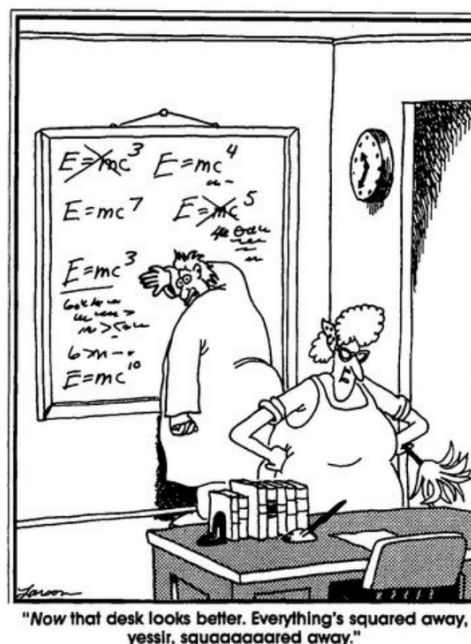
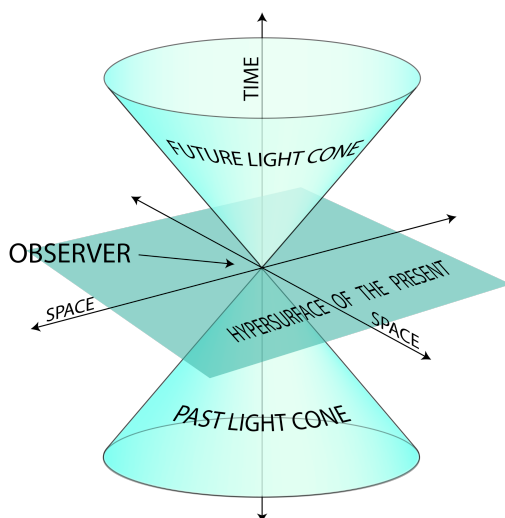


# NOTES de COURS de RELATIVITÉ RESTREINTE



## Bibliographie sommaire

Voici une courte liste de références bibliographiques (classées par ordre d'utilité décroissante pour le cours) :

- Introduction à la relativité par D. Langlois (Vuibert, 2011).
- Théorie des champs par L. Landau et E. Lifchitz. Volume 2 du cours de physique théorique (Mir, 1989). Noter que les unités des grandeurs électromagnétiques ne sont pas les unités internationales utilisées en cours.
- Classical electrodynamics par J. D. Jackson (John Wiley, 1975).

Je suis joignable par e-mail : [nicolas.pavloff@u-psud.fr](mailto:nicolas.pavloff@u-psud.fr)

Ce texte est disponible en ligne au format PDF à l'adresse :

[http://lptms.u-psud.fr/nicolas\\_pavloff/enseignement/](http://lptms.u-psud.fr/nicolas_pavloff/enseignement/)

version du 20 mars 2020



# Chapitre I : Principe de Relativité

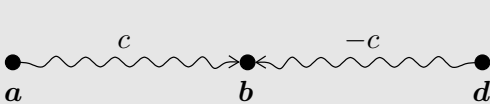
## I.1 Postulats d'Einstein

- Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels.
- La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs, quelle que soit la vitesse de la source émettrice.

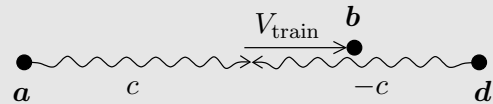
Nous allons dans un premier temps seulement utiliser le second postulat et l'isotropie et l'homogénéité de l'espace.

On peut remarquer par une simple expérience de pensée que la notion de simultanéité est remise en cause par le second postulat : imaginons deux points  $a$  et  $d$  fixes dans un train. Soit  $b$  le point milieu. Pour un observateur lié au train, deux photons, émis l'un depuis  $a$ , l'autre depuis  $d$  atteindront  $b$  au même instant. Pour un observateur immobile (disons, une vache qui regarde passer le train), si  $a$  est à l'arrière du train et  $d$  à l'avant, le photon émis depuis  $a$  arrivera en  $b$  un peu plus tard que celui émis depuis  $d$ , puisque  $b$  se rapproche du photon émis par  $d$  et s'éloigne de celui émis par  $a$ , et que, selon le second postulat, pour la vache, la vitesse de la lumière reste toujours  $c$ .

Le schéma ci-dessous illustre le phénomène d'une façon légèrement différente : pour la vache, les photons ne se rencontrent plus en  $b$ . En mécanique non-relativiste la vache verrait les photons se déplacer à des vitesses  $V_{\text{train}} + c$  et  $V_{\text{train}} - c$  et ils se rencontreraient en  $b$ , comme pour le passager du train.



Pour un passager du train.



Pour la vache (on a légèrement décalé le point  $b$  vers le haut pour améliorer la lisibilité du schéma).

On doit donc redéfinir la notion de simultanéité : deux événements sont simultanés dans un référentiel si des rayons lumineux issus de chacun sont détectés ensemble au point milieu<sup>1</sup>. De même, deux horloges immobiles l'une par rapport à l'autre sont synchronisées si elles indiquent la même heure lorsqu'elles sont atteintes par des rayons lumineux émis simultanément par un point situé à mi chemin entre elles.

## I.2 Transformation spéciale de Lorentz (“Lorentz boost”)

On considère deux référentiels :  $\mathcal{R} = \{O, x, y, z, t\}$  “immobile” et  $\mathcal{R}' = \{O', x', y', z', t'\}$  “en mouvement”.

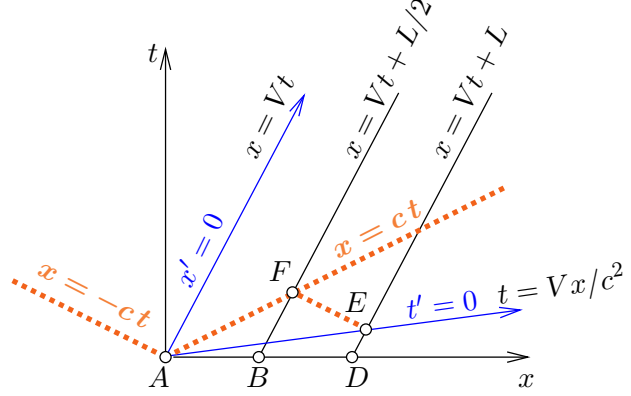
1. Milieu géométrique des deux parties spatiales.

On se place dans le cas où la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $V\vec{e}_x$ ,  $V$  est algébrique ( $V > 0$  sur le schéma ci-contre).

On choisit les repères spatiaux de sorte que les points origines et les 3 axes des deux repères soient confondus à l'instant  $t = 0 = t'$ . On utilise le “diagramme espace-temps”  $(x, t)$  dans  $\mathcal{R}$  et on montre que

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2), \quad (\text{I.1})$$

où  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$  est le “facteur de Lorentz”.



Le raisonnement qui permet d'arriver à (I.1) est le suivant. Soient 3 points  $a$ ,  $b$  et  $d$ , immobiles dans  $\mathcal{R}'$  ( $b$  est le milieu de  $ad$ ). Leurs “lignes d'univers” dans  $\mathcal{R}$  sont représentées ci-dessus (on note  $L$  l'espacement entre  $a$  et  $d$  dans  $\mathcal{R}$ ).  $A$  est l'évènement qui correspond à la position de  $a$  à  $t = t' = 0$ .  $B$  et  $F$  sont des évènements situés en  $b$ .  $D$  et  $E$  sont situés en  $d$ . Un rayon lumineux émis depuis  $A$  arrive en  $F$  en même temps qu'un rayon lumineux émis depuis  $E$  :  $A$  et  $E$  sont donc simultanés dans  $\mathcal{R}'$ . On détermine les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des évènements  $F$  puis  $E$  :  $t_F = \frac{1}{2}L/(c - V)$ ,  $x_F = ct_F$ ;  $t_E = LV/(c^2 - V^2)$ ,  $x_E = Lc^2/(c^2 - V^2)$ . On remarque que  $t_E = Vx_E/c^2$  : cela définit la droite  $t' = 0$ . Si l'on suppose que la relation entre  $(x', t')$  et  $(x, t)$  est linéaire on est fondé à écrire :

$$x' = f(V) \times (x - Vt), \quad t' = g(V) \times (t - Vx/c^2). \quad (\text{I.2})$$

La vitesse de la lumière étant la même dans les deux référentiels, il faut que lorsque  $x = ct$  on ait également  $x' = ct'$  ; cela impose  $f \equiv g$ .

