

Électrocinétique

Chapitre 1

Analyser un circuit électrocinétique

Analyser un circuit électrocinétique

Le but de ce chapitre est d’apprendre à analyser un circuit électrocinétique, c’est-à-dire à en repérer la structure générale de manière à pouvoir en chercher plus efficacement les grandeurs inconnues : les tensions et les intensités des courants.

I – Tactiques d’approche

I.1 – Qu’est-ce qu’un circuit électrique ?

I.1.i – aspect circuit

◇ Qu’y a-t-il dans un circuit électrique ?

- des composants :
 - dipôles : lampe, four, résistors, générateurs, ...
 - multipôles : transformateur, télé, filtre, chargeur de téléphone ...
- des connecteurs :
 - des fils
 - des interrupteurs

☛ *Remarque* : les connecteurs peuvent être vus comme des composants particuliers.

Un *circuit* est un ensemble de composants reliés entre eux par des connecteurs.

◇ Le fait que les composants soient tous reliés entre eux **ET** que l’électricité soit partout en même temps implique de faire une étude *systémique* du circuit : n’importe quel composant agit avec tous les autres, tout le temps, dès le début !

L’*approche systémique* est une approche qui consiste à étudier plusieurs choses en même temps.

I.1.ii – aspect électrique

- ◇ L’électricité ... c’est quoi ? C’est le mouvement de charges électriques, quelles que soient ces charges, quel que soit le mode de transport. Nous verrons plus tard, beaucoup plus tard, comment et pourquoi il y a un courant électrique dans les conducteurs (les métaux). Pour l’instant nous nous contentons de dire que ce sont les électrons qui bougent dans les métaux et que leur mouvement n’est autre que l’électricité.
- ◇ Ceci dit, nous ne nous intéresserons **jamais** à ce détail là, nous ne ferons que décrire l’électricité « de loin » avec deux grandeurs fondamentales :
- l’intensité
 - le potentiel

★ l'intensité

L'intensité se note i , I , ... et se mesure en ampère noté A.

Elle représente la quantité de charges qui passe, le flot de charges dans un fil. On a ainsi, en comptant une à une les charges qui passent **dans un sens donné** pendant la durée Δt :

$$\xrightarrow{i} \quad i(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

◇ Nous constatons alors que $[I] = (\text{A}) = \frac{(\text{C})}{(\text{s})}$.

☕ Remarque : 30 mA suffisent à tuer un homme !

★ le potentiel

Le *potentiel* se note v , V , ... et se mesure en volt.

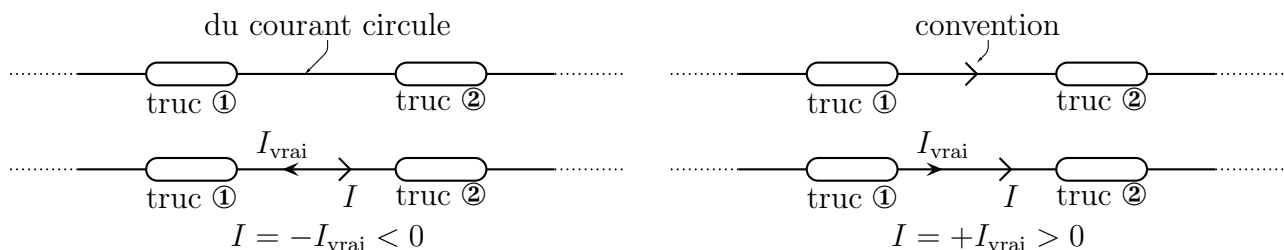
Le potentiel représente l'énergie que possèdent les charges en un point donné du circuit.

$$\frac{V_A}{A}$$

◇ Que les charges aient beaucoup d'énergie n'est pas forcément dangereux : il ne faut pas forcément avoir peur de 40 000 V. C'est le fait de *céder* de l'énergie qui est dangereux : 24 V peut être, dans certaines conditions, plus dangereux que le 230 V des prises électriques usuelles.

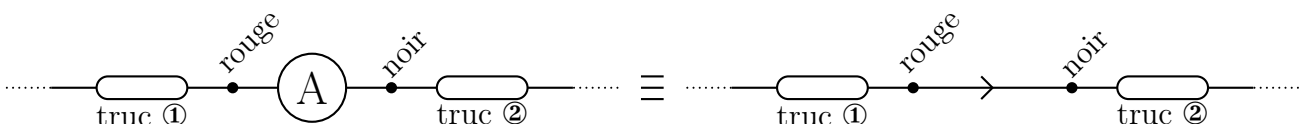
I.1.iii – mesurer une intensité

- ◇ Il faut pouvoir faire le lien entre le schéma, ce qui représente le circuit, et la réalité, les composants.
- ◇ Le truc principal c'est qu'il faut **définir** le sens conventionnel du courant : il n'y a ni de bons ni de mauvais sens, il faut juste savoir interpréter le résultat.



★ expérimentalement

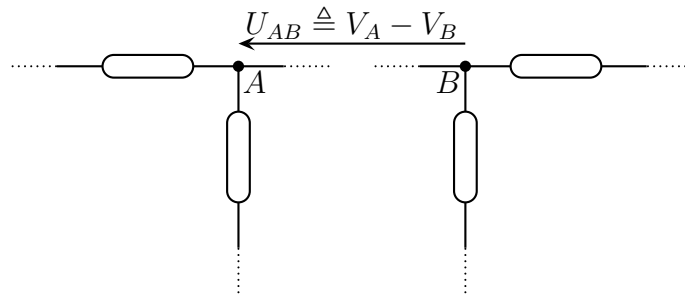
◇ Pour mesurer une intensité, qui n'est autre qu'un flot de charges, le plus simple est d'introduire un compteur de charges au point intéressant : il s'agit d'un ampèremètre.



I.1.iv – mesurer un potentiel

- ✧ En fait c'est impossible car le potentiel, comme l'énergie, est défini à une constante additive arbitraire près. De plus, comme nous l'avons déjà dit, ce n'est pas l'énergie qui est importante, mais la variation d'énergie entre un point et un autre. C'est pourquoi nous mesurerons en fait des **différences de potentiels**.

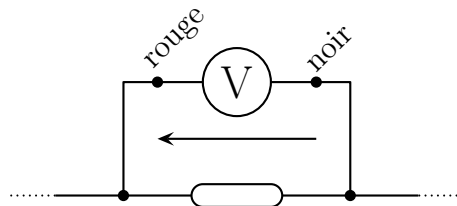
Une *tension*, appelée aussi *différence de potentiels*, se note u , U , ... et se mesure en volts. Cela correspond à la différence des potentiels pris entre deux points quelconques d'un circuit.



☕ *Remarque* : bien évidemment, les deux points quelconques sont rarement quelconques.

★ expérimentalement

Nous utiliserons un voltmètre qui détermine la différence de potentiel, la tension, entre ses bornes.



I.1.v – régimes continu, variable, périodique ...

- ✧ Il est possible de distinguer plusieurs types de régime électronique (*ie.* plusieurs manières de fonctionner pour un circuit). Dans un premier temps nous parlerons surtout des régimes continu et périodique.

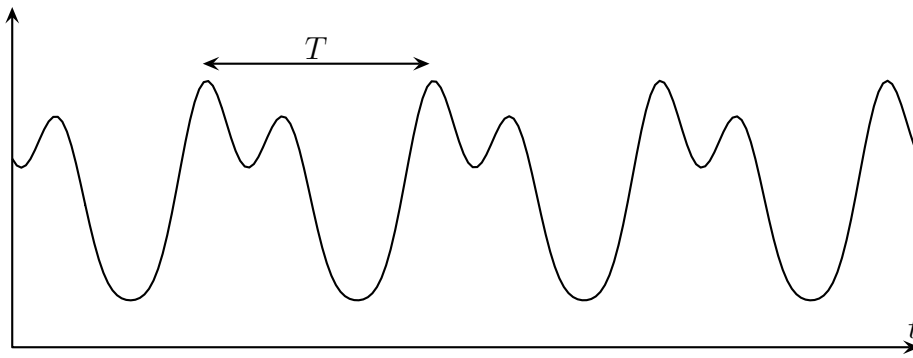
Le *régime continu* est un régime pour lequel **toutes** les grandeurs électriques (intensité et potentiels) sont constantes dans le temps.

- ✧ Par exemple une pile avec une ampoule. Ces grandeurs sont en général notées avec une majuscule : I , I_1 , U , U_{AB} , ...

Le *régime variable* est un régime qui n'est pas continu.

- ✧ C'est-à-dire à peu près tout le reste. Les grandeurs variables sont donc fonction du temps et s'écrivent aussi souvent, avec une minuscule : $i(t)$, $i_1(t)$, $u(t)$, ...

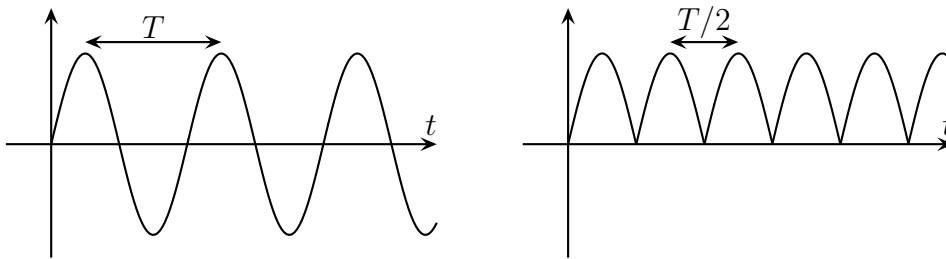
Le *régime périodique* est un régime variable dans lequel **toutes** les grandeurs sont périodiques et (pas forcément) de même période T .



◇ exemple sonore : la roulette du dentiste.

☛ *Remarque* : un cas particulier **très** intéressant que l'on verra en long, en large, en travers et en diagonal plus tard, c'est le régime sinusoïdal.

◇ Exemple de situation où le régime est périodique mais où toutes les grandeurs n'ont pas la même période : un montage redresseur double alternance. La période est T d'un côté et $\frac{T}{2}$ de l'autre.



I.1.vi – ... même combat à cause de l'ARQS

◇ L'électricité ne se propage pas instantanément : un peu comme une file de voiture lorsque le feu est vert, tout le monde ne commence pas à se déplacer en même temps. La vitesse de « mise en route » des électrons est d'environ $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

◇ Dans l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire), tout se passe comme si tous les électrons se mettaient en route en même temps. Problème : « l'ordre » de mise en route change sur une durée caractéristique T . Il faut donc, pour être en ARQS que cet ordre ait largement le temps de se propager partout. Comme il va parcourir la distance $\ell = cT$, il faut donc que la longueur L du circuit soit telle que $L \ll cT$ ce qui implique :

$$T \ll \frac{L}{c} \simeq \frac{0,30 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}} = 10^{-9} \text{ s} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f \ll 10^9 \text{ Hz}}$$

◇ Cette approximation est très largement vérifiée dans les cas usuels !

◇ D'un point de vue imagé, tout se passe comme si les électrons étaient des wagons accrochés à une locomotive : ils se mettent tous en route au même instant, tous ensemble, cela implique :

→ point de vue physique : dans chaque fil, l'intensité est uniforme. Il n'y a pas de perte d'électrons (qui deviendraient quoi ?) le long du fil, cela constitue la loi de conservation de la charge, à savoir que le matériau conducteur est tout le temps neutre (un électron chasse l'autre).

