

## Lois associées aux corps noirs

Un *corps noir* est un système thermodynamique idéalisé de température définie et absorbant totalement la lumière dans toutes les longueurs d'onde.

Dans ce document nous allons déterminer à partir de la physique statistique les différentes lois associées à l'émission de photons par un tel corps.

### I. Le photon : une particule bosonique

Un *boson* est une particule de spin entier. Le photon est un boson car il est de spin nul.

Étant une particule bosonique, le photon est soumis à la statistique de Bose-Einstein au travers de la distribution suivante :

$$f_{BE}(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

Pour les bosons, le potentiel chimique est donc nécessairement inférieur à l'énergie de l'état fondamental.

De plus, le potentiel chimique associé à un photon est nul donc l'expression de la distribution se simplifie légèrement.

Remarque : On rappelle que la distribution caractérise le nombre moyen de particules dans l'état individuel d'énergie  $\varepsilon$ .

Enfin, la relation de Planck-Einstein établie le lien :  $\varepsilon = h\nu$ .

### II. Densité d'état dans une boîte cubique de volume V

On considère une boîte cubique de volume  $V = L^3$  remplie de photons.

De plus, on utilise des conditions aux limites périodiques, donc la quantification amène :

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n, n \in \mathbb{Z}^*.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$g(\vec{k})d^3\vec{k} = \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \times 2$$

Le facteur deux trouvant son origine dans la polarisation du photon (ou hélicité) : circulaire droite et gauche.

#### 1) Densité d'états en fréquence

Pour établir son expression, on utilise les relations suivantes :

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} \text{ et } g(\vec{k})d^3\vec{k} = g(\nu)d\nu$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3} \times 2 &= g(\nu)d\nu \\ \Leftrightarrow \frac{V}{\pi^2} \times k^2 dk &= \frac{V}{\pi^2} \times \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \times \frac{2\pi d\nu}{c} = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu = g(\nu)d\nu \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$g(\nu) = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} \quad (\text{II . 11})$$

## 2) Densité d'états en pulsation

On établit cette relation à partir des relations suivantes :

$$\omega = kc \text{ et } g(\vec{k})d^3\vec{k} = g(\omega)d\omega$$

$$\frac{V}{\pi^2} \times k^2 \times dk = \frac{V}{\pi^2} \times \frac{\omega^2}{c^2} \times \frac{d\omega}{c} = g(\omega)d\omega$$

On obtient finalement :

$$g(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (\text{II . 21})$$

## 3) Densité d'états en longueur d'onde

On établit cette relation à partir des relations suivantes :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } g(\vec{k})d^3\vec{k} = g(\lambda)d\lambda$$

Ainsi, à partir de la première relation, on a :

$$dk = 2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$$\frac{V}{\pi^2} \times k^2 \times dk = \frac{V}{\pi^2} \times \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \times 2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} = g(\lambda)d\lambda$$

On obtient finalement :

$$g(\lambda) = \frac{8V\pi}{\lambda^4} \quad (\text{II . 31})$$

## III. Loi de Planck

Cette loi a été par Max Planck en 1900.

Cette loi donne la densité volumique d'énergie en fonction de la fréquence, de la longueur d'onde ou de la pulsation.

## 1) Expressions associées à la loi de Planck

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{1}{V} \times h\nu \times g(\nu) \times f_{BE}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \times \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{1}{V} \times \hbar\omega \times g(\omega) \times f_{BE}(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \times \frac{1}{e^{\beta \hbar\omega} - 1}$$

La forme la plus connue de cette loi est sous dépendance en la longueur d'onde :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{hc}{\lambda} \times \frac{1}{V} \times g(\lambda) \times f_{BE}(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1} \quad (\text{III . 11})$$

## 2) Limites à basse et haute fréquences

On considère l'expression  $u_\nu(\nu, T)$  dans l'approximation où  $h\nu \ll k_B T$ .

Dans ce cas, en prenant le développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle présente au dénominateur de l'expression de  $u_\nu(\nu, T)$ , on trouve :

$$\text{À basses fréquences, } u_\nu \approx \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\beta h\nu} = \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3}$$

Il s'agit de la loi de Rayleigh-Jeans.

Cette relation prévoit une explosion de  $u_\nu(\nu, T)$  pour de hautes fréquences. Cette divergence est connue sous le nom de *catastrophe ultraviolette*.

On considère maintenant l'expression de  $u_\nu(\nu, T)$  dans l'approximation où  $h\nu \gg k_B T$ .

Dans ce cas, on a :

$$u_\nu(\nu, T) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \times e^{-\beta h\nu}$$

Cette loi est connue sous nom de loi de Wien.