On remarque ensuite<sup>2</sup> que  $f(-V) = f(V)$  : Supposons en effet qu'un troisième référentiel  $\mathcal{R}''$  se déplace à une vitesse  $-V\vec{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Si un évènement se produit dans  $\mathcal{R}$  à l'origine à l'instant  $t$ , il aura lieu dans  $\mathcal{R}'$  à la position  $x' = -f(V)Vt$  et dans  $\mathcal{R}''$  à la position  $x'' = f(-V)Vt$ . L'isotropie de l'espace impose que  $x'' = -x'$ , donc  $f(-V) = f(V)$ .

La transformation de  $\mathcal{R}'$  vers  $\mathcal{R}$ , qui s'obtient en faisant  $V \rightarrow -V$  dans (I.2), s'écrit alors :

$$x = f(V) \times (x' + Vt'), \quad t = f(V) \times (t' + Vx'/c^2). \quad (\text{I.3})$$

En reportant (I.2) dans (I.3) on se rend compte que  $[f(V)]^2(1 - V^2/c^2) = 1$ , ce qui achève de démontrer (I.1)<sup>3</sup>.

### I.2.a Conservation de l'intervalle

Soient deux évènements de coordonnées  $(t_1, \vec{r}_1)$  et  $(t_2, \vec{r}_2)$  dans  $\mathcal{R}$  (leurs coordonnées seront affublées d'une apostrophe dans  $\mathcal{R}'$ ). On définit l'intervalle entre ces deux évènements comme la quantité

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2. \quad (\text{I.4})$$

2. Adapté du cours de J. D. Cresser, Macquarie University

3. Il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix du signe de  $f(V) = +(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ , voyez vous pourquoi ?

$(\Delta s)^2$  peut être positif ou négatif. Il est clair que si  $\Delta s$  est nul alors les deux événements peuvent être reliés par la trajectoire d'un photon, et donc dans  $\mathcal{R}'$  on aura également  $\Delta s' = 0$ . Mais on a mieux :  $(\Delta s)^2$  est invariant par changement de référentiel, comme on peut le vérifier facilement pour la transformation spéciale de Lorentz.

### I.2.b Dilatation des durées

Pour l'observateur en mouvement (par exemple celui situé à l'origine dans  $\mathcal{R}'$  :  $x_{O'} = Vt_{O'} \Leftrightarrow x'_{O'} = 0$ ) le “temps propre” est  $t'_{O'} = t_{O'}/\gamma$  :  $t'_{O'} < t_{O'}$  le temps s'écoule plus lentement, on parle de dilatation des durées<sup>4</sup>. Cela se généralise au cas d'une trajectoire quelconque : on considère une succession de “référentiels comobiles à l'instant  $t$ ” et alors le temps propre est  $\tau = \int dt \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}$ .

### I.2.c Contraction des longueurs

Soit une règle horizontale immobile dans  $\mathcal{R}'$ . La longueur  $L = x_D - x_A$  de la règle mesurée dans  $\mathcal{R}$  sera mesurée dans  $\mathcal{R}'$  comme la distance entre  $A$  et  $E$  (simultanés dans  $\mathcal{R}'$ ). On a  $x_E = L\gamma^2$ ,  $t_E = Vx_E/c^2$  donc  $L' = x'_E - x'_A = \gamma L$ . On appelle  $L'$  la “longueur au repos” de la règle (c'est sa longueur dans le référentiel où elle est immobile).  $\gamma > 1$  et donc  $L < L'$  : la règle apparaît plus courte dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , c'est à dire pour un observateur par rapport auquel elle est en mouvement : c'est le phénomène de contraction des longueurs.

### I.2.d Lois de transformation

En réfléchissant un peu (cf. section I.6.a), il est facile de se convaincre que  $y' = y$  et  $z' = z$ . On note<sup>5</sup>  $\underline{X} = (X^0 = ct, X^1 = x, X^2 = y, X^3 = z)$  et alors

$$\underline{X}' = (\Lambda) \underline{X}, \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \beta = V/c. \quad (\text{I.5})$$

### I.2.e Composition des vitesses

En différenciant (I.5) on obtient facilement

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}. \quad (\text{I.6})$$

Il est plus naturel de raisonner en exprimant  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{v}'$  ; pour inverser les relations (I.6) il suffit de changer le signe de  $V$ . On obtient ensuite : si  $v'_x = c$  ( $v'_y = v'_z = 0$ ) alors  $v_x = c$ . Si  $v'_y = c$  ( $v'_x = v'_z = 0$ ) alors  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$ . Si  $v'_x = 0.9c$  ( $v'_y = v'_z = 0$ ) et  $V = 0.9c$ , alors  $v_x = \frac{1.8}{1.81}c < c$  : en composant des vitesses proches de celle de la lumière, on ne dépasse jamais  $c$ . On va se cantonner aux vitesses sub-luminales<sup>6</sup>.

4. La relation est bien-sûr symétrique : si l'on considère l'observateur immobile à l'origine dans  $\mathcal{R}$  ( $x_O = 0$ ), on trouve  $x'_O = -Vt'_O$  et  $t_O = t'_{O'}/\gamma$ .

5. On note également  $\underline{X} = (ct, \vec{r}) = (X^0, \vec{X})$ .

6. L'existence de particules aux vitesses supralumineuses (des “tachyons”) a été suggérée dans plusieurs contextes théoriques, sans induire de conséquences enthousiasmantes.

### I.3 Différents types d'intervalle. Causalité. Cône de lumière

On se place du point de vue de l'observateur situé à l'origine des coordonnées. Soit un évènement  $\underline{P} = (ct, \vec{r})$  tel que  $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2 > 0$  : on dit que l'intervalle entre l'origine  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}$  est de “genre temps”. On peut trouver un référentiel dans lequel  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}$  ont la même position : il suffit de considérer la transformation de Lorentz avec  $\vec{V} = \vec{r}/t$  (à 1+1 dimension  $V = x/t$ ). Mais par contre, si  $t > 0$ ,  $\underline{P}$  sera toujours dans le futur de  $\underline{Q}$ . En effet on a<sup>7</sup> (en prenant  $\vec{r} = x\vec{e}_x$ , avec  $x > 0$ ) :

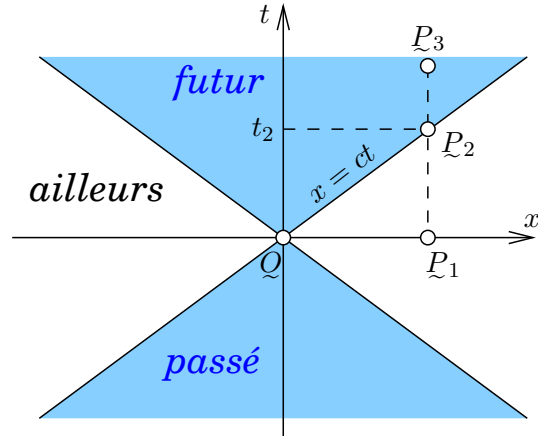
$$ct > x > xV/c \quad (\forall V < c) \quad \text{donc} \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2) > 0. \quad (\text{I.7})$$

Pour les intervalles de “genre espace” ( $s^2 < 0$ ) la situation est renversée : on peut trouver des référentiels dans lesquels  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}$  sont simultanés (en prenant  $V = c^2t/x$ ). On peut même changer l'ordre chronologique entre  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}$ , mais cela ne viole pas la causalité car ces 2 évènements ne peuvent pas être reliés par un signal se propageant à une vitesse sub-luminale<sup>8</sup>.

Revenons sur la chronologie entre deux évènements : on dira que  $\underline{Q}$  précède  $\underline{P}$  si  $t > 0$  et si  $s^2 > 0$  (cette dernière condition est absente en physique non relativiste).

Ci-contre : représentation (en 1+1 dimension) du “cône de lumière” dans un diagramme espace-temps (également appelé diagramme de Minkowski).  $\underline{P}_1$  est simultané dans  $\mathcal{R}$  avec l'origine : par exemple  $x_1 = 150 \times 10^6$  km = distance Terre-Soleil. L'intervalle entre  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}_2$  ( $x_2 = x_1$  et  $t_2 = 8$  mn) est du “genre lumière”.  $\underline{P}_3$  est dans le futur de  $\underline{Q}$  : il peut y avoir un lien de causalité entre  $\underline{Q}$  et  $\underline{P}_3$ .

Le futur et le passé sont à l'intérieur du cône de lumière, cf. illustration en 2+1 dimensions sur la page de couverture.



