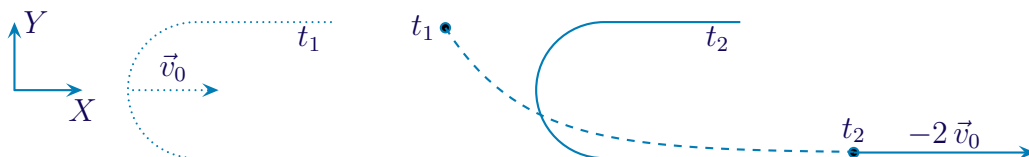
- ◇ Raisonnons dans un référentiel animé de la vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{C}^{\text{te}}$ .
- ◇ Au début la bille a une vitesse nulle alors qu'après elle a une vitesse de  $-2\vec{v}_0$ .
- ◇ La variation d'énergie cinétique vaut donc cette fois  $\Delta E_c = 2 m v_0^2 \neq 0$ .



- ◇ D'où les questions :
  - quelles sont les forces qui ont travaillé ?
  - pourquoi la variation d'énergie cinétique n'est-elle pas la même ?

Faire réfléchir quelques instant là-dessus.

- ◇ Pour savoir qui a travaillé, procédons par élimination, sachant qu'à la fin il doit en rester une :
  - ce ne sont pas les forces à distance : le poids parce que tout le mouvement est horizontal, la force électromagnétique parce que la bille n'est pas chargée
  - ce ne sont pas les forces d'inertie parce que l'autre référentiel est parfaitement galiléen !
  - ce ne sont pas les forces de frottements parce qu'il n'y en a pas
  - ce sont donc les réactions normales du rail
- ◇ En effet, bien que l'habitude soit grande de dire que les réactions normales ne travaillent pas, cela n'est vrai que lorsque le support est immobile.
- ◇ Ici, pour nous en convaincre, nous pouvons dessiner l'allure de la trajectoire de la bille dans le second référentiel pour constater qu'elle n'est effectivement *a priori* pas tangente au support.



- ◇ Il s'agit en fait ici de ce qu'il est possible d'appeler « l'effet raquette » : c'est **grâce** aux actions *normales* d'un support qu'un objet est mis en mouvement.
- ◇ La réponse à la deuxième question est alors (provisoirement) immédiate : les variations d'énergie dépendent du référentiel dans lequel elles sont calculées.

Les variations d'énergie d'un système ne sont pas des grandeurs intrinsèques.

## I.4 – Les référentiels galiléens

### I.4.i – alors, finalement, c'est quoi ?

- ◇ N'oublions pas qu'au fond, la définition d'un référentiel galiléen est donnée par la première loi de NEWTON : « Il existe des référentiels dits galiléens tels que tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle » ;

◇ Nous pouvons désormais traduire cela par :

Un référentiel est galiléen si le PFD s'écrit sans force d'inertie.

◇ Malgré tout, nous pouvons caractériser assez fortement les référentiels galiléens.

Un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen si et seulement si la translation est rectiligne uniforme.

◇ En effet, supposons  $\tilde{\mathcal{R}}$  galiléen et  $\mathcal{R}$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

◇ Dans ces conditions, la vitesse du centre  $O$  de  $\mathcal{R}$  est telle que :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{C}^{\text{te}} \rightsquigarrow \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{0} \rightsquigarrow \vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0}$$

◇ Comme les forces d'inerties sont nulles dans  $\mathcal{R}$ , cela prouve bien que ce dernier est galiléen.

◇ Autrement dit, en trouvant *un* référentiel galiléen, nous pouvons en déduire *tous* les autres.

### ★ quel est le premier référentiel galiléen ?

◇ C'est un problème, un vrai de vrai gros problème.

◇ Quand un mouvement par rapport à un référentiel galiléen s'écarte du mouvement prévu par le PFD, il peut s'agir soit d'un caractère non galiléen non pris en compte, soit d'une force inconnue.

◇ Des sondes à la limite du système solaire ne suivent pas exactement la trajectoire prévue et pour l'instant les astronomes en sont à chercher quelles pourraient être les forces oubliées.

## I.4.ii – référentiels usuels

### ★ référentiel de COPERNIC

Le *référentiel de COPERNIC* est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées.

◇ Deux des axes du référentiel de COPERNIC constituent le plan moyen de l'écliptique.

◇ La grande question est : quelles sont ces étoiles<sup>1</sup> ?

Le référentiel de COPERNIC est postulé galiléen.

◇ Comme ça, plus de problème, nous avons *un* référentiel galiléen.

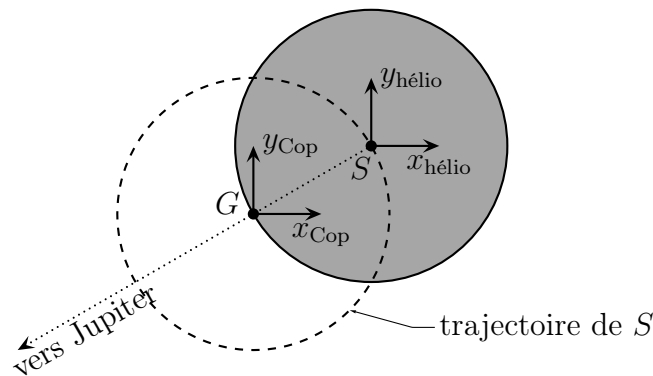
Le référentiel de COPERNIC est adapté à l'étude du système solaire.

### ★ référentiel héliocentrique

Le *référentiel héliocentrique* est le référentiel centré sur le centre de masse du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

1. Si quelqu'un possède cette information, je suis preneur.

- ✧ À cause de la masse de Jupiter, le référentiel de COPERNIC est décalé d'environ un rayon solaire du centre du référentiel héliocentrique.



- ✧ De plus, comme la période de révolution de Jupiter autour du Soleil est d'environ 29 an, nous pouvons dire que le référentiel héliocentrique est en *translation circulaire* par rapport au référentiel de COPERNIC.

Le référentiel héliocentrique n'est pas rigoureusement galiléen mais il est suffisamment galiléen pour quasiment toutes les études.

Le référentiel héliocentrique est adapté à l'étude de corps dans le système solaire sur des durées bien inférieures à la période de Jupiter (29 an).

### ★ référentiel géocentrique

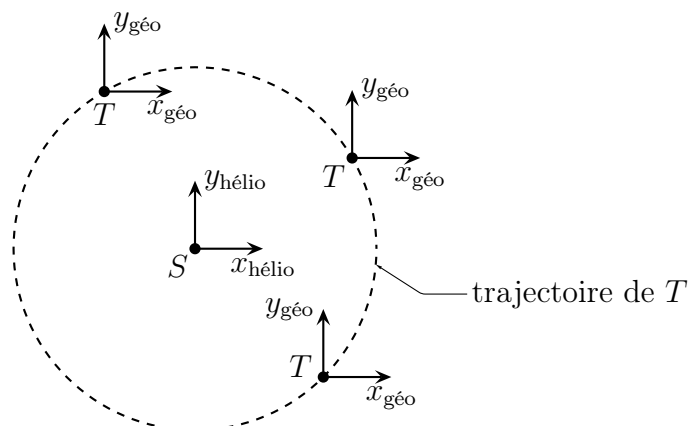
Le *référentiel géocentrique* est le référentiel centré sur centre de masse de la Terre et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

Le référentiel terrestre est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique d'une période d'un an.



Ne pas confondre translation circulaire et rotation !

- ✧ Ci-dessous est représenté le référentiel terrestre à différents instants (séparés de plusieurs mois !)





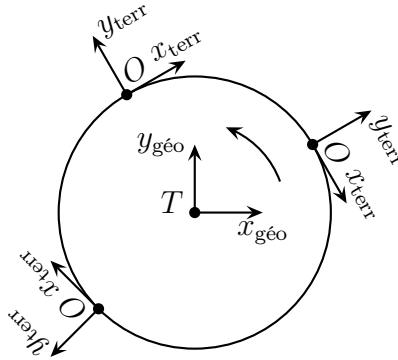
Le référentiel géocentrique est adapté à l'étude de corps céleste sur des durées bien inférieures à 1 an.

### ★ référentiel terrestre

- ◇ Autant il n'y a qu'un référentiel de COPERNIC, un référentiel héliocentrique, un référentiel géocentrique, autant il existe autant de référentiels terrestres que de situations particulières.

Un référentiel est dit *terrestre* s'il est lié la surface de la Terre, *ie.* si son centre et ses axes sont immobiles par rapport à la Terre.

- ◇ Ce n'est ni plus ni moins que le fameux « référentiel lié au laboratoire ».
- ◇ Le centre est souvent au niveau de la surface de la Terre quand l'étude porte sur un dispositif proche de la surface de la Terre. Ainsi, vu de dessus à des instants différents séparés de quelques heures :



- ◇ Le référentiel terrestre n'est pas en translation par rapport au référentiel de COPERNIC, il n'est donc pas galiléen et, en plus, nous ne pouvons pas encore faire de la mécanique dedans car il tourne.

### I.4.iii – pas de non galiléennité excessive

- ◇ Il est tout à fait légitime de parler de référentiel plus ou moins non galiléen car il est possible de chiffrer cette non galiléennité.
- ◇ Pour cela nous allons comparer la norme de la force d'inertie  $\|\vec{f}_{ie}\| = m a_e$  à celle du poids  $\|\vec{P}\| = m g$ , ce qui revient à comparer  $a_e$  et  $g$ .
- ◇ Reste à évaluer  $a_e$ .

### ★ référentiel héliocentrique

- ◇ Regardons ce que cela donne avec le référentiel héliocentrique.
- ◇ La trajectoire de  $O$  est circulaire de rayon  $R = 7,5 \cdot 10^5$  km et de période 29 ans. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 = R \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \simeq 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}$$

- ◇ Autant dire que le référentiel héliocentrique est galiléen. Du moins il l'est au milliardième près !
- ◇ Une autre façon de voir les choses est de dire que si le référentiel héliocentrique n'est pas galiléen, c'est à cause de Jupiter. En conséquence de quoi, supposer le référentiel héliocentrique revient à négliger l'influence de Jupiter. Ce n'est peut-être pas forcément toujours de bon aloi, surtout si Jupiter a eu le temps de se rapprocher de l'objet d'étude.

### ★ référentiel géocentrique

- ◇ Pour le référentiel géocentrique,  $T$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 150.10^9$  m en 1,0 an. Cela donne de même :


$$a(T) = 6.10^{-3} \text{ m.s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

- ◇ Là, l'approximation référentiel galiléen se fait au millième. C'est une excellente première approximation et nous la ferons systématiquement, sauf précision contraire ou évolution à l'échelle de l'orbite terrestre autour du Soleil.
- ◇ Comme précédemment, pour que le référentiel géocentrique soit parfaitement galiléen il faudrait pouvoir négliger l'influence du Soleil (ou, ce qui revient au même) dire que le Soleil n'existe pas.
- ◇ Or un phénomène bien connu est causé en grande partie par le Soleil : les marées. Cela signifie que pour ces dernières, nous **devons** tenir compte du caractère non galiléen du référentiel géocentrique. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

### ★ référentiel terrestre

- ◇ Pour le référentiel terrestre, en prenant  $O$  au niveau de l'équateur, celui-ci décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 6,4.10^6$  m en 1,0 jour sidéral = 86 164 s. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2} \ll g$$

- ◇ Nous pouvons donc dire que, sauf étude particulière (à l'échelle de la Terre par exemple), le référentiel terrestre est bien galiléen.
-  bien que nous ne l'ayons pas justifié encore pour un référentiel en rotation, le fait de calculer la force d'inertie d'entraînement de la manière précédente reste juste.

## I.5 – Étudier une situation

- ◇ Il n'y a pour ainsi dire aucune différence avec « avant » et notamment, bien que le référentiel terrestre soit non galiléen, nous allons continuer à le considérer comme tel.

### I.5.i – analyse physique

- ◇ Il faut tout d'abord choisir le référentiel d'étude. Comme nous l'avons dit en introduction ce sera :
- soit un référentiel naturel (voiture, train, manège, ...)
  - soit un référentiel imposé (bâti d'un sismographe, ...)
- ◇ Il faut ensuite bien voir en quoi ce référentiel est galiléen ou non (insistons : *a priori* le référentiel terrestre **est** galiléen).
- ◇ Une fois le référentiel choisi, **il faut s'y tenir et raisonner uniquement par rapport à lui**. Pour cela, il faut **refaire** un schéma comportant les axes de ce référentiel « droits » par rapport à la feuille.
- ◇ La suite est alors usuelle :
- décrire qualitativement le mouvement dans le référentiel,
  - préciser le nombre de degrés de liberté et le nombre de degrés de description
  - repérer si l'évolution est libre, forcée, conservative, ...
  - identifier les paramètres caractéristiques (ou grandeurs pertinentes) du problème

### I.5.ii – analyse technique

- ✧ Aucune différence ici par rapport à une étude dans un référentiel galiléen.
- ✧ Le repérage doit être le plus naturel possible étant donné l'étude qualitative faite avant (et notamment étant donné la trajectoire possible du ou des points matériels).
- ✧ Ensuite il faut choisir une approche : en terme de force ou d'énergie sachant que la force d'inertie d'entraînement n'est *a priori* pas conservative.

### I.5.iii – danger à éviter

- ✧ Le plus difficile dans les problèmes avec changement de référentiels reste l'interprétation.
- ✧ Tant que l'étude se fait dans un et **un seul** référentiel, en général tout va bien.
- ✧ Le problème vient du fait que le réflexe naturel (!) consiste à introduire des forces d'inertie dans les référentiels galiléens.

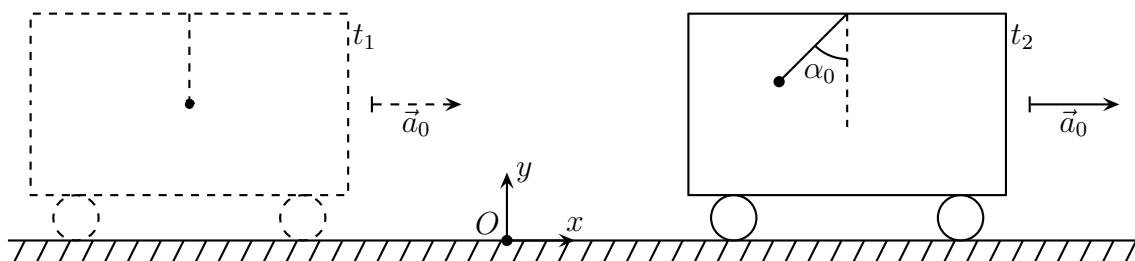
Il n'y a pas de force d'inertie dans les référentiels galiléens.

- ✧ Nous montrerons dans les exemples qui suivent à quel point les interprétations peuvent être piégeuses.
- ✧ En conséquence de quoi il faut se garder de toute interprétation hâtive.

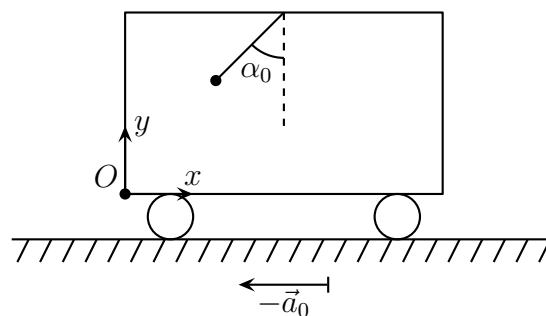
## I.6 – Pendule simple dans un train

### I.6.i – description – analyse

- ✧ Considérons un wagon au plafond duquel est accroché un pendule simple.
- ✧ Ce wagon accélère avec une accélération constante  $\vec{a}_0$ .
- ✧ Avec quel angle  $\alpha_0$  par rapport à la vertical va se stabiliser le pendule ?

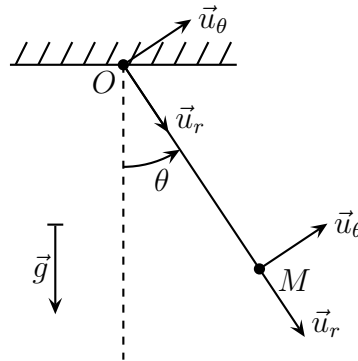


- ✧ Étant donné que le pendule est accroché au wagon, mieux vaut prendre ce dernier pour référentiel ... non galiléen.
- ✧ Commençons par redessiner la situation dans ce référentiel.



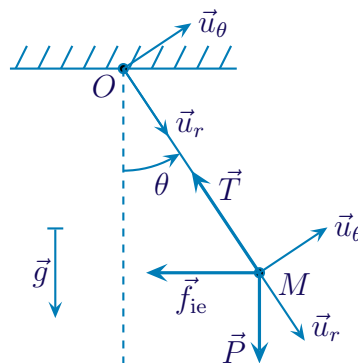
- ✧ Pour l'analyse physique :  
 ➔ il y a trois degrés de liberté mais en admettant que le fil soit tendu, il n'en reste que 2

- toutes les forces étant coplanaires à la vitesse initiale (nulle) le mouvement sera plan : il ne reste qu'un degré de description, la trajectoire sera circulaire
  - les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $\ell$  pour la géométrie,  $g$  pour l'action de la pesanteur,  $a_0$  pour l'action de la force d'inertie d'entraînement.
- ◇ Analyse technique :
- le repérage cylindro-polaire va de soi
  - ici, comme nous ne connaissons pas d'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement et bien que le mouvement soit libre, nous allons utiliser une approche en terme de forces
- ◇ Nous pouvons donc représenter la situation *physique* avec le schéma ci-dessous.



### I.6.ii – équation du mouvement dans $\mathcal{R}$

- ◇ Listons les forces qui s'exercent sur le système  $\{ m \}$  dans le référentiel *non galiléen* lié au wagon :
- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$
  - force de contact :
    - la tension exercée par le fil  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}} = -T \vec{u}_r$
    - les frottements sont négligés
  - la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_0 = m a_0 (-\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta)$



- ◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{\text{ie}} &= m \vec{a} \\ &= m (-\ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta) \end{aligned}$$

- ◇ Et en projection sur  $\vec{u}_\theta$  (de manière à nous débarrasser de  $T$  inconnu) nous obtenons :

$$-m g \sin \theta + 0 - m a_0 \cos \theta = m \ell \ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) + \frac{a_0}{\ell} \cos \theta(t) = 0$$

◇ La position d'équilibre *par rapport au wagon* impose donc :

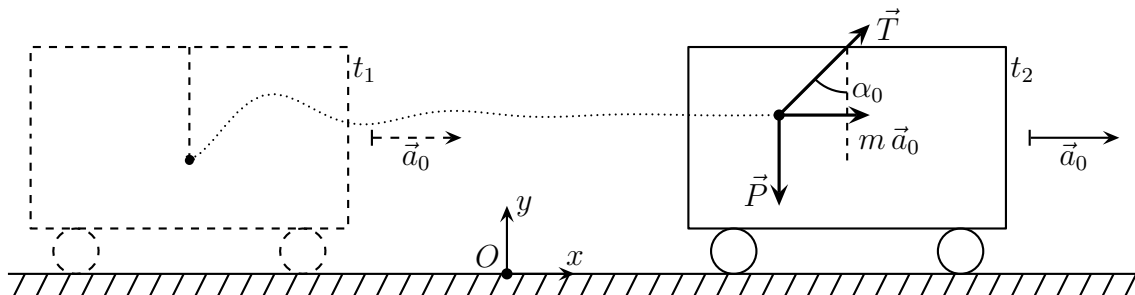
$$\ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g}{\ell} \sin \alpha_0 + \frac{a_0}{\ell} \cos \alpha_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \tan \alpha_0 = -\frac{a_0}{g}$$

◇ Interprétation du résultat :

- $\alpha_0 < 0$ , ce qui est intuitif compte tenu de la force d'inertie
- la masse  $m$  n'intervient pas, ce qui est normal car les masses du poids et de la force d'inertie se simplifient
- la longueur  $\ell$  n'intervient pas ! Nous aurions pu le deviner *a priori* avec une analyse dimensionnelle. Comme les grandeurs pertinentes sont  $m$ ,  $\ell$ ,  $g$  et  $a_0$ , la seule manière de fabriquer une grandeur sans dimension (comme  $\alpha_0$ ) est d'utiliser le rapport  $\frac{g}{a_0}$  (ou n'importe laquelle de ses puissances) donc sans utiliser  $\ell$ .

### I.6.iii – vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$

◇ Dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  le pendule n'est certainement pas à l'équilibre ! En fait, comme il est attaché au wagon, si ce dernier a une accélération  $\vec{a}_0$  alors le pendule immobile *par rapport au wagon* doit aussi avoir une accélération  $\vec{a}_0$ .

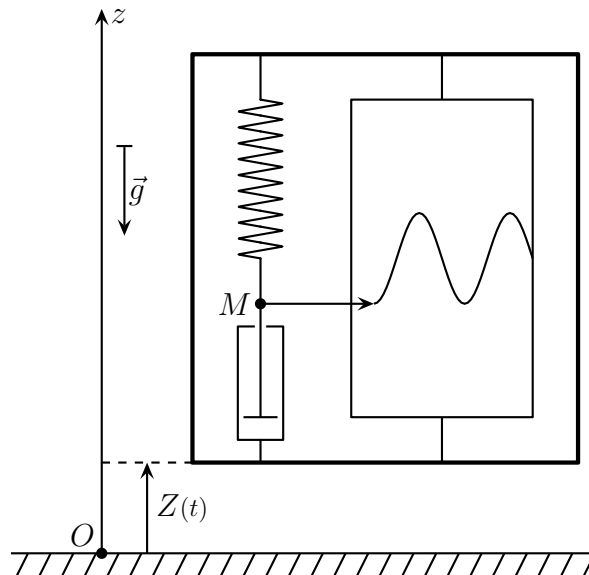


- ◇ Il faut aussi remarquer que, pour que le pendule se stabilise par rapport au wagon, des forces de frottement sont nécessaires !
- ◇ Les avoir négligées changent sans aucun doute l'équation d'évolution (et le fait que le pendule se stabilise) mais ne change pas la position d'équilibre, pourvu que les forces de frottement soient nulle lorsque  $\theta = C^{\text{te}}$  !

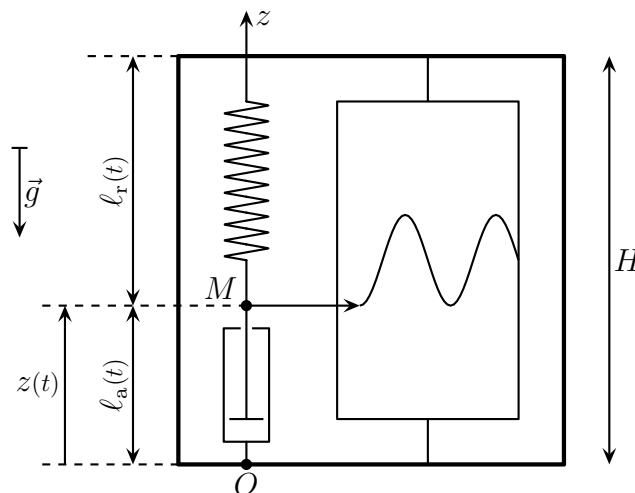
## I.7 – Sismographe

### I.7.i – description – analyse

- ◇ Un sismographe est constitué d'une boîte rigide dans laquelle le mouvement d'un stylet enregistre le mouvement qu'il a par rapport à la boîte. Le stylet est relié à un ressort et un amortisseur.
- ◇ La boîte est mise en mouvement vertical par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen. La cote de la boîte est notée  $Z(t)$ .



- ◇ Étant donné que le mouvement intéressant est le mouvement du stylet *par rapport à la boîte*, nous allons tout naturellement choisir cette dernière comme référentiel.
- ◇ Redessinons la situation dans le référentiel de la boîte : cette dernière est donc immobile.



- ◇ Analyse physique :
  - la masse est mise en mouvement par les forces d'inertie : elle va osciller et être amortie, c'est un oscillateur mécanique « tout simple »
  - nous n'allons considérer ici qu'un seul degré de description à savoir le mouvement vertical de la masse
  - étant donnée l'excitation, le régime ici n'est pas libre mais forcé
  - les grandeurs pertinentes sont  $m$  pour la masse,  $H$  pour la géométrie,  $k$ ,  $\ell_0$  pour le ressort,  $h$  pour l'amortisseur,  $g$  pour la pesanteur,  $\ddot{Z}(t)$  pour les forces d'inertie.
- ◇ Analyse technique :
  - le repérage va à peu près de soi : l'origine est prise sur l'axe du mouvement avec un repérage ascendant
  - nous allons utiliser l'approche en terme de force étant donné que le mouvement n'est pas conservatif

### I.7.ii – équation du mouvement

- ◇ La liste des forces qui s'exercent sur  $\{m\}$  dans le référentiel de la boîte est :
  - force à distance : le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

→ force de contact :

→ la force exercée par le ressort :  $\vec{f}_{\text{ressort}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort, res}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0)(-\vec{u}_z)$

→ la force exercée par l'amortisseur :  $\vec{f}_{\text{amort}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sort, am}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z$

→ les autres forces de frottement (air, ...) sont négligées

→ la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(O) = -m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z$

◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{f}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{amort}} + \vec{f}_{\text{ie}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -m g \vec{u}_z + k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_z - h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z - m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z = m \ddot{z}(t)$$

◇ Nous voulons une équation en  $z(t)$  donc nous allons devoir « éliminer »  $\ell_r(t)$  et  $\ell_a(t)$ .

◇ Géométriquement, nous avons :

$$\ell_r(t) = H - z(t) \quad \text{et} \quad \ell_a(t) = z(t)$$

◇ Nous obtenons ainsi en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$-m g + k(H - z(t) - \ell_0) - h \frac{dz(t)}{dt} - m \ddot{Z}(t) = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

◇ Et en réarrangeant les termes :

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m} z(t) = -\ddot{Z}(t) + \frac{k}{m} (H - \ell_0) - g$$

### I.7.iii – lecture

◇ L'équation différentielle obtenue est bien homogène (ouf!)

◇ Nous pouvons constater que, sous forme canonique, les trois coefficients de  $z(t)$ ,  $\frac{dz(t)}{dt}$  et  $\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$  sont de même signe : la solution ne diverge pas, c'est rassurant.

◇ Du côté des sources (le second membre) :

→ il y a un terme d'excitation  $-\ddot{Z}(t)$

→ il y a un terme correspondant à la position d'équilibre dont nous pouvons voir qu'elle est d'autant plus basse que  $H$  est petit,  $\ell_0$  est grand ou  $g$  est grand, normal quoi !

◇ Enfin, l'équation obtenue est une équation **linéaire** ce qui signifie que pour la résoudre, nous allons pouvoir décomposer l'excitation en ses différentes harmoniques et résoudre morceau par morceau en RSF.

## II – Référentiel en rotation pure et uniforme

### II.1 – Définir deux référentiels en rotation pure

#### II.1.i – c'est tout simple

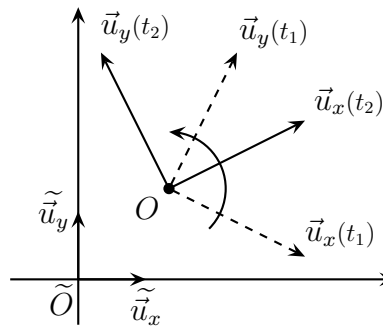
Un référentiel  $\mathcal{R}$  est en *rotation pure* par rapport à un autre référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  lorsque le centre du premier est immobile par rapport au deuxième.

◇ Des exemples :

- un référentiel lié à un manège qui tourne par rapport au référentiel terrestre
- un référentiel terrestre centré sur l'axe de rotation de la Terre qui tourne par rapport au référentiel géocentrique

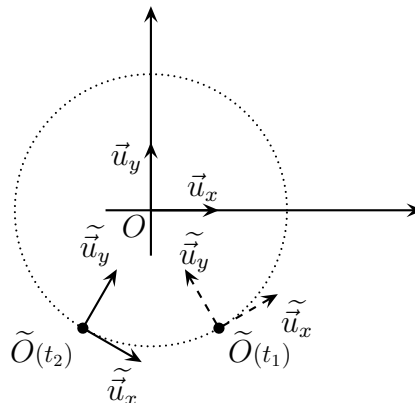
◇ Un référentiel terrestre centré sur la surface de la Terre voit son centre effectuer une rotation dans le référentiel géocentrique : il n'est donc pas en rotation *pure*.

◇ Voilà comment cela se représente.



◇ Attention, si un référentiel  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  n'est pas forcément en rotation pure par rapport à  $\mathcal{R}$ .

◇ Refaisons le schéma précédent par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



Deux référentiels sont en rotation pure l'un par rapport à l'autre si leurs centres sont confondus.

◇ Dans la suite, nous prendrons toujours  $O = \tilde{O}$  car :

- c'est plus facile techniquement
- c'est plus naturel : si le point  $O$ , centre de la rotation du référentiel  $\mathcal{R}$ , est immobile par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , c'est qu'il est physiquement et intrinsèquement particulier (pensez au centre de rotation d'un manège) et mérite donc d'être particularisé en étant *aussi* le centre de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .



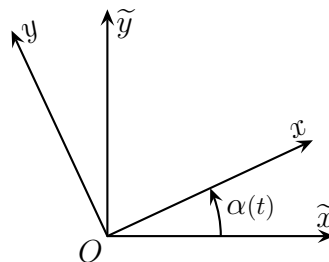
- ◇ De même pour l'axe de rotation qui constitue un axe physiquement privilégié, nous allons techniquement le privilégier.

Lorsque la rotation se fait autour d'un axe unique, cet axe est choisi comme l'un des axes du repère.

- ◇ La plupart du temps ce sera l'axe  $\vec{u}_z$ .

### II.1.ii – rotation uniforme

- ◇ Étant donné que nous avons choisi d'étudier deux référentiels de mêmes centres  $\tilde{O}$  et  $O$ , la seule chose qui reste à faire pour les décrire entièrement c'est de préciser l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux.



Pour deux référentiels en rotation pure, la seule connaissance de l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux permet de décrire entièrement le mouvement de l'un par rapport à l'autre.

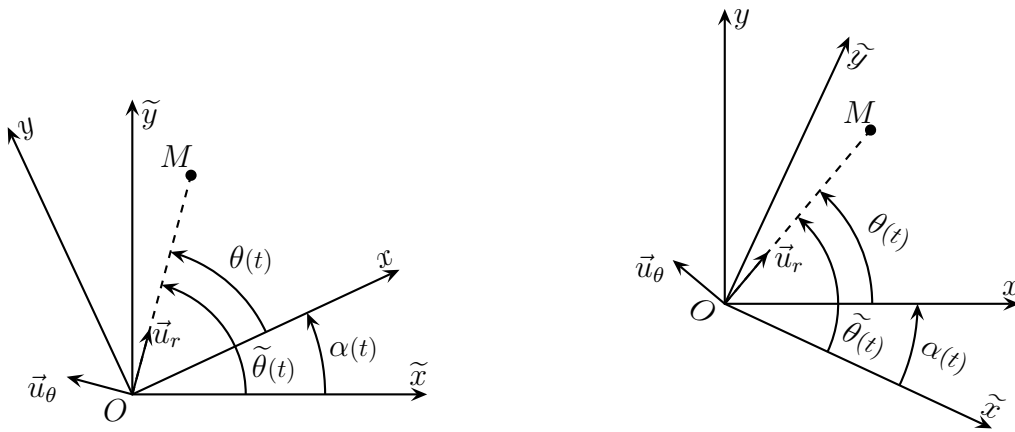
Deux référentiels sont en *rotation uniforme* si la vitesse angulaire de rotation de l'un par rapport à l'autre est constante.

- ◇ Dans cette partie, nous étudierons donc le cas où  $\dot{\alpha}(t) = C^{\text{te}}$ , ce que nous noterons  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \dot{\alpha}(t)$ .

## II.2 – Description du mouvement dans les deux référentiels

### II.2.i – poser les notations

- ◇ Cette fois, et contrairement au cas où les deux référentiels étaient en translation, nous n'avons pas à décrire le mouvement de  $O$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . En revanche, il va falloir décrire le mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Comment décrire la position de  $M$  par rapport aux deux référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  ?
- ◇ Étant donné qu'il est question de *rotation*, il semble plus naturel de choisir une description cylindro-polaire.
- ◇ Faisons un schéma, ou plutôt deux, histoire de mieux voir : un dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  et un dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .



- ◇ L'avantage c'est que les **vecteurs** décrivant le mouvement dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et dans  $\mathcal{R}$  sont les mêmes, à savoir  $(\vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta(t), \vec{u}_z)$ . Ce sont, certes, des vecteurs fonction du temps, mais au moins ce sont les mêmes.
- ◇ Il va falloir, en revanche faire très attention à la manière dont nous allons les dériver.
- ◇ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \tilde{\theta}(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \theta(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ Pour la position, il n'y a rien à faire, le vecteur position est le même :

$$r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z = r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z$$

## II.2.ii – vitesse

- ◇ Écrivons la vitesse de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et remplaçons  $\tilde{\theta}(t)$  par  $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + \alpha(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) \stackrel{\text{not}}{=} \omega = C^{\text{te}}$ .

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t) \\
&= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)
\end{aligned}$$

◇ Nous pouvons constater, sans trop de surprise que :

- les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  sont bien différentes, conformément au fait que les vitesses sont des grandeurs relatives
- la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est  $r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)$ , *ie.* dépend du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$

◇ Mais nous pouvons aussi constater, avec un peu plus de surprise que, contrairement au cas où les référentiels étaient en translation, la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  dépend aussi de  $r(t)$  et  $\vec{u}_\theta(t)$ , *ie.* de la **position** de  $M$ .

## II.2.iii – accélération

◇ Partons de l'expression de l'accélération de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et, comme pour la vitesse, remplaçons  $\tilde{\theta}(t)$  par  $\theta(t) + \alpha(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) = \omega = C^{\text{te}}$ .

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right)^2 \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right) + r(t) \left( \ddot{\theta}(t) + 0 \right) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) - r(t) \omega^2 - 2 r(t) \dot{\theta}(t) \omega \right) \vec{u}_r(t) \dots \\
&\quad \dots + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + 2 \dot{r}(t) \omega + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \dots \\
&\quad \dots - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) - 2 r(t) \dot{\theta}(t) \omega \vec{u}_r(t) + 2 \dot{r}(t) \omega \vec{u}_\theta \\
&= \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2 \omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)
\end{aligned}$$

◇ Nous pouvons faire les mêmes constatations que pour la vitesse :

- les accélérations par rapport aux deux référentiels sont différentes
- la différence dépend de  $\omega$  donc du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$

◇ La différence entre les deux accélérations se sépare en deux termes de nature physique différente :

- le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  dépend de  $\omega$  mais aussi de la **position** de  $M$ , comme pour la vitesse
- le second terme  $-2 \omega \left( r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$  dépend aussi de  $\omega$  mais surtout dépend de la **vitesse de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$** . C'est un terme assez étrange en fait.

## II.2.iv – écriture intrinsèque

### ★ objectif

- ✧ Dans ce paragraphe, nous allons chercher une écriture des lois de composition qui ne dépend pas de la manière de repérer le point  $M$ .
- ✧ En effet nous avons repéré  $M$  avec les coordonnées cylindro-polaires car la vision simultanée par rapport aux deux référentiels faisaient apparaître une rotation naturelle. Mais, plus tard, lorsque nous nous contenterons d'étudier la situation dans un seul des deux référentiels,  $\mathcal{R}$ , l'aspect « rotation » ne sera peut-être plus naturelle et nous utiliserons alors parfois les coordonnées cartésiennes.
- ✧ Nous voulons donc écrire les lois de composition en fonction de  $\overrightarrow{OM}(t)$ ,  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ ,  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  et du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ✧ Dans la partie précédente, le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrivait simplement de manière intrinsèque avec le mouvement de  $O$  :  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(O,t)$  et  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(O,t)$ .
- ✧ Sauf que maintenant, le mouvement est une rotation. Il faut donc d'abord chercher à décrire de manière intrinsèque la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

### ★ décrire la rotation

- ✧ Pour décrire la rotation, il faut plusieurs choses :
  - la position de l'axe de rotation (ou l'axe instantané s'il change à chaque instant)
  - la direction de l'axe de rotation
  - le sens de la rotation
  - la vitesse angulaire de rotation
- ✧ Comme nous nous limitons au cas où  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous n'avons pas besoin de préciser la position de l'axe de rotation : nous savons déjà qu'il passe par  $O$ .
- ✧ Il ne reste plus qu'à définir les trois autres caractéristiques. Nous le ferons par un vecteur qui est appelé taux de rotation en SI.

Le *vecteur rotation*  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  caractérise la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Il est tel que :

- sa direction soit celle de l'axe de rotation
- son sens est donné par la règle de la main droite
- sa norme est la vitesse angulaire  $\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$  et donc  $[\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}] = [\omega] = \text{rad.s}^{-1}$ .

- ✧ Pour nous, le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  sera quasiment toujours porté par  $\vec{u}_z$ .

#### RÈGLE DE LA MAIN DROITE

En fermant légèrement la main (comme pour tenir un bâton) et en tenant le pouce en l'air, les doigts indiquent le sens de rotation et le pouce le sens du vecteur correspondant à cette rotation.

Montrer ce qu'il en est avec un vecteur de rotation du type  
 $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \Omega \vec{u}_z$ .

### ★ interlude produit vectoriel

- ✧ Car nous allons en avoir bien besoin !

Lorsque  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , alors :

- $\vec{c}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , ie.  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  et  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  forment un trièdre direct
- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Propriétés de base :

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Avec les vecteurs d'une base orthonormée directe,  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ou  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Pour déterminer les composantes, nous avons :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### ★ réécrire la loi de composition des vitesses

◇ Nous avons pour l'instant  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)$ .

◇ Nous savons que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \omega \vec{u}_z$ .

◇ Il y a du  $r(t)$  associé avec du  $\vec{u}_\theta$ , seul un produit vectoriel peut faire ça. Alors calculons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{u}_z \wedge (r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z) = \omega r(t) \vec{u}_\theta$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

### ★ réécrire la loi de composition des accélérations

◇ Nous avons pour l'instant  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2\omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$ .

◇ Cherchons chaque terme séparément.

◇ Le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  associe  $r(t)$  et  $\vec{u}_r$  : c'est presque le vecteur position. Sans le  $z(t) \vec{u}_z$ . Nous allons donc l'écrire  $-\omega^2 \overrightarrow{HM}$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.

◇ Le second terme s'écrit  $2\omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$ . Calculons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) &= \omega \vec{u}_z \wedge \left( \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \right) \\ &= \omega \dot{r}(t) \vec{u}_\theta - \omega r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r + \vec{0} \end{aligned}$$

La loi de composition des accélérations s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) - \omega^2 \overrightarrow{HM} + 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \quad \text{où :}$$

$H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$ .

STOP la projection de  $H$  se fait sur l'axe de  $\mathcal{R}$  **portant** le vecteur rotation, **pas** sur l'axe de rotation physique. Si le centre  $O$  n'est pas choisi sur l'axe de rotation, attention à la casse ! Ceci dit, si  $O$  n'est pas choisi sur l'axe de rotation réel,  $\mathcal{R}$  n'est plus en rotation pure ...

## II.2.v – écriture traditionnelle

◇ Cela permettra de faire (un peu) d'interprétation.

### ☆ lois de composition

La loi de composition des vitesses entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_e(M,t) \quad \text{où :} \\ \vec{v}_e(M,t) &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ est la vitesse d'entraînement.} \end{aligned}$$

La loi de composition des accélérations entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t) \quad \text{où :}$$

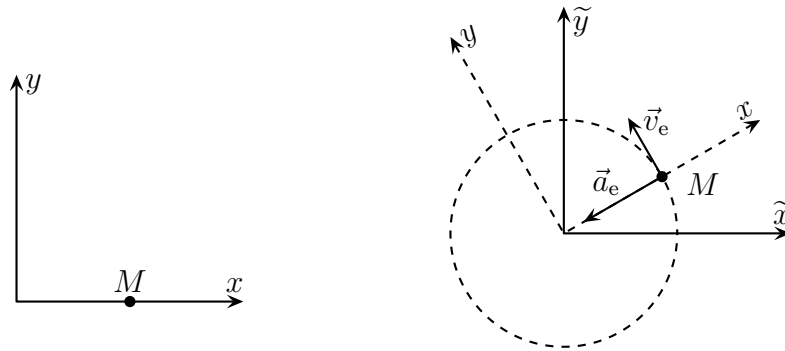
- $\vec{a}_e(M,t) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation est l'accélération d'entraînement
- $\vec{a}_c(M,t) = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est l'accélération de CORIOLIS, appelée aussi accélération complémentaire.

### ☆ vitesse et accélération d'entraînement

◇ L'interprétation est la même que pour les référentiels en translation.

La vitesse et l'accélération d'entraînement sont la vitesse et l'accélération qu'aurait  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- ◇ Regardons ce qu'il en est pour un cas simple :  $M$  est immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans ces conditions  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \vec{v}_e(M,t)$  et  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \vec{a}_e(M,t)$ .



- ◇ Nous pouvons constater que l'accélération d'entraînement correspond à l'accélération radiale du mouvement circulaire uniforme qu'a  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

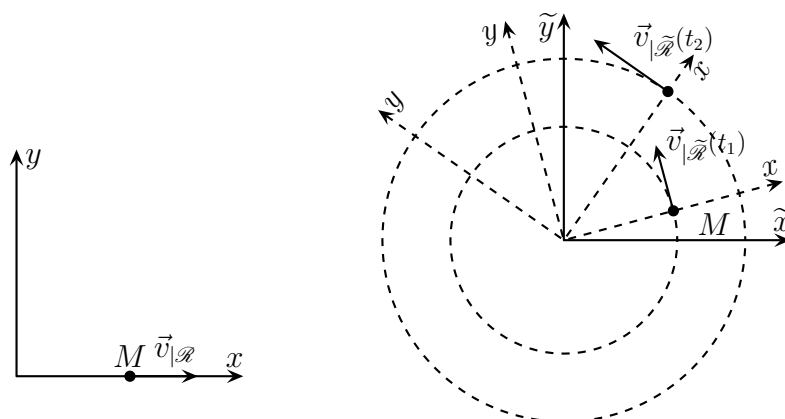
Lorsque  $\mathcal{R}$  est en rotation pure et uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , l'accélération d'entraînement est dirigée vers l'axe de rotation, *ie.* elle est *centripète*.

### ★ accélération de CORIOLIS

- ◇ C'est un terme plus difficile à interpréter de manière générale. Étudions plutôt deux exemples mettant en avant les effets de l'accélération de CORIOLIS suivant que la vitesse est suivant  $\vec{u}_r$  ou suivant  $\vec{u}_\theta$ .
- ◇ N'oublions pas qu'il s'agit d'un terme qui doit s'interpréter par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

### 🕒 vitesse suivant $\vec{u}_r$ par rapport à $\mathcal{R}$

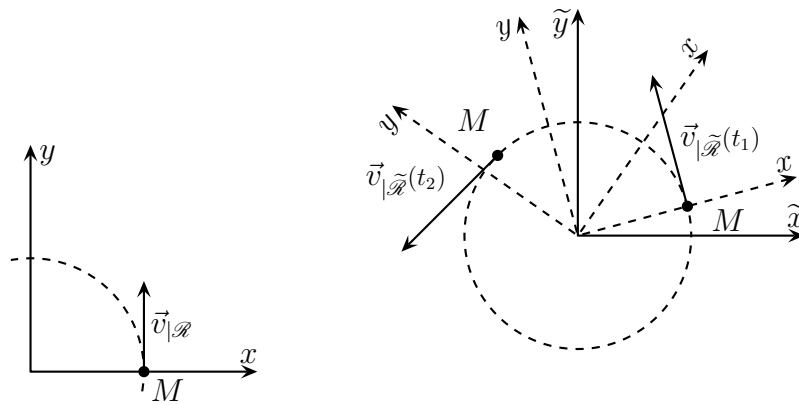
- ◇ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\mathcal{R}$ .  $t_1$  est un instant avant que  $M$  ne se mette en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $t_2$  un instant une fois  $M$  réimmobilisé.



- ◇ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t_2)\| > \|\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS est l'accélération qui a permis l'augmentation de la vitesse tangentielle.

### 🕒 vitesse suivant $\vec{u}_r$ par rapport à $\mathcal{R}$

- ◇ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\mathcal{R}$ .



- ◇ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t_2)\| > \|\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS aide l'accélération d'entraînement à faire tourner le point  $M$ .

## II.3 – Les lois de la mécanique

### II.3.i – le PFD change mais ne change pas

Soit  $M$  un point matériel étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors nous avons :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}} = \sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad \text{où :}$$

- $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M, t)$  est la *force d'inertie d'entraînement*
- $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(M, t)$  est la *force d'inertie de CORIOLIS*

### II.3.ii – la force d'inertie d'entraînement

- ◇ La force d'inertie d'entraînement s'écrit  $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$  où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.
- ◇ Cette force est orthogonale à l'axe

La force d'inertie est centrifuge.

- ◇ C'est un peu ce qui est appelé la force centrifuge. Le problème c'est que le terme « force centrifuge » est souvent utilisé pour expliquer des phénomènes dans des référentiels *galiléens* où **cette force n'existe pas**.
- ◇ Par exemple pour le panier à essorer la salade. Un panier tourne (vite) et de l'eau est éjectée. Mais ce n'est pas la force centrifuge qui l'éjecte puisque, par rapport au référentiel galiléen dans lequel nous pouvons voir tourner le panier à salade, cette force n'existe pas.
- ◇ Dans le référentiel galiléen, s'il fallait que les gouttes d'eau restent sur les feuilles, alors elles auraient une trajectoire circulaire uniforme et la salade devraient exercer sur elles des forces intenses (proportionnelles à  $\omega^2$ ). Or l'eau glisse un peu sur les feuilles et les forces mises en jeu ne peuvent pas être aussi intenses. Donc les gouttes d'eau ne tournent pas avec la salade, elles vont tout droit.
- ◇ Regardons ce qui se passe vraiment dans le référentiel par rapport au référentiel non galiléen.

Montrer la vidéo de la bille

- ◇ Là, oui, il y a la force centrifuge.



### II.3.iii – la force d'inertie de CORIOLIS

- ◇ Tout comme l'accélération de CORIOLIS, la force d'inertie d'entraînement est plus difficile à interpréter dans le cas général.
- ◇ Nous nous contenterons de l'interpréter au cas par cas.

### II.3.iv – aspect énergétique des forces d'inertie

- ◇ Nous pourrions faire les mêmes démonstrations que celles faites dans le cours sur l'énergétique et nous trouverions les théorèmes suivants.

#### THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{|\mathcal{R}}^2(M, t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est la puissance fournie par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

#### THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_m + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est la puissance fournie par les forces non conservatives.
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

#### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire, nous pouvons écrire :

$$\Delta E_c(t) = \sum W(\vec{f}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{|\mathcal{R}}^2(M, t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est le travail fourni par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

## THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire :

$$E_m(t) = \sum W(\vec{f}_{nc}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_c + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}_{nc})$  est le travail fourni par une force non conservative  $\vec{f}_{nc}$
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

◇ Comme nous nous intéressons aux forces d'inertie, ces considérations énergétiques se font dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ .

## ★ la force d'inertie de CORIOLIS

La force d'inertie de CORIOLIS ne travaille jamais.

◇ En d'autres termes la force d'inertie de CORIOLIS ne fait que dévier les points matériels.

◇ Calculons le travail élémentaire qu'elle fournit à  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\delta W_{ic} = \vec{f}_{ic} \cdot d\vec{r} = -2m (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) dt = 0$$

◇ C'est à redire de manière systématique.

## ★ la force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  en rotation pure et uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  est conservative et son énergie potentielle vaut :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 \quad \text{où :}$$

- $\omega$  est la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$
- $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur de rotation.

## 🔗 démonstration

◇ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que  $\delta W_{ie} = -dE_p$ .

$$\begin{cases} \vec{f}_{ie} = +m \omega^2 r \vec{u}_r \\ d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \end{cases} \rightsquigarrow \delta W = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{r} = +m \omega^2 r dr \stackrel{?}{=} -dE_p$$

◇ Ainsi :  $\frac{dE_p}{dr} = -m \omega^2 r$  donne  $E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + C^{te}$  et avec la convention usuelle (énergie potentielle nulle lorsque la force est nulle), nous trouvons bien le résultat énoncé.

## 🔗 interprétation

◇ L'énergie d'autant plus faible que la distance à l'axe est grande et nous savons qu'un point est « attiré » vers les zones où l'énergie est faible.

- ✧ En conséquence : l'énergie associée à la force d'inertie d'entraînement traduit bien le fait que cette force est centrifuge.

## II.4 – Référentiels galiléens

### II.4.i – une condition identique

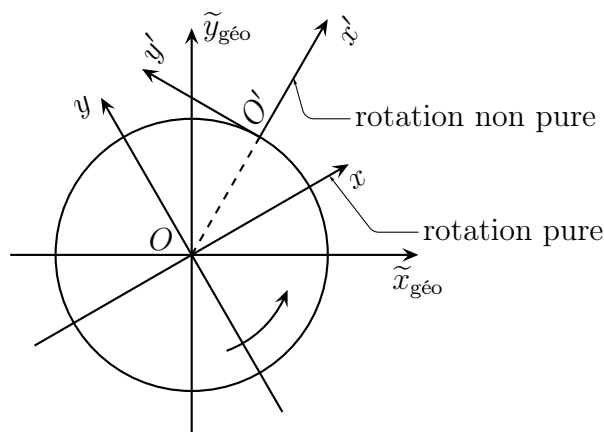
- ✧ Nous pouvons constater que dès lors que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \neq \vec{0}$ , il existe des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

Un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen ne peut pas être galiléen.

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de COPERNIC.

### II.4.ii – le référentiel terrestre

- ✧ Considérons les référentiels héliocentrique et géocentrique galiléens.
- ✧ Alors pour que le référentiel terrestre soit en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique, il faut le centrer sur l'axe.



Le référentiel terrestre n'est en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique que s'il est centré sur l'axe de rotation de la Terre.

- ✧ La force d'inertie d'entraînement s'écrit alors :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_{ie} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

- ✧ Numériquement cela donne :

$$\|\vec{a}_e\| \simeq \left( \frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \times 6,4 \times 10^6 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}$$

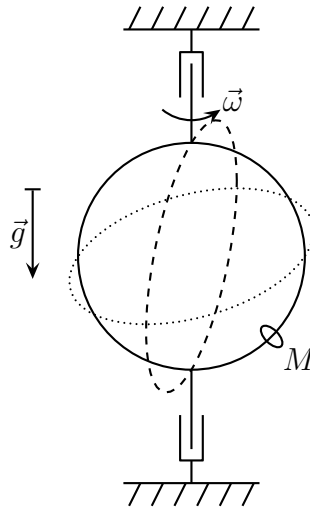
- ✧ Ce résultat montre bien que  $\|\vec{a}_e\| \ll \|\vec{g}\|$  donc que le référentiel terrestre peut légitimement être considéré galiléen.

## II.5 – Tour de manège pour une bille

◇ Reprenons à la vidéo de la bille et essayons d'étudier et de décrire la position d'équilibre.

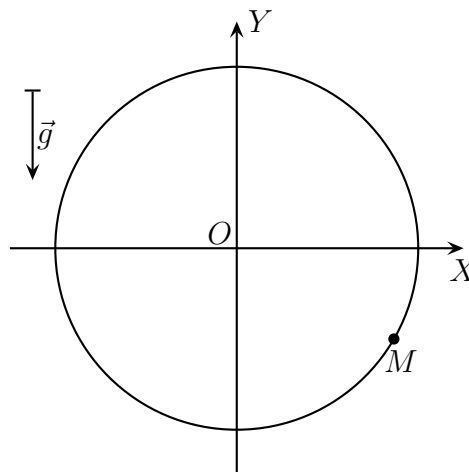
### II.5.i – description – analyse

◇ Considérons un cercle dans un plan vertical sur lequel une perle peut se déplacer sans frottement. Le cercle est mis en rotation autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire  $\omega = C^{\text{te}}$  par un moteur (non représenté).



◇ L'expérience montre que la perle se stabilise à une certaine hauteur. Laquelle ?

