

Électrocinétique

Chapitre 1

Circuits électriques

Circuits électriques

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement rappeler les lois et les résultats à connaître voire à maîtriser en électrocinétique. Nous ne développerons pas les démonstrations, mais nous insisterons régulièrement sur l'aspect « philosophique » des lois ainsi que sur leurs interprétations physiques.

Le chapitre sera divisé en trois parties. La première concernera les lois de fonctionnement de manière générale ; la deuxième fera le point sur les circuits en régime transitoire et leurs phénoménologies ; la dernière partie sera consacrée au fonctionnement en régime sinusoïdal forcé qui tient une place fondamentale en physique linéaire, comme nous aurons l'occasion de le voir de très nombreuses fois cette année.

Table des matières

Biographies succinctes	5
I Lois de fonctionnement	7
I-1 Lois pour un dipôle	7
I-1 <i>·i</i> résistor	7
I-1 <i>·ii</i> bobine	7
I-1 <i>·iii</i> condensateur	8
I-1 <i>·iv</i> générateurs	9
I-2 Lois de fonctionnement des circuits	9
I-2 <i>·i</i> lois de KIRCHHOFF	9
I-2 <i>·ii</i> ponts diviseurs	11
I-3 Association de dipôles	11
I-3 <i>·i</i> association série	11
I-3 <i>·ii</i> association parallèle	12
I-3 <i>·iii</i> générateurs réels	12
I-4 Aspect énergétique	13
I-4 <i>·i</i> puissance	13
I-4 <i>·ii</i> dipôles usuels	13
résistor	13
générateur	14
bobine et condensateurs	14
bilan	14
II Régimes transitoires	15
II-1 Circuits d'ordre 1	15
II-1 <i>·i</i> passe-bas	15
montage	15
grandeurs caractéristiques	15
ordre de grandeur	16
réponse à un échelon	17
II-1 <i>·ii</i> passe-haut	18
montage	18
ordre de grandeur	18
échelon de tension	19
II-2 Circuit d'ordre 2	19
II-2 <i>·i</i> circuit classique : le <i>RLC</i> série	19
II-2 <i>·ii</i> équation différentielle	19
II-2 <i>·iii</i> ordres de grandeur	20
II-2 <i>·iv</i> solutions	20
solution générale	20
différentes natures de régime transitoire	20
régime apériodique	21
régime pseudopériodique	21
régime critique	23

III Régime forcé	24
III.1 Utilisation	24
III.1.i signaux périodiques	24
III.1.ii série de FOURIER	24
décomposition	24
spectres usuels	25
propriétés	25
III.1.iii précautions	26
III.2 Notation complexe	26
III.2.i présentation	26
III.2.ii impédance / admittance	27
III.2.iii lois en complexe	27
III.3 Aspect énergétique	28
III.3.i puissance moyenne reçue	28
III.3.ii d'autres expressions	28
III.3.iii impédances usuelles	28
III.3.iv valeur efficace	28
III.3.v pour la décomposition en série de FOURIER	29
III.4 Filtres d'ordre 1	29
III.4.i filtre passe-haut	29
montage et fonction de transfert	29
forme canonique	29
diagrammes de BODE	30
III.4.ii filtre passe-bas	30
montage et fonction de transfert	30
forme canonique	30
diagrammes de BODE	31
III.4.iii d'autres types	31
déphaseur	31
atténuateur	31
III.5 Filtres d'ordre 2	32
III.5.i utilité	32
III.5.ii filtre passe-bas	32
montage et fonction de transfert	32
forme canonique	32
diagrammes de BODE	33
III.5.iii filtre passe-haut	33
montage et fonction de transfert	33
forme canonique	33
diagrammes de BODE	34
III.5.iv filtre passe-bande	34
montage et fonction de transfert	34
forme canonique	34
diagrammes de BODE	35
III.6 Stabilité d'un filtre	35
III.6.i définition	35
III.6.ii critères de stabilité	35
Fiche de révision	36

Biographies succinctes

Jean-Baptiste Joseph FOURIER

(1768 Auxerre – 1830 Paris)



Orphelin à 10 ans, Joseph est envoyé dans une école militaire où il brille et devient professeur à 16 ans. Plongé au cœur de la révolution, il échappe de peu à la guillotine avec la mort de ROBESPIERRE. Fin 1794, il est admis à l'école Normale supérieure de Paris (qui fermera un an après) puis à la toute nouvelle école Polytechnique. La renommée de Joseph lui permettra de suivre NAPOLÉON dans son expédition égyptienne. À son retour, il s'installe à Grenoble comme préfet de l'Isère et effectue durant son temps libre des travaux en mathématiques dont son mémoire sur la chaleur. En 1817 il est élu à l'académie des sciences dont il deviendra le secrétaire perpétuel en 1822.

Claude POUILLET

(1790 Cusance, Doubs – 1868 Paris)



Fils de papetier, Claude fait ses études à Besançon avant de suivre des cours à l'école normale et à la faculté de Paris de 1811 à 1813. Il aura notamment GAY-LUSSAC comme professeur. Claude commence alors à enseigner à partir de 1813 et de nombreux établissements le verront professer : l'École Normale, la faculté des sciences de Paris, l'école Polytechnique, le Conservatoire National des Arts et Métiers. Il sera aussi professeur de physique des enfants de Louis-Philippe. Reconnu comme un enseignant exceptionnel, il trouve expérimentalement la loi qui porte son nom.

James Prescott JOULE

(1818 Salford, Lancashire – 1889 Sale, Cheshire)



Fils de brasseur et brasseur lui-même jusqu'en 1854, James a eu une éducation privée avec notamment John DALTON, connu pour l'hypothèse atomique et la maladie qui porte son nom, le daltonisme. Passionné par l'électricité, James découvre en 1841 l'effet qui porte son nom. Deux ans plus tard, il prouve l'équivalence entre énergie mécanique et chaleur. Ses idées eurent du mal à s'imposer car elles allaient à l'encontre de LAVOISIER et CARNOT partisans de la théorie du calorique qui supposait que la chaleur ne pouvait être ni créée ni détruite.

Gustav KIRCHHOFF

(1824 Königsberg – 1887 Berlin)



Fils d'avocat, Gustav fait des études de physique et épouse la fille de son professeur de mathématiques. C'est étudiant qu'il énonce les « lois de KIRCHHOFF » valables en électrocinétique. Pourtant, Gustav est plus connu pour avoir créé avec R. BUNSEN la spectroscopie : c'est lui qui établit ainsi que les raies d'émission sont caractéristiques du corps. C'est ainsi qu'il découvre le césium et le rubidium. À partir de 1886, sa santé décline et il doit arrêter de travailler.

Léon Charles THÉVENIN

(1857 Meaux – 1926 Paris)



Diplômé de l'École polytechnique et de l'École supérieure de télégraphie en 1879, Léon entre en 1890 dans la jeune Administration des postes et télégraphes. Dans le même temps, il s'occupe de cours de mathématiques et mène ses propres recherches en électricité. Il publie en 1883 une formule de simplification des schémas électriques qui est devenue célèbre sous le nom de théorème de THÉVENIN. En 1888, Léon est chargé d'enseigner les mathématiques et l'électricité à l'École Professionnelle Supérieure des Postes et Télégraphes puis est nommé directeur en 1896. Il fut un peu isolé à la fin de sa vie au sein de l'administration à cause de son attrait pour la recherche.

Edward Lawry NORTON

(1898 Rockland, Maine – 1983 Chatam, New Jersey)



Edward a servi comme opérateur radio dans l'armée entre 1917 et 1919. Il a fréquenté l'Université du Maine pendant un an avant et pendant un an après son service de guerre. Il a ensuite intégré le MIT en 1920 et y a obtenu un diplôme de génie électrique en 1922. Puis il a commencé à travailler en 1922 à l'Ouest Electric Corporation à New York, qui devint en 1925 Bell Laboratories. Tout en travaillant pour Western Electric, il a obtenu un diplôme de maîtrise en génie électrique de l'Université de Columbia en 1925. C'est en 1926, au milieu d'un mémorandum, qu'il a parlé du modèle de générateur pour lequel nous le connaissons. Il a pris sa retraite en 1961 et est décédé le 28 janvier 1983.

Hendrik Wade BODE

(1905 Madison, Wisconsin – 1982 Cambridge, Massachusetts)



D'origine hollandaise et d'un père enseignant à de l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign, Hendrik se révèle précoce en sortant du lycée à 14 ans, en obtenant l'équivalent de la licence de mathématiques à 19 ans et l'équivalent de la maîtrise 2 ans plus tard. Après un an comme assistant en faculté, il rentre aux laboratoires Bell et y est particulièrement brillant. Il passe un doctorat en 1935 et « invente » ses diagrammes en 1938, diagrammes qui facilitent grandement l'étude de la rétroaction. À partir de la guerre et jusqu'à la fin de sa vie, il travaillera dans l'armement et améliorera les mécanismes de guidage des missiles.

**Jacob MILLMAN**

(1911 Novohrad-Volynskyï, Ukraine – 1991)

Expert en radar et en circuit électronique, Jacob, d'origine russe, a émigré avec ses parents en 1913. Il a obtenu son doctorat au Massachusetts Institute of Technology en 1935. Il fut professeur au City College de New York de 1936 à 1952 puis, jusqu'à sa retraite en 1976, il enseigna à l'université de Columbia. Il a écrit ou co-écrit 8 livres sur l'électronique et les ordinateurs.

I – Lois de fonctionnement

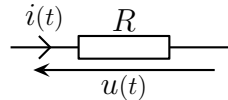
I.1 – Lois pour un dipôle

I.1.i – résistor

◇ Rien de surprenant.

Un résistor est caractérisé par sa résistance $R > 0$ en Ω (ohm) et tel que, en convention récepteur

$$u(t) = +R i(t)$$



◇ Bien sûr, en convention générateur, la relation courant-tension s'écrit $u(t) = -R i(t)$.

◇ Parce qu'il y a une stricte égalité entre courant traversant un résistor et tension entre ses bornes, le résistor est un dipôle très prisé dans les montages demandant une conversion courant – tension.

◇ Quelques valeurs à connaître.

Résistance :

- de montage de TP, entre 10Ω et $1 \text{ M}\Omega$;
- d'entrée d'un oscilloscope, $R_{\text{oscillo}} = 1 \text{ M}\Omega$;
- de sortie d'un GBF, $R_{\text{gbf}} = 50 \Omega$;
- d'entrée d'un voltmètre, $R_{\text{volt}} = 1 \text{ G}\Omega$.

La tension aux bornes d'un ampèremètre numérique est d'environ 0,2 V.

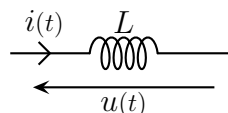
◇ Dans ces conditions la résistance d'entrée de l'ampèremètre dépend du calibre utilisé : entre 1Ω et $1 \text{ k}\Omega$. Cette non idéalité implique qu'il est souvent préférable d'utiliser un voltmètre.

Un fil peut être vu comme un résistor de résistance nulle et un interrupteur ouvert comme un résistor de résistance infinie.

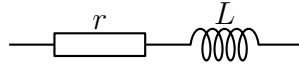
I.1.ii – bobine

Une bobine idéale est caractérisée par son *inductance* $L > 0$ en H (henry) et telle que en convention récepteur

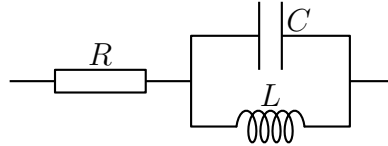
$$u(t) = +L \frac{di}{dt}(t)$$



En basses fréquences, une bobine peut être modélisée par une association série d'une bobine idéale et d'un condensateur.



En hautes fréquences, une bobine peut être modélisée par l'association suivante dans laquelle la résistance varie fortement en fonction de la pulsation.



⚠ Le fait que la résistance des fils varie (fortement) avec la fréquence provient de l'effet de peau.

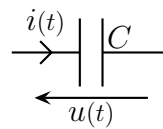
✧ La limite basse / haute fréquence dépend évidemment des bobines mais à partir de 10 kHz, cela *peut* être considéré comme de la haute fréquence pour beaucoup d'entre elles.

En TP nous utiliserons des bobines dont l'inductance varie de quelques mH à une fraction de henry.

I.1.iii – condensateur

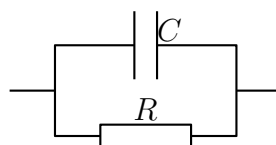
Un condensateur idéal est caractérisée par sa *capacité* $C > 0$ en F (farad) et telle que en convention récepteur

$$i(t) = +C \frac{du}{dt}(t)$$



En TP nous utiliserons des condensateurs dont la capacité varie du nF au μF .

Un condensateur réel se comporte comme un condensateur idéal en parallèle avec un résistor dont la résistance R_f est appelée *résistance de fuite*.



✧ En ce qui concerne l'aspect électrostatique du condensateur

Avec les conventions ci-dessous, les deux armatures d'un condensateur possèdent des charges opposées et celles-ci sont reliées à la tension par la loi

$$q(t) = +C u(t)$$


- ✧ Rappelons que cet aspect électrostatique est **complètement inutile** pour la « mise en équation » du circuit.
- ✧ Qui plus est, l'expérience montre que le fait de mettre une charge q sur une des armatures du condensateur est bien plus esthétique que rigoureux car le respect *des* conventions électrocinétique et électrostatique de la notation engendre souvent plusieurs erreurs de signe qui se compensent parfois mais qui, de toute façon, discréditent totalement le raisonnement.
- ✧ Nous éviterons donc autant que possible cette approche.

I.1.iv – générateurs

Un générateur idéal de tension est caractérisé par sa *force électromotrice* (f.é.m) en V (volt) et tel que

$$u(t) = +e(t)$$


Un générateur idéal de courant est caractérisé par son *courant électromoteur* (c.é.m) en A (ampère) et tel que

$$i(t) = +\eta(t)$$


- ✧ Pour ces deux dipôles, à ce niveau là nous ne parlons pas de convention générateur ou récepteur puisque leurs lois sont indépendantes (respectivement) du courant qui les traverse et de la tension à leurs bornes.

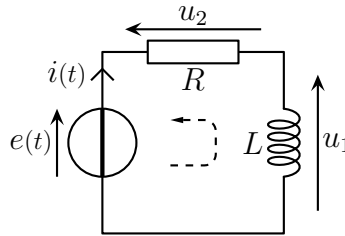
I.2 – Lois de fonctionnement des circuits

I.2.i – lois de KIRCHHOFF

- ✧ Il s'agit de lois valables uniquement dans le cadre de l'ARQS :
 - ➔ la loi des mailles ;
 - ➔ la loi des nœuds.
- ✧ Nous n'utiliserons que très peu ces lois car elles sont lourdes.
- ✧ La plupart du temps, nous utiliserons :
 - ➔ soit la loi des mailles en terme de courant ;
 - ➔ soit la loi des nœuds en terme de potentiel.

▲ La loi des mailles n'est plus valable en induction !

- ◇ Dans les deux cas il s'agit de remplacer directement dans la loi de KIRCHHOFF les lois constitutives des composants (en faisant attention aux conventions) de manière à limiter le nombre d'inconnues.
- ◇ Exemple de loi des mailles en terme de courant



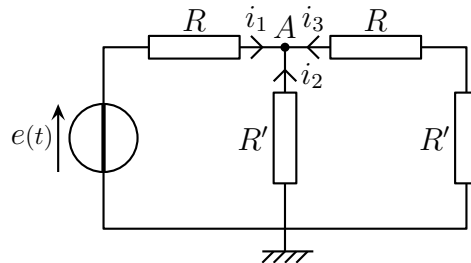
◇ Nous avons ainsi

$$\underbrace{L \frac{di}{dt}(t)}_{=u_1} + \underbrace{R i(t)}_{=u_2} - e(t) = 0$$

◇ Remarquons qu'une loi des mailles en terme de courant :

- finit par « = 0 » (sinon c'est une simple additivité des tensions) ;
- les termes s'écrivent dans l'ordre de la maille (sinon il est plus que fréquent d'en oublier) ;
- demande de réfléchir au signe de chaque terme.

◇ Exemple de loi des nœuds en terme de potentiels :



◇ Nous avons ainsi

$$\underbrace{\frac{e(t) - V_A(t)}{R}}_{=i_1} + \underbrace{\frac{0 - V_A(t)}{R'}}_{=i_2} + \underbrace{\frac{0 - V_A(t)}{R + R'}}_{=i_3} = 0$$

◇ Remarquons qu'une loi des nœuds en terme de potentiels :

- finit par « = 0 » ;
- n'est qu'une simple loi des nœuds **entrants** ;
- ne demande pas de réfléchir au signe de chaque terme.

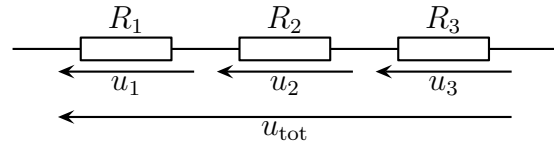
◇ Parfois cette loi des nœuds est connu sous la forme dite « formule de MILLMANN » mais nous ne l'utiliserons pas car :

- l'écriture MILLMANN est plus lourde (avec des fractions de fraction) ;
- dans le cas où il n'y a pas *que* des dipôles passifs dans le circuit, l'expression de la loi générale est plus délicate, notamment au niveau des signes.

I.2.ii – ponts diviseurs

Pour des résistors en série, nous avons

$$u_1(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \times u_{\text{tot}}(t)$$



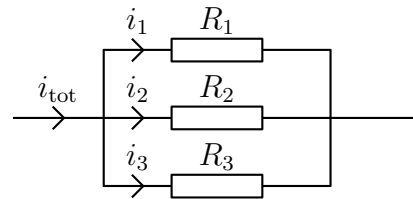
- ◇ Bien sûr il faut faire (une fois de plus) attention aux signes.
- ◇ Le piège de cette loi est qu'elle **nécessite** de vérifier que les dipôles sont bien en série, ce qu'ils ne sont pas toujours.

La *conductance* $G > 0$ d'un résistor s'évalue en S (siemens) et est définie par

$$G \triangleq \frac{1}{R}$$

Pour des résistors en parallèle, nous avons

$$i_1(t) = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \times i_{\text{tot}}(t)$$



- ◇ Bien sûr il faut faire là aussi attention aux signes et vérifier que les dipôles sont en parallèle.

I.3 – Association de dipôles

I.3.i – association série

N résistors en série sont équivalents à un résistor unique de résistance $R_{\text{éq}}$ telle que

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

N bobines idéales en série sont équivalentes à une bobine idéale unique d'inductance $L_{\text{éq}}$ telle que

$$L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

N condensateurs idéaux en série sont équivalents à un condensateur idéal unique de capacité $C_{\text{éq}}$ telle que

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

- ✧ En pratique les lois sur les bobines et les condensateurs sont peu importantes car, en régime sinusoïdal forcé, tout n'est qu'impédance.


I.3.ii – association parallèle

N résistors en parallèle sont équivalents à un résistor unique de résistance $R_{\text{éq}}$ telle que

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad \text{ou} \quad G_{\text{éq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

Dans le cas de *deux* résistors en parallèle de résistance R_1 et R_2 , la résistance équivalente de l'association s'écrit

$$R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

 Ne surtout pas généraliser cette loi à $R_{\text{éq}} = \frac{\text{produit}}{\text{somme}}$ qui est trivialement fausse pour $N \geq 3$ pour une simple raison d'homogénéité.

N bobines idéales en parallèle sont équivalentes à une bobine idéale unique d'inductance $L_{\text{éq}}$ telle que

$$\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}$$

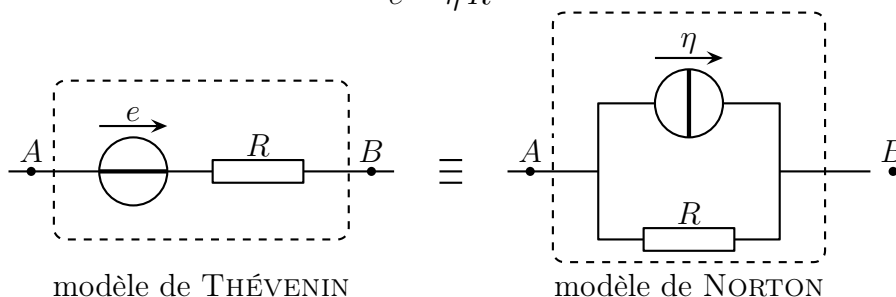
N condensateurs idéaux en parallèle sont équivalents à un condensateur idéal unique de capacité $C_{\text{éq}}$ telle que

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

I.3.iii – générateurs réels

Un générateur réel peut être modélisé soit par le modèle de THÉVENIN soit par le modèle de NORTON tels que

$$e = \eta R$$



- ✧ Là, comme partout, il faut bien faire attention aux conventions : à « l'intérieur » du dipôle les flèches sur les générateurs sont dans le même sens.

I.4 – Aspect énergétique

I.4.i – puissance

- ◇ Il faut bien distinguer dans quel sens va l'énergie et cela est valable quel que soit le domaine de la physique.

La *puissance fournie* et la *puissance reçue* par un système sont définies par

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{reçue}}}{dt}(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{fournie}} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{fournie}}}{dt}(t)$$

- ◇ Tout cela afin d'éviter les erreurs de signe.

Par convention, nous avons toujours, quel que soit le système considéré

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = -\mathcal{P}_{\text{fournie}}$$

- ◇ Du point de vue de l'interprétation

La puissance reçue est positive lorsque le système reçoit effectivement de l'énergie.
La puissance fournie est positive lorsque le système fournit effectivement de l'énergie.

Pour un dipôle en convention récepteur, la puissance reçue s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = +u(t) \times i(t)$$

Pour un dipôle en convention générateur, la puissance fournie s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = +u(t) \times i(t)$$



Attention de ne pas se tromper de signe et de ne pas confondre le « + » avec le caractère positif d'une puissance.

- ◇ N'oublions pas aussi une loi absolument fondamentale.

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

À tout instant dans un circuit électrocinétique, la somme des puissances reçues par tous les composants est nulle.

$$\sum_{\text{composants}} \mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = 0$$

- ◇ Cette loi est valable avec n'importe quel type de composants, dipôle ou non comme l'AO.



Ne pas oublier qu'avec l'AO, tous les composants ne sont pas représentés.

I.4.ii – dipôles usuels

★ résistor

- ◇ Le résistor ne peut **que** recevoir de l'énergie et toute celle qu'il reçoit « sort » du circuit.

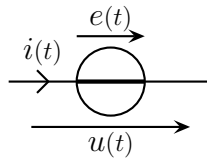
L'énergie dissipée par un résistor l'est par *effet JOULE* et la puissance associée s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = +R i^2(t) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{u^2(t)}{R}$$

★ générateur

◇ Pour un générateur comme celui représenté ci-dessous, nous avons

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = +e(t) i(t) \geq 0$$



◇ Le cas $\mathcal{P}_{\text{fournie}} < 0$ n'est pas rare : c'est ce qui arrive lorsque des batteries sont rechargées.