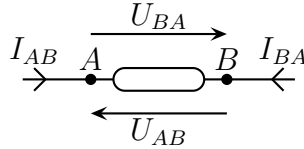
→ point de vue technique : tout interagit avec tout. L'approche systémique est obligatoire ! Interdit (car faux) de dire « Le courant sort du générateur, rentre dans le résistor, passe ensuite dans la bobine, ... » car tout a lieu en même temps !

◇ Il faut donc désormais voir comment fonctionne chaque bout de circuit, chaque composant, ensuite apprendre à reconnaître comment les associer et enfin apprendre à déterminer ce qui se passe une fois l'association faite.

I.2 – Les dipôles

I.2.i – comment les distinguer ?

Un *dipôle* est un composant quelconque qui se branche sur un circuit à deux endroits.



★ grandeurs caractéristiques

- ◇ Du point de vue de l'intensité, une seule peut concerner un dipôle : celle qui le traverse. De plus dans le cadre de l'ARQS, l'intensité qui « rentre » est égale à l'intensité qui sort, un peu comme lorsqu'on essaie de remplir un verre d'eau déjà plein. Ceci dit, il faudra bien préciser dans quel sens se décrit l'intensité car *a priori* nous avons le choix entre deux possibilités, qui ont le mauvais goût d'être opposées : I_{AB} et I_{BA} .
- ◇ De même, étant donné qu'il y a deux bornes au dipôle, il est possible de définir deux potentiels, V_A et V_B et donc **deux** tensions : U_{AB} et U_{BA} qui sont opposées l'une l'autre.
- ◇ Deux dipôles (générateur, résistor, bobine, condensateur, diode, ...) seront différents parce que les liens entre l'intensité qui les traverse et la tension à leurs bornes seront différents.
- ◇ « Dire » qu'un résistor est dans le circuit revient à écrire sa relation courant-tension, qui n'est autre qu'une équation entre deux inconnues. S'il y a 10 dipôles (cas non rare), cela devrait faire 10 équations à 20 inconnues ! Certains s'y risquent. Personne n'en est jamais sorti.

I.2.ii – le résistor idéal

Le *résistor idéal* se représente de la façon ci-dessous et est tel qu'il y a proportionnalité entre tension aux bornes du résistor et intensité qui le traverse.



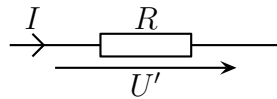
Un résistor est caractérisé uniquement par sa résistance $R > 0$ en ohm (Ω)
ou sa conductance $G \triangleq \frac{1}{R}$ en siemens (S).

Dans le cas représenté ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $U = +RI$.

Du point de vue dimensionnel :
tension = résistance \times intensité
ou, si on préfère
(V) = (Ω) \times (A)

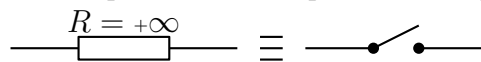


Attention à ne pas se tromper dans les flèches ! Avec le schéma ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $U = +RI = -U'$ et donc $U' = -RI$! Il est donc fondamental de ne pas se tromper dans les flèches.



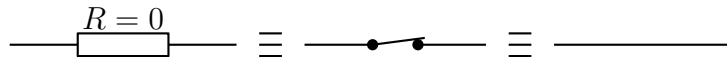
- ◇ Lorsque les flèches de I et de U sont dans des sens opposés, nous pouvons constater que la loi constitutive impose que U et I soient de même signe :
 - pour que le courant passe vraiment dans le sens de I , il faut qu'il y ait plus d'énergie au début : le courant perd de l'énergie dans la résistance
 - pour que le courant passe dans le sens opposé, il faut qu'il y ait moins d'énergie à gauche, DONC plus d'énergie à la borne où le courant rentre, il perd aussi de l'énergie en traversant la résistance.
- ◇ Bien sûr les interprétations sont identiques avec I et U' qui sont de signe opposé.
- ◇ Comme son nom le laisse suggérer, un résistor « résiste » au passage du courant. Ceci dit, nous verrons bientôt un cas où plus il y a de résistors, plus il y a de courant ! Eh oui ! Donc attention à l'interprétation, elle n'est **pas** à faire au niveau systémique, mais au niveau dipolaire. Pour **un** résistor : plus la résistance est grande (à tension fixée), plus le courant qui le traverse est faible. Et réciproquement.

Une résistance « infinie » s'oppose à tout courant quelle que soit la tension à ses bornes : ce n'est ni plus ni moins qu'un interrupteur ouvert.



- ◇ Il est possible de voir la chose d'une autre manière : pour un résistor donné, pour qu'un certain courant I le traverse, il faut d'autant plus d'énergie (de tension) à ses bornes que la résistance est grande.

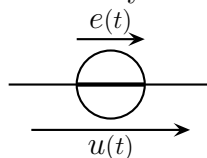
Une résistance nulle peut faire passer un courant sans faire perdre d'énergie aux électrons : la tension est nulle entre ses bornes, c'est un fil électrique.



- ◇ En TP nous manipulerons des résistances allant de la centaine d'ohm au mégohm. Les fils ont une résistance de l'ordre de $0,1 \Omega$.

I.2.iii – le générateur idéal de tension

Un *générateur idéal de tension* se symbolise de la manière suivante.



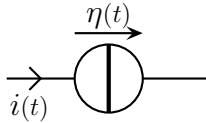
Son rôle est **d'imposer** une tension appelée *force électromotrice* (f.é.m.) entre ses bornes. Cette f.é.m. peut être constante (dite aussi « continue ») E , variable $e(t)$, périodique ou non, positive, négative, alternative ...

Le sens dans lequel la f.é.m. est comptée est évidemment celui représenté, *ie.* la loi constitutive s'écrit $u(t) = +e(t)$, même si $e(t) < 0$.

- ◇ Les f.é.m. utilisées en TP sont de l'ordre de la dizaine de volts.

I.2.iv – le générateur idéal de courant

Un *générateur idéal de courant* se symbolise de la manière suivante.



Son rôle est **d'imposer** une intensité appelée *courant électromoteur* (c.é.m.) le traversant. Cette c.é.m. peut être constante (dite aussi « continue ») E , variable $e(t)$, périodique ou non, positive, négative, alternative ...

Le sens dans lequel le c.é.m. est compté est évidemment celui représenté, *ie.* la loi constitutive s'écrit $i(t) = +\eta(t)$, même si $\eta(t) < 0$.

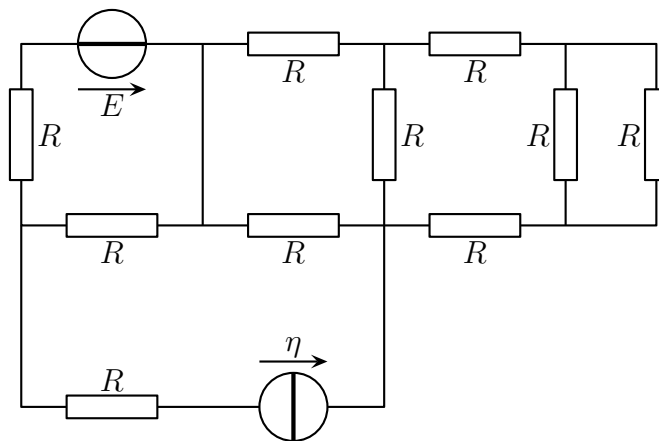
- ◇ En TP nous utiliserons plus facilement des générateurs de tension que de générateurs de courants.
- ◇ Ceci dit, les générateurs de courant permettent d'étudier plus facilement nombre de circuits.

I.3 – Décrire un circuit

- ◇ C'est important de savoir décrire un circuit puisqu'après il faudra lui appliquer des lois qui nécessiteront de connaître précisément le circuit.

I.3.i – il faut d'abord du vocabulaire.

- ◇ Tout d'abord un circuit « complexe ».



★ la branche

Une *branche* est un ensemble de dipôles mis bout à bout, l'un à la suite de l'autre sans que rien de supplémentaire ne soit branché au milieu d'eux.

- ◇ Étant donné ce qui a été dit auparavant, notamment sur l'ARQS :

L'intensité d'un courant est la même tout au long de la branche.

- ✧ Dans l'exemple précédent, il y a 10 branches dont deux sont composées de deux dipôles. Les branches où il n'y a qu'un fil ne sont pas vraiment des branches mais des artefacts de présentation. Artefacts bien pratiques néanmoins.

★ le nœud

Un *nœud* est un point de jonction entre plusieurs dipôles.

- ✧ Fatalement au moins 2 dipôles ! Sauf que s'il n'y en a que deux dipôles reliés ensemble, cela implique qu'ils sont sur la même branche, c'est un nœud un peu moins intéressant *a priori*.
- ✧ Nous verrons plus tard que ces nœuds sont anodins s'il est possible d'associer les deux dipôles en question ou sont fondamentaux sinon.
- ✧ Quoiqu'il en soit, les nœuds auxquels sont reliés au moins trois dipôles seront eux **systematiquement** intéressants, c'est pourquoi nous les distinguerons, au moins dans un premier temps.

Un *nœud principal* est un point de jonction entre au moins 3 dipôles.

- ✧ Les nœuds sont souvent notés avec des lettres.
- ✧ Les nœuds peuvent parfois être éclatés et faire apparaître des branches « vides ». Attention, c'est source de danger !
- ✧ Dans l'exemple précédent, il y a 8 nœuds dont 6 principaux.

★ la maille

Une *maille* est un ensemble de branches formant une boucle.

- ✧ Dénombrer les mailles n'est *a priori* pas facile car il y a beaucoup de choix possible. Mais en fait c'est simplissime : il suffit de compter le nombre de trous.
- ✧ Dans l'exemple précédent, il y a 5 mailles.

I.3.ii – deux approches possibles

★ l'approche maillère

Elle consiste à s'intéresser surtout aux mailles et à ce qui les caractérise : l'intensité qui les traverse.

★ l'approche nodale

Elle s'intéresse aux nœuds et à ce qui les caractérise : les potentiels.

★ comment choisir ?

Ça dépend :

- le circuit est simple : il est possible de donner le résultat directement ou presque
- le circuit est complexe :
 - il faut d'abord chercher à le simplifier pour se ramener au cas précédent
 - sinon il suffit de regarder ce qui est intéressant : une intensité ou une tension ? L'approche s'en déduit alors automatiquement.

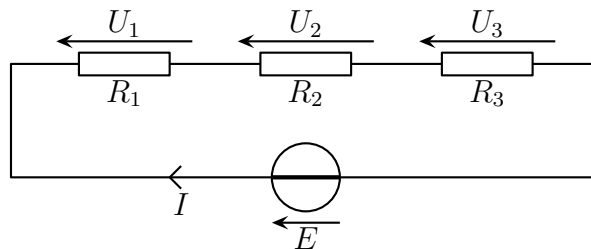
⛔ Attention : pour chaque approche, il faut parfaitement bien décrire soit les mailles, soit les nœuds. L'approche la plus naturelle c'est l'approche maillère mais la plus puissante est très souvent l'approche nodale.

II – Étude par équivalence

II.1 – Des réponses à des circuits simples

II.1.i – circuit à une maille

✧ Considérons l'exemple ci-dessous.

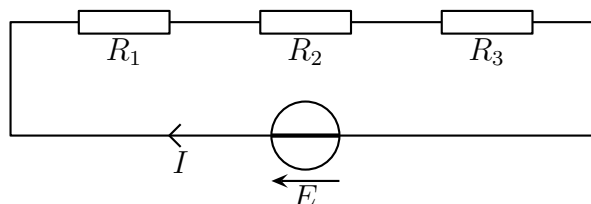


✧ Une seule maille donc un courant unique pour **tous** les dipôles ! La seule inconnue c'est le courant !