◇ Étant donné que le cerceau a un mouvement contraint et que la bille se déplace sur lui, nous allons le choisir comme référentiel. La situation est désormais la suivante :



◇ Analyse physique :

- la perle  $M$  va avoir tendance à s'éloigner de l'axe grâce à la force d'inertie, mais en s'éloignant elle monte et ce mouvement sera contrarié par la pesanteur : un point d'équilibre peut effectivement être atteint
- le mouvement de la perle est circulaire, il n'y a ici qu'un seul degré de liberté donc un seul degré de description
- le mouvement est libre et puisqu'il n'y a pas de frottement et que la force d'inertie est conservative, le mouvement est globalement conservatif
- les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $R$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $g$  pour la pesanteur

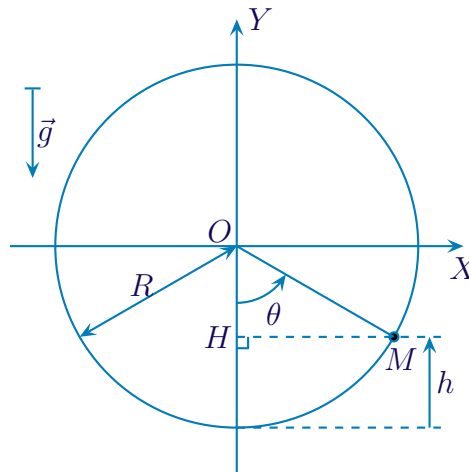
◇ Analyse technique, elle est immédiate :

- le mouvement circulaire impose un repérage cylindro-polaire
- un mouvement à un degré de description libre et conservatif nous incite plus que fortement à utiliser une méthode énergétique

## II.5.ii – position d'équilibre

### ★ existence

◇ Pour trouver la position d'équilibre, nous devons chercher les valeurs  $\theta_{\text{eq}}$  tels que  $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0$ .



◇ Les forces qui s'exercent sur la perle sont :

- force à distance : le poids dont l'énergie potentielle s'écrit  $E_{p,\text{pes}} = m g h = m g R (1 - \cos \theta)$
- force de contact :
  - la réaction normale du support qui ne travaille pas puisque le support est immobile
  - les frottements (solide et fluide) sont négligés
- force d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement est associée à l'énergie potentielle

$$E_{p,\text{ie}} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

→ la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas

◇ L'énergie potentielle totale s'écrit donc :

$$E_p = E_{p,p} + E_{p,\text{ie}} = m g R (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

◇ Et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta) &= +m g R \sin \theta - m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta \\ &= m R \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) \end{aligned}$$

◇ Nous voyons donc qu'il y a deux positions d'équilibre possibles :

$$\theta_{\text{eq},1} = 0 \quad \text{et} \quad \cos \theta_{\text{eq},2} = \frac{g}{R\omega^2}$$

◇ La deuxième position d'équilibre n'existe que pour  $R\omega^2 > g$ , ie. que si les forces d'inertie sont suffisamment grandes.

★ **stabilité**

◇ Pour qu'une position d'équilibre soit stable, il faut que  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$ .

◇ Calculons d'abord  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta)$  :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta) = +m g R \cos \theta - m \omega^2 R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = +m g R \cos \theta - m \omega^2 R^2 (2 \cos^2 \theta - 1)$$

◇ Pour  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  cela donne :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) = +m g R - m \omega^2 R^2 = m R (g - R \omega^2)$$

◇ Nous avons donc :  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) > 0$  pour  $g > R \omega^2$ , *ie.* la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est stable si et seulement si la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  n'existe pas.

◇ Pour  $\theta_{\text{eq},2}$  cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) &= +m g R \frac{g}{R \omega^2} - m \omega^2 R^2 \left( 2 \frac{g^2}{R^2 \omega^4} - 1 \right) \\ &= -\frac{m g^2}{\omega^2} + m \omega^2 R^2 = \frac{m}{\omega^2} (R^2 \omega^4 - g^2) \end{aligned}$$

◇ Finalement la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  est stable si  $R^2 \omega^4 > g^2$  autrement dit elle est stable dès lors qu'elle existe.

★ **interprétation finale**

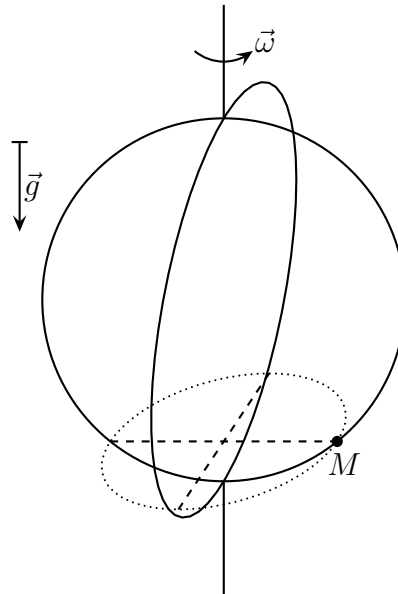
◇ La position  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est naturelle : c'est celle qui existerait avec  $\omega = 0$ . Il est donc cohérent de la retrouver pour  $\omega \rightarrow 0$ .

◇ Plus  $\omega$  est grand, plus  $\cos \theta_{\text{eq},2}$  est petit et à la limite  $\theta_{\text{eq},2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ce qui est là aussi cohérent : plus  $\omega$  est grand, plus les forces d'inertie sont grande et plus la tendance « éloignement de l'axe » prend le dessus sur la pesanteur.

II.5.iii – vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ ★ **vision en terme de forces**

◇ Considérons la position d'équilibre de  $M$  par rapport au cerceau, *ie.* considérons que  $\theta = \theta_{\text{eq}} = \text{C}^{\text{te}}$ .

◇ Alors la trajectoire de  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  est circulaire de rayon  $HM = R \sin \theta_{\text{eq}}$ .



◇ Le PFD appliqué à  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{P} + \vec{R}_N \quad \rightsquigarrow \quad -m (R \sin \theta_{\text{eq}}) \omega^2 \vec{u}_r = \vec{P} + \vec{R}_N$$

◇ Et en passant le terme d'accélération de l'autre côté du signe égal, nous retrouvons l'écriture de l'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au cerceau :

$$\underbrace{m (R \sin \theta_{\text{eq}}) \omega^2 \vec{u}_r}_{\vec{f}_{\text{ie}}} + \vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$$

### ★ vision en termes énergétiques

- ◇ Nous raisonnons toujours dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ◇ Imaginons le cerceau en train de tourner. La perle est initialement immobile en position basse, monte sur le cerceau et se stabilise à sa position finale.
- ◇ Le TEC s'écrit alors :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = -\Delta E_{\text{p,p}} + W(\vec{R}_N)$$

◇ Or :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \left( R \sin \theta_{\text{eq}} \times \omega \right)^2 - 0 > 0 ; \quad -\Delta E_{\text{p,p}} = -m g h < 0 \quad \text{et} \quad W(\vec{R}_N) \stackrel{?}{=} 0$$

- ◇ Cela semble impossible ... Et même rajouter les forces de frottements ne ferait qu'empirer le problème parce que  $W_{\text{frott}} < 0$  !
- ◇ La solution de ce « paradoxe » est simple : c'est parce que dans ce référentiel le support (le cerceau) n'est pas immobile, en conséquence de quoi le travail fourni par  $\vec{R}_N$  n'est pas *a priori* nul.
- ◇ Nous voyons là un exemple flagrant montrant que le travail fourni par une force est une grandeur *relative*.

## II.6 – Lanceur de ball-trap

### II.6.i – description – analyse

- ◇ Un lanceur de ball-trap est un dispositif qui, à l'aide d'un simple ressort, permet d'envoyer des pigeons d'argile de 50 à 100 m.



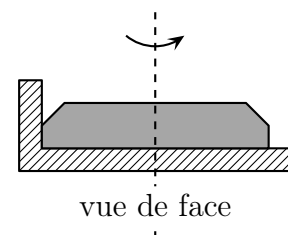
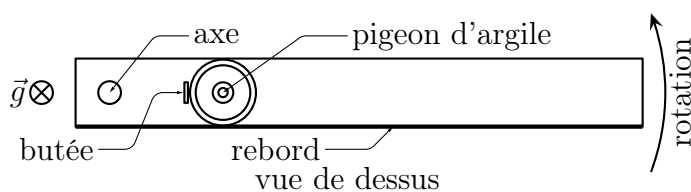
- ◇ Un pigeon d'argile est un simple disque.



- ◇ Nous allons étudier pourquoi la rotation du bras permet d'éjecter le disque.

#### ☆ simplification

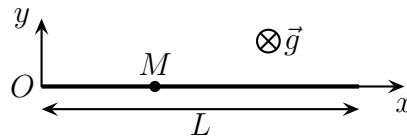
- ◇ Nous allons simplifier le problème :
- nous allons considérer que le lanceur tourne dans un plan horizontal
  - nous allons supposer que la rotation du bras se fait à vitesse angulaire constante
- ◇ Bien sûr ces deux simplifications sont fausses, mais elles ne changent pas la phénoménologie du dispositif, *ie.* son aspect qualitatif.
- ◇ Nous pouvons donc dessiner le lanceur de la manière suivante.





## ★ analyses

- ◇ Comme il y a une rotation du bras et que le lanceur est astreint à se déplacer uniquement le long de celui-ci, nous allons étudier l'ensemble dans le référentiel *non galiléen* lié au lanceur.
- ◇ Commençons par dessiner le *schéma* de la situation.



## ◇ Analyse physique :

- le pigeon  $M$  va être mis en mouvement par la force d'inertie vers l'extérieur du bras du lanceur
- le mouvement est à un seul degré de liberté donc de description
- le mouvement est, ici, libre et conservatif car la force d'inertie dans un référentiel en rotation uniforme est associée à une énergie potentielle
- les paramètres pertinents sont :  $m$  pour la masse,  $L$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $x_0$  pour les conditions initiales. Le poids ne jouant aucun rôle,  $g$  n'interviendra pas.

## ◇ Analyse technique :

- le repérage est immédiat
- un mouvement à un seul degré de description et conservatif : l'approche énergétique est plus appropriée

## II.6.ii – mouvement

- ◇ Pour l'exemple, nous allons faire les deux approches, même si nous savons d'avance que l'approche énergétique sera plus efficace.

## ★ approche en terme de force

- ◇ Dans le référentiel lié au lanceur, les forces qui s'exercent sur  $\{ \}$  sont :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$
- forces de contact :
  - l'action normale du support :  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sort}} = R_N \vec{u}_z$
  - les frottements avec le support et l'air sont négligés
- les forces d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement s'écrit :  $\vec{f}_{\text{ie}} = +m \omega^2 \overrightarrow{HM} = +m \omega^2 x(t) \vec{u}_x$
  - la force d'inertie de CORIOLIS :

$$\vec{f}_{\text{ic}} = -2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2 m \omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}(t) \vec{u}_x = -2 m \omega \dot{x}(t) \vec{u}_y$$

- ◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{ie}} + \vec{f}_{\text{ic}} = m \vec{a}$$

- ◇ Cela donne, en projection sur  $\vec{u}_x$  :

$$0 + 0 + m \omega^2 x(t) + 0 = m \ddot{x} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

- ◇ La présence du signe «  $-$  » nous rassure sur le fait que  $x(t)$  va diverger, *ie.* que le pigeon d'argile va se diriger vers l'extrémité.

### ★ approche énergétique

- ◇ Comme il s'agit de trouver l'équation différentielle vérifiée par le mouvement, nous allons utiliser un TPM plutôt qu'un TEM.
- ◇ Ce dernier s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} \quad \text{avec} \quad E_m = E_c + E_p \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$$

- ◇ L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement car la pesanteur n'intervient pas (mouvement horizontal) ainsi :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t)$$

- ◇ De plus  $\mathcal{P}_{nc} = 0$  car il n'y a pas de frottement et que le support est immobile et aussi parce que la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas.
- ◇ Il reste donc :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t)$$

- ◇ Ce qui donne, en simplifiant par la solution  $\dot{x}(t) = 0$  non intéressante correspondant à l'équilibre dans le référentiel lié au lanceur :

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) - m\omega^2 \dot{x}(t)x(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

- ◇ Nous retrouvons bien la même équation qu'avec l'approche en terme de forces et ce de manière moins compliquée.

### ★ résolution

- ◇ La solution générale est du type :

$$x(t) = \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$$

- ◇ Les conditions initiales  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  donnent rapidement :

$$x(t) = x_0 \cosh(\omega t)$$

- ◇  $x(t)$  diverge, c'est rassurant.
- ◇ L'extrémité du lanceur est atteinte à  $t_f$  tel que :

$$x(t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad x_0 \cosh(\omega t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad t_f = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch} \frac{L}{x_0}$$

### ★ petit paradoxe

- ◇ Projettons le PFD sur  $\vec{u}_y$  :

$$0 - 2m\omega \dot{x}(t) \vec{u}_y = 0$$

- ◇ Cela semble impossible. Et pourtant NEWTON ne saurait mentir !
- ◇ La raison en fait est que la réaction normale au support est **normale** au support : si celui-ci a pour but de guider suivant  $\vec{u}_x$  cela implique qu'il faut le contraindre en  $\vec{u}_z$  **et**  $\vec{u}_y$ .
- ◇ Autrement dit, la réaction normale devrait s'écrire :

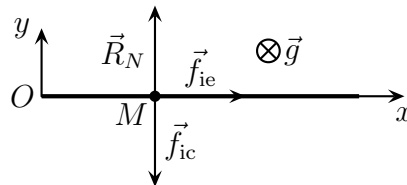
$$\vec{R}_N = R_{N,y} \vec{u}_y + R_{N,z} \vec{u}_z$$

- ◇ D'ailleurs nous pouvons voir sur le premier schéma « vue de face » un rebord, rebord qui va, justement exercer la force dirigée suivant  $\vec{u}_y$  ...

### II.6.iii – interprétation

★ dans  $\mathcal{R}$

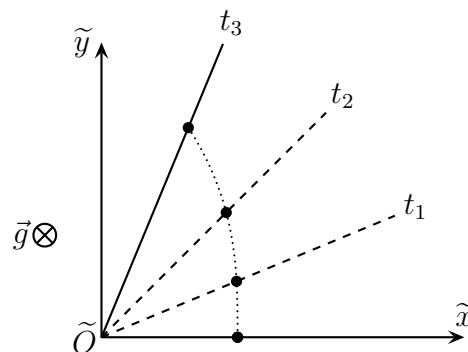
- ◇ Représentons la situation dans  $\mathcal{R}$ .



- ◇ Dans ce référentiel, la force d'inertie de CORIOLIS permet de contraindre le pigeon d'argile à rester sur le lanceur.

★ dans  $\tilde{\mathcal{R}}$

- ◇ Avec un support qui bouge, nous ne devons plus être étonné du fait que  $\vec{R}_N$  travaille et apporte de l'énergie.
- ◇ De plus, comme  $\vec{R}_N$  tourne, puisqu'elle reste normale à la direction du lanceur, cela permet à la trajectoire d'être incurvée.



## III – Référentiel en mouvement quelconque

### III.1 – Dériver dans deux référentiels différents

#### III.1.i – notation de la dérivée

- ◇ Une difficulté de notation va venir du fait que les vecteurs peuvent parfois être considérés comme constants et parfois être considérés comme variables. Ainsi :

vecteurs	par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$	par rapport à $\mathcal{R}$
$(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$	constants	variables
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$	variables	constants

- ◇ Cela ne représente pas vraiment une difficulté pour **ces** vecteurs puisqu'il suffit de mettre  $\vec{u}_x(t)$  ou  $\tilde{u}_x$ . En revanche, pour d'autres vecteurs tels que  $\vec{OM}(t)$ , il faut savoir quels vecteurs sont considérés comme constants et quels vecteurs sont considérés comme variables.

La dérivée d'un vecteur quelconque  $\vec{A}(t)$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  se note  $\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$ .

- ⊞ il n'y a aucune ambiguïté en ce qui concerne les grandeurs scalaires :  $\frac{dx(t)}{dt}$  restera le même que le vecteur  $\vec{u}_x$  soit considéré comme constant ou non.

#### III.1.ii – loi

##### ★ énoncé

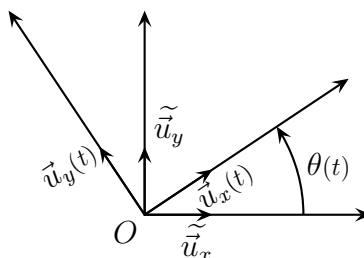
Soient  $\mathcal{R}$  en rotation par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$ , alors, pour tout vecteur

$$\vec{A}(t) :$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

##### ★ petite vérification

- ◇ Vérifions simplement que cette formule fonction pour dériver  $\vec{u}_x(t)$  et  $\vec{u}_y(t)$  par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ◇ Faisons un schéma.



- ◇ Imaginons un point  $M$  fixe par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Alors, pour ce point repéré en coordonnées cylindro-polaire par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous avons  $\vec{u}_r = \vec{u}_x$  et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_y$ .
- ◇ Dans ces conditions, nous savons aussitôt que :

$$\frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta = \dot{\theta}(t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_r = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_x$$

- ◇ Nous pouvons aussi calculer :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_x = \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x(t) = \dot{\theta}(t) \vec{u}_y(t) = \frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_y = \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y(t) = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_x(t) = \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \end{cases}$$

Les dérivées par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  des vecteurs définissant  $\mathcal{R}$  s'écrivent :

$$\frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_x(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_y(t)$$

où  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

- ◇ Par linéarité de la décomposition d'un vecteur sur les vecteurs de base ainsi que par linéarité du produit vectorielle, nous pouvons en déduire que cette relation est vraie pour tous les vecteurs.

### ☆ cas particulier du vecteur rotation

Soient un référentiel  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors :

$$\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

## III.2 – Loi de composition des vitesses

### III.2.i – loi

- ◇ Dérivons le vecteur position  $\overrightarrow{\tilde{O}M}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  d'une part et utilisons la formule de la dérivée dans deux référentiels différents d'autre part.
- ◇ Cela donne :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d\overrightarrow{\tilde{O}M}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d(\overrightarrow{\tilde{O}O} + \overrightarrow{OM})}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\overrightarrow{\tilde{O}O}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \\ &= \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_e(M,t) \quad \text{où :}$$

$$\vec{v}_e(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ est la vitesse d'entraînement.}$$

### ★ interprétation

- ◇ La vitesse d'entraînement est là aussi la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Le *point coïncidant* est le point immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  qui coïncide à un instant précis avec le point  $M$  étudié.

- ◇ Chaque point coïncidant est immobile, mais à chaque instant le point coïncidant change, ce n'est pas le même.
- ◇ Le point coïncidant est donc un point point immobile qui change à chaque instant de place ...
- ◇ Il serait plus exact de parler **des** points coïncidants de sorte de ne pas provoquer de crash intellectuel, mais la tradition parle elle **du** point coïncidant.

Faire l'exemple de l'élève coïncidant.

## III.2.ii – retrouver les cas particuliers

### ★ translation

- ◇ Si le référentiel  $\mathcal{R}$  est en translation par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{0}$  et la vitesse d'entraînement se réduit à  $\vec{v}_e(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$ .
- ◇ Nous retrouvons bien ce que nous savions des référentiels en translation.

### ★ rotation pure et uniforme

- ◇ Si le référentiel  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \vec{0}$  et la vitesse d'entraînement se réduit à  $\vec{v}_e(M,t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$ .
- ◇ Nous retrouvons bien ce que nous savions des référentiels en rotation pure.

## III.3 – Loi de composition des accélérations

### III.3.i – loi

- ◇ Dérivons la vitesse.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \left( \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
&= \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \left( \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \right) \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \dots \\
&\quad \dots + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)
\end{aligned}$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t) \quad \text{où :}$$

- $\vec{a}_e(M,t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$  est l'accélération d'entraînement
- $\vec{a}_c(M,t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est l'accélération de CORIOLIS

### ☆ interprétation

- ◇ Le premier point qui frappe c'est le fait que l'écriture est bien plus lourde ! D'une certaine manière c'est normal : plus les lois sont générales, plus leurs écritures sont complexes.
- ◇ Dans la lourdeur de cette loi, nous pouvons constater la présence d'un terme que nous pouvons appeler « accélération d'entraînement » puisque c'est celle qu'*aurait* le point  $M$  considéré s'il est était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Mais nous pouvons aussi voir la présence d'un autre terme à la phénoménologie bien particulière : c'est l'accélération de CORIOLIS qui dépend non seulement du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  mais aussi et surtout de la vitesse de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  !

### III.3.ii – retrouver les cas particuliers

#### ☆ translation

- ◇ Le cas de la translation s'écrit se traduit par  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{0}$ .
- ◇ Dans ces conditions, nous trouvons tout de suite :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

- ◇ Il s'agit bien là des résultats que nous connaissions.

### ★ rotation pure uniforme

◇ Quand  $\mathcal{R}$  est en rotation pure uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , cela se traduit par :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{C}^{\text{te}}$$

◇ Dans ces conditions, l'accélération de CORIOLIS s'écrit bien  $\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

◇ Et l'accélération d'entraînement donne, quant à elle :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) = \omega \vec{u}_z \wedge (\omega \vec{u}_z \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z)) \\ &= \omega \vec{u}_z \wedge (\omega r \vec{u}_\theta + \vec{0}) = -\omega^2 r \vec{u}_r = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \end{aligned}$$

### III.3.iii – bilan

- ◇ Il faut clairement éviter les référentiels en rotation non pure et pour cela, dès que c'est possible, il faut choisir le centre du référentiel d'étude (le non galiléen) sur l'axe physique de rotation.
- ◇ Dans le cas où un tel choix ne serait vraiment pas judicieux et que le référentiel est en rotation non pure, il est recommandé de déterminer  $\vec{a}_e$  (et parfois  $\vec{v}_e$ ) grâce à leurs interprétations : c'est la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si il était fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

## III.4 – Propriétés des vecteurs rotation

### III.4.i – première loi

#### ★ énoncé

◇ La loi est très intuitive !

Si le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  est  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$ , alors le vecteur rotation de  $\tilde{\mathcal{R}}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est :

$$\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$$

◇ Autrement dit deux référentiels tournent en sens opposés l'un par rapport à l'autre

#### ★ démonstration

◇ La démonstration est fort simple. Partons de la loi générale :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

◇ Passons le dernier terme de l'autre côté du signe « = ». Cela donne :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

◇ Et nous obtenons le résultat en identifiant avec :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} - \vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \wedge \vec{A}(t)$$



### III.4.ii – composition des rotations

#### ★ énoncé

◇ Là aussi la loi est intuitive.

Soient trois référentiels  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ . En notant  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}$  (resp.  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$ ) le vecteur de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_2$  (resp. le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$ ), alors le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$  est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$$

◇ C'est une sorte de relation de CHASLES des vecteurs rotation.

#### ★ démonstration

◇ Utilisons deux fois successivement la loi de dérivée dans deux référentiels différents :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_3} &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t) \\ &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{A}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t) \\ &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \right) \wedge \vec{A}(t) \end{aligned}$$

◇ Et nous obtenons le résultat en identifiant avec :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_3} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t)$$

## IV – Mécanique en référentiels terrestres

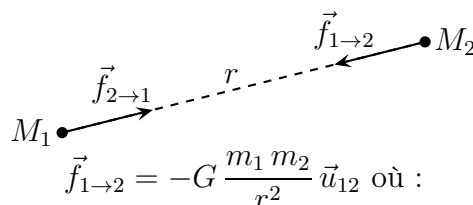
◇ Dans cette partie nous allons préciser quels effets peut avoir le fait que les référentiels liés à la Terre (les référentiels terrestre et géocentriques) sont non galiléens.

### IV.1 – Interaction gravitationnelle

#### IV.1.i – lois

##### ★ en terme de force

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent et exercent une force l'un sur l'autre telle que



- $G$  est la constante universelle de gravitation
- $r$  est la distance entre les deux masses
- $\vec{u}_{12}$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

##### ★ en terme de champ

Un *champ* est une zone de l'espace dans laquelle il est possible de définir en chacun des points soit une grandeur vectorielle (champ de vecteurs ou champ vectoriel) soit une grandeur scalaire (champ scalaire).

Le *champ de gravitation* créé par un point  $P$  de masse  $m$  en un point  $M$  a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}_P(M) = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_{PM} \quad \text{où :}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation
- $r$  est la distance  $PM$
- $\vec{u}_{PM}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $P$  vers  $M$ .

Dimensionnellement parlant :  $[\vec{\mathcal{G}}] = (\text{m}).(\text{s})^{-2} \equiv \text{accélération}$

Le point  $M_2$  de masse  $m_2$  est attiré par le point  $M_1$  de masse  $M_1$  selon l'expression :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{\mathcal{G}}_1(M_2) \quad \text{où :}$$

$\vec{\mathcal{G}}_1(M_2)$  est le champ de gravitation créé par le point 1 au point où se trouve  $M_2$ .

Le champ de gravitation a une étendue infinie.

- ✧ Dans les films quand nous entendons « Ça y est capitaine ! Nous sommes sortis du champ de gravitation de la planète. » c'est *stricto sensu* complètement absurde. Cela dit, nous verrons dans un chapitre ultérieur que nous pourrons lui donner une certaine signification.

### ★ vision énergétique

La force gravitationnelle subie par un point  $M_2$  de la part de  $M_1$  est conservative et son énergie potentielle s'écrit :

$$E_{\text{p,grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{où}$$

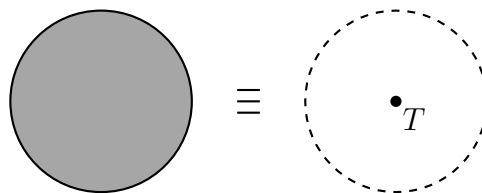
→  $G$  est la constante universelle de gravitation

→  $r$  est la distance  $PM$

- ✧ Nous ferons la démonstration plus tard car elle repose sur l'utilisation du repérage sphérique ... que nous n'avons pas encore vu.

### IV.1.ii – cas des astres

Les corps à symétrie sphérique se comporte, **du point de vue de la gravitation**, comme un point matériel situé en leurs centres et de masse leurs masses totales.

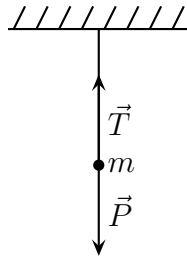


- ✧ Nous le montrerons plus tard.
- ✧ Cela signifie que tant pour les forces subies que pour les forces exercées, nous pouvons remplacer un corps à symétrie sphérique par un point unique : ce n'est pas une approximation ! Ce qui est une approximation, c'est de dire que tel ou tel astre est à symétrie sphérique.
- ✧ Il est bien évident que cela ne concerne que les forces de gravitation et que si sur un schéma la Terre est représentée ponctuelle, nous ne sous-entendons pas qu'elle est considérée comme ponctuelle : un objet posé sur sa surface restera à sa surface et ne se dirigera pas vers le centre de la Terre.

## IV.2 – Le poids

## IV.2.i – définition

Soit  $M$  un point matériel attaché à un fil idéal et immobile par rapport au référentiel terrestre. Alors le fil exerce une force opposée au *poids* du point matériel.



Dans ces conditions, la direction du fil est *verticale*.

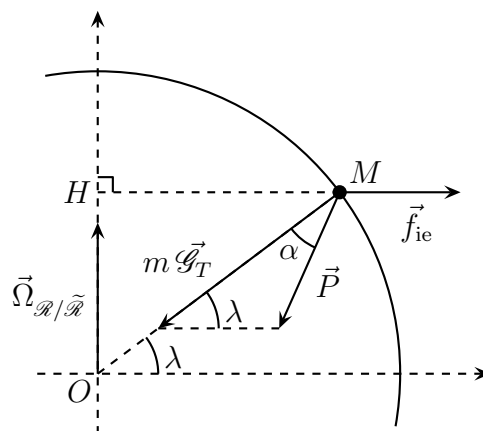
En notant  $m$  la masse d'un point matériel et  $\vec{P}$  son poids, alors l'*accélération de pesanteur*  $\vec{g}$  vaut :

$$\vec{P} \triangleq m\vec{g}$$

- ◇ Il est tout à fait possible de parler du *champ de pesanteur* étant donné que nous pouvons définir  $\vec{g}$  dans toute une zone de l'espace (en général à la surface de la Terre).

## IV.2.ii – direction du fil à plomb

- ◇ Nous étudions donc le point matériel  $M$  d'un pendule simple immobile dans le référentiel terrestre considéré comme non galiléen.
- ◇ Les forces qui s'exercent sont donc :
- force à distance : l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{\text{grav}} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M)$
  - force de contact : le fil
  - force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$
  - force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point  $M$  est à l'équilibre
- ◇ À l'échelle de la Terre, le point  $M$  est véritablement à la surface de la Terre. Cela donne le schéma suivant où  $\lambda$  est la latitude du point considéré.



- ◇  $\mathcal{R}$  est le référentiel terrestre et  $\tilde{\mathcal{R}}$  est le référentiel géocentrique considéré comme galiléen.
- ◇ La somme de  $m\vec{\mathcal{G}}_T(M)$  et de  $\vec{f}_{\text{ie}}$  donne, par définition,  $\vec{P}$ .
- ◇ Ainsi, dans le triangle formé par les trois vecteurs, nous avons :

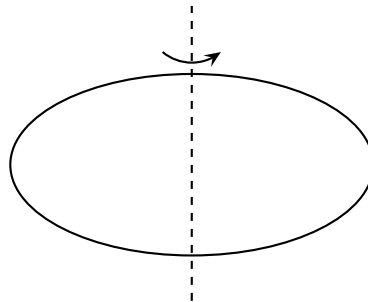
$$\frac{\sin \lambda}{m g} = \frac{\sin \alpha}{f_{ie}} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \alpha = \frac{\omega^2 (HM) \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \sin(2 \lambda)}{2 g}$$

- ◇ Numériquement :  $\sin \alpha = \alpha \simeq 10^{-2} \text{ rad} = 0,5^\circ$ .
- ◇ Cela signifie qu, à nos latitude, **tout** est penché de  $0,5^\circ$  non pas par rapport à la verticale, mais par rapport à la direction qui pointe vers le centre de la Terre. En faisant un trou **parfaitement vertical**, nous n'arriverions pas au centre de la Terre.

### IV.2.iii – d'autres causes de variation

#### ★ causes globales

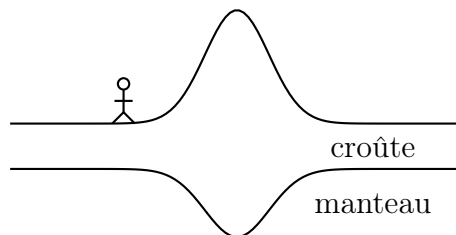
- ◇ La Terre est légèrement aplatie aux pôles.



- ◇ La différence entre les deux diamètres est de l'ordre de 40 km.

#### ★ causes locale

- ◇ La structure locale de la croûte terrestre peut aussi influencer le champ de pesanteur.
- ◇ Par exemple une montagne : sa racine s'enfonce aussi un peu dans le manteau, de manière analogue à un navire. La croûte étant moins dense que le manteau, le bonhomme « sent » un déficit d'attraction sur la droite donc tout se passe comme si la gauche l'attirait un peu plus.



### IV.2.iv – que faire avec le poids désormais ?

- ◇ Même si le poids ne se limite pas rigoureusement à l'attraction terrestre, nous allons continuer à le considérer comme une force à distance et ce, de manière systématique.

Que le référentiel terrestre soit considéré ou non comme galiléen nous prendrons toujours en compte le poids subi par un point matériel.

- ◇ Dans le poids est compté la contribution de la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- ⊛ c'est bien la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre qui est incluse dans le poids. Pour d'autres référentiels, il **faudra** compter la force d'inertie d'entraînement.

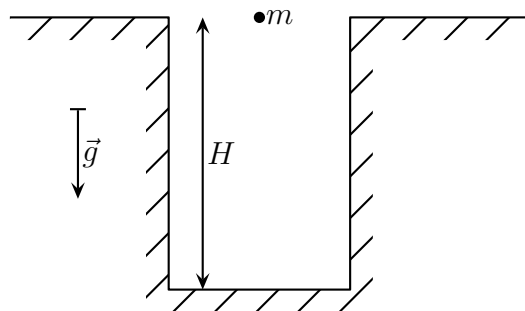
Il n'y a pas de force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre et uniquement dans le référentiel terrestre.

## IV.3 – Déviation vers l'est

### IV.3.i – situation – analyse

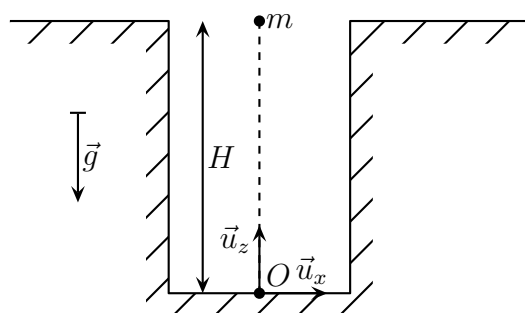
#### ★ expérience

- ◇ Considérons un petit objet de masse  $m$  lâché sans vitesse initial dans un puit de hauteur  $H$ .
- ◇ Nous allons étudier ce qui se passe de manière précise, *ie.* en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre.



#### ★ analyse

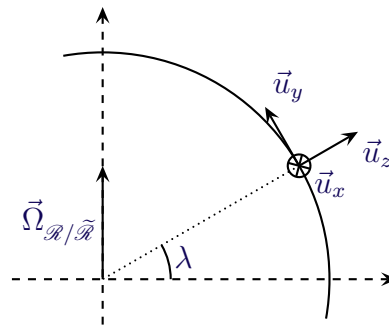
- ◇ Déjà le petit objet tombe vers le bas, c'est le mouvement principal : l'influence du caractère non galiléen sera minime.
- ◇ Nous avons tendance à dire que le mouvement devrait être plan, voire rectiligne avec une vitesse initiale nulle, sauf que là la force de CORIOLIS change la donne puisque cette force est orthogonale à la trajectoire.
- ◇ Finalement le mouvement est à 3 degrés de description  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .
- ◇ Les grandeurs influençant le mouvement seront :  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$  (vitesse de rotation terrestre)
- ◇ Nous allons repérer la position de  $M$  avec des coordonnées cartésiennes :  $\vec{u}_z$  sera vertical,  $\vec{u}_x$  vers l'est et  $\vec{u}_y$  vers le nord.



### IV.3.ii – équation régissant le mouvement

- ◇ Liste des forces s'exerçant sur le point  $M$  dans le référentiel terrestre :
  - force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$
  - force de contact : aucune, nous négligeons les frottements avec l'air
  - force d'inertie d'entraînement : déjà compté dans le poids
  - force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$

◇ Cherchons les composantes de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  dans le repère choisi.



◇ Nous trouvons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$  et ainsi :

$$\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda - \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ -\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{pmatrix}$$

◇ Nous pouvons ainsi écrire le PFD et le projeter sur les trois axes.

$$\vec{P} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -2m \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda + 2m \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{y}(t) = -2m \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{z}(t) = -mg + 2m \Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{cases}$$

◇ Nous pouvons constater que la résolution exacte risque de poser quelques difficultés car les équations différentielles sont couplées.

◇ D'un autre côté, nous savons qu'en première approximation le mouvement est celui d'une chute libre et que la différence est uniquement dû au terme perturbatoire qu'est la force d'inertie de CORIOLIS.

◇ C'est typiquement le genre de situation pour lequel nous pouvons utiliser la méthode de résolution par ordre successif.

### IV.3.iii – résolution à l'ordre 0

◇ Résolvons d'abord le cas où il n'y a pas de force d'inertie de CORIOLIS.

◇ Il s'agit de la chute libre sans frottement et sans vitesse initiale, ce qui donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

◇ Pas de surprise.

### IV.3.iv – résolution à l'ordre 1

#### ★ nouvelles équations horaires

◇ La méthode de résolution par ordre successif consiste à injecter une solution approchée dans un terme perturbatif et de rechercher la nouvelle solution.

- ◇ Nous devons donc remplacer les expressions de  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  dans les équations différentielles initiales. Cela donne :

$$\begin{cases} m \ddot{x}(t) = +2m\Omega g t \cos \lambda \\ m \ddot{y}(t) = 0 \\ m \ddot{z}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = +\Omega g t^2 \cos \lambda + 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = +\frac{1}{3}\Omega g t^3 \cos \lambda \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- ◇ Nous pouvons voir qu'il y a désormais un mouvement sur  $\vec{u}_x$ , *ie.* dans la direction est-ouest.

### ★ écart à l'impact

- ◇ Cherchons de combien s'est écarté l'objet par rapport à sa verticale initiale à l'instant de l'impact.  
 ◇ L'impact est défini par  $z(t_0) = 0$ , ce qui donne :

$$H - \frac{1}{2}gt_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

- ◇ Et donc  $x(t_0) = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda \left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2}$ .

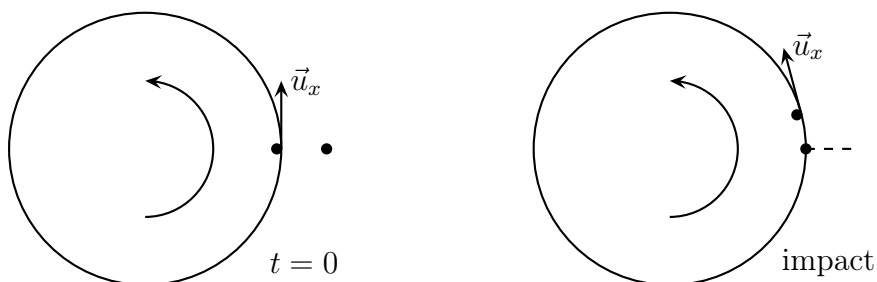
- ◇ Numériquement :  $x(t_0) = 1,4$  cm pour  $H = 100$  m.  
 ◇ L'écart n'est pas grand, mais peut commencer à devenir mesurable dans des conditions contrôlées, surtout au niveau de la nullité de la vitesse initiale.  
 ◇ Cet écart se situe vers l'est  $x(t_0) > 0$  quel que soit l'hémisphère (la déviation est en  $\cos \lambda$ ) et la déviation sera d'autant plus grande que le lancé aura lieu près de l'équateur.

### ★ ordres supérieurs

- ◇ Nous pourrions réinjecter la solution trouvée précédemment dans l'expression initiale de la force d'inertie de CORIOLIS.  
 ◇ Nous aurions alors une solution à l'ordre 2 que nous pourrions réinjecter ...  
 ◇ Dans des cas non pathologiques, cette méthode converge vers la bonne solution.

## IV.3.v – interprétation dans le référentiel géocentrique

- ◇ Interprétons cette déviation dans un cas simple, celui où l'expérience se fait à l'équateur de manière à maximiser l'effet non galiléen.  
 ◇ Représentons la situation vue de dessus dans ce référentiel.

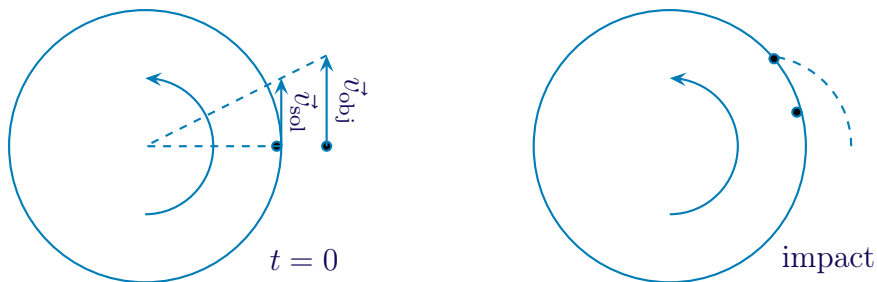


- ◇ L'objet est lâché sans vitesse initiale, il tombe verticalement.  
 ◇ Pendant ce temps là, la Terre tourne « en dessous » de l'objet. L'objet devrait alors tomber « en arrière » de sa verticale, *ie.* vers l'ouest ... or il s'agit d'une déviation vers l'est !



### ★ la bonne interprétation

- ◇ L'erreur vient du fait que l'objet n'est **pas** lancé sans vitesse initiale dans le référentiel géocentrique. Il est lancé avec une vitesse plus importante que le sol qu'il surplombe.



- ◇ Comme rien ne vient freiner l'objet dans sa course **en avant vers l'est**, il avance plus vite que le sol en dessous et tombe donc avec de l'avance sur sa verticale. Il s'agit bien d'une déviation vers l'est.

## IV.4 – Le pendule de FOUCAULT

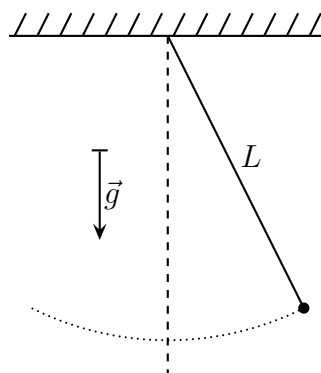
### IV.4.i – situation

#### ★ présentation historique

- ◇ Il s'agit d'une expérience réalisée par FOUCAULT afin de mettre en évidence la rotation de la Terre.
- ◇ Cette expérience a été réalisée au Panthéon en 1831.
- ◇ Il s'agit d'un pendule simple, mais de longueur 67 m et écarté de la position au repos de  $a = 4,0$  m. La masse fait  $m = 27$  kg.

#### ★ analyse

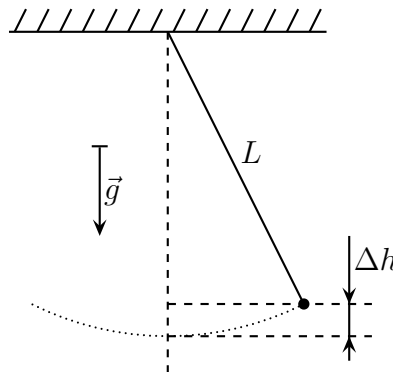
- ◇ La situation du pendule simple est bien connue. Schématisons-la.



- ◇ Le référentiel terrestre **n'est pas** considéré comme galiléen.
- ◇ Le pendule va osciller *a priori* à peu près à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  mais à cause des forces d'inertie, il n'est plus possible de dire que les oscillations vont être planes. Les oscillations auront donc deux degrés de liberté.
- ◇ Les oscillations vont dépendre *a priori* de  $m$ ,  $g$ ,  $\Omega$  (vitesse de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique),  $\lambda$  (latitude du lieu où l'expérience est faite),  $a$  (condition initiale).

## ★ première approximation

◇ Regardons l'évolution de la cote de la masse.



◇ Au maximum, nous avons :

$$\Delta h = L - \sqrt{L^2 - a^2} = 12 \text{ cm} \ll L$$

◇ Nous pouvons donc considérer que le mouvement est **plan** et se fait dans le plan  $(Oxy)$  où  $O$  est la position au repos de la masse.

## IV.4.ii – équation d'évolution

◇ Ici nous ne pouvons pas utiliser une approche énergétique à cause de la force d'inertie de CORIOLIS qui dévie le point  $M$  mais sans contrainte de trajectoire.

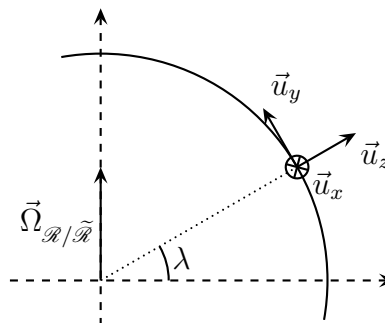
◇ Faisons la liste des forces qui s'exercent :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$
- force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
- force de contact : frottements négligés
- force d'inertie d'entraînement : compté dans le poids car il s'agit du référentiel terrestre
- force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t)$

◇ Reprenons le repérage utilisé pour la déviation vers l'est :

- $\vec{u}_z$  vers le haut
- $\vec{u}_y$  vers le nord
- $\vec{u}_x$  vers l'est

## ★ force d'inertie de CORIOLIS



◇ Nous trouvons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \Omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$  et ainsi, en tenant compte du fait que le mouvement est plan :

$$\vec{f}_{ic} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} -\Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ -\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{pmatrix}$$

★ tension exercée par le fil

🌀 sur l'axe vertical

◇ Projettons d'abord le PFD sur  $\vec{u}_z$  :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -mg + T_z + 2m\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda = 0$$

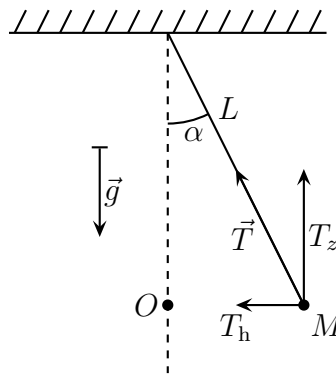
◇ Avec  $\dot{x}(t) \equiv L\omega_0$ , nous avons :

$$\frac{f_{ic}}{P} \sim \frac{2\pi\Omega \dot{x} \cos \lambda}{\pi g} \sim 2 \times \frac{2\pi}{86400} \times 4 \times \sqrt{\frac{10}{67}} \times 1 \times \frac{1}{10} \simeq 10^{-5} \ll 1$$

◇ Nous pouvons donc négliger sur l'axe  $\vec{u}_z$  la force d'inertie de CORIOLIS devant le poids. Il reste :  $T_z = mg$ .

🌀 dans le plan horizontal

◇ Représentons la situation. Attention, nous ne savons pas où sont *a priori* les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , c'est pourquoi nous noterons la composante horizontale  $T_h$ .



◇ L'angle  $\alpha$  étant faible (au pire  $\alpha = \frac{4}{67} = 6.10^{-2} \text{ rad} \ll 1$ ) nous pouvons écrire :

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{T_h}{T_z} = \frac{OM}{L} \quad \rightsquigarrow \quad T_h = \frac{OM}{L} mg$$

◇ Vectoriellement, cela donne, en notant  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$  :

$$\vec{T}_h = -\frac{mg}{L} \overrightarrow{OM} = -m\omega_0^2 \overrightarrow{OM} = -m\omega_0^2 (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y)$$

🌀 bilan

◇ Finalement, nous pouvons constater que la tension exercée par le fil permet de réaliser un oscillateur harmonique de longueur naturelle nulle !

### ★ équations différentielles régissant le mouvement

◇ Il n'y a plus qu'à projeter le PFD sur les axes  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -m \omega_0^2 x(t) + 2 m \Omega (\sin \lambda) \dot{y}(t) \\ m \ddot{y}(t) = -m \omega_0^2 y(t) - 2 m \Omega (\sin \lambda) \dot{x}(t) \end{cases}$$

◇ Et en notant  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \Omega \sin \lambda$  :  $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + 2 \omega \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t) - 2 \omega \dot{x}(t) \end{cases}$

◇ Maintenant, il va falloir résoudre cela avec une méthode particulière étant donné qu'il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées.

### IV.4.iii – équations horaires

#### ★ changement de fonction complexe inconnue

◇ Pour résoudre ce style de système d'équations différentielles couplées, l'idée est d'utiliser une *fonction complexe inconnue*.

◇ Ici nous allons introduire la fonction complexe inconnue  $\underline{u}(t) = x(t) + j y(t)$  de telle sorte que

$$\operatorname{Re}(\underline{u}(t)) = x(t) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\underline{u}(t)) = y(t)$$

◇ Il ne s'agit **pas** ici de la notation complexe que nous avons déjà rencontrée car ici la partie imaginaire a une signification contrairement au régime sinusoïdal forcé.

◇ C'est une méthode que nous aurons l'occasion de revoir.

#### 🔗 nouvelle équation

◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}(t) &= \ddot{x}(t) + j \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 x(t) + 2 \omega \dot{y}(t) - j \omega_0^2 y(t) - 2 j \omega \dot{x}(t) \\ &= -\omega_0^2 (x(t) + j y(t)) - 2 j \omega (x(t) + j y(t)) \end{aligned}$$

◇ Ce qui donne  $\ddot{\underline{u}}(t) + 2 j \omega \dot{\underline{u}}(t) + \omega_0^2 \underline{u}(t) = 0$ .

◇ Nous avons maintenant une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, nous savons résoudre.

#### 🔗 solution

◇ Commençons par calculer le discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2 j \omega r + \omega_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = -4 \omega^2 - 4 \omega_0^2$$

◇ En faisant une approximation au premier ordre (ce que nous faisons depuis le début en fait), cela donne  $\Delta = -4 \omega_0^2 = (2 j \omega_0)^2$  car  $\omega_0 \gg \omega$ .

◇ Les solutions de l'équation caractéristiques sont donc :

$$\underline{r}_1 = \frac{-2 j + 2 j \omega_0}{2} = j (\omega_0 - \omega) \quad \text{et} \quad \underline{r}_2 = \frac{-2 j - 2 j \omega_0}{2} = -j (\omega_0 + \omega)$$

◇ La solution s'écrit donc  $\underline{u}(t) = A \exp(j (\omega_0 - \omega) t) + B \exp(-j (\omega_0 + \omega) t)$ .

◇ Regardons ce qu'il en est des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = a & \text{et} & y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 & \text{et} & \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \underline{u}(0) = a \\ \underline{\dot{u}}(0) = 0 \end{cases}$$

◇ Nous avons ainsi :  $\underline{u}(0) = a = A + B$  et :

$$\underline{\dot{u}}(t) = j(\omega_0 - \omega) A \exp(j(\omega_0 - \omega)t) - j(\omega_0 + \omega) B \exp(-j(\omega_0 + \omega)t) \rightsquigarrow 0 = j(\omega_0 - \omega) A - j(\omega_0 + \omega) B$$

◇ Ainsi :

$$\begin{cases} A + B = a \\ (\omega_0 - \omega) A - (\omega_0 + \omega) B = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = a \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \\ B = a \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} \end{cases}$$

◇ Cela donne :

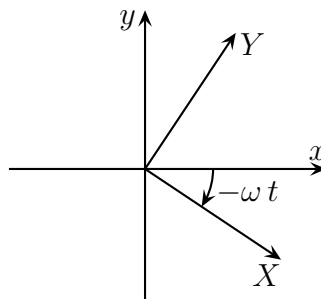
$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= a e^{-j\omega t} \left( \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right) \\ &= a e^{-j\omega t} \left( \frac{\omega_0 + \omega + \omega_0 - \omega}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega_0 + \omega - \omega_0 + \omega}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= a e^{-j\omega t} \left( \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

◇ La solution est trouvée ! Reste à l'interpréter !

★ **changer de repérage**

🌀 **une nouvelle façon de changer de repère**

◇ Considérons le repère tournant  $(OXY)$  à la vitesse angulaire  $-\omega$  autour de  $(Oz)$ .



◇ Au lieu de chercher  $X(t)$  et  $Y(t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ , nous allons chercher  $\underline{U}(t)$  en fonction de  $\underline{u}(t)$ .

◇ Nous allons montrer que  $\underline{U}(t) = \underline{u}(t) e^{j\omega t}$ .

◇ Il suffit de le vérifier pour les vecteurs de base  $\vec{u}_X$  et  $\vec{u}_Y$ , la linéarité fera le reste.

◇ Pour le vecteur  $\vec{u}_X$  :  $\vec{u}_X = \cos(\omega t) \vec{u}_x - \sin(\omega t) \vec{u}_y$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{U}(\vec{u}_X) = 1 \\ \underline{u}(\vec{u}_X) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = e^{-j\omega t} \end{cases} \rightsquigarrow \underline{U}(\vec{u}_X) = \underline{u}(\vec{u}_X) e^{j\omega t}$$

✧ Pour le vecteur  $\vec{u}_Y$  :  $\vec{u}_Y = \sin(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{U}(\vec{u}_X) = j \\ \underline{u}(\vec{u}_X) = \sin(\omega t) + j \cos(\omega t) = j(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) = j e^{-j\omega t} \end{cases} \rightsquigarrow \underline{U}(\vec{u}_Y) = \underline{u}(\vec{u}_Y) e^{j\omega t}$$

✧ Ça marche ! Cela devient très simple de changer de repère.

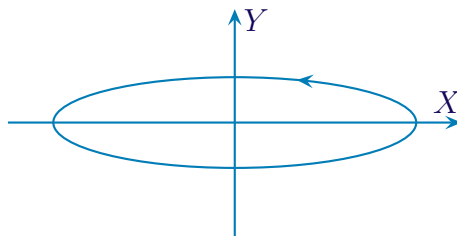
### 🌀 tout ça pour ça

✧ Ainsi dans le repère  $(OXY)$  nous avons  $\underline{U}(t) = a \left( \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$ .

✧ Cela donne :

$$X(t) = \Re(\underline{U}(t)) = a \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad Y(t) = \Re(\underline{U}(t)) = a \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

✧ Il s'agit d'une ellipse très aplatie d'axes  $a$  et  $a \frac{\omega}{\omega_0} \ll a$ .