## IV. Loi du déplacement de Wien

On effectue le changement de variables  $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$  dans l'expression de  $u_\lambda(\lambda, T)$ . Ainsi,

$$u_\lambda(x, T) = \frac{8\pi k_B^5 T^5}{(hc)^4} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

On démontre la loi du déplacement de Wien en maximisant cette expression.

$$\frac{\partial u_\lambda(x, T)}{\partial x} = 5(e^x - 1) - xe^x = 0$$

Une résolution graphique en traçant  $x \mapsto 5(e^x - 1)$  et  $x \mapsto xe^x$  et en cherchant l'intersection des courbes représentatives de ces fonctions permet de trouver :

$$x_{max} = 4,965 \Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda_{max} k_B T} = 4,965 \Leftrightarrow \lambda_{max} T = \frac{hc}{4,965 \times k_B} = 2898 \mu\text{m.K}$$

Elle est trouvée expérimentalement en 1893 par Wien. Dans le cas du soleil,  $T_{surface} = 5600$  K donne une longueur d'onde maximale :  $\lambda_{max} = 0,52 \mu\text{m.K}$ . Pour une température corporelle, on trouve une longueur d'onde maximale d'absorption dans l'infrarouge.

## V. Loi de Stefan-Boltzmann

L'énergie interne spectrale totale est donné par :

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi (k_B T)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \text{ où } x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

Sachant que

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

On obtient finalement la loi de Stefan-Boltzmann :

$$u = \sigma_B T^4 \text{ où } \sigma_B = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{(hc)^3} = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J.m}^{-3}\text{K}^{-4}$$

Cette loi a été établie expérimentalement en 1879 par Stefan et interprétée en 1884 par Boltzmann.

## VI. Retour sur la définition du corps noir

On peut classer les corps en plusieurs catégories, en fonction de leurs propriétés vis à vis du rayonnement thermique :

- Un *corps noir* est un corps capable d'absorber intégralement tout rayonnement incident, quelle que soit sa fréquence  $\nu$ . Le *facteur d'absorption* ou *émissivité* d'un corps noir est donc  $a_\nu = 1$ . Ce sont des corps qui obéissent aux lois issues du modèle de Planck (rayonnement d'équilibre). On considère le rayonnement à l'intérieur d'une cavité dont les parois sont maintenus à une température  $T$ . Il s'établit un équilibre thermique entre les parois et le rayonnement électromagnétique à l'intérieur de l'enceinte
- Un *corps gris* est un corps dont le facteur d'absorption  $a_\nu$  est inférieur à un et ne varie pas avec la température
- Un *corps coloré* est un corps dont la couleur à température ambiante n'est ni noire, ni grise. Pour de tels corps, l'absorption est sélective et  $a_\nu$  varie avec la fréquence  
S'ils portent ces noms (noirs, gris, colorés), c'est que cela correspond à leur "couleur" en lumière naturelle, à température ambiante.

La réalisation pratique d'un corps noir est en toute rigueur impossible. De manière approchée, on peut réaliser un corps noir par une petite ouverture à la surface d'une enceinte dont les parois intérieures absorbent le rayonnement puisque tout rayonnement qui pénètre dans l'enceinte subira plusieurs réflexions au cours desquelles il sera partiellement absorbé. Après un certain nombre de réflexions, tout le rayonnement sera absorbé. L'ouverture peut donc être vue comme un corps noir.

## VII. Température d'équilibre de la Terre

### 1) Modèle sans atmosphère

En première approximation, la température de surface de la Terre résulte d'un équilibre entre l'énergie rayonnante qu'elle reçoit de la part du Soleil et ce qu'elle même rayonne.

Par ailleurs, la Terre réfléchit une partie de l'énergie reçue par le Soleil. La fraction réfléchie s'appelle l'*albedo* et est notée  $A$ .

La puissance totale rayonnée par le Soleil est donnée par la loi de Stefan :

$$\mathcal{P}_s = \sigma T_s^4 4\pi R_s^2 = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W en prenant } R_s = 7,0 \cdot 10^5 \text{ km et } T_s = 5,8 \cdot 10^3 \text{ K.}$$

La puissance émise par le Soleil l'est dans toutes les directions. La puissance émise par le Soleil se conserve sur des sphères. Ainsi, la Terre reçoit la puissance surfacique :

$$\mathcal{P}_{surf} = \frac{\mathcal{P}_s}{4\pi d_{TS}^2} \text{ où } d_{TS} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m est la distance Terre-Soleil.}$$