- si le courant est connu parce qu'il y a un générateur idéal de courant, il suffit d'écrire les relations courant – tensions des autres dipôles.
- si le courant est inconnu parce qu'il s'agit d'un générateur idéal de tension, alors ...

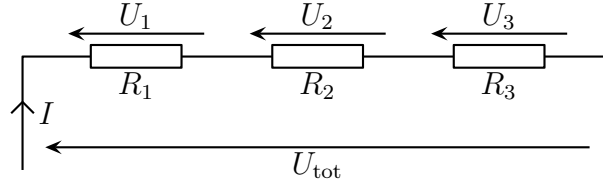
Dans un circuit à une maille avec un générateur idéal de tension et des résistances, l'intensité prise dans le sens de la f.é.m. du générateur vaut :

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$



✧ Interprétation : le générateur idéal de tension impose la tension, donc l'énergie disponible pour tout le circuit. Plus on lui rajoute de résistance, plus le courant, pour une même énergie a du mal à passer.

Relation dite « DIVISEUR DE TENSION ».



Lorsque des résistances sont sur une même branche, la tension au borne de la i -ème vaut :

$$U_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2 + R_3} U_{\text{tot}}$$

où U_{tot} est la tension au bornes de la totalité de la branche **et** dans le même sens que U_i .

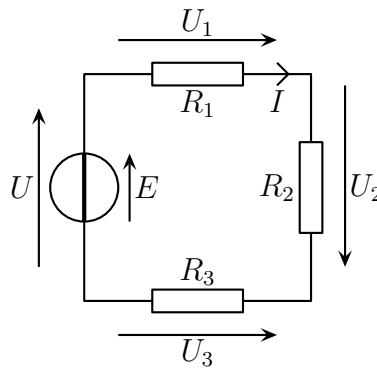
★ Démo

- ◇ Remplaçons U_{tot} par un générateur idéal de tension de f.é.m. U_{tot} et utilisons la relation courant – tension d'un résistor.

II.1.ii – première série d'idoiotons

★ idoioton 1

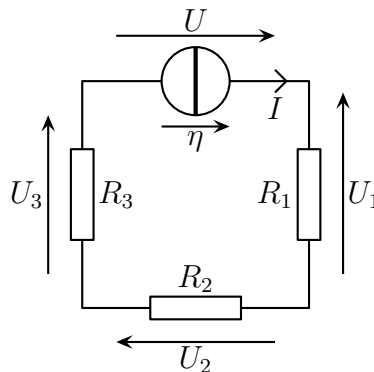
- ◇ Considérons le circuit ci-dessous.



- ◇ Analyse physique :
- régime continu
 - grandeurs pertinentes : E et les R
 - grandeurs inconnues : I et toutes les tensions aux bornes des résistances.
- ◇ Analyse technique :
- une seule maille → yesssss !
 - le générateur est un générateur idéal de tension : l'intensité n'est pas fixée par lui.
- ◇ Nous avons ainsi :
- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>→ $U = +E$</p> <p>→ $I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$</p> <p>→ $U_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} E$</p> | <p>→ $U_2 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} E$</p> <p>→ $U_3 = +\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E$</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

★ idoinoton 2

Considérons le circuit ci-dessous.



◇ Analyse physique :

- régime continu
- grandeurs pertinentes : η et les R
- grandeurs inconnues : toutes les tensions

◇ Analyse technique :

- une seule maille → yesssss !
- le générateur est un générateur idéal de courant : il suffit d'écrire les relations courant – tension

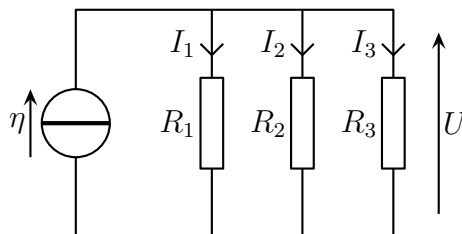
◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{array}{l|l} \rightarrow I = +\eta & \rightarrow U_2 = +R_2 \eta \\ \rightarrow U_1 = +R_1 \eta & \rightarrow U_3 = -R_3 \eta \end{array}$$

◇ Il manque une loi physique pour terminer et pour trouver U même si on s'en doute ...

II.1.iii – circuit à deux nœuds

◇ Considérons l'exemple ci-dessous.

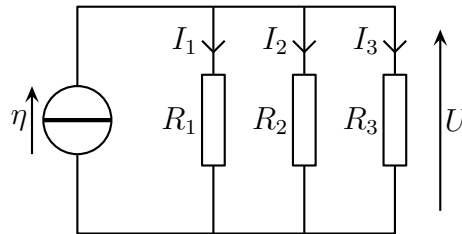


◇ Deux nœuds donc une tension unique pour **tous** les dipôles ! La seule inconnue c'est la tension !

- si la tension est connue parce qu'il y a un générateur idéal de tension, il suffit d'écrire les relations courant – tensions des autres dipôles ;
- si la tension est inconnue parce qu'il s'agit d'un générateur idéal de courant, alors ...

Dans un circuit à deux nœuds avec un générateur idéal de courant et des résistances simples constituant les autres branches, la tension prise dans le sens du c.é.m. du générateur vaut :

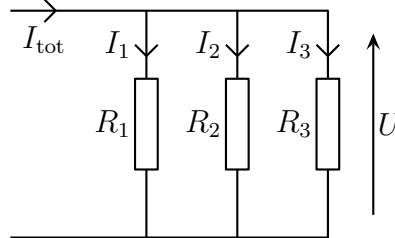
$$U = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3}$$



◇ Interprétation : le générateur idéal de courant impose un courant disponible pour tous, plus on met de points de passage disponibles, moins il y a besoin d'énergie pour faire passer le courant.

⊞ Nous avons donc $I = U \times (G_1 + G_2 + G_3)$: à U fixé, plus on met de résistors, donc de « résistances », plus I est grand !

Relation dite « diviseur de courant ».



Lorsque des résistances sont branchées sur deux même nœuds, l'intensité du courant traversant la i -ème vaut :

$$I_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + G_3} I_{\text{tot}}$$

où I_{tot} est l'intensité du courant arrivant dans le nœuds de tous les résistors considérés et dans le même sens que I_i .

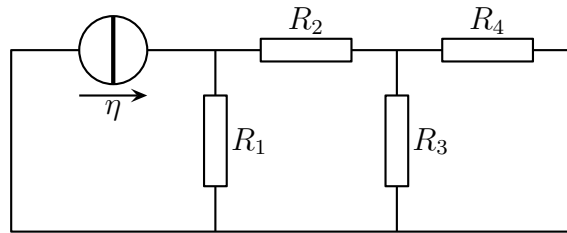
★ Démo

◇ Remplaçons I_{tot} par un générateur idéal de courant de c.é.m. I_{tot} et utilisons la relation courant – tension d'un résistor.

II.1.iv – deuxième série d'idoiotons

★ idoioton 1

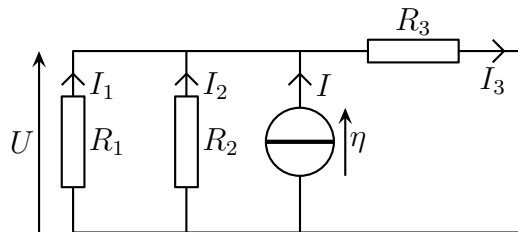
◇ Considérons le circuit ci-dessous.



- ◇ Analyse physique :
 - régime continu
 - grandeurs pertinentes : η et toutes les R
 - grandeurs : les potentiels de tous les nœuds et les courants de toutes (sauf une) les branches
- ◇ Analyse technique :
 - circuit à 3 mailles et à 3 nœuds → **nous ne savons pas (encore) faire !**

★ idoinoton 2

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous.

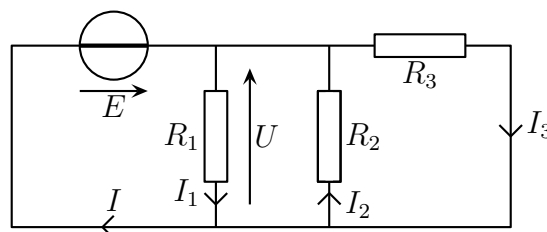


- ◇ Analyse physique :
 - régime continu
 - grandeurs pertinentes : η et toutes les R
 - grandeurs : les potentiels de tous les nœuds et les courants de toutes (sauf une) les branches
- ◇ Analyse technique :
 - circuit à 3 mailles et à 2 nœuds → Yesssssssss !
- ◇ Nous avons immédiatement :

<ul style="list-style-type: none"> → $I = +\eta$ → $U = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3}$ → $I_1 = -\frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \eta$ 	<ul style="list-style-type: none"> → $I_2 = -\frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \eta$ → $I_3 = +\frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \eta$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

★ idoinoton 3

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous.



- ◇ Analyse physique :
 - régime continu
 - grandeurs pertinentes : E et toutes les R

- grandeurs inconnues : les potentiels de tous les nœuds et les courants de toutes (sauf une) les branches
- ◇ Analyse technique :
 - circuit à 3 mailles et à 2 nœuds → Yessssssss !
- ◇ Nous avons immédiatement :

→ $U = +E$ → $I_1 = +G_1 U$	→ $I_2 = -G_2 U$ → $I_3 = +G_3 U$
--------------------------------	--------------------------------------
- ◇ Et il manque une loi pour trouver I .

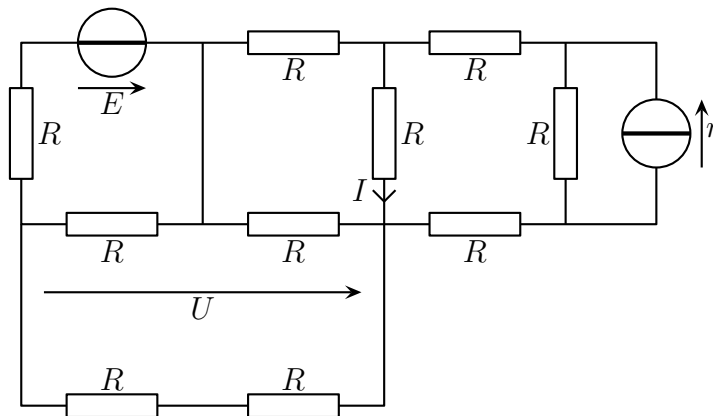
II.1.v – et maintenant ...

- ◇ Le but va désormais être de se ramener à un cas connu, *ie.* à un circuit soit à une maille, soit à deux nœuds. Pour cela nous allons transformer le circuit par morceaux.

II.2 – Qu'est-ce qu'un (morceau de) circuit équivalent ?

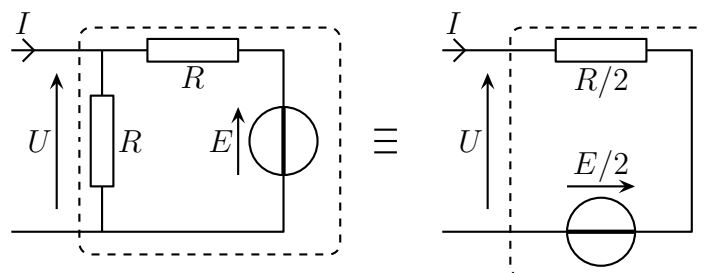
II.2.i – ce qui est important et ce qui ne l'est pas

- ◇ En général, il y a **une** grandeur particulière dans un circuit qui est intéressante : une tension ou une intensité.
- ◇ Séparons alors virtuellement la branche concernée par cette grandeur et repérons le reste.