### 🌀 finalement

- ✧ La trajectoire du point  $M$  est une ellipse très aplatie tournant avec une vitesse angulaire  $\omega = \Omega \sin \lambda$  autour de l'axe  $(Oz)$ .
- ✧ Dans l'hémisphère sud, nous aurions  $\omega = \Omega \sin \lambda < 0$ , *ie.* les oscillations tourneraient dans le sens direct et non dans le sens horaire.

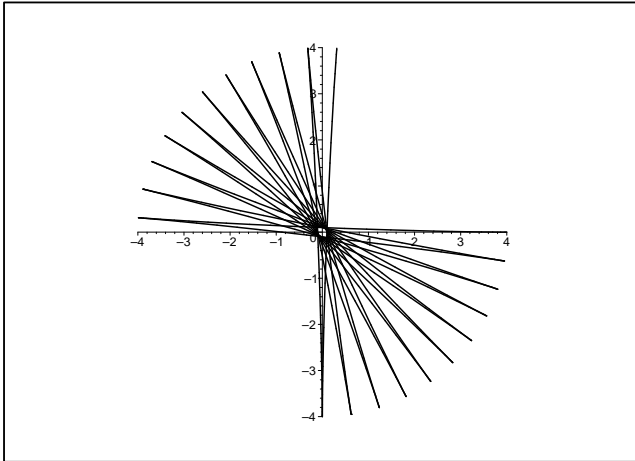
## IV.4.iv – visuellement

### ★ pour l'expérience réelle

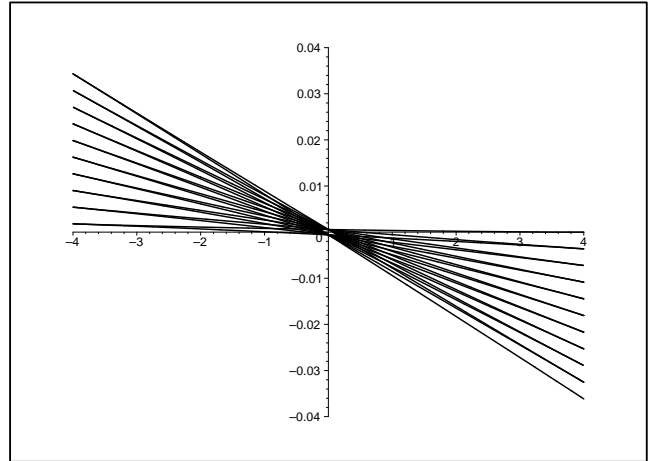
### 🌀 allure de la trajectoire

- ✧ Sur les deux graphiques ci-dessous, nous pouvons voir la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre :
  - ➔ le premier graphique donne juste l'allure
  - ➔ le deuxième graphique respecte les valeurs de l'expérience historique

Graphique 1



Graphique 2



- ✧ Bien que cela n'y ressemble pas, il s'agit bien d'ellipses tournant dans le sens horaire (dans l'hémisphère nord).

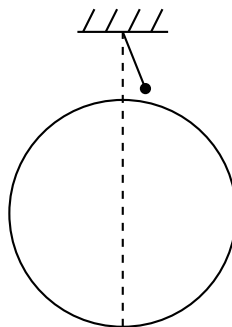
### 🌀 numériquement

- ✧ Posons-nous la question : au bout d'un aller retour du pendule, de combien s'est-il déplacé par rapport à sa position initiale ?
- ✧ L'aller retour se fait au bout de la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .
- ✧ Pendant cette durée là, l'axe des oscillation a tourné de  $\theta = \omega T_0$ .
- ✧ Cela donne, pour  $\lambda = 49^\circ$ , un écart de  $\delta = a\theta = 3,6 \text{ mm}$  : c'est visible !
- ✧ Pour que le pendule fasse un tour, il faut  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,14 \cdot 10^5 \text{ s} \simeq 32 \text{ heures}$ .
- ✧ Dans l'expérience historique, le pendule oscille quelques heures avant de s'arrêter.

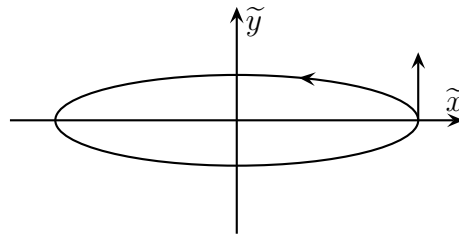
### ★ une illustration du mouvement du pendule

#### 🌀 vision au pôle nord

- ✧ Tout comme pour la déviation vers l'est que nous avons interprétée à l'équateur, ici pour maximiser l'effet, plaçons l'expérience au pôle nord.



- ✧ En lâchant le pendule sans vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre, cela lui donne une vitesse initiale très faible suivant  $\vec{u}_y$  par rapport au référentiel géocentrique.
- ✧ Dans ces conditions, le pendule réalise une ellipse très aplatie dans le référentiel géocentrique.



- ◇ La Terre tournant en dessous du pendule, tout se passe comme si le pendule tournait dans l'autre sens.
- ◇ L'interprétation à une latitude quelconque est plus difficile. Il faut penser que tout cet effet vient du  $\Omega \sin \lambda$ , *ie.* du fait que le référentiel tourne autour de  $\vec{u}_z$ . Dans ces conditions, la masse étant à l'instant initial écartée vers l'est, elle se voit projetée légèrement vers le nord, ce que confirme les tracés réalisés.

### 🕒 expérience de bureau

- ◇ Regardons l'expérience filmée de manière à voir ce mouvement si particulier.

Montrer le film sur l'expérience du pendule de FOUCAULT.

- ◇ Nous nettement voir sur ce film les points de rebroussement du pendule.

## IV.5 – Les marées

- ◇ Nous allons maintenant étudier plus en détail les effets du caractère non galiléen du référentiel géocentrique.

### IV.5.i – le terme de marée

#### ★ origine

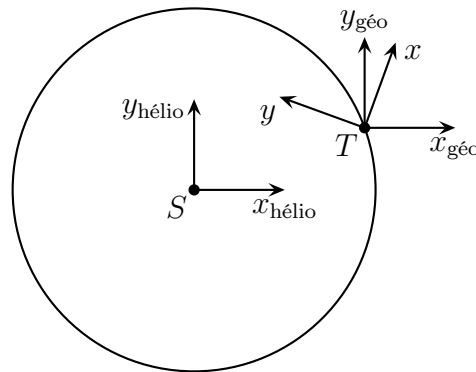
- ◇ Nous allons chercher les forces subies par un point matériel **immobile** dans le référentiel terrestre en ne supposant plus que le référentiel géocentrique soit galiléen.
- ◇ Pour que le référentiel géocentrique soit non galiléen, il faut qu'il n'ait plus une trajectoire rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique.
- ◇ Posons-nous la question ? Qui est à l'origine d'un mouvement non rectiligne uniforme ? Le Soleil.
- ◇ Nous allons donc prendre en compte l'effet du Soleil et de l'autre astre le plus proche : la Lune.

#### ★ situation – analyse

- ◇ Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  suspendu à un fil idéal et immobile dans le référentiel terrestre, non galiléen.
- ◇ Quelles sont les forces qui s'exercent sur le point  $M$  ?
  - ➔ force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{g,T} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M)$
  - ➔ force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune  $\vec{f}_{g,L} = m \vec{\mathcal{G}}_L(M)$
  - ➔ force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil  $\vec{f}_{g,S} = m \vec{\mathcal{G}}_S(M)$
  - ➔ force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
  - ➔ force de contact : les frottements sont nuls car le point est immobile
  - ➔ force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie}$
  - ➔ force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point est à l'équilibre.



- ◇ Représentons le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel héliocentrique que nous allons considérer comme galiléen en notant  $T$  le centre de la Terre



- ◇ Nous pouvons constater que le référentiel terrestre n'est ni en rotation pure ni en translation par rapport au référentiel héliocentrique. Nous allons donc utiliser la loi de composition générale :

$$\vec{a}_e(M, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T, t) - \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}}^2 \overrightarrow{HM}$$

où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant la rotation.

## IV.5.ii – champ de marée

### ☆ expression vectorielle

#### 🕒 le poids

- ◇ Remarquons d'abord que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{géo}}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\text{géo}}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{géo}}}$ .
- ◇ Nous pouvons donc écrire l'équilibre sous la forme :

$$\vec{0} = \vec{T} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - m \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T, t)$$

- ◇ Comme  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation, alors  $H$  est le projeté sur l'axe de rotation de la Terre et ainsi nous reconnaissons l'expression du poids :  $\vec{P} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$ .

#### 🕒 le terme de marée

- ◇ Quelle est l'accélération de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique ?
- ◇ Faisons un PFD sur la Terre. Cela ne pose pas de soucis étant donné que nous allons la considérer comme sphérique et que dans ces conditions, elle se comporte comme un point matériel du point de vue de la gravitation.
- ◇ Les seules forces qui s'exercent sont les attractions gravitationnelles exercées par la Lune et le Soleil :

$$m_T \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T, t) = m_T \vec{\mathcal{G}}_L(T) + m_T \vec{\mathcal{G}}_S(T) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T, t) = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T)$$

- ◇ Et ainsi pour le point  $M$  immobile à la surface de la Terre :

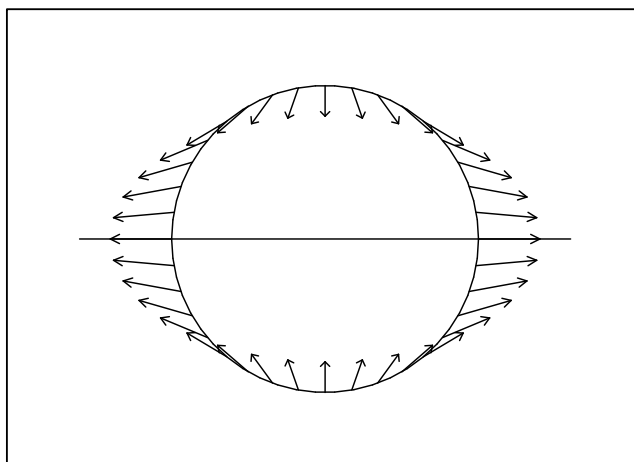
$$\vec{0} = \vec{T} + \vec{P} + m \left( \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T) \right) + m \left( \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(T) \right)$$

- ◇ Le terme  $\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$  représente le champ de marée créé par la Lune sur la Terre.

### ★ représentation graphique

- ◇ Sur le graphique ci-dessous, nous avons représenté le champ de marée à la surface de Terre créé par un astre dans la direction horizontale.

Graphique 3



- ◇ Les accélérations résultantes valent, pour un astre :

→ dans la direction de l'astre :  $\frac{2 G M_{\text{astre}} R_T}{d_{\text{astre}}^3}$

→ dans la direction orthogonale à l'astre :  $\frac{G M_{\text{astre}} R_T}{d_{\text{astre}}^3}$  soit deux fois moins

- ◇ Nous pouvons constater que deux points opposés sur la Terre subissent les mêmes marées : il y a deux marées par jour.

## IV.5.iii – la Lune et le Soleil

### ★ contributions

- ◇ Nous avons :

$R_T = 6,36.10^6 \text{ m}$	$M_S = 1,99.10^{30} \text{ kg}$	$M_L = 7,34.10^{22} \text{ kg}$
$G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m.kg}^{-2}$	$d_S = 1,50.10^{11} \text{ m}$	$d_L = 3,8.10^8 \text{ m}$

- ◇ Nous trouvons :

$$\frac{2 G M_S R_T}{d_S^3} = 5,06.10^{-7} \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{2 G M_L R_T}{d_L^3} = 1,1.10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$$

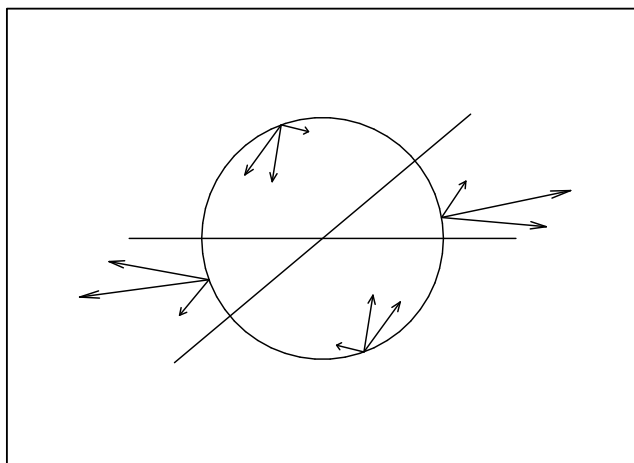
La lune a un effet deux fois plus important que celui du Soleil sur les marées.

- ◇ D'un autre côté, étant donné les accélérations mises en jeu, nous pouvons largement négliger les effets de marée en première approximation.

### ★ mortes eaux et vives eaux

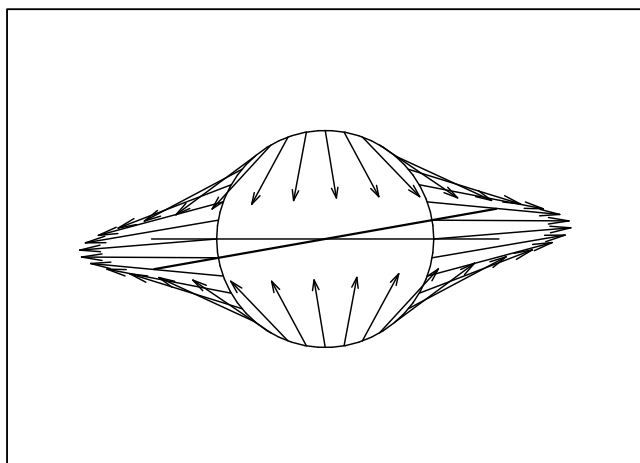
- ◇ Regardons ce qui se passe lorsque nous tenons compte des deux astres.

Graphique 4

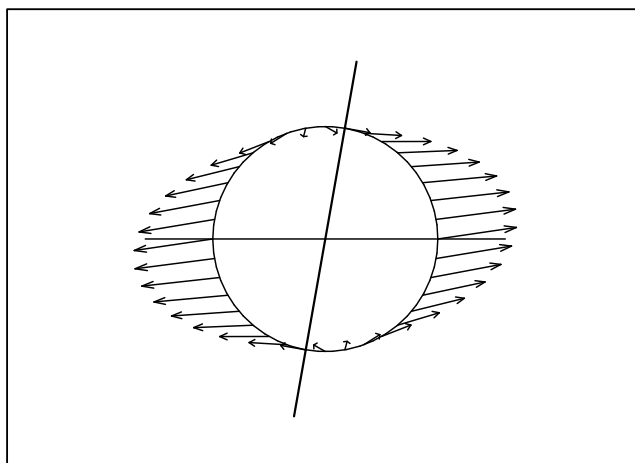


- ◇ Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, nous pouvons voir que les effets s'ajoutent. Les marées sont plus importantes, ce sont les *vives eaux*.
- ◇ En revanche, lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont en quadrature, les effets se retranchent. Les marées sont faibles, ce sont les *mortes eaux*.

Graphique 5



Graphique 6



### ★ un phénomène plus complexe

- ◇ Nous n'avons ici fait qu'effleurer le phénomène des marées.
- ◇ Dans le TD, nous pouvons trouver l'explication du phénomène qui fait que les deux marées quotidiennes peuvent être très différentes l'une de l'autre.
- ◇ De plus nous n'avons pas du tout tenu compte de l'aspect dynamique des marées. Nous avons considéré des points immobile or il faut du temps pour que la mer monte ou descende, ce qui peut fortement influencer l'effet de marée.

# Mécanique en référentiel non galiléen

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- référentiels en translation, en rotation, en rotation pure, en rotation pure et uniforme
- vecteur rotation
- lois de composition
- référentiels de COPERNIC, héliocentrique, géocentrique, terrestre
- le poids

### ★ Les grandeurs

◇ Connaître :

- l'unité et la dimension des vecteurs rotations
- l'ordre de grandeur des vecteurs rotation des référentiels usuels

### ★ Les lois

◇ Connaître :

- les lois de composition des vitesses et des accélérations pour deux référentiels en translation (écriture intrinsèque)
- les lois de composition des vitesses et des accélérations pour deux référentiels en rotation pure (écriture intrinsèque)
- les expressions des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS
- l'influence énergétique des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

### ★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- l'effet d'une force d'inertie d'entraînement (dans le cas de référentiels en translation ou en rotation uniforme)
- l'influence de la force d'inertie de CORIOLIS sur un mouvement en référentiel terrestre

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

◇ Il faut savoir repérer si un référentiel est galiléen ou pas.

### ★ Analyse technique

◇ Il faut savoir :

- savoir choisir entre l'approche en terme de forces ou en terme énergétique lors d'une étude en référentiel non galiléen

## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

- ◇ Savoir manipuler le produit vectoriel.

### ★ petits gestes

- ◇ Il faut savoir schématiser une situation dans plusieurs référentiels différents.

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
  - le pendule uniformément accéléré
  - la bille sur un manège
  - la déviation vers l'est

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Référentiel en translation</b>	<b>1</b>
I-1	Voir dans deux référentiels différents . . . . .	1
I-1 <i>·i</i>	qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ? . . . . .	1
I-1 <i>·ii</i>	pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ? . . . . .	2
	la meilleure des raisons . . . . .	2
	une autre bonne (?) raison . . . . .	2
I-1 <i>·iii</i>	décrire deux référentiels en translation . . . . .	2
I-1 <i>·iv</i>	objectif . . . . .	3
I-2	Des mouvements différents dans les deux référentiels . . . . .	4
I-2 <i>·i</i>	bien poser les notations . . . . .	4
I-2 <i>·ii</i>	relier les positions . . . . .	5
I-2 <i>·iii</i>	relier les vitesses . . . . .	5
I-2 <i>·iv</i>	relier les accélérations . . . . .	6
I-2 <i>·v</i>	du mauvais vocabulaire . . . . .	6
I-2 <i>·vi</i>	observation importante . . . . .	7
I-3	Les lois de la mécanique . . . . .	7
I-3 <i>·i</i>	le principe fondamental aux forceps . . . . .	7
	énoncé . . . . .	7
	démonstration . . . . .	7
	invariance galiléenne des forces . . . . .	8
I-3 <i>·ii</i>	une nouvelle force . . . . .	8
	un nom compréhensible . . . . .	8
	ce n'est pas une force physique . . . . .	8
	pourquoi la ressent-on alors ? . . . . .	8
	juste un glaçon . . . . .	9
I-3 <i>·iii</i>	vision énergétique . . . . .	10
	les lois . . . . .	10
	cas particulier d'une force d'inertie constante . . . . .	10
	paradoxe dans un raisonnement énergétique . . . . .	10
I-4	Les référentiels galiléens . . . . .	11
I-4 <i>·i</i>	alors, finalement, c'est quoi ? . . . . .	11
	quel est le premier référentiel galiléen ? . . . . .	12
I-4 <i>·ii</i>	référentiels usuels . . . . .	12
	référentiel de COPERNIC . . . . .	12
	référentiel héliocentrique . . . . .	12
	référentiel géocentrique . . . . .	13
	référentiel terrestre . . . . .	14
I-4 <i>·iii</i>	pas de non galiléennité excessive . . . . .	14
	référentiel héliocentrique . . . . .	14
	référentiel géocentrique . . . . .	15
	référentiel terrestre . . . . .	15
I-5	Étudier une situation . . . . .	15
I-5 <i>·i</i>	analyse physique . . . . .	15
I-5 <i>·ii</i>	analyse technique . . . . .	16
I-5 <i>·iii</i>	danger à éviter . . . . .	16
I-6	Pendule simple dans un train . . . . .	16
I-6 <i>·i</i>	description – analyse . . . . .	16
I-6 <i>·ii</i>	équation du mouvement dans $\mathcal{R}$ . . . . .	17

I.6.iii	vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$ . . . . .	18
I.7	Sismographe . . . . .	18
I.7.i	description – analyse . . . . .	18
I.7.ii	équation du mouvement . . . . .	19
I.7.iii	lecture . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Référentiel en rotation pure et uniforme</b> . . . . .	<b>21</b>
II.1	Définir deux référentiels en rotation pure . . . . .	21
II.1.i	c'est tout simple . . . . .	21
II.1.ii	rotation uniforme . . . . .	22
II.2	Description du mouvement dans les deux référentiels . . . . .	22
II.2.i	poser les notations . . . . .	22
II.2.ii	vitesse . . . . .	23
II.2.iii	accélération . . . . .	24
II.2.iv	écriture intrinsèque . . . . .	25
	objectif . . . . .	25
	décrire la rotation . . . . .	25
	interlude produit vectoriel . . . . .	25
	réécrire la loi de composition des vitesses . . . . .	26
	réécrire la loi de composition des accélérations . . . . .	26
II.2.v	écriture traditionnelle . . . . .	27
	lois de composition . . . . .	27
	vitesse et accélération d'entraînement . . . . .	27
	accélération de CORIOLIS . . . . .	28
II.3	Les lois de la mécanique . . . . .	29
II.3.i	le PFD change mais ne change pas . . . . .	29
II.3.ii	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	29
II.3.iii	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	30
II.3.iv	aspect énergétique des forces d'inertie . . . . .	30
	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	31
	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	31
II.4	Référentiels galiléens . . . . .	32
II.4.i	une condition identique . . . . .	32
II.4.ii	le référentiel terrestre . . . . .	32
II.5	Tour de manège pour une bille . . . . .	33
II.5.i	description – analyse . . . . .	33
II.5.ii	position d'équilibre . . . . .	34
	existence . . . . .	34
	stabilité . . . . .	35
	interprétation finale . . . . .	35
II.5.iii	vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	35
	vision en terme de forces . . . . .	35
	vision en termes énergétiques . . . . .	36
II.6	Lanceur de ball-trap . . . . .	37
II.6.i	description – analyse . . . . .	37
	simplification . . . . .	37
	analyses . . . . .	38
II.6.ii	mouvement . . . . .	38
	approche en terme de force . . . . .	38
	approche énergétique . . . . .	39

	résolution . . . . .	39
	petit paradoxe . . . . .	39
II.6.iii	interprétation . . . . .	40
	dans $\mathcal{R}$ . . . . .	40
	dans $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	40
<b>III</b>	<b>Référentiel en mouvement quelconque</b>	<b>41</b>
III.1	Dériver dans deux référentiels différents . . . . .	41
III.1.i	notation de la dérivée . . . . .	41
III.1.ii	loi . . . . .	41
	énoncé . . . . .	41
	petite vérification . . . . .	41
	cas particulier du vecteur rotation . . . . .	42
III.2	Loi de composition des vitesses . . . . .	42
III.2.i	loi . . . . .	42
	interprétation . . . . .	43
III.2.ii	retrouver les cas particuliers . . . . .	43
	translation . . . . .	43
	rotation pure et uniforme . . . . .	43
III.3	Loi de composition des accélérations . . . . .	43
III.3.i	loi . . . . .	43
	interprétation . . . . .	44
III.3.ii	retrouver les cas particuliers . . . . .	44
	translation . . . . .	44
	rotation pure uniforme . . . . .	45
III.3.iii	bilan . . . . .	45
III.4	Propriétés des vecteurs rotation . . . . .	45
III.4.i	première loi . . . . .	45
	énoncé . . . . .	45
	démonstration . . . . .	45
III.4.ii	composition des rotations . . . . .	46
	énoncé . . . . .	46
	démonstration . . . . .	46
<b>IV</b>	<b>Mécanique en référentiels terrestres</b>	<b>47</b>
IV.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	47
IV.1.i	lois . . . . .	47
	en terme de force . . . . .	47
	en terme de champ . . . . .	47
	vision énergétique . . . . .	48
IV.1.ii	cas des astres . . . . .	48
IV.2	Le poids . . . . .	48
IV.2.i	définition . . . . .	49
IV.2.ii	direction du fil à plomb . . . . .	49
IV.2.iii	d'autres causes de variation . . . . .	50
	causes globales . . . . .	50
	causes locale . . . . .	50
IV.2.iv	que faire avec le poids désormais ? . . . . .	50
IV.3	Déviations vers l'est . . . . .	51
IV.3.i	situation – analyse . . . . .	51



	expérience . . . . .	51
	analyse . . . . .	51
IV·3·ii	équation régissant le mouvement . . . . .	51
IV·3·iii	résolution à l'ordre 0 . . . . .	52
IV·3·iv	résolution à l'ordre 1 . . . . .	52
	nouvelles équations horaires . . . . .	52
	écart à l'impact . . . . .	53
	ordres supérieurs . . . . .	53
IV·3·v	interprétation dans le référentiel géocentrique . . . . .	53
	la bonne interprétation . . . . .	54
IV·4	Le pendule de FOUCAULT . . . . .	54
IV·4·i	situation . . . . .	54
	présentation historique . . . . .	54
	analyse . . . . .	54
	première approximation . . . . .	55
IV·4·ii	équation d'évolution . . . . .	55
	force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	55
	tension exercée par le fil . . . . .	56
	équations différentielles régissant le mouvement . . . . .	57
IV·4·iii	équations horaires . . . . .	57
	changement de fonction complexe inconnue . . . . .	57
	changer de repérage . . . . .	58
IV·4·iv	visuellement . . . . .	59
	pour l'expérience réelle . . . . .	59
	une illustration du mouvement du pendule . . . . .	60
IV·5	Les marées . . . . .	61
IV·5·i	le terme de marée . . . . .	61
	origine . . . . .	61
	situation – analyse . . . . .	61
IV·5·ii	champ de marée . . . . .	62
	expression vectorielle . . . . .	62
	représentation graphique . . . . .	63
IV·5·iii	la Lune et le Soleil . . . . .	63
	contributions . . . . .	63
	mortes eaux et vives eaux . . . . .	63
	un phénomène plus complexe . . . . .	64

# Mécanique

## Chapitre 5

### Mécanique des systèmes de points

# Mécanique des systèmes de points

Les dispositifs réels sont rarement assimilables à un point unique parce qu'ils peuvent se déformer ou parce qu'ils n'ont pas une taille négligeable devant une longueur caractéristique de l'évolution. L'idée pour les étudier est alors de les découper par la pensée en des tous petits morceaux individuels, chacun pouvant alors être assimilé à un point matériel. Le problème devient maintenant bien plus complexe car au lieu d'un point nous nous retrouvons face à un nombre considérable de points matériels pour lesquels il est inenvisageable d'écrire tous les PFD et de les résoudre. Il faut trouver une autre approche. C'est ce que propose ce chapitre.

L'objectif principal de ce chapitre est d'adapter la mécanique du point matériel à l'étude de systèmes constitués de plusieurs points matériels. Pour ce faire nous étudierons tout d'abord ce que nous appellerons le « mouvement d'ensemble » d'un tel système et nous constaterons que cela se rapproche énormément de la mécanique du point que nous connaissons déjà. Après nous étudierons comment décrire et prévoir le mouvement propre d'un système de points : cela nous amènera à introduire une nouvelle notion : le moment cinétique. Enfin nous terminerons par l'approche énergétique des systèmes de points qui, bien que facile, réserve quelques surprises non intuitives.

Dans ce cours, nous nous limiterons à des définitions et des démonstrations concernant des systèmes de *deux* points matériels, toutefois les résultats (et les démonstrations) sont facilement généralisables à  $N$  points, même avec  $N$  très grand.

## I – Mouvement d'ensemble

### I.1 – Centre de masse

- ◇ Comme nous allons très rapidement le voir, le centre de masse d'un système de points joue un rôle fondamental lors de son étude mécanique.

#### I.1.i – définition

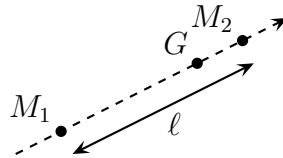
Pour deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse respective  $m_1$  et  $m_2$ , leur *centre de masse* noté  $G$  est tel que :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

- ◇ Nous pouvons dire aussi « centre d'inertie » (cdi), mais **surtout pas** « centre de gravité » car même si ces deux points sont souvent confondus, ils sont physiquement différents : nous verrons un exemple de situation où ces deux points ne sont pas confondus dans ce chapitre.
- ◇ Il s'agit ni plus ni moins que du *barycentre* des masses. Ainsi, lorsque nous devons le déterminer pour plus que deux points matériels, nous pourrons utiliser toutes les techniques connues sur les associations de barycentres.

#### I.1.ii – position des points par rapport au centre de masse

- ◇ Considérons le système de deux points suivants.



✧ Nous avons alors :

$$\begin{cases} GM_1 + GM_2 = \ell & \text{relation géométrique} \\ -m_1 GM_1 + m_2 GM_2 = 0 & \text{projection de la définition du cdm} \end{cases}$$

ce qui donne :

Pour deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  séparés de  $\ell(t)$ , le centre de masse  $G$  est situé entre les deux et est tel que :

$$GM_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \ell(t) \quad \text{et} \quad GM_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \ell(t)$$

Le centre de masse est toujours du côté où le système est le plus massique.

### I.1.iii – position du centre de masse

✧ Cherchons maintenant le vecteur  $\overrightarrow{OG}$  en fonction des vecteurs positions  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ .

$$\begin{aligned} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} &= \vec{0} && \text{définition du cdm} \\ m_1 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}) + m_2 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}) &= \vec{0} && \text{CHASLES} \\ \text{puis } m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} &= (m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

Soient deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de centre de masse  $G$ . Alors :

$$\overrightarrow{OG}(t) = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1}(t) + m_2 \overrightarrow{OM_2}(t)}{m_1 + m_2}$$

✧ Nous pouvons aussi projeter la relation précédente sur les axes  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ .

Soient deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de centre de masse  $G$ . Alors :

$$x_G(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2} \quad y_G(t) = \frac{m_1 y_1(t) + m_2 y_2(t)}{m_1 + m_2} \quad z_G(t) = \frac{m_1 z_1(t) + m_2 z_2(t)}{m_1 + m_2}$$



Ces formules ne marchent pas avec les coordonnées cylindro-polaires. Ainsi :

$$r_G(t) \neq \frac{m_1 r_1(t) + m_2 r_2(t)}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \theta_G(t) \neq \frac{m_1 \theta_1(t) + m_2 \theta_2(t)}{m_1 + m_2}$$

### I.1.iv – mouvement du centre de masse

✧ Dérivons les relations précédentes.

Soient deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de centre de masse  $G$ . Alors :

$$\vec{v}_{| \mathcal{R}}(G,t) = \frac{m_1 \vec{v}_{| \mathcal{R}}(M_1,t) + m_2 \vec{v}_{| \mathcal{R}}(M_2,t)}{m_1 + m_2}$$

- ◇ Le mouvement de  $G$  permet de déterminer certaines caractéristiques du mouvement du système.

Le mouvement du centre de masse d'un système est appelé *mouvement d'ensemble*.

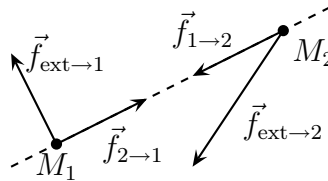
## I.2 – Théorème du Centre d'Inertie

### I.2.i – présentation du système

Un *système* est défini arbitrairement et a pour rôle de délimiter ce sur quoi s'appliquent les lois physiques.

Tout ce qui n'est pas dans le système fait partie de l'*extérieur*.

- ◇ Avant, nous n'avions (quasiment) aucun problème de définition de système puisqu'il n'y avait toujours qu'un seul point matériel. Il en est autrement désormais.
- ◇ Dans toute la suite, nous allons étudier un système  $\mathcal{S}$  constitué de deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$ . L'étude se fait dans le référentiel  $\mathcal{R}$  pas forcément galiléen.



Une force qui s'exerce entre deux points matériels d'un même système est appelée *force intérieure*.

Une force exercée par l'extérieur d'un système sur une partie d'un système est appelée *force extérieure*.

- ☞ Les forces extérieures incluent éventuellement les forces d'inertie.

- ◇ Il va de soi que ces caractéristiques ne sont pas intrinsèques aux forces puisqu'elles dépendent du système et donc d'un choix arbitraire : des forces peuvent donc parfois être « extérieures » et des fois « intérieures ».

L'*interaction intérieure*  $\vec{f}_{1 \leftrightarrow 2}$  est l'ensemble des deux forces intérieures  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ .

- ◇ Lorsque nous ferons la liste des forces intérieures, il sera toujours plus rapide de parler des interactions plutôt que des forces : il y en a deux fois moins !

## I.2.ii – loi

## ★ énoncé

Soit un système  $\mathcal{S}$  soumis aux forces extérieures  $\vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1}$  et  $\vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque, alors, en notant  $G$  le centre de masse de  $\mathcal{S}$  :

$$m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(G,t)}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} \quad \text{avec :}$$

- $m_{\text{tot}} \stackrel{\text{not}}{=} m_1 + m_2$  la masse totale du système  $\mathcal{S}$
- $\sum \vec{f}_{\text{ext}} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2}$  la résultante des forces extérieures

## ★ démonstration

◇ Écrivons d'abord le PFD pour les deux points matériels :

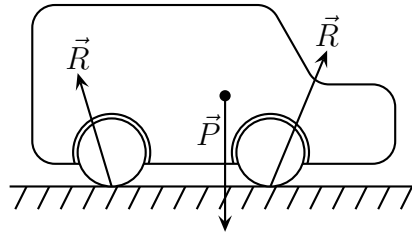
$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

◇ Additionnons ces deux relations. Nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} &= \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \\ \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)) &= \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \vec{0} && \text{3e loi de NEWTON : } \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2} \\ \frac{d(m_1 + m_2) \vec{v}(G,t)}{dt} &= \sum \vec{f}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

## I.2.iii – lecture

- ◇ Le TCI ne donne l'évolution que d'un **seul** point matériel, qui plus est fictif : le centre de masse. L'utilisation de cette loi sera donc en général insuffisante pour déterminer l'ensemble de l'évolution du système.
- ◇ Les interactions intérieures ne peuvent en aucun cas permettre au système d'avancer :
  - souffler sur la voile d'un bateau alors que nous sommes dedans et que nous cherchons à avancer avec le bateau ne peut pas fonctionner : en soufflant, nous sommes autant rejetés en arrière que la voile est poussée en avant en recevant le souffle (si, en plus, il n'y a pas de perte entre les deux acteurs) ;
  - quand nous sommes au ski ou sur des patins à roulette, si nous pouvons avancer sans utiliser les cares, c'est grâce aux forces de frottements.
- ◇ Exemple : ce n'est pas (vraiment) le moteur d'une voiture qui permet à celle-ci de se mettre en marche, mais la force que la route exerce (d'où l'importance considérable de l'état de la route et des pneus). En effet, les forces extérieures qui s'exercent sur la voiture sont le poids  $\vec{P}$  et les réactions de la route.



## ☕ Remarques :

- comme nous le verrons dans la suite, nous pouvons représenter le poids comme s'exerçant au centre de masse. Ce dernier est évidemment décalé vers l'avant pour une voiture à cause de la présence du moteur.
  - la réaction de la route est résistante sur les roues arrière et motrice sur les roues avant pour une voiture dont les roues motrices sont à l'avant.
- ◇ Contrairement à ce qui se passera plus tard lorsque nous nous intéresserons au mouvement propre, il n'est pas important, ici, de savoir quel point précis subit la force. Il n'est donc pas fondamental de respecter le « point d'application » même si c'est toujours plus joli (et que cela sera indispensable plus tard).

## I.2.iv – justification de pratique courantes

- ◇ Jusqu'à présent, nous avons souvent considéré qu'un objet pouvait être analysé comme un point matériel.
- ◇ Cela se justifie non pas parce que l'objet est petit par rapport aux dimensions caractéristiques du problème, mais parce qu'en fait le point étudié est le centre de masse de l'objet.
- ◇ Comme le point d'application n'a aucune importance pour le TCI, nous pouvons faire comme si toutes les forces s'appliquaient en  $G$  et comme si l'objet n'était que  $G$ .
- ◇ De cette manière nous pouvons avoir de manière exacte et **sans aucune approximation** le mouvement d'ensemble de l'objet.

## I.3 – Le cas particulier du poids

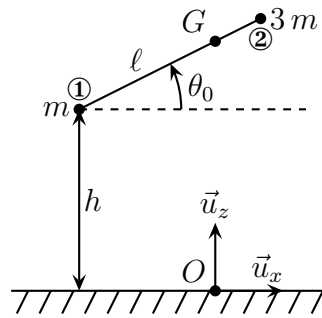
## I.3.i – deux façons de le voir

- ◇ Il y aura toujours deux façons de considérer le poids :
- soit un poids qui s'applique sur chacune des parties
  - soit un poids qui s'applique sur l'ensemble du système
- ◇ Par exemple pour deux points matériels, nous pouvons, dans la liste des forces :
- soit écrire les deux poids  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  et  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$
  - soit écrire directement la résultante :  $\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{g}$
- ◇ Lorsque le système aura visiblement un mouvement d'ensemble vertical, il sera plus logique, plus physique et donc plus facile de considérer le poids total. En revanche lorsque le système aura des parties pour lesquelles le poids ne joue aucun rôle (*ie.* qui ont un mouvement horizontal), il sera plus facile de considérer un poids par morceaux.

## I.3.ii – chute d'un marteau, 1ère partie

## ★ modélisation – analyse

- ◇ Nous allons modéliser un marteau par une tige sans masse aux extrémités de laquelle sont accrochées deux masses  $m$  et  $3m$ .



- ◇ Le marteau est lâché sans vitesse initiale l'ensemble à partir de la hauteur  $h$  et nous allons chercher à déterminer comment va tomber le marteau.
- ◇ Les frottements sont négligés.
- ◇ Analyse physique :
  - globalement, le marteau tombe sous l'effet du poids dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen
  - comme les conditions initiales et les forces sont contenues dans le plan vertical, le mouvement va être plan, donc il y aura trois degrés de description :  $x_G(t)$ ,  $z_G(t)$  et puisqu'en plus de tomber, le marteau peut tourner sur lui-même  $\theta(t)$
  - la chute va dépendre de  $m$  (inertie),  $\ell$  (géométrie)  $g$  (action),  $h$  et  $\theta_0$  (conditions initiales).
- ◇ Analyse technique :
  - la chute étant globalement verticale, pour le mouvement d'ensemble, nous allons choisir un repérage cartésien
  - nous allons privilégier une approche de type « force » (trop de degrés de description)
  - nous allons travailler sur le système  $\mathcal{S}$  constitué de  $\{m + 3m + \text{tige}\}$  de préférence au système  $\{m + 3m\}$  de sorte que nous n'ayons pas à nous préoccuper des forces tige  $\rightarrow m$  car elles deviennent alors des interactions intérieures

### ★ mouvement d'ensemble

- ◇ Les seules forces **extérieures** qui s'exercent sur le système sont les poids de  $m$  et  $3m$ .
- ◇ Le TCI pour le système  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$4m \vec{a}_{|\mathcal{S}}(G,t) = m \vec{g} + 3m \vec{g}$$

- ◇ Cela donne, en projection sur  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_x$  :

$$\ddot{z}_G(t) = -g \quad \text{et} \quad \ddot{x}_G(t) = 0$$

- ◇ Nous ne connaissons pas exactement la condition initiale sur  $G$  mais nous connaissons celles sur  $M_1$  et  $M_2$ .
- ◇ Nous avons toujours :

$$4m \vec{v}_G(t) = m \vec{v}_1(t) + 3m \vec{v}_2(t) \quad \rightsquigarrow \quad 4m \vec{v}_G(0) = m \vec{v}_1(0) + 3m \vec{v}_2(0) = \vec{0}$$

Lorsque chaque partie d'un système est immobile à un instant (initial entre autre), alors le centre de masse est aussi immobile à cet instant.

Ⓢ en revanche, quand une ou plusieurs parties bougent, rien n'est sûr. Des fois le centre de masse peut être immobile, des fois il peut bouger.

- ◇ Nous avons, en plus,  $z_G(0) = h + \frac{3}{4}\ell \sin \theta_0$ .



- ◇ Finalement, nous obtenons par intégration  $\boxed{z_g(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h + \frac{3}{4}\ell \sin \theta_0}$  et  $\boxed{x_G(t) = 0}$ .
- ◇ Le mouvement d'ensemble, *ie.* le mouvement de  $G$  est parfaitement vertical.
- ◇ Reste à déterminer le mouvement propre, *ie.* la rotation sur lui-même. Nous verrons cela dans la 2  partie.

## I.4 – SH EMAKER – LEVY 9

- ◇ Dans cette partie nous allons étudier une situation triplement intéressante :
  - historiquement car l' v nement que nous allons modéliser a focalisé les regards des astronomes de l'époque
  - théoriquement car nous allons mettre en évidence dans cette situation la différence entre centre de masse et centre de gravité
  - physiquement car le phénomène que nous allons voir a une grande influence en astronomie

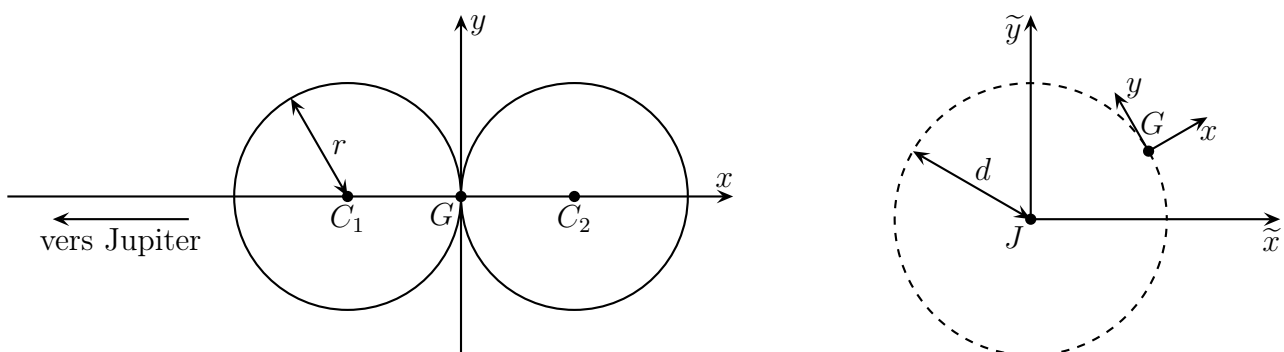
### I.4.i – qui c'est ?

- ◇ Trois astronomes de métier, Eugène et Caroly SH EMAKER et David LEVY découvrent régulièrement des ast ro ides.
- ◇ Le 9  qu'ils ont découvert ensemble s'appelle SH EMAKER – LEVY 9.
- ◇ Cet ast ro ide s'est fragmenté en 21 morceaux avant d'heurter Jupiter en juillet 1994.
- ◇ Bien sûr tous les astronomes ont regard  cet impact qui a permis d'en apprendre beaucoup sur la composition de l'atmosphère de Jupiter.
- ◇ Nous allons proposer un modèle simple permettant d'expliquer pourquoi la comète s'est fragmentée.

### I.4.ii – limite de ROCHE

#### ★ modèle

- ◇ Nous allons modéliser l'ast ro ide par deux sphères identiques de rayon  $r$  et de masse  $m$  accolées. Leur centre de masse  $G$  est donc au point de contact entre les deux.



- ◇ Nous allons supposer que ces deux sphères tournent sur une orbite circulaire autour de Jupiter et que les centres  $J$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont toujours alignés.
- ◇ Nous allons essayer de déterminer dans quelle mesure les deux sphères restent accolées. Cela revient à étudier la position d'équilibre de  $C_2$  dans le référentiel non galiléen centré sur  $G$  et dont les axes tournent en même temps que l'ast ro ide.

## ★ analyse

- ✧ Étant donné la période de révolution de Jupiter (29 ans), nous pouvons largement considérer que le référentiel junocentrique  $\tilde{R}$  est galiléen.
- ✧ Les deux morceaux d'astéroïde restent accolées car elles s'attirent mutuellement par gravitation : nous ne pouvons donc pas négliger ces forces lors de l'étude.
- ✧ Les paramètres caractéristiques sont :  $m$  (inertie)  $r$  (géométrie)  $G$ , la constante universelle de gravitation et  $M_J$  (action) et enfin  $d$  (contrainte)
- ✧ En ce qui concerne l'approche, étant donné qu'il y a une force de contact inconnue entre les deux qui joue un rôle dans cet équilibre, nous ne pouvons pas utiliser l'approche énergétique.
- ✧ Mais avant tout chose, il va falloir déterminer précisément les caractéristiques du référentiel non galiléen choisi : mouvement de  $G$  et vecteur rotation.

## ★ caractéristiques du référentiel non galiléen

- ✧ Le petit problème de ce référentiel est qu'il n'est ni en translation, ni en rotation pure.

🌀 accélération de  $G$ 

- ✧ Faisons un TCI!
- ✧ Les seules forces **extérieures** qui s'exercent sur le système sont les deux attractions gravitationnelles exercées par Jupiter sur  $C_1$  et  $C_2$ . Comme ce sont deux sphères, elles se comportent, du point de vue de la gravitation, comme des points matériels situés en leur centre et de masse  $m$ . Cela donne :

$$\begin{aligned}
 2m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}(G)} &= \vec{f}_{\text{grav}, J \rightarrow 1} + \vec{f}_{\text{grav}, J \rightarrow 2} = -G \frac{m M_J}{(d-r)^2} \vec{u}_x - G \frac{m M_J}{(d+r)^2} \vec{u}_x \\
 &= -G \frac{m M_J}{d^2 \left(1 - \frac{r}{d}\right)^2} \vec{u}_x - G \frac{m M_J}{d^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right)^2} \vec{u}_x \\
 &\stackrel{\text{DL}}{=} -G \frac{m M_J}{d^2} \left(1 + 2\frac{r}{d}\right) \vec{u}_x - G \frac{m M_J}{d^2} \left(1 - 2\frac{r}{d}\right) \vec{u}_x \\
 &= -G \frac{2m M_J}{d^2} \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

- ✧ Et ainsi :  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}(G)} = -G \frac{M_J}{d^2} \vec{u}_x$ .

## 🌀 vecteur rotation

- ✧ Étant donné la définition du référentiel  $\mathcal{R}$ , nous pouvons dire que la vitesse de rotation du référentiel n'est autre que la vitesse angulaire de  $G$  sur son orbite.
- ✧ Dans ces conditions, nous pouvons écrire :  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}} = -d \Omega^2 \vec{u}_x$ , ce qui donne, en identifiant avec le résultat précédent :  $\Omega^2 = G \frac{M_J}{d^3}$ .

★ bilan des forces sur  $C_2$ 

- ✧ Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen, les forces subies par  $C_2$  sont :

- ➔ force à distance : attraction gravitationnelle exercée par Jupiter  $\vec{f}_J = -G \frac{m M_J}{(d+r)^2} \vec{u}_x$
- ➔ force à distance : attraction gravitationnelle exercée par  $C_1$  :  $\vec{f}_1 = -G \frac{m m}{(2r)^2} \vec{u}_x$

- force de contact :  $\vec{T} = T \vec{u}_x$
- force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$
- force d'inertie de CORIOLIS : nulle car  $C_2$  est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}$

◇ Il serait inopportun de parler de frottement dans l'espace à moins d'étudier des effets très faible de manière très précise.

◇ L'accélération d'inertie d'entraînement s'écrit  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(G) - \Omega^2 \overrightarrow{HC_2}$  où  $H$  est le projeté de  $C_2$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation. Nous avons donc  $H = G$ . Ainsi :

$$\vec{a}_e = -G \frac{M_J}{d^2} \vec{u}_x - \Omega^2 r \vec{u}_x = -G \frac{M_J}{d^2} \left(1 + \frac{r}{d}\right) \vec{u}_x$$

### ★ condition d'équilibre

◇ Écrivons l'équilibre de  $C_2$  dans  $\mathcal{R}$  et projetons sur  $\vec{u}_x$

$$\vec{f}_J + \vec{f}_1 + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad -G \frac{m M_J}{(d+r)^2} - G \frac{m^2}{4r^2} + G \frac{m M_J}{d^2} \left(1 + \frac{r}{d}\right) + T = 0$$

◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} T &= G m \left( \frac{m}{4r^2} + \frac{M_J}{d^2 \left(1 + \frac{r}{d}\right)^2} - \frac{M_J}{d^2} \left(1 + \frac{r}{d}\right) \right) \\ &= G m \left( \frac{m}{4r^2} + \frac{M_J}{d^2} \left(1 - 2\frac{r}{d}\right) - \frac{M_J}{d^2} \left(1 + \frac{r}{d}\right) \right) \\ &= G m \left( \frac{m}{4r^2} - 3r \frac{M_J}{d^3} \right) \end{aligned}$$

◇ Pour que l'équilibre soit possible, il faut  $T \geq 0$ , ce qui nous amène à :

$$\frac{m}{4r^2} - 3r \frac{M_J}{d^3} \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{M_J}{d^3} \leq \frac{m}{12r^3} \quad \rightsquigarrow \quad d^3 \geq 12r^3 \frac{M_J}{m}$$

◇ Introduisons les masses volumiques moyennes  $\rho_J$  et  $\rho$  telles que :

$$M_J = \frac{4}{3} \pi R_J^3 \quad \text{et} \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3$$

◇ Il reste  $d^3 \geq 12 R_J^3 \frac{\rho_J}{\rho}$  puis  $d \geq \left(12 \frac{\rho_J}{\rho}\right)^{1/3} R_J$

### ★ interprétation

- ◇ Nous pouvons donc affirmer que si l'astéroïde tourne trop près de Jupiter, les deux morceaux ne peuvent rester accolés : l'astéroïde se fragmente.
- ◇ C'est la limite de ROCHE en deçà de laquelle les astéroïdes ne peuvent rester en un seul morceau.
- ◇ En fait, les forces de gravitation qui s'exercent sur  $C_1$  et  $C_2$  sont si différentes que tout se passe comme si  $C_1$  et  $C_2$  étaient séparées : c'est un effet de marée.
- ◇ Ce phénomène est à l'origine, notamment, des anneaux dans le système solaire.

### I-4.iii – le terme de l'astéroïde

- ◇ Pour Jupiter, nous avons  $R_J = 7,14 \cdot 10^7$  m et  $\rho_J = 1,25 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>.
- ◇ Pour l'astéroïde, il peut y avoir plusieurs compositions :
  - pour de la glace  $\rho = 0,91 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $d_{\text{roche}} = 2,5 R_J$
  - pour de la neige peu compacte  $\rho = 0,5 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $d_{\text{roche}} = 3,1 R_J$
- ◇ En réalité, la limite pour laquelle l'astéroïde s'est disloquée est  $d_{\text{roche}} = 1,58 R_J$ .
- ◇ Si la limite de roche est plus basse que celle prévue par ce modèle c'est parce que les deux morceaux sont plus difficiles à séparer que ce qui a été modélisé : en fait les forces de cohésion permettent à l'astéroïde de s'approcher plus près de Jupiter.
- ◇ Remarquons toutefois que ce modèle fournit une valeur approchée de la réalité de manière très satisfaisante.

## I.5 – Interprétation systémique : la quantité de mouvement

### I-5.i – définition – interprétation

La *quantité de mouvement* par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui possède la vitesse  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(t)$  vaut :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(M, t) = m \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t)$$

- ◇ Comme nous l'avons déjà vu, c'est ce qui est au cœur de la 2<sup>e</sup> loi de NEWTON.
- ◇ La quantité de mouvement représente un peu « l'élan » qu'a un point matériel.

### I-5.ii – propriétés

#### ★ propriété naturelle

La quantité de mouvement d'un système est la somme des quantités de mouvement de ses parties :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) = \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M_1, t) + \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M_2, t)$$

Une grandeur est dite *extensive* si la valeur qu'elle a pour un système est la somme des valeurs qu'elle a pour chacune de ses parties.

- ◇ Il y a de nombreuses grandeurs qui sont si naturellement extensive que nous en oublions de le rappeler. Par exemple pour la masse !

La quantité de mouvement est extensive.

★ **expression simple intuitive non naturelle**

La quantité de mouvement d'un système  $\mathcal{S}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t) \quad \text{où :}$$

- $m_{\text{tot}}$  est la masse totale du système
- $G$  est le centre de masse du système

◇ La démonstration est simple :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) = \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M_1, t) + \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M_2, t) = m_1 \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1, t) + m_2 \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2, t) = (m_1 + m_2) \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t)$$

◇ **Pour la quantité de mouvement**, le système est **cinétiquement** équivalent à un système où toute la masse serait concentrée en  $G$ .



Voir le système comme étant équivalent à toute la masse concentrée en  $G$  ne « fonctionne pas » avec les autres grandeurs cinétiques importantes telle que l'énergie cinétique. Cette équivalence (bien pratique parfois) est donc à manier avec de grandes précautions.

## II – Mouvement propre

- ✧ Maintenant que nous savons prévoir et décrire le mouvement d'ensemble, il faut décrire le mouvement propre, c'est-à-dire le mouvement des différents points par rapport au centre de masse.