### I.4 Formalisme (überflüssige Gelehrsamkeit ?)

#### I.4.a Groupe de Lorentz

Soit la matrice métrique  $(g) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . On note  $\underline{X} \cdot \underline{Y} \equiv {}^t\underline{X}(g)\underline{Y}$  (l'indice  $t$  note la transposition). Ainsi  $\underline{X}^2 = s^2$ . Le groupe des transformations qui conservent l'intervalle (et donc le pseudo produit scalaire) correspond à l'ensemble des matrice  $4 \times 4$  qui vérifient

$${}^t(\Lambda)(g)(\Lambda) = (g). \quad (\text{I.8})$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un groupe (non commutatif) : le groupe de Lorentz  $O(3,1)$ . De (I.8) on tire que  $\det \Lambda = \pm 1$ . De là il vient que l'élément de volume de l'hyper-espace  $d^4X =$

7. La démonstration qui suit est faite pour une transformation spéciale de Lorentz, mais elle se généralise à toutes les transformations entre deux référentiels inertiels.

8. Une remarque simple mais essentielle : la notion de “genre” est indépendante du référentiel dans lequel on travaille puisque la pseudo-norme est invariante par changement de référentiel inertiel.

$dX^0 dX^1 dX^2 dX^3$  est invariant par transformation de Lorentz (on dit que c'est un "invariant de Lorentz"), puisque  $d^4 X' = |\det \Lambda| d^4 X$ . Les transformations de Lorentz conservent donc l'hyper-volume.

En pratique on ne considère que le "groupe de Lorentz restreint" qui conserve l'orientation de l'espace et la direction du temps<sup>9</sup>, mais cette remarque n'a pas d'incidence dans la suite du cours.

#### I.4.b Notion de quadri-vecteur

Un quadri-vecteur est un vecteur à 4 composantes qui se transforme selon la loi générique (I.5) lors d'un changement de référentiel. Les événements  $\underline{X} = (ct, \vec{r})$  sont bien-sûr des quadri-vecteurs.

• On définit également la quadri-vitesse et la quadri-impulsion d'une particule de masse  $m$  qui a une trajectoire  $\vec{r} = \vec{\xi}(t)$  dans  $\mathcal{R} : \underline{\xi}(t) = (ct, \vec{\xi}(t))$  et

$$\underline{U} = \frac{d\underline{\xi}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} (c, \vec{v}(t)) , \quad \text{où } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{\xi}}{dt} . \quad \text{On a } \underline{U}^2 = c^2 . \quad (\text{I.9})$$

La quadri-impulsion est

$$\underline{P} = m \underline{U} . \quad \text{On a } \underline{P}^2 = m^2 c^2 . \quad (\text{I.10})$$

• Pour une particule de trajectoire  $\vec{r} = \vec{\xi}(t)$  et de charge  $q$  on peut définir la distribution de charge  $\rho(\vec{r}, t)$  et la densité de courant  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  :

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) , \quad \text{et} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = q \frac{d\vec{\xi}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) . \quad (\text{I.11})$$

L'objet

$$\underline{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = (c\rho(\vec{r}, t), \vec{J}(\vec{r}, t)) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \rho(\vec{r}, t) \frac{d\underline{X}}{dt} \quad (\text{I.12})$$

est un champ quadri-vectoriel : le quadri-courant.

Cela résulte de la conservation de la charge électrique : la charge élémentaire  $d^3 q = \rho(\vec{r}, t) d^3 v$  contenue à l'instant  $t$  dans l'élément de volume  $d^3 v$  situé autour de  $\vec{r}$  doit être un invariant de Lorentz. Il en découle que  $d^3 q d\underline{X}$  est un quadri-vecteur. Comme ce quadri-vecteur peut être mis sous la forme  $\rho d^3 v d\underline{X} = \frac{1}{c} d^4 X \rho d\underline{X}/dt$  et que  $d^4 X$  est un invariant de Lorentz (cf. section I.4.a),  $\underline{\mathcal{J}} = \rho d\underline{X}/dt$  est bien un quadri-vecteur.

• Pour une onde plane (pas nécessairement lumineuse) de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , l'objet  $\underline{K} = (\omega/c, \vec{k})$  est un quadri-vecteur<sup>10</sup> : le quadri-vecteur d'onde. Remarquer que pour une onde lumineuse,  $\underline{K}$  est de type lumière :  $\underline{K}^2 = 0$ <sup>11</sup>.

9. Le sous ensemble de  $O(3, 1)$  formé par les matrices de déterminant +1 (qui conservent donc l'orientation de l'espace) est également un groupe appelé  $SO(3, 1)$ , sous-groupe "propre" de Lorentz.

On peut remarquer que  $|\Lambda_{0,0}| > 1$  car la composante 0, 0 de (I.8) sécrit  $\Lambda_{0,0}^2 - \sum_{i=1,3} (\Lambda_{i,0})^2 = 1$ . Si  $\Lambda_{0,0} > 1$  on dit que la transformation est orthochrone (elle conserve le sens de l'écoulement temps). L'ensemble  $O^+(3, 1)$  [ou  $O_o(3, 1)$ ] des transformations orthochrones est un sous-groupe de  $O(3, 1)$ . Enfin l'ensemble  $SO^+(3, 1)$  des transformations orthochrones et propres est le groupe de Lorentz restreint. C'est le groupe engendré par les transformation boosts de Lorentz et les rotations d'espace.

10. Cette propriété découle du fait que la phase de l'onde qui se met sous la forme  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \underline{K} \cdot \underline{X}$  doit être un invariant de Lorentz (puisque deux maxima consécutifs sont séparés par une phase de  $2\pi$  dans tous les référentiels). Elle est démontrée d'une manière moins concise au TD2.

11. Noter au passage que la relation de dispersion des ondes lumineuses est invariante de Lorentz.

### I.4.c Notations covariantes

On définit  $X_0 = X^0$ ,  $X_1 = -X^1$ ,  $X_2 = -X^2$ ,  $X_3 = -X^3$ .  $X_\mu = (X_0, -\vec{X})$  est la forme covariante du quadri-vecteur,  $X^\mu = (X^0, \vec{X})$  sa forme contra-variante. On écrit  $\underline{X}^2 = X^\mu X_\mu$ , c'est la convention d'Einstein : sommation sur les indices répétés situés à des altitudes différentes. La relation (I.5) s'écrit donc

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu . \quad (\text{I.13})$$

On a également  $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$  et  $X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu$  où la matrice  $(g)$  est définie en I.4.a. Notons au passage que la relation  $(g)(g) = \mathbb{1}_4$  s'écrit  $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$ , où  $\delta_\mu^\alpha$  est un symbole de Kronecker (égal à 1 si  $\alpha = \mu$ , 0 sinon). Attention, avec nos conventions de notation  $\delta^\alpha_\alpha = \text{tr}(\mathbb{1}_4) = 4$ .

Il est démontré en section I.6.c que la forme covariante d'un quadri-vecteur se transforme comme  $X'_\mu = \Lambda_\mu^\nu X_\nu$ , où  $\Lambda_\mu^\nu$  est défini par (I.17).

### I.5 Effet Doppler

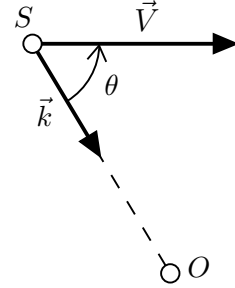
On considère une source lumineuse  $S$  se déplaçant à vitesse constante  $\vec{V}$  par rapport à l'observateur  $O$ . La géométrie la plus générale est représentée sur la figure ci-contre ( $\vec{V} = V \vec{e}_x$ ). On affuble d'un indice 0 toutes les quantités évaluées dans le référentiel propre  $\mathcal{R}_0$  de la source. La transformation (I.5) appliquée au quadri-vecteur d'onde  $\underline{K}$  donne  $\omega_0 = \gamma(\omega - V k_x)$  et  $k_x = k \cos \theta$  avec  $k = \omega/c$  (source lumineuse :  $\underline{K}^2 = 0$ ). D'où

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} , \quad \text{avec} \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \beta = V/c . \quad (\text{I.14})$$

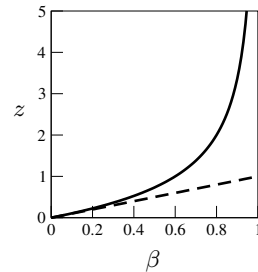
La version non relativiste de ce résultat est obtenue en remplaçant dans (I.14)  $\gamma$  par 1, mais en gardant  $\beta = V/c \neq 0$  (cf. section I.6.b).