II.2.ii – « si ce n'est pas différent, c'est que c'est pareil ! »

- ◇ Le but est d'interchanger deux morceaux de circuit équivalents.
- ◇ Dans le morceau de circuit ① ci-dessous, l'ensemble des deux résistances et du générateur constituent **un** dipôle puisque cet ensemble est relié au reste du circuit par deux bornes. Ce dipôle a une relation courant tension particulière (pour l'instant inconnue). Eh bien ce dipôle a exactement la même relation courant tension que le dipôle ② représenté.

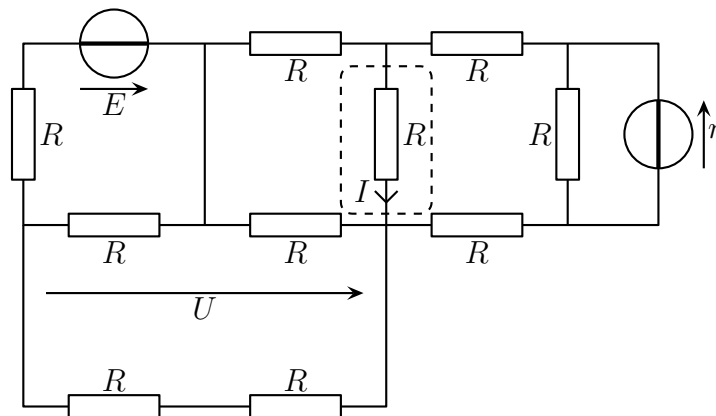


Deux dipôles sont dits *équivalents* s'ils ont la même relation courant – tension.

- ✧ Si les deux dipôles ① et ② étaient enfermés dans des boîtes, des mesures purement électrocinétiques de courant et de tension ne permettraient pas de distinguer l'un de l'autre.

II.2.iii – quels morceaux traiter par équivalence ?

- ✧ Nous allons évidemment laisser tranquille la branche intéressante et modifier le reste de manière à le simplifier jusqu'au point où on aura un cas connu : un circuit à une maille ou à deux nœuds.



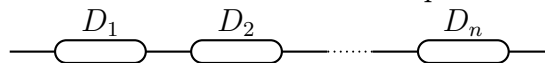
⛔ Il faudra faire attention lors des équivalences successives de bien refaire le circuit.

II.3 – Associer des dipôles

II.3.i – associer en série ou en parallèle

★ association série

Deux (ou plusieurs) dipôles sont associés en *série* lorsqu'ils sont sur une même branche.

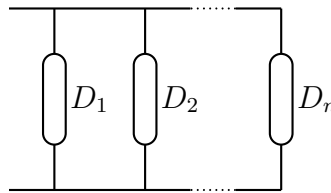


Des dipôles en série sont traversés par un même courant.

- ✧ Pour repérer si des dipôles sont en série, c'est simple, il suffit de regarder s'il y a (ou non) une bifurcation de fils entre un dipôle et un autre.

★ association parallèle

Deux (ou plusieurs) dipôles sont associés en *parallèle* lorsqu'ils sont reliés à deux mêmes nœuds.



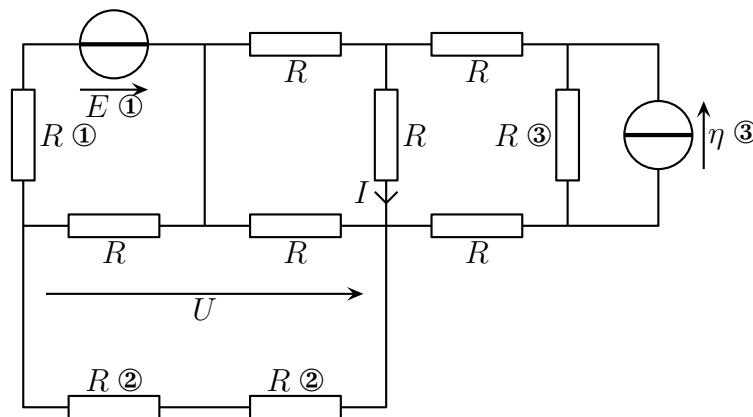
Des dipôles en parallèle ont la même tension entre leurs bornes.

✧ Pour repérer si des dipôles sont en parallèle, c'est simple, il suffit de colorier d'une couleur différente chaque nœud : si deux dipôles (ou plus) ont leurs bornes de même couleur, ils sont en parallèle, sinon non.

★ idoinoton

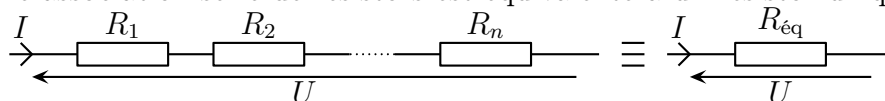
✧ Dans l'exemple ci-dessous :

- E ① et R ① sont en série ;
- R ② et R ② sont en série ;
- η ③ et R ③ sont en parallèle.



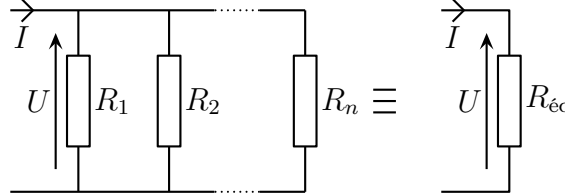
II.3.ii – association de résistors

Une association série de résistors est équivalente à un résistor unique.



La résistance du résistor équivalent vaut $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$.

Une association parallèle de résistors est équivalente à un résistor unique.



La conductance du résistor équivalent vaut $G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$.



Ici on parle de conductance et non de résistance.

◇ Pour le cas particulier où il n'y a que deux résistors, nous avons :

$$G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_{\text{eq}}} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \quad \rightsquigarrow \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

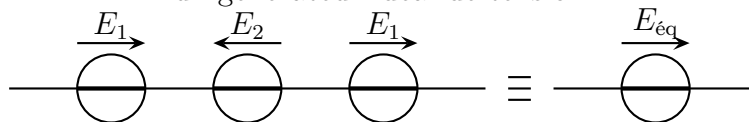
Deux résistors en parallèle de résistance R_1 et R_2 sont équivalents à un résistor unique de résistance $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



Ne pas généraliser : $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ est non homogène !

II.3.iii – association série de générateurs idéaux de tension

Une association série de générateurs idéaux de tension est équivalente à un générateur idéal de tension.



La f.é.m. du générateur équivalent est égal à la somme algébrique des f.é.m. des générateurs.

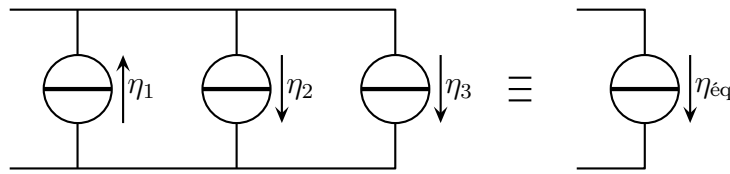
Ici $E_{\text{eq}} = +E_1 - E_2 + E_3$.



Pour l'association parallèle, on verra plus tard.

II.3.iv – association de générateurs idéaux de courant

Une association parallèle de générateurs idéaux de courant est équivalente à un générateur idéal de courant.



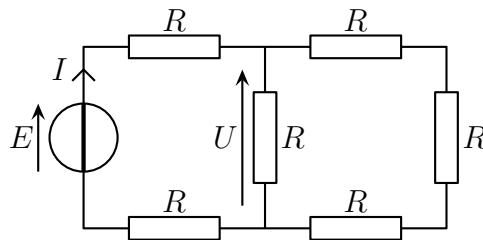
Le c.é.m. du générateur équivalent est égal à la somme algébrique des c.é.m. des générateurs.

Ici $\eta_{\text{éq}} = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

II.3.v – idoinotons

★ idoinoton 1

Considérons le circuit schématisé ci-dessous et cherchons la tension U et l'intensité I .



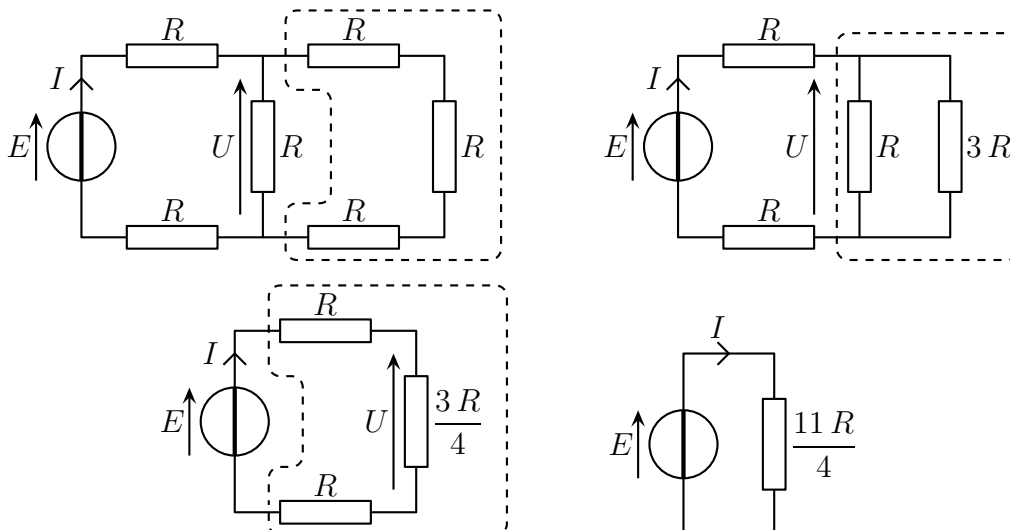
◇ Analyse physique :

- régime continu
- grandeurs pertinentes : tous les R et E
- grandeurs inconnues : U et I .

◇ Analyse technique :

- circuit à 2 mailles et deux principaux nœuds → la solution n'est pas loin

◇ Procédons par équivalence en faisant attention de bien conserver les grandeurs intéressantes.



◇ Nous obtenons alors :

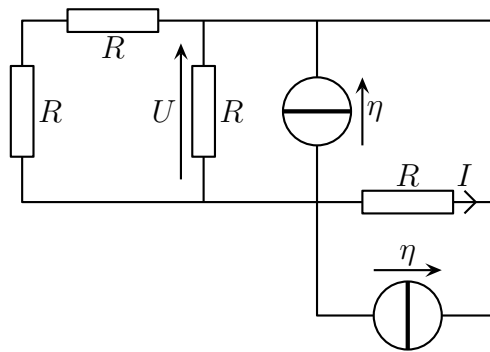
$$\rightarrow U = \frac{\frac{3R}{4}}{\frac{3R}{4} + R + R} E = \frac{3}{11} E$$

$$\rightarrow I = \frac{\frac{4}{11} E}{R} = \frac{4}{11} \frac{E}{R}$$

◇ Remarquons que pour la dernière équivalence, nous « perdons » la tension U . D'un autre côté, la dernière équivalence n'est pas nécessaire pour trouver I .

★ idoinoton 2

◇ Considérons le circuit schématisé ci-dessous pour lequel nous cherchons la tension U et l'intensité I .