### II.1 – Un nouveau référentiel pour décrire le mouvement propre

#### II.1.i – le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

Le référentiel barycentrique, noté  $\mathcal{R}^*$  est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  et dont le centre est le centre de masse du système  $\mathcal{S}$  étudié.



- Le centre de masse  $G$  est donc **immobile** dans  $\mathcal{R}^*$ .

- ✧ Comme le référentiel barycentrique est en translation par rapport au référentiel d'étude, nous avons :

Le vecteur rotation du référentiel barycentrique par rapport au référentiel d'étude est nul :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$ .

- ✧ Il ne pourra donc jamais y avoir de force d'inertie de CORIOLIS dans un référentiel barycentrique.

Les grandeurs relatives au référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  sont notées avec une astérisque :  $\vec{v}^*, \vec{a}^*, \dots$

#### II.1.ii – lois de compositions avec $\mathcal{R}^*$

##### ★ loi de composition des vitesses

- ✧ Le référentiel barycentrique est en translation par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen, donc :

La loi de composition des vitesses s'écrit, pour le référentiel barycentrique :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_i, t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t) + \vec{v}_{\mathcal{R}^*}(M_i, t)$$

ce que nous noterons aussi :  $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_G(t) + \vec{v}_i^*(t)$ .

##### ★ loi de composition des accélérations

- ✧ De même pour l'accélération :

La loi de composition des accélérations s'écrit, pour le référentiel barycentrique :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M_i, t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(G, t) + \vec{a}_{\mathcal{R}^*}(M_i, t)$$

ce que nous noterons aussi :  $\vec{a}_i(t) = \vec{a}_G(t) + \vec{a}_i^*(t)$ .

★ dérivation dans  $\mathcal{R}^*$  et dans  $\mathcal{R}$ 

◇ Rappelons la formule générale de dérivation dans deux référentiels différents :

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}(t)$$

Un vecteur possède la même dérivée par rapport au référentiel d'étude et barycentrique :

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

II.1.iii – quantité de mouvement de  $\mathcal{S}$ 

## ★ résultat

La quantité de mouvement d'un système par rapport à son référentiel barycentrique est nulle :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \vec{0}$$

◇ Ce résultat ne signifie ni plus ni moins que globalement le système ne bouge pas par rapport à lui-même. C'est extrêmement logique, mais il fallait quand même le préciser.

## ★ démonstration

◇ Utilisons les lois de composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}, t) &= \vec{p}_1^*(t) + \vec{p}_2^*(t) && \text{extensivité de } \vec{p} \\ &= m_1 \vec{v}_1^*(t) + m_2 \vec{v}_2^*(t) && \text{définition de } \vec{p}_i^* \\ &= m_1 (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_G(t)) + m_2 (\vec{v}_2(t) - \vec{v}_G(t)) && \text{loi de composition des vitesses} \\ &= m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) - (m_1 + m_2) \vec{v}_G(t) \\ &= \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) - m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t) \\ &= \vec{0} && \text{expression de } \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) \end{aligned}$$

## ★ démonstration 2

◇ Utilisons la définition du centre de masse :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}, t) &= \vec{p}_1^*(t) + \vec{p}_2^*(t) && \text{extensivité de la quantité de mouvement} \\
&= m_1 \vec{v}_1^*(t) + m_2 \vec{v}_2^*(t) && \text{définition de } \vec{p}_i^*(t) \\
&= m_1 \frac{d\vec{GM}_1(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}^*} + m_2 \frac{d\vec{GM}_2(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}^*} && \text{définition de } \vec{v}_i^* \\
&= \frac{d}{dt} \left( m_1 \vec{GM}_1(t) + m_2 \vec{GM}_2(t) \right) \Big|_{\mathcal{R}^*} && \text{linéarité de la dérivée}
\end{aligned}$$

◇ Et comme, par définition de  $G$ ,  $m_1 \vec{GM}_1(t) + m_2 \vec{GM}_2(t) = \vec{0}$ , nous obtenons :  $\vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}, t) = \vec{0}$ .

### ★ démonstration 3

◇ La relation  $\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G)$  est valable pour n'importe quel référentiel, en particulier  $\mathcal{R}^*$ . Ainsi :

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}, t) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(G, t) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \vec{0}$$

### ★ et maintenant ?

- ◇ Comme le système ne peut pas bouger, *ie.* se translater, par rapport au référentiel barycentrique associé, la seule chose que nous pouvons faire maintenant, c'est d'étudier la rotation du système sur lui-même.
- ◇ C'est ce qui se passe pour la Terre : son mouvement d'ensemble est une translation circulaire autour du Soleil alors que son mouvement propre est une rotation autour d'un axe nord-sud.

## II.2 – Théorème du moment cinétique pour un point matériel

### II.2.i – décrire la rotation

#### ★ pour un mouvement dans l'espace

Le *moment cinétique* d'un point  $M$  par rapport à un point  $A$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  vaut :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M, t) \triangleq \vec{AM}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M, t)$$

#### 🔗 interprétation

◇ Voyons ce que cela donne sur un exemple. Prenons un point  $M$  et un point  $M$  animé de la vitesse  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t)$ .



◇ Le moment cinétique est donc :  
 ➔ un vecteur orthogonal à  $\vec{AM}$  et  $\vec{v}$



- de norme d'autant plus grande que  $\alpha$  est proche de  $\frac{\pi}{2}$  i.e. d'une rotation de centre  $A$
- dans le sens de la rotation

Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)$  d'un point  $M$  par rapport à un point  $A$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  caractérise la rotation que  $M$  a autour de  $A$  :

- $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)$  a pour direction l'axe instantané de rotation
- $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)$  a pour sens le sens instantané de rotation

### ★ pour un mouvement plan autour d'un axe particulier

#### 🕒 définition

- ✧ Lorsqu'un mouvement possède un axe particulier connu, nous pouvons simplifier les expressions du moment cinétique en ne conservant que la projection sur cet axe.

Le *moment cinétique scalaire* d'un point  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  vaut :

$$\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(M,t) \triangleq \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t) \cdot \vec{u} \quad \text{où :}$$

$A$  est un point quelconque de  $\Delta$ .

- ✧ Étant donné que  $\sigma_{\Delta}$  est défini à partir d'un produit scalaire, il peut être positif ou négatif.

Le moment cinétique scalaire est une grandeur algébrique.

#### 🕒 petite propriété

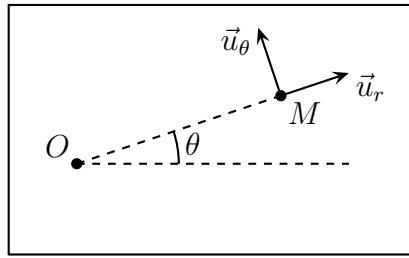
- ✧ Nous allons montrer que  $\sigma_{\Delta}$  ne dépend pas du point  $A$  considéré.
- ✧ Pour deux points  $A$  et  $A'$  nous allons montrer que  $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t) \cdot \vec{u} = \vec{\sigma}_{A'|\mathcal{R}}(M,t) \cdot \vec{u}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t) \cdot \vec{u} &= (\overrightarrow{AM}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{u} \\ &= (\overrightarrow{AA'}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{u} + (\overrightarrow{A'M}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

- ✧ Or  $\overrightarrow{AA'}$  est colinéaire à  $\vec{u}$  donc le premier terme est nul. Il reste bien le résultat attendu.
- ✧ L'intérêt de cette relation est que nous pouvons calculer le moment cinétique par rapport à n'importe quel point.

#### 🕒 expression

- ✧ Considérons un mouvement plan autour d'un axe. Tout se passe donc comme si le mouvement se faisait autour d'un point.
- ✧ Nous allons définir ce point particulier comme le centre du repère et nous allons utiliser les coordonnées cylindro-polaire.



◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{O|\mathcal{R}}(M,t) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathcal{R}}(M,t) = r \vec{u}_r \wedge (p_r \vec{u}_r + p_\theta \vec{u}_\theta) \\ &= r p_\theta \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(M,t) = r p_\theta\end{aligned}$$

Un moment ne conserve que la partie utile pour la rotation.

◇ Développons :  $\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(M,t) = r p_\theta = r^2 m \dot{\theta}$

Pour un mouvement plan, le moment cinétique d'un point s'écrit, avec le repérage naturel :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m r^2(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \sigma_\Delta = m r^2(t) \dot{\theta}(t)$$

⊛ pour éviter toute collusion de notation, il faudra faire attention à la signification du  $\vec{u}_z$  et en particulier, il ne faudra pas oublier que le  $\vec{u}_z$  est orthogonal au mouvement !

Le moment cinétique par rapport à un point représente la quantité de rotation autour de ce point.

## II.2.ii – lois régissant la rotation

### ★ énoncés

### 🌀 pour un mouvement dans l'espace

Soit  $M$  un point matériel soumis à  $\sum \vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$  un référentiel quelconque. Alors pour tout point  $A$  fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \quad \text{où :}$$

→  $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)$  est le moment cinétique de  $M$  par rapport à  $A$

→  $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$  est le moment de la force  $\vec{f}$  par rapport à  $A$ .

Le moment d'une force s'exprime en N.m.

◇ Bien qu'un moment soit homogène à une énergie, nous l'exprimerons en N.m et pas en J.

🌀 pour un mouvement plan

Soit  $M$  un point matériel soumis à  $\sum \vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$  un référentiel quelconque. Alors pour tout axe  $\Delta$  fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) \quad \text{où :}$$

- $\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(M,t)$  est le moment cinétique scalaire de  $M$  par rapport à  $A$
- $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})$  est le moment scalaire de la force  $\vec{f}$  par rapport à  $A$ .

★ démonstration

◇ Dérivons le moment cinétique.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) \right) && \text{par définition de } \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M,t) \\ &= \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} && \text{dérivée d'un produit} \\ &= \frac{d\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \overrightarrow{AM} \wedge \left( \sum \vec{f} \right) && \text{CHASLES + PFD} \\ &= \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t)(\dots) \\ &\quad (\dots) + \sum \left( \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f} \right) && \text{linéarité du produit vectoriel} \end{aligned}$$

puisque  $A$  est fixe,  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{C^{te}}$  et donc :

$$\begin{aligned} &= \vec{0} + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \sum \vec{\mathcal{M}}_{A|\mathcal{R}}(\vec{f}) && \text{définition de } \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{A|\mathcal{R}}(\vec{f}) \\ &= \vec{0} + \sum \vec{\mathcal{M}}_{A|\mathcal{R}}(\vec{f}) && \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \text{ et } \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) \text{ colinéaires} \end{aligned}$$

◇ La version scalaire n'est autre que la version vectorielle multipliée scalairement par le vecteur constant  $\vec{u}$ .

★ lecture

◇ Dans le TMC, il est fondamental que le point  $A$  soit fixe. Dans ces conditions, vu qu'il joue le rôle particulier de point autour duquel  $M$  tourne, nous allons quasi systématiquement le choisir comme centre du référentiel.

◇ Le TMC nous permet donc d'étudier ce qui tourne :

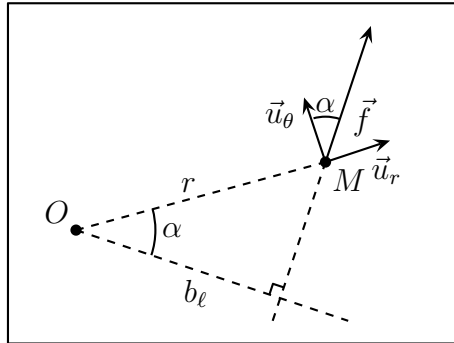
- le moment cinétique décrit l'état de rotation d'un point matériel par rapport à un point  $A$
- le moment d'une force est d'autant plus grand que la force est capable de faire tourner

◇ L'effet de levier est directement lié au moment d'une force : il est d'autant plus facile de tourner quelque chose que la force s'exerce loin de l'axe de rotation.

### ★ calcul de moments scalaires

#### 🕒 moment scalaire de force

- ◇ De même que pour le moment cinétique scalaire, nous avons  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{f}) \cdot \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de l'axe de rotation.
- ◇ Nous savons donc déjà que  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = r f_\theta$  où  $r$  est la distance du point qui subit la force à l'axe de rotation et  $f_\theta$  la composante de la force susceptible de faire tourner.
- ◇ Schématisons la situation.



- ◇ Nous avons donc :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = r f_\theta = r f \sin \alpha = (r \sin \alpha) f = b_\ell f$$

La *droite d'action* d'une force est la droite colinéaire à la force passant par le point qui la subit.

Le *bras de levier* d'une force par rapport à un axe de rotation  $\Delta$  est la distance la plus courte entre sa droite d'action et l'axe  $\Delta$ .

Le moment scalaire d'une force par rapport à un axe  $\Delta$  s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm f b_\ell \quad \text{où :}$$

- le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
- $f$  est la norme de la force
- $b_\ell$  est le bras de levier de la force

- ◇ Le bras de levier représente donc l'effet qu'est capable d'avoir une force au niveau de la rotation.

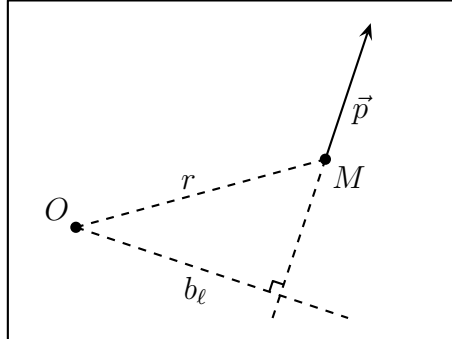
#### 🕒 moment cinétique scalaire

- ◇ Puisqu'à partir du moment exercé par une force  $\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$  nous en avons déduit  $f = \pm f b_\ell$ , par analogie avec le moment cinétique  $\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$ , nous pouvons en déduire que :

Le moment cinétique scalaire par rapport à un axe  $\Delta$  s'écrit :

$$\sigma_{\Delta} = \pm p b_{\ell} = \pm m v b_{\ell} \quad \text{où :}$$

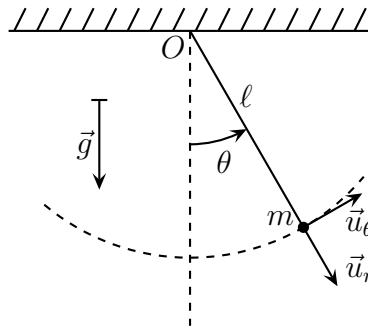
- le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
- $p = m v$  est la norme de la quantité de mouvement
- $b_{\ell}$  est le bras de levier de la quantité de mouvement



## II.2.iii – exemple du pendule simple

### ★ dispositif – analyse

◇ Rappelons le dispositif et ne négligeons pas les frottements pour une fois.



◇ Nous savons que le mouvement est plan et que le point  $M$  a un mouvement circulaire, donc il n'y a qu'un degré de description  $\theta(t)$ . Les résultats devront dépendre de  $m$ ,  $\ell$  et  $g$ .

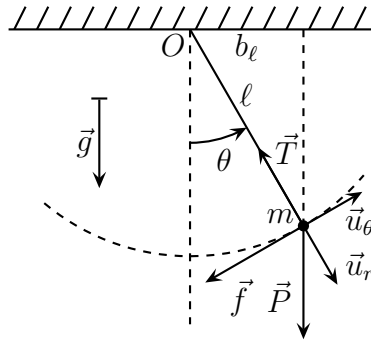
◇ Comme il y a une rotation, nous allons utiliser les coordonnées cylindro-polaire et le TMC.

### ★ équation vérifiée par le mouvement

#### 🌀 scalairnement

◇ La liste des forces qui s'exercent sont :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$
- force de contact : les frottements  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$
- force de contact : la force exercée par le fil :  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}}$



✧ Le TCM scalaire s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T})$$

✧ Le moment cinétique donne :

$$\sigma = +\ell m v_{\theta} = \ell m \dot{\theta}(t)$$

✧ Le moment de la force exercée par le fil est nul car la droite d'action de cette force rencontre l'axe de rotation.

✧ Le moment scalaire du poids vaut :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \pm P b_{\ell} = -m g \ell \sin \theta$$

✧ Le signe se trouve dans un cas particulier : quand  $\theta > 0$  nous pouvons constater que le moment est négatif. De même lorsque  $\theta < 0$  le moment est positif.

✧ Le moment scalaire de la force de frottement vaut :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \pm f \ell = -\lambda \ell \dot{\theta} \ell$$

✧ Là aussi le signe se trouve dans un cas particulier : quand  $\dot{\theta} > 0$  nous pouvons constater que le moment est négatif.

✧ En regroupant :

$$\frac{dm \ell^2 \dot{\theta}(t)}{dt} = -m g \ell \sin \theta(t) - \lambda \ell^2 \dot{\theta}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

### 🌀 vectoriellement

✧ Écrivons simplement tout vectoriellement :

$$\rightarrow \vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = \ell \vec{u}_r \wedge m (\ell \dot{\theta} \vec{u}_{\theta}) = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \ell \vec{u}_r \wedge m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_{\theta}) = -m g \ell \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \ell \vec{u}_r \wedge (-\lambda \ell \dot{\theta} \vec{u}_{\theta}) = -\lambda \ell^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \ell \vec{u}_r \wedge (-T \vec{u}_{\theta}) = \vec{0}$$

✧ Et ainsi :

$$\frac{d^2 \vec{\sigma}_O}{dt^2} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \quad \rightsquigarrow \quad m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z = -m g \ell \sin \theta \vec{u}_z - \lambda \ell^2 \dot{\theta} \vec{u}_z + 0$$

✧ Nous obtenons bien la même chose une fois l'équation projetée sur  $\vec{u}_z$  et simplifiée.

## II.2.iv – morale

- ◇ Entre le PFD et le TMC, que choisir ?
  - le TMC est *a priori* inutile pour déterminer l'évolution d'un (et d'un seul) point matériel car la projection du PFD sur  $\vec{u}_\theta$  fait aussi bien
  - le TMC ne s'occupe que de la rotation alors que le PFD donne aussi des lois « inutiles » comme la projection sur  $\vec{u}_r$
- ◇ Entre la version scalaire et la version vectorielle ?
  - la version vectorielle permet de ne pas réfléchir aux signes des moments, mais il faut projeter des vecteurs
  - la version scalaire est plus physique en introduisant le bras de levier mais oblige à réfléchir aux signes de chaque moment (cinétique et surtout ceux exercés par les forces)

## II.3 – Pour un système de points

### II.3.i – loi

#### ★ énoncé

Le moment cinétique est une grandeur extensive.

Soit un système  $\mathcal{S}$  étudié dans le référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque et  $A$  un point fixe de  $\mathcal{R}$ , alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S})$  est le moment cinétique du système  $\mathcal{S}$  par rapport à  $A$  dans  $\mathcal{R}$
- $\sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \stackrel{\text{not}}{=} \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2}$  est le moment total exercé par les forces extérieures.

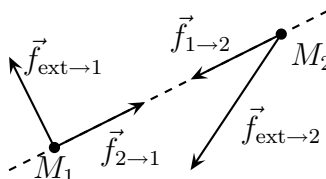
Soit un système  $\mathcal{S}$  étudié dans le référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque et  $\Delta$  un axe fixe de  $\mathcal{R}$ , alors :

$$\frac{d\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- $\sigma_{\Delta|\mathcal{R}}(\mathcal{S})$  est le moment cinétique scalaire du système  $\mathcal{S}$  par rapport à  $A$  dans  $\mathcal{R}$
- $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{\text{ext}})$  est le moment scalaire total exercé par les forces extérieures.

#### ★ démonstration

- ◇ Rappelons la situation.



- ◇ Écrivons d'abord le TMC pour les deux points matériels :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_1)}{dt} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ \frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_2)}{dt} = \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

◇ Additionnons les deux relations et manipulons :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_1)}{dt} + \frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_2)}{dt} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$$

◇ Avec la 3<sup>e</sup> loi de Newton  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_2) \right) &= \sum \vec{M}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) + \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} - \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ &= \mathcal{M}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) + \underbrace{(\overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AM_2})}_{\overrightarrow{M_2M_1}} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \end{aligned}$$

◇ Et avec le 2<sup>e</sup> aspect de la 3<sup>e</sup> loi de Newton  $\vec{f}_{1 \leftrightarrow 2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$  :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) + \vec{0}$$

### II.3.ii – lecture

- ◇ Tout d'abord, et contrairement au TCI, le point qui subit la force, le « point d'application » a une importance considérable dans cette loi : il **faut** correctement placer les forces sur le schéma sans quoi nous risquons de nous tromper dans son application.
- ◇ Comme pour le TCI, les interactions intérieures ne permettent pas de modifier le moment cinétique d'un système. Le moment cinétique ne doit pas être confondu avec la vitesse de rotation : à moment cinétique constant, lorsque deux points se rapprochent en tournant l'un autour de l'autre, la vitesse de rotation augmente (tout comme la patineuse tourne plus vite sur elle-même lorsque rapproche les bras de son corps). En revanche, une fois isolé (comme par exemple lors d'une chute libre sur une courte distance – de l'ordre de quelques mètres –), un système ne peut se mettre globalement à tourner s'il n'a pas commencé à le faire au début ! Les acrobaties en voltige se jouent donc en grande partie à l'impulsion !
- ◇ Contrairement au TCI, il est important et même fondamental de connaître la position des points qui subissent les forces extérieures.

### II.3.iii – liaison et moment d'axe

- ◇ Comment traduire en terme de moment les liaisons de rotation (pivot ou pivot-glissant) ?

#### ★ rotation sans frottement

Lorsqu'un objet tourne sans frottement autour d'un axe, l'axe exerce un moment nul sur cet objet.



- ◇ C'est tout à fait normal : sans frottement, l'axe n'a aucune influence sur la rotation. Il faut donc que ces actions n'interviennent pas dans le TMC, *ie.* que leur moment soit nul.

### ★ rotation avec frottements

Lorsqu'un objet tourne avec frottement autour d'un axe à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

- frottements fluides :  $\vec{\Gamma} = -\lambda \vec{\Omega}$
- frottements solides :
  - $\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma_0 = C^{\text{te}}$  et  $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} < 0$  lorsque  $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$
  - $\|\vec{\Gamma}\| \leq \Gamma_0$  lorsque  $\vec{\Omega} = \vec{0}$

- ◇ Là aussi la forme est tout ce qu'il y a de plus normal :

- une grandeur constante pour des frottements de type solide lorsque l'objet tourne, une grandeur proportionnelle à la vitesse angulaire pour des frottements fluides
- un moment de frottement qui s'oppose à la rotation : quand  $\Omega > 0$ ,  $\Gamma < 0$  et donc la vitesse angulaire diminue

### ★ rotation motrice

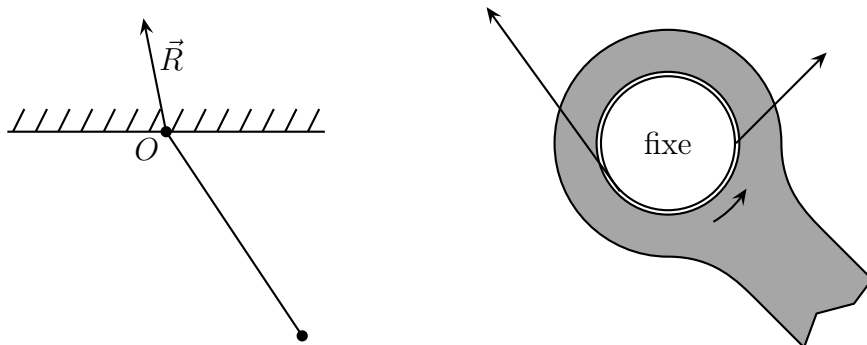
Lorsqu'un objet est entraîné par un moteur à tourner autour d'un axe à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

$$\|\vec{\Gamma}_m\| = \Gamma_m = C^{\text{te}} \quad \text{avec} \quad \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} > 0$$

- ◇ Interprétation analogue à la précédente : lorsque  $\Omega > 0$ ,  $\Gamma > 0$  et  $\Omega$  a tendance à augmenter. C'est bien l'effet d'un moteur.

### ★ attention à l'interprétation

- ◇ Il faut faire attention au moment exercé par un axe. En effet, il est possible de se faire piéger par la représentation.



- ◇ Sur le premier schéma, nous pourrions croire que le moment exercé par l'axe en  $O$  est nulle car le point d'application de la réaction  $\vec{R}$  est en  $O$ , ce qui implique  $\mathcal{M}_O(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ .
- ◇ En réalité, le premier schéma n'est qu'un schéma et simplifie la liaison entre l'objet et l'axe.
- ◇ En regardant de plus près, nous pouvons voir que les réactions d'axes n'ont pas de raison d'avoir un moment nul car elles ne s'exercent pas en un point infiniment fin au centre de l'axe.

Dans le cas d'une liaison d'axe, il ne faut pas déterminer le moment exercé par l'axe en s'aidant du schéma mais de manière physique, suivant la nature de la liaison.

### II.3.iv – cas particulier du poids – point d'application

#### ★ point d'application du poids

◇ Calculons la résultante des moments des poids de  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) &= \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}_1) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}_2) = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{g} \\ &= (m_1 \overrightarrow{AM_1} + m_2 \overrightarrow{AM_2}) \wedge \vec{g} = m_{\text{tot}} \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \overrightarrow{AG} \wedge m_{\text{tot}} \vec{g}\end{aligned}$$

◇ Tout se passe, du point de vue de la rotation, comme si le poids total de l'ensemble du système s'exerçait en  $G$ .

Le point d'application  $C$  d'un ensemble de forces  $\vec{f}_i$  est le point virtuel où la résultante des forces doit s'exercer pour avoir le même effet rotatoire que la résultante des moments de chaque force :

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_i) = \sum \left( \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i \right) \triangleq \overrightarrow{AC} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right)$$

◇ Il ne faut pas s'offusquer du caractère « virtuel » du point d'application. En effet ce point n'existe pas plus que le centre de masse, point virtuel s'il en est (il n'y a qu'à songer au centre de masse d'un cerceau pour s'en persuader.)

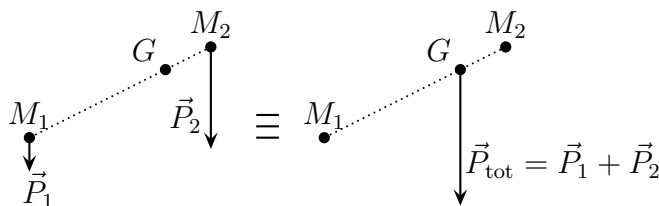
☞ le point d'application est en général défini pour un ensemble de forces de même nature (point d'application du poids, des forces de pression, ...)

Le point d'application du poids est confondu avec le centre de masse  $G$ .

STOP nous avons bien dit « du poids » et pas « de l'interaction gravitationnelle ».

#### ★ interprétation

◇ Avec la relation ci-dessus, nous constatons donc que, pour calculer le moment de l'ensemble des poids qui s'exercent sur le système, nous pouvons « simplement » calculer le moment du poids total en considérant qu'il s'exerce en  $G$ .



STOP lors du calcul du moment des poids, nous pourrions donc choisir :

→ soit de calculer les deux moments des deux poids de  $M_1$  et  $M_2$

→ soit de calculer le moment du poids total qui s'exerce en  $G$

- ◇ Les deux approches sont rigoureusement équivalentes du point de vue de la physique (nous venons de le montrer). Lorsque le système aura un mouvement d'ensemble, la 2<sup>e</sup> approche sera plus naturelle et donc facilitera l'étude. En revanche lorsque le système aura plusieurs parties relativement indépendantes, la première approche conduira à des relations plus simples.

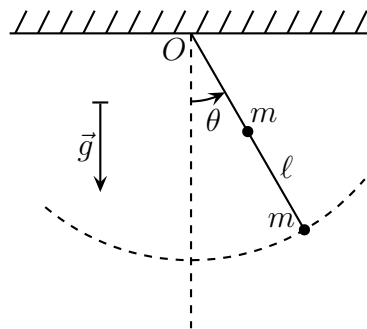
### ★ une conclusion à ne pas généraliser

- ◇ Si nous pouvons définir le point d'application pour n'importe quel type de force, il ne faut pas généraliser le fait que le point d'application soit toujours  $G$ !

## II.3.v – pendule rigide lesté

### ★ dispositif – analyse

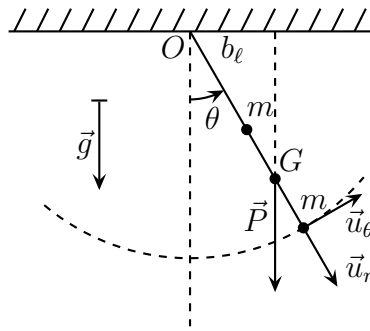
- ◇ Considérons une tige sans masse de longueur  $\ell$  sur laquelle sont fixées deux masses  $m$  à  $\frac{\ell}{2}$  et à  $\ell$ .



- ◇ Analyse physique :
- le pendule va osciller, entraîné entre autre par son poids
  - le mouvement est plan et à un degré de description, le mouvement circulaire
  - les phénomènes vont dépendre de  $m$ ,  $\ell$ ,  $g$
- ◇ Analyse technique :
- c'est un mouvement circulaire donc coordonnées cylindro-polaire
  - avec un mouvement conservatif, tout nous incite à une approche énergétique. Faisons plutôt pour nous entraîner une approche en terme de forces, *ie.* avec le TMC puisqu'il s'agit d'un mouvement de rotation

### ★ équation d'évolution

- ◇ Quel système choisir ?
- en réduisant le système à  $\{ m \}$ , nous devons parler de la force que la tige exerce sur  $m$ , or il s'agit d'une force de liaison rigide dont nous ne connaissons strictement rien
  - agrandissons le système à  $\{ m + \text{tige} + m \}$ , il s'agit alors d'un système de nombreux points (ceux qui constituent la tige) mais dont deux seulement possèdent une masse
- ◇ Les forces *extérieures* agissant sur le système sont :
- force à distance : les poids s'exerçant sur les deux masses
  - force de contact : les frottements sont négligés
  - force de contact : l'action de l'axe  $\vec{R}$
- ◇ Comme le pendule a un mouvement d'ensemble, introduisons le centre de masse.



✧ Nous n'avons pas besoin de parler des forces qui permettent de tenir les masses  $m$  sur la tige car ce sont des interactions intérieures.

✧ Le TMC s'écrit donc :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R})$$

✧ Comme la masse de la tige est nulle, son moment cinétique l'est aussi et donc :

$$\sigma_{\Delta}(\mathcal{S}) = \sigma_{\Delta}(M_1) + \sigma_{\Delta}(M_2) + \sigma_{\Delta}(\text{tige}) = \left(\frac{\ell}{2}\right) m \frac{\ell}{2} \dot{\theta}(t) + \ell m \ell \dot{\theta}(t) + 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\sigma_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \frac{5}{4} m \ell^2 \ddot{\theta}(t)$$

✧ De plus  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \pm (2m) g b_{\ell} = -2m g \frac{3}{4} \ell \sin \theta = -\frac{3}{2} m g \ell \sin \theta$

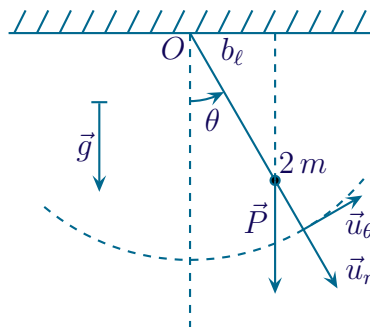
✧ Enfin le moment de la réaction d'axe est nulle, ce qui donne  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$  et donc :

$$\frac{5}{4} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) = -\frac{3}{2} m g \ell \sin \theta(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{6}{5} \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

### ★ un dispositif non équivalent

✧ Et si nous avons concentré toute la masse en  $G$  ?

✧ Alors nous aurions eu



✧ Il s'agit d'un pendule rigide usuel dont l'équation d'évolution aurait été :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\frac{3}{4}\ell} \sin \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{4g}{3\ell} \sin \theta(t) = 0$$

✧ Comme nous pouvons le voir l'équation est différente !

✧ La raison est que le système équivalent proposé l'est effectivement pour la translation mais pas pour la rotation. Or ici le système  $\{ m + m + \text{tige} \}$  tourne sur lui-même !

## II.4 – Théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}^*$

### II.4.i – approche systémique de la rotation – théorème de K ENIG

★ un résultat particulier dans  $\mathcal{R}^*$

🗨 énoncé

  Le moment cinétique d'un système dans le référentiel barycentrique est indépendant du point par rapport auquel il est calculé. Ainsi, quels que soient les points  $A$  et  $B$  :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \vec{\sigma}_{B|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S})$$

🗨 démonstration

  Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) &= \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}^*}(M_1) + \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}^*}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\ &= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* && \text{définition de } \vec{\sigma}_i^* \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1}) \wedge m_1 \vec{v}_1^* + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_2}) \wedge m_2 \vec{v}_2^* && \text{CHASLES} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge (m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^*) + \overrightarrow{BM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* && \text{regroupement} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) + \vec{\sigma}_{B|\mathcal{R}^*}(M_1) + \vec{\sigma}_{B|\mathcal{R}^*}(M_2) && \text{définitions} \\ &= \vec{0} + \vec{\sigma}_{B|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) && \text{car } \vec{p}^* = \vec{0} \end{aligned}$$

  Pour ces raisons, nous noterons, quel que soit le point  $A$  :  $\vec{\sigma}^* \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\sigma}_A^*$ .

★  $\vec{\sigma}_G$  et  $\vec{\sigma}_G^*$ , plus qu'un point en commun

🗨 énoncé

  Pour un système de points, nous avons :

$$\vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S})$$

🗨 démonstration

  Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) &= \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\ &= \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 && \text{définition de } \vec{\sigma}_{G(M_i)} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge m_1 (\vec{v}_G + \vec{v}_1^*) + \overrightarrow{AG} \wedge m_2 (\vec{v}_G + \vec{v}_2^*) && \text{loi de composition des vitesses} \\ &= (m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2}) \wedge \vec{v}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* && \text{regroupement} \\ &= \vec{0} \wedge \vec{v}_G + \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^* && \text{définitions} \\ &= \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

## ★ un premier théorème de Kœnig

## 🔊 énoncé

Soit un système  $\mathcal{S}$  étudié dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire pour tout point  $A$  :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) + \vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S})$$

✧ Ce théorème permet de calculer autrement qu'avec l'extensivité le moment cinétique total d'un système de point. Il n'est jamais ni indispensable ni obligatoire mais se révèle parfois fort utile pour faciliter les calculs.

## 🔊 démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) &= \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\ &= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 && \text{définition de } \vec{\sigma}_G(M_i) \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_1}) \wedge m_1 \vec{v}_1 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2 \vec{v}_1 && \text{CHASLES} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 && \text{regroupement} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) + \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) && \text{définitions} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) + \vec{\sigma}_{G|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) && \text{propriétés vues précédemment} \end{aligned}$$

## 🔊 lecture

✧ Comme annoncé plus haut, pour le moment cinétique :

Un système de point ne se comporte pas comme un point unique en  $G$  où toute la masse serait concentrée.

✧ Si tel était le cas nous aurions  $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ , ce qui est **faux** dans le cas général.

## II.4.ii – théorème du moment cinétique barycentrique

## ★ énoncé

Soit un système  $\mathcal{S}$  étudié dans son référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  associé, alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*(\mathcal{S})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

→  $\vec{\sigma}^*(\mathcal{S})$  est le moment cinétique du système  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{R}^*$

→  $\sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}})$  est le moment des forces extérieures par rapport à  $G$  qui s'appliquent dans le référentiel  $\mathcal{R}$

✧ En d'autres termes, il ne **faut pas** compter les forces d'inerties due au caractère non galiléen du référentiel barycentrique. En revanche, si  $\mathcal{R}$  est non galiléen, il faut compter les forces d'inertie liées au mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à un référentiel galiléen  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

★ **démonstration**

◇ Considérons un point  $A$  quelconque fixe dans  $\mathcal{R}$  et écrivons le TMC par rapport à  $A$  :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}(\mathcal{S})}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \quad \text{où} \quad \vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})} + \vec{\sigma}^* \quad \text{et} \quad \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \sum (\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i)$$

◇ Calculons chaque terme séparément.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}(\mathcal{S})}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})} + \vec{\sigma}^* \right) \\ &= \frac{d\overrightarrow{AG}}{dt} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})} + \overrightarrow{AG} \wedge \frac{d\vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})}}{dt} + \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \\ &= \vec{v}_{|\mathcal{R}(G)} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})} + \overrightarrow{AG} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right) + \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AG} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right) + \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \end{aligned}$$

◇ Car  $\vec{v}_{|\mathcal{R}(G)}$  et  $\vec{p}_{|\mathcal{R}(\mathcal{S})} = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}(G)}$  sont colinéaires.

◇ L'autre terme maintenant :

$$\begin{aligned} \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_i) &= \sum \left( \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i \right) = \sum \left( (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i}) \wedge \vec{f}_i \right) \\ &= \sum \left( \overrightarrow{AG} \wedge \vec{f}_i \right) + \sum \left( \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{f}_i \right) = \overrightarrow{AG} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right) + \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_i) \end{aligned}$$

◇ En rassemblant :

$$\cancel{\overrightarrow{AG} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right)} + \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \cancel{\overrightarrow{AG} \wedge \left( \sum \vec{f}_i \right)} + \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_i) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_i)$$

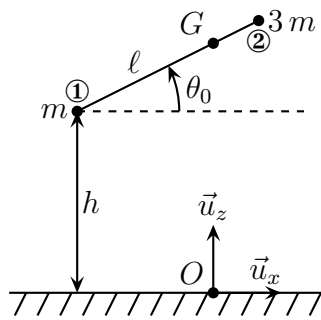
★ **interprétation**

◇ En fait l'interprétation est très naturelle : le mouvement propre (caractérisé par  $\vec{\sigma}^*$ ) n'est influencé que par les forces extérieures  $\sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_i)$  et non par lui-même puisque nous ne devons pas compter les forces d'inertie liées au caractère non galiléen du référentiel barycentrique.

## II.4.iii – chute d'un marteau, fin

★ **rappels**

◇ Le modèle utilisé était le suivant.

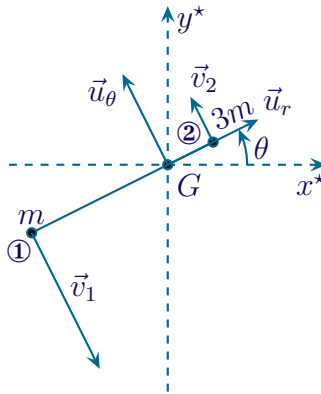


◇ Nous avons déjà trouvé :

$$z_G(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h + \frac{3}{4} \ell \sin \theta_0 \quad \text{et} \quad x_G(t) = 0$$

### ★ mouvement propre

◇ Pour faire l'étude dans  $\mathcal{R}^*$ , il vaut mieux refaire un schéma dans le repère définissant  $\mathcal{R}^*$ .



◇ Dans ce référentiel, les masses  $M_1$  et  $M_2$  ont des trajectoires circulaires (pas forcément uniformes), ce qui permet d'avoir directement, en adaptant la formule «  $\vec{\sigma} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$  » :

$$\vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(M_1) = m \left( \frac{3}{4} \ell \right)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(M_2) = 3m \left( \frac{1}{4} \ell \right)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^*$$

◇ Ce qui donne :

$$\vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(M_1) + \vec{\sigma}_{|\mathcal{R}^*}(M_2) = \frac{9}{16} m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* + \frac{3}{16} m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* = \frac{3}{4} m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^*$$

◇ De plus nous savons que

$$\frac{d\vec{\sigma}^*(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{M}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) = \overrightarrow{GG} \wedge 4m \vec{g} = \vec{0}$$

◇ Nous en déduisons  $\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{C^{\text{te}}}$  ou encore  $\dot{\theta}(t) = C^{\text{te}}$ . Reste à déterminer la constante.

◇ À tout instant nous avons, d'après la loi de composition des vitesses,  $\vec{v}_1^*(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_G(t)$ . Cette relation utilisée à l'instant particulier initial donne  $\vec{v}_1^*(0) = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_G(0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$  et nous obtenons ainsi  $\dot{\theta}(t) = 0$ .

◇ Finalement  $\boxed{\theta(t) = C^{\text{te}} = \theta_0}$ .



## ★ conclusion

- ◇ Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, le marteau ne tourne pas en tombant : son inclinaison reste tout le temps identique. Comme nous le savons depuis l'étude de la chute libre, chaque point matériel chute avec la même vitesse. C'est aussi le cas ici : les masses  $m$  et  $3m$  tombent de conserve, la tige ne servant « à rien ».

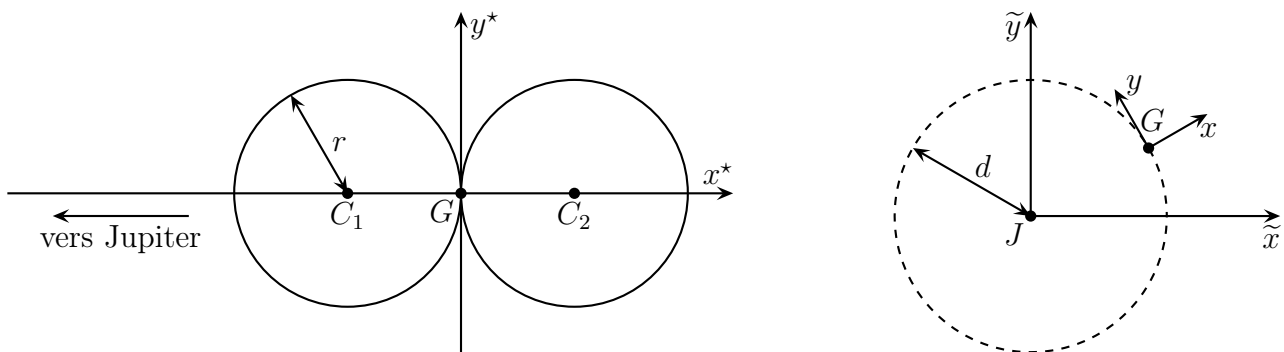
Le poids ne permet pas d'influencer la rotation propre.

- ◇ Pour espérer une rotation du marteau, il faut inclure les forces de frottements. Celles-ci, verticales vers le haut (opposées à la vitesse de chute) s'exerce à peu près uniformément sur toute la tige (car elles sont proportionnelles à la surface). Nous comprenons donc qu'elles appuient (cf. schéma précédent) plus « à gauche » qu'« à droite » du centre de masse. Elles ont donc tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, *ie.* à faire que la masse  $3m$  tombe en premier.

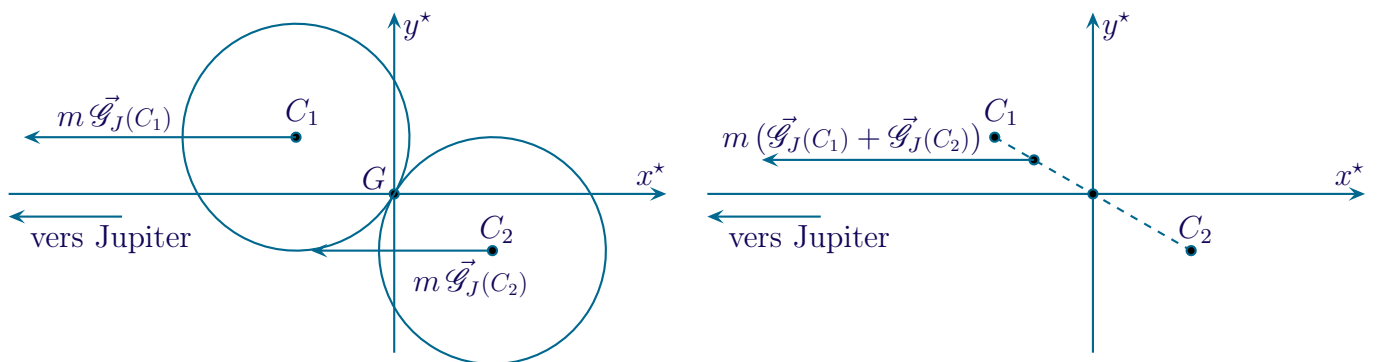
## II.4.iv – stabiliser SHÖMAKER – LEVY 9

## ★ modélisation

- ◇ Nous avons modélisé la comète par deux sphères accolées qui tournaient de conserve.



- ◇ Imaginons que la rotation propre ne soit pas totalement synchrone avec le mouvement circulaire autour de Jupiter et analysons les forces en présence.



- ◇ Ici, le référentiel barycentrique est bien aligné avec  $\mathcal{R}$  qui est non galiléen :  $\mathcal{R}^*$  est donc en rotation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Nous pouvons facilement voir que le bras de levier est le même pour les deux forces de gravitation s'exerçant sur  $C_1$  et  $C_2$ . En revanche, comme  $C_1$  est plus proche que  $C_2$  le moment est plus intense. L'ensemble des forces de gravitation permet donc de ramener dans l'axe  $(Gx)$  les deux sphères.

- ✧ Nous voyons donc que les forces de gravitation, contrairement au poids, permettent de faire tourner un objet. En fait tout se passe comme si la gravitation s'exerçait en un point  $C$  situé entre  $C_1$  et  $C_2$  mais un peu plus près de  $C_1$ .

Le *centre de gravité* est le point d'application des forces de gravitation.

- ✧ Pour que le centre de gravité soit différent du centre de masse, il faut faire appel à des termes de marée, *ie.* cela concerne des objets étendus dans un champ de gravitation non uniforme.

## III – Aspect énergétique

### III.1 – Théorème de l'énergie cinétique

#### III.1.i – loi

##### ★ énoncé

Soit un système  $\mathcal{S}$  étudié dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque :

$$\frac{dE_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}_{\text{int}} \quad \text{où :}$$

- $\sum \mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2)$  est la puissance fournie par les forces extérieures à l'ensemble des points matériels ;
- $\sum \mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2)$  est la puissance fournie par les interactions intérieures.

##### ★ démonstration

◇ Il suffit de sommer les deux TPC appliqués à  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\begin{cases} \frac{dE_{c|\mathcal{R}}(M_1)}{dt} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \\ \frac{dE_{c|\mathcal{R}}(M_2)}{dt} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) \end{cases}$$

#### III.1.ii – lecture

◇ L'**énorme** différence avec les théorèmes qui précèdent (TCI et TMC) c'est qu'ici, pour les théorèmes énergétiques, il **faut** prendre en compte les interactions intérieures. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \\ &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1)) = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left( \frac{d\vec{OM}_2}{dt} - \frac{d\vec{OM}_1}{dt} \right) \\ &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{d\vec{M_1M_2}}{dt} \end{aligned}$$

◇ Ce dernier terme n'étant pas nul *a priori*.

◇ Ce théorème énergétique permet d'expliquer la différence de comportement bien connue entre une 2CV et une Ferrari au démarrage : la puissance intérieure à la Ferrari étant plus grande que celle de la 2CV, la dérivée de son énergie cinétique sera plus grande, *ie.* son énergie cinétique augmentera plus vite, *ie.* elle accélère « plus ». Insistons : si tant est que la force que la route peut exercer sur elle le lui permette (route non verglacée, pneus adaptés).

### III.1.iii – le calcul de $W_{\text{int}}$ se fait dans n'importe quel référentiel

#### ★ résultat

Le calcul des travaux fournis par les interactions intérieures est indépendant du référentiel dans lequel ils sont calculés.

#### ★ démonstration

◇ Nous allons montrer que  $\mathcal{P}_{\text{int}} = \widetilde{\mathcal{P}}_{\text{int}}$  avec :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{P}}_{\text{int}} &= \widetilde{\vec{f}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_1)) \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1)) \end{cases}$$

#### 🔗 au niveau des forces

- ◇ L'invariance galiléenne des forces donne  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \widetilde{\vec{f}}_{1 \rightarrow 2}$  : l'interaction entre  $M_1$  et  $M_2$  est la même quel que soit le référentiel envisagé.
- ◇ Rappelons que les seules forces à être non invariantes par changement de référentiel sont les forces d'inertie qui ne sont pas des interactions intérieures.
- ◇ Nous savons donc maintenant que  $\widetilde{\mathcal{P}}_{\text{int}} = \widetilde{\vec{f}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_1))$ .

#### 🔗 au niveau des vitesses

◇ La loi de composition des vitesses donne :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_2) &= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(O) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM_2} + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) \\ \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_1) &= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(O) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM_1} + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \end{aligned}$$

◇ En soustrayant les deux relations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_1) &= \vec{0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{R}}} \wedge (\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \\ &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \end{aligned}$$


◇ Et ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathcal{R}}}(M_1)) &= \underbrace{\vec{f}_{1 \rightarrow 2}}_{\parallel \overrightarrow{M_1M_2}} \cdot \underbrace{(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\widetilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{M_1M_2})}_{\perp \overrightarrow{M_1M_2}} + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1)) \\ &= 0 + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1)) \end{aligned}$$

◇ Et le résultat.

### ★ conséquence pratique

- ✧ Pour déterminer des travaux fournis par des interactions intérieures, nous pourrions nous placer dans n'importe quel référentiel, même si ce n'est pas celui correspondant à l'étude, même si ce référentiel est très « non galiléen ».

 nous ne pouvons nous placer dans n'importe quel référentiel **uniquement** pour calculer des travaux fournis par une **interaction intérieure** ! Nous ne pouvons pas le faire ni pour calculer le travail fourni par une seule force intérieure comme par exemple  $W_{12} = \int \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{r}_2$  (mais ce cas n'aurait aucun intérêt car il faudrait toujours calculer  $W_{21}$ ) ni pour calculer le travail fourni par une force extérieure.

### ★ conséquence fondamentale



L'énergie fournie par une interaction intérieure est une grandeur intrinsèque.

- ✧ C'est donc quelque chose que nous pouvons interpréter physiquement.
- ✧ Nous devons nous méfier des interprétations énergétiques où seul un des acteurs de l'interaction est en jeu.

## III.1.iv – $\mathcal{P}_{\text{int}}$ pour un solide

### ★ un résultat à connaître

Un système de deux points matériels est dit *solide* lorsque la distance entre ses deux points est constante :  $\|\vec{M_1 M_2}\| = C^{\text{te}}$ .

-  *Remarque* : pour un système de plus que deux points matériels, il faut que la distance entre chaque paire de points soit constante.
- ✧ En fait un solide n'est ni plus ni moins qu'un système indéformable dont la seule possibilité est de se translater et de tourner sur lui-même.
-  une association de deux solides n'est pas un solide ! À partir du moment où il y a déformation, nous ne pouvons plus parler de solide.

Pour un système solide la puissance des interactions intérieures est nulle, *ie.*

$$\sum \mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \quad \text{et} \quad \sum W_{\text{int}} = 0$$

### ★ démonstration

- ✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\sum \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} && \text{relation précédente} \\
&= \lambda(t) \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} && 3^{\text{e}} \text{ loi de NEWTON} \\
&= \lambda(t) \times \frac{1}{2} \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}^2}{dt} \\
&= \lambda(t) \times \frac{1}{2} \frac{dC^{\text{te}}}{dt} && \text{définition du solide} \\
&= 0
\end{aligned}$$

◇ Le travail fourni par les interactions intérieures étant la somme des travaux élémentaires, il ne peut qu'être nul aussi :

$$W_{\text{int}} = \int \delta W_{\text{int}} = \int \mathcal{P}_{\text{int}}(t) dt = \int 0 dt = 0$$

Un solide ne dissipe ni ne crée d'énergie.

## III.2 – Théorème de l'énergie mécanique

### III.2.i – une écriture sans surprise

#### ★ théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque, pour un système  $\mathcal{S}$  dont le point  $M_1$  évolue sur la trajectoire  $A_1 B_1$  pendant que  $M_2$  évolue sur  $A_2 B_2$ , nous avons

$$\Delta E_{\text{m}|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum W_{\text{nc,ext}} + \sum W_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

- $E_{\text{m}|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = E_{\text{c}|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) + E_{\text{p,ext}}(\mathcal{S}) + E_{\text{p,int}}(\mathcal{S})$  est l'énergie mécanique du système ;
- $E_{\text{p,ext}}(\mathcal{S})$  est l'énergie potentielle associée aux forces extérieures ;
- $E_{\text{p,int}}(\mathcal{S})$  est l'énergie potentielle interne associée aux interactions intérieures ;
- $\sum W_{\text{nc,ext}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} \cdot d\vec{r}_2$  est le travail fourni par les forces extérieures non conservatives ;
- $\sum W_{\text{nc,int}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{r}_2$  est le travail fourni par les interactions intérieures non conservatives.

