25/05/2020

Leçon Julie :
Systèmes conservatifs à un degré de liberté

Correcteur : Robin Zegers

Biblio :
1. Tout-en-un PCSI, Dunod (2017)
2. Mécanique 4 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel (intéressant pour cette leçon à partir de la page 10)
   http://mchampion.fr/cours/M4%20-%20Approche%20energetique%20du%20mouvement%20d%20un%20point%20materiel.pdf
3. Wikiversity : très complet
   https://fr.wikiversity.org/wiki/M%C3%A9canique_1_(PCSI)/Approche_%C3%A9nerg%C3%A9tique_du_mouvement_d%27un_point_mat%C3%A9riel_:_Mouvement_conservatif#D%C3%A9finition_d'un_mouvement_conservatif
4. Cours de mécanique M14-travail-énergies (intéressant à partir de la page 4 ici)
   http://www.physagreg.fr/mecanique/m14/M14-travail-energies.pdf

Niveau : CPGE

Prérequis :

Travail et puissance d'une force
Théorèmes énergétiques
Forces conservatives
Oscillateurs harmoniques

Plan :
1. Système conservatif
   1) Définition
   2) Exemple du système masse-ressort horizontal
2. Mouvement conservatif dans un puit de potentiel harmonique
   1) Retour sur le système masse-ressort
   2) Tracé d'un portrait de phase
   3) Cas de l'oscillateur amorti

Commençons par fixer le cadre de l'étude :
Un *degré de liberté* désigne un paramètre indépendant pour la description d'un système dynamique. Ce paramètre doit pouvoir évoluer sans contraintes dans le temps.

Les systèmes à 1 DDL sont intéressants en mécanique car ils peuvent être résolus intégralement via les théorèmes énergétiques (ici, le théorème de l'énergie mécanique).

1.1) Définition

Un *système conservatif* désigne un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives ou éventuellement à des forces non conservatives qui ne travaillent pas.

Un système est conservatif du point de vue de l'énergie mécanique.

Ainsi, d'après le TEM (théorème de l'énergie mécanique),
$\Delta E_m = W_{NC}(A \mapsto B) = 0$ donc l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.

Exemple de la chute libre (diaporama : pour montrer les conventions des axes) :
La chute libre est un mouvement conservatif tant que l'on ne prend pas en compte les frottements de l'air (force non conservative qui travaille donc le système n'est plus conservatif).

1.2) Exemple du système masse-ressort horizontal

Présentation sur diaporama du système étudié (étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen).
Bilan des forces : poids, réaction normale du support et force de rappel élastique

La réaction normale ne travaille pas car elle est orthogonale au déplacement élémentaire (preuve mathématique par calcul du travail de cette force). Donc bien qu'elle soit non conservative, le système reste conservatif.

Application du TEM :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Tâchons maintenant d'exprimer l'énergie potentielle élastique.
Expression de la force de rappel élastique et définition de l'élongation.
Calcul du travail de la force de rappel élastique :

$$\delta W = -kx\,\overrightarrow{u_x}.\,dx\overrightarrow{u_x} = -kxdx$$

Donc, on peut utiliser l'énergie potentielle comme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c^{te}$$

En prenant comme référence : énergie potentielle nulle lorsque la masse est à sa position d'équilibre c'est-à-dire pour $x = 0$.
On trouve alors la nullité de la constante.

Application du TEM :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}\,x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ainsi, $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Transition
Position d'équilibre en x=0. A partir de l'allure de l'énergie potentielle (en fonction du DDL, ici la coordonnée cartésienne x), on peut connaître le mouvement de la masse, contraint par un puits de potentiel (l'énergie potentielle est parabolique).

On a $E_c = E_m - E_p > 0 \Rightarrow E_m > E_p$: l'énergie mécanique est bornée, toutes les valeurs d'énergie potentielle ne peuvent pas être atteintes. La masse est piégée entre deux positions x1 et x2.

2.1) Retour sur le système masse-ressort

Tracé du puits de potentiel harmonique : énergie potentielle en fonction de sa position.

$$E_m = c^{te}\ et\ E_m(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Il existe donc une zone d'énergies potentielles qui n'est pas accessible.
Ainsi, la position de la masse est bornée entre deux valeurs $-X_m\ et\ X_m$.