★ bobine et condensateurs

À chaque instant une bobine idéale d'inductance L et parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ possède l'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{bob}}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Cette énergie est contenue dans le champ magnétique créé par la bobine.

À chaque instant un condensateur idéal de capacité C soumis à la tension $u(t)$ possède l'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{cond}}(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

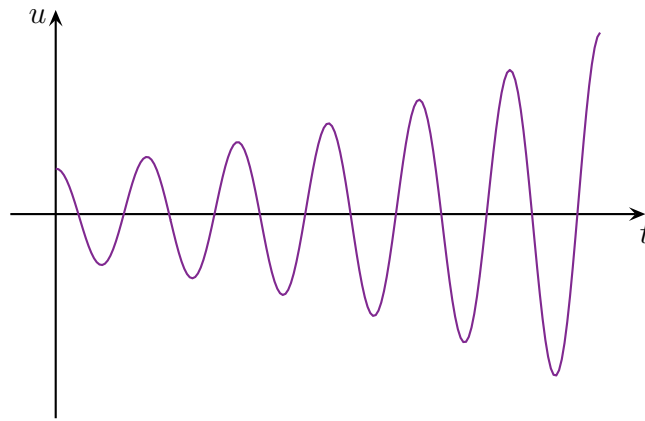
Cette énergie est contenue dans le champ électrique créé par le condensateur.

★ bilan

◇ Qualitativement nous avons donc :

- les résistors qui « sortent » l'énergie du circuit et ce **toujours** ;
- les bobines et les condensateurs qui peuvent stocker et déverser de l'énergie dans le circuit ;
- les générateur qui fournissent de l'énergie la plupart du temps mais qui peuvent en récupérer parfois.

◇ C'est ainsi que la situation suivante n'est pas possible dans un circuit passif comportant au moins un résistor car cela impliquerait qu'il y ait de plus en plus d'énergie dans le circuit.



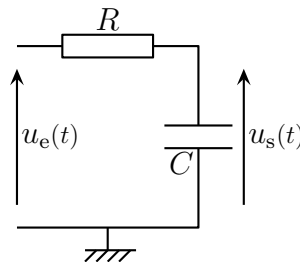
II – Régimes transitoires

II.1 – Circuits d'ordre 1

II.1.i – passe-bas

★ montage

◇ Il s'agit d'un simple circuit RC où le but est de déterminer l'équation vérifiée par $u_s(t)$.



◇ La mise en équation est immédiate à partir d'une approche nodale et, donc, d'une loi des nœuds en terme de potentiel.

$$\frac{u_e(t) - u_s(t)}{R} + \left(-C \frac{du_s}{dt}(t) \right) = 0$$

◇ En réarrangeant, cela donne

$$\frac{du_s}{dt}(t) + \frac{1}{RC} u_s(t) = \frac{u_e(t)}{RC}$$

◇ Et sous forme canonique

$$\frac{du_s}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} u_s(t) = \frac{u_e(t)}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

★ grandeurs caractéristiques

◇ Pour étudier de manière générale et qualitative, mais néanmoins rigoureuse, des lois, nous serons amenés à parler des valeurs prises par les différentes grandeurs.

La *valeur caractéristique* d'une grandeur est la valeur qui décrit le mieux cette grandeur.

◇ C'est ainsi que :

- la valeur caractéristique d'une tension sinusoïdale est son amplitude ou sa valeur efficace ;
- la valeur caractéristique d'une tension exponentielle est sa valeur initiale.

◇ Il ne faut pas être trop à cheval sur la définition technique précise de ces valeurs caractéristiques, car leur but n'est pas d'apporter une information quantitative mais plutôt qualitative, de manière à pouvoir, éventuellement, négliger certains termes d'une loi.

▲ Ces valeurs caractéristiques sont utilisées notamment dans le calcul du nombre de REYNOLDS.

La *durée caractéristique* d'un signal est la durée pendant laquelle le signal varie notablement.

◇ Typiquement :

- pour un signal périodique, la durée caractéristique est la période T ;
- pour un signal exponentiel, la durée caractéristique est la constante de temps τ .

◇ Ceci étant la durée caractéristique peut être définie pour n'importe quel type de signal, comme par exemple le son de la voix.

☕ *Remarque.* Il est parfois possible de distinguer plusieurs grandeurs ou durées caractéristiques dans un signal. L'exemple canonique est le signal modulé en amplitude qui a deux durées caractéristiques : la période de la porteuse et la période du signal modulant.

★ ordre de grandeur

◇ Imaginons un signal, pas forcément périodique, de durée caractéristique T .

◇ Alors, en ordre de grandeur (ODG), nous avons

$$\frac{du_s}{dt}(t) \sim \frac{U_s}{T}$$

◇ Dans ces conditions, l'équation différentielle permet de dire, toujours en ODG

$$\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right) U_s = \frac{U_e}{\tau}$$

◇ Nous avons alors deux cas intéressants : si $T \ll \tau$ ou si $T \gg \tau$.

◇ Dans le cas $T \ll \tau$ alors

$$\frac{1}{T} U_s = \frac{U_e}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = \frac{T}{\tau} U_e$$

◇ Cela implique que plus la fréquence caractéristique¹ augmente, plus T diminue et plus la sortie diminue également.

◇ Dans le cas $T \gg \tau$ alors

$$\frac{1}{\tau} U_s = \frac{U_e}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = U_e$$

◇ Cela signifie que la sortie répond « immédiatement » à l'entrée : c'est un cas de quasistaticité.

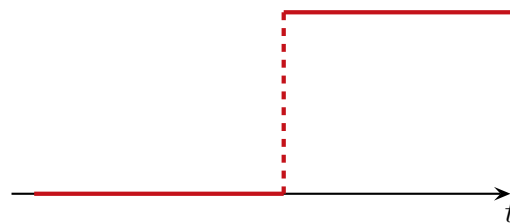
1. Fréquence caractéristique que nous définirons par $f = 1/T$ même pour des signaux non périodiques.

Lorsque la durée caractéristique de fonctionnement du système est très inférieure à la durée caractéristique de la contrainte extérieure, il est possible de parler de *quasistaticité*.

★ réponse à un échelon

Un *échelon* est une contrainte qui passe « instantanément » d'une valeur à une autre valeur.

- ✧ Le caractère instantané de l'échelon est à comprendre au sens physique, à savoir « beaucoup plus rapidement que la durée de réaction du système ».
- ✧ Graphiquement il s'agit d'une simple « marche » et l'instant de discontinuité est pris comme instant initial.



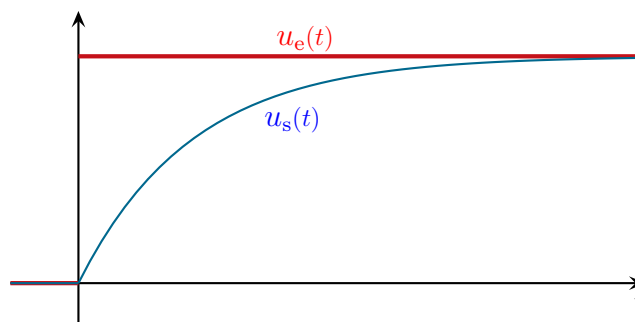
☕ *Remarque.* Même si physiquement le signal est forcément continu, il vaut mieux ne pas représenter le trait vertical entre les deux niveaux de l'échelon pour ne pas laisser croire qu'il est possible de fixer un point dessus.

- ✧ Rappelons sans les redémontrer les résultats.

$$u_s(t) = E (1 - e^{-t/\tau})$$

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps.

- ✧ La représentation graphique est la suivante :

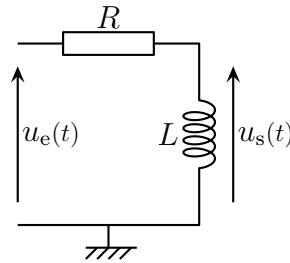


- ✧ Ne pas oublier la propriété de la « tangente n'importe où » : une tangente à une évolution du 1^{er} ordre coupe l'asymptote τ plus tard que la date de son point de tangence.

II.1.ii – passe-haut

★ montage

◇ Il s'agit d'un montage analogue.



◇ Cette fois, pour le mettre en équation, mieux vaut passer par la notation complexe, mais ici faisons plutôt une loi des mailles en terme de courant (car il vaut mieux éviter les lois des nœuds en terme de potentiel pour les bobines)

$$u_s(t) + R i(t) - u_e(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) + R i(t) = u_e(t)$$

◇ En dérivant cette relation et en ajoutant le fait que $u_s(t) = +L \frac{di}{dt}(t)$, nous arrivons à

$$\frac{du_s}{dt}(t) + R \frac{di}{dt}(t) = \frac{du_e}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du_s}{dt}(t) + \frac{R}{L} u_s(t) = \frac{du_e}{dt}(t)$$

◇ Et sous forme canonique

$$\frac{du_s}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} u_s(t) = \frac{du_e}{dt}(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

★ ordre de grandeur

◇ Comme pour le circuit passe-bas, nous avons immédiatement

$$\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right) U_s = \frac{U_e}{T}$$

◇ En basses fréquences, nous avons $T \gg \tau$ et donc

$$\frac{1}{\tau} \times U_s = \frac{U_e}{T} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = \frac{\tau}{T} U_e$$

◇ Plus la fréquence baisse, plus la réponse est faible.

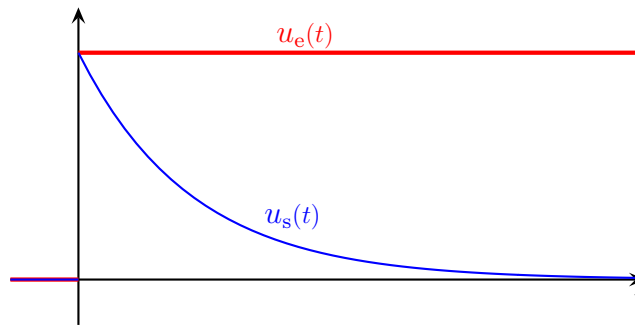
◇ En hautes fréquences nous avons

$$\frac{1}{T} \times U_s = \frac{U_e}{T} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = U_e$$

◇ La sortie suit l'entrée

★ échelon de tension

◇ Graphiquement nous avons la courbe suivante :



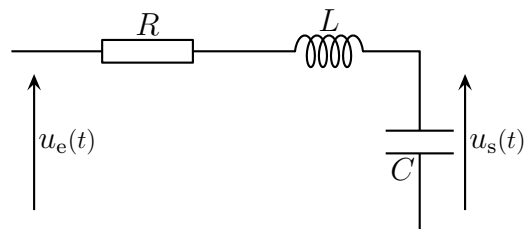
Le courant traversant une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps.

◇ En revanche, comme nous le voyons, la *tension* aux bornes d'une bobine peut très bien être mathématiquement discontinue.

II.2 – Circuit d'ordre 2

II.2.i – circuit classique : le *RLC* série

◇ Choisissons un circuit R, L, C série tout ce qu'il y a de plus classique.



II.2.ii – équation différentielle

◇ La mise en équation, tout aussi classique, permet d'aboutir à

$$\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s(t)}{dt} + \omega_0^2 u_s(t) = \omega_0^2 u_e(t) \quad \text{avec} \quad Q_{\text{série}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

◇ Rappelons que ω_0 est la pulsation propre et $Q_{\text{série}}$ le facteur de qualité du circuit.

◇ Si, dimensionnellement, l'expression de la pulsation propre ne pouvait être que celle-ci (à un facteur numérique près), il n'en est pas de même pour le facteur de qualité car il est sans dimension et donc $1/Q_{\text{série}}$ l'est aussi.

◇ Il ne faut donc **pas** penser que quel que soit le circuit le facteur de qualité est d'autant meilleur que R est petit. C'est **faux** ! Contre-exemple (laissé au lecteur) : le circuit R, L, C parallèle.

▲ ω_0 est la pulsation du mode propre du circuit R, L, C série avec R négligeable.

II.2.iii – ordres de grandeur

✧ En ODG nous avons

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2}(t) \sim \frac{U_s}{T^2}$$

✧ Dans ces conditions, l'équation différentielle donne, en ODG

$$\left(\frac{1}{T^2} + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{1}{T} + \omega_0^2 \right) U_s = \omega_0^2 U_e$$

✧ Prenons le cas d'une évolution *lente* avec $T \gg 1/\omega_0$. Alors

$$\omega_0^2 U_s = \omega_0^2 U_e \quad \rightsquigarrow \quad U_s = U_e$$

✧ Pour une évolution rapide, $T \ll 1/\omega_0$ et

$$\frac{1}{T^2} U_s = \omega_0^2 U_e \quad \rightsquigarrow \quad U_s = T^2 \omega_0^2 U_e \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

✧ Il est parfois possible que le troisième terme soit prédominant mais cela impose la condition

$$\frac{1}{T^2} \ll \frac{\omega_0}{QT} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 \ll \frac{\omega_0}{QT} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{T^2} \omega_0^2 \ll \frac{\omega_0}{QT} \times \frac{\omega_0}{QT} \quad \rightsquigarrow \quad Q \ll 1$$

II.2.iv – solutions

★ solution générale

✧ Comme l'équation est une équation différentielle linéaire, la solution générale s'écrit sous la forme

$$u_s(t) = u_{s,\text{transitoire}}(t) + u_{s,\text{permanent}}(t)$$

✧ Pour trouver la solution en régime permanent :

- ➔ soit la contrainte est continue et il suffit de remplacer bobine et condensateur par leurs modèles équivalents en régime continu ;
- ➔ soit la contrainte est sinusoïdale et alors nous utiliserons la notation complexe ;
- ➔ soit la contrainte est quelconque et alors le problème devient un problème mathématique de recherche de solution.

✧ Physiquement, le régime transitoire ne peut **que** tendre vers 0 à cause de l'aspect dissipatif du résistor.

Le régime permanent ne dépend pas des conditions initiales.

✧ C'est un résultat très intéressant qui nous permettra d'évacuer ce problème de condition initiale assez régulièrement.

★ différentes natures de régime transitoire

✧ Pour trouver la solution en régime transitoire, il faut s'abord résoudre l'équation caractéristique associée

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

✧ Le discriminant s'écrit

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$

★ régime apériodique

🕒 interprétation

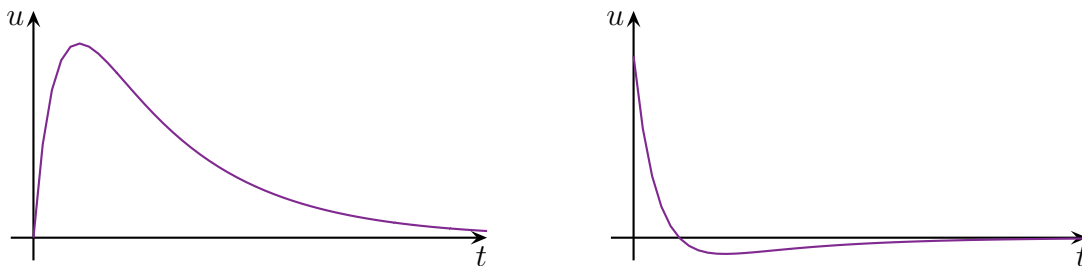
- ✧ Il s'agit d'un système essentiellement dissipatif et qui a lieu lorsque $Q < \frac{1}{2}$, ce qui correspond à $\Delta > 0$.

La durée du régime transitoire pour un régime apériodique tel que $Q \ll 1$ est de $\frac{T_0}{Q}$.

- ✧ En pratique nous aurons $Q \ll 1$ dès que $Q < 0,2$.

🕒 représentation

- ✧ Voici deux représentations possible de deux régimes apériodiques de même facteur de qualité mais de conditions initiales différentes.



🕒 expression

- ✧ En résolvant l'équation caractéristique, nous trouvons deux solutions réelles négatives r_1 et r_2 qui nous permettent d'introduire les durées caractéristiques τ_1 et τ_2 telles que :

$$-\frac{1}{\tau_1} \stackrel{\text{not}}{=} r_1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\tau_2} = r_2$$

- ✧ Dans ces conditions la solution en régime transitoire s'écrit

$$u_{\text{s,transitoire}}(t) = \lambda e^{-t/\tau_1} + \mu e^{-t/\tau_2}$$

- ✧ λ et μ sont deux constantes d'intégration.
 ✧ L'évolution a donc *deux* constantes de temps différentes, comme si le système était composé de deux sous-systèmes séparés répondant de manière indépendante.
 ✧ Cela permet d'interpréter la 2^e évolution représentée ci-dessus.

★ régime pseudopériodique

🕒 interprétation

- ✧ Il s'agit d'un système essentiellement peu dissipatif et qui a lieu lorsque $Q > \frac{1}{2}$, ce qui correspond à $\Delta < 0$.

La durée du régime transitoire pour un régime pseudopériodique tel que $Q \gg 1$ est de $2Q T_0$.

Les oscillations d'un régime pseudopériodique tel que $Q \gg 1$ ont pour période la période propre T_0 .

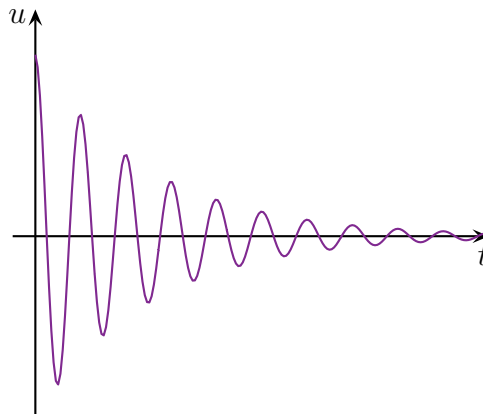
- ✧ En pratique nous aurons $Q \gg 1$ dès que $Q > 5$.
- ✧ Une loi qualitative importante sur les oscillations est la suivante.

Il ne peut y avoir d'oscillations dans un dispositif quelconque que si l'énergie y est présente sous deux formes différentes au moins.

- ✧ En d'autres termes, un circuit d'ordre deux mais composés uniquement de bobines ou uniquement de condensateurs ne pourra **jamais** être en régime pseudo-périodique.
- ⚠ Il en est de même pour le phénomène de propagation qui n'est, au fond, qu'un ensemble d'oscillations qui « avancent ».

🔗 représentation

- ✧ Sans surprise.



- ✧ Le régime permanent est obtenu pour environ $2Q$ oscillations.
- ✧ Dans les rares cas où $Q \not\gg 1$, la pseudo-période n'est **pas** égale à la période propre.

🔗 expression

- ✧ En résolvant l'équation caractéristique, nous trouvons deux solutions imaginaires conjuguées \underline{r}_0 et \underline{r}_0^* notées

$$\underline{r}_0 \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{1}{\tau} + j\omega$$

- ✧ Dans ces conditions la solution en régime transitoire s'écrit, au choix

$$u_{s,\text{transitoire}}(t) = e^{-t/\tau} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) \quad \text{ou} \quad u_{s,\text{transitoire}}(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✧ λ , μ , A et φ sont des constantes d'intégration, il y en a 2 quelle que soit la forme de la solution.

🕒 loi fondamentale

Pour qu'il y ait des oscillations dans un dispositif physique, il est nécessaire d'avoir deux types d'énergie différentes.

- ✧ En d'autres termes un circuit composé uniquement de bobines ou de condensateurs ne comporte qu'un seul type d'énergie (respectivement magnétique et électrostatique) et ne peut donc pas osciller.
- ✧ Il est donc **impossible** de constituer un circuit avec uniquement des bobines (ou uniquement des condensateurs) avec un facteur de qualité plus grand que 0,5.
- ✧ Il s'agit là d'une petite loi qui n'a l'air de rien mais qui est très utile pour commenter différents phénomènes comme, plus tard, la propagation.

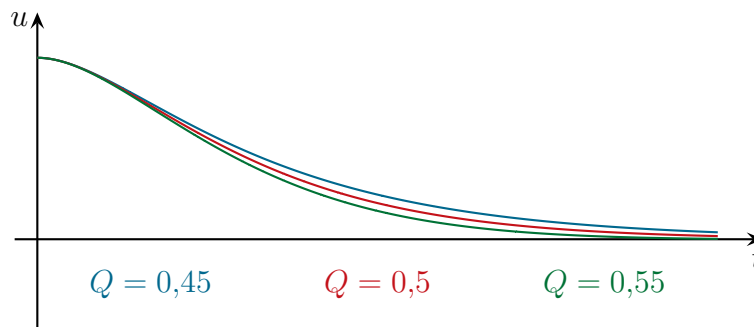
★ régime critique

🕒 interprétation

- ✧ C'est le cas limite entre le régime apériodique et le régime pseudopériodique et est obtenu pour $Q = \frac{1}{2}$
- ✧ Physiquement comme nous ne pourrions jamais avoir rigoureusement $Q = \frac{1}{2}$, cette solution est plutôt théorique.
- ✧ Cette solution n'est intéressante que parce qu'elle simplifie (un peu) la résolution formelle.

🕒 représentation

- ✧ Devant un oscilloscope, il est difficile de trouver « le » régime critique.
- ✧ Ci-dessous sont représentés les trois régimes $Q = 0,45$, $Q = 0,5$ et $Q = 0,55$.



🕒 expression

- ✧ Dans le cas $Q = 0,5$, la racine (double) de l'équation caractéristique est $r_0 = -\omega_0$ et alors

$$u_{s,\text{transitoire}}(t) = e^{-\omega_0 t} \times (\lambda + \mu t)$$

- ✧ λ et μ sont des constantes d'intégration.

III – Régime forcé

III.1 – Utilisation

III.1.i – signaux périodiques

- ◇ Nous utiliserons la notation complexe lorsque :
 - le système sera *linéaire* (cas fréquent et pas réservé, loin de là, à l'électrocinétique) ;
 - la contrainte sera périodique.
- ◇ Dans ces conditions, nous pourrions ramener toute l'étude à une étude en régime sinusoïdal forcé grâce au principe de superposition.
- ◇ Les contraintes non purement sinusoïdales seront décomposées en contraintes sinusoïdales grâce aux séries de FOURIER.

III.1.ii – série de FOURIER

★ décomposition

- ◇ C'est un cas très général.

Toute fonction T -périodique peut s'écrire sous la forme unique (au choix) avec $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

- ⚠ La transformée de FOURIER n'est autre que la généralisation aux fonctions non périodiques de la décomposition précédente.

$$a_0 = c_0 \text{ est la valeur moyenne de } f(t).$$

La composante de période T (*i.e.* de pulsation ω) correspondant à $n = 1$ est appelé le *fondamental*.