#### ★ démonstration

◇ Partons du TEC pour un système et tant pour les forces extérieures que pour les interactions intérieures, écrivons les travaux fournis en séparant ceux fournis par des forces conservatives et ceux fournis par des forces non conservatives :

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{c,ext}} + W_{\text{nc,ext}} \quad \text{et} \quad W_{\text{int}} = W_{\text{c,int}} + W_{\text{nc,int}}$$

◇ Ensuite nous avons, par définition de l'énergie potentielle :

$$W_{\text{c,ext}} = -\Delta E_{\text{p,ext}} \quad \text{et} \quad W_{\text{c,int}} = -\Delta E_{\text{p,int}}$$

◇ En regroupant les énergies potentielles avec l'énergie cinétique, nous arrivons bien au TEM.

### ★ théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque, pour un système  $\mathcal{S}$ , nous avons :

$$\frac{dE_{\text{m}|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{nc,ext}} + \sum \mathcal{P}_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

- $\sum \mathcal{P}_{\text{nc,ext}} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2)$  est la puissance fournie par les forces extérieures non conservatives ;
- $\sum \mathcal{P}_{\text{nc,int}} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2)$  est la puissance fournie par les interactions intérieures non conservatives.

### ★ démonstration

◇ Il suffit de dériver par rapport au temps le TEM.

### ★ utilisation

- ◇ Comme pour la mécanique du point, dans la « philosophie » de ces théorèmes, le TEM est plus destiné à faire trouver une vitesse car il s'agit d'un loi globale (c'est un bilan énergétique) alors que le TPM a davantage vocation à établir une équation différentielle régissant l'évolution du système car c'est une loi locale (« locale » au sens temporel : elle établit une relation à  $t$  et uniquement  $t$ ).
- ◇ L'utilisation de ces deux théorèmes, pour des systèmes, n'est pas forcément simple, elle est même plutôt complexe :
  - définir le système ;
  - faire la liste **complète** des forces extérieures et des interactions intérieures ;
  - exprimer les éventuelles énergies potentielles ;
  - justifier le travail nul des interactions intérieures.
- ◇ En utilisant ces théorèmes avec méthode, nous constaterons toutefois qu'ils se révèlent **faciles** d'utilisation et même, pour les systèmes à un seul degré de description, extrêmement puissants et rapides !

## III.2.ii – cas particulier du poids

◇ Comme le poids s'exerce en  $M_1$  et en  $M_2$ , l'énergie potentielle associée vaut, en prenant le repérage idoine :

$$\begin{aligned} E_{\text{pp}}(\mathcal{S}) &= E_{\text{pp}}(M_1) + E_{\text{pp}}(M_2) = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \\ &= g (m_1 z_1 + m_2 z_2) = m_{\text{tot}} g z_G \\ &= m_{\text{tot}} g h_G \end{aligned}$$

Pour le poids, tant du point de vue des forces que du point de vue énergétique, tout se passe comme si le système était concentré en  $G$ .

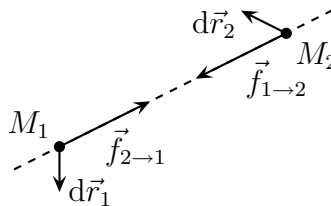
- ◇ Comme précédemment, nous aurons le choix entre une vision systémique (la masse est concentrée en  $G$ ) et une vision particulière (point par point).

### III.2.iii – déterminer rapidement une $E_{p,int}$

#### ★ le problème et sa solution

- ◇ Il faut trouver une énergie potentielle  $E_{p,int}$  telle que :

$$\delta W_{int} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(r) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r) \cdot d\vec{r}_2 = -dE_{p,int} \quad \text{avec} \quad r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$



- ◇ Les intégrations résultantes de la relation précédente n'étant pas, en général, aisées, nous allons utiliser la propriété selon laquelle le travail des interactions intérieures peut se faire dans n'importe quel référentiel. Ici nous allons choisir le référentiel  $\mathcal{R}$  tel que :

- $M_1$  soit l'origine de  $\mathcal{R}$  ;
- $M_1 M_2$  définisse l'axe  $\vec{u}_x$ .

- ◇ Dans ces conditions, les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont simples :

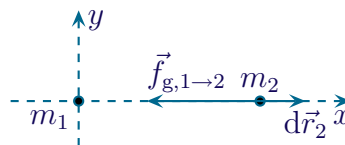
- $M_1$  est immobile
- $M_2$  a une trajectoire rectiligne

- ◇ Nous avons alors  $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = r_2 \stackrel{\text{not}}{=} x$ , le calcul se réduit à :

$$-dE_{p,int} = f_{1 \rightarrow 2}(x) dx$$

#### ★ expression de $E_{p,grav}$

- ◇ Nous avons successivement :



$$dE_{p,grav} = -\delta W_{int} = -\vec{f}_{g,1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{r}_2 = +G \frac{m_1 m_2}{x^2} \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = G \frac{m_1 m_2}{x^2} dx$$

- ◇ Et ainsi :

$$\frac{dE_{p,grav}}{dx} = G \frac{m_1 m_2}{x^2} \quad \rightsquigarrow \quad E_{p,grav} = -G \frac{m_1 m_2}{x} + C^{te}$$

- ◇ La constante est choisie de manière conventionnelle : l'énergie potentielle est posée nulle lorsque la force est nulle. Ici la force est nulle à l'infini, il faut donc  $E_{p,grav}(\infty) = 0$  ce qui donne ici, en reprenant  $r = x$  :



L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle interne à un système de deux points de masses  $m_1$  et  $m_2$  séparés de  $r$  s'écrit :

$$E_{\text{p,grav,int}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

### ★ l'énergie potentielle interne n'est pas additive

- ◇ Lorsque nous considérons deux points matériels en interaction gravitationnelle :
  - en étudiant le système  $\mathcal{S}_1 = \{M_1\}$ , l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle subie par  $M_1$  (qui est ici une force extérieure) vaut  $E_{\text{p},1} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$  ;
  - en étudiant le système  $\mathcal{S}_2 = \{M_2\}$ , l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle subie par  $M_2$  (qui est ici une force extérieure) vaut  $E_{\text{p},2} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$  ;
  - en étudiant le système  $\mathcal{S} = \{M_1 + M_2\}$ , l'énergie potentielle associée à l'interaction gravitationnelle **interne** vaut :  $E_{\text{p,grav,int}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ .
- ◇ Nous constatons donc que l'énergie potentielle **interne** n'est pas additive, contrairement à l'énergie potentielle associée aux forces extérieures.
- ⊛ il est d'autant plus important de parler d'*interaction intérieure* plutôt que de forces intérieures. En effet, en comptant les forces intérieures, il peut être tentant de compter deux fois l'énergie potentielle (une fois pour chaque force), alors qu'en parlant d'interaction, nous avons tendance à ne lui associer qu'une seule énergie potentielle.
- ◇ Le paradoxe se lève aisément en constatant qu'en fait les expressions des énergies potentielles associées à  $\mathcal{S}_1 = \{M_1\}$  et  $\mathcal{S}_2 = \{M_2\}$  sont fausses car elles dépendent de la position de l'autre point, *ie.* du temps. Et comme une énergie potentielle ne doit pas dépendre du temps, cette expression est non valide ... à moins que l'autre point ne soit fixe.

### ★ expression de $E_{\text{p,int}}$ pour un ressort

- ◇ Le ressort est constitué d'une infinité de points, il n'est donc pas évident de calculer l'énergie potentielle associée. Toutefois nous admettrons et nous retiendrons le résultat suivant :

Lorsqu'un ressort de raideur  $k$  et de longueur naturelle  $\ell_0$  est inclus dans un système, il contient l'énergie potentielle interne :

$$E_{\text{p,int,él}} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

- ◇ La grande différence est que maintenant il est possible d'envisager des ressorts dont les deux extrémités bougent.

## III.2.iv – une utilisation bien moins difficile que prévue

- ◇ Nous allons voir un certain nombre de cas pour lesquels le calcul de  $W_{\text{int}}$  est aisé.
- ◇ Rappelons tout d'abord que  $\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1))$ .

### ★ cas d'une interaction intérieure à distance

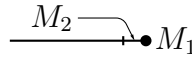
- ◇ Il ne peut s'agir que de l'interaction gravitationnelle ou de l'interaction coulombienne que nous verrons plus tard. Dans les deux cas, elles dérivent d'une énergie potentielle interne.

Pour une interaction intérieure à distance, nous pouvons écrire :

$$W_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{p,int}}$$

### ★ cas d'une interaction intérieure de contact entre deux points liés

◇ Il s'agit, par exemple, d'une masse attachée à une extrémité d'un fil, d'un ressort ...



◇ La masse et l'extrémité du fil sont toujours au même point.

◇ Nous avons donc à tout instant  $\vec{v}_{|R}(M_1) = \vec{v}_{|R}(M_2)$  et ainsi :  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .

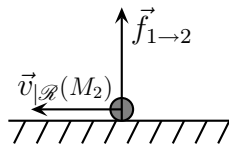
L'interaction entre deux points rigidement liés fournit une puissance nulle.

☞ *Remarque* : pour espérer  $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$ , il faut qu'il y ait du *glissement*.

◇ Nous pouvons retrouver ce résultat en considérant que dans un tel cas, les points  $M_1$  et  $M_2$  constituent un solide.

### ★ cas d'une interaction intérieure de contact sans frottement

◇ Regardons de près ce qu'il se passe au niveau du contact. Plaçons nous dans le référentiel où  $M_1$  est immobile.



◇ Étant donné que le contact se fait sans frottement, nous avons  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} \perp \vec{v}_{|R}(M_2)$  et ainsi  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .

### ★ conclusion à retenir et à utiliser directement

Toute liaison interne qui est :

→ avec frottement sans glissement ;

→ avec glissement sans frottement ;

fournit une puissance nulle au système dans lequel elle est.

Les glissements sans frottement et les engrenages ne dissipent ni n'apportent d'énergie.

### ★ et la voiture qui démarre ?

◇ Nous avons dit que la voiture avançait grâce à  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  dont nous savons qu'elle est fournie par le moteur. Sauf que dans le moteur, il n'y a que des pièces solides dont nous voulons diminuer les frottements. Cela donnerait donc des liaisons soit avec frottement sans glissement (courroie de transmission) soit des liaisons avec glissement sans frottement. Dans les deux cas, nous tendons vers  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$  ...

- ✧ Pour expliquer ce paradoxe, il faut admettre qu'il n'existe pas **que** des pièces solides dans le moteur, il existe aussi des parties élastiques : le mélange gazeux { air, carburant }. Ce mélange gazeux va se détendre (comme un ressort comprimé qu'on libère) lorsqu'il brûle. C'est de lui que vient, au fond, l'énergie !

## III.3 – Étudier un système de points

### III.3.i – analyse physique

- ✧ Lors de l'analyse physique, nous devons, comme précédemment :
- imaginer l'évolution temporelle du dispositif (*ie.* le voir bouger)
  - déterminer le nombre de degrés de description
  - repérer si l'évolution est conservative, libre, ...
  - déterminer les grandeurs caractéristiques de l'évolution
- ✧ En fait cela ne change pas tellement de l'analyse physique lorsqu'il n'y a qu'un point matériel.

### III.3.ii – analyse technique

- ✧ En plus du repérage, nous devons dans cette analyse choisir le système à étudier :
- pour déterminer des grandeurs globale, il est plus facile d'étudier un système naturel qui rassemble l'ensemble du dispositif
  - pour déterminer des grandeurs locale, il est souvent utile de décomposer le système en sous-système
- ✧ Une fois le choix du système effectué, il faut décider de la vision que nous aurons du système :
- plutôt une vision systémique lorsque le système voit toutes ses parties évoluer de conserve (ce qui est toujours le cas lorsque le système est un solide)
  - plutôt une vision particulière lorsque le système possède des parties aux évolutions sensiblement différentes

### III.3.iii – vision systémique de l'énergie cinétique – théorème de KœNIG

#### ★ énoncé

Pour tout système  $\mathcal{S}$  étudié dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire :

$$E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v_{|\mathcal{R}}^2(G) + E_{c|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S})$$

#### ★ démonstration

- ✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) &= E_{c|\mathcal{R}}(M_1) + E_{c|\mathcal{R}}(M_2) && \text{extensivité de } E_c \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_{|\mathcal{R}}^2(M_1) + \frac{1}{2} m_2 v_{|\mathcal{R}}^2(M_2) && \text{définition de } E_c \\
&= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_1) + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M_2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) + \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_1))^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) + \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_2))^2 && \text{loi de composition} \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_{|\mathcal{R}^*}^2(M_1) + \frac{1}{2} m_1 v_{|\mathcal{R}}^2(G) + m_1 \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_1) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 v_{|\mathcal{R}^*}^2(M_2) + \frac{1}{2} m_2 v_{|\mathcal{R}}^2(G) + m_2 \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_2) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_{|\mathcal{R}}^2(G) + \frac{1}{2} m_2 v_{|\mathcal{R}}^2(G) + \frac{1}{2} m_1 v_{|\mathcal{R}^*}(M_1) + \frac{1}{2} m_2 v_{|\mathcal{R}^*}(M_2) + \dots \\
&\quad + \underbrace{(m_1 \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_1) + m_2 \vec{v}_{|\mathcal{R}^*}(M_2))}_{\vec{p}_{|\mathcal{R}^*} = \vec{0}} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) && \text{regroupement} \\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{|\mathcal{R}}^2(G) + E_{c|\mathcal{R}^*}(\mathcal{S})
\end{aligned}$$

### ★ lecture

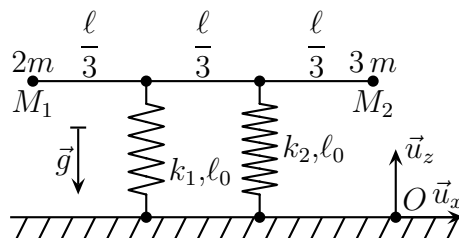
- ◇ Pour l'énergie cinétique, comme pour le moment cinétique, nous ne pouvons pas considérer que le système est assimilable à un point unique en  $G$  où serait concentrée toute la masse.

## III.4 – Exemples

### III.4.i – tige soutenue par des ressorts

#### ★ dispositif – analyse

- ◇ Deux masses  $2m$  et  $3m$  sont attachées aux extrémités d'une tige sans masse de longueur  $\ell$ , elle-même soutenue par deux ressorts de même longueur naturelle  $\ell_0$  et de constantes de raideur différentes  $k_1$  et  $k_2$  au tiers et au deux tiers de sa longueur (cf. schéma).
- ◇ Les mouvements sont suffisamment petits pour que nous puissions considérer les ressorts verticaux.



- ◇ Analyse physique :
- l'ensemble  $\{ m_1, m_2, \text{ tige } \}$  constitue un solide
  - il va osciller dans un plan vertical en tournant sur lui-même : c'est un dispositif à deux degrés de description
  - l'ensemble de l'évolution est libre et conservative
  - les grandeurs pertinentes sont  $m, \ell, g, k_1, k_2, \ell_0$ .

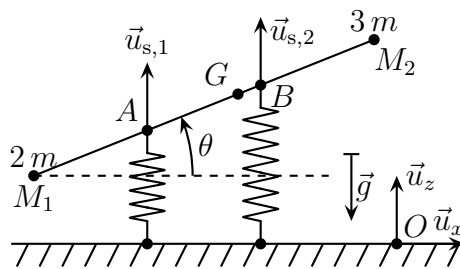
◇ Analyse technique :

- ici nous allons étudier la translation et le mouvement propre de manière séparée
- comme le dispositif fait naturellement apparaître un solide, nous allons utiliser une vision systémique et noter  $\mathcal{S}$  le système  $\{ m_1, m_2, \text{tige} \}$

### ★ éléments cinétiques de $\mathcal{S}$

◇ La position du centre de masse est telle que :

$$M_1 G = \frac{3m}{3m+2m} M_1 M_2 = \frac{3}{5} \ell$$



◇ En notant  $A$  et  $B$  les points de fixations des ressorts 1 et 2, nous avons :

$$AG = M_1 G - M_1 A = \frac{3}{5} \ell - \frac{1}{3} \ell = \frac{4}{15} \ell \quad \text{et} \quad BG = M_2 G - M_2 B = \frac{2}{5} \ell - \frac{1}{3} \ell = \frac{1}{15} \ell$$

◇ Cela permet d'arriver à (en utilisant  $\sin \theta = \theta$  car les mouvements sont petits) :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_G(t) - \frac{3}{5} \ell \theta(t) & z_2(t) &= z_G(t) + \frac{2}{5} \ell \theta(t) \\ z_A(t) &= z_G(t) - \frac{4}{15} \ell \theta(t) & z_B(t) &= z_G(t) + \frac{1}{15} \ell \theta(t) \end{aligned}$$

### ★ mouvement d'ensemble

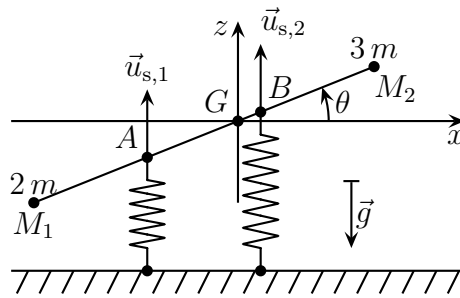
◇ Le TCI appliqué à  $\mathcal{S}$  donne :

$$\begin{aligned} 5m \vec{a}_G(t) &= 5m \vec{g} - k_1 (\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_{s,1} - k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_{s,1} \\ 5m \ddot{z}_G(t) &= -5m g - k_1 (\ell_1(t) - \ell_0) \times (+1) - k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) \times (+1) && \text{projection sur } \vec{u}_z \\ &= -5m g - k_1 (z_A(t) - \ell_0) - k_2 (z_B(t) - \ell_0) && \text{relations géométriques} \\ &= -5m g - k_1 \left( z_G(t) - \frac{4}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) - k_2 \left( z_G(t) + \frac{1}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) \\ 5m \ddot{z}_G(t) &= -(k_1 + k_2) z_G(t) + \frac{4k_1 \ell - k_2 \ell}{15} \theta(t) - 5m g + \ell_0 (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

◇ Nous aboutissons à une équation différentielle qui n'est pas soluble directement car elle concerne les deux grandeurs  $z_G(t)$  et  $\theta(t)$ .

★ mouvement dans  $\mathcal{R}^*$ 

## 🌀 TMCB



◇ Il s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}_1) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}_2)$$

🌀 expression de  $\vec{\sigma}^*$ 

◇ Comme dans  $\mathcal{R}^*$  les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont circulaires, en adaptant la formule  $\vec{\sigma} = m r^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z$ , nous obtenons directement :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\sigma}_1^* &= m_1 (GM_1)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* = 2m \left( \frac{2}{3} \ell \right)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* \\ \vec{\sigma}_2^* &= m_2 (GM_2)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* = 3m \left( \frac{1}{3} \ell \right)^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^* \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow \vec{\sigma}^* = \frac{6}{5} m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z^*$$

◇ Remarquons que  $\vec{u}_z^* = -\vec{u}_y$ .

## 🌀 expression des moments des forces

◇ Nous avons tout d'abord :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{0}$$

◇ Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}_1) &= \overrightarrow{GA} \wedge \vec{T}_1 = \frac{4}{15} \ell \left( \underbrace{-\cos \theta}_{=1} \vec{u}_x - \underbrace{\sin \theta}_{=\theta} \vec{u}_z \right) \wedge -k_1 (\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_z \\ &= \frac{4}{15} k_1 \ell (\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_z^* = \frac{4}{15} k_1 \ell \left( z_G(t) - \frac{4}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) \vec{u}_z^* \end{aligned}$$

◇ Et de même :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}_2) &= \vec{GB} \wedge \vec{T}_2 = \frac{1}{15} \ell \left( \underbrace{\cos \theta}_{=1} \vec{u}_x + \underbrace{\sin \theta}_{=\theta} \vec{u}_z \right) \wedge -k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_z \\
&= -\frac{1}{15} k_2 \ell (\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_z^* = -\frac{1}{15} k_2 \ell \left( z_G(t) + \frac{1}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) \vec{u}_z^*
\end{aligned}$$

### 🔗 rassemblement

✧ En projetant le TMC sur  $\vec{u}_z^*$  nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{6}{5} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) &= \frac{4}{15} k_1 \ell \left( z_G(t) - \frac{4}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) - \frac{1}{15} k_2 \ell \left( z_G(t) + \frac{1}{15} \ell \theta(t) - \ell_0 \right) \\
&= - \left[ \left( \frac{4}{15} \right)^2 k_1 \ell^2 + \left( \frac{1}{15} \right)^2 k_2 \ell^2 \right] \times \theta(t) + \frac{4 k_1 \ell - k_2 \ell}{15} \times z_G(t) - \frac{4 k_1 \ell - k_2 \ell}{15} \times \ell_0 \\
&= - \frac{16 k_1 \ell^2 + k_2 \ell^2}{225} \times \theta(t) + (z_G(t) - \ell_0) \times \frac{4 k_1 \ell - k_2 \ell}{15}
\end{aligned}$$

### ★ condition d'équilibre horizontal

✧ Cherchons la condition pour laquelle  $\theta_{\text{éq}} = 0$ .

✧ En reprenant l'équation provenant du TCI, nous trouvons :  $z_{G,\text{éq}} = \ell_0 - \frac{5 m g}{k_1 + k_2}$ .

✧ L'autre équation conduit, pour l'équilibre à :

$$0 = 0 + \underbrace{(z_{G,\text{éq}} - \ell_0)}_{\neq 0} \times \frac{4 k_1 \ell - k_2 \ell}{15} \rightsquigarrow \boxed{k_2 = 4 k_1}$$

### ★ découplage

✧ Avec la condition précédente, les deux équations différentielles trouvées s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} 5 m \ddot{z}_G(t) &= -(k_1 + k_2) z_G(t) - 5 m g + \ell_0 (k_1 + k_2) \\ \frac{6}{5} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) &= -\frac{16 k_1 \ell^2 + k_2 \ell^2}{225} \times \theta(t) \end{cases}$$

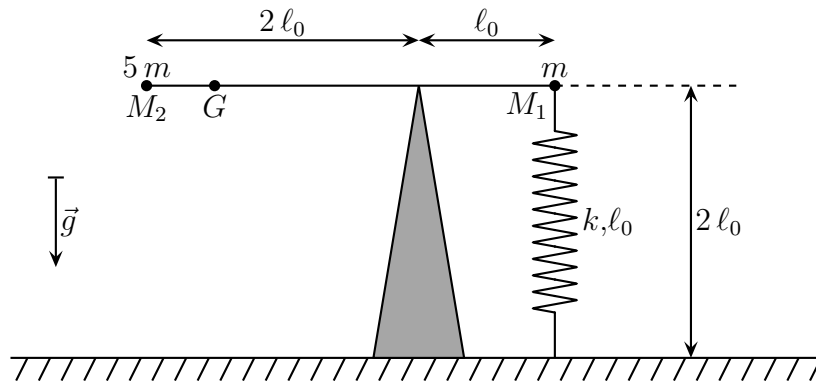
✧ Nous constatons alors que les deux degrés de description sont découplés et oscillent indépendamment l'un de l'autre.

✧ Cet exemple correspond à une modélisation simple de la suspension d'une voiture.

### III.4.ii – balance à ressort

#### ★ dispositif – analyse

◇ Considérons le dispositif suivant.



◇ Les deux masses  $m$  et  $5m$  sont reliées par une tige rigide et sans masse. L'ensemble peut tourner sans frottement au niveau du support. Le ressort est idéal.

◇ Analyse physique :

- il s'agit d'un système de plusieurs points matériel
- il n'y a qu'un degré de description, l'angle que forme la tige avec l'horizontal
- l'évolution est libre et conservative
- les grandeurs pertinentes sont de  $m$ ,  $\ell_0$ ,  $g$  et  $k$ .

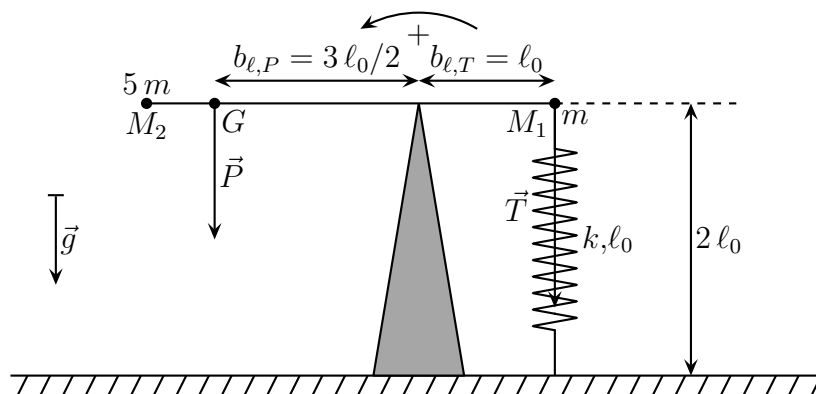
◇ Analyse technique :

- le mouvement principal est un mouvement de rotation autour de  $O$ , nous allons donc utiliser un repérage de type cylindro-polaire
- de plus comme l'ensemble se déplace de conserve, nous allons utiliser une approche systémique et nous allons noter  $\mathcal{S}$  le système  $\{ m + 5m + \text{tige} \}$
- le centre de masse  $G$  est à  $\frac{\ell_0}{6}$  de  $M_2$ .

#### ★ condition d'équilibre horizontal

◇ Étant donné que le mouvement est conservatif et à un degré de description, nous devrions utiliser l'approche énergétique. Mais nous allons utiliser l'approche en terme de forces, ou plutôt de moment, pour changer.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments qui s'exercent sur un système soit nulle.





- ◇ Les forces extérieures qui s'exercent sur le dispositif sont :
  - force à distance : le poids total qui s'exerce en  $G$  ;  $\vec{P} = 6m\vec{g}$
  - force de contact : l'action exercée par le ressort en  $M_1$  ;  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_s$
  - force de contact : la réaction d'axe
- ◇ Algébrisons le sens de rotation et représentons les forces qui s'exercent.
- ◇ Le moment exercé par le poids s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm P b_{\ell,P} = +6m g \frac{3}{2} \ell_0 = 9m g \ell_0$$

- ◇ Le moment exercé par la force exercée par le ressort s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = \pm T d_{\ell,T} = -k(2\ell_0 - \ell_0)\ell_0 = -k\ell_0^2$$

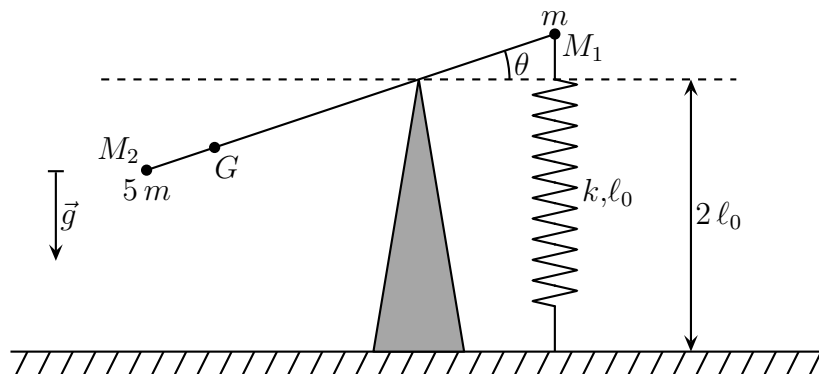
- ◇ Comme la réaction d'axe exerce un moment nul (pas de frottement) nous avons :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 9m g \ell_0 - k\ell_0^2 + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k\ell_0 = 9m g}$$

- ◇ Nous pouvons constater que la tension exercée par le ressort doit compenser bien plus que le poids. Cela est dû à l'effet des moments : plus une force s'exerce loin, plus elle a d'effet. Ici le poids s'exerce « plus loin » de l'axe que la force exercée par le ressort, son effet est donc plus important.

### ☆ petites oscillations

- ◇ Supposons la relation précédente vérifiée et cherchons la pulsation des petites oscillations.



- ◇ Dans cette partie, nous allons utiliser une approche énergétique sur  $\mathcal{S}$ . Faisons le bilan des forces extérieures et des interactions intérieures :
  - force à distance : le poids, conservatif  $E_{pp} = m_{\text{tot}} g h_G$
  - force de contact : la force exercée par le ressort, conservatif  $E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$
  - force de contact : l'action de l'axe de travail nul car sans frottement
  - interaction intérieure :
    - $\vec{f}_{M_1 \leftrightarrow \text{tige}}$  ne travaille pas car la liaison est rigide
    - $\vec{f}_{M_2 \leftrightarrow \text{tige}}$  ne travaille pas car la liaison est rigide
    - $\vec{f}_{\text{tige} \leftrightarrow \text{tige}}$  car la tige est un solide
- ◇ Nous pouvons écrire  $E_m(\mathcal{S}) = C^{\text{te}}$ .

### 🌀 énergie potentielle

- Il n'y a pas d'énergie potentielle interne donc l'énergie potentielle se réduit à  $E_{p,\text{tot}} = E_{p,p} + E_{p,\text{él}}$ .
- En notant la référence de l'énergie potentielle au niveau du point d'attache horizontal, nous avons :

$$z_G(t) = -\frac{3}{2} \ell_0 \theta \quad \rightsquigarrow \quad E_{p,p} = m_{\text{tot}} g z_G(t) = -6 m g \frac{3}{2} \ell_0 \theta(t) = -9 m g \ell_0 \theta(t)$$

- En ce qui concerne l'énergie potentielle élastique, nous avons :

$$\ell(t) = 2 \ell_0 + \ell_0 \theta(t) \quad \rightsquigarrow \quad E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k (2 \ell_0 + \ell_0 \theta(t) - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k \ell_0^2 (1 + \theta(t))^2$$

### 🌀 énergie cinétique

- Ici les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  sont simples à décrire dans  $\mathcal{R}$  nous n'avons donc pas avantage à utiliser la vision systémique et le théorème de KÆNIG.
- Comme les points  $M_1$  et  $M_2$  ont des mouvements circulaires dans le référentiel d'étude, nous pouvons écrire directement :

$$\begin{aligned} E_c(\mathcal{S})E_{c1} + E_{c2} &= \frac{1}{2} m (\ell_0 \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} 5 m (2 \ell_0 \dot{\theta})^2 \\ &= \frac{21}{2} m \ell_0^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

### 🌀 rassemblement

- Nous avons :

$$E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) + E_{p,\text{tot}} = \frac{21}{2} m \ell_0^2 \dot{\theta}^2(t) - 9 m g \ell_0 \theta(t) + \frac{1}{2} k \ell_0^2 (1 + \theta(t))^2$$

- En dérivant par rapport au temps, nous trouvons  $\frac{dE_{m|\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = 0$ , ce qui donne :

$$\frac{21}{2} m \ell_0^2 2 \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) - 9 m g \ell_0 \dot{\theta}(t) + \frac{1}{2} k \ell_0^2 2 \dot{\theta}(t) (1 + \theta(t)) = 0$$

- En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\theta}(t) = 0$ , nous obtenons :

$$21 m \ell_0^2 \ddot{\theta}(t) - 9 m g \ell_0 + k \ell_0^2 (1 + \theta(t)) = 0$$

- La condition d'équilibre horizontal fait que  $-9 m g \ell_0 + k \ell_0^2 = 0$ , et il reste :

$$21 m \ell_0^2 \ddot{\theta}(t) + k \ell_0^2 \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{k}{21 m} \theta(t) = 0$$

- Il s'agit bien d'oscillation de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{21 m}}$ .
- Bien que cela analytiquement invisible, la pulsation des oscillations dépend bien de  $g$  par l'intermédiaire de la condition d'équilibre :  $k \ell_0 = 9 m g$ . En d'autre termes, le même dispositif sur une planète différente nécessiterait un réglage différents en engendrant, ainsi, des oscillations de pulsation différentes.

# Mécanique des systèmes de points

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - système de points, extérieur, centre de masse, centre d'inertie
  - moment cinétique par rapport à un point, moment d'une force par rapport à un point
  - moments scalaires, bras de levier
  - interaction intérieure
  - point d'application

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître la dimension d'un moment de force ainsi que son unité.

### ★ Les lois

- ◇ Connaître :
  - le théorème du centre d'inertie
  - le théorème du moment cinétique, le théorème scalaire du moment cinétique, le théorème du moment cinétique barycentrique
  - les théorèmes énergétiques
  - les théorèmes de KOENIG

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - savoir interpréter le mouvement d'un système en tant que mouvement d'ensemble et mouvement propre
  - les effets des interactions intérieures sur le mouvement d'un système

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir repérer si un dispositif est à évolution conservative, forcée, ...

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir :
  - faire la différence entre une approche systémique et une approche particulière
  - savoir choisir entre une approche systémique et une approche particulière

## Au niveau des savoir-faire

### ★ petits gestes

- ◇ Il faut savoir :
  - savoir placer rapidement un centre de masse

- calculer rapidement le moment scalaire exercée par une force grâce au bras de levier
- montrer rapidement que l'évolution d'un système est conservatif

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mouvement d'ensemble</b>	<b>1</b>
I-1	Centre de masse . . . . .	1
I-1.i	définition . . . . .	1
I-1.ii	position des points par rapport au centre de masse . . . . .	1
I-1.iii	position du centre de masse . . . . .	2
I-1.iv	mouvement du centre de masse . . . . .	2
I-2	Théorème du Centre d'Inertie . . . . .	3
I-2.i	présentation du système . . . . .	3
I-2.ii	loi . . . . .	4
	énoncé . . . . .	4
	démonstration . . . . .	4
I-2.iii	lecture . . . . .	4
I-2.iv	justification de pratique courantes . . . . .	5
I-3	Le cas particulier du poids . . . . .	5
I-3.i	deux façons de le voir . . . . .	5
I-3.ii	chute d'un marteau, 1ère partie . . . . .	5
	modélisation – analyse . . . . .	5
	mouvement d'ensemble . . . . .	6
I-4	SHØEMAKER – LEVY 9 . . . . .	7
I-4.i	qui c'est ? . . . . .	7
I-4.ii	limite de Roche . . . . .	7
	modèle . . . . .	7
	analyse . . . . .	8
	caractéristiques du référentiel non galiléen . . . . .	8
	bilan des forces sur $C_2$ . . . . .	8
	condition d'équilibre . . . . .	9
	interprétation . . . . .	9
I-4.iii	le terme de l'astéroïde . . . . .	10
I-5	Interprétation systémique : la quantité de mouvement . . . . .	10
I-5.i	définition – interprétation . . . . .	10
I-5.ii	propriétés . . . . .	10
	propriété naturelle . . . . .	10
	expression simple intuitive non naturelle . . . . .	11
<b>II</b>	<b>Mouvement propre</b>	<b>12</b>
II-1	Un nouveau référentiel pour décrire le mouvement propre . . . . .	12
II-1.i	le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ . . . . .	12
II-1.ii	lois de compositions avec $\mathcal{R}^*$ . . . . .	12
	loi de composition des vitesses . . . . .	12
	loi de composition des accélérations . . . . .	12
	dérivation dans $\mathcal{R}^*$ et dans $\mathcal{R}$ . . . . .	13
II-1.iii	quantité de mouvement de $\mathcal{S}$ . . . . .	13
	résultat . . . . .	13
	démonstration . . . . .	13
	démonstration 2 . . . . .	13
	démonstration 3 . . . . .	14
	et maintenant ? . . . . .	14
II-2	Théorème du moment cinétique pour un point matériel . . . . .	14

II.2.i	décrire la rotation . . . . .	14
	pour un mouvement dans l'espace . . . . .	14
	pour un mouvement plan autour d'un axe particulier . . . . .	15
II.2.ii	lois régissant la rotation . . . . .	16
	énoncés . . . . .	16
	démonstration . . . . .	17
	lecture . . . . .	17
	calcul de moments scalaires . . . . .	18
II.2.iii	exemple du pendule simple . . . . .	19
	dispositif – analyse . . . . .	19
	équation vérifiée par le mouvement . . . . .	19
II.2.iv	morale . . . . .	21
II.3	Pour un système de points . . . . .	21
II.3.i	loi . . . . .	21
	énoncé . . . . .	21
	démonstration . . . . .	21
II.3.ii	lecture . . . . .	22
II.3.iii	liaison et moment d'axe . . . . .	22
	rotation sans frottement . . . . .	22
	rotation avec frottements . . . . .	23
	rotation motrice . . . . .	23
	attention à l'interprétation . . . . .	23
II.3.iv	cas particulier du poids – point d'application . . . . .	24
	point d'application du poids . . . . .	24
	interprétation . . . . .	24
	une conclusion à ne pas généraliser . . . . .	25
II.3.v	pendule rigide lesté . . . . .	25
	dispositif – analyse . . . . .	25
	équation d'évolution . . . . .	25
	un dispositif non équivalent . . . . .	26
II.4	Théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}^*$ . . . . .	27
II.4.i	approche systémique de la rotation – théorème de Koenig . . . . .	27
	un résultat particulier dans $\mathcal{R}^*$ . . . . .	27
	$\vec{\sigma}_G$ et $\vec{\sigma}_G^*$ , plus qu'un point en commun . . . . .	27
	un premier théorème de Koenig . . . . .	28
II.4.ii	théorème du moment cinétique barycentrique . . . . .	28
	énoncé . . . . .	28
	démonstration . . . . .	29
	interprétation . . . . .	29
II.4.iii	chute d'un marteau, fin . . . . .	29
	rappels . . . . .	29
	mouvement propre . . . . .	30
	conclusion . . . . .	31
II.4.iv	stabiliser SHCEMAKER – LEVY 9 . . . . .	31
	modélisation . . . . .	31

<b>III Aspect énergétique</b>	<b>33</b>
III.1 Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	33
III.1.i loi . . . . .	33
énoncé . . . . .	33
démonstration . . . . .	33
III.1.ii lecture . . . . .	33
III.1.iii le calcul de $W_{\text{int}}$ se fait dans n'importe quel référentiel . . . . .	34
résultat . . . . .	34
démonstration . . . . .	34
conséquence pratique . . . . .	35
conséquence fondamentale . . . . .	35
III.1.iv $\mathcal{P}_{\text{int}}$ pour un solide . . . . .	35
un résultat à connaître . . . . .	35
démonstration . . . . .	35
III.2 Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	36
III.2.i une écriture sans surprise . . . . .	36
théorème de l'énergie mécanique . . . . .	36
démonstration . . . . .	36
théorème de la puissance mécanique . . . . .	37
démonstration . . . . .	37
utilisation . . . . .	37
III.2.ii cas particulier du poids . . . . .	37
III.2.iii déterminer rapidement une $E_{\text{p,int}}$ . . . . .	38
le problème et sa solution . . . . .	38
expression de $E_{\text{p,grav}}$ . . . . .	38
l'énergie potentielle interne n'est pas additive . . . . .	39
expression de $E_{\text{p,int}}$ pour un ressort . . . . .	39
III.2.iv une utilisation bien moins difficile que prévue . . . . .	39
cas d'une interaction intérieure à distance . . . . .	39
cas d'une interaction intérieure de contact entre deux points liés . . . . .	39
cas d'une interaction intérieure de contact sans frottement . . . . .	40
conclusion à retenir et à utiliser directement . . . . .	40
et la voiture qui démarre ? . . . . .	40
III.3 Étudier un système de points . . . . .	40
III.3.i analyse physique . . . . .	40
III.3.ii analyse technique . . . . .	41
III.3.iii approche systémique de l'énergie cinétique – théorème de KOENIG . . . . .	41
énoncé . . . . .	41
démonstration . . . . .	41
lecture . . . . .	42
III.4 Exemples . . . . .	42
III.4.i tige soutenue par des ressorts . . . . .	42
dispositif – analyse . . . . .	42
éléments cinétiques de $\mathcal{S}$ . . . . .	42
mouvement d'ensemble . . . . .	43
mouvement dans $\mathcal{R}^*$ . . . . .	43
condition d'équilibre horizontal . . . . .	45
découplage . . . . .	45
III.4.ii balance à ressort . . . . .	45
dispositif – analyse . . . . .	45

condition d'équilibre horizontal . . . . .	46
petites oscillations . . . . .	46



# Mécanique

## Chapitre 6

### Interaction newtonienne

# Interaction newtonienne

Dans ce chapitre nous allons étudier un mouvement particulier qui tient une place importante dans la physique : le mouvement d'un point matériel dans un champ de force newtonien.

Nous verrons d'abord le mouvement d'un point dans un champ de force dit central avant de nous intéresser dans une deuxième partie au cas spécifique de la force newtonienne. Dans les troisième et quatrième partie, nous verrons comment, à partir d'une situation plus réaliste de deux points en interaction newtonienne, nous pouvons retrouver et utiliser les résultats énoncés.

## I – Mouvement d'un point dans un champ de force centrale

### I.1 – Qu'est-ce que c'est

#### I.1.i – définition

Une force est dite *centrale* lorsqu'elle passe par un point fixe de l'espace appelé *centre de force*.

- ◇ En fait il peut s'agir de n'importe quelle force car ce n'est pas sa nature qui importe, mais sa direction géométrique.
- ◇ Remarquons que la définition fait appel à un aspect cinématique important : le point par lequel doit passer la force doit être fixe, donc cela dépend du référentiel !

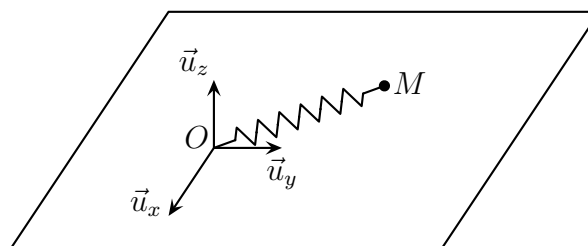
Le caractère central d'une force n'est pas intrinsèque mais est relatif au référentiel.



La conséquence est que les résultats que nous allons obtenir dans ce chapitre ne seront pas à généraliser trop rapidement, surtout dans le cas où les référentiels d'étude ne seront pas usuels.

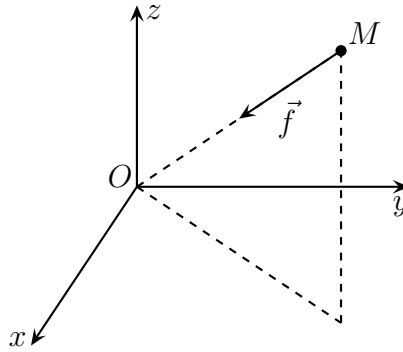
#### I.1.ii – exemples

- ◇ La force que nous étudierons principalement dans ce cadre est la force gravitationnelle.
- ◇ Mais nous pouvons aussi penser à un dispositif tel que celui représenté ci-dessous : une masse posée sur un plan horizontal, reliée à un ressort fixé en  $O$  et évoluant sans frottement.



- ◇ Il existe d'autres dispositifs avec des forces centrales, comme le pendule simple avec la tension exercée par le fil.
- ◇ Toutefois l'intérêt de particulariser les dispositifs à force centrale apparaît lorsqu'un point matériel est soumis **uniquement** à une telle force. Cela exclut, dès lors, le pendule simple.

## I.1.iii – notations, hypothèse



L'intensité de la force centrale subie par un point matériel ne dépend que de la distance entre le point et le centre de force.

- ◇ Cette hypothèse est naturelle dans le cas d'une interaction physique. Elle ne fait « que » traduire l'isotropie de l'espace, *ie.* le fait qu'il n'y a pas de direction privilégiée de l'espace.
- ◇ Dans toute la suite, nous supposons :
  - que le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est galiléen
  - que le point  $M$  est soumis soit à une seule force centrale  $\vec{f}$ , soit à plusieurs forces dont la résultante est une force centrale

I.2 – Conservation de  $\vec{\sigma}$  et ses conséquences

## I.2.i – TMC

- ◇ Écrivons le théorème du moment cinétique par rapport à  $O$  pour le point  $M$  :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O(M)}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

- ◇ Or  $\overrightarrow{OM}$  est colinéaire à  $\vec{f}$  de par la nature centrale de la force. Ainsi :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O(M)}}{dt} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{\sigma}_{O(M)} = \overrightarrow{C^{te}}}$$

Lorsqu'un point matériel est soumis à une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre de force est constant.

## ★ moment cinétique nul

- ◇ Si  $\vec{\sigma}_{O(M)} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(M) = \overrightarrow{C^{te}} = \vec{0}$ , alors cela signifie que la vitesse est constamment dirigée suivant  $\overrightarrow{OM}$ .

Un mouvement tel que le moment cinétique par rapport à un point  $A$  fixe soit constamment nul est un mouvement rectiligne dont le support passe par  $A$ .

★ **moment cinétique non nul**

- ◇ Cela signifie que sa quantité de rotation est constante, *ie.* que  $M$  va globalement tourner autour du centre de force.
- ◇ C'est le cas que nous étudierons dans la suite et nous noterons  $\vec{\sigma}_O(M) \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\sigma}$ .

I.2.ii – **mouvement plan**

- ◇ Calculons  $\vec{\sigma}_O \cdot \overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{\sigma}_O \cdot \overrightarrow{OM} = (\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}_{\perp \overrightarrow{OM}}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$

- ◇ Nous pouvons donc en conclure que le vecteur position est toujours orthogonal à  $\vec{\sigma}_O$ .

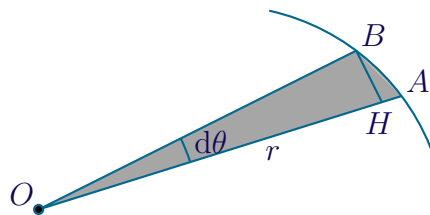
Lorsqu'un point est soumis à une force centrale, son mouvement est dans un plan qui contient le centre de force.

I.2.iii – **constante des aires**

- ◇ Nous avons, par conservation du moment cinétique  $\sigma = m r^2(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_z = \vec{C}^{\text{te}}$ .

La *constante des aires* est définie pour un point en mouvement dans un champ de force central et vaut  $C \triangleq \frac{\sigma}{m} = r^2(t) \dot{\theta}(t)$ .

- ◇ Comme son nom l'indique, la constante des aires est une constante.
- ◇ Pourquoi ce nom ? Raisonnons entre  $t$  et  $t + dt$ .



- ◇ À  $t$ , le point est en  $A$ , à  $t + dt$ , le point est en  $B$ . Calculons l'aire  $d\mathcal{A}$  balayée par le rayon vecteur  $OM$ .
- ◇ Il s'agit de l'aire  $OAB$ . Cela donne :

$$d\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{OA \times BH}{2} = \frac{r \times r d\theta}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

- ◇ Ainsi, la vitesse avec laquelle l'aire balayée  $\mathcal{A}$  augmente vaut :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2 dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

La *vitesse aréolaire* est la vitesse de balayage du rayon vecteur.

Dans le cas d'un mouvement d'un point dans un champ de force central, la vitesse aréolaire est constante.

◇ Nous sentons poindre la 2<sup>e</sup> loi de KÉPLER ...

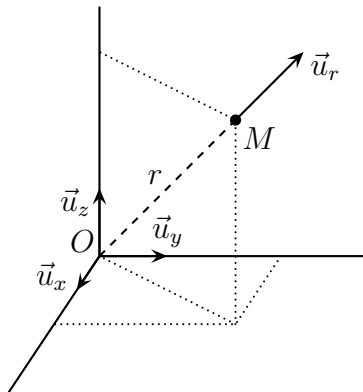
## I.3 – Conservation de l'énergie mécanique

### I.3.i – une nouvelle base bien utile

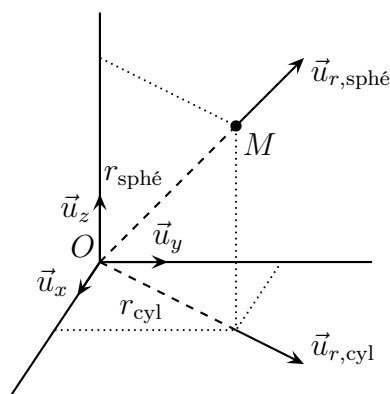
#### ★ repérage sphérique

◇ Dans la suite, nous aurons besoin de la base sphérique.

En repérage sphérique, le rayon vecteur s'écrit  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$ .



il ne faut pas confondre la coordonnée  $r$  en cylindro-polaire et la coordonnée  $r$  en sphérique. En effet, avec le schéma ci-dessous, nous pouvons voir que  $r_{\text{sphé}} = \sqrt{r_{\text{cyl}}^2 + z^2}$ .



Le repérage sphérique s'utilise lorsqu'un point particulier joue un rôle essentiel dans une situation.

## ★ petit résultat

En notant  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$  le vecteur unitaire de la base sphérique, nous avons :

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} = 0$$

◇ Démontrons-le. Dérivons la relation  $\vec{u}_r^2 = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$  :

$$\vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{dt} \cdot \vec{u}_r = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{u}_r \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} = 0$$

## I.3.ii – une évolution obligatoire conservative

## ★ résultat préliminaire

Toute force centrale de la forme  $\vec{f} = f(r) \vec{u}_r$  dérive d'une énergie potentielle.

◇ Montrons que  $\delta W = -dE_p$ .

◇ Tout d'abord nous avons  $d\vec{r} = d(r \vec{u}_r) = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r$  et ainsi :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = f(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = f(r) dr \quad \rightsquigarrow \quad dE_p \stackrel{?}{=} -f(r) dr$$

◇ Nous avons donc bien une énergie potentielle  $E_p(r)$  qui vaut :

$$E_p(r) = - \int f(r) dr$$

## ★ conservation de l'énergie

Le mouvement d'un point dans un champ de force central du type  $\vec{f} = f(r) \vec{u}_r$  est conservatif.

◇ La démonstration est immédiate car le point  $M$  n'est soumis qu'à une seule force ... conservative.

## I.3.iii – énergie potentielle effective

## ★ objectif

◇ Nous savons que le mouvement est principalement un mouvement de rotation de  $M$  autour de  $O$ .

◇ Le but va maintenant d'essayer de décrire qualitativement l'évolution de la distance  $OM$ .

## ★ réécriture de l'énergie mécanique

◇ L'énergie mécanique s'écrit  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$ .

◇ Or  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  ce qui donne  $v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2$ .

◇ Écrivons la conservation du moment cinétique  $\sigma = m r^2 \dot{\theta}$ . Cela donne  $\dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r^2}$ .

◇ Et ainsi :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{\sigma}{m r^2} \right)^2 + E_p(t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

◇ Ce que nous écrirons sous la forme  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(t)$ .

Lors d'un mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale, l'énergie potentielle effective vaut :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

L'énergie potentielle effective dépend des conditions initiales.

- ◇ En effet, contrairement aux énergies potentielles usuelles, une « photo » ne suffit pas pour déterminer explicitement l'énergie potentielle effective. Il faut quelque chose de plus, il faut la connaissance du moment cinétique.
- ◇ Comme le moment cinétique est constant, autant dire qu'il suffit de connaître les conditions initiales.

### ★ interprétation

- ◇ Ne regarder que l'évolution de la distance  $OM$  revient à regarder l'évolution de  $M$  dans le référentiel non galiléen en rotation pure à la vitesse  $\dot{\theta}(t) \neq C^{\text{te}}$ .
- ◇ Dans ce référentiel, les forces qui s'exercent sont la force centrale et les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.
- ◇  $E_p(r) = \frac{\sigma^2}{2 m r^2}$  est donc l'énergie potentielle associée à la résultante des forces d'inertie. Comme la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas, cette énergie est donc associée à la seule force d'inertie d'entraînement.

Dans le mouvement d'un point dans un champ de force central, l'énergie potentielle effective représente l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement subie dans le référentiel en rotation où le point n'a qu'un mouvement radial.

⊛ l'accélération d'entraînement ne vaut pas ici  $\vec{a}_e = -\dot{\theta}^2 \overrightarrow{HM}$  mais  $\vec{a}_e = -\dot{\theta}^2 \overrightarrow{HM} + \ddot{\theta}(t) \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HM}$ .

### ★ résultat collatéral

Lors d'un mouvement dans un champ de force central, la relation de couplage entre les coordonnées  $r(t)$  et  $\theta(t)$  est la conservation du moment cinétique :

$$r^2 = \frac{\sigma}{m \dot{\theta}} \quad \text{ou} \quad \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r^2}$$

- ◇ Cette relation permet d'exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $r$  ou réciproquement.