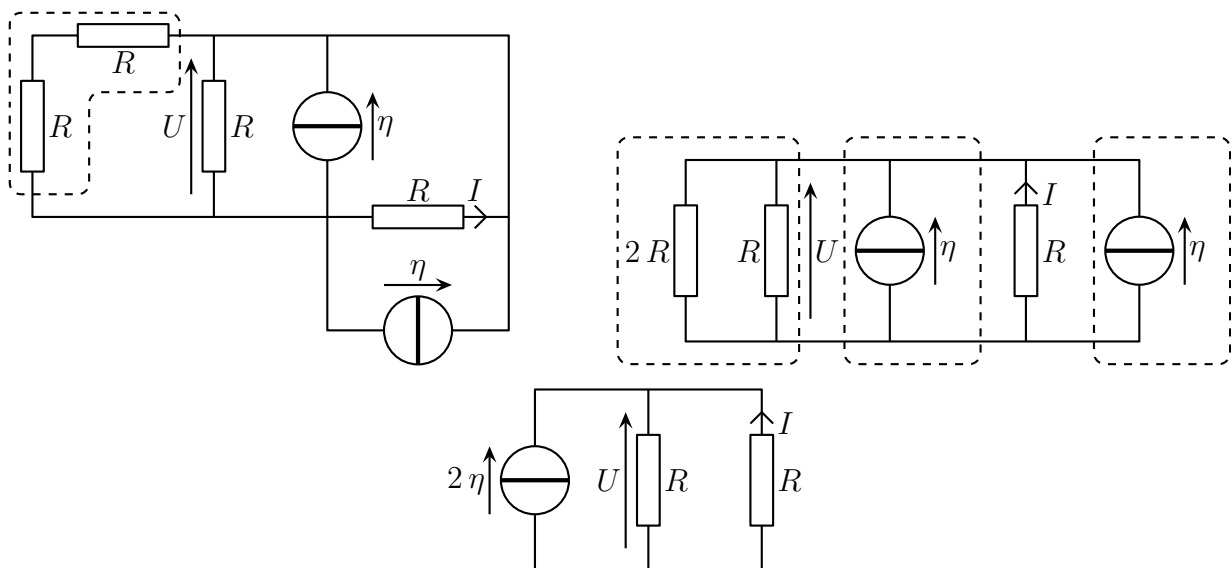
◇ Analyse physique :

- régime continu
- grandeurs pertinentes : tous les R et η
- grandeurs inconnues : U et I .

◇ Analyse technique :

- circuit à 5 branches reliées à deux nœuds principaux → la solution n'est pas loin

◇ Procédons par équivalence en faisant attention de bien conserver les grandeurs intéressantes.



◇ Nous avons alors :

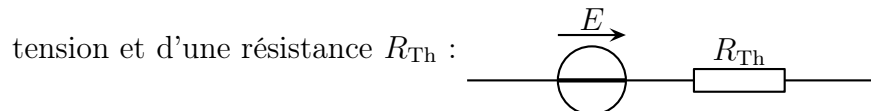
$$\rightarrow U = \frac{2\eta}{\frac{3}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{4}{5}\eta R$$

$$\rightarrow I = -\frac{\frac{1}{R}}{\frac{3}{2R} + \frac{1}{R}} 2\eta = -\frac{4}{5}\eta = -\frac{U}{R}$$

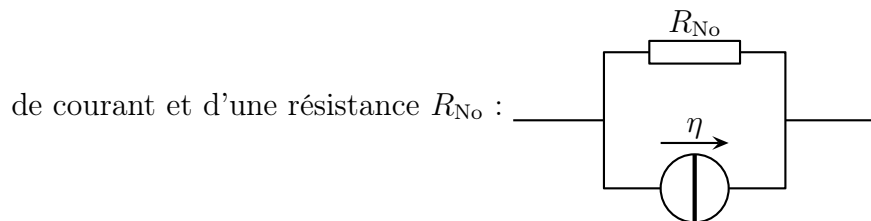
II.4 – Transformer une association série en une association parallèle

II.4.i – deux modèles de générateurs réels

Tout générateur réel (GBF, pile, ...) peut se modéliser de deux manières différentes.
Modèle de THÉVENIN, ie. sous la forme d'une association série d'un générateur idéal de



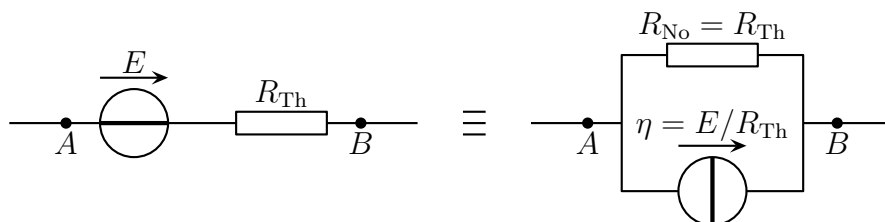
Modèle de NORTON, ie. sous la forme d'une association parallèle d'un générateur idéal



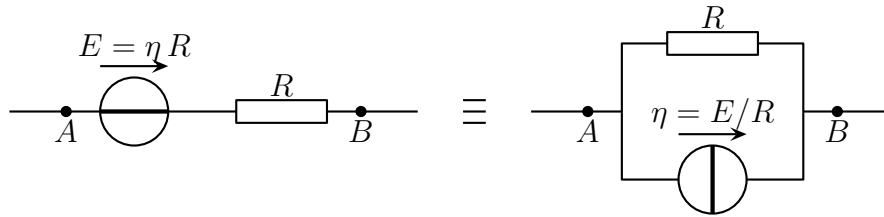
II.4.ii – équivalence entre les deux modèles

- ✧ Étant donné qu'il existe deux modèles différents pour représenter un même dipôle (à savoir un générateur réel), il est normal qu'il y ait des liens entre les grandeurs caractéristiques des modèles.

Les modèles de THÉVENIN et de NORTON d'un générateur réel sont équivalents lorsque $R_{Th} = R_{No}$ et $E = +\eta R$ si l'orientation est correcte.



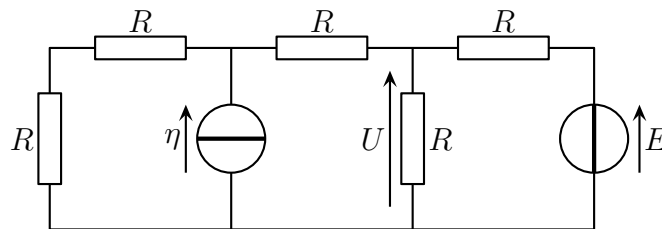
- ✧ En pratique nous utiliserons directement l'équivalence suivante :



II.4.iii – idoinotons

★ idoinoton 1

◇ Considérons le circuit schématisé ci-dessous pour lequel nous cherchons la tension U .



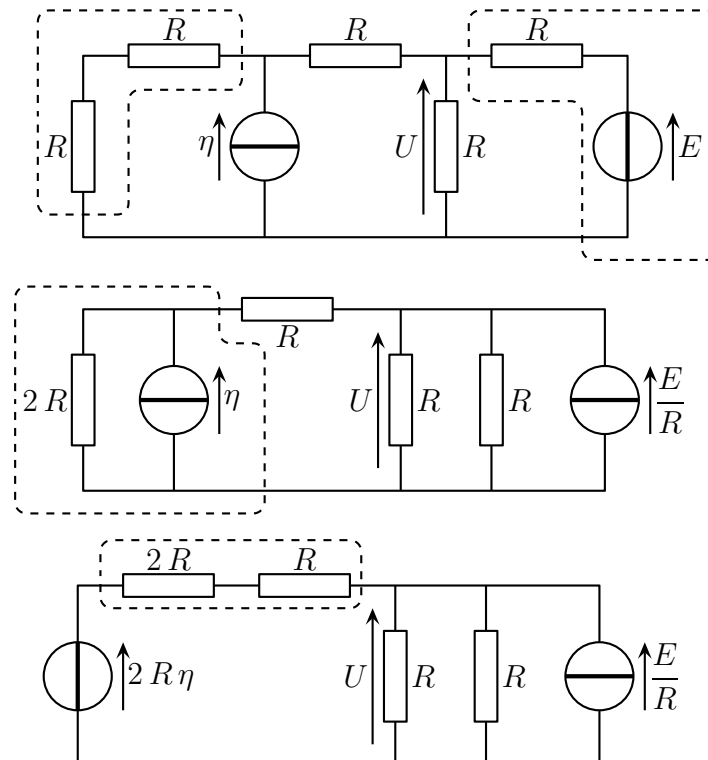
◇ Analyse physique :

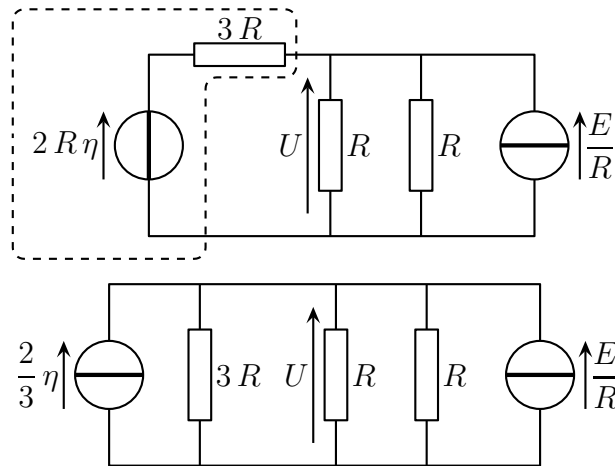
- régime continu
- grandeurs pertinentes : R , η et E .
- grandeur inconnue : U .

◇ Analyse technique :

- circuit à 5 branches reliées à trois nœuds principaux → il faudra procéder par équivalence.

◇ Allons-y par équivalence en faisant attention de bien conserver les grandeurs intéressantes.

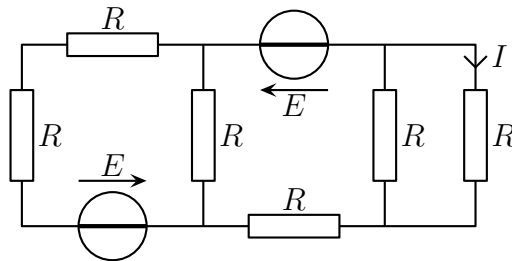




◇ Nous avons alors :
$$U = \frac{\frac{2}{3}\eta + \frac{E}{R}}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{2\eta R + 3E}{7}$$

★ idoinoton 2

◇ Considérons le circuit schématisé ci-dessous pour lequel nous cherchons l'intensité I .



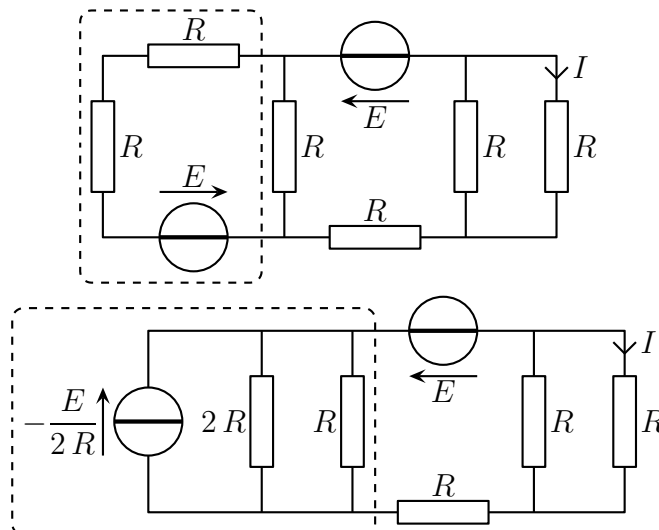
◇ Analyse physique :

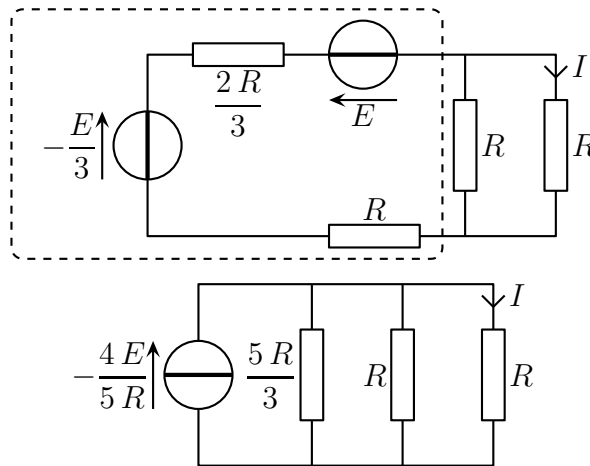
- régime continu
- grandeurs connues : tous les R , et E .
- grandeur inconnue : I .