En supposant que les rayons solaires arrivent parallèles entre eux au niveau de la Terre (ce qui est légitime puisque la distance Terre-Soleil est grande devant les autres distances mises en jeu). Ainsi, la Terre reçoit la même puissance que reçoit un disque de rayon  $R_T$  (rayon terrestre) placé perpendiculairement à l'axe Terre-Soleil. Ainsi la puissance reçue par la Terre est donnée par :

$$\mathcal{P} = \pi R_T^2 \times \mathcal{P}_{surf} = \pi R_T^2 \times \frac{\sigma T_s^4 4\pi R_s^2}{4\pi d_{TS}^2} = \pi \sigma T_s^4 \frac{R_T^2 R_s^2}{d_{TS}^2} = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

Cette valeur donne un flux de :

$$\Phi = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_T^2} = 3,5 \cdot 10^2 \text{ W.m}^{-2}$$

La Terre reçoit la fraction  $(1-A)$  de la puissance  $\mathcal{P}$  et réemet la puissance  $\mathcal{P}_{emis} = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$  en considérant la Terre comme un corps noir dont la température de surface est  $T_0$ .

Ainsi, un bilan énergétique donne :

$$(1-A)\mathcal{P} = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$$

Finalement,

$$T_0 = (1-A)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R_s}{2d_{TS}}} T_s$$

L'albedo moyen de la Terre est de 0,31, on trouve donc une température  $T_0 = 255 \text{ K}$  soit  $-18^\circ \text{C}$ . Cette température est beaucoup trop faible, il faut donc revoir les hypothèses de notre modèle.

## 2) Modèle avec atmosphère

L'atmosphère de la Terre peut être assimilée à une couche sphérique de même centre que la Terre et d'épaisseur  $e \approx 30 \text{ km} \ll R_T$ . On prendra donc la même surface pour la Terre et pour l'atmosphère.

La longueur d'onde d'émission maximale du soleil est donnée par la loi de Wien et vaut :  $\lambda_m \approx 500 \text{ nm}$ .

La température de surface de la Terre étant de l'ordre de  $300 \text{ K}$ , la longueur d'onde d'émission maximale de celle-ci est de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ .

Ces deux longueurs d'onde sont très différentes, ce qui justifie :

- l'atmosphère laisse passer une grande partie du rayonnement solaire, nous supposons dans un premier temps qu'elle le transmet intégralement ;
- l'atmosphère absorbe complètement le rayonnement de la Terre (essentiellement dû à l'eau qui absorbe les rayonnements dans la gamme de longueurs d'onde rayonnées par la Terre)

On suppose par ailleurs que la température de la Terre,  $T_0$ , et celle de l'atmosphère,  $T_1$ , sont uniformes et que l'albedo  $A$  pour le rayonnement de l'ensemble {Terre+atmosphère} est le même que celui défini précédemment.

Les bilans énergétiques donnent :

- pour l'ensemble {Terre+atmosphère} :  $(1 - A)\mathcal{P} = \sigma T_1^4 4\pi R_T^2$  ;
- pour la Terre :  $(1 - A)\mathcal{P} + \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$

La première équation donne  $T_1 = 255$  K et  $T_0 = 2^{\frac{1}{4}} T_1 = 303$  K, soit  $30^\circ$  C.

Cette fois, cette température est trop élevée...

### 3) Amélioration du modèle

En fait, l'atmosphère n'est pas totalement transparente au rayonnement de solaire. Une partie du rayonnement ultraviolet est absorbé par l'ozone stratosphérique et une partie du rayonnement infrarouge l'est par l'eau.

On supposera alors que l'atmosphère absorbe la fraction  $\alpha$  du rayonnement solaire et donc que la Terre absorbe une fraction  $1 - \alpha$  de celui-ci. Pour l'application numérique, on prendra  $\alpha \approx 0,33$ .

Le bilan sur l'ensemble {Terre+atmosphère} n'est pas modifié mais celui appliqué uniquement sur la Terre l'est :

$$(1 - A)(1 - \alpha)\mathcal{P} + \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$$

Ceci donne une température  $T_0 = 290$  K, soit  $17^\circ$  C, ce qui est plus satisfaisant.

### 4) Autres améliorations possibles

On pourrait prendre en compte les phénomènes suivants :

- l'atmosphère n'est pas totalement opaque au rayonnement terrestre, en particulier dans l'intervalle  $[8\mu\text{m}, 16\mu\text{m}]$  ;
- la surface de la Terre ne fait pas qu'émettre du rayonnement, une partie de l'énergie reçue sert à l'évaporation des océans, laquelle est restituée lors de la condensation de la vapeur d'eau en altitude.

Le modèle simple utilisé permet de comprendre qualitativement ce qui se passe et donne un ordre de grandeur tout à fait correct de la température d'équilibre de la Terre.

La puissance émise par l'atmosphère en direction de la Terre s'ajoute au rayonnement solaire, ce qui augmente la valeur de la température d'équilibre de la Terre par rapport au cas où on la suppose sans atmosphère.