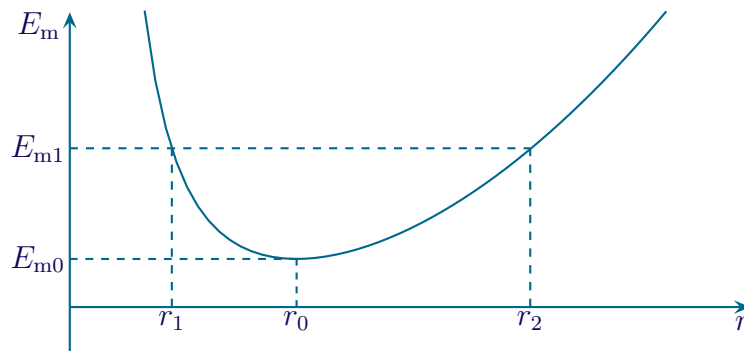
## I-3.iv – exemple de discussion graphique

- ◇ Nous avons déjà rencontré ce genre de cas.

◇ Prenons l'exemple présenté au début du chapitre, celui avec le ressort.

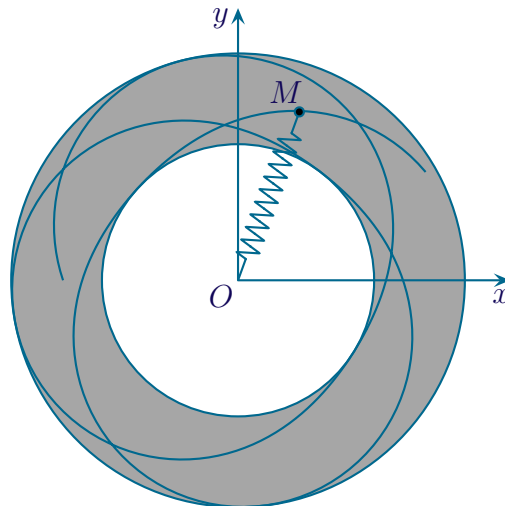
◇ Alors  $E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$  et  $E_{p,\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2 m r^2} + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2$ .

◇ Cela donne le graphique ci-dessous.



◇ Pour  $E_m = E_{m1}$ , la trajectoire se situe dans la couronne comprise entre  $r_1$  et  $r_2$ .

◇ Si la masse est limitée par  $r \geq r_1$ , c'est à cause de la barrière centrifuge que « crée » l'énergie potentielle effective.



◇ Ces trajectoires n'ont *a priori* aucune forme géométrique simple et ne sont pas forcément non plus circulaires.

◇ Lorsque  $E_m = E_{m0}$ , la trajectoire se fait à  $r = r_0$ , *ie.* est circulaire.

⊛ il n'existe pas qu'une seule trajectoire circulaire possible pour ce dispositif, mais bien une seule trajectoire possible pour ce dispositif avec **ce** moment cinétique.

## I.4 – Une solution exacte mais inconnue

◇ Dans ce problème, nous avons deux degrés de liberté  $r(t)$  et  $\theta(t)$ , ainsi que deux lois, les conservations du moment cinétique. Il est donc soluble.

◇ Ce qu'il y a de particulier, c'est qu'ici les solutions sont calculables sans passer par des équations différentielles.

### I.4.i – $t$ en fonction de $r$

◇ Partons de l'expression de l'énergie mécanique :



$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \rightsquigarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))$$

◇ Nous avons ainsi :

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))} \quad \rightsquigarrow \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$$

◇ Et en intégrant :

$$t_2 - t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$$

◇ Certes ce n'est pas une solution analytique, il faut passer par un calcul d'intégrale en général numérique, mais au moins cela permet de ne pas résoudre d'équation différentielle.

◇ Notons aussi que nous obtenons  $t(r)$  et non  $r(t)$ .

### I.4.ii – $\theta$ en fonction de $r$

◇ Le principe est le même en utilisant la conservation du moment cinétique.

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dt}{dr} = \dot{\theta} \times \frac{1}{\dot{r}} = \frac{\sigma}{m r^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$$

◇ Ce qui donne :

$$d\theta = \frac{\sigma}{m r^2} \times \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}} \quad \rightsquigarrow \quad \theta_2 - \theta_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{m r^2} \times \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$$

## II – Mouvement d'un point dans un champ de force newtonien

### II.1 – Qu'est-ce que c'est ?

#### II.1.i – écriture en terme de force

Une force centrale est dite *newtonienne* lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ avec } k \text{ une constante.}$$

La force gravitationnelle est une force newtonienne avec  $k = G m_1 m_2$ .

◇ Nous verrons plus tard que l'interaction électrostatique est aussi une force newtonienne.

Pour une force newtonienne qui s'écrit  $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$  :

- si  $k > 0$  alors la force est attractive
- si  $k < 0$  alors la force est répulsive

#### II.1.ii – énergie potentielle associée

◇ Reprenons la démonstration faite dans le cas d'une force centrale.

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = -\frac{k}{r^2} dr \stackrel{?}{=} -dE_p$$

◇ Et ainsi :

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{k}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad E_p(r) = -\frac{k}{r} + C^{\text{te}}$$

◇ Et avec la convention usuelle  $E_p = 0$  quand  $\vec{f} = \vec{0}$ , nous trouvons ...

L'énergie potentielle associée à la force newtonienne  $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$  s'écrit  $E_p(r) = -\frac{k}{r}$ .

#### II.1.iii – intérêt

- ◇ Le problème des forces newtoniennes est historiquement important.
- ◇ En effet, c'est en expliquant théoriquement le mouvement des astres, *ie.* en justifiant les lois expérimentales de KÉPLER, que NEWTON a imposé la théorie ... newtonienne.
- ◇ D'un point de vue pratique, ces forces et les résultats qui en découlent sont intéressants car ils sont connus de manière exacte pour le cas idéal.
- ◇ Pour les cas réels, ceux s'écartant toujours de l'idéalité, la connaissance de résultats exacts permet de simplifier la recherche de solutions par exemple en utilisant la méthode des perturbations (cf.

l'exemple du pendule simple non linéaire) ou la méthode de résolution par ordre successifs (cf. l'exemple de la déviation vers l'est).

## II.2 – Vision géométrique des trajectoires

### II.2.i – c'est une conique

La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien est une conique dont le centre de force est l'un des foyers.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{où :}$$

- $p$  est le paramètre de la conique
- $e$  est l'excentricité de la conique
- $\theta_0$  est la direction de l'axe des foyers de la conique

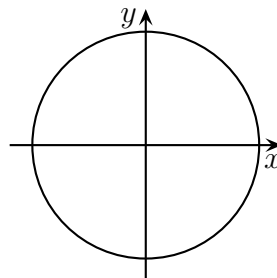
- ◇ Remarquons tout d'abord que nous n'avons pas le mouvement  $r(t)$  et  $\theta(t)$  du point matériel mais uniquement sa trajectoire.
- ◇  $p$ ,  $e$  ont un caractère physique fort et dépendent donc des conditions *physiques* et ce au contraire de  $\theta_0$  qui ne dépend que du repérage choisi et qui n'a pas de valeur physique intrinsèque.
- ◇ Dans le cas où nous avons le choix, nous nous arrangerons pour avoir  $\theta_0 = 0$ , *ie.* pour mettre l'axe des foyers sur l'axe ( $Ox$ ) du repère.

### II.2.ii – les différents types

#### ★ le cercle

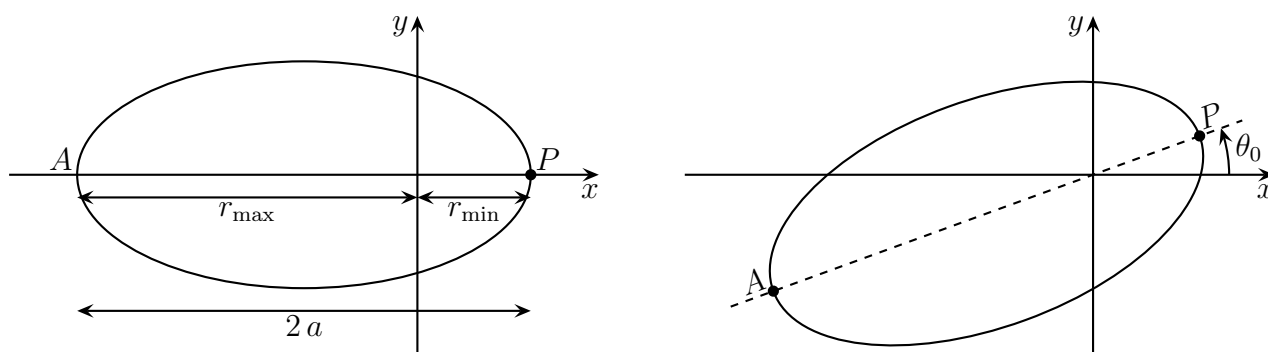
Le cercle est une conique d'excentricité nulle, *ie.*  $e = 0$ .

- ◇ Nous avons alors  $r(\theta) = p = C^{\text{te}}$ .

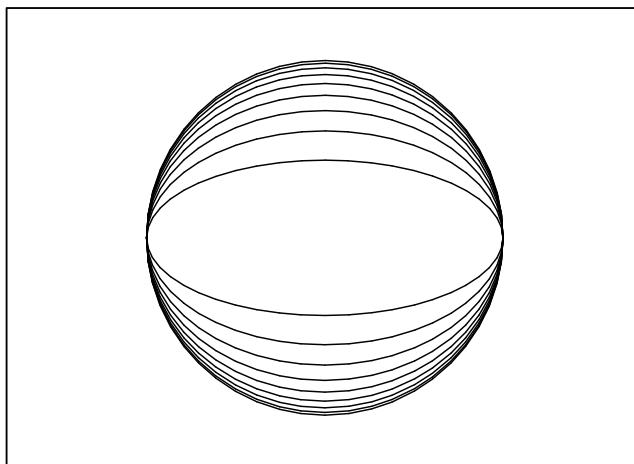


#### ★ l'ellipse

L'ellipse est une conique d'excentricité  $e$  telle que  $0 < e < 1$ .



Graphique 1



- ◇ Sur les exemples précédents, nous pouvons voir l'effet de l'excentricité sur la géométrie d'une ellipse. Les 9 ellipses ont pour excentricité 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; ... ; 0,9.

Plus l'excentricité est faible, plus l'ellipse ressemble à un cercle.

Sur une trajectoire elliptique, le point le plus éloigné de l'astre au centre de force est appelé l'*apoastre*, le point le plus proche est le *périastre*.

Pour un mouvement autour du Soleil, les points remarquables sur une trajectoire elliptique sont l'*aphélie* et le *périhélie*.

Pour un mouvement autour de la Terre, les points remarquables sur une trajectoire elliptique sont l'*apogée* et le *périgée*.

- ◇ Géométriquement, nous pouvons voir que :

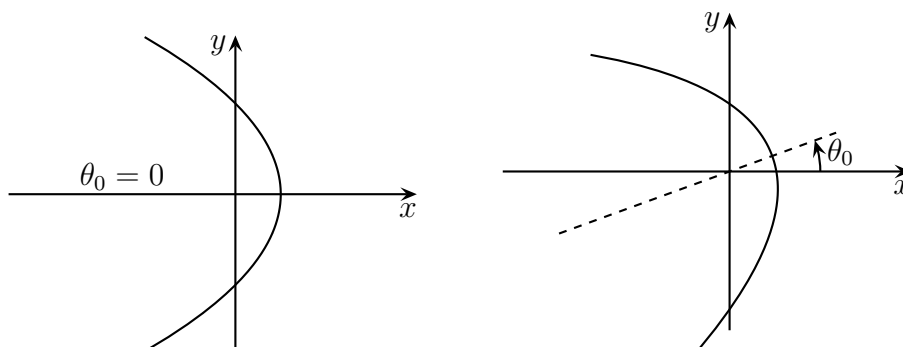
$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e} ; \quad r_{\min} = \frac{p}{1 + e} ; \quad r_{\max} + r_{\min} = 2a$$

Le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse caractérise une ellipse de manière plus naturelle.

- ◇ C'est pourquoi nous exprimerons certaines lois en fonction de  $a$  et non de  $p$  et  $e$ .

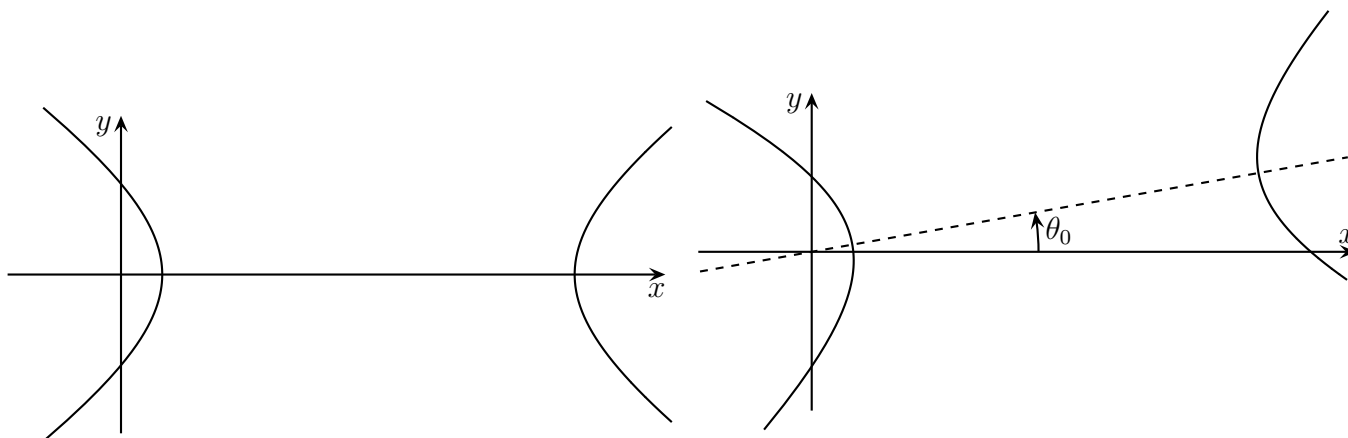
## ★ la parabole

La parabole est une conique d'excentricité  $e = 1$ .



## ★ l'hyperbole

L'hyperbole est une conique d'excentricité  $e > 1$ .

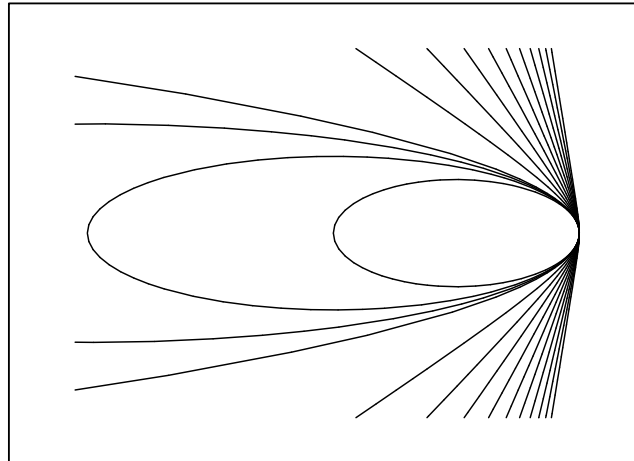


◇ Avec  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ , pour que  $r(\theta)$  reste positif, il faut :

$$-\theta_{\text{lim}} \leq \theta \leq \theta_{\text{lim}} \quad \text{où} \quad \theta_{\text{lim}} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

L'hyperbole possède deux asymptotes.

Graphique 2



- ◇ Sur le graphique précédent, les coniques ont pour excentricité : 0,9 ; 0,95 ; 0,975 ; 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,7 ; 2,1 ; 2,5 ; 3 ; 3,6 ; 4,3 ; 5,2 ; 6,2.

Plus l'excentricité est élevée, plus les arcs d'hyperbole ressemblent à des droites.

### ★ nature des forces

- ◇ Rappelons tout d'abord que l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la concavité (toujours) et (ici) en direction du centre de force.
- ◇ Ainsi, pour le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole nous voyons que le centre de force peut être à l'intérieur de la concavité, ce qui correspond à une force attractive.

La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien attractif peut être n'importe quel type de conique.

- ◇ La seule trajectoire présentant un centre de force à l'extérieur de la cavité est l'hyperbole.

La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien répulsif ne peut être qu'hyperbolique.

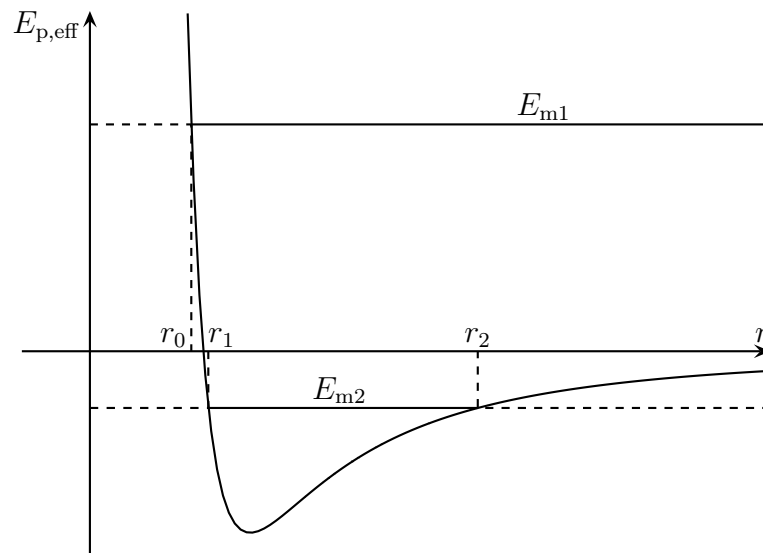
- ◇ D'un autre côté, étant donné que nous nous limiterons dans ce chapitre à la force gravitationnelle qui est attractive, nous aurons toujours à déterminer la nature de la conique.

## II.3 – Approche énergétique

### II.3.i – représentation de l'énergie potentielle effective

- ◇ Nous avons :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2m r^2} + E_p(r) = \frac{\sigma^2}{2m r^2} - \frac{k}{r}$$



◇ Nous pouvons voir que suivant la valeur de l'énergie mécanique, il est possible d'avoir des états liés ou des états de diffusion.

### II.3.ii – états de diffusion

◇ Les états de diffusion sont tels que  $E_m \geq 0$ .

L'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de force newtonien :

- est nulle sur une trajectoire parabolique
- est strictement positive sur une trajectoire hyperbolique

Un point matériel infiniment éloigné du centre de force :

- a une vitesse nulle sur une trajectoire parabolique
- a une vitesse non nulle sur une trajectoire hyperbolique

### II.3.iii – états liés

◇ Réécrivons l'énergie mécanique sous sa forme usuelle.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} = C^{\text{te}}$$

◇ Or, sur une trajectoire circulaire  $r = C^{\text{te}}$ .

Un point matériel dans un champ de force newtonien et sur une trajectoire circulaire a un mouvement uniforme.

Un point matériel dans un champ de force newtonien et sur une trajectoire elliptique ou circulaire a une énergie mécanique strictement négative.

### ★ expression de l'énergie sur une trajectoire elliptique

L'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de force newtonien et dans un état lié s'écrit  $E_m = -\frac{k}{2a}$  où  $a$  est le demi grand-axe de la trajectoire.

- ◇ C'est une loi très utile car elle permet de déterminer l'énergie totale du point matériel rien qu'en connaissant sa trajectoire.
- ◇ Pour le démontrer, repartons de l'énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2m r^2} - \frac{k}{r}$ .
- ◇ Pour une ellipse, état lié, il existe de valeurs  $r_1$  et  $r_2$  de  $r$  telles que  $\dot{r} = 0$  : ce sont les valeurs maximale et minimale du rayon.
- ◇ Pour ces deux points, **et uniquement pour ces deux points**, l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = \frac{\sigma^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} \quad \rightsquigarrow \quad r^2 E_m + k r - \frac{\sigma^2}{2m} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r^2 + \frac{k}{E_m} r - \frac{\sigma^2}{2 E_m m} = 0$$

- ◇ Il s'agit d'un trinôme dont les solutions sont  $r_1$  et  $r_2$ , nous avons donc  $r^2 - (r_1 + r_2) r + r_1 r_2 = 0$  ce qui donne, en identifiant :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{k}{E_m} \\ r_1 r_2 = -\frac{\sigma^2}{2m E_m} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} E_m = -\frac{k}{r_1 + r_2} = -\frac{k}{2a} \\ E_m = -\frac{\sigma^2}{2m r_1 r_2} \end{cases}$$

- ◇ Nous pouvons aller plus loin en écrivant, grâce à l'expression de la trajectoire,  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $p$  et  $e$  :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{p}{1+e} \\ r_2 = \frac{p}{1-e} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{2p}{1-e^2} \\ r_1 r_2 = \frac{p^2}{1-e^2} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} E_m = -\frac{k}{2p} (1-e^2) \\ E_m = -\frac{\sigma^2}{2m p^2} (1-e^2) \end{cases}$$

- ◇ Comme nous le verrons, la dernière expression de l'énergie mécanique est en fait valable quelle que soit l'excentricité.

### ★ répartition moyenne des énergies pour un mouvement circulaire

- ◇ Supposons qu'un point ait une trajectoire circulaire de rayon  $r$  dans un champ de forces newtonien, déterminons la valeur moyenne de son énergie cinétique et potentielle.
- ◇ Commençons par l'énergie potentielle. Nous avons immédiatement :  $E_p = -\frac{k}{r} = C^{\text{te}} = \langle E_p \rangle$
- ◇ Pour l'énergie cinétique, nous savons déjà que le mouvement est uniforme donc  $\langle E_c \rangle = E_c$ .
- ◇ Écrivons le PFD au point matériel :

$$m \vec{a}(t) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad m \left( -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta \right) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -m \frac{v^2}{r} = -\frac{k}{r^2} \\ m \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$



- ◇ De  $m \frac{dv}{dt} = 0$  nous retrouvons que le mouvement est uniforme.
- ◇ La projection sur  $\vec{u}_r$  donne :

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{k}{r} = -\frac{E_p}{2}$$

- ◇ Finalement, nous trouvons  $E_c = -\frac{E_p}{2}$  et  $E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c$ .

### ★ généralisation

- ◇ Nous admettrons la généralisation à un mouvement elliptique.

Pour un point matériel en mouvement dans un champ de forces newtonien, nous pouvons écrire, pour un état lié :

$$\langle E_c \rangle = -\frac{\langle E_p \rangle}{2} \quad \text{et} \quad E_m = \frac{\langle E_p \rangle}{2} = -\langle E_c \rangle$$

### ☞ Remarques :

- l'expression trouvée ci-dessus de l'énergie mécanique du point matériel sur la trajectoire circulaire  $E_m = \frac{E_p}{2} = -\frac{k}{2r}$  est bien compatible avec l'expression de l'énergie mécanique d'un point matériel sur une trajectoire elliptique
- la démonstration plus générale du résultat a été fait dans un exercice intitulé « théorème du Viriel » du TD n°2

## II.4 – Les lois de KÉPLER

### II.4.i – rappel historique

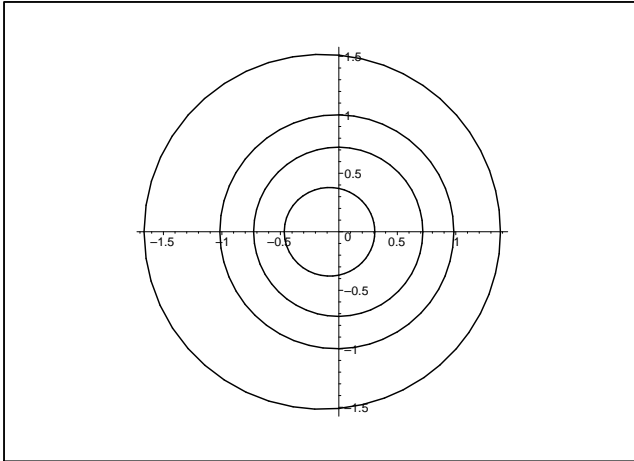
- ◇ Les lois de KÉPLER concerne le système solaire.
- ◇ Ces lois ont été trouvées au début du XVII<sup>e</sup> siècle (1608 et 1618) et ont été trouvées sans calculatrice et sans aucune théorie sous jacente puisque les lois de NEWTON datent de fin XVII<sup>e</sup> siècle (1687).

### II.4.ii – première loi

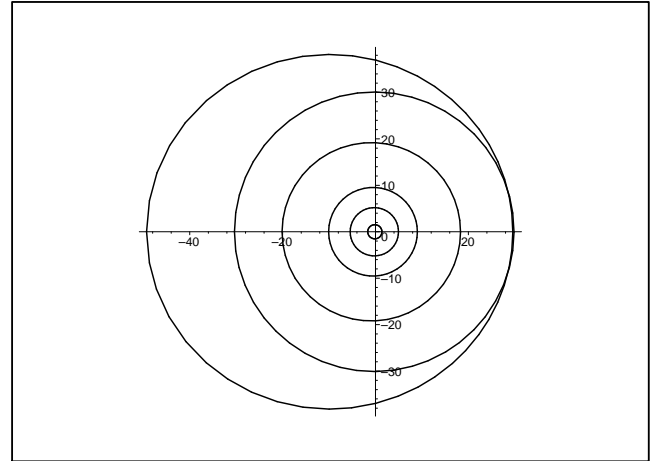
Les planètes tournent sur une trajectoire plane elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

- ◇ C'est une description géométrique des trajectoires.
- ◇ Nous avons déjà admis ce résultat et nous le démontrerons dans la partie suivante.
- ◇ Les trajectoires des planètes sont représentées sur les graphiques suivants.

Graphique 3



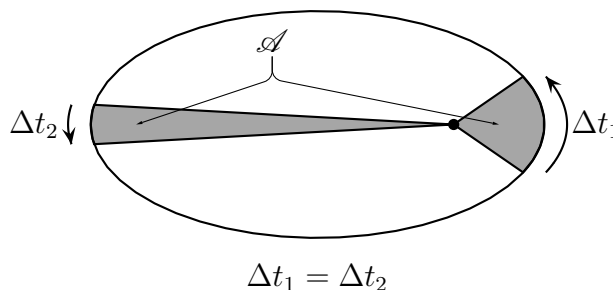
Graphique 4



- ✧ La Terre possède une trajectoire elliptique d'excentricité  $e \simeq \frac{1}{60}$ .
- ✧ Le demi-petit axe d'une ellipse vaut  $b = a \sqrt{1 - e^2}$  et ainsi l'écart relatif entre demi-grand axe et demi-petit axe d'une ellipse vaut  $\frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^2}{2} \simeq \frac{1}{7000}$  !
- ✧ En revanche la trajectoire est sensiblement décentrée (il faut bien regarder sur le tracé, mais cela se voit).
- ✧ La non circularité de la trajectoire terrestre n'est pas due à la forme mais au décalage entre son centre géométrique et son centre de force.

### II.4.iii – deuxième loi

Le rayon vecteur d'une planète balaye des surfaces égales en des durées égales.



- ✧ C'est une vision dynamique du mouvement sur chaque trajectoire : c'est un invariant par trajectoire.
- ✧ Nous avons déjà démontré cette loi puisqu'en fait ce n'est que la restriction au système solaire de la constante de la vitesse aréolaire pour un mouvement dans un champ de force central.

### II.4.iv – troisième loi

- ✧ C'est une vision globale de toutes les trajectoires : c'est un invariant du système solaire

Dans le système solaire, le carré de la période d'une astre est proportionnel au cube du demi grand axe de sa trajectoire elliptique.

- ✧ Autrement dit  $T^2 = \alpha a^3$ , avec  $\alpha$  une grandeur ne dépendant pas de la planète ni de sa trajectoire.
- ✧ Cette loi concerne tous les astres tournant autour du soleil avec une trajectoire elliptique : planètes (évidemment) mais aussi comètes et astéroïdes.

- ◇ Supposons que la grandeur soit invariante, déterminons son expression. Pour cela considérons la trajectoire elliptique la plus simple : la trajectoire circulaire.
- ◇ En projetant le PFD appliqué à une planète de masse  $m$ , nous trouvons :

$$-m \frac{v^2}{r} = -G \frac{m M_S}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad v^2 = \frac{G M_S}{r} \quad \rightsquigarrow \quad v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

- ◇ Comme le mouvement est uniforme (c'est une trajectoire circulaire), nous pouvons écrire la période  $T$  de révolution sous la forme :

$$T = \frac{2 \pi r}{v} = 2 \pi r \sqrt{\frac{r}{G M_S}} \quad \rightsquigarrow \quad T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M_S} r^3$$

- ◇ Ce qui prouve bien que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand-axe.

☛ *Remarque* : La démonstration dans un cas général de la 3<sup>e</sup> loi de KÉPLER est faite au paragraphe IV.4.ii de la page 29.

## II.5 – Aborder un problème de mécanique spatiale

### II.5.i – l'analyse physique

- ◇ La première chose à faire est de déterminer dans la mesure du possible la nature de la trajectoire, notamment à partir de considérations physiques.
- ◇ Le mouvement sera la plupart du temps libre et conservatif, sauf dans deux cas plus ou moins fréquents :
  - avec une fusée capable de produire de l'énergie pour modifier sa trajectoire
  - dans le cas d'un problème à trois corps où l'étude se fait dans un référentiel où la force n'est plus centrale
- ◇ Les grandeurs caractéristiques du problème seront les conditions initiales ainsi que quelques points particuliers de la trajectoire.

### II.5.ii – l'analyse technique

- ◇ En ce qui concerne le repérage, s'il n'est pas imposé, il faut le prendre tel que le centre de force soit au centre du référentiel. Et si ce n'est pas possible parce que le centre de force bouge dans le référentiel d'étude, alors il faut changer de référentiel pour pouvoir appliquer les résultats de ce chapitre.
- ◇ Les lois à utiliser sont d'abord les deux lois de conservation : conservation de l'énergie et conservation du moment cinétique.
- ◇ L'écriture complète de la trajectoire doit venir en dernier lieu et uniquement lorsque nous allons rechercher des caractéristiques précises du mouvement sur l'ensemble de la trajectoire.

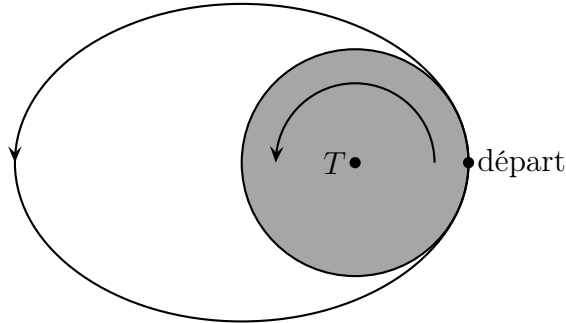
## II.6 – Exemples

### II.6.i – vitesse de satellisation

La *vitesse de satellisation* est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse être satellisé.

- ◇ Une fois le satellite satellisé, nous connaissons un point de sa trajectoire : un point à la distance  $R_T$  du centre de la Terre.

- ◇ Sur cette trajectoire, l'énergie est constante. Donc si la vitesse est la plus faible possible en ce point, cela signifie que l'énergie doit être la plus faible possible permettant une telle trajectoire.
- ◇ Or l'énergie sur une trajectoire elliptique vaut  $E_m = -\frac{k}{2a}$ . Pour que  $E_m$  soit le plus petit possible, il faut  $a$  le plus petit possible.



- ◇ De toutes les trajectoires possible, c'est la trajectoire circulaire de rayon  $R_T$  qui correspond aux critères recherchés.
- ◇ Sur cette trajectoire, nous avons au point de départ :

$$E_m = -\frac{k}{2R_T} = \frac{1}{2} m v_{\text{sat}}^2 - \frac{k}{R_T} \quad \text{où} \quad k = G m M_T \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} v_{\text{sat}}^2 = \frac{G M_T}{2 R_T}$$

- ◇ En négligeant la différence entre champ de pesanteur et champ gravitationnel, nous pouvons écrire  $g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$ , ce qui donne :

$$v_{\text{sat}}^2 = g_0 R_T \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{sat}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

Pour la Terre, l'intensité du champ de pesanteur se réduit, en première approximation, à l'intensité du champ de gravitation à sa surface :

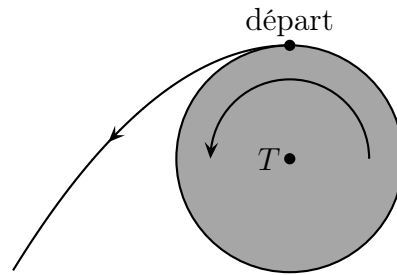
$$g = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

- ◇ Nous utiliserons de manière quasi-systématique cette relation pour « remplacer »  $G M_T$  par des grandeurs aux valeurs mieux connues  $g R_T^2$ .

## II.6.ii – vitesse de libération

La *vitesse de satellisation* est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse s'éloigner à l'infini de la Terre.

- ◇ Au niveau de la surface de la Terre, si la vitesse est minimale, alors l'énergie l'est aussi.
- ◇ Et la trajectoire permettant un éloignement infini et d'énergie la plus faible possible est la trajectoire parabolique.



✧ Sur cette trajectoire, l'énergie totale est nulle, en particulier au point de départ.

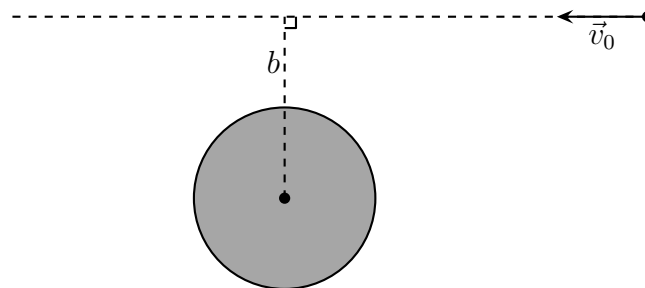
$$0 = \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{G m M_T}{R_T} \quad \text{où} \quad G M_T = g_0 R_T^2 \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{2 g_0 R_T} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

✧ Cette vitesse est à peine 40 % supérieure à celle de satellisation. Autrement dit, entre un satellite à peine en orbite et un satellite perdu, il y a 40 % de marge. Il faut bien viser !

### II.6.iii – distance minimale d'approche

✧ Considérons la situation suivante.

✧ Une météorite arrive en direction de la Terre avec un paramètre d'impact  $b$ , *ie.* passerait à la distance  $b$  du centre de la Terre si elle n'était pas déviée. Sachant que sa vitesse à l'infini est  $v_0$ , à quelle distance passera-t-elle de la Terre ?



✧ Analyse physique :

- Ici il s'agit bien d'un point matériel dans un champ de forces central newtonien car nous nous plaçons dans le référentiel géocentrique
- Vu que la météorite a une vitesse non nulle à une distance infinie de la Terre, la trajectoire sera hyperbolique
- les grandeurs pertinentes vont être  $m$  (inertie de la comète),  $b$  (géométrie),  $G$ ,  $M_T$  (action la Terre) et  $v_0$  (condition initiale).

✧ Analyse technique : nous connaissons un point de la trajectoire avec sa vitesse, nous connaissons donc toute la trajectoire. Seule la distance au centre de force est intéressant, nous n'allons donc pas poser de repère précisément, mais utiliser une vision radiale.

✧ L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 - \frac{G m M_T}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2} - \frac{G m M_T}{r}$$

✧ Au point de distance minimale, nous avons donc :

$$E_m = \frac{\sigma^2}{2 m r_{\min}^2} - \frac{G m M_T}{r_{\min}}$$

✧ Or, avec les conditions initiales, nous trouvons :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{et} \quad \sigma = m b v_0$$

✧ Nous arrivons ainsi à l'équation :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m b^2 v_0^2}{2 r_{\text{min}}^2} - \frac{G m M_T}{r_{\text{min}}} \quad \rightsquigarrow \quad v_0^2 r_{\text{min}}^2 + 2 G M_T r_{\text{min}} - b^2 v_0^2$$

✧ C'est une équation du second degré de discriminant  $4 G^2 M_T^2 + 4 v_0^4 b^2 > 0$ . En ne gardant que la solution positive, nous trouvons :

$$r_{\text{min}} = \frac{-G M_T + \sqrt{G^2 M_T^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}$$

☞ *Remarque* : en notant  $r_0$  le rayon de la trajectoire circulaire sur laquelle la vitesse serait  $v_0$ , la distance minimale d'approche s'écrit en fait  $r_{\text{min}} = \sqrt{b^2 + r_0^2} - r_0$ .

## III – Résolution spécifique du problème de KÉPLER

### III.1 – Le problème de KÉPLER

- ◇ Dans cette partie, nous allons déterminer la trajectoire d'un point matériel dans un champ de forces newtonien, *ie.* obéissant au PFD :

$$m \vec{a}(t) = -\frac{k}{r^2(t)} \vec{u}_r$$

- ◇ Historiquement, le problème était complètement inverse : il s'agissait de trouver ce qui pouvait faire que les trajectoire étaient elliptiques.

### III.2 – Utiliser une autre conservation

#### III.2.i – il s'agit d'un autre vecteur ...

- ◇ Nous savons déjà que le mouvement est plan. Dans ces conditions  $\vec{u}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta$ , ce qui permet de réécrire le PFD sous la forme :

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = +\frac{k}{r^2(t) \dot{\theta}(t)} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = +\frac{k}{\sigma} \frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt}$$

- ◇ En intégrant, cela donne :

$$\vec{v}(t) = \frac{k}{\sigma} \vec{u}_\theta(t) + \vec{w} \quad \text{où} \quad \vec{w} = \overrightarrow{C^{te}}$$

- ◇ Nous obtenons ainsi un vecteur constant :  $\vec{w} = \vec{v}(t) - \frac{k}{\sigma} \vec{u}_\theta(t)$ .

#### III.2.ii – ... qui en définit deux autres ...

- ◇ Le vecteur excentricité  $\vec{h}$  est défini par :

$$\vec{h} \triangleq \frac{\sigma}{k} \vec{w} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{h} = \frac{\sigma}{k} \vec{v}(t) - \vec{u}_\theta(t) = \overrightarrow{C^{te}}$$

- ◇ Le vecteur de RUNGE – LENZ est défini par :

$$\vec{R} \triangleq \vec{w} \wedge \vec{\sigma} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{\sigma} - k \vec{u}_r = \overrightarrow{C^{te}}$$

- ◇ Remarquons que ces deux vecteurs sont dans le plan de la trajectoire.

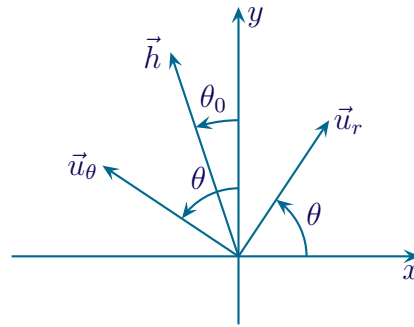
#### III.2.iii – ... et fournit l'équation de la trajectoire

- ◇ Calculons le produit scalaire  $\vec{h} \cdot \vec{u}_\theta$  de deux manières.

- ◇ Tout d'abord en prenant l'expression de  $\vec{h}$  :

$$\vec{h} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\sigma}{k} v_\theta - 1 \quad \text{avec} \quad v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{h} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\sigma^2}{m r k} - 1$$

- ◇ Représentons ensuite la situation dans le plan ( $Oxy$ ).



◇ Nous avons donc, en notant  $e = \|\vec{h}\|$  :

$$\vec{h} \cdot \vec{u}_\theta = \|\vec{h}\| \|\vec{u}_\theta\| \cos(\vec{h}, \vec{u}_\theta) = e \cos(\theta - \theta_0)$$

◇ En regroupant :

$$e \cos(\theta - \theta_0) = \frac{\sigma^2}{m r k} - 1 \quad \rightsquigarrow \quad 1 + e \cos(\theta - \theta_0) = \frac{\sigma^2}{m r k} \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{\frac{\sigma^2}{m k}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

◇ Nous trouvons le résultat attendu :  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$  avec  $\boxed{p = \frac{\sigma^2}{m k}}$

### III.3 – Avec les formules de BINET

#### III.3.i – ce n'est qu'un changement de variable

◇ Pour résoudre le problème, nous allons le changer.

◇ Au lieu d'essayer de trouver  $r(t)$ , nous allons chercher  $u(\theta)$  où  $u = \frac{1}{r}$ .

◇ Nous allons donc réécrire les lois physiques en fonction de  $u$ .

#### III.3.ii – expression de la vitesse

◇ Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , nous avons  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

◇ Réécrivons  $\dot{r}$  en tenant compte du fait que  $u = \frac{1}{r}$  et  $r = \frac{1}{u}$  :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} \times \frac{dr}{du} \times \frac{du}{d\theta} = -\dot{\theta} \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -\dot{\theta} r^2 \frac{du}{d\theta} = -\frac{\sigma}{m} \frac{du}{d\theta}$$

◇ Réécrivons  $r \dot{\theta}$  :

$$r \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r} = \frac{\sigma}{m} u$$

◇ Finalement, la vitesse s'écrit, en variables de BINET :  $\boxed{\vec{v} = \frac{\sigma}{m} \left( -\frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + u \vec{u}_\theta \right)}$



### III.3.iii – expression de l'accélération

- ◇ Pour l'accélération, seule la composante sur  $\vec{u}_r$  nous intéresse car nous savons déjà, par le PFD, que la composante sur  $\vec{u}_\theta$  est nulle.
- ◇ Nous avons ainsi  $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r$ .
- ◇ Calculons d'abord  $\ddot{r}$  :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\sigma}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{\sigma}{m} \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{\sigma}{m} \times \frac{\sigma}{m r^2} \times \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{\sigma^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

- ◇ Puis calculons  $-r \dot{\theta}^2$  :

$$-r \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{u} \left( \frac{\sigma}{m r^2} \right) = -\frac{1}{u} \frac{\sigma^2 u^4}{m^2} = -\frac{\sigma^2}{m^2} u^3$$

◇ Finalement :

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{\sigma^2}{m^2} u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r}$$

### III.3.iv – l'équation du mouvement est simplifiée ...

#### ★ avec l'accélération de BINET

- ◇ Maintenant le PFD s'écrit :

$$m \vec{a} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad -m \frac{\sigma^2}{m^2} \cancel{\mathcal{U}} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r = -k \cancel{\mathcal{U}} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{k m}{\sigma^2}}$$

#### ★ avec seulement la vitesse

- ◇ Partons de l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - k u \quad \rightsquigarrow \quad E_m = \frac{1}{2} m \frac{\sigma^2}{m^2} \left( \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - k u$$

- ◇ Comme l'énergie est constante,  $\frac{dE_m}{d\theta} = 0$ , ce qui donne :

$$\frac{\sigma^2}{m} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} \times \frac{du}{d\theta} + u \times \frac{du}{d\theta} \right) + k \frac{du}{d\theta} = 0$$

- ◇ En simplifiant par la solution inintéressante  $\frac{du(\theta)}{d\theta} = 0$  correspondant à une trajectoire circulaire, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{k m}{\sigma^2}}$$

**III.3.v – ... et maintenant soluble**

◇ Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, dont la solution est :

$$u(\theta) = +\frac{k m}{\sigma^2} + \alpha \cos(\theta - \theta_0) \quad \text{où} \quad \alpha \text{ et } \theta_0 \text{ des constantes d'intégration}$$

◇ En isolant  $r$ , cela donne

$$u = \frac{1}{r} \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{1}{\frac{k m}{\sigma^2} + \alpha \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{\sigma^2}{m k}}{1 + \alpha \frac{\sigma^2}{m k} \cos(\theta - \theta_0)}$$

◇ Nous retrouvons aussi une conique de trajectoire  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$  avec  $p = \frac{\sigma^2}{m k}$ .

**III.3.vi – expression de l'énergie totale**

◇ En variables de BINET, l'énergie s'écrit :

$$E_m = \frac{\sigma^2}{2m} \left( \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) + k u$$

◇ Calculons chacun des trois termes compte tenu du fait que  $u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$  avec  $p = \frac{\sigma^2}{m k}$ .

◇ Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{p k}{2} \left( \frac{e^2 \sin^2(\theta - \theta_0)}{p^2} + \frac{1 + 2e \cos(\theta - \theta_0) + e^2 \cos^2(\theta - \theta_0)}{p^2} \right) - \frac{k}{p} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \\ &= \frac{k}{2p} (e^2 + 1 + 2e \cos(\theta - \theta_0)) - \frac{k}{2p} (2 + 2e \cos(\theta - \theta_0)) \\ &= \frac{k}{2p} (e^2 - 1) = \frac{m k^2}{2 \sigma^2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

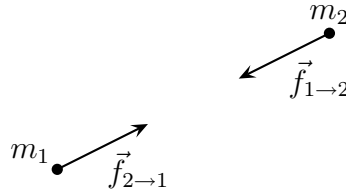
◇ Nous venons ainsi de démontrer ce que nous avons appris :

- si la trajectoire est elliptique,  $e < 1$  et  $E_m < 0$
- si la trajectoire est parabolique,  $e = 1$  et  $E_m = 0$
- si la trajectoire est hyperbolique,  $e > 1$  et  $E_m > 0$

## IV – En fait il s'agit d'un problème à deux corps

### IV.1 – Situation étudiée

◇ Considérons deux points matériels en interaction en évolution dans un référentiel  $\mathcal{R}_0$  galiléen.



◇ Supposons que ces points matériels ne soient soumis à aucune force extérieure.

Un système est dit *isolé* lorsqu'aucune force extérieure ne s'exerce.

Un système est dit *pseudo-isolé* lorsque la résultante des forces extérieures est nulle.

### IV.2 – Équation d'évolution

#### IV.2.i – un référentiel barycentrique particulier

◇ Écrivons le TCI dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  :

$$m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}_0}(G)}{dt} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}_{|\mathcal{R}_0}(G) = \vec{C^{\text{te}}}$$

Le référentiel barycentrique associé à un système isolé est galiléen.

◇ Dans la suite, nous étudierons dans le référentiel *galiléen* barycentrique que nous noterons  $\mathcal{R}$ .

#### IV.2.ii – première apparition de la particule fictive

◇ Écrivons les PFD sur les deux points matériels  $m_1$  et  $m_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(r) \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r) \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = -\frac{1}{m_1} \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r) \\ \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r) \end{array} \right.$$

◇ En soustrayant, cela donne :

$$\frac{d(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}{dt} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r) \rightsquigarrow \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r)$$

◇ Et ainsi  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}(r)$ .

◇ Or  $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ .

◇ Introduisons une particule fictive  $M$  telle que  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  et de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Alors l'équation d'évolution s'écrit, en notant  $\vec{f} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$  :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(r)$$

La *particule fictive*  $M$  d'un système isolé de deux point matériels  $M_1$  et  $M_2$  est le point matériel fictif de vecteur position dans le référentiel barycentrique  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  et de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , appelée *masse réduite*.

◇ Tout se passe comme si la particule  $M$  subissait la force  $\vec{f}$ . Et pourtant ce n'est pas possible puisque la particule  $M$  est comme la cuillère de Néo : elle n'existe pas !

### IV.2.iii – changement de problème

◇ En notant  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$  les vecteurs positions des deux points matériels dans le référentiel barycentrique, nous avons :

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0} \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

◇ Dans ces conditions, il suffit de connaître  $\vec{r}$  pour remonter aux positions  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  par homothétie.

◇ Nous allons donc maintenant nous intéresser à cette particule fictive.

### IV.2.iv – cas où $m_1 \gg m_2$

◇ Dans ce cas, nous trouvons :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq m_2 ; \quad \vec{r}_1 = \vec{0} ; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}$$

Dans un système de deux points matériels dans lequel l'un des points a une masse très supérieure à l'autre, la particule fictive s'identifie avec le point de masse la plus faible.

◇ Cela permet de justifier tout ce que nous avons fait dans le début du chapitre, notamment que le Soleil ou la Terre suivant le cas était au centre du référentiel.

## IV.3 – Une « vraie » particule fictive ?

### IV.3.i – un moment cinétique très particulier

◇ Calculons le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\sigma} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2$$

◇ D'après les relations précédentes avec la particule fictive, nous avons :

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}; \quad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}; \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

◇ Cela donne, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= -\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \vec{v}_1 + \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \wedge \vec{v}_2 \\ &= \mu \vec{r} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

Le moment cinétique d'un système isolé de deux points matériel est égal au moment cinétique de sa particule fictive associée.

### IV.3.ii – une énergie cinétique tout aussi particulière

◇ Calculons de même l'énergie cinétique de  $\mathcal{S}$  dans le référentiel barycentrique.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique d'un système isolé de deux points matériel est égal à l'énergie cinétique de sa particule fictive associée.

◇ Finalement la particule fictive est extrêmement intéressante car :

- elle permet de trouver les trajectoires des deux points matériels
- elle permet de trouver le moment cinétique et l'énergie cinétique du système dans le référentiel barycentrique (grandeurs intrinsèques) sans avoir à repasser par les moments cinétiques des deux points matériels

### IV.3.iii – et une quantité de mouvement ...

◇ Pour la quantité de mouvement du système, nous avons :

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = \vec{0}$$

◇ Après tout, c'est normal, c'est le référentiel barycentrique quand même !

◇ En revanche, nous pouvons voir que :

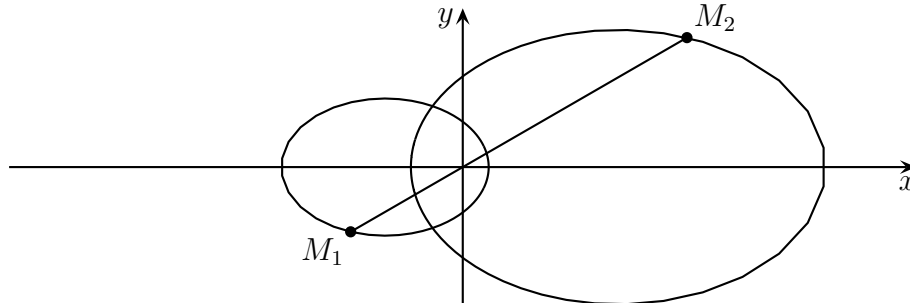
$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = -\mu \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{p}_2 = \mu \vec{v}$$

◇ Dans le référentiel barycentrique, chaque point matériel a, au signe près, la quantité de mouvement de la particule fictive.

## IV.4 – Lien entre le problème à deux corps et celui de la particule fictive

### IV.4.i – mouvement des deux corps

- ◇ Prenons l'exemple d'un mouvement elliptique.
- ◇ Alors les trajectoires des deux corps sont des ellipses.



- ◇ Les deux corps sont en mouvement dans le référentiel barycentrique qui leur est attaché.

### IV.4.ii – une troisième loi de KÉPLER approximative

- ◇ Démontrons la loi de KÉPLER.
- ◇ Pour cela considérons la particule fictive sur une trajectoire circulaire de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $b$ .
- ◇ En une période  $T$ , la particule fictive fait un tour complet donc balaie la surface totale de l'ellipse, à savoir  $\pi a b$ . Cela donne :

$$\mathcal{V} = \frac{C}{2} = \frac{\sigma}{2\mu} = \frac{\pi a b}{T} \quad \text{avec} \quad b = a \sqrt{1 - e^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- ◇ Exprimons maintenant le moment cinétique en fonction de  $a$  et  $e$  à partir de relations obtenues précédemment :

$$p = \frac{\sigma^2}{\mu k} \quad \text{et} \quad a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \rightsquigarrow \quad a(1 - e^2)\mu k = \sigma^2$$

- ◇ Nous obtenons ainsi :

$$\left( \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1 - e^2} \right)^2 = \frac{a(1 - e^2)\mu k}{\mu^2} \quad \rightsquigarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

- ◇ Finalement nous pouvons constater que  $T^2$  n'est pas tout à fait proportionnel à  $a^3$  car le coefficient dépend de ce qui tourne autour de  $M_1$ .
- ◇ En revanche si, comme dans le cas du système solaire, l'un des corps a une masse  $m_1$  très supérieure à l'autre, alors  $T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_1} a^3$  et le facteur de proportionnalité devient indépendant de  $m_2$ , *ie.* de ce qui tourne autour de  $M_1$ .

### IV.4.iii – le problème à trois corps

- ◇ Si le problème de deux **points matériels** en interaction newtonienne admet une solution exacte et connue, tout autre problème, si proche soit-il n'admet pas de solution exacte et connue dans le cas général.

- ✧ Si l'un des deux corps n'est pas tout à fait à répartition sphérique de masse, les trajectoires peuvent être légèrement modifiées.
- ✧ De même pour 3 points matériels (ex : Soleil, Terre, Lune), les mouvements peuvent être très différents suivant les conditions initiales et les rapports de masse.
- ✧ Signalons qu'il existe quelques solutions exactes dans quelques cas particuliers et que ces solutions (notamment les points de LAGRANGE) sont physiquement intéressantes au niveau astronomique (positionnement de satellites ou de météorites).