Considérons 3 cas particuliers :

- $\theta = 0$ .  $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega_0$  : blue shift. Le résultat non relativiste est  $\omega = \omega_0/(1 - \beta)$ .
- $\theta = \pi$ .  $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega_0$  : red shift<sup>12</sup>. Le résultat non relativiste est  $\omega = \omega_0/(1 + \beta)$ .
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ .  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  : red shift. Le résultat non relativiste est  $\omega = \omega_0$ .



12. En astrophysique on appelle "red shift" (décalage vers le rouge) la quantité  $z = (\omega_0 - \omega)/\omega$  calculée pour  $\theta = \pi$ . Dans le cadre de l'expansion de l'univers, elle traduit la vitesse d'éloignement d'une source, et permet donc de remonter à sa distance si l'on connaît la constante de Hubble. Le décalage est une quantité intéressante car il n'est pas particulier à un type d'atome, ni à un type de raie (il est le même sur l'ensemble du spectre). Le résultat classique est  $z_{\text{class}} = \beta$ , il est représenté par une ligne discontinue sur le graphe ci-contre. On a mesuré des décalages allant jusqu'à  $z \sim 6$  ou 7 (galaxies lointaines et/ou quasars).



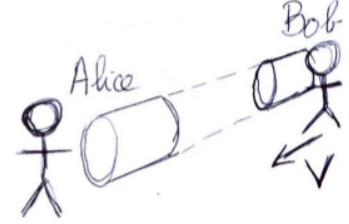


## I.6 Annexe

### I.6.a Absence de contraction des longueurs transverses

Adapté du cours de D. W. Hogg, Princeton.

Il est facile de démontrer que la contraction des longueurs n'est pas de mise dans la direction perpendiculaire au mouvement. Imaginons qu'Alice et Bob transportent des tuyaux identiques, alignés avec la direction de leur mouvement relatif (cf. figure).



Supposons que la vitesse relative diminue le diamètre du tuyau de Bob dans le référentiel d'Alice. Dans ce cas, le tuyau de Bob rentre dans celui d'Alice. Mais Alice et Bob sont interchangeables, donc le tuyau d'Alice rentre dans celui de Bob. Ces deux résultats sont incompatibles : il n'y a donc pas de changement des longueurs dans les directions perpendiculaires au mouvement relatif.

### I.6.b Une autre dérivation de l'effet Doppler

On travaille dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de l'observateur. Soit  $t_e$  l'instant d'émission par la source d'un signal lumineux qui sera reçu à l'instant  $t_r$  par l'observateur. On a  $t_r = t_e + r/c$  où  $\vec{r} = \overrightarrow{OS}$ . Si deux signaux successifs sont émis avec un intervalle de temps  $dt_e$ , ils sont réceptionnés avec un intervalle  $dt_r$  dont l'expression est obtenue en différentiant :

$$dt_r = dt_e + dr/c, \quad \text{où} \quad dr = d\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r}, \quad \text{avec} \quad d\vec{r} = \vec{V} dt_e.$$

L'angle entre  $\vec{r}/r$  et  $\vec{V}$  est  $\pi - \theta$  (cf. figure section I.5), on obtient donc  $dt_r = dt_e(1 - \beta \cos \theta)$ . Avec la dilatation des durées on a bien sûr  $dt_e = \gamma dt_e^0$ , où  $dt_e^0$  est l'intervalle de temps entre les deux émissions dans le référentiel propre de la source<sup>13</sup>. On doit donc avoir, pour les périodes temporelles, la relation

$$T = \gamma T^0(1 - \beta \cos \theta),$$

où  $T$  est la période mesurée par l'observateur, et  $T^0$  la période propre du signal<sup>14</sup>. Cette formule est équivalente à (I.14). On voit bien ici que dans la description classique du phénomène, le facteur  $\gamma$  doit être remplacé par 1.

### I.6.c Transformation de Lorentz pour les quadri-vecteurs covariants

Il est facile de se convaincre sur l'exemple du boost de Lorentz que si l'on connaît la loi de transformation de Lorentz (I.5) pour les quadri-vecteurs contravariants, on obtient celle pour les

13. Pour retrouver cette expression, écrivez l'égalité de l'intervalle  $ds$  entre les deux événements d'émission dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}^0$ .

14. Pour pouvoir, comme on vient de le faire, appliquer la relation différentielle à la transformation des périodes, on a fait l'hypothèse implicite que, dans  $\mathcal{R}$ , le déplacement de la source pendant  $T$  est petit devant  $r = OS$ , ce qui est toujours légitime (essayez de trouver une situation dans laquelle cette hypothèse est violée).

quadri-vecteurs covariants en mettant des signes “−” aux endroits appropriés :

$$\begin{pmatrix} X'_0 = ct' \\ X'_1 = -x' \\ X'_2 = -y' \\ X'_3 = -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 = ct \\ X_1 = -x \\ X_2 = -y \\ X_3 = -z \end{pmatrix}. \quad (\text{I.15})$$

• On peut obtenir la loi de transformation pour un changement de référentiel quelconque comme suit : On écrit pour l’instant de manière formelle

$$X'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta X_\beta. \quad (\text{I.16})$$

On a juste écrit une loi de transformation linéaire en respectant les conventions d’Einstein, sans savoir *a priori* ce qu’est la quantité  $\Lambda_\alpha^\beta$  (mais ne soyons pas naïf : elle est certainement reliée à  $\Lambda^\mu_\nu$ ). On écrit  $X'_\alpha = g_{\alpha\mu} X'^\mu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\nu X^\nu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\nu g^{\nu\beta} X_\beta$ . En comparant avec (I.16) il vient

$$\Lambda_\alpha^\beta = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\nu g^{\nu\beta}. \quad (\text{I.17})$$

• Le lecteur attentif aura remarqué que la matrice impliquée dans la transformation (I.15) correspond à l’inverse de la matrice de (I.5). Ce n’est pas un hasard, et c’est relié à la conservation de la pseudo-norme.

En effet on doit avoir  $X'^\alpha X'_\alpha = X^\mu X_\mu$ . Or, d’après (I.13) et (I.16) on a  $X'^\alpha X'_\alpha = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda_\alpha^\nu X^\mu X_\nu$ . En comparant les deux expressions précédentes il vient

$$\Lambda^\alpha_\mu \Lambda_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (\text{I.18})$$

Donc, en ce qui concerne les matrices, on peut écrire  $\Lambda_\alpha^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\alpha$ .

# Chapitre II : Mécanique et cinématique relativiste

## II.1 Lagrangien libre

L'action doit être un invariant de Lorentz, on peut justifier que c'est une conséquence du premier postulat d'Einstein. Pour la trajectoire libre d'une particule entre deux événements  $(t_a, \vec{r}_a)$  et  $(t_b, \vec{r}_b)$  on prend donc  $S \propto \int_a^b ds$ . Il faut que  $S$  soit homogène à une énergie multipliée par un temps et on prend donc

$$S = -mc^2 \int_a^b d\tau = \int_a^b L dt, \quad \text{avec} \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \stackrel{v \ll c}{\simeq} -mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2. \quad (\text{II.1})$$

Dans le terme de droite de (II.1) le préfacteur  $(-mc^2)$  et son signe permettent de retrouver le résultat non relativiste aux basses vitesses. L'impulsion associée à ce lagrangien est  $\vec{p}$  où  $p_i = \partial L / \partial v_i$  avec  $i = x, y$  ou  $z$ . L'énergie est  $\mathcal{E} = \sum_i p_i v_i - L$  (revoir le cours de mécanique). Ces relations s'écrivent sous forme condensée

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}, \quad \mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}. \quad (\text{II.2})$$

L'énergie de la particule au repos est appelée "énergie de masse" et vaut  $mc^2$ . L'énergie cinétique de la particule est  $\mathcal{K} = \mathcal{E} - mc^2$ . On remarque que<sup>1</sup>

$$\left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = \underline{P}, \quad (\text{II.3})$$

cf. (I.9) et (I.10). On obtient alors facilement les formules très utiles :

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad \vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}. \quad (\text{II.4})$$

La première découle de l'écriture (II.3) et de  $\underline{P}^2 = m^2 c^2$ , la seconde de la comparaison de (II.3) avec (I.9) et (I.10) :  $\underline{P} = m \gamma(c, \vec{v})$ .

On peut définir une quadri-impulsion pour les photons, non pas à partir de (II.2) qui est singulière ( $m = 0$  et  $v = c$ ), mais en utilisant (II.4). On aura alors  $\mathcal{E} = cp$  et  $\underline{P}^2 = 0$  ; il est souvent utile d'écrire ce quadri-vecteur sous la forme  $\underline{P} = (p, \vec{p})$ .

