Transformation de Fourier : tables et propriétés
2018-2019

Les fonctions considérées sont des fonctions complexes de variable réelle
$a\ b\ r_0\ s_0\ u_0\ v_0\ r$ *sont des constantes réelles*

Une dimension

Fonction	Transformée de Fourier
$f(r)$	$F(u)$
$f(r) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u)]}(r)$	$F(u) = \mathcal{F}_{[f(r)]}(u)$
$f(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ur}\, du$	$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)e^{-i2\pi ur}\, dr$
$f(ar)$	$\frac{1}{\|a\|}\, F\left(\frac{u}{a}\right)$
$f^*(r)$	$F^*(-u)$
$f(r-r_0)$	$e^{-i2\pi ur_0}\, F(u)$
$e^{i2\pi u_0 r}\, f(r)$	$F(u-u_0)$
$\delta(r)$	1
1	$\delta(u)$
$e^{i2\pi u_0 r}$	$\delta(u-u_0)$
$\delta(r-r_0)$	$e^{-i2\pi ur_0}$
$\|b\|\, e^{-\pi b^2 r^2}$	$e^{-\pi\left(\frac{u}{b}\right)^2}$ valable avec b complexe
$\frac{2a}{1+4\pi^2a^2r^2}$ avec a positif	$e^{-\|u\|/a}$
$\begin{cases} a\ \mathrm{sinc}(ar) \\ \text{avec} \quad \mathrm{sinc}(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \end{cases}$	$\begin{cases} \quad \mathrm{rect}_a(u) \quad \text{ou} \quad \mathrm{rect}\frac{u}{a} \\ \text{où} \quad \mathrm{rect}_a(u) = 1 \quad \text{pour} \ -\frac{a}{2} \le u \le \frac{a}{2} \\ \text{et} \quad \mathrm{rect}_a(u) = 0 \quad \text{pour} \ \|u\| > \frac{a}{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \exp -\frac{r}{2a} & \text{pour } r \ge 0, \text{ avec } a \ge 0 \\ 0 & \text{pour } r < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i2\pi u + \frac{1}{2a}}$

On a la propriété utile :

$$\overline{\mathcal{F}}_{[f(r)]}(u) = \mathcal{F}_{[f(r)]}(-u)$$

Série de Fourier

Le développement en série de Fourier de la fonction périodique $f(r)$ de période r_0 peut s'écrire :

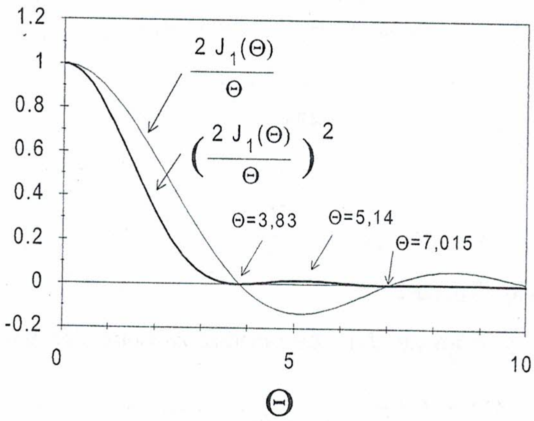
$$f(r) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p\, e^{-i2\pi p\frac{r}{r_0}} \quad \text{avec} \quad c_p = \frac{1}{r_0}\int_{-r_0/2}^{+r_0/2} e^{i2\pi p\frac{r}{r_0}}\, f(r)\, dr = \frac{1}{r_0}\overline{\mathcal{F}}_{[f(r)\ \mathrm{rect}_{r_0}(r)]}(\frac{p}{r_0})$$

Deux dimensions

Fonction	Transformée de Fourier
$f(r,s)$	$F(u,v)$
$f(r,s) = \overline{\mathcal{F}}_{[F(u,v)]}(r,s)$	$F(u,v) = \mathcal{F}_{[f(r,s)]}(u,v)$
$f(r,s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\ e^{i2\pi(ur+vs)}\ du\ dv$	$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r,s)\ e^{-i2\pi(ur+vs)}\ dr\ ds$
$f(ar,bs)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\frac{1}{\lvert b\rvert}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$
$f^*(r,s)$	$F^*(-u,-v)$
$f(r-r_0, s-s_0)$	$e^{-i2\pi(ur_0+vs_0)}F(u,v)$
$e^{i2\pi(u_0r+v_0s)}f(r,s)$	$F(u-u_0, v-v_0)$
$\left\{\begin{array}{c}\pi R^2\frac{2J_1(2\pi\sqrt{r^2+s^2}R)}{2\pi\sqrt{r^2+s^2}R}\\ \text{où } J_1 \text{ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre 1}\\ \text{(voir figure)}\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{circ}_R(u,v)=1 \text{ pour } \sqrt{u^2+v^2}\leq R\\ \text{et } \mathrm{circ}_R(u,v)=0 \text{ pour } \sqrt{u^2+v^2}>R\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{c}b^2\ e^{-\pi b^2(r^2+s^2)}\\ \textit{(reste valable avec b complexe)}\end{array}\right.$	$e^{-\frac{\pi}{b^2}\left(u^2+v^2\right)}$
$f(r)\ g(s)$	$F(u)\ G(v)$