◇ Analyse technique :

- circuit à 6 branches reliées à quatre nœuds principaux → il faudra procéder par équivalence.

◇ Procédons par équivalence en faisant attention de bien conserver les grandeurs intéressantes.

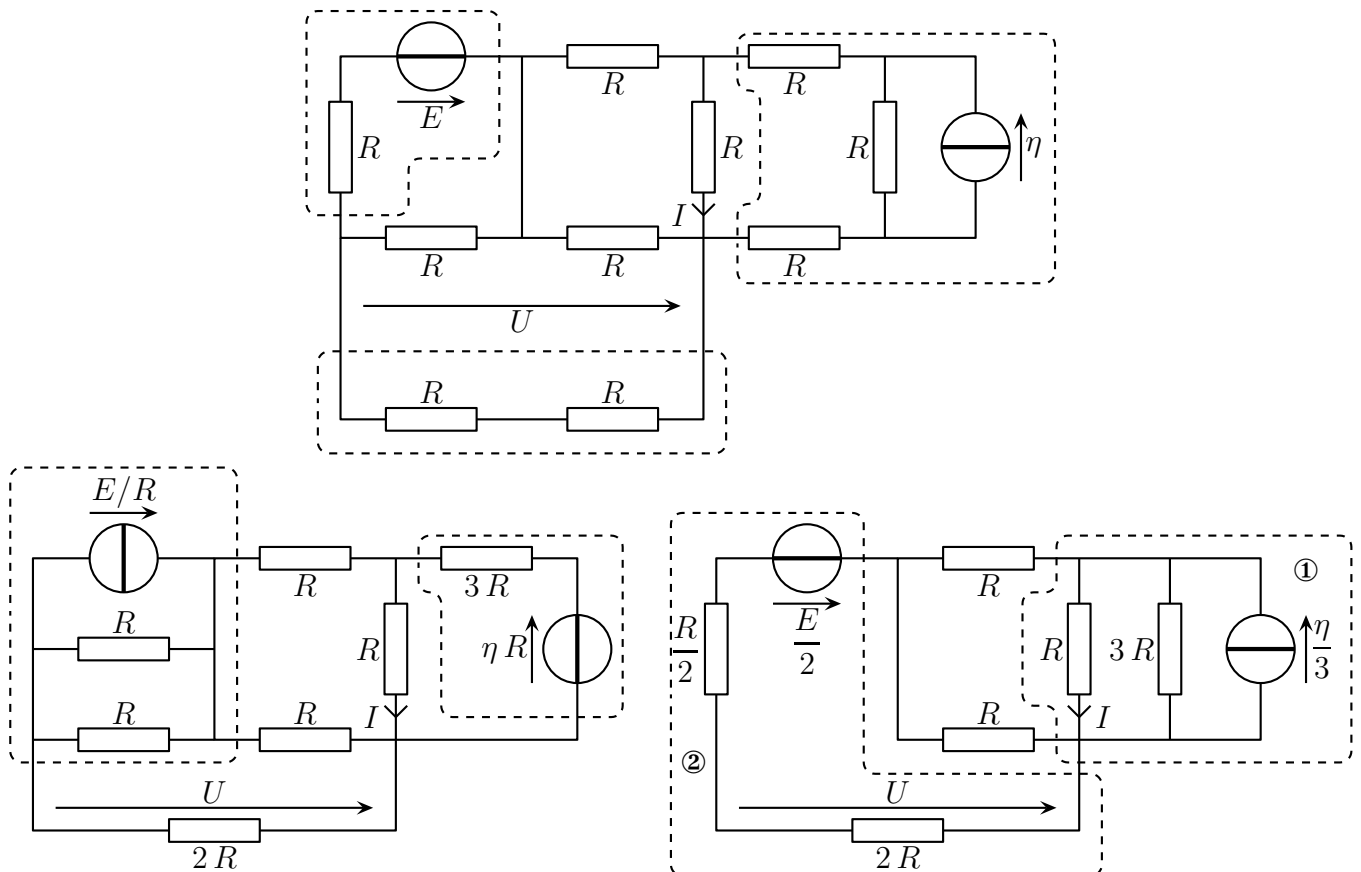




◇ Nous avons alors :
$$I = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{3}{5R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \left(-\frac{4E}{5R} \right) = -\frac{4E}{13R}$$

★ idoinoton 3

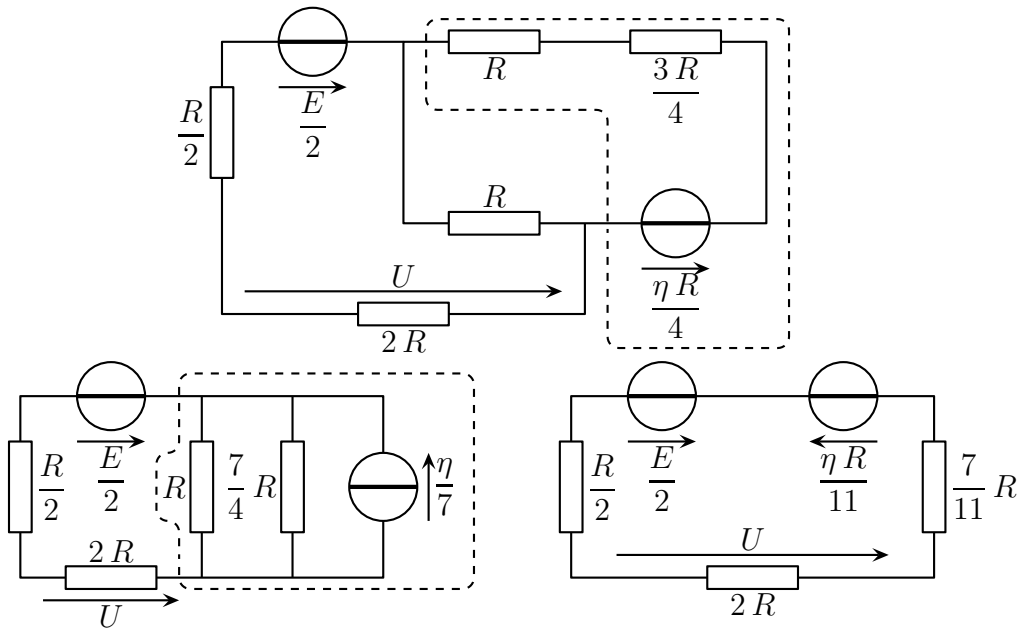
◇ Reprenons le circuit initial et transformons le par équivalence.



◇ Donc maintenant, soit nous continuons à modifier ① pour trouver U , soit nous continuons à modifier ② pour trouver I .

🔗 pour trouver U

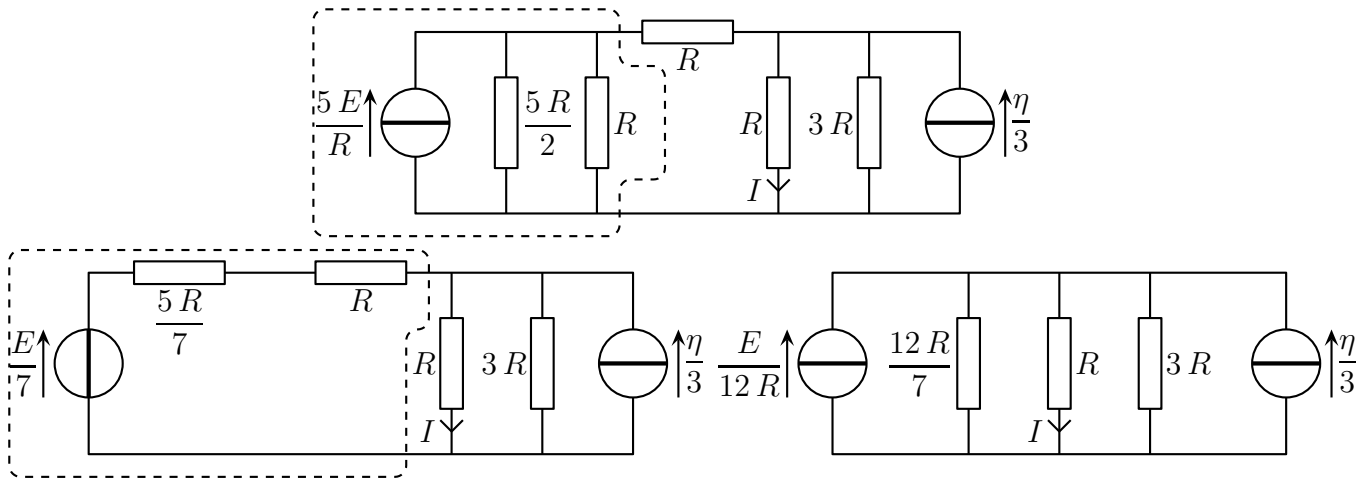
◇ Continuons les transformations par équivalence.



✧ Nous avons alors :

$$U = \frac{2R}{\frac{R}{2} + 2R + \frac{7}{11}R} \left(\frac{E}{2} - \frac{\eta R}{11} \right) = \frac{2R}{11 + 44 + 14} (11E - 2\eta R) = \frac{22E - 4\eta R}{69}$$

🔗 pour trouver I



✧ Nous avons alors :

$$I = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{7}{12R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} \left(\frac{\eta}{3} + \frac{E}{12R} \right) = \frac{\frac{1}{R}}{7 + 12 + 4} (4\eta R + E) = \frac{4\eta R + E}{23R}$$

Analyser un circuit électrocinétique

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - dipôle, circuit, branche, nœud, maille,
 - générateur idéal de courant, générateur idéal de tension, résistor, générateur réel de tension
 - association série, parallèle

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - intensité, tension
 - résistance, f.é.m., c.é.m
- ◇ Connaître le lien entre V , A et Ω .

★ Les lois

- ◇ Sont à savoir :
 - les relations courant – tension des générateurs idéaux, du résistor
 - les intensités et les tensions dans les circuits particuliers (à une maille ou à deux nœuds)
 - les équivalences entre dipôles (associations de résistors, modèles de Thévenin et Norton d'un générateur réel)

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir repérer quelles grandeurs sont *a priori* connues ou inconnues de manière à savoir ce qu'il est possible de laisser dans l'expression du résultat.