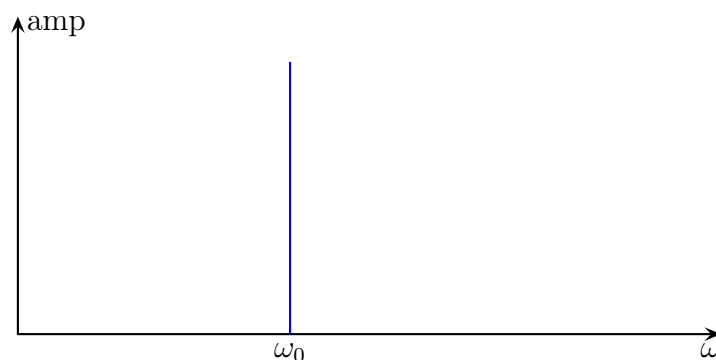
Les autres composantes (pour $n \geq 2$) sont appelées les *harmoniques*.

L'ensemble des c_n est appelé le *spectre* de $f(t)$.

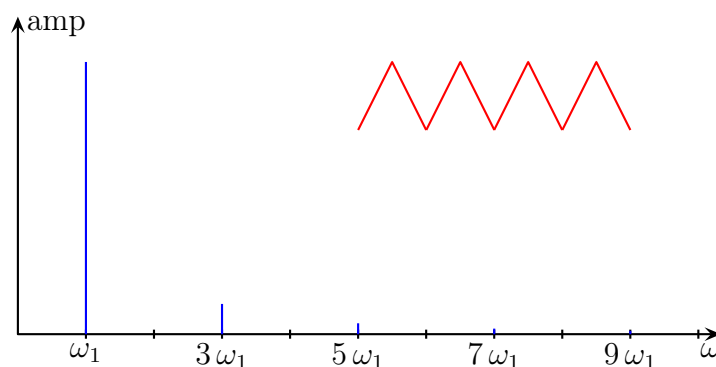
- ◇ Comme nous aurons l'occasion de le voir en optique mais aussi en acoustique, le *spectre* est une notion très utilisée même dans la vie courante.

★ spectres usuels

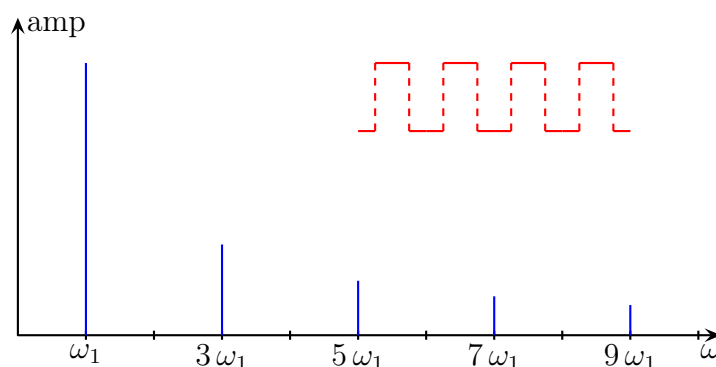
Un signal sinusoïdal a un spectre composé d'une seule raie



Un signal triangulaire a un spectre composé uniquement d'harmoniques impaires et décroissant en $\frac{1}{n^2}$



Un signal rectangulaire a un spectre composé uniquement d'harmoniques impaires et décroissant en $\frac{1}{n}$



★ propriétés

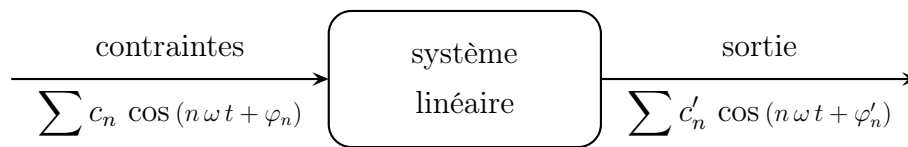
Un signal $f(t)$ symétrique ne possède que des composantes impaires.

Plus un signal a de discontinuités, plus le spectre est riche en harmoniques.

✧ Remarquons que le signal triangulaire est certe continu mais sa dérivée est discontinue.

III.1.iii – précautions

- ✧ Nous utiliserons tellement la décomposition en série de FOURIER et la notation complexe que, parfois, il sera possible d'oublier une condition nécessaire : il **faut** que le dispositif soit linéaire.
- ✧ Sans dispositif linéaire, même si nous pouvons décomposer la contrainte en série de FOURIER nous ne pourrions pas dire que la sortie est la superposition des sorties de chaque composante de l'entrée prises indépendamment les unes des autres.



Avec un dispositif linéaire, une contrainte de pulsation ω engendre une sorte de pulsation ω .

Pour que la sortie n'ait pas la même pulsation que l'entrée, il **faut** un système non linéaire.

- ✧ Ce corrolaire est très très important en terme d'interprétation de spectre : c'est lui qui nous permet de diagnostiquer le caractère linéaire ou non d'un dispositif.

III.2 – Notation complexe

III.2.i – présentation

- ✧ La notation complexe n'est qu'une *notation*.
- ✧ En « vrai » les grandeurs complexes n'existent pas, seules les grandeurs réelles sont mesurables.
- ✧ À la grandeur réelle $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ nous pouvons associer la grandeur complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$$

- ✧ Nous avons ainsi (même si nous le ferons que rarement)

$$u(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times(j\omega)$$



Il existe aussi la convention

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{-j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = U_m e^{-j\varphi}$$

III.2.ii – impédance / admittance

Un dipôle linéaire peut être vu comme une *impédance* \underline{Z} telle que, en convention récepteur

$$\underline{u}(t) = +\underline{Z}\underline{i}(t) \quad \text{ou} \quad \underline{U}_m = +\underline{Z}\underline{I}_m$$

◇ De là nous pouvons en déduire les comportements BF et HF de la bobine et du condensateur.

Une bobine en basses fréquences est équivalente à un interrupteur fermé.
Une bobine en hautes fréquences est équivalente à un interrupteur ouvert.

Un condensateur en basses fréquences est équivalente à un interrupteur ouvert.
Une bobine en hautes fréquences est équivalente à un interrupteur fermé.

◇ En fait, tous les dipôles linéaires peuvent être vus comme des sortes de résistance.

◇ En terme d'appellation, nous avons

$$\underline{\text{impédance}} = \text{résistance} + j \times \text{réactance} \quad \text{ou} \quad \underline{Z} = R + jX$$

L'*admittance* complexe \underline{Y} est l'inverse de l'impédance.

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{\text{admittance}} = \text{conductance} + j \times \text{susceptance} \quad \text{ou} \quad \underline{Y} = G + jB$$

◇ Pour les dipôles usuels

$$\underline{Z}_{\text{résistor}} = R ; \quad \underline{Z}_{\text{bobine}} = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$$

III.2.iii – lois en complexe

◇ Elles sont identiques aux lois en notation réelle et avec les mêmes restriction (ARQS) à condition de procéder aux changements

$$R \longrightarrow \underline{Z} ; \quad G \longrightarrow \underline{Y} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) \longrightarrow \underline{U}_m$$



Attention aux lois des mailles et des nœuds à bien utiliser les amplitudes complexes car

$$\sum I_{m,k} \neq 0 \quad \text{mais} \quad \sum \underline{I}_{m,k} = 0$$

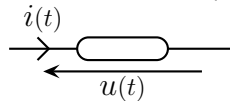
III.3 – Aspect énergétique

III.3.i – puissance moyenne reçue

- ◇ La puissance et l'énergie (qu'elles soient « reçues » ou « fournies ») sont des grandeurs quadratiques, *i.e.* non linéaires.
- ◇ En conséquence de quoi **il n'existe pas de notation complexe** pour la puissance ou l'énergie.
- ◇ En régime sinusoïdal nous parlerons davantage de la puissance moyenne reçue.

Un dipôle en convention récepteur reçoit en moyenne la puissance P telle que

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$



III.3.ii – d'autres expressions

- ◇ Pour calculer la puissance moyenne reçue, nous pourrions utiliser la notation complexe de la tension et de l'intensité.

La puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal forcé s'écrit

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_m \times \underline{I}_m) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} I_m^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} U_m^2 \operatorname{Re}(\underline{Y})$$



Pour une fois, dans les expressions ci-dessus, il s'agit bien des amplitudes réelles.

III.3.iii – impédances usuelles

- ◇ En régime sinusoïdal forcé, sans surprise, la puissance moyenne reçue par un résistor est forcément positive car elle s'écrit

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2$$

En régime sinusoïdal forcé, les bobines idéales et les condensateurs idéaux ne consomment pas d'énergie et, donc, reçoivent une puissance moyenne nulle.

- ◇ En fait, bobines et condensateurs idéaux passent autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à la restituer.

III.3.iv – valeur efficace

La valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique s'écrit

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2(t) \rangle \quad \text{ou} \quad U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

La valeur efficace d'un signal représente la valeur à donner à un signal constant pour transporter la même puissance.

$$\text{Pour un signal sinusoïdal } U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

- ◇ Cette relation n'est vraie que pour un signal parfaitement sinusoïdal de valeur moyenne nulle !
- ◇ L'électricité disponible dans les prises a une tension de 230 V efficace.

III.3.v – pour la décomposition en série de FOURIER

- ◇ La non linéarité de la puissance semble sonner le glas de la notation complexe et de la décomposition en série de FOURIER pour les signaux non sinusoïdaux. Mais en fait non !

Dans un circuit linéaire, la puissance totale reçue par un dipôle de la part d'un signal non sinusoïdal est la somme des puissances reçues par chacune des harmoniques.

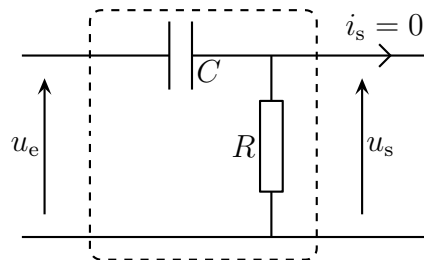
- ◇ C'est un résultat absolument stupéfiant et génial. Sans lui, les calculs effectués sur les puissances seraient bien plus difficiles.
- ▲ Nous ne faisons que dire ici qu'il n'y a pas d'interférence entre des signaux de pulsation différente.

III.4 – Filtres d'ordre 1

III.4.i – filtre passe-haut

★ montage et fonction de transfert

- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

★ forme canonique

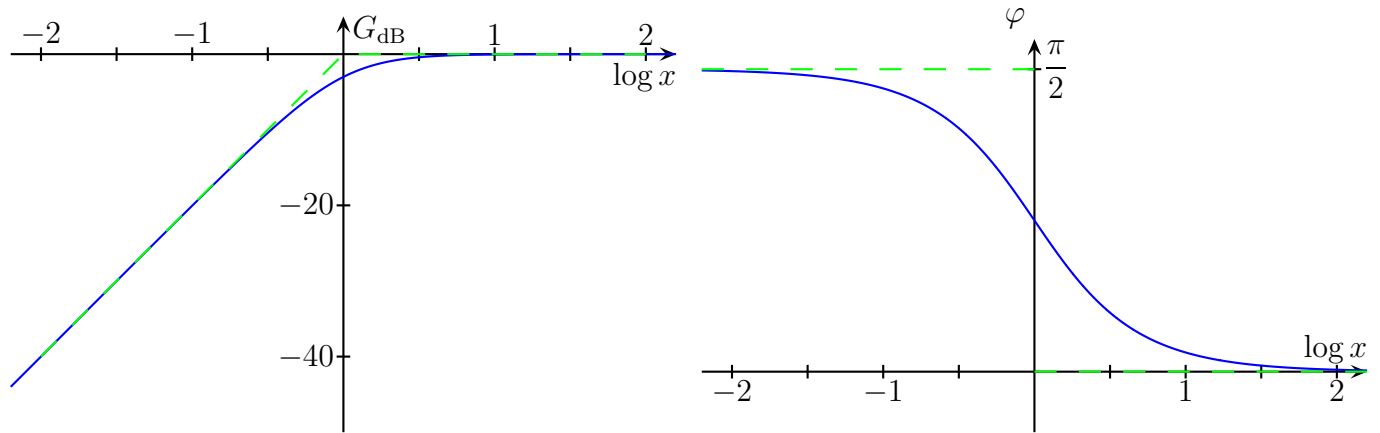
- ◇ La forme canonique d'un passe-haut du premier ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

- ◇ $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{caractéristique}}}$ est appelé la pulsation réduite.

★ diagrammes de BODE

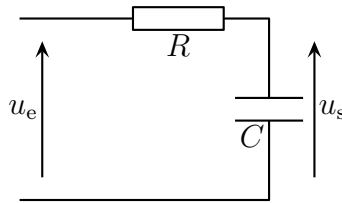
- ◇ Rappelons qu'il ne faut pas confondre le gain $G = |\underline{H}(jx)|$ avec le gain en décibels $G = 20 \log |\underline{H}(jx)|$
- ◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant $H_0 = 1$, à :



III.4.ii – filtre passe-bas

★ montage et fonction de transfert

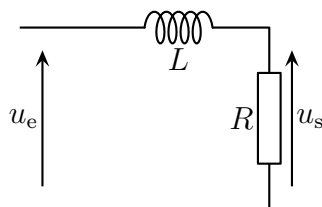
- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

☕ *Remarque.* En pratique, le montage ci-dessous ne fonctionne pas en tant que filtre passe-bas à cause du caractère capacitif de la bobine en hautes fréquences.



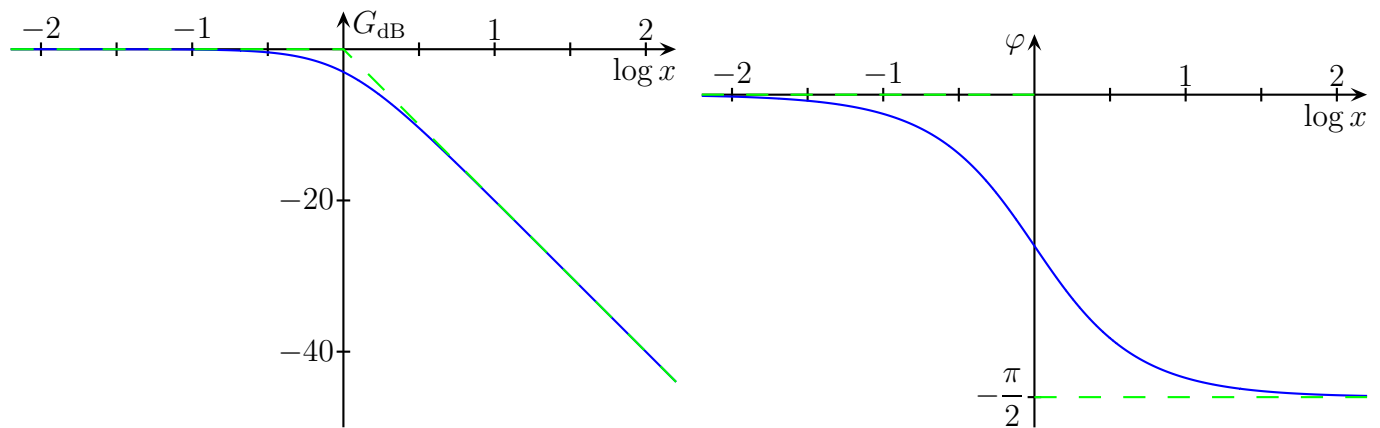
★ forme canonique

- ◇ La forme canonique d'un passe-bas du premier ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant $H_0 = 1$, à :



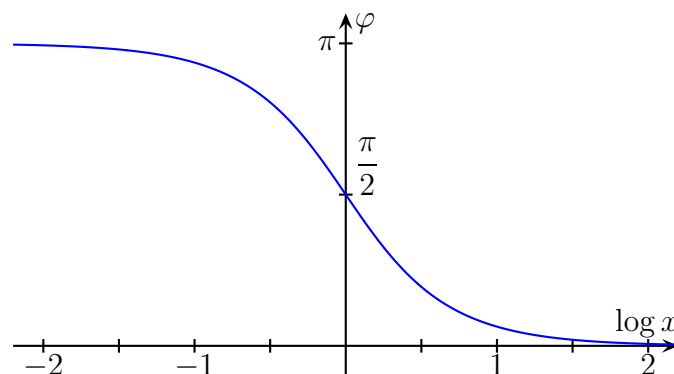
III.4.iii – d'autres types

◇ Il n'existe pas que ces deux types de filtres !

★ déphaseur

◇ C'est un filtre de gain constant mais de déphasage non constant.

◇ Son diagramme de BODE en phase ressemble à

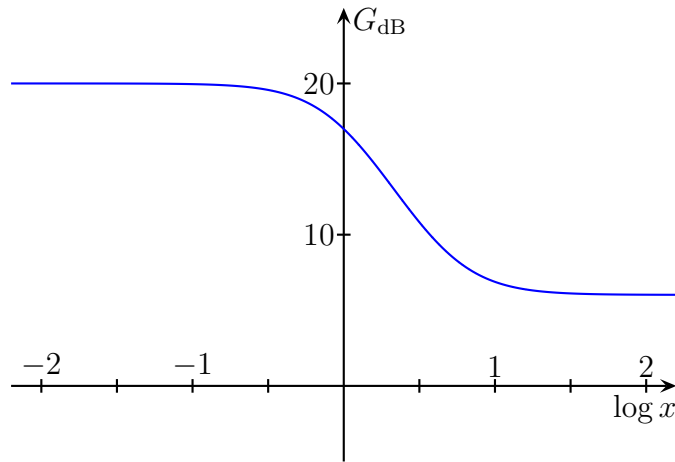


★ atténuateur

◇ C'est un cas dont la seule difficulté est de ne pas s'écrire ni sous la forme canonique d'un passe-bas ni sous celle d'un passe-haut.

◇ En conséquence de quoi, vouloir absolument écrire toute fonction de transfert sous une forme connue peut mener droit dans le mur.

◇ Son diagramme de BODE en gain en décibel ressemble à



III.5 – Filtres d'ordre 2

III.5.i – utilité

- ◇ L'intérêt des filtres d'ordre 1 et 2 est que toute fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de transfert d'ordre inférieur ou égal à 2, car tout polynôme peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

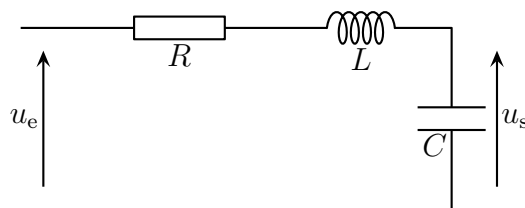
$$\underline{H}(jx) = \frac{\nu_0 + \nu_1(jx) + \nu_2(jx)^2 + \dots + \nu_n(jx)^n}{\delta_0 + \delta_1(jx) + \delta_2(jx)^2 + \dots + \delta_n(jx)^n} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(jx) = \prod \frac{N_{0,i} + N_{1,i}(jx) + N_{2,i}(jx)^2}{D_{0,i} + D_{1,i}(jx) + D_{2,i}(jx)^2}$$

- ◇ Par ordre (au numérateur et au dénominateur), il y a :
- une variation de pente de ± 20 db/déc ;
 - un déphasage de $\pm \pi/2$.

III.5.ii – filtre passe-bas

★ montage et fonction de transfert

- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

★ forme canonique

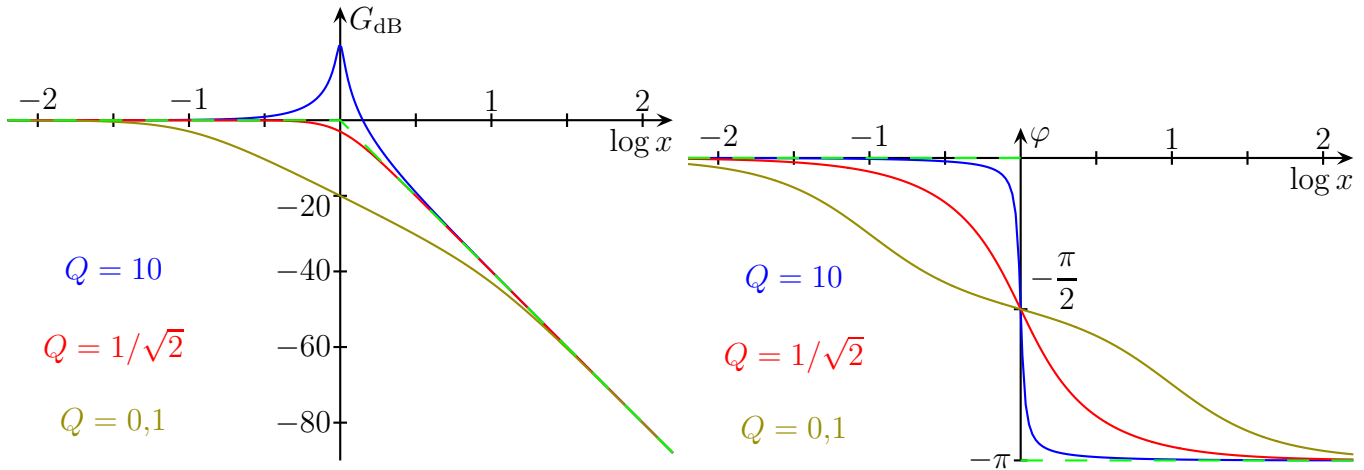
- ◇ La forme canonique d'un passe-bas du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

☞ *Remarque.* Pour se souvenir du dénominateur il suffit de penser à la forme canonique des équations différentielles d'ordre 2.

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant $H_0 = 1$ et pour plusieurs valeurs du facteur de qualité Q , à :

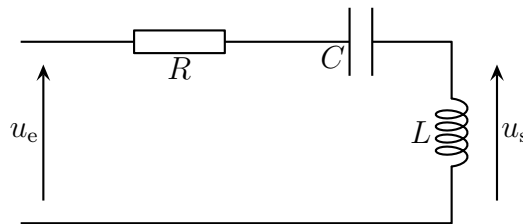


◇ Nous constatons qu'il peut y avoir des phénomènes de résonance, ce qui n'est pas souhaitable car cela transforme un filtre passe-bas en filtre passe-bande.

III.5.iii – filtre passe-haut

★ montage et fonction de transfert

◇ Considérons le montage suivant.



◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

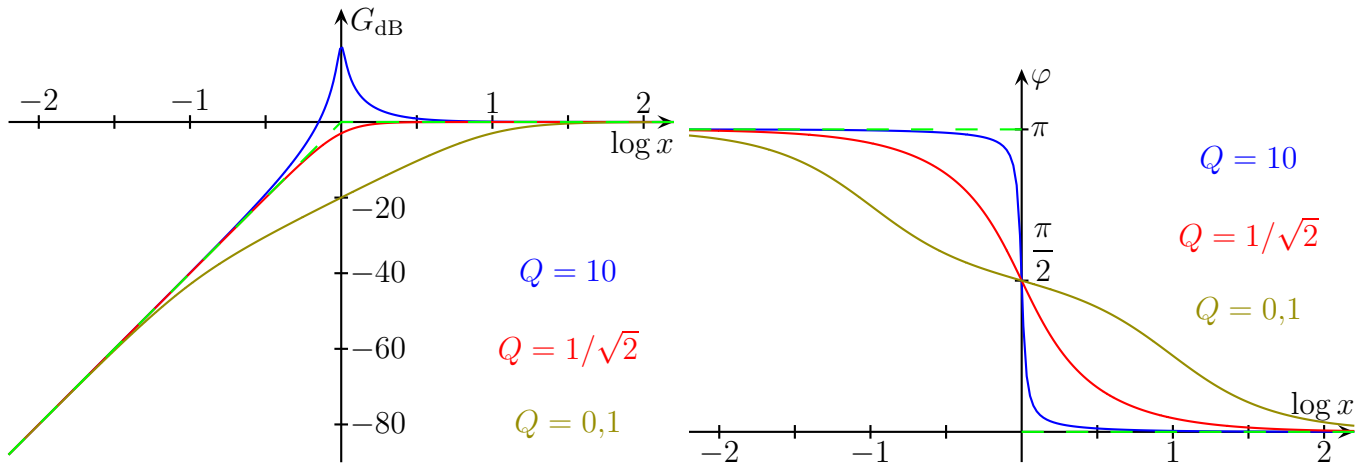
★ forme canonique

◇ La forme canonique d'un passe-haut du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant $H_0 = 1$ et pour plusieurs valeurs de facteur de qualité Q , à :

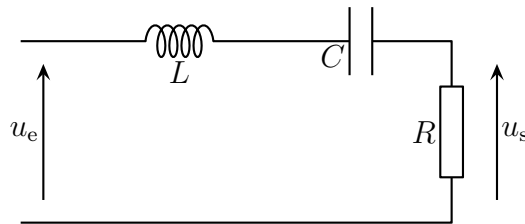


◇ Là aussi les phénomènes de résonance ne sont pas souhaitables.

III.5.iv – filtre passe-bande

★ montage et fonction de transfert

◇ Considérons le montage suivant.



◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

★ forme canonique

◇ La forme canonique d'un passe-bande du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

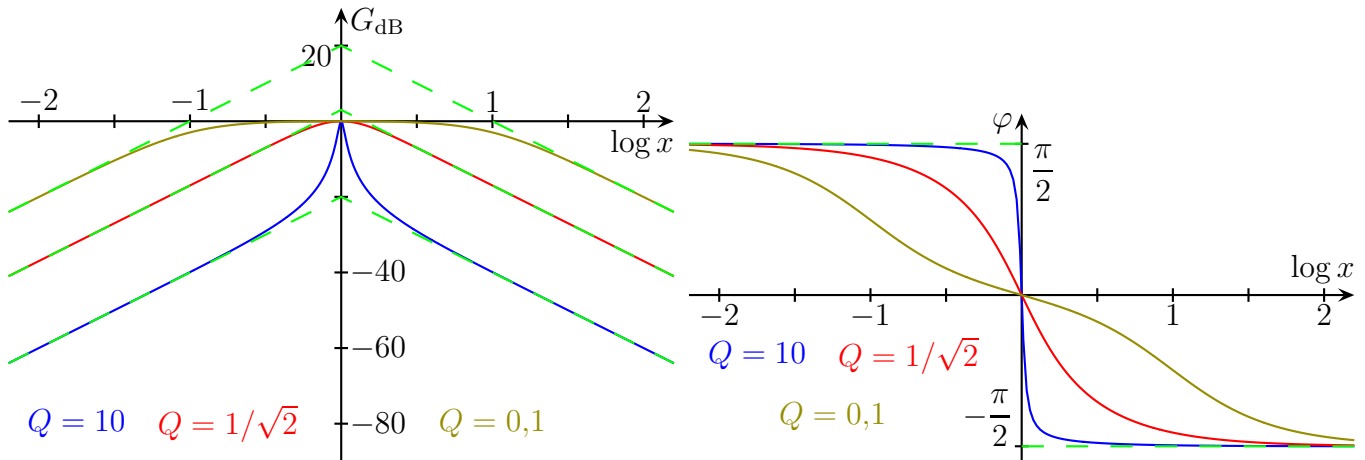
◇ Le numérateur n'est autre que le 2^e terme du dénominateur.

◇ Une autre manière (plus pratique en général) d'écrire cette fonction de transfert est

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant $H_0 = 1$ et pour plusieurs valeurs de facteur de qualité Q , à :



◇ Ici, contrairement aux autres filtres, les phénomènes de résonance sont recherchés.

III.6 – Stabilité d'un filtre

III.6.i – définition

Un filtre est dit *stable* lorsque la sortie est bornée à tout instant et quelle que soit la pulsation d'entrée.

III.6.ii – critères de stabilité

Pour qu'un filtre d'ordre 1 ou 2 soit stable, il faut :

- que le polynôme en (jx) du dénominateur soit d'ordre plus élevé ou égal à celui du numérateur ;
- que le polynôme en (jx) du dénominateur ait tous ses coefficients non nuls **et** de même signe.

◇ La 2^e condition est aussi connue sous le nom de *critère de CAUCHY*.

◇ Insistons : ce n'est valable que pour les filtre d'ordre 1 ou 2.

Circuits électriques

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1^{re} année :
 - I.B. Électrocinétique.
 - III.A. Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé.

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - dipôle, courant, tension, intensité, potentiel ;
 - convention générateur / récepteur, caractéristique ;
 - résistor, condensateur idéal, bobine idéale, générateur idéal de tension / de courant ;
 - armature, charge ;
 - résistance, capacité, inductance, force électromotrice, courant électromoteur ;
 - maille, nœud, circuit, pont diviseur ;
 - association série / parallèle de dipôles ;
 - puissance reçue / fournie / dissipée ;
 - effet JOULE ;
 - circuits d'ordre 1 / d'ordre 2 ;
 - constante de temps, pulsation propre, facteur de qualité ;
 - régime apériodique / critique / pseudo-périodique ;
 - régime transitoire / forcé / permanent / continu ;
 - signal périodique ;
 - signal sinusoïdal, pulsation, phase instantannée, phase à l'origine, amplitude ;
 - série de FOURIER / spectre / valeur moyenne / fondamental / harmonique d'ordre n ;
 - circuit linéaire ;
 - notation complexe, amplitude réelle / complexe ;
 - impédance, admittance, résistance, réactance, conductance ;
 - puissance active, déphasage, valeur efficace ;
 - filtre, gain, gain en décibels, diagramme de BODE, pulsation de coupure ;
 - stabilité d'un filtre.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - tension en volt (V), intensité en ampère (A) ;
 - résistance en ohm (Ω), conductance en siemens (S), inductance en henry (H), capacité en farad (F), charge en coulomb (C) ;
 - puissance en watt (W), énergie en joule (J) ;
 - constante de temps (s), pulsation en radian par seconde (rad.s^{-1}), facteur de qualité (sans unité) ;
 - impédance (Ω), réactance (Ω), admittance (S).
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
 - $\tau = RC$; $\tau = \frac{L}{R}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q_{\text{série}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$;

→ $[jRC\omega] = 1$; $[LC\omega^2] = 1$; $[L\omega] = (\Omega)$; $[C\omega] = (\Omega)^{-1}$.

◇ Connaître les valeurs de :

- résistance usuelle en TP, capacité usuelle en TP, inductance usuelle en TP ;
- résistance de sortie d'un GBF, résistance d'entrée d'un oscilloscope / d'un voltmètre.

★ Les lois

◇ Sont à connaître :

- lois caractéristiques d'un résistor / d'une bobine idéale / d'un condensateur / d'un générateur idéal ;
- loi de KIRCHHOFF : loi des mailles, loi des nœuds ;
- loi des nœuds en terme de potentiels ;
- pont diviseur de tension / de courant ;
- loi d'association série et parallèle de résistors / bobines idéales / condensateurs idéaux ;
- loi d'association parallèle de deux résistors ;
- équivalence entre les modèles de THÉVENIN et de NORTON d'un générateur réel ;
- puissance instantanée reçue ;
- puissance dissipée par effet JOULE ;
- énergie instantanée contenue dans une bobine idéale / dans un condensateur idéal ;
- impédance et admittance d'un résistor / d'une bobine idéale / d'un condensateur idéal ;
- puissance active reçue par un dipôle ;
- valeur efficace d'un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle.

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- le comportement en régime transitoire d'un circuit d'ordre 1 ;
- le comportement des différents types de régime transitoire d'un circuit d'ordre 2 ;
- l'effet d'un filtre d'ordre 1, d'ordre 2 ;
- le comportement en basse et hautes fréquences de la bobine, du condensateur.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Savoir compter le nombre de mailles, de nœuds.

◇ Savoir repérer les dipôles en série, en parallèle.

★ Analyse technique

◇ Savoir quelle approche utiliser (nodale ou maillère) suivant le circuit.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

◇ Connaître parfaitement :

- la méthode de résolution de système linéaire de deux équations à deux inconnues ;
- la méthode de résolution d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ;
- la forme des solutions en régime transitoire des évolutions d'ordre 2.

★ **petits gestes**

◇ Savoir :

- transformer un circuit en un circuit équivalent ;
- écrire les lois de mailles en terme de courant et les lois des nœuds en terme de potentiel ;
- trouver la nature d'un filtre avec son comportement en HF et BF ;
- savoir passer de la notation réelle à la notation complexe et réciproquement ;
- savoir passer d'une fonction de transfert à une équation différentielle.

★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire :

- le circuit R,C et R,L en régime transitoire ;
- le circuit R,L,C série en régime transitoire ;
- le circuit R,L,C série en tant que filtre.

Électrocinétique

Chapitre 2

Circuits électroniques

Circuits électroniques

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la partie plus électronique de l'électrocinétique. Il s'agira d'un chapitre essentiellement constitué de révisions mais nous verrons, dans la partie consacrée à l'amplificateur opérationnel, quelques nouvelles notions.

Ce chapitre sera divisé en deux parties de longueurs très inégales : la première sur l'amplificateur opérationnel, la deuxième sur la diode.

Table des matières

Biographies succinctes	6
I Amplificateur opérationnel	7
I-1 Version idéale	7
I-1 <i>·i</i> schéma et convention	7
I-1 <i>·ii</i> caractéristique	7
I-1 <i>·iii</i> deux régimes de fonctionnement	8
quels sont-ils ?	8
comment savoir	8
I-1 <i>·iv</i> limitations	9
I-2 Montages usuels	9
I-2 <i>·i</i> suiveur	10
I-2 <i>·ii</i> amplificateurs	10
amplificateur inverseur	10
amplificateur non inverseur	11
I-2 <i>·iii</i> dérivateur, intégrateur	11
intégrateur théorique	11
intégrateur réel – pseudo intégrateur	12
dérivateurs	13
I-2 <i>·iv</i> comparateurs	14
comparateur simple	14
comparateur à hystérésis	15
I-3 Version réelle	15
I-3 <i>·i</i> modélisation des défauts	15
I-3 <i>·ii</i> équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$	16
I-3 <i>·iii</i> comment trouver le régime de fonctionnement dans un cas inconnu ?	16
I-4 Stabilité d'un montage non inverseur	17
I-4 <i>·i</i> approche qualitative	17
I-4 <i>·ii</i> montage stable	18
analyse	18
loi de fonctionnement	18
discussion	18
retrouver l'AO idéal	19
I-4 <i>·iii</i> montage instable	19
rien à refaire	19
discussion	20
I-5 Multivibrateur astable, version 1	20
I-5 <i>·i</i> schéma de principe	20
I-5 <i>·ii</i> montage et analyse	20
I-5 <i>·iii</i> étude du comparateur	21
montage	21
saturation haute	21
saturation basse	21
représentation graphique	21
I-5 <i>·iv</i> intégrateur	22
I-5 <i>·v</i> assemblage	23
qualitativement	23
évolution temporelle de $v_{s,2}(t)$	23

I-5·vi	représentation temporelle	23
	chronogrammes	23
	période	24
	avantages	24
I-6	Multivibrateur astable, version 2	24
I-6·i	montage et principe	25
I-6·ii	analyse qualitative du régime de fonctionnement	25
I-6·iii	analyse détaillée du régime de fonctionnement	25
	équation vérifiée par $V_s(t)$	25
	stabilité	26
I-6·iv	astabilité	27
I-6·v	fonctionnement complet	27
	continuité et basculements	27
	évolutions	27
I-6·vi	représentation temporelle	28
	chronogramme	28
	période	28
I-7	Oscillateur sinusoïdal	29
I-7·i	montage	29
I-7·ii	fonction de transfert du filtre	29
I-7·iii	association	30
I-7·iv	condition d'accrochage	31
	d'après la loi de fonctionnement	31
	comment faire en pratique ?	31
II	Diode	32
II-1	Présentation	32
II-1·i	symbole, convention et caractéristique	32
	diode réelle	32
	en vrai c'est une photodiode	32
II-1·ii	modélisation	33
	diode idéale	33
	diode idéale à tension de seuil non nulle	33
	diode linéarisée	34
	méthode pour étudier un circuit à diode	34
II-2	Redresseurs	35
II-2·i	simple alternance avec seuil	35
	circuit à connaître	35
	représentation graphique	35
II-2·ii	simple alternance sans seuil	36
	circuit à connaître	36
	représentation graphique	36
II-2·iii	double alternance avec seuil	36
	circuit à connaître	37
	représentation graphique	37
II-3	Détecteur de crêtes	37
II-3·i	avec seuil	37
	circuit à connaître	37
	représentation graphique	38
II-3·ii	sans seuil	38

circuit à connaître	38
représentation graphique	38
Fiche de révision	39

Biographies succinctes



Max WIEN

(1866 Königsberg – 1938 Iéna)

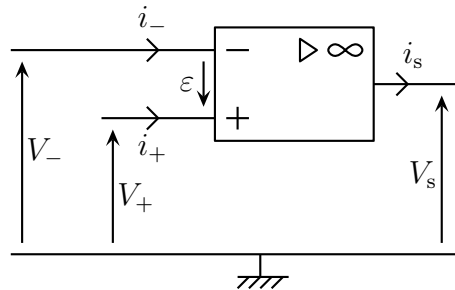
Max WIEN fut un physicien allemand directeur de l'Institut de Physique de l'Université d'Iéna. Il mit au point un générateur d'oscillations électromagnétiques et inventa un pont en électrocinétique qui permit à William HEWLETT (co-fondateur de Hewlett-Packard) de créer le premier de ce que nous appellerions maintenant un GBF. Max était le cousin de Wilhelm WIEN qui donna son nom à la loi éponyme sur le rayonnement du corps noir. Max eu SCHRÖDINGER comme assistant quelques années et ce dernier, dans son autobiographie, décrivit Max comme « modérément antisémite ».

I – Amplificateur opérationnel

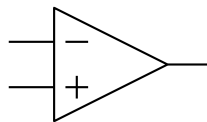
I.1 – Version idéale

I.1.i – schéma et convention

Conventionnellement, nous noterons :




◇ Il existe, parfois, dans des sujets, des vieilles représentations d'AO (utilisées encore dans les logiciels ou chez les anglo-saxons)



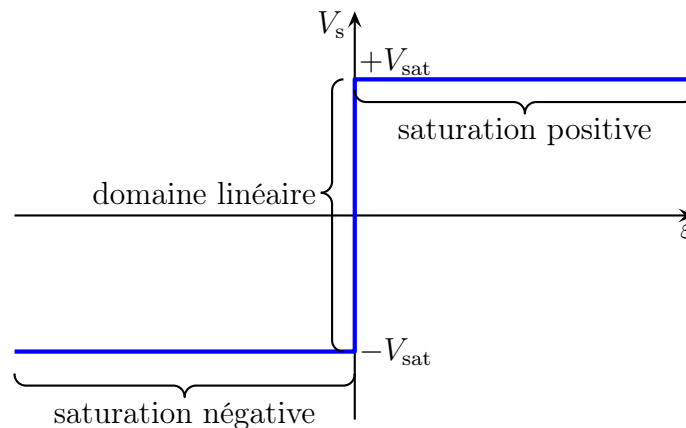
Pour un AO idéal, nous avons :

- des courants de polarisation nuls, soit $i_+ = i_- = 0$;
- une tension de décalage nulle, soit $V_d = 0$;
- une amplification statique infinie, soit $\mu_0 = \infty$.

 Attention de ne pas confondre « idéal » et « en régime linéaire ».

I.1.ii – caractéristique


◇ Pour un AO idéal, la caractéristique est la suivante



◇ Remarquons qu'ici, contrairement aux signaux rectangulaires, il *faut* dessiner le trait vertical car il est possible que le point de fonctionnement soit « dessus ».

I.1.iii – deux régimes de fonctionnement

★ quels sont-ils ?

- ◇ Quel que soit le régime de fonctionnement d'un AO, réel ou idéal, il y a deux grandeurs pertinentes (ε et V_s) et il y a **toujours** une et une seule loi à écrire, soit pour ε , soit pour V_s , soit une expression qui relie les deux.
- ◇ Le régime linéaire d'un AO **idéal** donne :
 - $\varepsilon = 0$ est la grandeur connue et $-V_{\text{sat}} \leq V_s \leq +V_{\text{sat}}$ est la grandeur inconnue ;
 - l'ensemble du circuit est un montage linéaire donc il est possible d'utiliser la notation complexe.
-  Attention ! Un AO *réel* et en régime linéaire ne permet **pas** d'écrire $\varepsilon = 0$.
- ◇ Il y a aussi le régime non linéaire qui donne, pour un AO idéal :
 - $V_s = +V_{\text{sat}}$ est la grandeur connue est $\varepsilon > 0$ est la grandeur inconnue ;
 - $V_s = -V_{\text{sat}}$ est la grandeur connue est $\varepsilon < 0$ est la grandeur inconnue ;
 - l'ensemble du circuit est un montage non linéaire donc *a priori* adieu théorème de superposition.
- ◇ Il est parfois possible d'utiliser la notation complexe avec un AO en régime non linéaire lorsqu'il est certain que l'AO ne change pas de type de saturation.

★ comment savoir

🕒 une rétroaction

Une *rétroaction* est une chaîne de dipôles reliant la sortie de l'amplificateur à l'entrée sans passer par la masse.

- ◇ Qualitativement, il ne faut pas oublier la loi suivante.

Une rétroaction négative a tendance à stabiliser un dispositif, alors qu'une rétroaction positive a tendance à le déstabiliser.

🕒 cas facile

S'il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée inverseuse, alors l'AO est en régime de saturation.

- ◇ En « vrai », il est possible d'avoir un régime linéaire sans rétroaction négative mais cela demande d'avoir des générateurs stables à mieux que 1 mV, ce dont nous ne disposons pas en TP.

🕒 cas souvent facile

S'il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse et pas de rétroaction sur l'entrée non inverseuse, alors l'AO est en régime linéaire.

- ◇ Il ne faut pas oublier la célèbre exception avec l'effet de dérive du montage « intégrateur ».
- ◇ Rappelons que cette exception est due au fait que l'impédance de la chaîne de rétroaction peut devenir infinie à $\omega = 0$; une impédance infinie, c'est un circuit ouvert ; un circuit ouvert, c'est une non-rétroaction.

🌀 cas inconnu

- ✧ S'il y a deux rétroactions, *a priori* il n'est pas possible de connaître le régime de fonctionnement d'un claquement de doigt ; c'est pourquoi il faut :
- ➔ faire appel à son bon sens (par exemple tous les montages de type filtre ont des AO qui fonctionnent en régime linéaire) ;
 - ➔ regarder si l'énoncé nous impose une certaine hypothèse ;
 - ➔ faire l'étude complète comme nous le verrons dans la suite.

I.1.iv – limitations

- ✧ Il s'agit de limitations technologiques à connaître pour les TP mais rarement (jamais?) étudiées formellement.

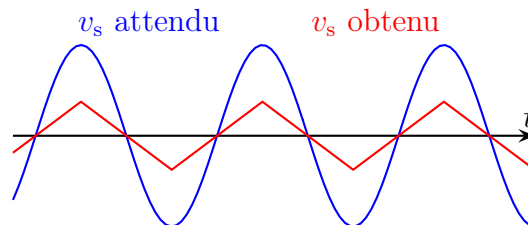
L'intensité du courant de sortie d'un AO est limité :

$$|i_s| \leq i_{\max} \quad \text{avec} \quad i_{\max} \sim 20 \text{ mA}$$

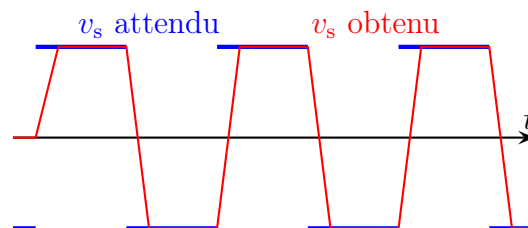
Le potentiel de sortie d'un AO ne peut pas varier instantanément. Le taux de variation limite est appelé le *slew rate*.

$$\left| \frac{dV_s(t)}{dt} \right| \leq \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma \sim 0,5 \text{ à } 10 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$$

- ✧ C'est ainsi que si la fréquence est trop grande, il y a risque de *triangularisation du signal*.

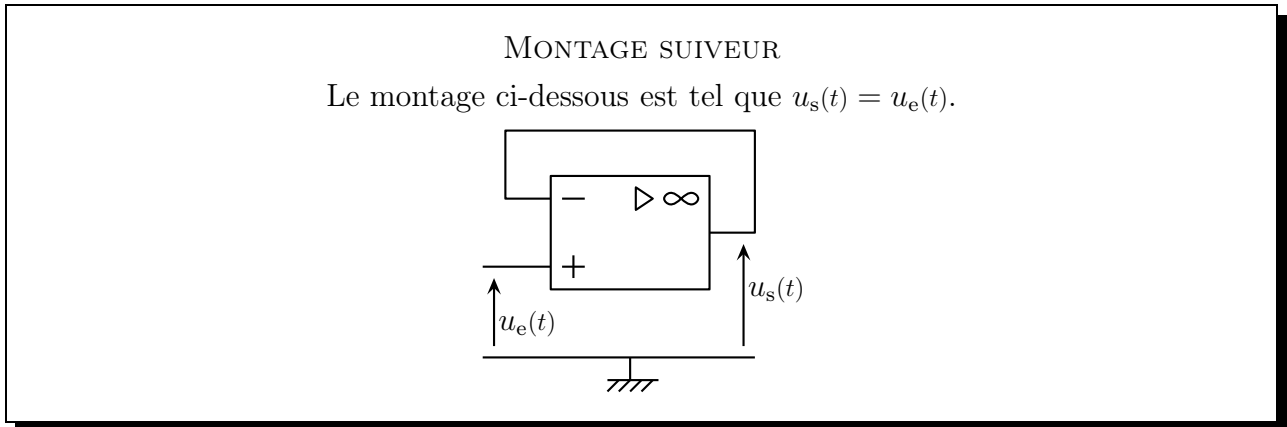


- ✧ D'ailleurs, avec un signal rectangulaire en entrée d'un suiveur, il devrait y avoir un signal rectangulaire en sortie aussi, mais ce n'est pas le cas à cause du slew rate.