On a la propriété utile :

$$\overline{\mathcal{F}}_{[f(r,s)]}(u,v) = \mathcal{F}_{[f(r,s)]}(-u,-v)$$



Les trois premiers zéros de $J_1(\theta)$ sont :
$\theta = 3,83$
$\theta = 7,02$
$\theta = 10,2$

Produit de convolution

Définition :

$$f * g(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(r-t)\,dt$$

Transformée de Fourier du produit de convolution (pour deux fonctions f et g de la même variable) :

Fonction	Transformée de Fourier
f	F
g	G
$f * g$	$F\,G$
$f\,g$	$F * G$

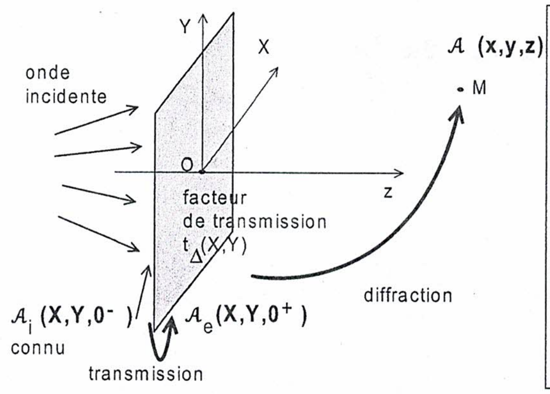
Propriétés de δ

Par définition : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-r_0)\, f(r)\, dr = f(r_0)$

et on a :

$$f(r) * \delta(r-r_0) = f(r-r_0)$$

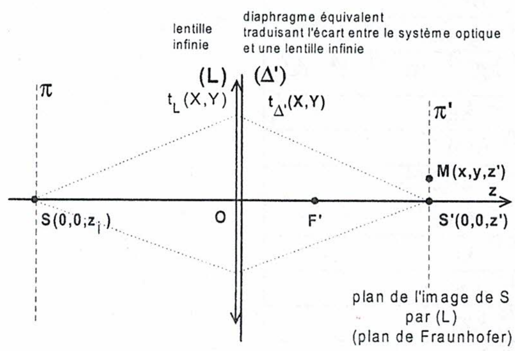
Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer



Formule de Fresnel

$$\mathcal{A}(x,y,z) = \frac{i}{\lambda z} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} r_0 \times \mathcal{F}_{[\mathcal{A}_e(X,Y,0)\exp -i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{X^2+Y^2}{2z}]}\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)$$

avec $r_0 = z + \frac{x^2+y^2}{2z}$
et $\mathcal{A}_e(X,Y,0) = \mathcal{A}_i(X,Y,0)\; t_\Delta(X,Y)$.
$t_\Delta(X,Y)$ représente le facteur de transmission de l'ensemble du plan $z=0$.



Formule de Fraunhofer
(cas particulier de la formule de Fresnel)

Pour une source $S(0,0,z_i)$ sur l'axe et z' vérifiant $-\frac{1}{z_i} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}$.

$$\mathcal{A}(x,y,z') = \frac{i}{\lambda z'} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda} r_0 \times \mathcal{A}_i(O)\; \mathcal{F}_{[t_{\Delta'}(X,Y)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

$$\text{noté} \quad \mathcal{C}(x,y)\; \mathcal{A}_i(O)\; \mathcal{F}_{[t_{\Delta'}(X,Y)]}\left(\frac{x}{\lambda z'}, \frac{y}{\lambda z'}\right)$$

avec $r_0 = z' + \frac{x^2+y^2}{2z'}$.
Cette expression est valable uniquement pour $M(x,y,z')$ situé dans le plan de Fraunhofer (plan d'équation $z=z'$ image par (L) du plan de la source de lumière).
$t_{\Delta'}(X,Y)$ est le facteur de transmission du diaphragme accolé à la lentille dans le plan $z=0$ (ne pas le confondre avec le facteur de transmission de l'ensemble du plan $z=0$).

Formules trigonométriques

Formules d'addition. Pour tout couple (a,b) de nombres réels,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Pour tout couple (p,q) de nombres réels,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

Pour tout nombre réel a,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Constantes physiques

c_0	Vitesse de la lumière dans le vide	$2.997925\ 10^{8}$ m· s^{-1}
μ_0	Perméabilité magnétique du vide $4\ \pi\ 10^{-7}$	$1.2566\ 10^{-6}$ kg· m · s^{-2}·A^{-2}
ϵ_0	Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$	$8.854\ 10^{-12}$ kg^{-1}· m $^{-3}$· s^{4}· A^{2}
u	Unité de masse atomique	$1.66053\ 10^{-27}$ kg
N	Nombre d'Avogadro	$6.02252\ 10^{23}$ mol^{-1}
k	Constante de Boltzmann	$1.38054\ 10^{-23}$ J·K^{-1}
R	Constante des gaz parfaits R = k N	8.3143 J·K^{-1}· mol^{-1}
e	Charge élémentaire	$1.60210\ 10^{-19}$ C
h	Constante de Planck	$6.6262\ 10^{-34}$ J·s
m_e	Masse au repos de l'électron	$9.1091\ 10^{-31}$ kg
m_p	Masse au repos du proton	$1.6726\ 10^{-27}$ kg