★ Analyse technique

- ◇ Pour rechercher une grandeur dans un circuit électrocinétique :
 - bien repérer les branches, nœuds et mailles d'un circuit
 - écrire directement la réponse si le circuit est particulier, le transformer sinon

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - associer des résistors en série et en parallèle
 - associer des générateurs idéaux
 - transformer un modèle de Thévenin en modèle de Norton

Table des matières

I	Tactiques d'approche	1
I-1	Qu'est-ce qu'un circuit électrique ?	1
I-1.i	aspect circuit	1
I-1.ii	aspect électrique	1
	l'intensité	2
	le potentiel	2
I-1.iii	mesurer une intensité	2
	expérimentalement	2
I-1.iv	mesurer un potentiel	3
	expérimentalement	3
I-1.v	régimes continu, variable, périodique	3
I-1.vi	... même combat à cause de l'ARQS	4
I-2	Les dipôles	5
I-2.i	comment les distinguer ?	5
	grandeurs caractéristiques	5
I-2.ii	le résistor idéal	5
I-2.iii	le générateur idéal de tension	6
I-2.iv	le générateur idéal de courant	7
I-3	Décrire un circuit	7
I-3.i	il faut d'abord du vocabulaire.	7
	la branche	7
	le nœud	8
	la maille	8
I-3.ii	deux approches possibles	8
	l'approche maillère	8
	l'approche nodale	8
	comment choisir ?	8
II	Étude par équivalence	9
II-1	Des réponses à des circuits simples	9
II-1.i	circuit à une maille	9
	Démo	10
II-1.ii	première série d'idoiotons	10
	idoioton 1	10
	idoioton 2	11
II-1.iii	circuit à deux nœuds	11
	Démo	12
II-1.iv	deuxième série d'idoiotons	12
	idoioton 1	12
	idoioton 2	13
	idoioton 3	13
II-1.v	et maintenant	14
II-2	Qu'est-ce qu'un (morceau de) circuit équivalent ?	14
II-2.i	ce qui est important et ce qui ne l'est pas	14
II-2.ii	« si ce n'est pas différent, c'est que c'est pareil ! »	14
II-2.iii	quels morceaux traiter par équivalence ?	15
II-3	Associer des dipôles	15
II-3.i	associer en série ou en parallèle	15

	association série	15
	association parallèle	16
	idoinoton	16
II.3.ii	association de résistors	16
II.3.iii	association série de générateurs idéaux de tension	17
II.3.iv	association de générateurs idéaux de courant	18
II.3.v	idoinotons	18
	idoinoton 1	18
	idoinoton 2	19
II.4	Transformer une association série en une association parallèle	20
II.4.i	deux modèles de générateurs réels	20
II.4.ii	équivalence entre les deux modèles	20
II.4.iii	idoinotons	21
	idoinoton 1	21
	idoinoton 2	22
	idoinoton 3	23

Électrocinétique

Chapitre 2

Étudier un circuit électrocinétique

Étudier un circuit électrocinétique

Le but de ce chapitre est d'apprendre à étudier plus précisément un circuit électrocinétique quelconque. Nous verrons ainsi les lois fondamentales qui régissent l'électrocinétique, ce qui nous permettra de démontrer les lois du chapitre précédent. En plus de cela nous aborderons l'aspect énergétique des circuits électrocinétique.

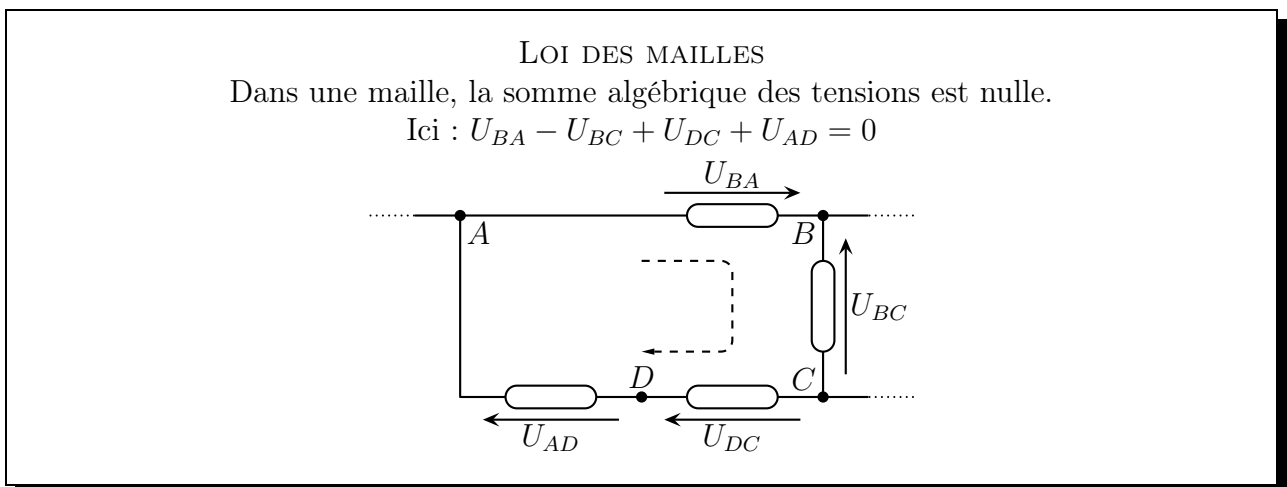
I – Étude par lois fondamentales

I.1 – Lois de KIRCHHOFF

I.1.i – domaine de validité

- ✧ Les lois qui suivent sont valables dans l'ARQS c'est-à-dire, en pratique, tout le temps.
- ✧ Rappelons que pour l'ARQS, il faut que la taille du circuit soit très inférieure à la distance de propagation de l'électricité (qui se propage à la vitesse c).

I.1.ii – lois des mailles, additivité des tensions



Il n'y a **que** les fils qui ne comptent pas : les interrupteurs ouverts eux, comptent !

★ démonstration

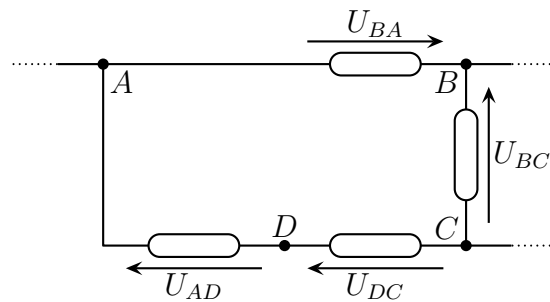
- ✧ Cela découle tout naturellement de la définition d'une tension :

$$0 = V_A - V_A = V_B - V_A + V_C - V_B + V_D - V_C + V_A - V_D = U_{BA} - U_{BC} + U_{DC} + U_{AD}$$

☞ *Remarque* : c'est bien une loi physique mais elle est cachée en fait. Cette loi dit « simplement » qu'il est **possible** d'écrire une tension sous la forme d'une différence de potentiels.

ADDITIVITÉ DES TENSIONS

La tension entre deux points peut s'écrire sous la forme de la somme des tensions entre des points intermédiaires.

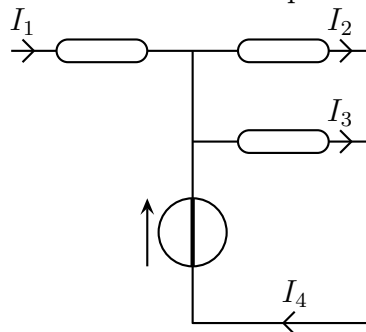


Ici $U_{BA} = -U_{AD} - U_{DC} + U_{BC}$.

I.1.iii – loi des nœuds

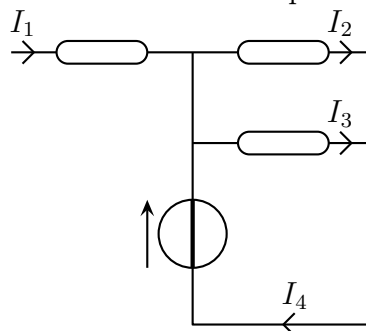
LOI DES NŒUDS

La somme algébrique des intensités des courants qui rentrent dans un nœud est nulle.



Ici $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$.

La somme des intensités des courants qui rentrent dans un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent.



Ici $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$.

I.1.iv – de belles lois à ne pas appliquer en l'état

✧ Les lois précédentes sont les lois fondamentales de l'électrocinétique, ce qui signifie qu'elles peuvent toujours être appliquées (dans l'ARQS).

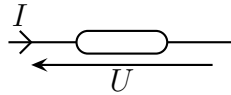
- ✧ Pouvoir toujours être utilisée implique qu'elles sont très générales et donc qu'elles seront souvent relativement inefficaces : ces lois sont à utiliser en dernier recours lorsqu'il ne sera pas possible de faire autrement (transformation de circuit, ...)
- ✧ Le gros problème de ces lois c'est qu'elles introduisent une énorme quantité d'inconnues. Ainsi, en les appliquant brutalement, nous devons introduire autant de tensions que de dipôles (interrupteur ouvert compris) et autant d'intensité que de branches. Cela devient très vite ingérable à moins d'avoir réduit autant que faire se peut le circuit au préalable et d'utiliser ces lois de manière efficace. Pour cela, il faut repenser des dipôles.

I.2 – Retour sur les dipôles

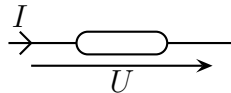
I.2.i – convention générateur ou récepteur

Il y a deux façons de parler de la relation courant – tension d'un dipôle. Ces deux façons sont appelées *convention générateur* et *convention récepteur*.

Un dipôle est dit en *convention récepteur* lorsque les flèches représentant la tension et le courant sont dans des sens opposés.



Un dipôle est dit en *convention générateur* lorsque les flèches représentant la tension et le courant sont dans des sens opposés.



☕ *Remarque* : la convention générateur n'est pas réservée aux générateurs même si, comme nous le verrons, elle leur est plus naturelle. Mais il est tout à fait possible d'étudier un résistor en convention générateur !

- ✧ Ces conventions permettent de savoir, justement, quelles sont les conventions prises pour le courant et la tension aux bornes du dipôle dont nous voulons parler : ces grandeurs étant arbitraires, la relation courant – tension change suivant la convention.

I.2.ii – lois constitutives – caractéristique

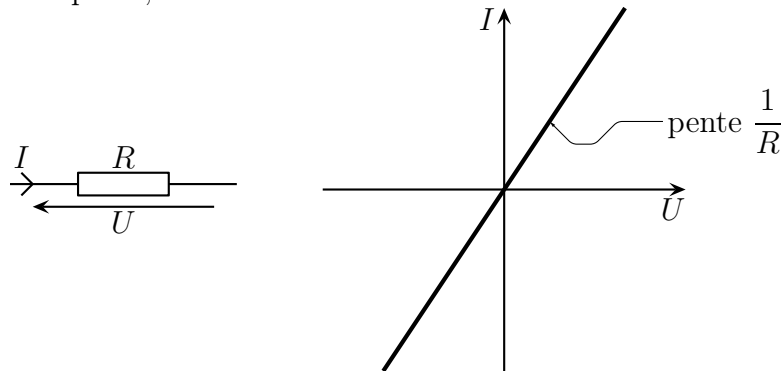
La *loi constitutive* d'un dipôle est la loi décrivant son fonctionnement.

- ✧ Une loi constitutive fait forcément intervenir une grandeur caractéristique du dipôle.