$E_m(x = X_m) = E_c(x = X_m) + E_p(x = X_m) = \frac{1}{2}kX_M^2$ car $E_c(x = X_m) = 0$
De plus par conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}kX_M^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

Détermination de la phase à l'origine à partir de la condition initiale sur la vitesse.
Isochronisme des oscillations

2.2) Tracé du portrait de phase

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 X_m)^2} = 1$$

Intérêt du portrait de phase : pour un système conservatif : la trajectoire dans le portrait de phase est fermée.

Animation : système masse-ressort non-amorti et amorti.
http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/spc/genevieve_tulloue/file/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html
Diapo : portrait de phase pour le système masse-ressort non conservatif.

Conclusion : Utilisation des théorèmes énergétiques très efficace pour l'étude des systèmes à un degré de liberté, qui en devient simplifiée. De même, les portraits de phase sont des outils puissants pour caractériser ces systèmes.

Questions

Retour sur la conclusion. Pour un système à un degré de liberté, on n'a pas besoin du PFD. Pouvez-vous préciser ?

L'exploitation du théorème de l'énergie mécanique suffit pour trouver l'équation du mouvement et la réponse du système.

Quel est l'intérêt ?

C'est plus rapide et potentiellement plus simple d'un point de vue pédagogique (car pas de vision vectorielle). Un autre avantage : il s'agit d'une équation scalaire qui permet de s'affranchir des forces d'expressions inconnues qui ne jouent pas de rôle sur la trajectoire (à part la contraindre).

Qu'est-ce que ça apporte du point de vue du système ?

Vision énergétique

« On obtient un système oscillant, c'est souvent le cas pour un système conservatif ». Ainsi, un système conservatif est-il périodique ?

Un système oscillant : transfert entre énergie cinétique et potentielle et cela entraine des oscillations de la position du système.

La non dissipation de l'énergie entraine la périodicité du mouvement. Je ne suis pas sûre que l'hypothèse seule du système conservatif entraine la périodicité.

Système conservatif entraine périodicité : non absolument pas .

La trajectoire de phase fermée entraine la périodicité mais ce n'est pas une caractéristique des systèmes conservatifs.

Pourquoi la masselotte oscille entre les deux positions d'équilibre ?

Elle oscille parce qu'elle n'est pas à une position d'équilibre

Discussion sur les états d'équilibre et leur stabilité. On fait un DL de l'énergie de potentiel autour des positions d'équilibre. Si la dérivée seconde est nulle, on regarde l'ordre d'après. Autour d'un minimum, on peut approximer n'importe quel potentiel par un potentiel harmonique (GRAND INTERET DE L'OH) tant que les oscillations restent petites.

Comment convaincre un étudiant qu'il y a bien des oscillations ? Cet étudiant étant convaincu que la position de la masselotte est bornée. Au point de rebroussement, la vitesse s'annule et change de signe : origine des oscillations.

Comment construit-on ce portrait de phase ?

On étudie la vitesse en fonction de la position en utilisant l'équation cartésienne d'une ellipse.

Et plus généralement ? $\frac{dx}{dt} = \pm\left(\frac{2}{m}\left(E_m - V(x)\right)\right)^{1/2}$

On peut en déduire la périodicité : T = $\int dt = 2\int_{x-}^{x+} \frac{dx}{dx/dt}$

De même, la période T est reliée à l'aire du cycle : $T = \frac{dS(E_m)}{dE_m}$

Orientation des petites flèches ?

Il faut regarder le signe de la vitesse et voir comment évolue la position : dans le demi-plan supérieur, la vitesse est positive donc la position augmente avec le temps.

Peut-on relier le portrait de phase et la figure de l'énergie potentielle ?

Connaissant la position et la vitesse on peut alors déduire la valeur des énergies cinétique et potentielle.

Peut-on comprendre sur le portrait de phase le point d'amplitude maximale ?

En ce point, la vitesse est nulle et l'énergie potentielle est maximale

Problème d'homogénéité dans l'équation de l'ellipse.

Définition de l'isochronisme ?

La période est constante au cours du temps… (n'importe quoi)

Mais on ne parle plus de l'amplitude ?

L'isochronisme est le fait que la période dépende des conditions initiales appliquée au système.

Propriété d'isochronisme est-elle vraie pour tout système conservatif ?

Les systèmes conservatifs étant périodiques alors il y a isochronisme des oscillations (aussi n'importe quoi) : l'isochronisme est une propriété particulière de l'OH, ce n'est pas le cas de tous les systèmes conservatifs (par exemple le pendule pesant).

Quelle expérience auriez-vu pour monter pour illustrer cette leçon ?