Un autre quadri-vecteur associé au rayonnement (monochromatique) a une pseudo-norme nulle, c'est le quadri-vecteur d'onde  $\underline{K} = (\omega/c, \vec{k})$ . Il est physiquement clair que  $\vec{p}$  (impulsion d'un photon) et  $\vec{k}$  (vecteur d'onde de l'onde électromagnétique correspondante) doivent être colinéaires : on peut les supposer proportionnels ;  $\mathcal{E}$  et  $\omega$  le seront donc également, et on postule la relation<sup>2</sup>  $\underline{P} = \hbar \underline{K}$ .

1. Ce n'est pas un accident si la combinaison de  $\mathcal{E}/c$  et  $\vec{p}$  forme un quadri-vecteur. C'est une conséquence de l'invariance de Lorentz de l'action et du principe variationnel, comme il est démontré dans l'annexe II.3.

2. C'est une relation quantique qui a été écrite pour la première fois par Planck sous la forme  $\mathcal{E} = h\nu$  pour donner la valeur du quantum d'énergie dans son analyse du rayonnement du corps noir (1901), puis réinterprétée comme énergie du photon ("Lichtquant" dans le texte) par Einstein dans son article de 1905 sur l'effet photo-électrique. On l'appelle relation de Planck-Einstein.

## II.2 Collisions et conservation de la quadri-impulsion

En l'absence de champ extérieur, l'impulsion d'un système composé de  $N$  points matériels en interaction est une quantité conservée. C'est une loi fondamentale de la mécanique newtonienne qui découle du principe d'inertie. Si l'on veut en donner une version relativiste, le premier postulat d'Einstein nous impose de dire que la bonne quantité conservée est la quadri-impulsion. Ainsi, lors d'une collision on aura<sup>3</sup> :

$$\left( \sum_i \underline{P}_i \right)_{\text{initial}} = \left( \sum_n \underline{P}_n \right)_{\text{final}} . \quad (\text{II.5})$$

Donc, non seulement on conserve la somme des vecteurs impulsion, mais également la somme des énergies (composante temporelle de la quadri-impulsion). Il en ressort naturellement (mais surprenamment) que la masse n'est pas une quantité conservée au cours d'une collision : la masse d'une particule est une mesure de l'énergie qu'elle contient<sup>4</sup>, cf. exo 1 du TD3. Ainsi un changement de masse traduit l'inélasticité d'un choc, et au cours d'une collision on peut même créer des particules (c'est à dire de la masse).

### II.2.a Diffusion Compton

Il s'agit de la diffusion inélastique<sup>5</sup> d'un photon avec un électron au repos. La conservation de la quadri-impulsion s'écrit

$$\underline{P}_\gamma + \underline{P}_e = \underline{P}'_\gamma + \underline{P}'_e . \quad (\text{II.6})$$

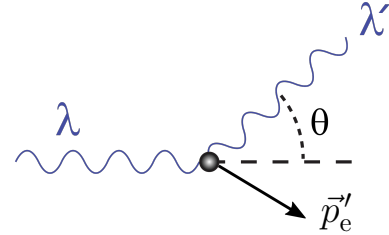
On en déduit que  $\underline{P}'_e{}^2 = (\underline{P}_\gamma + \underline{P}_e - \underline{P}'_\gamma)^2$ . Le premier terme de cette égalité vaut  $(m_e c)^2$ , le second se calcule presque aussi simplement et l'on obtient (en notant  $\mathcal{E}_\gamma$  et  $\mathcal{E}'_\gamma$  l'énergie du photon avant et après le choc)

$$\mathcal{E}'_\gamma = \frac{m_e c^2 \mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2 + \mathcal{E}_\gamma (1 - \cos \theta)} , \quad (\text{II.7})$$

soit, en écrivant  $\mathcal{E}_\gamma = hc/\lambda$  et  $\mathcal{E}'_\gamma = hc/\lambda'$  :

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos \theta) = \lambda + 2 \lambda_C \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) , \quad (\text{II.8})$$

où  $\lambda_C = h/(m_e c) = 0.0243 \text{ \AA}$  est appelée la longueur d'onde de Compton de l'électron. Dans l'expérience originelle (1923) Compton envoyait des rayons  $\gamma$  avec  $\lambda = 0.022 \text{ \AA}$  : c'est parce que  $\lambda$  est du même ordre de grandeur que  $\lambda_C$  que l'effet est significatif :  $(\lambda' - \lambda)/\lambda = \mathcal{O}(1)$ .



3. Les impulsions “initiales” et “finales” peuvent être définies sans ambiguïté longtemps avant et longtemps après la collision, lorsque les particules sont suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'on puisse négliger leurs interactions.

4. Einstein 1905 : “L'inertie d'un corps dépend-elle de son contenu en énergie?”. La réponse à cette question (“Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?” dans le texte) est : Ja, Herr Professor!

5. On pourrait ergoter sur l'utilisation du mot “inélastique” dans ce contexte : après tout, aucune masse ne change. Cependant, il y a un transfert d'énergie cinétique puisque la longueur d'onde du photon est modifiée, et c'est pour rendre compte de cet effet qu'on parle d'inélasticité, cf. [https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic\\_scattering](https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic_scattering).

Pour obtenir le résultat (II.7) on a utilisé une technique souvent efficace : on exprime la quadri-impulsion de la particule qui ne nous intéresse pas (ou qui n'est pas observée dans l'expérience : ici c'est l'électron diffusé) en fonction des autres, puis on prend la pseudo-norme<sup>6</sup>.

## II.2.b Référentiel du centre de masse

Il est souvent utile de travailler dans le référentiel du centre de masse (cf. votre expérience en physique classique et les TDs de ce cours). Pour un ensemble de  $N$  particules, c'est le référentiel dans lequel la composante spatiale de la quadri-impulsion totale est nulle.

Il faut démontrer que ce référentiel existe : prenons le cas de deux particules, d'impulsions  $\underline{P}_1$  et  $\underline{P}_2$ , dont l'une au moins a une masse (par exemple la particule 1).  $(\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = \underline{P}_1^2 + \underline{P}_2^2 + 2 \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 > 2 \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 > 0$ . La dernière égalité est obtenue en calculant le pseudo-produit scalaire dans le référentiel propre de la particule massique : dans ce référentiel  $\underline{P}_1 = (\mathcal{E}_1/c, \vec{0})$  et alors il est clair que  $\underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / c^2 > 0$ . Donc  $\underline{P} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2$  est de genre "temps" (et même "futur", cad. que  $P^0 > 0$ ), et on peut, avec une transformation spéciale de Lorentz annuler sa partie spatiale<sup>7</sup>.

Il est intéressant de discuter le cas de deux photons. Dans ce cas  $(\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = 2 \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 = 2(p_1 p_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 2 p_1 p_2 (1 - \cos \theta)$  où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ . On a donc bien une impulsion totale de genre temps (et on peut donc définir un référentiel du centre de masse), sauf dans le cas où les impulsions des deux photons ont la même direction ( $\theta = 0$ ). C'est bien normal, puisque dans ce cas  $\underline{P}$  est de genre lumière, et pouvoir définir le référentiel du centre de masse reviendrait à pouvoir définir un référentiel propre pour le photon.

## II.2.c Seuil de création

On considère une réaction de type

$$p_1 + p_2 + \dots \rightarrow p_a + p_b + \dots$$

où  $p_i$  désigne une particule quelconque (masse  $m_i$ ). Le seuil de réaction (ou seuil de production) correspond à la configuration pour laquelle les particules  $p_a, p_b, \dots$  sont créées au repos dans le référentiel du centre de masse. Il est donc clair que, dans ce référentiel, l'énergie seuil est  $m_a c^2 + m_b c^2 + \dots$ . Pour une configuration d'énergie totale plus faible, on ne pourra pas observer les particules  $p_a, p_b$  etc...

- À titre d'exemple, étudions la création d'anti-protons (notés  $\bar{p}$ , de masse  $m_p$  égale à celle du proton) à partir de la collision de deux protons. La configuration minimale qui conserve la charge électrique est

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

6. Tester cette méthode dans le cas suivant : un  $\pi^-$  au repos se désintègre en un muon  $\mu^-$  et un anti-neutrino  $\bar{\nu}_\mu$  qui n'est pas détecté. La masse de cet anti-neutrino est négligeable devant les masses du pion ( $140 \text{ MeV}/c^2$ ) et du muon ( $106 \text{ MeV}/c^2$ ). Calculer l'énergie du  $\mu^-$  émis (réponse :  $110 \text{ MeV}$ ).

7. Montrez-le en exercice.

L'énergie seuil dans le centre de masse est donc  $4m_p c^2$ .