Milieux anisotropes

Résumé

Les propriétés microscopiques du matériau imposent la relation $\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} {n_X}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {n_Y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {n_Z}^2 \end{pmatrix} \vec{E}$ valable dans le référentiel des axes principaux. Pour une onde plane se propageant dans la direction $\vec{u}$, les équations de Maxwell impliquent :

$$\vec{B} \;=\; \mu_0 \frac{c_0}{n} \vec{u} \wedge \vec{D}$$

Il existe seulement deux solutions à ces équations, associées aux indices n' et n'' et de vecteurs déplacements $\vec{D'}$ et $\vec{D''}$. Les vecteurs unitaires $\vec{d'}$ et $\vec{d''}$ correspondants sont selon les axes de l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ obtenue par l'intersection du plan perpendiculaire à $\vec{u}$ et de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{Z^2}{n_Z^2} \;=\; 1$$

appelé 'ellipsoïde des indices'. Les demi-longueurs des axes de l'ellipse $\Pi_u \cap (\mathcal{E}_i)$ donnent les valeurs des indices n' et n''.
Les vecteurs unitaires $\vec{d'}$ et $\vec{d''}$ sont les directions de polarisation des ondes pouvant se propager dans le milieu respectivement avec les vitesses de phase $\frac{c_0}{n'}$ et $\frac{c_0}{n''}$.

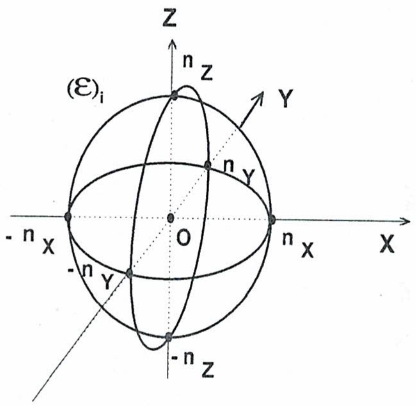


Figure 1
Ellipsoïde des indices

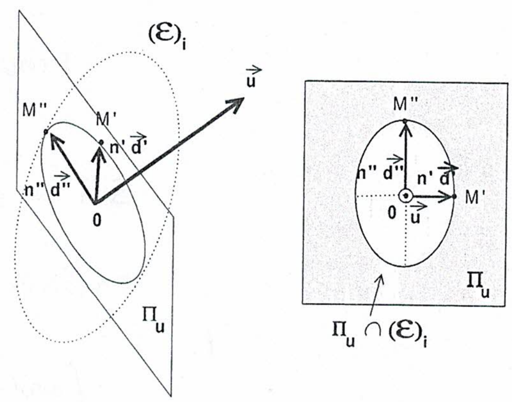


Figure 2
Intersection de l'ellipsoïde des indices et du plan passant par O perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{u}$.
Cette intersection forme une ellipse d'axes $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$.
$\overrightarrow{OM'} = n'\vec{d'}$ et $\overrightarrow{OM''} = n''\vec{d''} \in (\mathcal{E}_i)$
donc leurs coordonnées vérifient l'équation de $(\mathcal{E}_i)$
ce qui donne les valeurs de n' et n''.

Les directions des rayons lumineux sont celles du vecteur de Poynting $\vec{p} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ écrit pour les deux ondes solutions des équations de propagation.

Pour un milieu uniaxe (deux des trois indices n_X, n_Y, n_Z sont égaux entre eux, le troisième déterminant la direction de l'axe optique) :

onde ordinaire, $\vec{d'} \perp$ plan ($\vec{u}$, axe optique) ; le rayon lumineux est colinéaire à $\vec{u}$.

onde extraordinaire, $\vec{d''} //$ plan ($\vec{u}$, axe optique) et $\vec{d''} \perp \vec{u}$; le rayon lumineux est en général non colinéaire à $\vec{u}$.

Fonctions vectorielles

en coordonnées cartésiennes :

Gradient

$$\vec{\text{grad}}\, f = \vec{e_x}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e_y}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e_z}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \vec{\nabla}\, f$$

Divergence

$$\text{div}\, \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Rotationnel

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\, \vec{e_x} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\, \vec{e_y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\, \vec{e_z} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Laplacien scalaire

$$\Delta\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel

$$\vec{\Delta}\, \vec{A} = \Delta\, A_x\ \vec{e_x} + \Delta\, A_y\ \vec{e_y} + \Delta\, A_z\ \vec{e_z}$$

Propriétés diverses

$$\vec{\Delta}\, \vec{A} = \vec{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{A} - \vec{\text{rot}}\, \vec{\text{rot}}\, \vec{A}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$$

$$\int \exp(-\alpha\, r^2)\, dr = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int f(r)\, dr = \mathcal{F}_{[f(r)]}(0)$$

$$\int ||f(r)||^2\, dr = \int ||\mathcal{F}_{[f(r)]}(u)||^2\, du \quad \text{(Formule de Parseval)}$$