Le système masse-ressort afin de montrer la conservation de l'énergie mécanique et/ou de montrer le portrait de phase.

Une autre idée ?

Pendule pesant ou simple qui n'est pas un système linéaire.

Est-ce que les méthodes de conservation de l'énergie mécanique et portrait de phase sont-elles valables uniquement pour le problème présenté ?

Non, c'est applicable à tous les systèmes conservatifs

Pouvez-vous justifier votre choix du système masse-ressort ?

Éviter le problème des isochronismes pour le pendule simple.

Présentation voulue d'un portrait de phase elliptique

Pour le pendule, les méthodes sont valables pour tous les angles ?

La méthode reste la même pour le pendule, mais le portrait de phase serait non elliptique pour des amplitudes initiales grandes.

Comment définit-on la position de l'équilibre ?

Mathématiquement, dérivée de l'énergie potentielle est nulle et vitesse nulle.

Comment caractériser la stabilité de l'équilibre ?

Stable si la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positive et instable si elle est négative.

Si cette dérivée seconde est nulle ?

Ne peut pas arriver

Y avait-il moyen de montrer toute la portée de l'analyse de l'oscillateur harmonique ? Comment montrer que l'étude de l'oscillateur harmonique a intérêt au-delà du système masse-ressort ?

Montrer d'autres exemples pour montrer que l'oscillateur harmonique décrit beaucoup d'exemples concrets (comme les liaisons chimiques).

Que se passe-t-il pour des systèmes à plus de un degré de liberté ? Que garde-t-on comme méthode ?

L'approche énergétique ne suffit plus pour trouver la réponse au système.

Sauf pour les systèmes « intégrables » (cf cours de Robin), qui peuvent se réduire après un certain traitement à des problèmes à 1DDl (problème à deux corps de Kepler par exemple**).**

L'approche via le portrait de phase est-elle propre à la mécanique ?

Non il y a aussi des portraits de phase en électronique, systèmes chimiques, et autres. C'est une approche générale.

Cf ce BUP : https://uhincelin.pagesperso-orange.fr/LP49_BUP_portrait_phase_oscil.pdf

Système en électrocinétique équivalent de ce que l'on a fait : circuit RLC.

Commentaires

- **Il ne faut pas se restreindre au cas de l'oscillateur harmonique : problème de choix.**

Toute la force de l'approche par le portrait de phase est l'accès à des informations exactes pour des systèmes non linéaires.
Le pendule pesant est un bien meilleur exemple que le système masse ressort, car il montre cette force, et il ne faut pas se restreindre aux petits angles pour le montrer.
On peut cependant montrer qu'on approxime bien un OH quand on peut linéariser le système pour des petits angles.
De plus, le pendule présente un intérêt expérimental.
A l'instar de ce qui a été fait avec l'oscillateur masse-ressort, on peut s'appuyer sur cet exemple du pendule pendant toute la leçon , mais il y a beaucoup plus de choses à montrer (on finit par tourner en rond avec l'OH).

- Lorsque l'on parle de portrait de phase, on doit le mettre en parallèle avec le profil d'énergie.

De plus par conservation de l'énergie mécanique, on accède à la vitesse en fonction du potentiel directement.
Le point remarquable on peut résoudre des problèmes non linéaires.
De plus, cette méthode n'est pas limitée à des systèmes unidimensionnels.

- Intérêt historique : peut-on faire un pendule pesant isochrone ?

Oui au 17^{e} siècle, on a construit un pendule pour lequel la masse est contrainte à se déplacer une masse sur une cycloïde alors qu'il est non linéaire.

- Le problème de Kepler entraine un système identique à un système unidimensionnel. Si le système possède suffisamment de constantes du mouvement alors on revient à la résolution d'un système comme unidimensionnel.

- Une discussion intéressante aurait pu porter sur les états liés et états de diffusion.

- Le portrait de phase peut également décrire le comportement d'un système entretenu : il perd de l'énergie par dissipation, mais en lui injectant de l'énergie au bon moment (bonne phase), le portrait de phase redevient fermé.

- Il ne faut pas passer de temps sur la résolution de l'équation d'un oscillateur harmonique, c'est dans les prérequis.

- Système amorti : perte de la symétrie égal perte de la réversibilité.

L’objectif de cette leçon est de montrer qu’on est bien pédagogue. Mais on peut parler de choses bien plus complexes pour l’ouverture.

Il faut essayer de trouver des vidéos pour montrer l’aspect expérimental.