Dans la réaction ci-dessus, on repèrera les protons par les indices 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (pour l'anti-proton). Dans le référentiel du laboratoire, un des deux protons initiaux est au repos, on l'appelle le proton cible et on l'affuble de l'indice 1. L'autre est le "projectile" (indice 2) ; il est en mouvement, notons son énergie  $\mathcal{E}_2$ . On veut déterminer la valeur de  $\mathcal{E}_2$  au seuil de réaction (soit  $\mathcal{E}_2|_{\text{seuil}}$ ). En écrivant la conservation de la pseudo-norme de la quadri-impulsion totale on a :

$$(\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = (\underline{P}_3 + \underline{P}_4 + \underline{P}_5 + \underline{P}_6)^2 .$$

On veut évaluer les deux termes de cette égalité au seuil de réaction. Pour évaluer le terme de droite, on se place dans le référentiel du centre de masse<sup>8</sup> et, au seuil, on obtient immédiatement  $(4m_p c)^2$ . Pour le terme de gauche, on travaille dans le référentiel du laboratoire, ce qui donne<sup>9</sup>

$$(\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = 2(m_p c)^2 + 2 \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 = 2(m_p c)^2 + 2m_p \mathcal{E}_2 .$$

Ce qui conduit immédiatement à  $\mathcal{E}_2|_{\text{seuil}} = 7m_p c^2$ , soit, en ce qui concerne l'énergie cinétique,  $\mathcal{K}_2|_{\text{seuil}} = 6m_p c^2$ . Dans le laboratoire, l'énergie seuil<sup>10</sup> vaut  $\mathcal{E}_2|_{\text{seuil}} + m_p c^2 = 8m_p c^2$ .

• Deuxième exemple : la coupure GZK. C'est aujourd'hui un fait attesté que l'on ne détecte presque pas de rayonnement cosmique dont l'énergie soit supérieure à environ  $10^{20}$  eV. Cette coupure haute avait été prédite dès 1966 en considérant la collision de protons de haute énergie avec le fond diffus cosmologique (observé en 1965), selon la réaction :  $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$ . La différence d'énergie de masse  $(m_n + m_\pi)c^2 - m_p c^2$  est positive, de sorte qu'il faut que les composants initiaux aient une énergie suffisamment élevée. Décrivons la cinématique de la réaction :

On doit avoir  $(\underline{P}_\gamma + \underline{P}_p)^2 = (\underline{P}_n + \underline{P}_\pi)^2$ . Évaluons le seuil de production dans le référentiel du centre de masse. Dans ce cas le neutron et le pion sont produits au repos :  $\underline{P}_n^* = (m_n c, \vec{0})$  et  $\underline{P}_\pi^* = (m_\pi c, \vec{0})$ , de sorte que  $(\underline{P}_n^* + \underline{P}_\pi^*)^2 = (m_n + m_\pi)^2 c^2$ . Revenons dans le référentiel du "laboratoire" (ou plutôt du vide intersidéral). La pseudo-norme étant un invariant de Lorentz on a, au seuil,

$$(\underline{P}_\gamma + \underline{P}_p)^2 = (m_n + m_\pi)^2 c^2 , \quad (\text{II.9})$$

où  $\underline{P}_\gamma = (\mathcal{E}_\gamma/c, \vec{p}_\gamma)$  et  $\underline{P}_p = (\mathcal{E}_p/c, \vec{p}_p)$ . Alors  $\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}_p = \mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}_p / c^2 - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_p$ . En faisant une *approximation ultra-relativiste*  $p_p \simeq \mathcal{E}_p / c$  cela donne  $\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}_p = \mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}_p / c^2 (1 - \cos \theta)$  où  $\theta$  est l'angle entre les impulsions du photon et du proton. On obtient donc, en réinsérant dans (II.9)

$$\mathcal{E}_p = \frac{(m_n + m_\pi)^2 c^4 - m_p^2 c^4}{2\mathcal{E}_\gamma (1 - \cos \theta)} .$$

L'énergie de seuil est  $\mathcal{E}_p|_{\text{seuil}} = \min_\theta \{\mathcal{E}_p\}$  (l'énergie des photons est celle du fond diffus cosmique  $\mathcal{E}_\gamma = 7 \times 10^{-4}$  eV). Elle bien-sûr obtenue pour  $\theta = \pi$  (collision frontale). En prenant  $m_n = 939.6$  MeV/ $c^2$ ,  $m_\pi = 139.6$  MeV/ $c^2$  et  $m_p = 938.3$  MeV/ $c^2$  on obtient<sup>11</sup>  $\mathcal{E}_p|_{\text{seuil}} \simeq 1.0 \times 10^{20}$  eV.

8. On a le droit de travailler dans le référentiel de notre choix : la pseudo-norme est un invariant de Lorentz.

9. La formule est toujours valable, pas seulement au seuil.

10. C'est la composante temporelle de la quadri-impulsion totale au seuil.

11. Noter que  $\mathcal{E}_p|_{\text{seuil}} \gg m_p c^2$ , ce qui légitime *a posteriori* l'approximation ultra-relativiste.

### II.3 Annexe : pourquoi la combinaison de $\mathcal{E}/c$ et $\vec{p}$ forme-t-elle un quadri-vecteur ?

• Version pédestre : Considérons la particule libre qui va de 0 à  $\vec{r}$  en un temps  $t$  à vitesse  $\vec{v} = \vec{r}/t$ . Si on déplace l'évènement final de  $\delta\vec{X} = (c\delta t, \delta\vec{r})$ , il faudra changer  $\vec{v}$ . La nouvelle vitesse sera  $\vec{v} + \delta\vec{v} = (\vec{r} + \delta\vec{r})/(t + \delta t)$  et cela donne  $\delta\vec{v} = (\delta\vec{r} - \vec{v}\delta t)/t$ . La variation correspondante de l'action le long de la trajectoire physique ( $S = -mc^2 t \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ) sera

$$\delta S = -m c^2 \delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{m c^2 t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\vec{v} \cdot \delta\vec{v}}{c^2} = -\frac{m c^2 \delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m \vec{v} \cdot \delta\vec{r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\mathcal{E} \delta t + \vec{p} \cdot \delta\vec{r}.$$

Cette relation se met sous la forme  $\delta S = -(\mathcal{E}/c, \vec{p}) \cdot \delta\vec{X}$ . Comme  $\delta S$  est un invariant de Lorentz, et  $\delta\vec{X}$  un quadri-vecteur,  $(\mathcal{E}/c, \vec{p}) = \underline{P}$  est également un “bon quadri-vecteur”.

• Version plus formelle : On utilise l'approche variationnelle, qui est rappelée ci-dessous :

On considère une ligne d'univers  $X^\mu(t)$  (peut-être non physique) qui conduit la particule de  $(t_a, \vec{r}_a)$  à  $(t_b, \vec{r}_b)$ . On étudie les variations de  $S$  lorsque  $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ .  $\delta S = -mc \int \delta ds$ , où, puisque  $ds = \sqrt{dX^\mu dX_\mu}$

$$\delta ds = \frac{dX_\mu \delta dX^\mu + dX^\mu \delta dX_\mu}{2\sqrt{dX^\mu dX_\mu}} = \frac{dX_\mu \delta dX^\mu}{\sqrt{dX^\mu dX_\mu}} = \frac{dX_\mu}{ds} \delta dX^\mu = \frac{1}{mc} P_\mu \delta dX^\mu. \quad (\text{II.10})$$

On a également  $\delta dX^\mu = d\delta X^\mu$  et donc  $\delta S = -\int P_\mu d\delta X^\mu$ . Une intégration par parties donne alors

$$\delta S = -[P_\mu \delta X^\mu]_a^b + \int_a^b \delta X^\mu dP_\mu. \quad (\text{II.11})$$

Avec les hypothèses du principe variationnel [ $\delta X^\mu(a) = \delta X^\mu(b) = 0$ ] le premier terme est nul et on voit que le principe d'action extrémale impose que  $dP_\mu = 0$  : la quadri-impulsion de la particule libre se conserve pour la trajectoire physique.

a. Cela se comprend bien en divisant par  $dt$  par exemple :  $\delta \frac{d}{dt} X^\mu = \frac{d}{dt} \delta X^\mu$  : lorsqu'on fait varier la trajectoire, même si elle est non physique, la position et la vitesse changent de manière coordonnée :  $\delta \vec{v} = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}$ .