# Interaction newtonienne

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - champ de forces central, champ de force newtonien
  - énergie potentielle effective
  - conique, ellipse, parabole, hyperbole
  - particule fictive, masse réduite

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître la dimension de l'excentricité d'une conique, du paramètre d'une conique

### ★ Les lois

- ◇ Connaître :
  - la loi d'attraction gravitationnelle
  - la loi de conservation du moment cinétique pour un mouvement dans un champ de forces central
  - la loi des aires
  - l'expression de la trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien
  - le lien entre énergie et forme de la trajectoire d'une conique
  - les lois de KÉPLER

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - l'interprétation de la loi des aires

### ★ les exemples fondamentaux

- ◇ Le mouvement circulaire dans le champ de forces newtonien.

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Savoir déterminer *a priori* la forme d'une trajectoire.

## Au niveau des savoir-faire

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir :
  - retrouver l'expression de l'énergie potentielle effective
  - retrouver les vitesses de satellisation et de libération



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mouvement d'un point dans un champ de force centrale</b>	<b>1</b>
I-1	Qu'est-ce que c'est . . . . .	1
I-1.i	définition . . . . .	1
I-1.ii	exemples . . . . .	1
I-1.iii	notations, hypothèse . . . . .	2
I-2	Conservation de $\vec{\sigma}$ et ses conséquences . . . . .	2
I-2.i	TMC . . . . .	2
	moment cinétique nul . . . . .	2
	moment cinétique non nul . . . . .	3
I-2.ii	mouvement plan . . . . .	3
I-2.iii	constante des aires . . . . .	3
I-3	Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	4
I-3.i	une nouvelle base bien utile . . . . .	4
	repérage sphérique . . . . .	4
	petit résultat . . . . .	5
I-3.ii	une évolution obligatoire conservative . . . . .	5
	résultat préliminaire . . . . .	5
	conservation de l'énergie . . . . .	5
I-3.iii	énergie potentielle effective . . . . .	5
	objectif . . . . .	5
	réécriture de l'énergie mécanique . . . . .	5
	interprétation . . . . .	6
	résultat collatéral . . . . .	6
I-3.iv	exemple de discussion graphique . . . . .	6
I-4	Une solution exacte mais inconnue . . . . .	7
I-4.i	$t$ en fonction de $r$ . . . . .	7
I-4.ii	$\theta$ en fonction de $r$ . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Mouvement d'un point dans un champ de force newtonien</b>	<b>9</b>
II-1	Qu'est-ce que c'est ? . . . . .	9
II-1.i	écriture en terme de force . . . . .	9
II-1.ii	énergie potentielle associée . . . . .	9
II-1.iii	intérêt . . . . .	9
II-2	Vision géométrique des trajectoires . . . . .	10
II-2.i	c'est une conique . . . . .	10
II-2.ii	les différents types . . . . .	10
	le cercle . . . . .	10
	l'ellipse . . . . .	10
	la parabole . . . . .	12
	l'hyperbole . . . . .	12
	nature des forces . . . . .	13
II-3	Approche énergétique . . . . .	13
II-3.i	représentation de l'énergie potentielle effective . . . . .	13
II-3.ii	états de diffusion . . . . .	14
II-3.iii	états liés . . . . .	14
	expression de l'énergie sur une trajectoire elliptique . . . . .	15
	répartition moyenne des énergies pour un mouvement circulaire . . . . .	15
	généralisation . . . . .	16

II.4	Les lois de KÉPLER . . . . .	16
II.4.i	rappel historique . . . . .	16
II.4.ii	première loi . . . . .	16
II.4.iii	deuxième loi . . . . .	17
II.4.iv	troisième loi . . . . .	17
II.5	Aborder un problème de mécanique spatiale . . . . .	18
II.5.i	l'analyse physique . . . . .	18
II.5.ii	l'analyse technique . . . . .	18
II.6	Exemples . . . . .	18
II.6.i	vitesse de satellisation . . . . .	18
II.6.ii	vitesse de libération . . . . .	19
II.6.iii	distance minimale d'approche . . . . .	20
<b>III</b>	<b>Résolution spécifique du problème de KÉPLER</b>	<b>22</b>
III.1	Le problème de KÉPLER . . . . .	22
III.2	Utiliser une autre conservation . . . . .	22
III.2.i	il s'agit d'un autre vecteur . . . . .	22
III.2.ii	... qui en définit deux autres . . . . .	22
III.2.iii	... et fournit l'équation de la trajectoire . . . . .	22
III.3	Avec les formules de BINET . . . . .	23
III.3.i	ce n'est qu'un changement de variable . . . . .	23
III.3.ii	expression de la vitesse . . . . .	23
III.3.iii	expression de l'accélération . . . . .	24
III.3.iv	l'équation du mouvement est simplifiée . . . . .	24
	avec l'accélération de BINET . . . . .	24
	avec seulement la vitesse . . . . .	24
III.3.v	... et maintenant soluble . . . . .	25
III.3.vi	expression de l'énergie totale . . . . .	25
<b>IV</b>	<b>En fait il s'agit d'un problème à deux corps</b>	<b>26</b>
IV.1	Situation étudiée . . . . .	26
IV.2	Équation d'évolution . . . . .	26
IV.2.i	un référentiel barycentrique particulier . . . . .	26
IV.2.ii	première apparition de la particule fictive . . . . .	26
IV.2.iii	changement de problème . . . . .	27
IV.2.iv	cas où $m_1 \gg m_2$ . . . . .	27
IV.3	Une « vraie » particule fictive ? . . . . .	27
IV.3.i	un moment cinétique très particulier . . . . .	27
IV.3.ii	une énergie cinétique tout aussi particulière . . . . .	28
IV.3.iii	et une quantité de mouvement . . . . .	28
IV.4	Lien entre le problème à deux corps et celui de la particule fictive . . . . .	29
IV.4.i	mouvement des deux corps . . . . .	29
IV.4.ii	une troisième loi de KÉPLER approximative . . . . .	29
IV.4.iii	le problème à trois corps . . . . .	29

# Mécanique

## Chapitre 7

### Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

# Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

Nous savons déjà que les charges, immobiles ou en mouvements, sont des sources de champ électrique et magnétique. Nous allons voir dans ce chapitre qu'en plus d'être source du champ, elles *subissent* des effets dus à la présence de ces champs, des effets mécaniques.

Ainsi dans ce chapitre, nous verrons comment le mouvement des charges est influencé par la présence de champs électrique ou magnétique statiques. Si dans la première partie, nous nous intéresserons aux mouvements de particules « seules » dans l'espace, nous verrons dans la deuxième partie l'interaction entre le champ magnétique et le mouvement d'ensemble de charges appelé « courant électrique ».

## I – Force subie par une charge

### I.1 – La force électromagnétique

#### I.1.i – expressions

##### ★ version force de LORENTZ

◇ Cette force est « donnée » par les lois de la nature. C'est une des lois de base.

La force subie par un point matériel de charge  $q$  plongé dans un champ électromagnétique est la *force de LORENTZ* qui s'écrit :

$$\vec{f} = q \left( \vec{E}_{(M(t))} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}_{(M(t))} \right) \quad \text{avec}$$

- $\vec{v}(t)$  la vitesse du point matériel par rapport au référentiel d'étude
- $\vec{E}_{(M(t))}$  et  $\vec{B}_{(M(t))}$  les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'endroit  $M(t)$  où se trouve le point matériel à l'instant  $t$

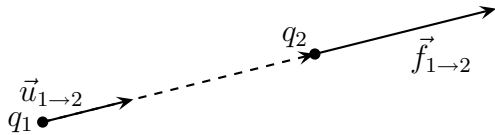
⊛ ne pas confondre  $\vec{E}_{M(t)}$  avec  $\vec{E}_{(M,t)}$ . Le premier est le champ à l'endroit où se trouve le point  $M$  à l'instant  $t$  alors que le 2<sup>e</sup> sous-entend que le champ  $\vec{E}$  est *a priori* non uniforme et non constant. Autrement dit dans le premier cas, nous nous intéressons à la valeur du champ en un point bien précis de l'espace, alors que dans le 2<sup>e</sup> nous sommes plutôt en train de considérer la totalité du champ dans son ensemble.

- ◇ Comme ici, « ce » qui exerce la force est le champ  $(\vec{E}, \vec{B})$ , il n'est **pas possible** d'appliquer la 3<sup>e</sup> loi de NEWTON qui, rappelons-le, ne concerne que des *points matériels*.
- ◇ Insistons : la 3<sup>e</sup> loi de NEWTON reste valable, c'est juste que la force de LORENTZ n'entre pas dans son champ d'application.

##### ★ version force de COULOMB

- ◇ Nous connaissons le champ créé par une charge ponctuelle (ou au moins de symétrie sphérique), nous pouvons donc en déduire la force qu'elle exerce :

La force exercée par une charge immobile  $q_1$  sur une autre charge immobile  $q_2$  s'écrit :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$$


- ✧ Même si cette loi n'est en toute rigueur valable que pour des charges immobiles, elle reste une excellente approximation pour des charges en mouvement à des vitesses faibles devant la lumière et pas trop éloignées l'une de l'autre.
- ✧ Cette deuxième approximation (l'éloignement) sera précisé en 2<sup>e</sup> année.

La force de COULOMB est une force newtonienne qui s'écrit :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad k = -\frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0}.$$

- ✧ Nous constatons que deux charges de même signe ont tendance à se repousser alors que deux charges de signes opposés ont tendance à s'attirer.

La force de COULOMB peut-être attractive ou répulsive.

### ★ force magnétique

- ✧ Nous en reparlerons dans la suite du chapitre lorsque nous aurons vu le lien entre un courant et le mouvement d'une charge.
- ✧ Nous retiendrons :

Le champ magnétique créé par une charge en mouvement est tel que :

$$B_{\text{créé}} \propto \mu_0 \times \frac{q_{\text{source}} v_{\text{source}}}{r^2}$$

- ✧ Nous allons voir pourquoi nous allons systématiquement le négliger.

## I.1.ii – ordres de grandeur

Valeurs fondamentales :

- ➔ charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- ➔ masse de l'électron :  $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ➔ masse du proton :  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

### ★ version LORENTZ

### 🕒 partie électrique

- ✧ Une pile plate de 4,5 V dont les deux électrodes sont séparées de 1 cm engendre un champ électrique de  $450 \text{ V.m}^{-1}$ .
- ✧ Pour qu'il y ait une étincelle dans l'air sec, il faut que le champ électrique dépasse les  $3 \text{ MV.m}^{-1}$ .
- ✧ Prenons un champ très faible de  $10^3 \text{ V.m}^{-1}$  et comparons la force de LORENTZ subie par un proton à son poids :

$$\frac{\|\vec{f}_L\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{e E}{m g} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^3}{1,7 \cdot 10^{-27} \times 10} = 10^{10}$$

- ✧ Nous pouvons donc négliger le poids devant la force de LORENTZ.

### 🔗 partie magnétique

- ✧ Le champ magnétique créé par la Terre est de l'ordre de  $10^{-5} \text{ T}$ , celui par un aimant de  $10^{-3} \text{ T}$ .
- ✧ En laboratoire, il n'est pas très difficile d'obtenir des champs de l'ordre de 0,1 à 1 T.
- ✧ Exprimons le rapport de la force de LORENTZ sur le poids :

$$\frac{\|\vec{f}_L\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{e v B}{m g} = \frac{v}{v_{\text{crit}}} \quad \text{avec} \quad v_{\text{crit}} = \frac{m g}{e B} = \frac{1,7 \times 10^{-27} \times 10}{1,6 \times 10^{-19} \times 0,1} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$

- ✧ Dès qu'une particule va à des vitesses bien supérieures à la vitesse critique précédente, nous pouvons négliger l'influence du poids.

### 🔗 conclusion

Au niveau des particules élémentaires, le poids sera toujours négligeable devant la force de LORENTZ.

🛑 s'il s'agit d'objets macroscopiques chargés (cf. électricité statique), le poids ne sera pas forcément négligeable.

📱 pour pouvoir négliger le poids devant la force de LORENTZ, il faut que cette dernière existe.

### ★ version COULOMB

- ✧ Écrivons le rapport entre la force de COULOMB et le poids d'un proton :

$$\frac{\|\vec{f}_C\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\frac{q^2}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}}{m g} = \frac{r_0^2}{r^2} \quad \text{avec} \quad r_0^2 = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0 m g} = \frac{(1,2 \times 10^{-19})^2}{4 \pi \times \frac{10^{-9}}{36 \pi} \times 1,7 \times 10^{-27} \times 10} = 10^{-2} \text{ m}^2$$

- ✧ Ce qui donne  $r_0 \simeq 10 \text{ cm}$ .
- ✧ Ainsi dès que deux charges sont proches  $r < 10 \text{ cm}$  le poids devient négligeable devant la force de COULOMB.

## I.1.iii – vision énergétique

★ **version LORENTZ**

La force de LORENTZ est conservative s'il n'y a pas de champ magnétique et que le champ électrique ne dépend pas du temps. Dans ces conditions, une charge  $q$  possède l'énergie potentielle

$$E_p = q V$$

◇ Pour le montrer, partons de l'expression de la force de LORENTZ compte-tenu de l'absence du champ magnétique.

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q \vec{E}$$

◇ Comme le champ électrique est électrostatique, nous avons

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \rightsquigarrow \quad \vec{f} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}} (q V)$$

◇ Ce qui montre bien que la force est conservative.

★ **version COULOMB**

La force de COULOMB dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0 r} \quad \text{où}$$

$r$  est la distance entre les deux charges.

◇ La démonstration a déjà été faite dans le cadre des forces newtoniennes.

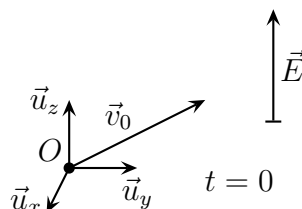
◇ En effet, une force newtonienne  $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$  est associée à l'énergie potentielle  $E_p = -\frac{k}{r}$  et la force de COULOMB est une force newtonienne avec  $k = -\frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0}$ .

## I.2 – Exemples fondamentaux

### I.2.i – mouvement dans un champ $\vec{E}$ uniforme et constant

★ **présentation, analyse**

◇ Considérons une particule de charge  $q$  en mouvement dans un champ électrique uniforme et constant  $\vec{E}$ .



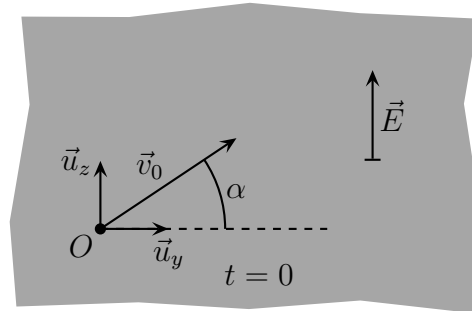
◇ Analyse physique :

- comme il s'agit d'une particule dans un champ, le mouvement sera essentiellement déterminé par la force de LORENTZ
- ici il y a trois degrés de liberté *a priori* puisque la particule peut se mouvoir dans les trois directions de l'espace

- la force de LORENTZ à **tout** instant et la vitesse à **l'instant initial** étant dans le même plan  $(\vec{E}, \vec{v}_0)$ , l'ensemble du mouvement se fera dans ce plan donc il n'y a que deux degrés de description
- les grandeurs pertinentes sont  $m$  (inertie),  $q$ ,  $E$  (action) ainsi que  $v_0$  et un angle entre  $\vec{v}_0$  et  $\vec{E}$ .

◇ Analyse technique :

- choisissons le repérage de telle sorte qu'un axe soit parallèle à  $\vec{E}$
- 2 degrés de description, nous allons utiliser un PFD



### ★ équation d'évolution

◇ En négligeant le poids devant la force de LORENTZ, le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire donne :

$$m \vec{a}(t) = q \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}$$

◇ Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré et donc d'un cas que nous avons déjà rencontré lors de l'étude de la chute libre.

### ★ résolution

◇ La résolution est très rapide (ne pas oublier les conditions initiales)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = \frac{q E}{m} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(t) = v_0 \cos \alpha \\ \frac{dz}{dt}(t) = \frac{q E t}{m} + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = (v_0 \cos \alpha) t \\ z(t) = \frac{q E t^2}{2 m} + (v_0 \sin \alpha) t \end{array} \right.$$

◇ Pour avoir la trajectoire, éliminons  $t$  entre  $y(t)$  et  $z(t)$

$$t = \frac{y}{v_0 \cos \alpha} \quad \rightsquigarrow \quad z = \frac{q E}{2 m \cos^2 \alpha} \times t^2 + (\tan \alpha) t$$

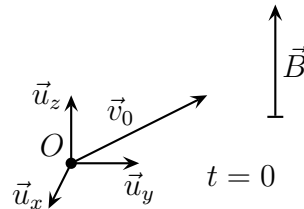
La trajectoire d'une particule dans un champ électrique **uniforme** et **constant** est une parabole ou une droite suivant les conditions initiales.



## I.2.ii – mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme et constant

### ★ présentation, analyse

- ◇ Considérons une particule de charge  $q$  en mouvement dans un champ électrique uniforme et constant  $\vec{B}$ .

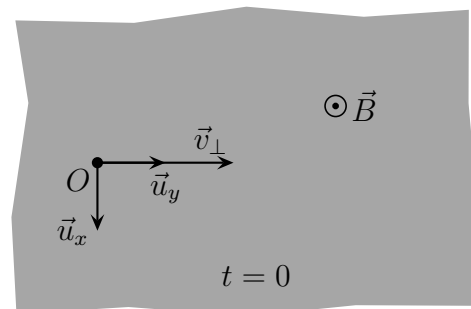
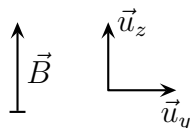
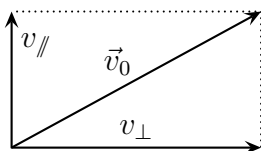


- ◇ Analyse physique :

- comme il s'agit d'une particule dans un champ, le mouvement sera essentiellement déterminé par la force de LORENTZ
- ici il y a trois degrés de liberté *a priori* puisque la particule peut se mouvoir dans les trois directions de l'espace
- la force de LORENTZ à **tout** instant orthogonale à  $\vec{B}$  et comme à l'instant initial la vitesse n'est **pas** orthogonale à  $\vec{B}$  aussi, nous pouvons en déduire que le mouvement ne sera **pas** plan.
- les grandeurs pertinentes sont  $m$  (inertie),  $q$ ,  $B$  (action) ainsi que  $v_0$  et un angle entre  $\vec{v}_0$  et  $\vec{B}$ .

- ◇ Analyse technique :

- choisissons le repérage de telle sorte qu'un axe soit parallèle à  $\vec{B}$  et que, dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$ , la vitesse soit suivant un seul axe.
- il y a 3 degrés de description donc nous allons utiliser un PFD



### ★ équations d'évolution

- ◇ Comme il s'agit d'un mouvement d'une particule dans un champ, nous pouvons négliger le poids devant la force de LORENTZ et ainsi le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit

$$m \vec{a}(t) = q \vec{v}(t) \wedge \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}(t) = \frac{q}{m} \times \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

- ◇ Une fois le calcul des composantes du produit vectoriel effectué, nous arrivons à

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{qB}{m} v_y(t) \\ \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -\frac{qB}{m} v_x(t) \\ \frac{d^2z}{dt^2}(t) = 0 \end{cases}$$

★ **résolution**

🌀 **suivant  $\vec{B}$**

◇ Il s'agit de la projection sur  $\vec{u}_z$

$$\frac{d^2z}{dt^2}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{dt}(t) = C^{\text{te}} = v_{\parallel} \quad \rightsquigarrow \quad z(t) = v_{\parallel} t$$

◇ Il s'agit d'un mouvement uniforme **sur l'axe parallèle à  $B$** .

🌀 **dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$ , méthode 1**

◇ Commençons par réécrire les équations en considérant  $q > 0$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = \omega_c v_y(t) \\ \frac{dv_y}{dt}(t) = -\omega_c v_x(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{qB}{m}$$

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \text{ est appelée la } \textit{pulsation cyclotron}.$$

◇ Le nom s'expliquera de lui-même au sous-paragraphe suivant.

◇ Nous pouvons ainsi résoudre par substitution

$$v_x(t) = -\frac{1}{\omega_c} \times \frac{dv_y}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{\omega_c} \times \frac{d^2v_y}{dt^2}(t) = \omega_c v_y(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2v_y}{dt^2}(t) + \omega_c^2 v_y(t) = 0$$

◇ De même

$$v_y(t) = \frac{1}{\omega_c} \times \frac{dv_x}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\omega_c} \times \frac{d^2v_x}{dt^2}(t) = -\omega_c v_x(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2v_x}{dt^2}(t) + \omega_c^2 v_x(t) = 0$$

◇ Et ainsi, en rapprochant les deux équations, cela donne

$$\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2}(t) + \omega_c^2 v_x(t) = 0 \\ \frac{d^2v_y}{dt^2}(t) + \omega_c^2 v_y(t) = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} v_x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \\ v_y(t) = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

- ✧ Les conditions initiales se voient sur le schéma pour  $v_x(0)$  et  $v_y(0)$  et se trouvent à l'aide des équations différentielles pour  $\frac{dv_x}{dt}(0)$  et  $\frac{dv_y}{dt}(0)$

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = v_{\perp} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(0) = \omega_c v_{\perp} \\ \frac{dv_y}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

- ✧ Cela donne

$$v_x(0) = v_{\perp} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

- ✧ Cette méthode :

- présente l'avantage d'être assez intuitive
- présente l'inconvénient de faire appel à des conditions initiales cachées (à cause du fait qu'à un moment il a fallu dériver une équation pour substituer)

### 🔗 dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ , méthode 2

- ✧ Introduisons une fonction complexe inconnue (comme nous l'avons fait avec le pendule de FOUCAULT)  
 $\underline{H}(t) = v_x(t) + j v_y(t)$ .
- ✧ L'équation différentielle vérifiée par  $\underline{H}(t)$  s'écrit

$$\frac{d\underline{H}}{dt}(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) + j \frac{dv_y}{dt}(t) = \omega_c v_y(t) - j \omega_c v_x(t) = -j \omega_c (v_x + j v_y(t)) = -j \omega_c \underline{H}(t)$$

- ✧ Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant qui se résout très vite

$$\frac{d\underline{H}}{dt}(t) + j \omega_c \underline{H}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(t) = \underline{H}_0 e^{-j \omega_c t}$$

- ✧ Or les conditions initiales donnent

$$\underline{H}(0) = v_x(0) + j v_y(0) = j v_{\perp} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(t) = j v_{\perp} e^{-j \omega_c t}$$

- ✧ Et en revenant aux notations réelles

$$v_x(t) = \operatorname{Re}(\underline{H}(t)) = +v_{\perp} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = \operatorname{Im}(\underline{H}(t)) = +v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

- ✧ Il s'agit bien du même résultat.

- ✧ Cette méthode :

- permet de se contenter des conditions initiales « naturelles »
- fait passer par un intermédiaire de calcul non naturel

- ✧ À chacun maintenant de choisir sa méthode.

### 🔗 trajectoire dans le plan orthogonal à $\vec{B}$

- ✧ À partir de l'expression des vitesses  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  nous trouvons, toujours en faisant attention aux conditions initiales

$$x(t) = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

- ✧ Il s'agit là d'une trajectoire circulaire uniforme :

→ de rayon  $R = \left| \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \right| = \frac{m v_{\perp}}{q B}$

→ comme ici le signe de  $\omega_c$  change avec  $q$ , le mouvement se fait dans le sens indirect pour  $q > 0$  et dans le sens direct pour  $q < 0$

### 🌀 rassemblement

◇ En tenant compte du fait que  $q \leq 0$ , nous avons

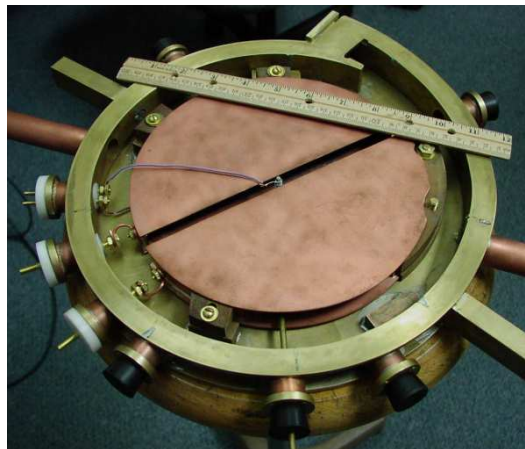
La trajectoire d'une particule dans un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}$  est hélicoïdale d'axe la direction de  $\vec{B}$  et de rayon  $R = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}$  où  $v_{\perp}$  est la composante de la vitesse dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$ .

◇ Tout se passe comme si les particules s'enroulaient autour des lignes de champ, les charges positives et négatives ne s'enroulant pas dans le même sens.

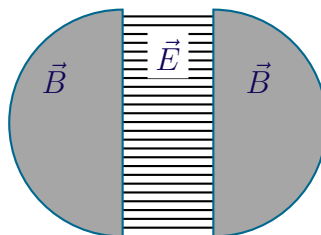
## I.2.iii – application au cyclotron

### ★ présentation du dispositif

- ◇ Un cyclotron est un dispositif qui permet d'accélérer des particules avec un appareillage de taille modeste surtout par rapport au LHC qui mesure 27 km de circonférence : un cyclotron tient aisément dans une pièce de travail usuelle.
- ◇ Sur la photo ci-dessous, le réglet fait 30 cm.



- ◇ Un cyclotron est essentiellement composé
  - de deux dés dans lesquels règne un champ magnétique uniforme et constant
  - un espace interdé dans lequel règne un champ électrique contrôlé par un générateur sinusoïdal

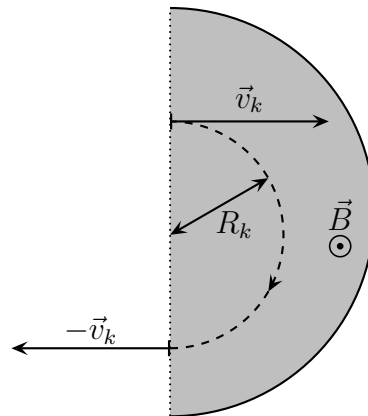


- ◇ Pour la suite, considérons que :
  - les particules accélérées sont des particules  $\alpha$  (noyaux d'hélium) de charge  $q = 2e > 0$
  - l'ensemble du mouvement est dans le plan du schéma

★ **fonctionnement**

🌀 **mouvement dans un dé**

✧ Imaginons une particule  $\alpha$  qui arrive dans la zone de transition avec une vitesse  $\vec{v}_k$ .



✧ Alors nous savons qu'il aura une trajectoire circulaire :

→ de rayon  $R_k = \frac{m v_k}{2 e B}$

→ de pulsation *cyclotron*  $\omega_c = \frac{2 e B}{m}$

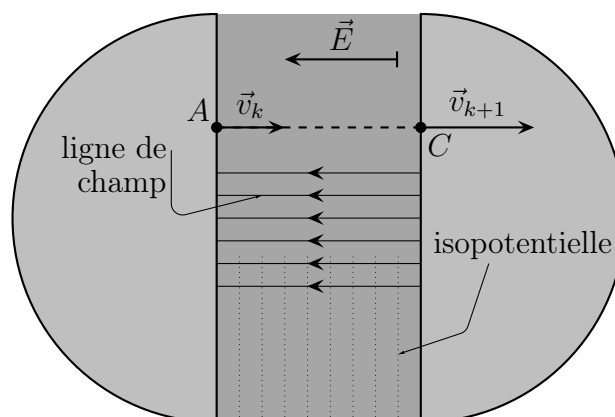
✧ Ainsi, pour ressortir, il faudra que l'électron ait fait un demi-tour ce qui correspond à la durée

$$\delta t_k = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{2 e B}$$

✧ Remarquons que cette durée est intrinsèque au dispositif et ne dépend pas de la vitesse de la particule  $\alpha$ .

🌀 **mouvement dans la zone de transition**

✧ Considérons une particule  $\alpha$  qui sort d'un dé à la vitesse  $v_k$  et cherchons la vitesse  $v_{k+1}$  à laquelle elle arrive dans le dé suivant.



✧ Ici comme la trajectoire est rectiligne et que seule nous intéresse la vitesse, nous allons utiliser une méthode énergétique.

✧ Faisons l'approximation que les lignes de champ sont bien rectilignes et donc que les isopotentielle sont parallèles aux faces planes des dés.

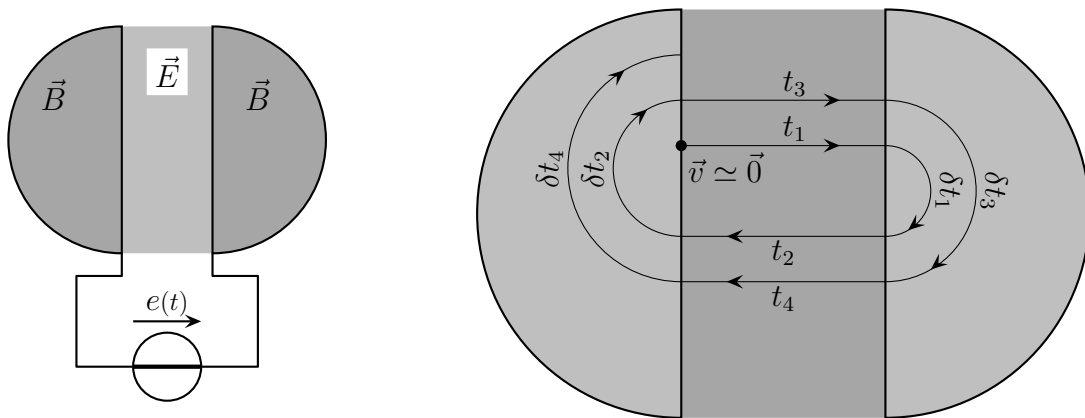
✧ Alors, comme seule agit la force de LORENTZ, conservative, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie pour l'électron entre les points A et C ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m v_k^2 + 2 e V_A = \frac{1}{2} m v_{k+1}^2 + 2 e V_C \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} m v_{k+1}^2 = \frac{1}{2} m v_k^2 + 2 e (V_A - V_C)$$

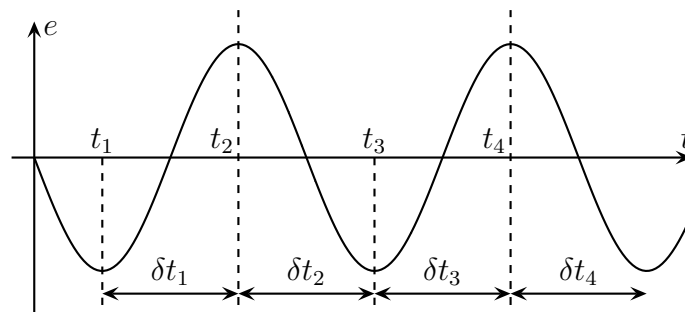
◇ Ainsi quand  $V_A > V_C$  la particule  $\alpha$  est effectivement accélérée.

### ★ caractéristiques globales

- ◇ Pour que la particule  $\alpha$  soit accélérée à chaque passage dans la zone de champ  $\vec{E}$ , il est nécessaire de changer le sens des potentiels.
- ◇ Pour cela les faces des dés sont reliées à un générateur sinusoïdal.



- ◇ Le but est de faire en sorte que pendant que l'électron change de direction, la différence de potentiels change de signe.



### 🌀 vitesse maximale

- ◇ Prenons un cyclotron tel que
  - le rayon d'un dé vaille  $R = 50 \text{ cm}$
  - le champ magnétique soit de norme  $B = 1,0 \text{ T}$
- ◇ Alors la trajectoire dans un dé impose :

$$R_{\text{mx}} = \frac{m v_{\text{max}}}{2 e B} \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{max}} = \frac{2 e B R_{\text{max}}}{m} = \underline{2,39306} \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

- ◇ Rappelons ici que

$$m_{\alpha} = 2 m_p + 2 m_n \quad \text{avec} \quad m_p = 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{et} \quad m_n = 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg} \simeq m_p$$

### 🕒 durée de l'accélération

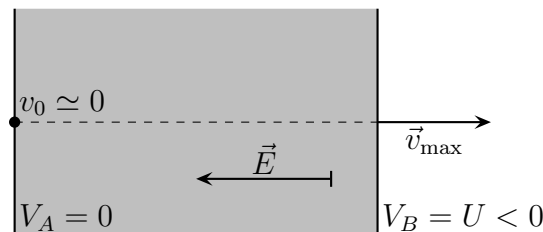
- À chaque demi-tour l'énergie cinétique augmente de  $2eU_0$  où  $U_0$  est l'amplitude de la tension du générateur sinusoïdal.
- Il faut donc  $N$  demi-tours avec  $N = \frac{E_{c,\max}}{2eU_0}$ .
- Sachant que chaque demi-tour dure  $\delta t = \frac{2eB}{\pi m}$  nous avons :

$$\Delta t = N \delta t = \frac{E_{c,\max}}{2eU_0} \times \frac{\pi m}{2eB} = \frac{\pi R^2 B}{2U_0} = \underline{3,92699 \times 10^{-5} \text{ s}}$$

- Pour l'AN nous avons pris  $U_0 = 10 \text{ kV}$ .

### ★ intérêt

- Si la particule  $\alpha$  avait été accélérée par un dispositif linéaire, *ie.* par une simple différence de potentiels, la situation aurait été la suivante.



- Pour avoir la même énergie cinétique finale, il aurait fallu une tension

$$U = \frac{E_{c,\max}}{2e} = 5,9 \times 10^6 \text{ V}$$

- Cette tension est clairement plus difficile à réaliser.

### ★ retour sur les approximations

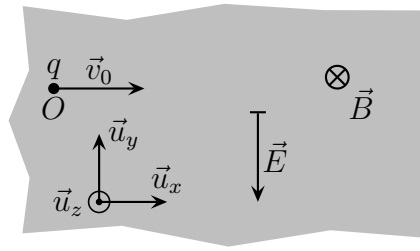
- Le cyclotron présenté ci-dessus est idéalisé.
- Pour le rendre plus conforme à la réalité, il est nécessaire de prendre en compte :
  - le mouvement vertical des particules, mouvement qu'il convient de maîtriser par les conditions initiales pour par un effet de confinement
  - la durée de transition dans la zone de champ  $\vec{E}$  qui peut devenir telle qu'il ne soit plus vraiment possible d'y considérer le champ comme constant.
- En ce qui concerne la limite relativiste, rappelons que les effets sont en  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  soit, ici, de l'ordre de 0,6 %. Ils restent pour l'instant négligeables, mais en cas de vitesse supérieure, il faudra y recourir.

## I.3 – Sélecteur de vitesse

### I.3.i – dispositif

#### ★ présentation, analyse

- Considérons une particule de charge  $q$  qui entre dans une zone où régnent un champ électrique uniforme et constant ainsi qu'un champ magnétique uniforme et constant.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux et le dispositif est tel que la vitesse initiale est orthogonale à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .



◇ Le but est de trouver la trajectoire de la particule.

◇ Analyse physique :

- la particule étant une particule, nous pourrions négliger l'action du poids, nous ne prendrons donc en compte que la force de LORENTZ
- comme la force de LORENTZ est toujours dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$  et que la vitesse initiale l'est aussi, nous pouvons dire que le mouvement est plan, il n'y aura donc que deux degrés de description
- les grandeurs pertinentes sont  $m$  (inertie),  $q$ ,  $E$  et  $B$  (action) et  $v_0$  (condition initiale)

◇ Analyse technique :

- le choix du repérage est immédiat vu que  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{v}_0$  sont orthogonaux
- étant donné qu'il y a deux degrés de description, nous allons utiliser le PFD

### I.3.ii – équations horaires

#### ★ équations d'évolution

◇ Écrivons le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire tout en négligeant le poids

$$m \vec{a}(t) = q \left( \vec{E}(M(t)) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(M(t)) \right) \stackrel{\text{chp unif}}{=} q \left( \vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B} \right)$$

◇ Nous avons ainsi

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -q B \dot{y}(t) \\ m \ddot{y}(t) = -q E + q B \dot{x}(t) \\ m \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

◇ La dernière équation combinée à  $v_z(0) = 0$  nous apprend que le mouvement est plan, ce que nous savions déjà.

◇ Réécrivons les équations en introduisant la pulsation (cyclotron)  $\omega_0 = \frac{q B}{m}$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_0 \dot{y}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) - \omega_0 \dot{x}(t) = -\frac{q E}{m} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_0 \dot{y}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) - \omega_0 \dot{x}(t) = -\omega_0 \frac{E}{B} \end{cases}$$

#### ★ résolution

◇ Nous allons utiliser la technique de la fonction complexe inconnue. Posons  $\underline{H}(t) = x(t) + j y(t)$ .

◇ Alors, grâce à la linéarité de l'opérateur dérivée :



$$\begin{aligned}\ddot{\underline{H}}(t) &= \ddot{x}(t) + j \ddot{y}(t) = -\omega_0 \dot{y}(t) + j \left( -\omega_0 \frac{E}{B} + \omega_0 \dot{x}(t) \right) \\ &= j \omega_0 (\dot{x}(t) + j \dot{y}(t)) - j \omega_0 \frac{E}{B} = j \omega_0 \dot{\underline{H}}(t) - j \omega_0 \frac{E}{B}\end{aligned}$$

◇ Ainsi nous obtenons l'équation différentielle

$$\ddot{\underline{H}}(t) - j \omega_0 \dot{\underline{H}}(t) = -j \omega_0 \frac{E}{B}$$

◇ Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du **premier** ordre en  $\dot{\underline{H}}(t)$ .

◇ Compte tenu de la condition initiale  $\dot{\underline{H}}(0) = \dot{x}(0) + j \dot{y}(0) = v_0$  nous obtenons la solution :

$$\dot{\underline{H}}(t) = \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) e^{j \omega_0 t} + \frac{E}{B} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} v_x(t) = \operatorname{Re} \left( \dot{\underline{H}}(t) \right) = \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{E}{B} \\ v_y(t) = \operatorname{Im} \left( \dot{\underline{H}}(t) \right) = \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

### I.3.iii – trajectoires

#### ★ expression

◇ En tenant compte des conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $y(0) = 0$  nous trouvons

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\omega_0} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{E}{B} \times t \\ y(t) = \frac{1}{\omega_0} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) (1 - \cos(\omega_0 t)) \end{cases}$$

#### ★ interprétation

◇ Nous pouvons réécrire l'expression de  $x(t)$  sous la forme

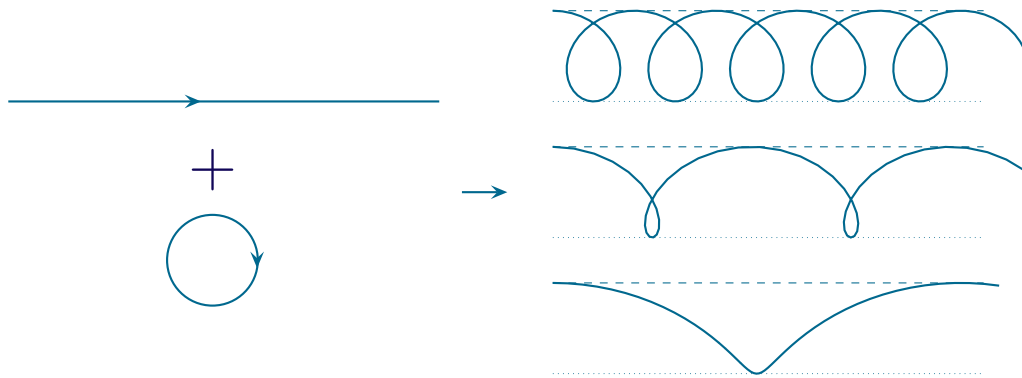
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{où} \quad x_1(t) = \frac{1}{\omega_0} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{E}{B} \times t$$

◇ Ainsi en notant  $y(t) = y_1(t)$  nous pouvons dire que le mouvement global est la superposition de :

$$\rightarrow (x_1(t), y_1(t)), \text{ cercle de rayon } \left| \frac{1}{\omega_0} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \right|$$

$$\rightarrow (x_2(t), 0) \text{ trajectoire rectiligne uniforme de vitesse } \frac{E}{B}$$

◇ Visuellement, suivant le rapport entre vitesse de la trajectoire uniforme, la vitesse initiale et la norme du champ magnétique, il est possible d'avoir plusieurs types de trajectoires.



- ✧ Dans le cas très particulier où  $v_0 = \frac{E}{B}$ , alors la trajectoire est purement rectiligne : la partie magnétique de la force de LORENTZ compense exactement la partie électrique.
- ✧ En plaçant un diaphragme en face de la zone où sont éjectées les particules, il est possible de ne conserver que celles qui ont eu une trajectoire rectiligne donc uniquement celles qui ont « exactement » la vitesse  $v_0 = \frac{E}{B}$ .



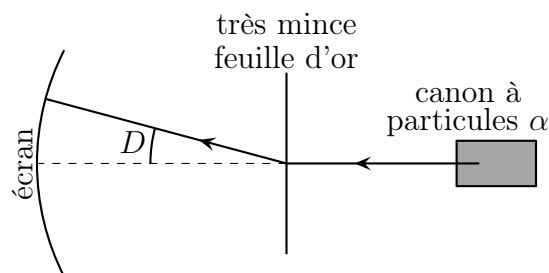
- ✧ Ce dispositif permet de sélectionner des particules suivant leur vitesse, d'où son nom.

## I.4 – Expérience de RUTHERFORD

### I.4.i – dispositif

#### ★ expérience

- ✧ L'expérience réalisée pour la première fois en 1909 par Hans GEIGER<sup>1</sup> et Ernest MARSDEN et dirigée par Ernest RUTHERFORD consiste à bombarder une très fine feuille d'or par des particules  $\alpha$  et d'observer leurs déviations à l'aide d'un écran sensible aux particules  $\alpha$ .

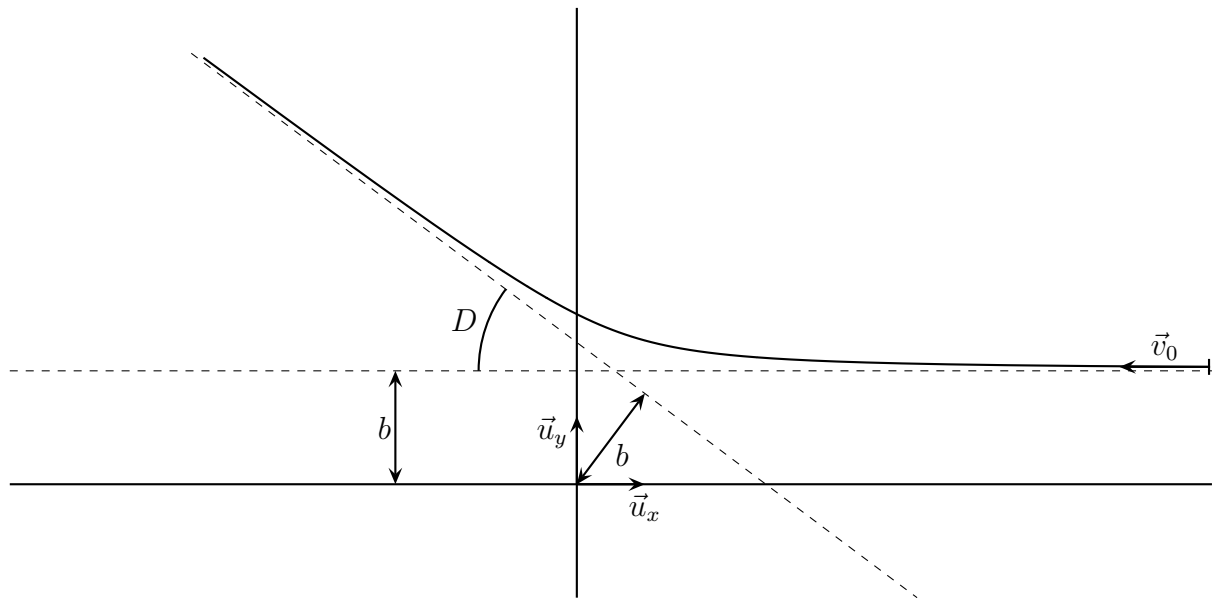


- ✧ Cette expérience avait pour but d'explorer la matière au niveau atomique afin d'essayer de déterminer comment celle-ci est constituée.
- ✧ Au niveau des résultats, il est apparu que :
  - ➔ de nombreuses particules passaient tout droit, ce qui a mené à l'idée de la structure lacunaire de la matière
  - ➔ quelques particules revenaient en arrière, ce qui a mené à l'hypothèse d'un atome constitué d'un noyau très petit par rapport à la taille de l'atome

<sup>1</sup>Le même que le compteur.

### ★ modélisation, analyse

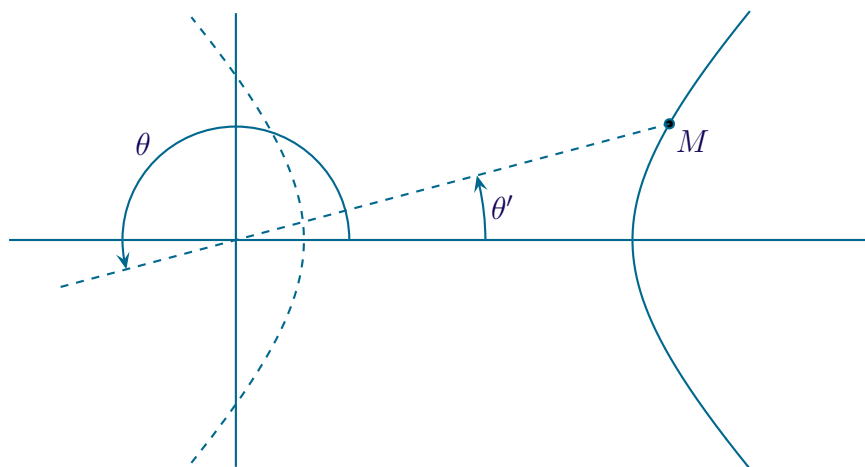
◇ Modélisons l'interaction entre une particule  $\alpha$  et un noyau d'or ( $Z = 79$ ) de la manière suivante.



- ◇ La particule  $\alpha$  de charge  $q = 2e > 0$  est repoussée par le noyau d'or de charge  $Ze > 0$ .
- ◇ L'interaction entre ces deux particules est newtonienne et donc comme la particule arrive de l'infini avec une vitesse non nulle, la trajectoire sera une hyperbole.
- ◇ Le paramètre d'impact est  $b$ .
- ◇ Le but va être de relier la déviation  $D$  au paramètre d'impact  $b$  et aux grandeurs pertinentes du problème, à savoir  $m$  (inertie),  $k = -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$  pour l'interaction et  $v_0$  (condition initiale).

### ★ interlude mathématique

- ◇ Dans le cas d'une trajectoire hyperbolique, celle-ci s'écrit  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  et fait apparaître deux branches.



- ◇ Dans le cas d'un mouvement à force répulsive, seule la branche en trait plein nous intéresse.
- ◇ Or, mathématiquement, c'est celle qui correspond à  $r(\theta) \leq 0$  et  $\theta$ , angle non naturel, ce qui, physiquement, n'est pas acceptable.
- ◇ C'est pourquoi nous allons plutôt réécrire la solution en fonction de  $\theta'$  (angle naturel) et avec  $r \geq 0$ .

$$r'(\theta') = -r(\theta') = -\frac{p}{1 + e \cos(\theta' + \pi)} = -\frac{p}{1 - e \cos(\theta')} = \frac{p}{e \cos(\theta') - 1}$$

La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien est hyperbolique et s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

## I.4.ii – angle de déviation d'une particule $\alpha$

### ★ plan de bataille

◇ Nous allons procéder en quatre étapes :

- écrire la solution générale de la trajectoire sous une forme simple
- relier les constantes d'intégration de la trajectoire à l'angle  $D$  recherché
- calculer la ou les constantes idoines
- injecter le résultat dans l'expression de  $D$  et simplifier

### ★ écriture générale avec le formalisme de BINET

◇ Comme ici le repérage choisi n'est **pas** tel que l'axe focal de l'hyperbole soit confondu avec l'axe  $(Ox)$ , il est nécessaire d'écrire la trajectoire sous la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta + \varphi) - 1}$$

◇ Utilisons le formalisme de BINET

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{p} (e \cos(\theta + \varphi) - 1)$$

◇ Notons aussi que  $\theta$  est tel que  $0 \leq \theta \leq \pi - D$ .

### ★ expression de $D$ en fonction des constantes d'intégration

◇ Lorsque  $\theta \rightarrow 0$ , la particule  $\alpha$  est sur une asymptote et nous avons alors

$$r(\theta) \rightarrow +\infty \quad \rightsquigarrow \quad u(\theta) \rightarrow 0$$

◇ De même, pour  $\theta \rightarrow \pi - D$ , la particule  $\alpha$  est sur l'autre asymptote et ainsi

$$r(\theta) \rightarrow +\infty \quad \rightsquigarrow \quad u(\theta) \rightarrow 0$$

◇ Nous pouvons en déduire, d'après l'expression de  $u(\theta)$

$$\cos(0 + \varphi) = \cos(\pi - D + \varphi) \quad \rightsquigarrow \quad -\varphi = \pi - D + \varphi \quad \rightsquigarrow \quad D = 2\varphi + \pi$$

◇ Autrement dit, il suffit de déterminer  $\varphi$  et nous aurons la déviation.

◇ Insistons sur le fait que nous avons besoin de ne calculer ni  $e$  ni  $p$ .

### ★ détermination des constantes d'intégration

- ◇ Retrouvons tout d'abord l'expression de la vitesse en variables de BINET sachant que  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .  
 ◇ La composante sur  $\vec{u}_r$  donne, avec  $\sigma = m r^2 \dot{\theta}$  :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dr}{du} \times \frac{du}{d\theta} = \dot{\theta} \times \left( -\frac{1}{u^2} \right) \times u'(\theta) = -r^2 \dot{\theta} u'(\theta) = -\frac{\sigma}{m} u'(\theta)$$

- ◇ Pour la composante sur  $\vec{u}_\theta$  nous avons

$$r \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r} = \frac{\sigma}{m} u(\theta)$$

- ◇ Donc finalement  $\vec{v} = \frac{\sigma}{m} \left( -u'(\theta) \vec{u}_r + u(\theta) \vec{u}_\theta \right)$ .  
 ◇ Exploitions la vitesse initiale en remarquant que lorsque  $\theta = 0$ ,  $\vec{u}_r(0) = \vec{u}_x$  et  $\vec{u}_\theta(0) = \vec{u}_y$

$$\vec{v}(0) = -v_0 \vec{u}_r(0) = \frac{\sigma}{m} \left( -u'(0) \vec{u}_r(0) + u(0) \vec{u}_\theta(0) \right)$$

- ◇ La composante sur  $\vec{u}_\theta$  donne

$$u(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{p} (e \cos \varphi - 1) \quad \rightsquigarrow \quad \cos \varphi = +\frac{1}{e}$$

- ◇ Comme  $u'(\theta) = -\frac{e \sin(\theta + \varphi)}{p}$ , la composante sur  $\vec{u}_r$  en  $\theta = 0$  donne

$$-\frac{\sigma}{m} u'(0) = -v_0 \quad \rightsquigarrow \quad -v_0 = +\frac{\sigma e}{m p} \sin \varphi \quad \rightsquigarrow \quad \sin \varphi = -\frac{m p v_0}{\sigma e}$$

- ◇ Et ainsi nous trouvons  $\tan \varphi = -\frac{m p v_0}{\sigma}$ .

### ★ simplification

- ◇ De  $D = \pi + 2\varphi$ , nous tirons

$$\varphi = \frac{D}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \tan \left( \frac{D}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin \left( \frac{D}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left( \frac{D}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{D}{2}}$$

- ◇ Nous avons donc

$$\frac{1}{\tan \frac{D}{2}} = -\frac{m p v_0}{\sigma} \quad \rightsquigarrow \quad \tan \frac{D}{2} = -\frac{\sigma}{m p v_0}$$

- ◇ En reprenant un vieux résultat qui n'est pas à connaître mais à savoir redémontrer (au moins avec l'homogénéité)

$$p = -\frac{\sigma^2}{m k} \quad \rightsquigarrow \quad \tan \frac{D}{2} = \frac{k}{\sigma v_0}$$

- ◇ Enfin, le bras de levier nous permet d'écrire

$$\sigma = +b m v_0 \quad \rightsquigarrow \quad \tan \frac{D}{2} = \frac{k}{m b v_0^2}$$

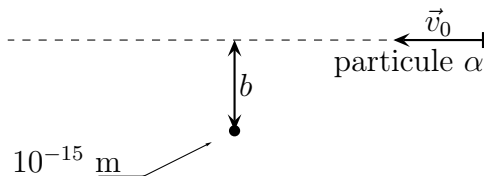
◇ Il s'agit bien d'un résultat homogène puisque nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{k}{m b v_0^2} \equiv \frac{k}{r} \times \frac{1}{m v^2} \equiv \frac{E_p}{E_c} \equiv 1$$

### I.4.iii – déviation d'un faisceau de particules $\alpha$

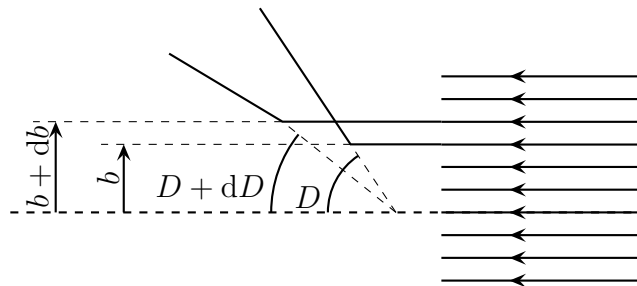
★ en réalité ...