I.2 – Montages usuels

I.2.i – suiveur



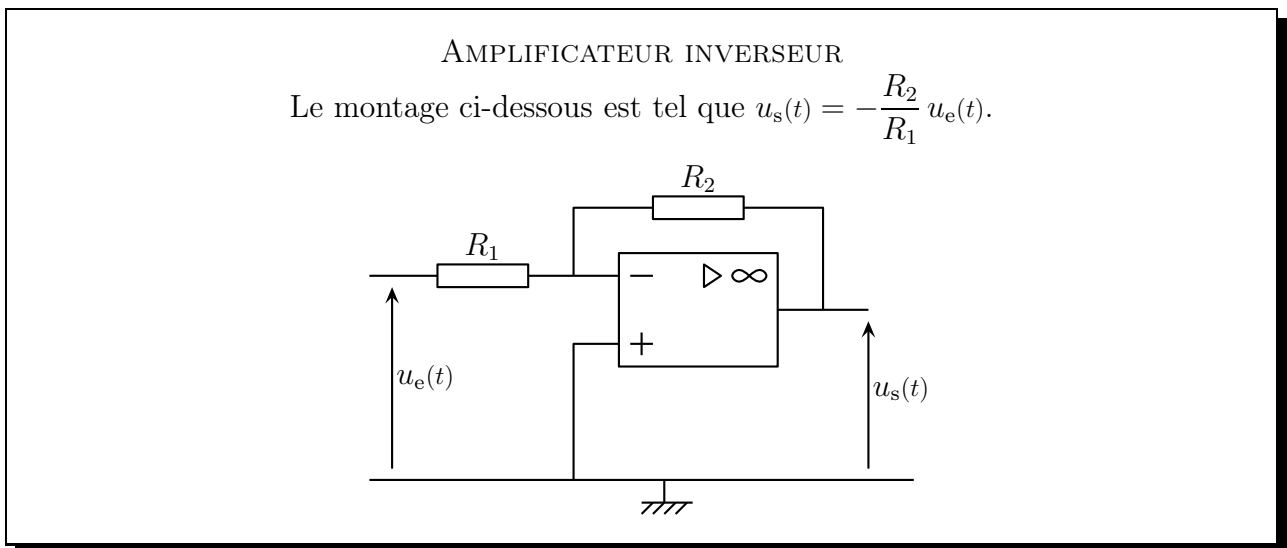
Attention ! Il y a souvent des erreurs dans ce montage : l'entrée non inverseuse n'est pas reliée à la masse.

✧ Outre son utilité pour relier différents étages de montages entre eux, ce montage permet de vérifier très vite si un AO fonctionne ou non.

I.2.ii – amplificateurs

★ amplificateur inverseur

🕒 montage à connaître



🕒 étude

✧ Analyse :

- il y a une unique rétroaction négative donc l'AO fonctionne en régime linéaire ;
- comme il y a un AO nous allons privilégier l'approche nodale ;
- il y a deux potentiels inconnus V_- et V_s , donc nous n'aurons besoin que de deux lois : la loi de fonctionnement de l'AO et une loi des nœuds en terme de potentiel.

✧ Ici comme l'AO est idéal **et** en régime linéaire, nous avons

$$\varepsilon = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = V_-$$

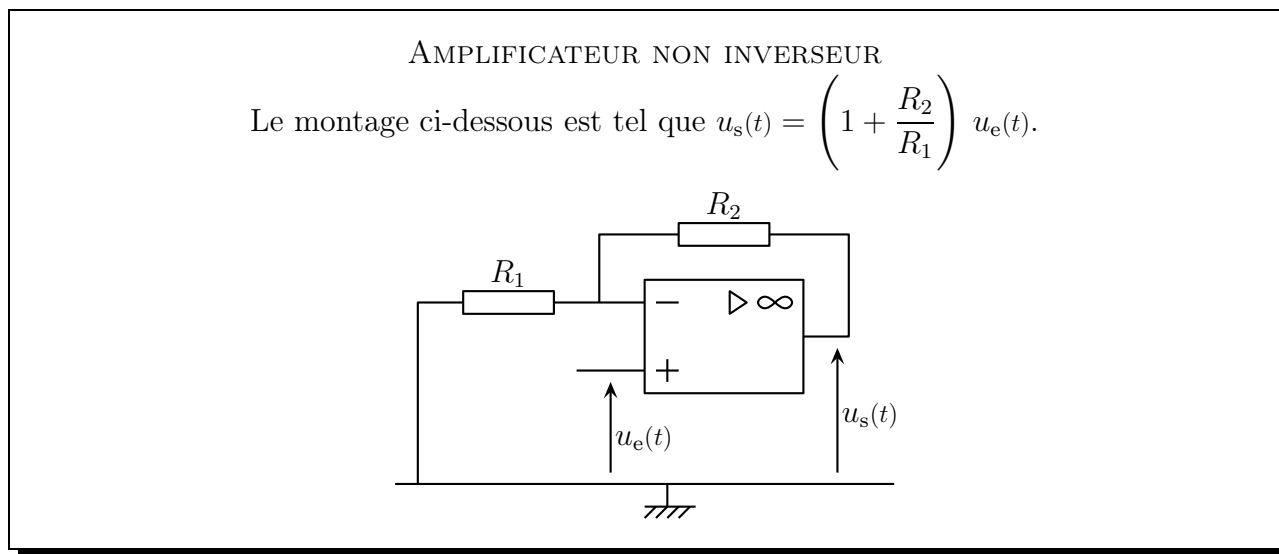
✧ De plus, par montage, nous avons

$$V_+ = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_- = 0$$

✧ La loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO donne (en remplaçant tout de suite V_- par 0)

$$\frac{u_e(t) - 0}{R_1} + \frac{u_s(t) - 0}{R_2} - \underbrace{0}_{i_-} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_e(t)$$

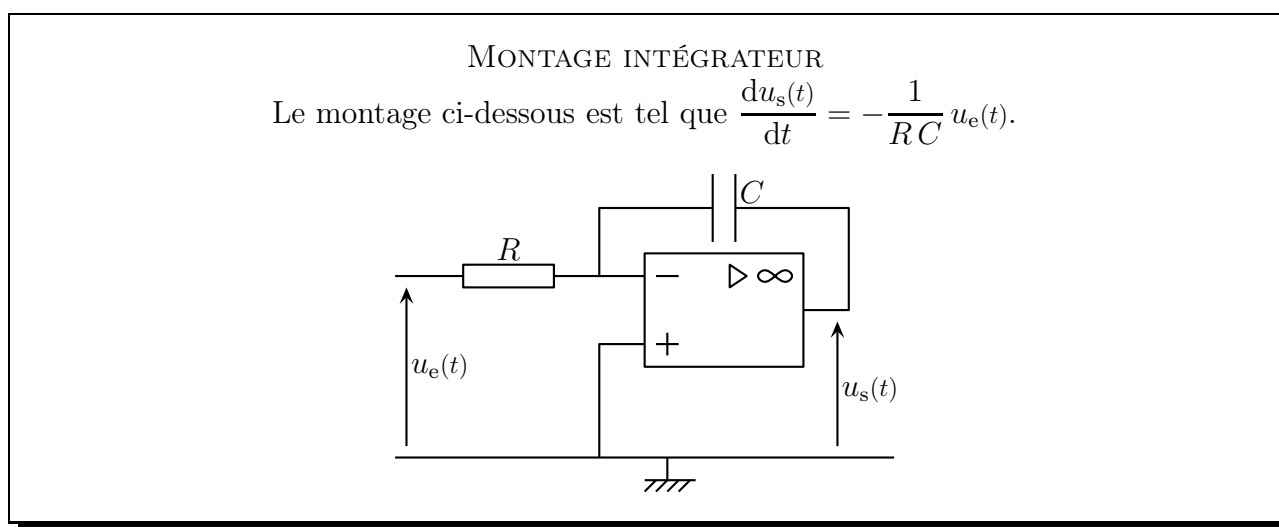
★ amplificateur non inverseur



I.2.iii – dérivateur, intégrateur

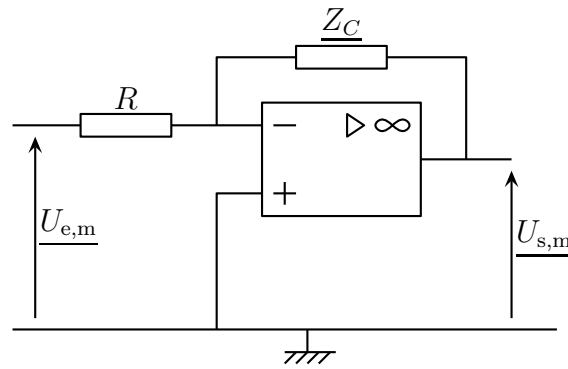
★ intégrateur théorique

🕒 montage à connaître



🕒 étude

✧ L'étude est très simple car, en version « régime sinusoïdal forcé », le montage se réduit à :



✧ Nous avons donc immédiatement

$$\underline{U_{s,m}} = -\frac{Z_C}{R} \underline{U_{e,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U_{s,m}} = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{U_{e,m}}$$

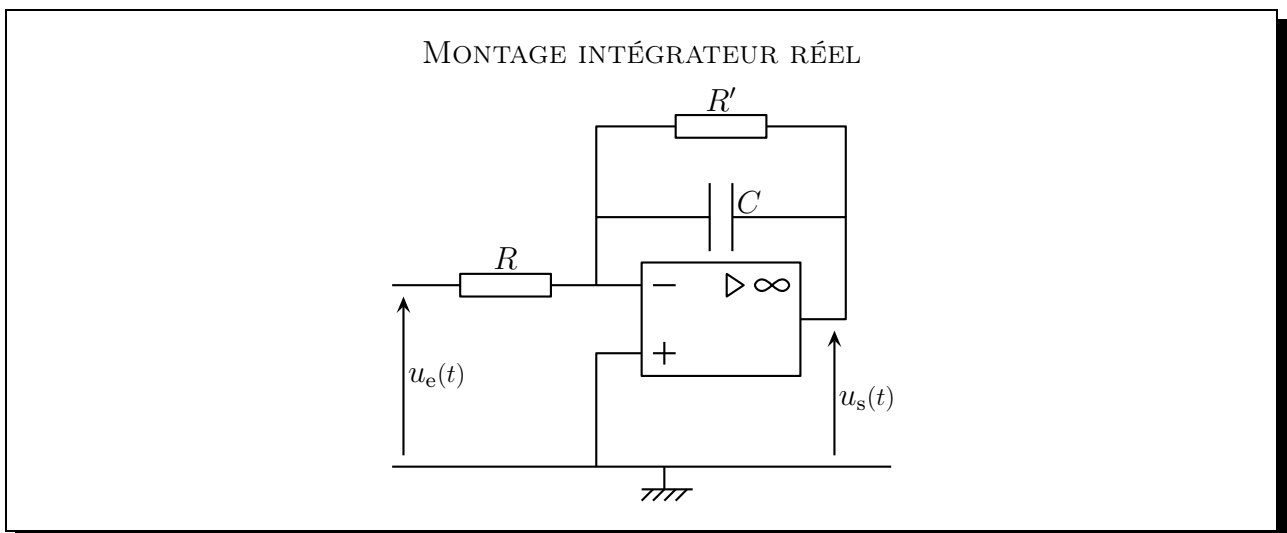
✧ En notation réelle, cela donne

$$j\omega \underline{U_{s,m}} = -\frac{1}{RC} \underline{U_{e,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 u_s}{dt^2}(t) = -\frac{1}{RC} u_e(t)$$

★ intégrateur réel – pseudo intégrateur

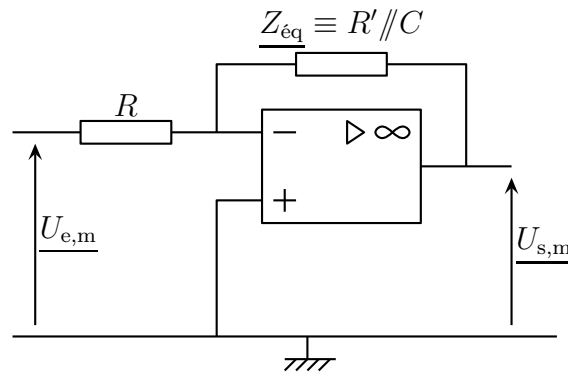
🕒 montage à connaître

✧ En pratique, pour éviter que les effets de dérive rendent inutilisable le montage il faut, en TP, rajouter une résistance en parallèle du condensateur.



🕒 étude

✧ Là aussi, l'étude est très simple car, en version « régime sinusoïdal forcé », le montage se réduit à :



✧ Nous avons ainsi, parce qu'il s'agit d'un inverseur généralisé,

$$\underline{U_{s,m}} = -\frac{Z_{\hat{e}q}}{R} \underline{U_{e,m}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z_{\hat{e}q}} = \frac{R'}{1 + j R' C \omega} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U_{s,m}} = -\frac{R'}{R} \times \frac{1}{1 + j R' C \omega} \underline{U_{e,m}}$$

✧ Ce n'est **pas** un montage intégrateur puisque $\underline{U_{s,m}} \not\propto \frac{1}{j\omega} \underline{U_{e,m}}$.

✧ Toutefois, si $\omega R' C \gg 1$, la fonction de transfert devient

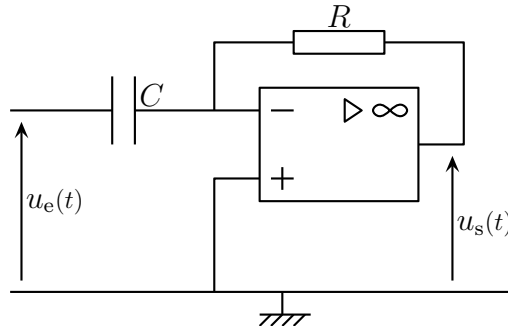
$$\underline{U_{s,m}} = -\frac{R'}{R} \times \frac{1}{j R' C \omega} \underline{U_{e,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U_{s,m}} = -\frac{1}{j R C \omega} \underline{U_{e,m}}$$

★ dérivateurs

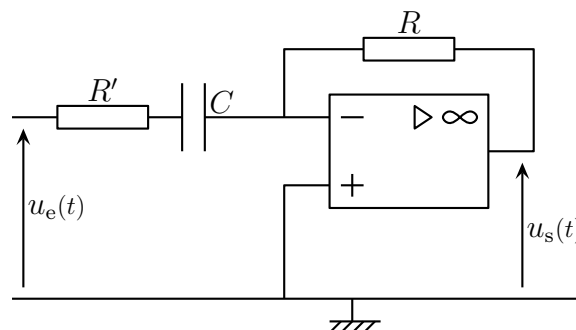
✧ C'est comme pour l'intégrateur : il y a le montage théorique et celui qu'il vaut mieux utiliser en TP.

MONTAGE DÉRIVATEUR

Le montage ci-dessous est tel que $u_s(t) = -RC \frac{du_e(t)}{dt}$.



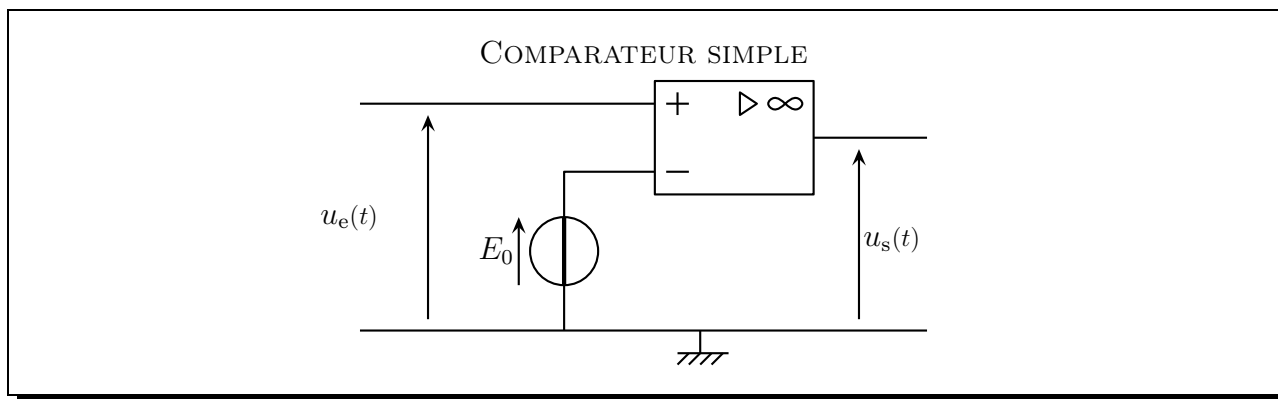
MONTAGE DÉRIVATEUR RÉEL



I.2.iv – comparateurs

★ comparateur simple

🔗 montage à connaître



🔗 méthodologie

- ◇ Il s'agit ici d'un AO en régime non linéaire (pas de rétroaction sur l'entrée inverseuse).
- ◇ Pour l'étudier, nous allons faire « comme d'habitude », à savoir des hypothèses.

Pour un AO idéal en régime non linéaire :

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
saturation haute	$V_s = +V_{\text{sat}}$	$\varepsilon > 0$ ou $V_+ > V_-$
saturation basse	$V_s = -V_{\text{sat}}$	$\varepsilon < 0$ ou $V_+ < V_-$

🔗 étude

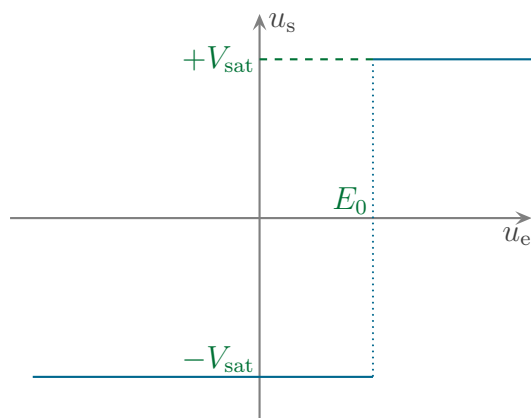
- ◇ Supposons $V_s = +V_{\text{sat}}$.
- ◇ L'AO reste en saturation haute tant que

$$\varepsilon > 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ - V_- > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) > E_0$$

- ◇ De même l'AO est en saturation basse tant que

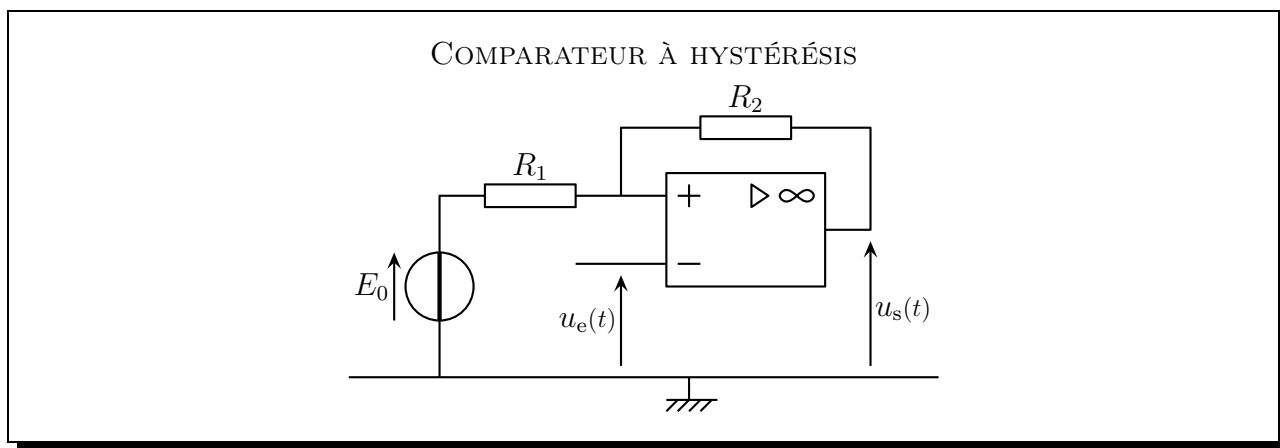
$$\varepsilon < 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ - V_- < 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) < E_0$$

- ◇ Tout compte fait, lorsque nous traçons u_s en fonction de u_e nous obtenons



✧ Ici, la ligne verticale est bien tracée en pointillés, car il n'est pas possible qu'un point de fonctionnement soit dessus.

★ comparateur à hystérésis



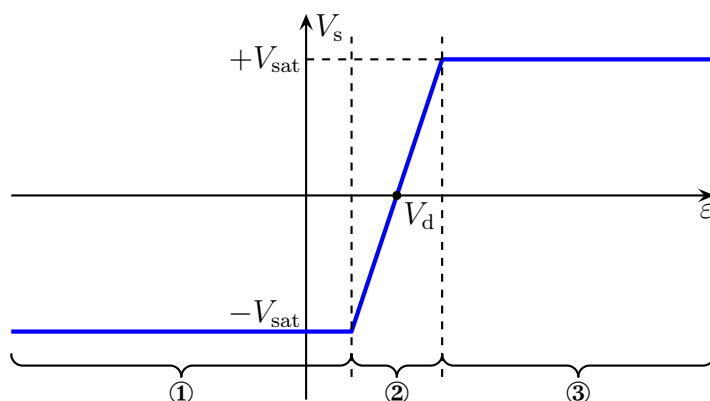
✧ Dans ce montage, les résistances R_1 et R_2 permettent de faire varier la largeur du cycle alors que E_0 permet de translater le cycle.

☕ *Remarque.* Pour retenir ce montage, c'est très simple : lorsque $E_0 = 0$ c'est un simple amplificateur non inverseur dont les bornes inverseuse et non inverseuse auraient été échangées.

I.3 – Version réelle

I.3.i – modélisation des défauts

✧ La caractéristique statique d'un AO réel est la suivante.



Pour un AO réel :

- la résistance de sortie est inférieure à $10\ \Omega$;
- la résistance d'entrée est supérieure au $G\Omega$;
- les courants de polarisation i_+ et i_- ne sont pas nuls ;
- la tension de décalage V_d n'est pas nulle.

◇ Pour un AO *réel* nous avons :

- $V_s = \pm V_{\text{sat}}$ en régime de saturation, comme pour l'AO idéal ;
- $V_s = \mu(\varepsilon - V_d)$ en régime linéaire.

◇ Nous voyons donc bien que même si $V_d = 0$, un AO réel en régime linéaire **n'est pas tel que** $\varepsilon = 0$.

◇ De plus, le coefficient d'amplification change avec la fréquence.

L'amplificateur opérationnel est un composant du premier ordre. En régime linéaire

$$\underline{V_s} = \underline{\mu(j\omega)} (\underline{\varepsilon} - V_d) \quad \text{avec} \quad \underline{\mu(j\omega)} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\mu_0 \sim 10^5 ; \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad \text{et} \quad f_0 \sim 10\text{ Hz}$$

◇ Dans la suite et sauf précision contraire, quand nous considérerons l'AO comme réel, nous supposerons que son *seul* défaut est d'avoir une amplification non infinie qui dépend de la fréquence.

I.3.ii – équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$

◇ Supposons que nous ayons un AO « réel » selon notre signification. Alors :

- $i_+ = i_- = 0$;
- $V_d = 0$.