Si on étudie maintenant les variations de l'action le long de la trajectoire physique, en changeant seulement la coordonnée de l'évènement d'arrivée  $\delta X^\mu = \delta X^\mu(b)$  (avec toujours le même point de départ :  $\delta X^\mu(a) = 0$ ) alors le second terme du membre de droite de (II.11) est nul (on est sur la trajectoire physique) et il reste  $\delta S = -P_\mu \delta X^\mu$  ce qui s'écrit

$$P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial X^\mu}, \text{ soit, puisque } P_\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, -\vec{p} \right) : \mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t} \text{ et } p_x = \frac{\partial S}{\partial x} \text{ (idem pour } y \text{ et } z). \quad (\text{II.12})$$

Les lois de la mécanique analytique étant cohérentes entre elles, les deux formules de droite de (II.12) conduisent donc aux formes (II.2) de l'impulsion et de l'énergie puisqu'elle correspondent au même lagrangien que celui qui donne (II.2). Et la relation de gauche de (II.12) assure alors que la combinaison  $(\mathcal{E}/c, \vec{p})$  est un “bon quadri-vecteur”.

# Chapitre III : Électrodynamique

## III.1 Formalisme covariant. Jauge de Loren(t)z. Quadri-potentiel

On commence par une remarque : l'opérateur  $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X_\mu} = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$  est un opérateur quadri-vectoriel contravariant. Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a. Bien-sûr on démontre de même que  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X^\mu} = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$  est un opérateur quadri-vectoriel covariant. Le d'Alembertien, qui est la combinaison  $\partial_\mu \partial^\mu = c^{-2}\partial_t^2 - \Delta = \square$ , est un invariant de Lorentz, c'est à dire qu'il a la même expression dans tous les référentiels.

Les équations de Maxwell en jauge de Loren(t)z ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + c^{-2}\partial_t \phi = 0$ ) permettent de relier les potentiels aux charges selon la relation (démontrée en annexe III.6.b) :

$$\square \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \mu_0 \left( c \rho, \vec{J} \right) . \quad (\text{III.1})$$

Comme l'opérateur  $\square$  est un opérateur invariant et comme le terme de droite de (III.1) est un champ quadri-vectoriel [puisqu'il s'écrit  $\mu_0 \mathcal{J}$ , cf. (I.12)], la quantité  $(\phi/c, \vec{A})$  est donc un champ quadri-vectoriel : le quadri-potentiel  $\underline{A}(\vec{r}, t)$ . On notera que la condition de jauge de Loren(t)z s'écrit  $\partial_\mu A^\mu = 0$  : elle est donc invariante de Lorentz.

## III.2 Mouvement d'une particule test. Couplage minimal

En présence d'un champ électromagnétique on écrit l'action d'une particule test sous la forme  $S = S_0 + S_{\text{int}}$  où  $S_0$  est l'action libre (II.1) et  $S_{\text{int}}$  est un invariant de Lorentz qui couple la particule au champ électromagnétique. On essaie le couplage le plus simple :  $S_{\text{int}} = -q \int_a^b A_\mu dX^\mu$ . On a  $A_\mu = (\phi/c, -\vec{A})$  et  $dX^\mu = (c dt, d\vec{r} = \vec{v} dt)$ , ce qui donne  $L = L_0 + L_{\text{int}}$  avec

$$L_{\text{int}} = -q \phi(\vec{r}, t) + q \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} , \quad \text{et, bien-sûr,} \quad L_0 = -m c^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} . \quad (\text{III.2})$$

La quantité canonique conjuguée de la position est  $\vec{\pi} = \vec{\nabla}_{\vec{v}}(L_0 + L_{\text{int}}) = \vec{p} + q \vec{A}$  où  $\vec{p}$  est l'impulsion relativiste (II.2). L'équation de Lagrange  $\frac{d}{dt} \vec{\pi} = \vec{\nabla}(L_0 + L_{\text{int}})$  se met sous la forme<sup>1</sup>

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) . \quad (\text{III.3})$$

Puis l'énergie de la particule est

$$\mathcal{E} = \vec{\pi} \cdot \vec{v} - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} + q \phi(\vec{r}, t) . \quad (\text{III.4})$$

C'est une quantité conservée pourvu que les champs ne dépendent pas du temps. En effet on trouve  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(\partial_t \phi - \vec{v} \cdot \partial_t \vec{A})$ , ce qui est équivalent à  $\frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$ , où  $\mathcal{E}_0 = m c^2 / \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$  est l'énergie de la particule libre. Voyez-vous quel est le sens physique de cette équation ?

1. Le calcul n'est pas difficile, il faut juste savoir que  $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ . Cette formule se démontre "à l'envers" : on considère un vecteur  $\vec{C}$  constant (il joue le rôle de  $\vec{v}$  dans la formule précédente), alors on peut vérifier directement que  $\vec{C} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$ .



Le hamiltonien est simplement l'énergie exprimée en fonction des variables canoniques<sup>2</sup>  $\vec{\pi}$  et  $\vec{r}$  :

$$H = \sqrt{\left(\vec{\pi} - q\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi \stackrel{v \ll c}{\simeq} m c^2 + \frac{1}{2m} \left(\vec{\pi} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi . \quad (\text{III.5})$$

### III.3 Notion de tenseur

Cette section un peu formelle n'est pas absolument essentielle pour ce qui suit. Elle nous est surtout utile pour obtenir les (importantes) lois de transformation du tenseur de Faraday qui sont discutées dans la section III.5. On conseille au lecteur peu attiré par les aspects formels de lire cette section rapidement, sans porter attention à l'annexe III.6.c. Si une question se pose plus tard (par exemple sur la notion de symétrie ou d'antisymétrie, ou sur le passage d'une notation contra-variante à une notation covariante), il sera toujours temps de relire les lignes qui suivent.

Un tenseur est un objet à  $n$  indices (on appelle  $n$  le "rang" du tenseur), dont certains sont covariants et d'autres contravariants, et qui se transforme comme suit lors d'un changement de référentiel<sup>3</sup> (exemple pour 3 indices, dont 2 contravariants) :

$$T'^{\alpha \gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\gamma}_{\sigma} T^{\mu \sigma} . \quad (\text{III.6})$$

Bien-sûr la quantité  $T^{\alpha\nu\gamma} = g^{\nu\beta} T^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma}$  est également un tenseur qui a les bonnes propriétés de transformation (on dit qu'il est 3 fois contravariant), idem pour  $T^{\alpha}_{\beta\sigma}$  etc.

- D'après la définition (III.6) un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1.

- On a les propriétés :  $T_0^0 = T_0^0 = T^{00} = T_{00}$  alors que  $T_0^1 = T^{01} = -T_1^0 = -T_{01}$  et que  $T_3^1 = -T^{31} = T_1^3 = -T_{31}$ . La règle est : changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe ; changer un indice  $i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) d'altitude change le signe.

- Un tenseur est dit "symétrique" (resp. "antisymétrique") dans deux de ses indices si  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$  (resp.  $T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$ ). Il est clair que  $T'^{\alpha\beta}$  et  $T_{\alpha\beta}$  ont les mêmes propriétés de symétrie ou d'antisymétrie que  $T^{\alpha\beta}$ .  $T^{\alpha}_{\beta}$  n'a par contre aucune propriété de symétrie si  $T^{\alpha\beta}$  en a. On peut juste remarquer que si  $T^{\alpha\beta}$  est symétrique, alors  $T^{\alpha}_{\beta} = T_{\beta}^{\alpha}$ . Dans ce cas on s'autorise à noter  $T_{\beta}^{\alpha}$ , comme pour le symbole de Kronecker  $\delta_{\beta}^{\alpha}$ .

- La "contraction" d'un tenseur est par exemple la quantité  $T^{\mu}_{\mu}{}^{\sigma}$  qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant. Il est démontré dans l'annexe III.6.c que c'est un tenseur de rang  $n - 2$  (dans l'exemple de la ligne précédente  $T^{\mu}_{\mu}{}^{\sigma}$  est un tenseur de rang 1, c'est à dire un quadri-vecteur). Pour un tenseur à deux indices,  $T^{\mu}_{\mu}$  est un invariant de Lorentz, ce n'est plus vraiment un tenseur, on parle de "scalaire de Lorentz".<sup>4</sup>

### III.4 Tenseur électromagnétique et équations de Maxwell

Le tenseur électromagnétique (ou tenseur de Faraday) est la quantité

$$F_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} . \quad (\text{III.7})$$

2. On utilise la relation (II.4) :  $mc^2/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  avec ici  $\vec{p} = \vec{\pi} - q\vec{A}$ .