◇ Il faut bien voir que cette interaction se fait à l'échelle microscopique et qu'en réalité la distance  $b$  est totalement incontrôlée.



★ ... le travail n'est pas terminé

◇ Pour interpréter correctement l'expérience, il envisager quelle proportion de particule arrive entre l'angle  $D$  et l'angle  $D + dD$ .



◇ Pour cela il faut commencer par établir le lien entre nombre de particules qui arrivent entre  $b$  et  $b + db$  sans oublier le fait que tout se passe en trois dimension.

◇ Une fois cette étape réalisée, il est possible d'avoir la proportion de particules arrivant entre  $D$  et  $D + dD$  puis de comparer avec les résultats expérimentaux.

## II – Étude du courant électrique

Le but de cette partie est d'étudier d'un point de vue mécanique le courant électrique.

### II.1 – Description du courant électrique

#### II.1.i – kesako ?

Un *courant électrique* est un déplacement de charges, quelles que soient ces charges : électrons, ions, protons, ...

◇ Exemples de courants électriques :

- dans les conducteurs électriques (notamment les métaux)
- dans les solutions électrolytiques
- les étincelles, la foudre, ... sont aussi des courants électriques

#### II.1.ii – vecteur densité de courant

◇ Pour décrire un courant, il faut donc préciser combien de charges vont où.

Le *vecteur densité de courant volumique*  $\vec{j}$  est défini par :

$$\vec{j} \triangleq \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

- $n_i$  est la densité volumique du porteur de charge  $i$  ;
- $q_i$  est la charge d'un porteur  $i$  ;
- $\vec{v}_i$  est la vitesse d'ensemble des porteurs  $i$ .

◇ Avec  $[n_i] = (\text{m})^{-3}$ ,  $[q_i] = (\text{C})$  et  $[\vec{v}_i] = (\text{m}).(\text{s})^{-1}$  nous trouvons :

$$[\vec{j}] = (\text{A}).(\text{m})^{-2}$$

◇ Bien que l'unité et le nom ne le montre pas,  $\vec{j}$  est un courant *volumique* au sens où il s'agit d'une grandeur représentant un courant électrique pouvant bouger dans un *volume*.

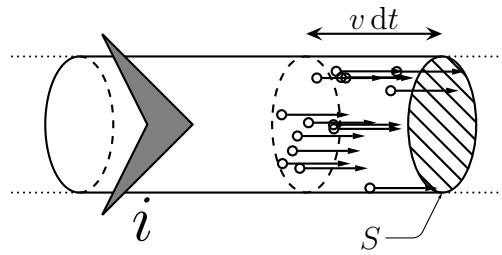


Lorsqu'il n'y a qu'un seul type de porteur de charge (comme cela sera le cas dans la suite), nous avons tout simplement  $\vec{j} = n q \vec{v}$ .

#### II.1.iii – lien avec l'intensité

##### ★ cas particulier très fréquent

- ◇ Rappelons que l'intensité est, par définition, la quantité de charge qui traverse une section donnée de conducteur dans le sens de la flèche représentant  $i$ .
- ◇ En faisant un zoom sur une section de conducteur, nous allons regarder combien passent pendant la durée  $dt$ .



- ✧ Pour cela supposons que tous les porteurs de charges ont la même vitesse  $\vec{v}$  correspondant à la vitesse de dérive (ou « vitesse d'ensemble »).
- ✧ Comme pendant la durée  $dt$  tous les porteurs parcourent la distance  $v dt$ , nous voyons que seuls les porteurs contenus, au départ, dans le cylindre de section  $S$  et de hauteur  $v dt$  passeront la section de contrôle.
- ✧ En notant  $dN$  le nombre de porteurs traversant  $S$  pendant  $dt$ , nous avons donc, par définition de la densité volumique :

$$dN = n d\mathcal{V} = n S v dt$$

- ✧ Cela donne une charge  $dq = q dN = n q S v dt$  et une intensité valant  $i = \frac{dq}{dt} = n q v S$  ou encore :

Dans un conducteur de section droite  $S$ , l'intensité s'écrit

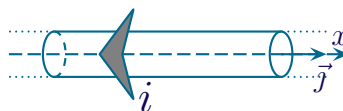
$$i = j \times S$$

- ✧ Pour  $i > 0$ , il faut donc  $j = n q v > 0$  ce qui correspond à :

- $q < 0$  et  $v < 0$  : des électrons vont dans le sens opposé au courant ;
- $q > 0$  et  $v > 0$  : des charges positives vont dans le sens du courant.



Il faut faire attention aux conventions. Dans le cas représenté ci-dessous nous avons  $i = -j_x S$  car il faut  $j_x < 0$  pour avoir  $i > 0$ .



### ★ généralisation

L'intensité qui passe à travers une section  $\mathcal{S}$  est le flux du vecteur densité de courant volumique à travers cette surface :

$$i = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ✧ C'est pour cette raison que le vecteur  $\vec{j}$  est aussi appelé « vecteur densité surfacique de courant volumique ».

## II.1.iv – retrouver l'expression du champ magnétique créé par une charge

- ✧ Maintenant que nous savons comment relier le mouvement des charges au courant électrique, nous pouvons faire l'opération inverse : partir d'une loi concernant les courants électriques et revenir à la loi concernant les charges.



✧ Prenons la loi de BIOT et SAVART et cherchons le champ créé par « un bout » de circuit :

$$\vec{B}_{(M)} = \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \rightsquigarrow d\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Or, d'après ce qui précède, nous pouvons écrire, avec  $\vec{u}$  le vecteur tangent au circuit électrique

$$i d\vec{\ell}_P = j S d\ell \vec{u} = n q v S d\ell \vec{u} = dN \times q \vec{v}$$

✧ Comme, du point de vue de  $M$ , toutes les charges du morceau élémentaire  $d\vec{\ell}_P$  sont au même point  $P$ , nous pouvons dire que ces  $dN$  charges créent le même champ magnétique ou encore que le champ magnétique créé par *une* charge s'écrit :

$$\vec{B}_{P(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times q_P \vec{v}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Ce qu'il y a d'extraordinaire, c'est que cette loi de champ magnétique créé par **une** charge n'est vraie que pour les particules qui ont de faibles vitesses et de faibles accélérations **mais** que la loi de BIOT et SAVART reste la même, quelles que soient les vitesses et les accélérations des porteurs de charges créant le courant.

## II.2 – Courant dans un conducteur

### II.2.i – des électrons libres ...

- ✧ Sans faire une grande théorie très complexe et faisant appel à la mécanique quantique, nous pouvons dire qu'il y a deux types d'électrons dans les matériaux conducteurs :
  - ➔ les électrons de conduction participant au courant électrique ;
  - ➔ les électrons de valences responsables de la cohésion du matériau.
- ✧ Les électrons de conduction sont dits *libres* car ils se comportent comme si **rien** n'entravait leurs mouvement dans le conducteur, pourvu seulement qu'ils restent dans le matériau. Il faut vraiment les voir comme un gaz dans un récipient que serait le métal.
- ✧ Les électrons de valence, eux, restent autour des noyaux atomiques.

### II.2.ii – ... à deux vitesses

#### ★ vitesse de dérive

- ✧ Recherchons numériquement la vitesse de dérive, ou vitesse d'ensemble, des électrons dans un fil de cuivre de section  $S = 1,0 \text{ mm}^2$  parcouru par un courant d'intensité  $I = 1,0 \text{ A}$ .
- ✧ Pour cela, nous admettons qu'il y a un électron libre par atome de cuivre et nous allons utiliser les valeurs tabulées :
  - ➔ masse volumique du cuivre :  $8,90.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ;
  - ➔ masse molaire du cuivre :  $65,5 \text{ g.mol}^{-1}$  ;
  - ➔ nombre d'AVOGADRO :  $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;
  - ➔ charge élémentaire :  $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$ .
- ✧ Nous trouvons alors :
  - ➔ une densité volumique de porteur :  $n = 8,179847 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  ;
  - ➔ un vecteur densité volumique de courant :  $j = 1,0 \times 10^6 \text{ C.m}^{-2}$  ;
  - ➔ une vitesse de dérive :  $v = 7,640729 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ .
- ✧ Nous constatons que la vitesse de dérive est vraiment très faible par rapport à la vitesse de la lumière, vitesse à laquelle « va » l'électricité.

### ★ vitesse particulière

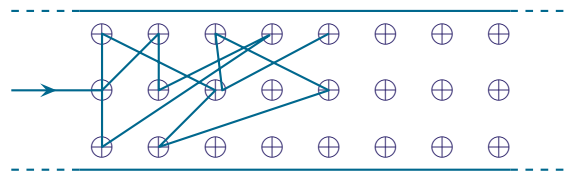
- ◇ Nous verrons plus tard que la moyenne de l'énergie cinétique d'une particule libre est telle que  $\langle e_{c,i} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$  où  $k_B$  est la constante de BOLTZMANN et  $T$  la température.
- ◇ Comme  $\langle e_{c,i} \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle$ , nous trouvons :

$$v_{\text{part}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} = 1,16806 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

- ◇ Cette fois nous pouvons remarquer que cette vitesse est bien plus élevée que la vitesse de dérive tout en restant inférieure à celle de la lumière.

### ★ trajectoire

- ◇ Pour expliquer la différence notable entre les deux vitesses, nous devons prendre en compte le fait que les électrons, parfois (souvent !), se « cognent » contre les ions du réseau cristallin.
- ◇ Cela donne une trajectoire semblable à celle représentée ci-dessous.



- ◇ Ainsi nous pouvons voir que si entre deux « chocs » les électrons avancent très vite, en moyenne, ils n'avancent que très lentement.

## II.2.iii – modèle de DRÜDE

- ◇ Nous allons modéliser les effets des pertes énergétiques des électrons contre les ions du réseau cristallin (les « chocs ») par une force de frottement de type fluide :

$$\vec{f} = -h \vec{v}_i \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i) \quad \text{où :}$$

- $m$  la masse d'un électron ;
- $\vec{v}(i)$  est la vitesse de l'électron considéré ;
- $\tau$  est la durée caractéristique de perte énergétique que nous pouvons interpréter comme étant la durée entre deux chocs successif et vaut  $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$ .

Dans le modèle de DRÜDE,  $\tau$  représente la durée caractéristique de perte énergétique, durée assimilable à la durée entre deux chocs successifs.

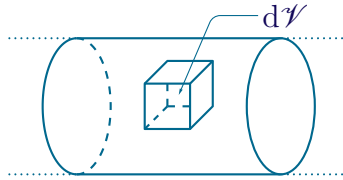
Dans les bons conducteurs  $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$ .

## II.3 – En présence d'un champ électrique : loi d'OHM

### II.3.i – équation d'évolution

#### ★ première approche

- ◇ Étudions le système  $\mathcal{S}$  constitué des électrons de conduction contenus dans un petit élément de volume  $d\mathcal{V}$ .



✧ Les forces qui s'exercent dessus sont :

- le poids : négligé dès lors qu'il y a des forces de LORENTZ
- $\sum_{e^-} (-e) \vec{E}(i)$  : la force de LORENTZ due au champ créé par l'opérateur
- $\sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i)$  : la force de LORENTZ due au champ créé par les ions du réseau cristallin
- $\sum_{e^-} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i)$  : la résultante des forces de « frottement » exercée par le réseau sur chaque électron

✧ Le TCI s'écrit donc, en notant  $\vec{v} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{v}(G)$  la vitesse de dérive :

$$m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{e^-} (-e) \vec{E}(i) + \sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i) + \sum_{e^-} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i)$$

### ★ réécriture du TCI

#### 🕒 la masse totale

✧ Nous avons tout de suite, en notant  $n$  la densité volumique d'électrons libres :

$$m_{\text{tot}} = m dN = m n d\mathcal{V}$$

#### 🕒 la force de LORENTZ créée par l'utilisateur

✧ Plaçons dans le cas où le champ  $\vec{E}$  est uniforme sur le volume  $d\mathcal{V}$  considéré.

✧ Nous avons alors :

$$\sum_{e^-} (-e) \vec{E}(i) = \sum_{e^-} (-e) \vec{E} = dN \times (-e) \vec{E} = -e n d\mathcal{V} \times \vec{E}$$

#### 🕒 la force de frottement créée par le réseau cristallin

✧ Faisons tout d'abord l'hypothèse que cette force n'est pas modifiée par l'opérateur.

✧ Nous avons successivement :

$$\sum_{e^-} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i) = -\frac{1}{\tau} \sum_{e^-} m \vec{v}(i) = -\frac{1}{\tau} \times \vec{p}(\mathcal{S}) = -\frac{1}{\tau} m_{\text{tot}} \vec{v} = -\frac{m n d\mathcal{V}}{\tau} \times \vec{v}$$

#### 🕒 la force de LORENTZ créée par le réseau cristallin

✧ Lorsqu'il n'y a pas de champ créé par l'utilisateur, il n'y a pas de courant électrique.

✧ Nous pouvons donc écrire, en utilisant le TCI initial :

$$\vec{0} = \vec{0} + \sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i) + \vec{0}$$

✧ Ce qui donne :  $\sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i) = \vec{0}$ .

★ équation en  $\vec{v}$ 

◇ En rassemblant tous les résultats précédents, nous obtenons d'abord :

$$m n d\mathcal{V} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e n d\mathcal{V} \times \vec{E} - \frac{m n d\mathcal{V}}{\tau} \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

★ équation en  $\vec{j}$ 

◇ Multiplions l'équation précédente par  $-ne$ . Cela donne :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{j} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

## II.3.ii – résolution

◇ Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants, dont la solution est :

$$\vec{v} = \vec{\lambda} e^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

- ◇  $\lambda$  est une constante d'intégration qui dépend des conditions initiales, *ie.* du dernier choc avec un ion du réseau cristallin : c'est donc une grandeur qui change extrêmement souvent et qui peut donc être considérée comme aléatoire.
- ◇ Au bout de  $5\tau$  la vitesse limite est atteinte.
- ◇ Comme  $\tau \simeq 10^{-14}$  s, la vitesse limite est atteinte au bout de  $10^{-13}$  s, ce qui est très inférieur au temps caractéristique de changement du champ  $\vec{E}$
- ◇ Nous pouvons donc considérer que la vitesse limite est atteinte instantanément : c'est **l'approximation des régimes quasi-stationnaires**.

## II.3.iii – mobilité

La *mobilité*  $\mu$  d'un porteur de charge est définie par :

$$\vec{v} \triangleq \mu \vec{E}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse d'ensemble du porteur considéré.

- ◇ La mobilité  $\mu$  peut être positive ou négative :
  - $\mu > 0$  pour des porteurs de charges positives (qui vont alors dans le sens de  $\vec{E}$ ) ;
  - $\mu < 0$  pour des porteurs de charges négatives (qui vont alors dans le sens opposé à  $\vec{E}$ ).
- ◇ Ici  $\mu = -\frac{e\tau}{m}$ .
- ◇ Cette notion est essentiellement utilisée en chimie pour la conductométrie.

## II.3.iv – loi d'OHM locale

◇ Le vecteur densité de courant se réécrit :

$$\vec{j} = -e n \vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

- ◇ Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique, c'est la loi d'OHM locale.
- ◇ La loi d'OHM est dite locale car cette loi s'applique *en un point* et non *pour un dipôle*.

Pour un matériau conducteur, la loi d'OHM locale s'écrit :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

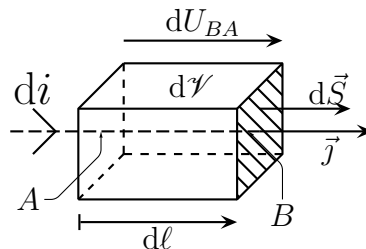
où  $\gamma$  est la *conductivité* du matériau en  $\text{S.m}^{-1}$ .

◇ Nous avons toujours  $\gamma > 0$  et ici, dans ce modèle,  $\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m}$ .

### II.3.v – et $u = Ri$ alors ?

★ retrouver  $u = Ri$  pour un volume élémentaire

◇ Choisissons un élément de volume  $d\mathcal{V}$  sous la forme d'un pavé de telle sorte qu'une paire de faces soit orthogonale à  $\vec{j}$ .



◇ De  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  écrivons d'abord  $di = j dS = \gamma E S$ .

◇ Comme  $E = -\frac{dV}{d\ell}$  nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} di &= -\frac{\gamma dS}{d\ell} dV &= -\frac{\gamma dS}{d\ell} (V_B - V_A) \\ &= -\frac{\gamma dS}{d\ell} dU_{BA} &= \frac{\gamma dS}{d\ell} dU_{AB} \end{aligned}$$

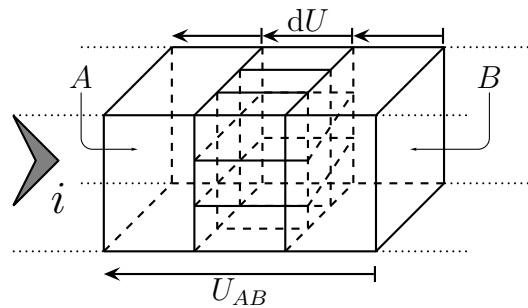
◇ Il s'agit bien  $u = Ri$  pour le petit élément de volume en convention récepteur avec :

Pour un élément de volume de longueur  $d\ell$  dans le sens de  $\vec{j}$  et de section  $dS$  orthogonalement à  $\vec{j}$  la résistance élémentaire vaut :

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{d\ell}{dS}$$

★ retrouver  $u = Ri$  pour un conducteur rectiligne de section constante

◇ Pour retrouver l'expression de la résistance d'un conducteur rectiligne de section constante, nous allons le découper par la pensée en tranches infinitésimales de longueur  $d\ell$ , chacune étant ensuite découpée en petits volumes de section  $dS$ .



◇ Comme l'intensité totale  $i$  traversant une tranche n'est autre que la somme des intensités traversant chaque petit élément de volume (additivité du courant), nous avons successivement :

$$\begin{aligned} i &= \int di = \int \frac{\gamma dS}{d\ell} dU \\ &= \frac{\gamma dU}{d\ell} \int dS = \frac{\gamma S dU}{d\ell} \end{aligned}$$

◇ Utilisons ensuite l'additivité des tensions aux bornes de chaque tranche, ce qui donne :

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int dU = \int \frac{i d\ell}{\gamma S} \\ &= \frac{i}{\gamma S} \int d\ell = \frac{i \ell}{\gamma S} \end{aligned}$$

◇ Nous obtenons bien  $u = Ri$  pour un conducteur.

Pour un conducteur rectiligne de section constante  $S$ , la résistance s'écrit :

$$R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\ell}{S} \quad \text{où :}$$

- $\gamma$  est la conductivité du matériau ;
- $\ell$  est la longueur totale du conducteur considéré ;
- $S$  est la section du conducteur.

◇ Nous constatons que :

- la résistance est d'autant plus petite que la conductivité est élevée ;
- la résistance est d'autant plus grande que le conducteur est long ;
- la résistance est inversement proportionnelle à la section du conducteur.

⊛ La section est la surface d'une tranche de conducteur et pas la surface qu'enferme le conducteur !

## II.3.vi – bilan

### ★ le circuit est fermé

◇ Nous avons commencé l'année sur le potentiel, nous avons ensuite parlé de mécanique et maintenant nous faisons de l'électromagnétisme.

◇ Ces trois domaines sont intimement reliés comme nous pouvons le voir notamment grâce à la notion de potentiel :

- la différence de potentiels, *ie.* la tension, est une des deux notions fondamentales de l'électrocinétique
- le potentiel électrostatique est à un facteur multiplicatif près l'énergie potentielle des charges mobiles du courant électrique
- le potentiel électrostatique est une grandeur permettant de décrire le champ électrostatique

### ★ retour sur les hypothèses

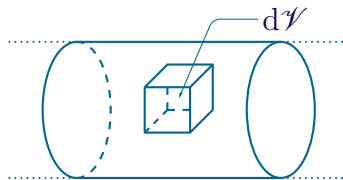
- ◇ Nous en avons fait deux :
  - le champ ne varie pas trop sur un petit volume
  - le champ ne varie pas trop vite
- ◇ Comme le lecteur le verra en 2<sup>e</sup> année, ces deux relations sont intimement liées car le champ électromagnétique est un phénomène propagatif ce qui implique que plus les variations temporelles sont rapides (*ie.* plus la fréquence est élevée) plus les variations spatiales sont petites (*ie.* plus la longueur d'onde est petite).

## II.4 – En présence de champs électrique et magnétique : effet HALL

### II.4.i – nouvelle équation d'évolution de $\vec{j}$

#### ★ le TCI

- ◇ Reprenons l'étude du système  $\mathcal{S}$  constitué des électrons libres contenus dans le volume  $d\mathcal{V}$ .



- ◇ Le bilan des forces est identique au cas précédent, seule l'expression de la force de LORENTZ créée par l'utilisateur change :
  - le poids : négligé dès lors qu'il y a des forces de LORENTZ ;
  - $\sum_{e^-} (-e) (\vec{E}(i) + \vec{v}(i) \wedge \vec{B}(i))$  : la force de LORENTZ due au champ créé par l'opérateur ;
  - $\sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i)$  : la force de LORENTZ due au champ créé par les ions du réseau cristallin ;
  - $\sum_{e^-} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i)$  : la résultante des forces de « frottement » exercée par le réseau sur chaque électron ;
- ◇ Rappelons que la force de frottement n'existe pas « en vrai » et qu'il ne s'agit que d'un modèle rendant compte des pertes énergétiques que subissent les électrons suite aux interactions avec les noyaux.

#### ★ réécriture des forces

- ◇ Nous avons, de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow m_{\text{tot}} = m n d\mathcal{V} ; \\
 &\rightarrow \sum_{e^-} (-e) \vec{E}(i) = -e n d\mathcal{V} \times \vec{E} ; \\
 &\rightarrow \sum_{e^-} -\frac{m}{\tau} \vec{v}(i) = -\frac{m n d\mathcal{V}}{\tau} \vec{v} ; \\
 &\rightarrow \sum_{e^-} (-e) \vec{E}_{\text{cond}}(i) = \vec{0} .
 \end{aligned}$$

- ◇ Il reste à exprimer  $\sum_{e^-} (-e) \vec{v}(i) \wedge \vec{B}(i)$ .

- ◇ En faisant la même approximation que précédemment, à savoir que le champ  $\vec{B}(i)$  est uniforme sur le volume élémentaire  $d\mathcal{V}$  nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{e^-} (-e) \vec{v}(i) \wedge \vec{B}(i) &= \sum_{e^-} (-e) \vec{v}(i) \wedge \vec{B} = -\frac{e}{m} \left( \sum m \vec{v}(i) \right) \wedge \vec{B} \\ &= -\frac{e}{m} \vec{p}(\mathcal{S}) \wedge \vec{B} = -\frac{e}{m} m_{\text{tot}} \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= -e n d\mathcal{V} \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

### ★ rassemblement

- ◇ En rassemblant le tout, nous arrivons ainsi à

$$n d\mathcal{V} m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e n d\mathcal{V} \vec{E} - n e d\mathcal{V} \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

- ◇ Cela donne d'abord

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

- ◇ Et, en multipliant par  $-ne$

$$m \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{j} = ne^2 \vec{E} - e \vec{j} \wedge \vec{B}$$

## II.4.ii – nouveau vecteur $\vec{j}$ et constante de HALL

- ◇ Plaçons-nous, comme précédemment dans l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

- ◇ Nous avons alors  $m \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}$  et ainsi :

$$\frac{m}{\tau} \vec{j} = ne^2 \vec{E} - e \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} - \frac{e \tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

- ◇ Ce que nous allons réécrire pour pouvoir faire apparaître la conductivité  $\gamma$

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

- ◇  $R_H$  est appelé la constante de HALL du matériau.

- ◇ La constante de HALL qui, ici, vaut  $R_H = -\frac{1}{ne}$  peut être positive ou négative :

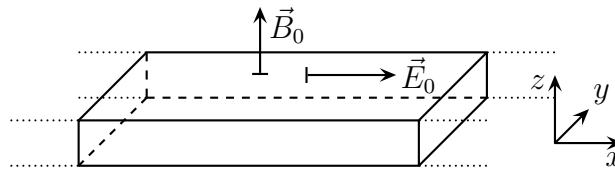
- ➔  $R_H > 0$  correspond à un matériau dont le courant est dû à des porteurs de charges positives ;
- ➔  $R_H < 0$  correspond à un matériau dont le courant est dû à des porteurs de charges négatives.

## II.4.iii – solution dans un cas particulier

### ★ une géométrie particulière

- ◇ Étudions le cas d'un conducteur rectiligne infini de section rectangulaire plongé dans un champ  $\vec{E}_0$  et dans un champ  $\vec{B}_0$ .





◇ Les champs  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  sont uniformes.

### ★ vision en régime quasi-stationnaire

◇ « Quasi-stationnaire » ou « stationnaire » ont la même conséquence au niveau des raisonnements : nous pouvons faire comme si toutes les grandeurs étaient indépendantes du temps.

### 🔗 simplification du vecteur densité de courant

- ◇ Étant donné qu'il y a invariance par translation suivant  $\vec{u}_x$ , le vecteur densité de courant ne dépend que de  $y$  et de  $z$  :  $\vec{j} = \vec{j}(y, z)$ .
- ◇ On suppose que le vecteur densité de courant est uniforme à l'intérieur du ruban<sup>2</sup>.
- ◇ Dans ces conditions, comme le vecteur densité de courant représente le mouvement des électrons et que ces derniers ne peuvent pas sortir du conducteur, il ne peut pas y avoir de composantes de  $\vec{j}$  sur  $\vec{u}_y$  et sur  $\vec{u}_z$ .
- ◇ Nous avons donc  $\vec{j} = j \vec{u}_x$ .

### 🔗 effet HALL

◇ Reprenons l'équation régissant  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad \text{où :}$$

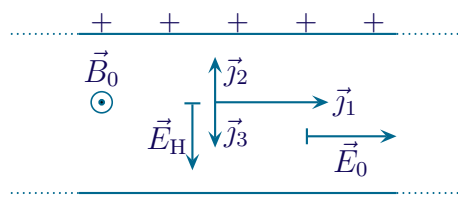
- $\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}$  est colinéaire à  $\vec{u}_x$  ;
- $\vec{j}_2 = \gamma R_H \vec{j} \wedge \vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{u}_x$  ;

- ◇ La présence de  $\vec{j}_2$  est incompatible avec le fait que  $\vec{j}$  ne doit avoir de composantes que sur  $\vec{u}_x$  : il **doit** donc y avoir un champ supplémentaire  $\vec{E}_H$ , appelé champ de HALL, qui permet d'enlever  $\vec{j}_2$ .
- ◇ En fait nous avons

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{perçu}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H \quad \text{où} \quad \vec{E}_H = -R_H \times \vec{j} \wedge \vec{B}_0$$

### 🔗 vue de dessus

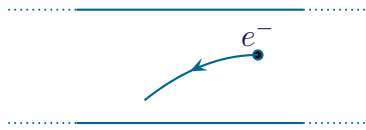
- ◇ Nous voyons que le champ de HALL  $\vec{E}_H$  a tendance à faire « monter » les électrons (associés au courant  $\vec{j}_3$ ) alors que le champ  $\vec{B}_0$  a tendance à les faire descendre (et à provoquer le courant  $\vec{j}_2$ ).
- ◇ Le champ de HALL ne peut s'expliquer que par la présence de charges sur les faces du conducteur.



<sup>2</sup>Le lecteur trouvera la justification de cette hypothèse en 2<sup>e</sup> année lorsqu'il étudiera la notion d'« effet de peau »

### ★ vision du régime transitoire

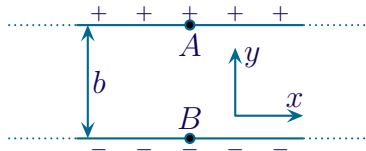
◇ La situation est la suivante vue de dessus.



- ◇ Au début les électrons, globalement immobiles, subissent une force qui tend à les faire bouger vers la gauche. À partir de ce moment là la force en  $-e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$  va les dévier vers le bas.
- ◇ Les électrons qui arrivent sur la face inférieure ne peuvent plus bouger et s'y accumulent, ce qui crée un excès d'électrons sur la face inférieure. De même les électrons qui étaient initialement sur la face supérieure ne sont pas remplacés : il y a un déficit d'électrons sur la face supérieure, d'où la présence de charges positives.
- ◇ L'accumulation de charges négatives sur la face inférieure et de charges positives sur la face supérieure conduit à la formation d'un champ électrique  $\vec{E}_H$ , tel un condensateur.
- ◇ Nous pouvons aussi interpréter le champ de HALL de la manière suivante : les charges de même signe se repoussant, l'accumulation d'électrons sur la face inférieure repousse les électrons qui auraient tendance à y venir.
- ◇ Finalement, le champ de HALL n'est pas créé par les charges responsables du courant mais par d'autres charges qui ne se déplacent plus, c'est pourquoi nous ne les voyons pas apparaître dans l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\vec{j}$ .

### ★ d'où le nom : sonde à effet HALL

- ◇ Reprenons la situation en régime quasi-stationnaire.
- ◇ Étant donné qu'il règne un champ électrique entre les deux faces inférieure et supérieure, nous pouvons chercher à mesurer la différence de potentiel entre deux points face à face.



- ◇ Le champ de HALL s'écrit, par définition (cf. plus haut)

$$\vec{E}_H = -R_H (j \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad E_{H,y} = R_H j_x B_z$$

- ◇ Le champ de HALL étant un champ électrique comme un autre nous avons

$$E_y = -\frac{dV}{dy} \quad \rightsquigarrow \quad dV = V_A - V_B = U_{AB} = -b E_y$$

- ◇ Ainsi, en notant  $a$  l'épaisseur, nous pouvons écrire

$$j_x = \frac{I}{ab} \quad \rightsquigarrow \quad U_{AB} = -\frac{I R_H B_z}{a} \quad \rightsquigarrow \quad U_{AB} = \frac{I}{n a e} \times B_z$$

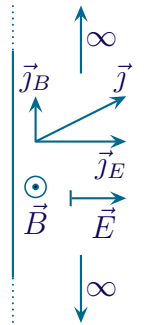
- ◇ Cette loi nous permet de dire qu'une mesure de  $U_{AB}$  conjointement à  $I$  permet :
  - de déterminer  $R_H$  connaissant  $B_z$  (étude de matériaux) ;
  - de déterminer  $B_z$  connaissant  $R_H$  (mesure de champ magnétique) : c'est la sonde à effet HALL.
- ◇ Application numérique pour du Cuivre avec :  $I = 1,0$  A,  $a = 1,0$  mm et  $B_z = 100$  mT :

$$U_{AB} = 7,640729 \times 10^{-9} \text{ V}$$

- ◇ Nous constatons que les différences de potentiel sont extrêmement faibles, ce qui implique des précautions et une méthodologie toute particulière dans l'acte de mesure.

★ c'était un cas particulier

- ◇ L'effet HALL (accumulation de charges provoquant un champ électrique) n'est pas systématique mais dépend de la géométrie. Dans le cas d'un conducteur infiniment large, comme représenté ci-dessous, il n'y a pas d'effet HALL.



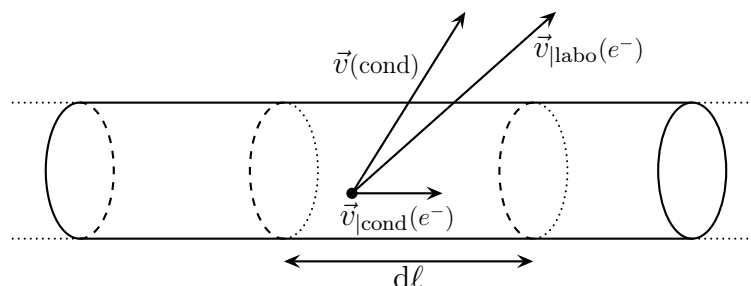
- ◇ Remarquons que dans la situation au-dessus, les électrons ne vont plus « tout droit » mais « en diagonale », ils traversent donc davantage de conducteur ce qui fait que, pour eux, le conducteur est plus grand.
- ◇ Et puisque la résistance d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur, dans la situation précédente, la résistance a augmenté : c'est l'effet de magnéto-résistance.
- ◇ Insistons : parfois, en présence de champ magnétique, la résistance d'un matériau augmente non pas à cause d'un nouvel effet, d'une nouvelle interaction, mais à cause de l'augmentation de la longueur des lignes de courant.

## II.5 – Force exercée par un champ $\vec{B}$ sur un circuit électrique : force de LAPLACE

- ◇ Le but est maintenant de déterminer la force exercée par un champ  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sur un circuit électrique parcouru par un courant.

### II.5.i – bilan des forces extérieures

- ◇ Étudions cette fois un élément de volume  $d\mathcal{V}$  de conducteur parcouru par un courant de vecteur densité volumique  $\vec{j}$  et possédant la vitesse  $\vec{v}_{(\text{cond})}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



- ◇ Dans cet élément de volume, il y a trois types de porteurs :
- les noyaux de densité  $n_1$ , de charge  $q_1$  et immobiles dans le conducteur donc de vitesse  $\vec{v}_{(\text{cond})}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  ;
  - les électrons de valence de densité  $n_2$ , de charge  $-e$  et immobiles dans le conducteur donc de vitesse  $\vec{v}_{(\text{cond})}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  ;

→ les électrons libres de densité  $n_3$ , de charge  $-e$  avec la vitesse  $\vec{v}_{|\text{cond}}$  par rapport au conducteur donc de vitesse  $\vec{v}_{|\text{cond}}(e^-) + \vec{v}(\text{cond})$  par rapport le référentiel  $\mathcal{R}$ .

◇ Pour le système contenu dans  $d\mathcal{V}$ , les forces exercées par le champ sont :

porteur	due au champ $\vec{E}$	due au champ $\vec{B}$
noyau	$n_1 d\mathcal{V} \times q_1 \vec{E}$	$n_1 d\mathcal{V} \times q_1 \vec{v}(\text{cond}) \wedge \vec{B}$
électron de valence	$n_2 d\mathcal{V} \times (-e \vec{E})$	$n_2 d\mathcal{V} \times (-e \vec{v}(\text{cond})) \wedge \vec{B}$
électron libre	$n_3 d\mathcal{V} \times (-e \vec{E})$	$n_3 d\mathcal{V} \times (-e)(\vec{v}(\text{cond}) + \vec{v}_{ \text{cond}}(e^-)) \wedge \vec{B}$
somme	$d\mathcal{V}(n_1 q_1 - n_2 e - n_3 e) \vec{E}$	$d\mathcal{V}(n_1 q_1 - n_2 e - n_3 e) \vec{v}(\text{cond}) \wedge \vec{B}$ $- d\mathcal{V} n_3 \vec{v}_{ \text{cond}}(e^-) \wedge \vec{B}$

◇ De plus la neutralité du conducteur impose

$$n_1 q_1 + (-e) n_2 + (-e) n_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad n_1 q_1 - e n_2 - e n_3 = 0$$

◇ Ce qui nous permet de simplifier les résultantes

porteur	due au champ $\vec{E}$	due au champ $\vec{B}$
résultante	$\vec{0}$	$\vec{0} - d\mathcal{V} n_3 \vec{v}_{ \text{cond}}(e^-) \wedge \vec{B}$

◇ Finalement, pour l'élément de conducteur  $d\mathcal{V}$ , la force subie de la part du champ électromagnétique s'écrit donc :

$$d\vec{f}_L = -d\mathcal{V} n_3 \vec{v}(e^-) \wedge \vec{B} \stackrel{\text{not}}{=} -d\mathcal{V} n_3 \vec{v} \wedge \vec{B}$$

## II.5.ii – force de LAPLACE

### ★ version volumique

◇ Nous pouvons réécrire la force de LAPLACE à l'aide du vecteur densité de courant  $\vec{j} = -n_3 e \vec{v}$  :

La force de LAPLACE subie par un élément de volume  $d\mathcal{V}$  parcouru par un courant de densité  $\vec{j}$  s'écrit :

$$d\vec{f}_L = d\mathcal{V} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

### ★ version linéique

◇ Nous utiliserons plus souvent la version linéique, notamment parce que dans de très nombreux cas, le rayon du fil du conducteur est très faible par rapport aux longueurs caractéristiques du problème. En d'autres termes, dans ces cas là tout comme nous l'avons fait en électromagnétisme, nous considérons le conducteur comme un fil infiniment fin.

◇ Isolons un petit volume  $d\mathcal{V}$  de conducteur de section  $dS$  et de longueur  $d\ell$ .

◇ Alors, en notant  $\vec{j} = j \vec{T}$  nous avons successivement :



$$\begin{aligned} d\vec{f}_L &= d\mathcal{V} \vec{j} \wedge \vec{B} &= j dS d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

La force de LAPLACE élémentaire s'exerçant sur une portion de circuit de longueur  $d\ell$  parcourue par un courant d'intensité  $i$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit :

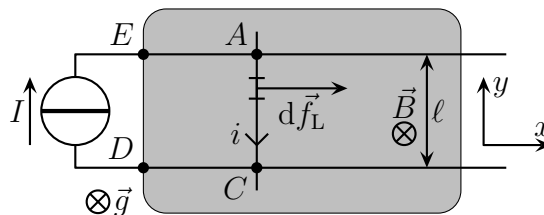
$$d\vec{f}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \text{où :}$$

$d\vec{\ell}$  est dans le sens de la flèche représentant  $i$ .

### II.5.iii – utilisation avec le TCI

#### ★ dispositif

- ◇ Une tige conductrice de masse  $m$  peut rouler sur des rails fixes horizontaux, eux aussi conducteurs. Un générateur de courant est relié au circuit.



- ◇ La force de LAPLACE s'exerce sur les parties  $EA$ ,  $AC$  et  $CD$  du circuit, mais comme les rails sont fixes, seul la tige va bouger.

#### ★ TCI

- ◇ Considérons le système { tige } qui subit dans le référentiel galiléen du laboratoire :
- le poids  $\vec{P}$  vertical ;
  - la force de LAPLACE  $\vec{f}_L$  ;
  - la réaction exercée par les rails  $\vec{R}$  vertical.
- ◇ Comme le mouvement est uniquement horizontal, nous avons  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$  et le TCI en projection sur  $\vec{u}_x$  donne :

$$m \ddot{x}_G(t) = f_{L,x}$$

#### ★ résultante de la force de LAPLACE

- ◇ Pour déterminer la résultante de la force de LAPLACE, nous allons découper par la pensée la tige en petits morceaux, déterminer la force qui s'exerce sur chacun d'eux et sommer le tout.
- ◇ Sur chaque petit morceau de la tige parcouru par un courant (donc entre  $A$  et  $C$ ), la force élémentaire de LAPLACE qui s'exerce s'écrit :

$$d\vec{f}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I (-d\ell \vec{u}_y) \wedge (-B\vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{f}_L = +I B d\ell \vec{u}_x$$



Ici nous avons le choix pour l'écriture de  $d\vec{\ell}$  :

- soit nous l'écrivons  $d\vec{\ell} = \pm d\ell \vec{u}_x$  en réfléchissant au signe (donc au sens de  $d\vec{\ell}$  par rapport à  $\vec{u}_x$ ) et nous sommerons des  $d\ell > 0$  pour la résultante
- soit nous l'écrivons  $d\vec{\ell} = dy \vec{u}_y$  et nous sommerons des  $dy \geq 0$  lors de la résultante en faisant très attention aux bornes d'intégration

◇ Il ne reste plus qu'à sommer le tout :

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= \int d\vec{f}_L = \int_A^C +I B d\ell \vec{u}_x \\ &= -I B \vec{u}_x \times \int_A^C d\ell = I B \ell \vec{u}_x \end{aligned}$$

### ★ regroupement

◇ En reportant dans le TCI nous arrivons à

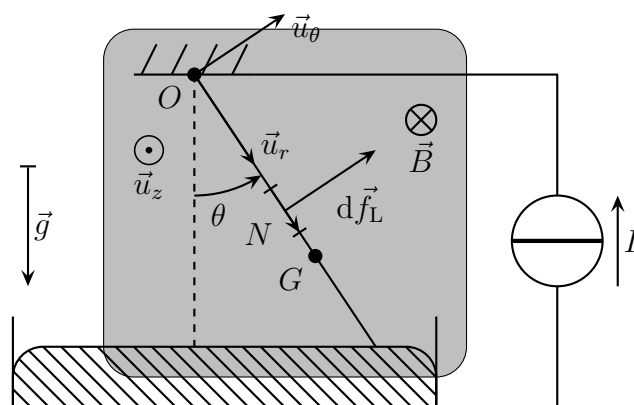
$$\ddot{x}_G(t) = \frac{I B \ell}{m}$$

◇ Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

## II.5.iv – utilisation avec le TMC

### ★ dispositif

- ◇ Une tige de masse  $m$ , de longueur  $\ell$  peut tourner sans frottement autour de  $O$ . Son extrémité inférieure plonge dans du mercure relié à un circuit électrique dans lequel est placé un générateur idéal de courant. La barre est déséquilibrée : son centre de masse est aux deux-tiers de la longueur :  $OG = \frac{2}{3} \ell$ .



◇ Le but est de trouver  $\theta_{\text{eq}}$  d'équilibre.

## ★ TMC

- ◇ Considérons le système { tige } dans le référentiel galiléen du laboratoire.
- ◇ Les forces qui s'exercent sur le système sont :
- le poids  $\vec{P}$ ;
  - la force de LAPLACE  $\vec{f}_L$ ;
  - la réaction d'axe en  $O$  qui se fait sans frottement  $\vec{R}$ ;
  - la poussée d'ARCHIMÈDE exercée par le mercure (négligée).
- ◇ Comme nous ne cherchons que l'équilibre, nous avons

$$\vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R})$$

- ◇ Comme la réaction d'axe se fait sans frottement nous avons

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = \vec{0}$$

☞ *Remarque* : ce n'est **pas** parce que la réaction d'axe passe par  $O$  que son moment est nul mais bel et bien parce que la rotation se fait sans frottement. Une réaction d'axe avec frottement correspond à une rotation « grippée ».

- ◇ Nous avons par propriété du poids :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} &= \frac{2}{3} \ell \vec{u}_r \wedge (m g \cos \theta \vec{u}_r - m g \sin \theta \vec{u}_\theta) \\ &= -\frac{2}{3} \ell m g \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

☞ *Remarque* : Il n'était pas possible ici de calculer le moment du poids de manière plus « physique » car nous ne connaissons pas la répartition de masse mais seulement la position de  $G$  ... ce qui suffit.

## ★ moment de la force de LAPLACE

- ◇ Pour calculer le moment de la force de LAPLACE, nous allons utiliser la même technique que pour calculer la résultante dans le cas précédent : découper la tige en petits morceaux, déterminer pour chacun le moment de la force de LAPLACE et sommer le tout.
- ◇ Pour un petit morceau autour du point  $N$ , nous avons  $d\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) = \overrightarrow{ON} \wedge d\vec{f}_L$ . Or

$$d\vec{f}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I dr \vec{u}_r \wedge (-B \vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{f}_L = B I dr \vec{u}_\theta$$

- ◇ Et ainsi

$$d\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) = r \vec{u}_r \wedge B I dr \vec{u}_\theta = B I r dr \vec{u}_z$$

- ◇ Il ne reste plus qu'à sommer

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) &= \int d\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) &= \int_0^\ell B I r dr \vec{u}_z \\ &= B I \vec{u}_z \times \int_0^\ell r dr &= \frac{B I \ell^2}{2} \vec{u}_z \end{aligned}$$

## ★ regroupement

◇ Nous avons donc, à l'équilibre :

$$-\frac{2}{3} m g \ell \sin \theta_{\text{eq}} \vec{u}_z + \frac{B I \ell^2}{2} \vec{u}_z = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \theta_{\text{eq}} = \frac{3 B I \ell}{4 m g}$$

☛ *Remarque* : pour appliquer le TMC en version dynamique, il aurait fallu calculer le moment cinétique de la barre et, pour cela, nous aurions utilisé la même technique que pour calculer le moment de la force de LAPLACE à savoir découper la tige en petits morceaux, déterminer pour chaque petit morceau le moment cinétique et sommer le tout. Notons que pour cela il aurait fallu connaître précisément la répartition de masse.

## ★ recherche du point d'application

◇ Le point d'application  $C$  de la force de LAPLACE est défini par (avec  $\vec{f}_L$  est la résultante des forces de LAPLACE) :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_L) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{f}_L$$

◇ Déterminons  $\vec{f}_L$  de la même manière que précédemment, en sommant des forces élémentaires.

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= \int d\vec{f}_L = \int_0^\ell B I dr \vec{u}_\theta \text{ calcul fait ci-dessus} \\ &= B I \vec{u}_\theta \times \int_0^\ell dr = B I \ell \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

◇ Cherchons un point  $C$  sur la tige, *ie.*  $\overrightarrow{OC}$  sous la force  $\overrightarrow{OC} = c \vec{u}_r$ , ce qui donne :

$$c \vec{u}_r \wedge B I \ell \vec{u}_\theta = \frac{B I \ell^2}{2} \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{\ell}{2}$$

◇ Et donc nous pouvons voir que le point d'application n'est pas confondu avec le centre de masse.

Le centre de masse n'est **pas** le point qui subit toutes les forces.



# Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- courant électrique, vecteur densité de courant électrique
- intensité, mobilité
- le modèle de DRÜDE d'un conducteur ohmique

### ★ Les grandeurs

◇ Savoir vérifier l'homogénéité d'une force de LORENTZ, COULOMB ou LAPLACE.

### ★ Les lois

◇ Connaître :

- les forces de LORENTZ et de COULOMB ainsi que les énergie associées
- la loi d'OHM LOCALE, l'expression de la résistance d'un conducteur
- la force de LAPLACE

### ★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- l'effet d'un champ  $\vec{E}$  uniforme et constant sur une particule
- l'effet d'un champ  $\vec{B}$  uniforme et constant sur une particule
- l'interprétation des différentes forces qui agissent sur les électrons dans le modèle de DRÜDE
- la méthode pour retrouver le sens et la direction des forces de LAPLACE
- l'interprétation de l'effet HALL au niveau microscopique

### ★ les exemples fondamentaux

◇ Savoir :

- retrouver la trajectoire d'une particule chargée dans un champ  $\vec{E}$  uniforme et constant
- retrouver la trajectoire d'une particule chargée dans un champ  $\vec{B}$  uniforme et constant
- retrouver la force qui s'exerce sur le rail de LAPLACE

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

◇ Savoir :

- déterminer *a priori* si le mouvement d'une particule dans un champ  $\vec{E}$  et / ou  $\vec{B}$  est plan ou non
- déterminer *a priori* sens et direction de la force de LAPLACE

## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

◇ Connaître :

- l'expression particulière d'une parabole dans le cas d'une interaction répulsive.
- la méthode de changement de fonction complexe inconnue

### ★ petits gestes

◇ Il faut savoir :

- calculer la résultante des forces de LAPLACE à partir d'un découpage du conducteur
- calculer le moment des forces de LAPLACE à partir d'un découpage du conducteur

### ★ exercices classiques

◇ Savoir :

- refaire l'exemple du sélecteur de vitesse
- refaire l'exemple du cyclotron

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Force subie par une charge</b>	<b>1</b>
I-1	La force électromagnétique . . . . .	1
I-1.i	expressions . . . . .	1
	version force de LORENTZ . . . . .	1
	version force de COULOMB . . . . .	1
	force magnétique . . . . .	2
I-1.ii	ordres de grandeur . . . . .	2
	version LORENTZ . . . . .	2
	version COULOMB . . . . .	3
I-1.iii	vision énergétique . . . . .	3
	version LORENTZ . . . . .	4
	version COULOMB . . . . .	4
I-2	Exemples fondamentaux . . . . .	4
I-2.i	mouvement dans un champ $\vec{E}$ uniforme et constant . . . . .	4
	présentation, analyse . . . . .	4
	équation d'évolution . . . . .	5
	résolution . . . . .	5
I-2.ii	mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme et constant . . . . .	6
	présentation, analyse . . . . .	6
	équations d'évolution . . . . .	6
	résolution . . . . .	7
I-2.iii	application au cyclotron . . . . .	9
	présentation du dispositif . . . . .	9
	fonctionnement . . . . .	10
	caractéristiques globales . . . . .	11
	intérêt . . . . .	12
	retour sur les approximations . . . . .	12
I-3	Sélecteur de vitesse . . . . .	12
I-3.i	dispositif . . . . .	12
	présentation, analyse . . . . .	12
I-3.ii	équations horaires . . . . .	13
	équations d'évolution . . . . .	13
	résolution . . . . .	13
I-3.iii	trajectoires . . . . .	14
	expression . . . . .	14
	interprétation . . . . .	14
I-4	Expérience de RUTHERFORD . . . . .	15
I-4.i	dispositif . . . . .	15
	expérience . . . . .	15
	modélisation, analyse . . . . .	16
	interlude mathématique . . . . .	16
I-4.ii	angle de déviation d'une particule $\alpha$ . . . . .	17
	plan de bataille . . . . .	17
	écriture générale avec le formalisme de BINET . . . . .	17
	expression de $D$ en fonction des constantes d'intégration . . . . .	17
	détermination des constantes d'intégration . . . . .	18
	simplification . . . . .	18
I-4.iii	déviation d'un faisceau de particules $\alpha$ . . . . .	19

	en réalité ...	19
	... le travail n'est pas terminé	19
<b>II</b>	<b>Étude du courant électrique</b>	<b>20</b>
II.1	Description du courant électrique	20
II.1.i	kesako ?	20
II.1.ii	vecteur densité de courant	20
II.1.iii	lien avec l'intensité	20
	cas particulier très fréquent	20
	généralisation	21
II.1.iv	retrouver l'expression du champ magnétique créé par une charge	21
II.2	Courant dans un conducteur	22
II.2.i	des électrons libres ...	22
II.2.ii	... à deux vitesses	22
	vitesse de dérive	22
	vitesse particulaire	23
	trajectoire	23
II.2.iii	modèle de DRÜDE	23
II.3	Loi d'OHM	23
II.3.i	équation d'évolution	23
	première approche	23
	réécriture du TCI	24
	équation en $\vec{v}$	25
	équation en $\vec{j}$	25
II.3.ii	résolution	25
II.3.iii	mobilité	25
II.3.iv	loi d'OHM locale	25
II.3.v	et $u = Ri$ alors ?	26
	retrouver $u = Ri$ pour un volume élémentaire	26
	retrouver $u = Ri$ pour un conducteur rectiligne de section constante	26
II.3.vi	bilan	27
	le circuit est fermé	27
	retour sur les hypothèses	28
II.4	Effet HALL	28
II.4.i	nouvelle équation d'évolution de $\vec{j}$	28
	le TCI	28
	réécriture des forces	28
	rassemblement	29
II.4.ii	nouveau vecteur $\vec{j}$ et constante de HALL	29
II.4.iii	solution dans un cas particulier	29
	une géométrie particulière	29
	vision en régime quasi-stationnaire	30
	vision du régime transitoire	31
	d'où le nom : sonde à effet HALL	31
	c'était un cas particulier	32
II.5	Force de LAPLACE	32
II.5.i	bilan des forces extérieures	32
II.5.ii	force de LAPLACE	33
	version volumique	33
	version linéique	33

---

II.5.iii	utilisation avec le TCI . . . . .	34
	dispositif . . . . .	34
	TCI . . . . .	34
	résultante de la force de LAPLACE . . . . .	34
	regroupement . . . . .	35
II.5.iv	utilisation avec le TMC . . . . .	35
	dispositif . . . . .	35
	TMC . . . . .	36
	moment de la force de LAPLACE . . . . .	36
	regroupement . . . . .	37
	recherche du point d'application . . . . .	37