◇ Dans ces conditions, la loi de fonctionnement de AO en régime linéaire s'écrit

$$\underline{V_s} = \underline{\mu(j\omega)} \times \underline{\varepsilon} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_s} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \times \underline{\varepsilon}$$

◇ Cela donne

$$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{V_s} = \mu_0 \underline{\varepsilon}$$

◇ Et en notation réelle

$$v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt}(t) = \mu_0 \varepsilon(t)$$

◇ Il s'agit là d'une équation différentielle du premier ordre.

I.3.iii – comment trouver le régime de fonctionnement dans un cas inconnu ?

◇ La méthode qui suit est à utiliser soit :

- quand c'est explicitement demandé ;
- quand il y a deux rétroactions et que le bon sens ne permet pas de dire dans quel régime fonctionne l'AO.

◇ Méthode :

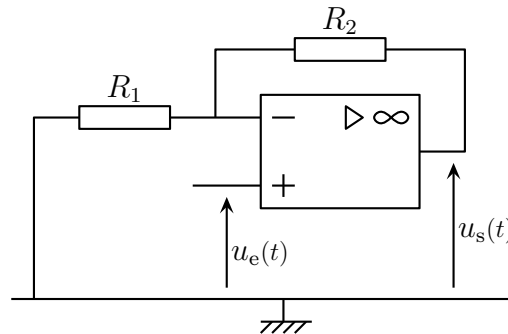
- ① supposer l'AO réel du premier ordre **et** en régime linéaire ($\underline{V}_s = \underline{\mu}(j\omega) \times \underline{\varepsilon}$) ;
- ② trouver l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$;
- ③ discuter de la solution de cette équation différentielle.

◇ Notons aussi que certains montages comportant une rétroaction sur l'entrée inverseuse et une rétroaction sur l'entrée non inverseuse peuvent fonctionner soit en régime linéaire soit en régime non linéaire, suivant la valeur des composants.

I.4 – Stabilité d'un montage non inverseur

I.4.i – approche qualitative

◇ Reprenons le montage amplificateur non inverseur usuel.



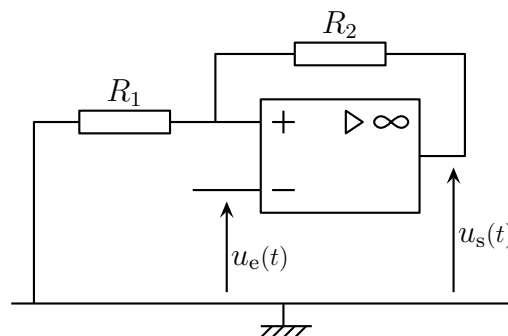
◇ Ici il y a une rétroaction négative, donc « stabilisante ».

◇ En effet, imaginons que suite à une perturbation électrique, ε augmente, alors

- $v_s(t)$ augmente ;
- puis $v_-(t)$ augmente grâce à la rétroaction ;
- puis ε diminue par définition même ;
- et donc $v_s(t)$ rediminue.

◇ Il s'agit bien d'un montage stable.

◇ Permutons les deux entrées.



◇ Cette fois, si ε augmente suite à une perturbation électrique :

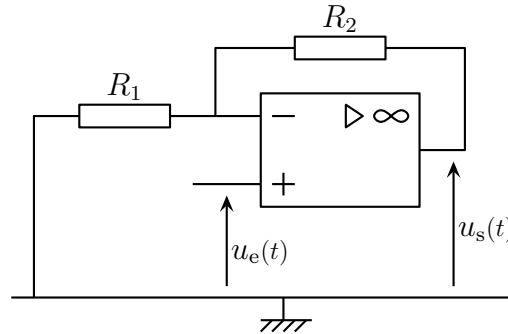
- $v_s(t)$ augmente ;
- puis $v_+(t)$ augmente grâce à la rétroaction ;
- puis ε augmente par définition même ;
- et donc $v_s(t)$ augmente.

◇ C'est clairement un montage instable.

I.4.ii – montage stable

★ analyse

◇ Prenons le montage stable et *montrons* qu'il l'est.



◇ Pour cela nous devons trouver l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$.

◇ Analyse :

- c'est un AO et nous cherchons un potentiel → approche nodale ;
- nous avons deux potentiels inconnus ($v_-(t)$ et $v_s(t)$) il nous faut donc deux lois :
 - une loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse de l'AO ;
 - la loi de fonctionnement de l'AO $\underline{V}_s = \underline{\mu(j\omega)} \underline{\varepsilon}$.

★ loi de fonctionnement

◇ La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit, à l'entrée inverseuse,

$$\frac{0 - \underline{V}_-}{R_1} + \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_-}{R_2} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V}_s \stackrel{\text{not}}{=} \beta \underline{V}_s$$

◇ La loi de fonctionnement de l'AO donne

$$\underline{V}_s = \underline{\mu(j\omega)} (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_s = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \times (\underline{V}_e - \beta \underline{V}_s)$$

◇ En regroupant, nous arrivons à

$$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{V}_s = \mu_0 \underline{V}_e - \mu_0 \beta \underline{V}_s \quad \rightsquigarrow \quad \left(1 + \beta \mu_0 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{V}_s = \mu_0 \underline{V}_e$$

◇ En notation réelle, cela donne

$$(1 + \beta \mu_0) v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt}(t) = \mu_0 u_e(t)$$

★ discussion

◇ Il s'agit ici d'une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dv_s}{dt}(t) + (1 + \beta \mu_0) \omega_0 v_s(t) = \mu_0 \omega_0 u_e(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv_s}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} v_s(t) = \mu_0 \omega_0 u_e(t)$$

◇ Les solutions sont en

$$v_s(t) = \lambda e^{-t/\tau} + v_{s,\text{part}}(t)$$

- ◇ Et comme $\tau > 0$, la partie transitoire tend vers 0 et $v_s(t)$ (et par extension le montage) est bien stable.
- ◇ Numériquement

$$\frac{1}{\tau} \sim 10 \times 10 \times 10^5 \sim 10^7 \quad \rightsquigarrow \quad \tau \sim 10^{-7} \text{ s}$$

- ◇ Le régime permanent est donc très rapidement atteint.

★ retrouver l'AO idéal

- ◇ En régime permanent (ou du moins en régime quasistatique tel que $u_e(t)$ varie avec des constantes de temps bien plus grandes que τ) nous avons

$$v_{s,\text{part}}(t) = \frac{\mu_0 \omega_0}{(1 + \beta \mu_0) \omega_0} u_e(t) \quad \rightsquigarrow \quad v_{s,\text{part}}(t) = \frac{\mu_0}{1 + \beta \mu_0} u_e(t)$$

- ◇ Et pour un AO idéal, $\mu_0 \rightarrow \infty$, ce qui donne

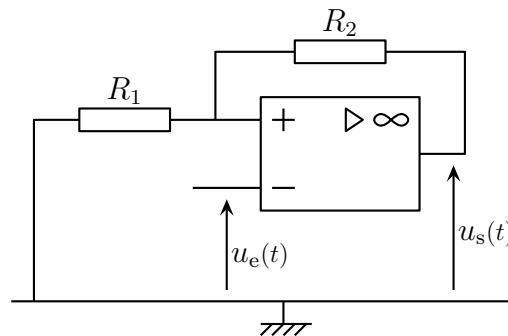
$$v_{s,\text{part}}(t) = \frac{1}{\beta} u_e(t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \rightsquigarrow \quad v_s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_e(t)$$

- ◇ Nous retrouvons (et heureusement) le cas connu.

I.4.iii – montage instable

★ rien à refaire

- ◇ Permutons les deux bornes d'entrée.



- ◇ Cette permutation revient à changer ε en $-\varepsilon$.
- ◇ En effet, en notant A la borne « du haut » et B la borne « du bas », toutes les lois des nœuds en A et en B s'écrivent de la même manière que l'entrée soit inverseuse ou non.
- ◇ La seule chose qui change est que :
 - si l'entrée inverseuse est en A alors $\varepsilon = V_B - V_A$;
 - si l'entrée inverseuse est en B alors $\varepsilon = V_A - V_B$.
- ◇ Pour trouver l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ quand les bornes sont permutées, il suffit donc de changer le signe de ε et pour cela

Permuter les bornes d'un AO revient, techniquement, à changer μ_0 en $-\mu_0$.

★ discussion

◇ En changeant uniquement μ_0 , nous avons donc tout de suite l'équation vérifiée par $v_s(t)$

$$\frac{dv_s}{dt}(t) + \underbrace{\omega_0 (1 - \beta \mu_0)}_{1/\tau} v_s(t) = -\mu_0 u_e(t)$$

◇ Étant donné les valeurs numériques de β (de l'ordre de la fraction d'unité) et de μ_0 (de l'ordre de 10^5) nous avons $\tau < 0$.

◇ La solution s'écrit toujours

$$v_s(t) = \lambda e^{-t/\tau} + v_{s,\text{part}}(t)$$

◇ Mais comme $\tau < 0$, cette solution diverge lorsque $t > 0$.

◇ C'est donc bien un montage instable.

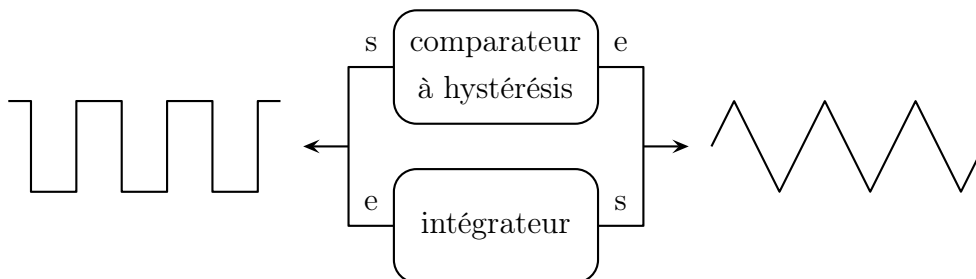
◇ Notons au passage que la divergence n'est que mathématique puisque, physiquement, la sortie saturera à $\pm V_{\text{sat}}$.

I.5 – Multivibrateur astable, version 1

I.5.i – schéma de principe

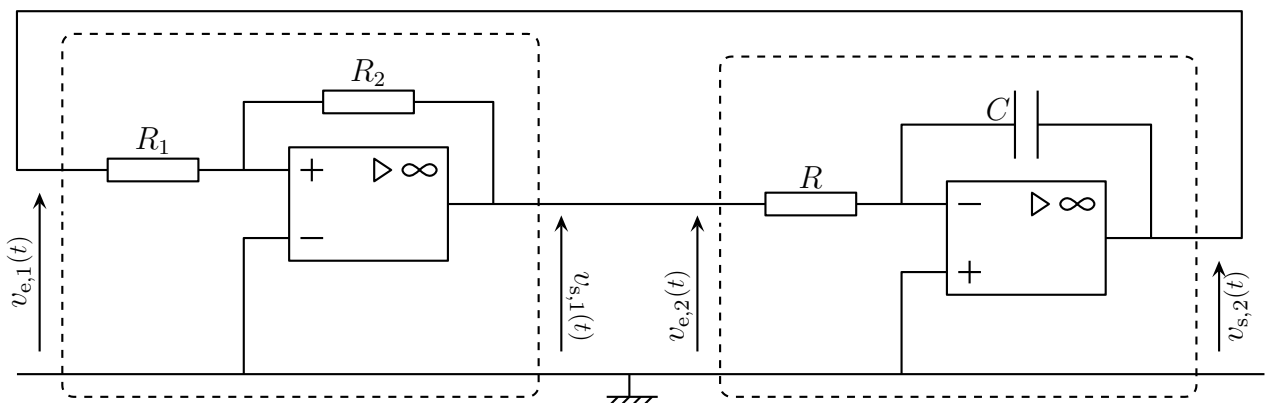
Un *multivibrateur astable* est un dispositif qui bascule régulièrement et spontanément entre deux valeurs différentes ou deux états différents.

◇ L'idée est de boucler deux montages sur eux-mêmes : un intégrateur et un comparateur.



I.5.ii – montage et analyse

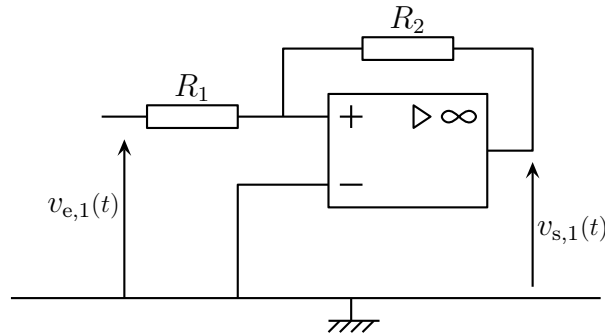
◇ Prenons un intégrateur et un comparateur à hystérésis tout simple.



I.5.iii – étude du comparateur

★ montage

◇ Reprenons uniquement le premier bloc.



◇ Remarquons tout d'abord que, quel que soit V_s , nous pouvons écrire la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée non inverseuse, ce qui donne

$$\frac{V_e - V_+}{R_1} + \frac{V_s - V_+}{R_2} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{R_1 V_s + R_2 V_e}{R_1 + R_2}$$

★ saturation haute

- ◇ Supposons $v_{s,2} = +V_{\text{sat}}$.
- ◇ L'AO sera en régime de saturation haute tant que $\varepsilon > 0$.
- ◇ Or ici comme $V_- = 0$, la condition se réécrit

$$V_+ > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{+R_1 V_{\text{sat}} + R_2 V_e}{R_1 + R_2} > 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_e > -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

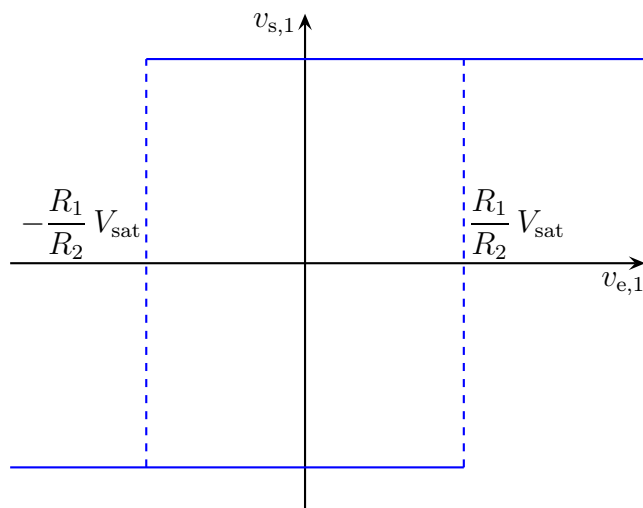
★ saturation basse

- ◇ Supposons cette fois $v_{s,2} = -V_{\text{sat}}$.
- ◇ L'AO sera en régime de saturation basse tant que $\varepsilon < 0$.
- ◇ Nous avons toujours $V_- = 0$ et donc la condition se réécrit

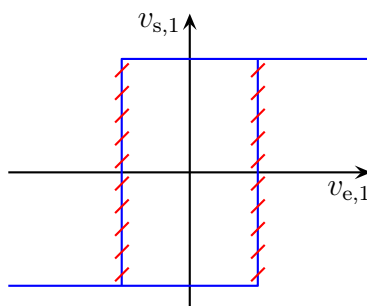
$$V_+ < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{-R_1 V_{\text{sat}} + R_2 V_e}{R_1 + R_2} < 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_e < +\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

★ représentation graphique

- ◇ Graphiquement, nous pouvons représenter le fonctionnement de la manière suivante :



✧ Remarquons que la caractéristique n'est **pas** celle représentée ci-dessous car les parties verticales ne sont pas stables.

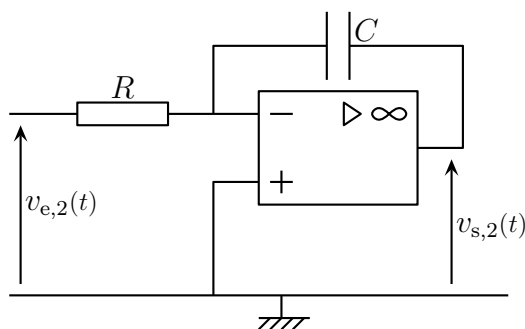


Pour qu'il y ait un phénomène d'hystérésis, il **faut** un montage non linéaire.

✧ En revanche, tout montage non linéaire n'engendre pas obligatoirement un phénomène d'hystérésis.

I.5.iv – intégrateur

✧ Reprenons le montage



✧ Nous avons, avec la méthode usuelle

$$\frac{dv_{s,2}}{dt}(t) = -\frac{1}{RC} v_{e,2}(t)$$

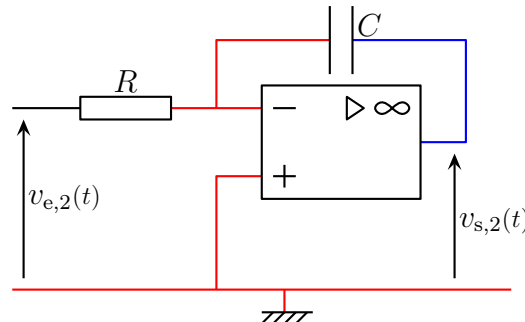
I.5.v – assemblage

★ qualitativement

- ◇ Imaginons que la sortie du comparateur soit $+V_{\text{sat}}$; alors
 - $v_{e,2}(t)$ est une constante positive ;
 - $v_{s,2}(t)$ décroît linéairement ;
 - $v_{e,1}(t)$ décroît linéairement ;
 - à un moment, le comparateur va basculer.
- ◇ De même si la sortie du comparateur est $-V_{\text{sat}}$; alors
 - $v_{e,2}(t)$ est une constante négative ;
 - $v_{s,2}(t)$ croît linéairement ;
 - $v_{e,1}(t)$ croît linéairement ;
 - à un moment, le comparateur va basculer.
- ◇ Les deux seuls cas possibles pour la sortie du comparateur amènent un basculement : le montage est bien un multivibrateur astable.

★ évolution temporelle de $v_{s,2}(t)$

- ◇ Remarquons tout d'abord que la tension $v_{s,2}(t)$ n'est autre que la tension aux bornes du condensateur.
- ◇ En effet, comme l'AO est en régime linéaire, $v_{s,2}(t)$ est la différence de tension entre les nœuds bleu et rouge.

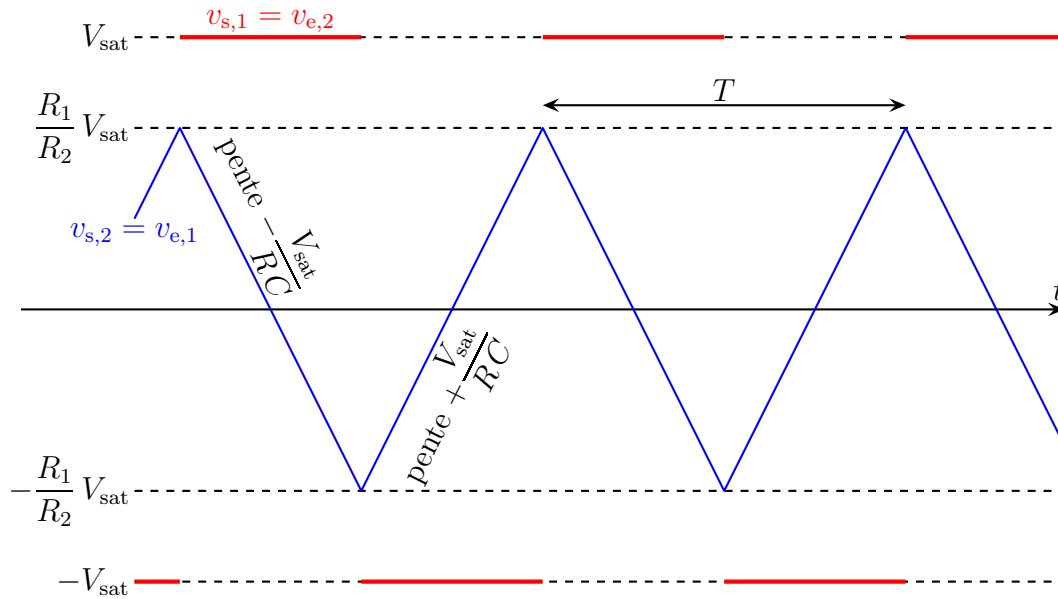


- ◇ Et comme $V_+ = V_-$, le potentiel de la masse est reporté en V_- .
- ◇ Enfin, comme la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps, nous pouvons en déduire que $v_{s,2}(t) = v_{e,1}(t)$ est une fonction mathématiquement continue du temps.
- ◇ Comme nous l'avons vu qualitativement :
 - $v_{s,2}(t) = v_{e,1}(t)$ croît ou décroît linéairement à la « vitesse » $\pm \frac{V_{\text{sat}}}{RC}$;
 - les basculements ont lieu lorsque $v_{e,1}(t)$ dépasse par valeur inférieure $-\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$ ou par valeur supérieure $+\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$.

I.5.vi – représentation temporelle

★ chronogrammes

- ◇ Compte tenu des remarques précédentes, nous pouvons tracer les chronogrammes suivants.



- ◇ Remarquons qu'il n'y a pas d'origine sur ce chronogramme car cela n'aurait pas véritablement de signification.
- ◇ $v_{s,2} = v_{e,1}$ a été construit :
 - affine par morceaux ;
 - continu ;
 - de pente $\pm \frac{1}{RC}$;
 - de valeur de basculement $\pm \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$.
- ◇ $v_{s,1} = v_{e,2}$ s'en déduit facilement : $v_{e,1}$ est négatif quand $v_{s,1}$ croît et réciproquement.

★ période

- ◇ Regardons une demi-période.
- ◇ Durant $T/2$, la tension varie de $2 \times \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$.
- ◇ Comme la pente est constante et qu'elle vaut $\frac{V_{\text{sat}}}{RC}$ nous avons

$$\frac{V_{\text{sat}}}{RC} = \frac{2 \times \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}}{\frac{T}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad T = 4 RC \times \frac{R_1}{R_2}$$

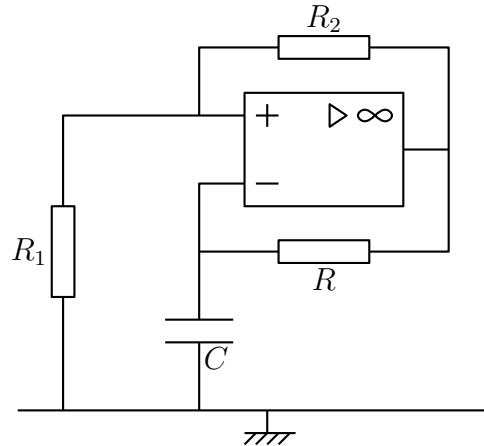
★ avantages

- ◇ Ce montage permet de générer en même temps un signal triangulaire et un signal rectangulaire de même fréquence.
- ◇ De plus, il est très facile de changer la fréquence en modifiant R_1 et même de changer de décade en changeant R_2 .
- ◇ Les inconvénients de ce montages sont liés aux AO : il faut rester dans des domaines de fréquences pas trop élevés pour éviter le slew rate et ne pas avoir besoin de trop de puissance.