3. La loi de transformation pour les objets covariants a été introduite section I.6.c.

4. Petit exercice : Soit  $A^{\alpha\beta}$  un tenseur antisymétrique et  $S^{\alpha\beta}$  un tenseur symétrique. Que vaut le scalaire  $A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$  ?

Il est clairement anti-symétrique sous l'échange de ses deux indices. On obtient par un calcul explicite de chaque coordonnée<sup>5</sup> :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.8})$$

Comme  $F$  est antisymétrique, sa trace vaut  $F^\mu_\mu = 0$ . On peut construire des scalaires de Lorentz plus intéressants :  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2)$ , et également<sup>6</sup> :  $\det F^{\mu\nu} = (\vec{E} \cdot \vec{B}/c)^2$ .

Les équations de Maxwell s'écrivent sous forme covariante<sup>7</sup> :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{et} \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta. \quad (\text{III.9})$$

On peut remarquer que l'équation du mouvement (III.3) d'une particule test se met sous la forme<sup>8</sup>

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu. \quad (\text{III.10})$$

Le même type de raisonnement que celui qui a été utilisé à la section II.3 montre qu'il est naturel que l'équation (III.3) puisse être mise sous la forme covariante (III.10), comme l'exige le premier postulat d'Einstein : cela découle de l'invariance de Lorentz de l'action et du principe variationnel.

### III.5 Lois de transformation des champs

On a  $F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu}$  : c'est la relation de changement de référentiel (III.6) pour un tenseur de rang 2. Elle s'écrit sous forme matricielle :  $(F') = (\Lambda)(F)^t(\Lambda)$ . Cela vaut la peine de faire le calcul explicite pour la transformation spéciale de Lorentz (I.5). On trouve

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + VB_y) \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{cases}. \quad (\text{III.11})$$

On remarque que la composante  $\vec{E}_\parallel$  du champ électrique qui est parallèle à la vitesse  $\vec{V}$  (vitesse de translation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) est inchangée alors que celle qui est perpendiculaire à  $\vec{V}$  se transforme comme  $\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{V} \wedge \vec{B})$ . On fait le même type d'analyse pour le champ  $\vec{B}$  et cela permet de mettre la transformation sous une forme générale, valable pour tous les changements de référentiels inertiels :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{V} \wedge \vec{B}) = \gamma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + (1 - \gamma) \frac{\vec{V} \cdot \vec{E}}{V^2} \vec{V}, \\ \vec{B}' = \vec{B}_\parallel + \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}) = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}) + (1 - \gamma) \frac{\vec{V} \cdot \vec{B}}{V^2} \vec{V}. \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

5. En pratique, comme  $F$  est anti-symétrique, il suffit de calculer 6 de ses coordonnées, par exemple celles au dessus de la diagonale principale.

6. Voyez vous pourquoi le déterminant de  $F^{\mu\nu}$  est un scalaire de Lorentz ?

7. On donne à la première relation le nom d'identité de Bianchi.

8. Voyez-vous à quoi correspond la composante  $\mu = 0$  de (III.10) ?

## III.6 Annexe

### III.6.a Démonstration de la contravariance de $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$

• Version pédestre : On considère la transformation spéciale de Lorentz (I.5) et on se place en 1+1 dimension pour faire simple. En utilisant l'expression de la dérivée des fonctions composées à deux variables, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\partial'^0(..) &\equiv \frac{\partial(..)}{\partial X'_0} = \frac{\partial(..)}{c \partial t'} = \frac{\partial(..)}{c} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial(..)}{\partial x} \frac{\partial x}{c \partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \partial^0(..) - \frac{\partial x}{c \partial t'} \partial^1(..), \\ \partial'^1(..) &\equiv \frac{\partial(..)}{\partial X'_1} = -\frac{\partial(..)}{\partial x'} = -\frac{\partial(..)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} - \frac{\partial(..)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = -\frac{c \partial t}{\partial x'} \partial^0(..) + \frac{\partial x}{\partial x'} \partial^1(..).\end{aligned}\tag{III.13}$$

Les dérivées partielles apparaissant dans les membres les plus à droites de (III.13) se calculent à partir de la relation de passage (I.5) écrite sous la forme

$$\begin{pmatrix} c \, dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \, dt' \\ dx' \end{pmatrix}, \quad \text{ainsi par exemple} \quad \frac{c \, \partial t}{\partial x'} = \beta\gamma.$$

Les relation (III.13) conduisent alors immédiatement à

$$\begin{pmatrix} \partial'^0 \\ \partial'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^0 \\ \partial^1 \end{pmatrix}, \tag{III.14}$$

qui est la relation de transformation attendue pour un vecteur contravariant.

• Version plus formelle : On a  $X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta X^\beta$ . Cette expression peut être facilement transformée en  $X'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma X_\sigma$  avec  $\Lambda_\mu^\sigma \equiv g_{\mu\alpha} g^{\beta\sigma} \Lambda^\alpha_\beta$  (cf. Eq. (I.17) de l'annexe I.6.c). La conservation de la pseudo-norme impose<sup>9</sup>  $\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\sigma = \delta^\sigma_\nu$ . Cette relation est simplement une autre manière d'écrire (I.8) (multipliée par  $(g)$ ). Elle permet d'écrire

$$\Lambda^\mu_\nu X'_\mu = \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\sigma X_\sigma = \delta^\sigma_\nu X_\sigma = X_\nu, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial X_\nu}{\partial X'_\mu} = \Lambda^\mu_\nu. \tag{III.15}$$

Ensuite les lois de changement de variable s'écrivent

$$\partial'^\mu(..) \equiv \frac{\partial(..)}{\partial X'_\mu} = \frac{\partial(..)}{\partial X_\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial X'_\mu} = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu(..), \quad \text{où on a utilisé (III.15).} \tag{III.16}$$

Cette relation prouve que  $\partial^\mu$  est un "bon quadri-vecteur contravariant".

### III.6.b Démonstration de la relation (III.1)

Les équations de Maxwell-flux et de Maxwell-Faraday montrent qu'il existe deux champs, l'un vectoriel  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , l'autre scalaire  $\phi(\vec{r}, t)$  tels que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi. \tag{III.17}$$

---

9. Il suffit d'écrire  $X'^\mu X'_\mu = X^\sigma X_\sigma = \delta^\sigma_\nu X^\nu X_\sigma$ , où  $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$  et  $X'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma X_\sigma$ .

En reportant ces relations dans Maxwell-Ampère, en utilisant la relation  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$  on obtient

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \left( -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \right) ,$$

ce qui s'écrit

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi \right) . \quad (\text{III.18})$$

En reportant les relations (III.17) dans Maxwell-Gauss on obtient

$$\square \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \partial_t \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi \right) . \quad (\text{III.19})$$

Les champs  $\vec{A}$  et  $\phi$  ne sont pas définis de manière univoque par les relations (III.17) : quel que soit le champ scalaire  $G(\vec{r}, t)$ , les champs  $\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla} G$  et  $\phi^* = \phi - \partial_t G$  conduisent aux mêmes champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . C'est ce qu'on appelle l'invariance de jauge. Nous allons travailler dans la "jauge de Loren(t)z" pour laquelle on impose  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0$ . Dans cette jauge les relations (III.18) et (III.19) se mettent directement sous la forme (III.1).

### III.6.c La contraction d'un tenseur de rang $n$ est un tenseur de rang $n - 2$

Cette propriété ne devrait pas nécessiter de démonstration : la contraction d'un tenseur de rang  $n$  est un objet qui n'a plus que  $n - 2$  indices. Si nos conventions de notation sont cohérentes, c'est bien un tenseur de rang  $n - 2$ .

Présentons tout de même une démonstration : considérons l'exemple d'un tenseur de rang 3, et l'objet  $T^\mu{}_\mu{}^\sigma$ . Selon (III.6) il se transforme comme suit :

$$T'^\mu{}_\mu{}^\sigma = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta \Lambda^\sigma{}_\gamma T^\alpha{}_\beta{}^\gamma . \quad (\text{III.20})$$

Or, d'après (I.18) on a  $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta = \delta_\alpha^\beta$ . La relation (III.20) s'écrit donc

$$T'^\mu{}_\mu{}^\sigma = \Lambda^\sigma{}_\gamma T^\alpha{}_\alpha{}^\gamma , \quad (\text{III.21})$$

qui est bien la loi de transformation d'un tenseur de rang 1.

Si l'on réfléchit un peu, il est naturel que la propriété que l'on vient de démontrer soit associée à la relation (I.18) et donc à la conservation de la pseudo-norme, puisqu'elle nous permet justement de démontrer qu'un pseudo-produit scalaire est un scalaire de Lorentz.