I-6 – Multivibrateur astable, version 2

I-6.i – montage et principe

◇ Le montage est le suivant :



- ◇ L'idée est de compacter avec un seul AO le montage précédent.
- ◇ Il s'agit d'un montage comparateur à hystérésis dont l'entrée en V_- est un circuit RC alimenté directement par la sortie du montage comparateur.

I-6.ii – analyse qualitative du régime de fonctionnement

- ◇ Imaginons la situation où tous les potentiels sont nuls.
- ◇ Supposons que, suite à une perturbation électrique, $V_+(0^+) = \text{qq mV}$.
- ◇ Pendant ce temps là, comme la tension aux bornes du condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps, nous aurons toujours $V_-(0^+) = 0$.
- ◇ Ces deux tensions impliquent immédiatement que $\varepsilon(0^+) > 0$.
- ◇ Dès lors $v_s(t)$ se met à augmenter car c'est le rôle d'un AO que d'amplifier ε avec un facteur 10^5 .
- ◇ Mais $v_s(t)$ augmentant, la rétroaction positive fait augmenter ε de manière instantanée alors que $v_-(t)$ ne peut pas suivre à cause du condensateur.
- ◇ $v_s(t)$ ne va donc cesser d'augmenter : le régime est bien instable.

I-6.iii – analyse détaillée du régime de fonctionnement

★ équation vérifiée par $V_s(t)$

- ◇ Supposons l'AO réel et en régime linéaire.
- ◇ La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit, à l'entrée non inverseuse,

$$\frac{0 - V_+}{R_1} + \frac{V_s - V_+}{R_2} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

- ◇ Nous noterons

$$V_+ = \beta V_s \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- ◇ Remarquons au passage que cette relation est indépendante du régime de fonctionnement.
- ◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiel en $\underline{V_-}$ en notation complexe.

$$\frac{0 - \underline{V_-}}{\underline{Z_C}} + \frac{\underline{V_s} - \underline{V_-}}{R} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_-} = \frac{\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}} \times \underline{V_s} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_-} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \times \underline{V_s}$$

✧ La loi de fonctionnement de l'AO (réel) s'écrit

$$\underline{V_s} = \underline{\mu(j\omega)} \left(\underline{V_+} - \underline{V_-} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_s} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \left(\beta - \frac{1}{1 + j R C \omega} \right) \underline{V_s}$$

✧ Cela donne tout d'abord

$$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) (1 + j R C \omega) \underline{V_s} = \mu_0 (\beta (1 + j R C \omega) - 1) \underline{V_s}$$

✧ En développant et en regroupant tout à gauche

$$\left((j\omega)^2 \frac{R C}{\omega_0} + \left(\frac{1}{\omega_0} + R C - \mu_0 \beta R C \right) (j\omega) + 1 + \mu_0 - \beta \mu_0 \right) \underline{V_s} = 0$$

✧ Comme $\beta \lesssim 1$, nous avons

$$R C \ll \mu_0 \beta R C \quad \text{et} \quad 1 \ll \mu_0$$

✧ Et ainsi, nous pouvons simplifier en

$$\left((j\omega)^2 \frac{R C}{\omega_0} + \left(\frac{1}{\omega_0} - \mu_0 \beta R C \right) (j\omega) + \mu_0 - \beta \mu_0 \right) \underline{V_s} = 0$$

✧ Ce qui correspond à l'équation différentielle

$$\frac{R C}{\omega_0} \frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) + \left(\frac{1}{\omega_0} - \mu_0 \beta R C \right) \frac{dv_s}{dt}(t) + (1 - \beta) \mu_0 v_s(t) = 0$$

★ stabilité

✧ Rappelons que, pour être stable, une équation du second ordre à coefficients constants doit avoir tous ses coefficients de même signe.

✧ Ici, nous avons tout d'abord $\frac{R C}{\omega_0} > 0$.

✧ De plus, comme $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1$, nous avons aussi

$$(1 - \beta) \mu_0 > 0$$

✧ Pour le dernier coefficient, nous devons évaluer numériquement

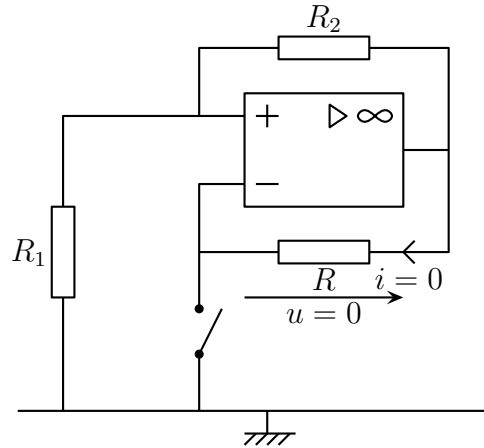
$$\frac{1}{\omega_0} \sim \frac{1}{2\pi \times 10} \sim 10^{-2} \text{ s} \quad \text{et} \quad \mu_0 \beta R C \sim 10^5 \times 0,1 \times 10^3 \times 100 \cdot 10^{-9} \sim 1 \text{ s}$$

✧ Finalement, nous avons $\frac{1}{\omega_0} - \mu_0 \beta R C < 0$: l'équation possède une solution instable, donc le montage est aussi instable.

✧ Nous venons de prouver que le montage fonctionne en régime non linéaire.

I-6.iv – stabilité

- ◇ Supposons que l'AO fonctionne en régime de saturation haute et que le régime permanent stationnaire soit atteint.
- ◇ Dans ces conditions, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et le montage est équivalent à :



- ◇ Comme le courant qui traverse R est nul, la tension à ses bornes est nulle et donc $V_- = V_s = +V_s$.
- ◇ Nous avons ainsi

$$\varepsilon = V_+ - V_- = \beta V_s - V_s \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon = (\beta - 1) V_s$$

- ◇ Mais comme $\beta < 1$, cela prouve que ε et V_s sont de signes opposés.
- ◇ Or, pour avoir $V_s = +V_{\text{sat}}$, il faut $\varepsilon > 0$, de même que pour avoir $V_s = -V_{\text{sat}}$, il faut $\varepsilon < 0$.
- ◇ Comme nous avons déjà prouvé que l'AO fonctionne en régime de saturation, nous ne pouvons que conclure sur l'astabilité du montage.
- ◇ De temps en temps, l'AO sera en saturation haute mais ne pourra pas y rester et, de temps en temps, l'AO sera en saturation basse mais ne pourra pas y rester.

I-6.v – fonctionnement complet

★ continuité et basculements

- ◇ Remarquons tout d'abord et de manière immédiate que la tension $v_-(t)$ est une fonction mathématiquement continue puisque c'est la tension aux bornes d'un condensateur.
- ◇ Nous savons aussi qu'il y a des basculements. Ceux-ci ne peuvent venir que de $\varepsilon(t)$ qui change de signe.
- ◇ Or, tant qu'il n'y a pas de basculement, $V_+(t) = \beta V_s$ est constant et $V_-(t)$ varie continûment.
- ◇ Par conséquent, $\varepsilon(t)$ varie continûment et, s'il change de signe à un instant, c'est que l'instant juste précédent il était nul.
- ◇ Cela signifie que les basculements auront lieu :
 - de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$ lorsque $V_-(t)$ atteint $+\beta V_{\text{sat}}$;
 - de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ lorsque $V_-(t)$ atteint $-\beta V_{\text{sat}}$.

★ évolutions

- ◇ Considérons un état de saturation (haut ou bas) constant.
- ◇ Nous voyons alors un condensateur en série avec un résistor (car $i_- = 0$) et l'ensemble est soumis à $V_s = C^{\text{te}}$.
- ◇ Ce n'est ni plus ni moins qu'un circuit RC soumis à un échelon de tension.

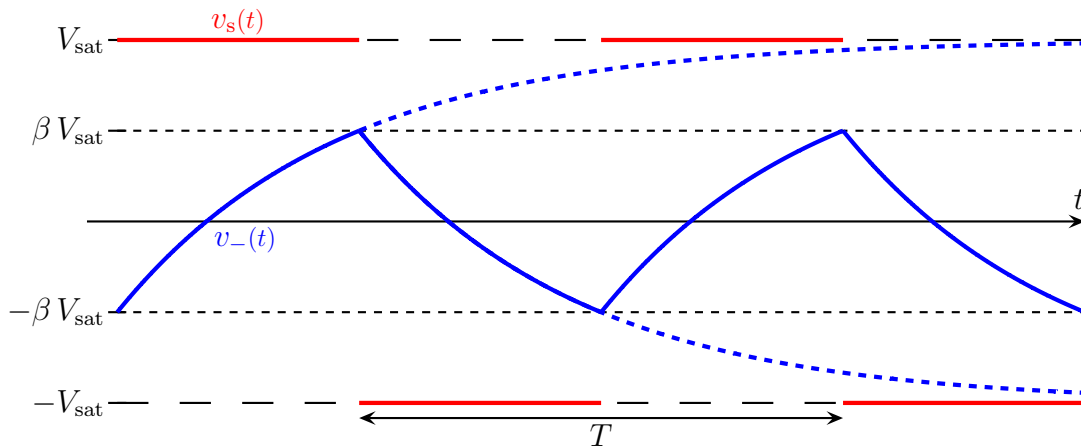
- ◇ Comme la tension du condensateur « cherche » à égaler celle du générateur, nous pouvons dire que les solutions s'écrivent

$$\begin{cases} v_-(t) = \lambda e^{-t/\tau} + V_{\text{sat}} & \text{en saturation haute} \\ v_-(t) = \mu e^{-t/\tau} - V_{\text{sat}} & \text{en saturation basse} \end{cases}$$

I-6.vi – représentation temporelle

★ chronogramme

- ◇ En repérant d'abord les valeurs de basculement $\pm\beta V_{\text{sat}}$ puis en traçant $v_-(t)$ continue avec des évolutions exponentielles pour chaque état de saturation, nous obtenons le chronogramme suivant.



★ période

- ◇ Comme nous pouvons le voir, la demi-période correspond à la durée que met $v_-(t)$ pour aller de $-\beta V_{\text{sat}}$ à $+\beta V_{\text{sat}}$.
- ◇ Sur cette demi-période, nous savons que la solution s'écrit

$$v_-(t) = \lambda e^{-t/\tau} + V_{\text{sat}}$$

- ◇ En imposant la condition initiale $v_-(0) = -\beta V_{\text{sat}}$, nous trouvons

$$v_-(t) = -(\beta + 1) V_{\text{sat}} e^{-t/\tau} + V_{\text{sat}}$$

- ◇ Pour trouver la période, nous n'avons donc plus qu'à résoudre

$$-(\beta + 1) V_{\text{sat}} e^{-T/(2\tau)} + V_{\text{sat}} = \beta V_{\text{sat}}$$

- ◇ Cela donne

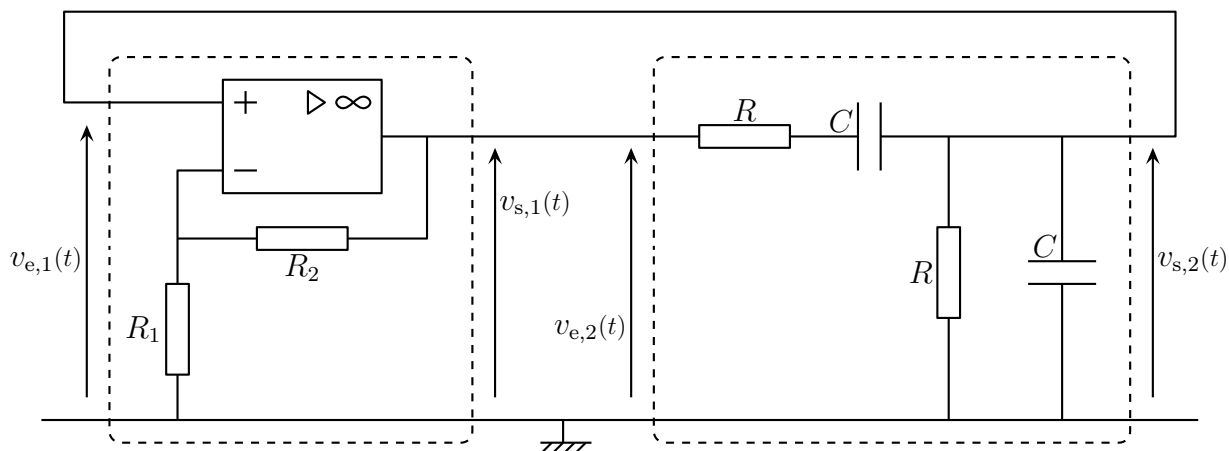
$$e^{-T/(2\tau)} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad \rightsquigarrow \quad T = 2\tau \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

- ◇ Comme nous pouvons le constater avec le chronogramme ci-dessus, plus β se rapproche de 1, plus la période est grande.

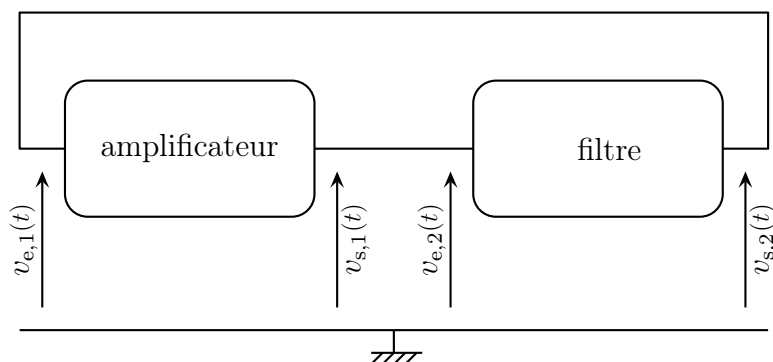
I.7 – Oscillateur sinusoïdal

I.7.i – montage

◇ Considérons le montage ci-dessous.



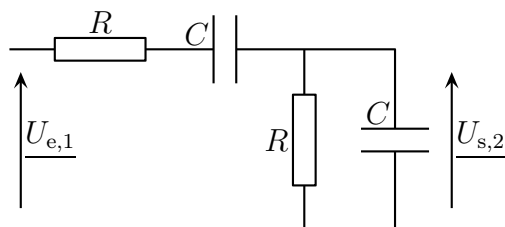
◇ En isolant les différents morceaux, nous reconnaissons le schéma de principe suivant.



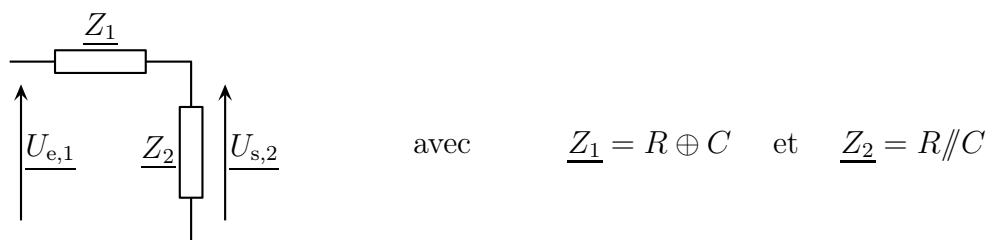
◇ Regardons d'un peu plus près ce qu'il en est.

I.7.ii – fonction de transfert du filtre

◇ Isolons le filtre, appelé filtre de WIEN.



◇ Ce filtre est équivalent à



◇ Comme \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont en série, nous avons immédiatement

$$\frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega} + R \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

◇ Cela donne, d'abord en multipliant par $jC\omega$,

$$\frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + \frac{1}{jC\omega} + R} \rightsquigarrow \frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}{\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} + 1 + jRC\omega}$$

◇ Éliminons ensuite le dénominateur $1 + jRC\omega$

$$\frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2} \rightsquigarrow \frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

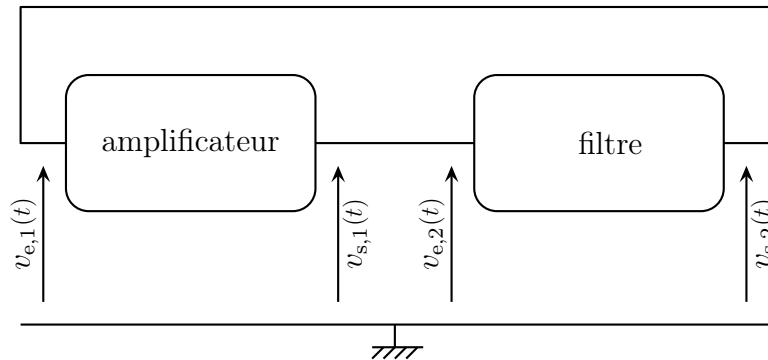
◇ Nous obtenons donc la fonction de transfert

$$\frac{\underline{U}_{s,2}}{\underline{U}_{e,2}} = \frac{jx}{1 - x^2 + 3jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

◇ Il s'agit d'un filtre passe-bande.

I.7.iii – association

◇ Reprenons le schéma de principe.



◇ Comme l'amplificateur est un amplificateur non inverseur, nous savons que

$$\underline{U}_{s,1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{U}_{e,1} \stackrel{\text{not}}{=} A \underline{U}_{e,1} \quad \text{avec} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

◇ Or, le filtre impose

$$\underline{U}_{s,2} = \underline{H}(jx) \underline{U}_{e,2}$$

◇ Comme les deux étages sont bouclés, cela impose

$$\underline{U}_{e,2} = \underline{U}_{s,1} \quad \text{et} \quad \underline{U}_{s,2} = \underline{U}_{e,1} \rightsquigarrow \underline{U}_{s,1} = A \underline{H}(jx) \underline{U}_{s,1}$$

✧ Ce qui se réécrit

$$(1 - A \underline{H}(\mathrm{j}x)) \underline{U}_{s,1} = 0$$

✧ Nous avons donc $\underline{U}_{s,1} \dots$ sauf si

$$1 - A \underline{H}(\mathrm{j}x) = 0$$

I.7.iv – condition d'accrochage

★ d'après la loi de fonctionnement

✧ Pour avoir une sortie non nulle, il *faut* donc

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{1}{A}$$

✧ Cela implique notamment que la fonction de transfert *doit* être réelle puisque A l'est.

✧ Réécrivons la fonction de transfert

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{\mathrm{j}x}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{1}{\mathrm{j}(x - 1/x) + 3}$$

✧ Pour qu'elle soit réelle il *faut* donc $x = 1$.

✧ Cela implique de fait $\underline{H}(\mathrm{j}) = \frac{1}{3}$, soit $A = 3$.

★ comment faire en pratique ?

✧ En TP, nous ferons varier R_2 jusqu'à la valeur $R_2 \sim 2R_1$ et nous verrons alors apparaître spontanément des oscillations.

✧ L'énergie nécessaire aux oscillations provient de l'alimentation de l'AO.

✧ Avec R_2 nettement plus grand que $2R_1$, il y aurait aussi des oscillations mais qui seraient distordues.

✧ Cela ne rentre pas en contradiction avec ce qui précède car l'amplitude des oscillations est limitée par un phénomène non linéaire : la saturation de l'AO.

II – Diode

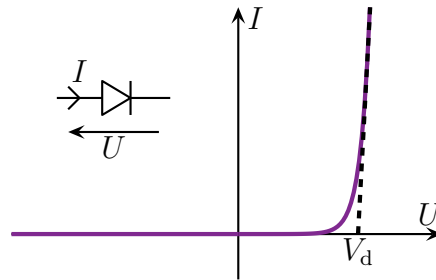
- ✧ Il n'y a pas de véritable nouvelles notions dans cette partie, nous nous contenterons de faire des rappels.

II.1 – Présentation

II.1.i – symbole, convention et caractéristique

★ diode réelle

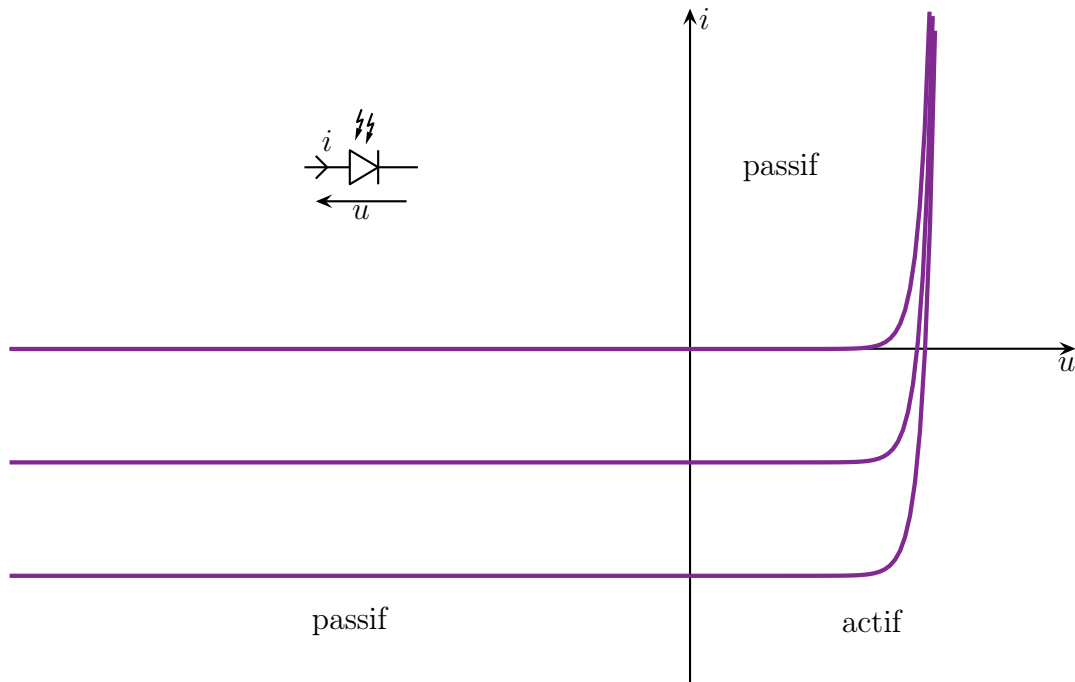
- ✧ Une diode réelle a cette caractéristique.



- ✧ V_d est la tension de seuil.

★ en vrai c'est une photodiode

- ✧ En réalité, les diodes sont toutes des photodiodes, *i.e.* des composants influencés par la quantité de lumière reçue.



- ✧ Techniquement, cela se traduit par

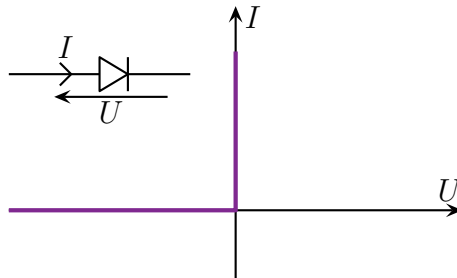
$$i(u) = I_0 \left(e^{u/V_0} - 1 \right) - I(\Phi) \quad \text{avec} \quad \Phi \text{ le flux lumineux}$$

- ✧ Plus la diode est éclairée, plus le décalage se fait vers le bas.
 ✧ Nous voyons aussi qu'il existe un domaine dans lequel la photodiode est *active*, au sens où elle *fournit* de l'énergie au circuit électrique : elle est alors tout simplement appelée « photopile ».

II.1.ii – modélisation

☆ diode idéale

La *diode idéale* possède la caractéristique suivante :

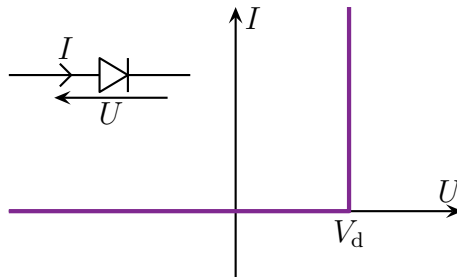


- lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme
- lorsque la diode est passante, elle se comporte comme

- ◇ C'est *a priori* le modèle que nous utiliserons spontanément quand rien ne nous sera imposé.
- ◇ Ce modèle n'est certes pas très juste mais permet au moins l'analyse qualitative.

☆ diode idéale à tension de seuil non nulle

La *diode idéale à tension de seuil non nul* possède la caractéristique suivante :



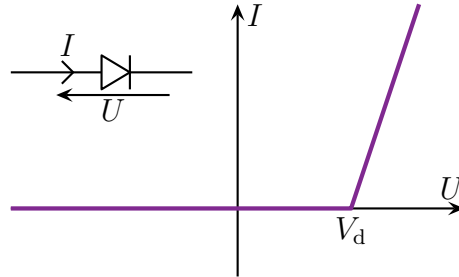
- lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme
- lorsque la diode est passante, elle se comporte comme

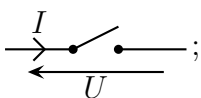
- ◇ Il s'agit là d'un modèle bien meilleur pour étudier analytiquement les circuits et notamment expliquer les effets de seuil.
- ◇ Notons que la tension de seuil d'une diode est de l'ordre de 0,6 V et peut monter jusqu'à 1 V pour des LED.

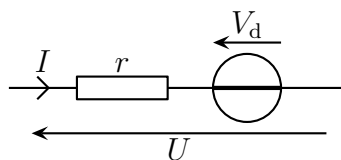
★ diode linéarisée

- ◇ C'est un modèle assez lourd qui n'a pas tellement d'intérêt formel au-delà de la définition de la résistance dynamique de la diode.

Le *modèle linéaire* de la diode réelle possède la caractéristique suivante :



→ lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme  ;

→ lorsque la diode est passante, elle se comporte comme 

r est appelée la *résistance dynamique* de la diode et est de l'ordre du ohm.

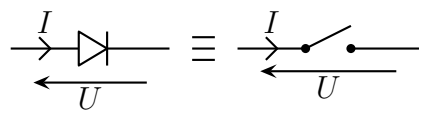
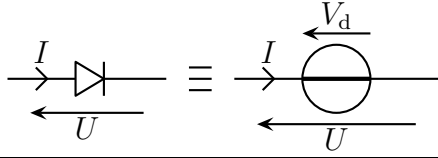
★ méthode pour étudier un circuit à diode

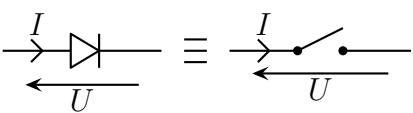
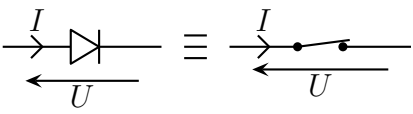
- ◇ Comme tout ce qui est non linéaire, l'idée consiste à :

- choisir une hypothèse ;
- poser l'égalité que cela implique ;
- vérifier l'inégalité nécessaire à la validité de l'hypothèse.

- ◇ Rappelons uniquement ici les méthodes pour les modèles de diodes les plus couramment utilisés.

Pour la diode idéale à tension de seuil non nul :

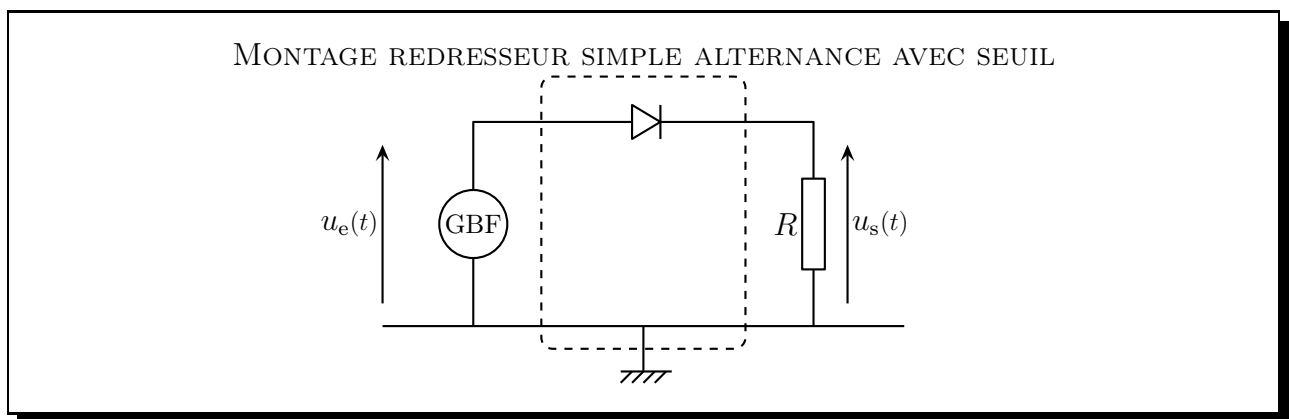
hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
diode bloquée	$I = 0$ et 	$U \leq V_d$
diode passante	$U = V_d$ et 	$I \geq 0$

Pour la diode idéale :		
hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
diode bloquée	$I = 0$ et 	$U \leq V_d$
diode passante	$U = 0$ et 	$I \geq 0$

II.2 – Redresseurs

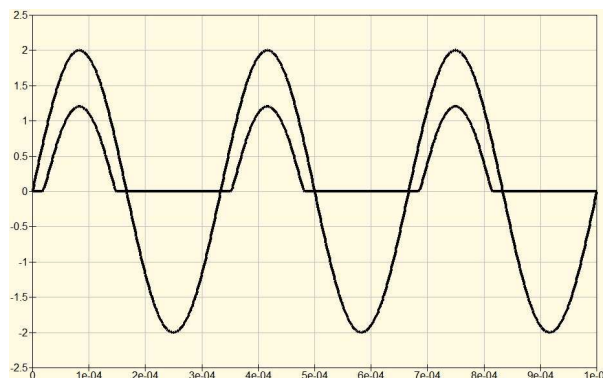
II.2.i – simple alternance avec seuil

★ circuit à connaître



★ représentation graphique

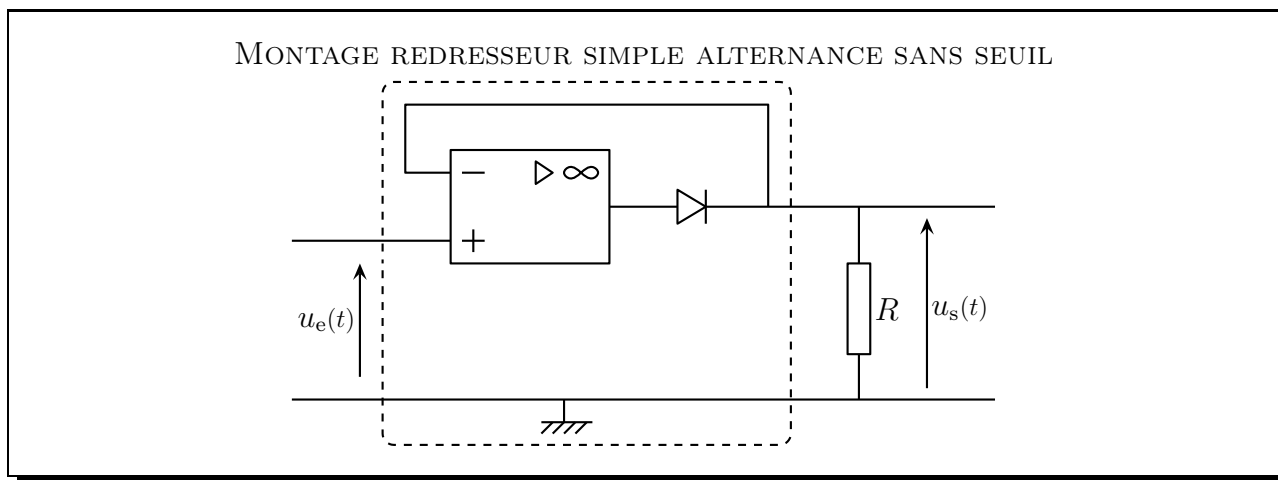
- ◇ L'inconvénient principal de ce montage est l'effet de seuil.
- ◇ Cela n'est pas forcément grave pour des tensions élevées, mais pour des tensions d'amplitude faible et des tensions de seuils non négligeables (comme avec les LED) il est impératif d'en tenir compte.
- ◇ Ci-dessous, une simulation réalisée avec le logiciel Qucs¹.



1. Sauf précision contraire, toutes les simulations ont été réalisées avec ce logiciel dont l'acronyme signifie Quite Universal Circuit Simulator.

II.2.ii – simple alternance sans seuil

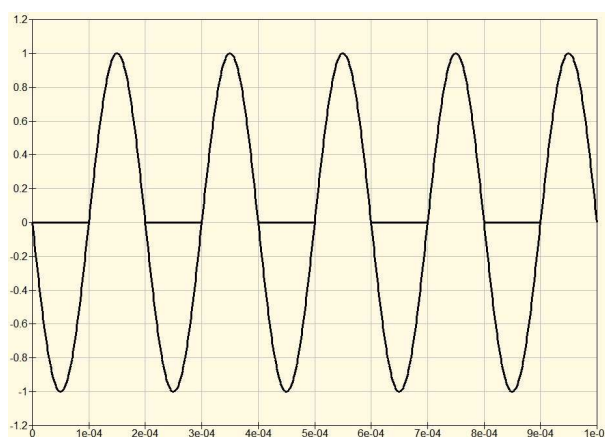
★ circuit à connaître



◇ L'idée est simple : il s'agit de compacter en un seul circuit un montage suiveur et un montage redresseur.

★ représentation graphique

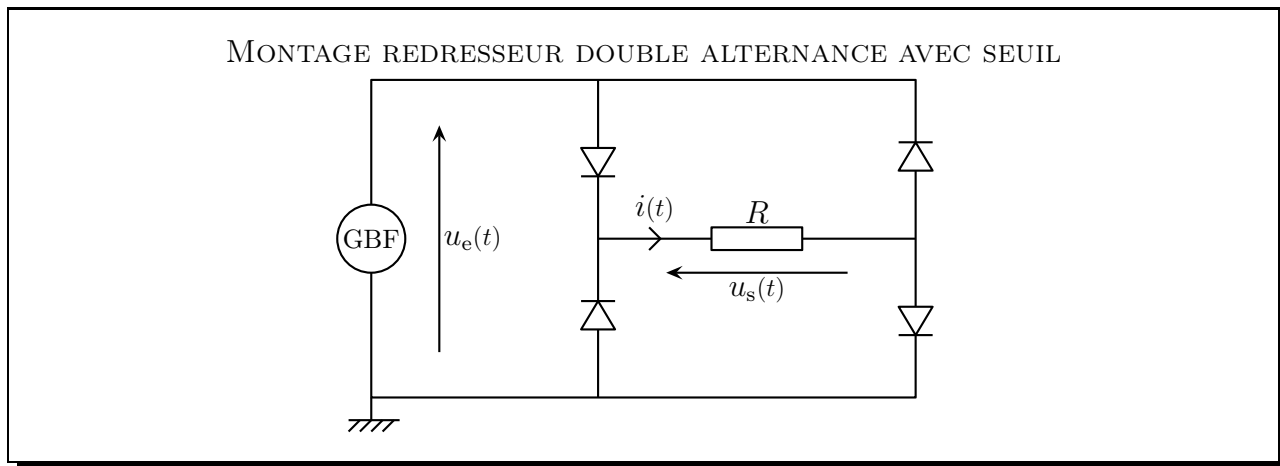
◇ Ce montage fonctionne bien comme le montre la simulation ci-dessous.



◇ Malgré tout, dès que la fréquence augmente, il peut présenter des défauts dus à l'AO.

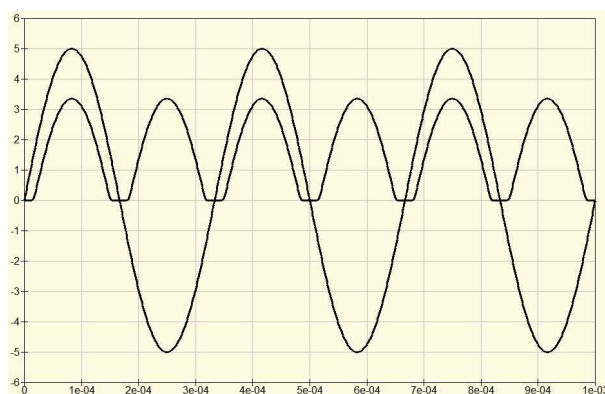
II.2.iii – double alternance avec seuil

★ circuit à connaître



★ représentation graphique

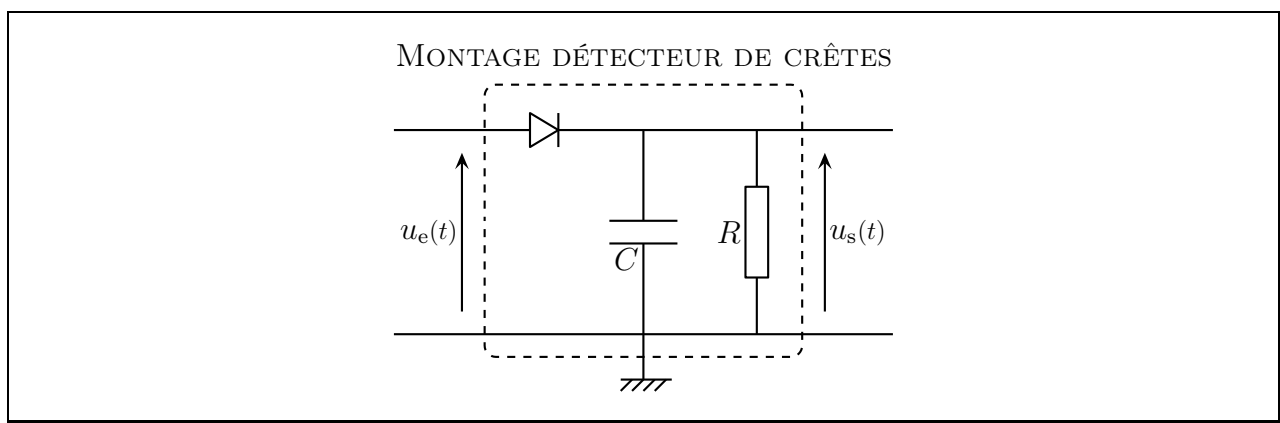
◇ Comme pour le redresseur simple alternance, il y a un effet de seuil ici, comme le montre la simulation suivante :



II.3 – Détecteur de crêtes

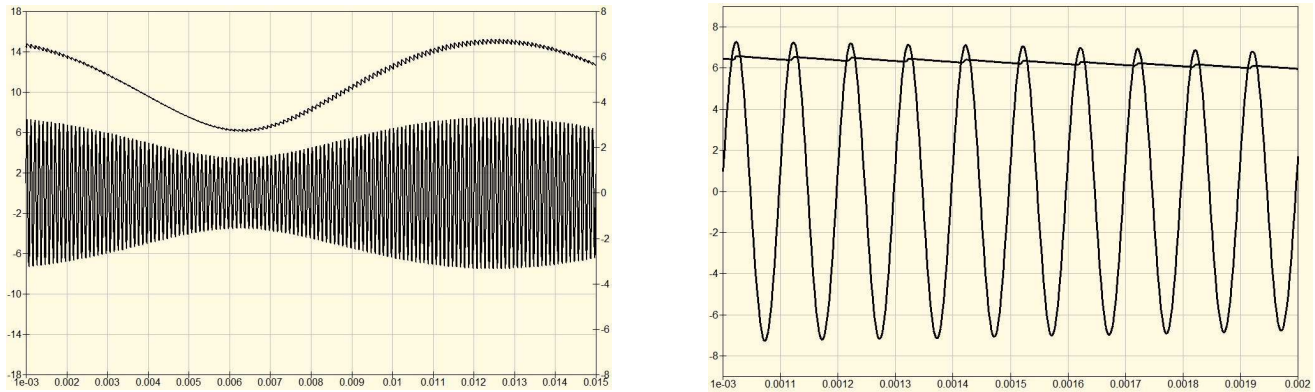
II.3.i – avec seuil

★ circuit à connaître



★ représentation graphique

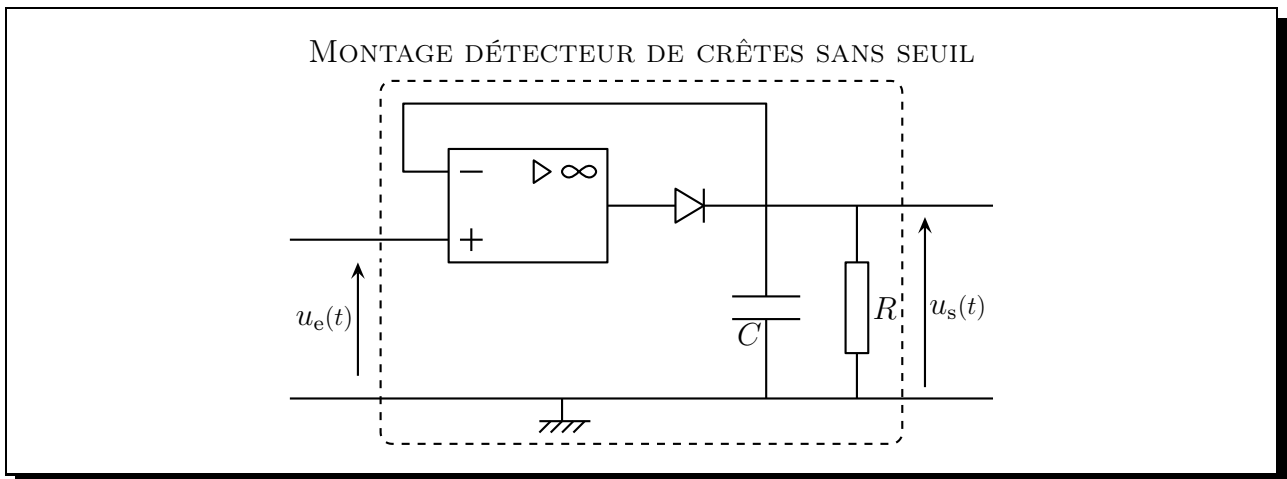
◇ Ce montage fonctionne bien (mais il y a toujours un effet de seuil). Voici une simulation :



- ◇ Le seul inconvénient, qui n'en est pas vraiment un, est qu'il faut bien adapter la durée caractéristique du circuit RC pour limiter autant que possible l'effet « dent de scie ».
- ◇ Il est possible de mettre un passe-bas en sortie de ce montage pour filtrer les « dents de scie ».

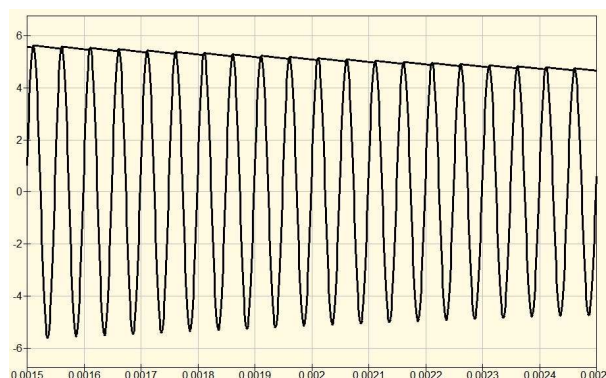
II.3.ii – sans seuil

★ circuit à connaître



★ représentation graphique

◇ Comme précédemment, la sortie de ce montage ne présente aucune surprise comme le montre la simulation ci-dessous :



◇ Il faut malgré tout faire attention, en hautes fréquences, aux défauts de l'AO.

Circuits électroniques

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1^{re} année :
 - IV.B. Réalisation de fonctions élémentaires.
- ◇ Programme de 2^e année :
 - II.4. Multivibrateur astable.

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - amplificateur opérationnel, entrée inverseuse, entrée non inverseuse, borne de sortie ;
 - régime linéaire, régime de saturation / de commutation ;
 - tension de saturation ;
 - tension de décalage, courants de polarisation, résistance d'entrée / de fuite / de sortie ;
 - slew rate, limitation en amplification ;
 - amplification complexe d'un AO, amplification statique d'un AO ;
 - filtre de WIEN ;
 - diode, tension de seuil ;
 - modèle linéaire d'une diode, diode idéale à tension de seuil non nul, diode idéale ;
 - diode passante / bloquée ;
 - redresseur, détecteur de crête ;
 - transformateur d'isolement.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les valeurs de :
 - tension de saturation d'un AO, l'intensité des courants de polarisation, amplification statique ;
 - tension de seuil d'une diode.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - la relation entre le potentiel complexe de sortie \underline{V}_s et la tension d'entrée $\underline{\varepsilon}$;
 - les relations entre $v_s(t)$ et $\varepsilon(t)$ pour un AO *idéal* lors des fonctionnements linéaire et non linéaire ;
 - les comportements passant et bloqué d'une diode modélisée.

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - le principe de fonctionnement d'un AO ;
 - le principe de fonctionnement d'une diode ;
 - les montages suiveur, amplificateur inverseur et non inverseur, intégrateur, dérivateur, comparateur simple, comparateur à hystérésis ;
 - le schéma de principe du montage astable comprenant un comparateur et un intégrateur ;
 - les modèles électrocinétiques équivalents de la diode ;
 - les montages redresseur simple alternance avec / sans seuil et double alternance avec seuil.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

- ◇ Connaître la condition de stabilité d'une équation différentielle linéaire du 2^e ordre.

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
- appliquer la méthode d'étude des circuits non linéaires (AO en régime de saturation ou diode) ;
 - trouver si un circuit à AO est *a priori* en régime linéaire ou pas.

★ exercices classiques

- ◇ Savoir :
- retrouver **très** rapidement (ou connaître) les relations sortie / entrée des montages usuels à AO ;
 - prévoir rapidement le régime de fonctionnement d'un AO dans les cas simples (une seule rétroaction) ;
 - retrouver des conditions d'oscillations spontanées.