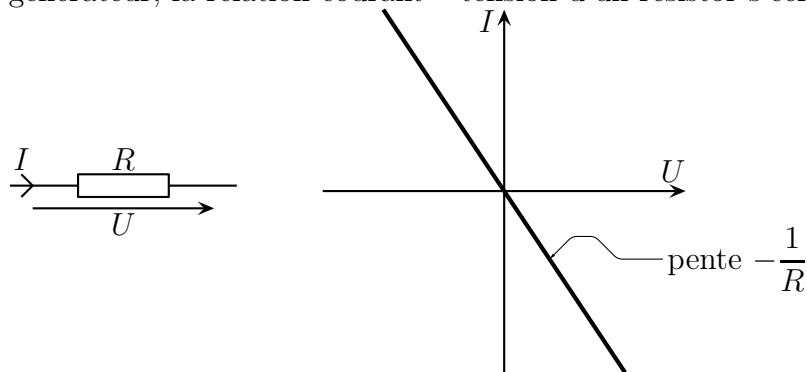
La *caractéristique* d'un dipôle est le graphe représentatif $I = f(U)$.

★ le résistor

En convention récepteur, la relation courant – tension d'un résistor s'écrit : $U = +RI$.



En convention générateur, la relation courant – tension d'un résistor s'écrit : $U = -RI$.

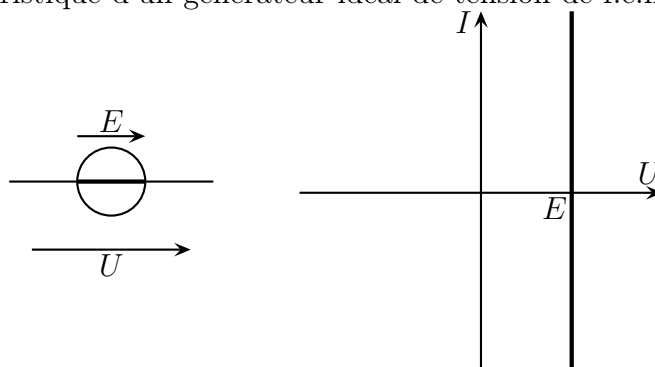


- ◇ Lorsqu'il faudra écrire la tension aux bornes d'un résistor, il faudra toujours faire très attention aux sens des flèches.

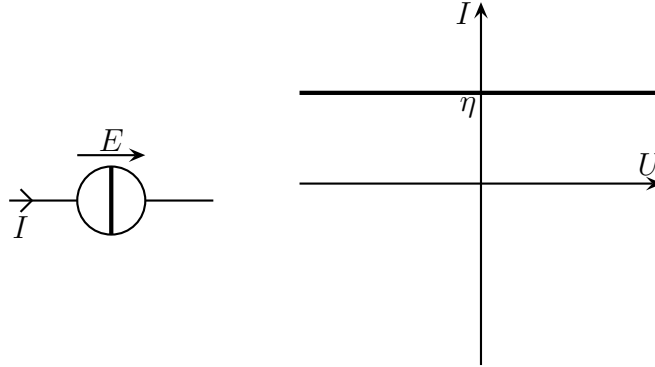
★ les générateurs idéaux

- ◇ Étant donné que leurs lois constitutives ne sont pas des relations courant – tension, il n'y a pas de problème de convention pour eux.

La caractéristique d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E est la suivante.



La caractéristique d'un générateur idéal de courant de c.é.m. η est la suivante.



I.2.iii – dipôle symétrique ou polarisé ?

- ◇ En TP, il faudra se poser la question : dans quel sens brancher les dipôles ?
- ◇ Il existe deux types de dipôles : ceux qui peuvent être branchés dans n'importe quel sens et ceux pour lesquels il faut faire attention au sens de branchement.

Un dipôle pouvant être branché dans un sens quelconque est appelé *symétrique*.

- ◇ Exemples : de très nombreux appareils ménagers.

Un dipôle pour lequel il faut faire attention au sens de branchement est appelé *polarisé*.

- ◇ Exemples : les piles dans les jouets.

★ reconnaître un dipôle symétrique d'un dipôle polarisé

- ◇ Lorsqu'un dipôle est branché « à l'envers », $I \rightarrow -I$ et $U \rightarrow -U$. Il faut donc que sur sa caractéristique, un point situé en $-I$ soit aussi situé en $-U$ ou réciproquement.
- ◇ Cela peut s'interpréter de deux manières :
 - pour que le dipôle soit symétrique, il faut $-I = f(-U)$, *ie.* $-f(U) = f(-U)$, c'est une fonction impaire
 - géométriquement il faut que la caractéristique soit symétrique par rapport au centre $(0,0)$.

Les résistors sont des dipôles symétriques.

Les générateurs idéaux sont polarisés.

I.3 – Approche maillère et lois de KIRCHHOFF

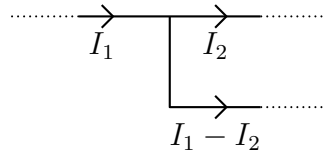
I.3.i – c'est quoi ?

- ◇ L'approche maillère consiste à voir le circuit comme un ensemble de mailles assemblées. Ce sont donc les lois des mailles qui vont être au cœur du raisonnement.

- ✧ Lorsqu'un circuit est étudié avec une approche maillère, s'il y a 3 mailles, il sera possible d'écrire 3 lois des mailles. Il faut donc qu'il y ait 3 inconnues de manière à obtenir un système de 3 équations à trois inconnues que nous pourrions facilement résoudre.
- ✧ Comme nous allons le voir, l'approche maillère permet de déterminer facilement des intensités. C'est donc une approche recommandée quand nous chercherons une telle grandeur.

I-3.ii – que faire de la loi des nœuds ?

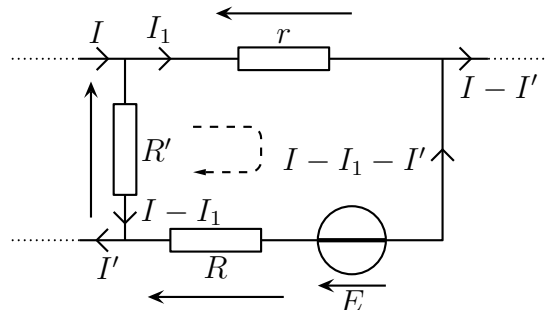
- ✧ Normalement, il faudrait autant de courant que de branches : c'est trop, beaucoup trop.
- ✧ Nous allons écrire directement les lois des nœuds sur le circuit de telle sorte que nous introduirons le nombre juste nécessaire de courant.



- ✧ Si tout est bien fait, il y aura autant de courants inconnues que de mailles : il faudra alors écrire autant de loi des mailles que de courant et le tour sera joué. Il y aura autant d'équations que d'inconnues.

I-3.iii – la loi des mailles en terme de courant

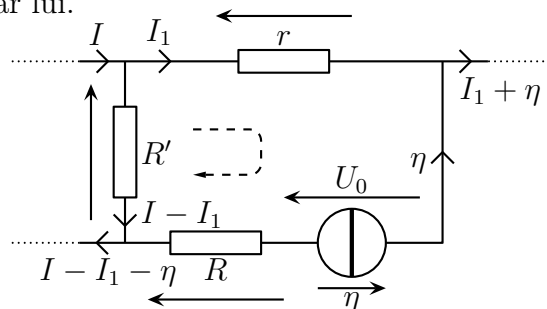
- ✧ Nous allons écrire directement la loi des mailles avec les relations courant – tensions des dipôles concernés. Pour cela il faudra faire attention à la convention. Il est possible de s'aider (au moins dans un premier temps) à mettre une flèche au-dessus des dipôles dans le sens récepteur. Mais attention : une simple flèche, pas de nom de tension !
- ✧ Commençons tout d'abord par bien écrire les lois des nœuds sur le circuit même.



- ✧ Ici la loi des mailles en terme de courants donne :

$$-r I_1 + E + R(I - I_1 - I') + R'(I - I_1) = 0$$

- ✧ L'approche maillère a pour but de déterminer les intensités qui circulent dans les différentes branches par l'intermédiaire des lois des mailles. Mais si un dipôle impose le courant dans sa branche (comme par exemple un générateur idéal de courant ou un interrupteur ouvert), il est alors **inutile** d'écrire une loi des mailles passant par lui.



✧ Ici la bonne loi des mailles s'écrit :

$$-r I_1 + U_0 + R \eta + R' (I - I_1) = 0$$

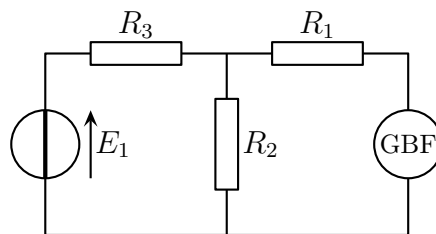
✧ Nous constatons alors que nous avons bien écrit une loi en plus, donc une équation en plus, mais avec une inconnue supplémentaire : cette loi est inutile **pour déterminer les intensités**. En fait cette loi permet de trouver la tension qu'il y a aux bornes du générateur de courant.

⊛ il est souvent tentant d'écrire une loi des mailles passant par un interrupteur ouvert. Il faut se garder de cette tentation car la loi ainsi écrite est au mieux inutile et le plus souvent fausse.

I.3.iv – circuit TP n°1

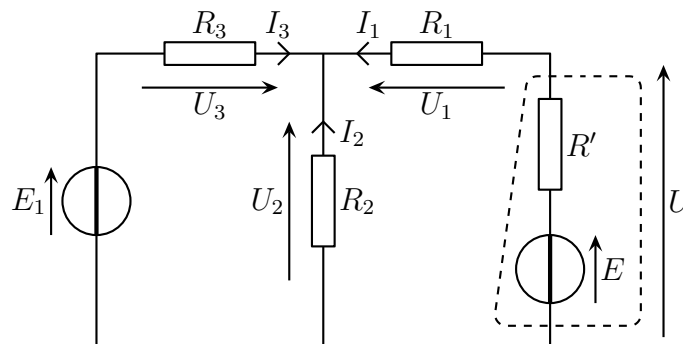
✧ Nous aimerions faire le circuit ci-dessous avec :

- $R_1 = 330 \, \Omega$; $R_2 = 100 \, \Omega$; $R_3 = 220 \, \Omega$
- $E_1 = 5,0 \, \text{V}$
- le GBF initialement réglé à $E = 6,0 \, \text{V}$.



✧ Le but va être de déterminer *a priori* toutes les intensités et toutes les tensions de manière à voir si aucune n'est dangereuse pour les dipôles.

✧ La première chose à faire est de conventionner le circuit, *ie.* d'écrire dessus la manière dont nous allons parler des intensités et des tensions, tout en remplaçant le GBF par son modèle électrocinétique.



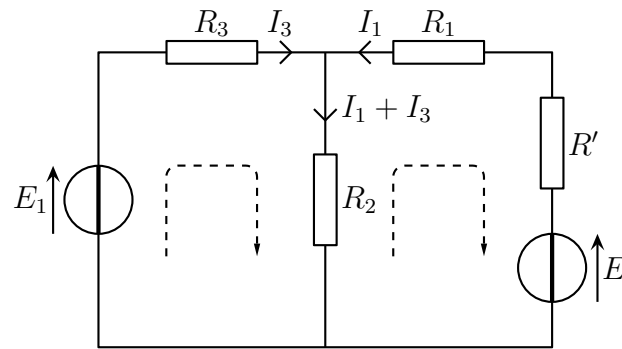
✧ Analyse physique :

- régime continu
- grandeurs pertinentes : $R_1, R_2, R_3, R' = 50 \, \Omega, E_1, E$

✧ Analyse technique :

- c'est un circuit à deux mailles et cinq nœuds dont deux principaux
- étant donné que de nombreuses grandeurs sont recherchées, il risque de ne pas être très pertinent de transformer le circuit, autant en chercher le maximum d'un coup
- comme il y a deux mailles, l'approche maillère va donner deux inconnues, donc deux lois à écrire : c'est parti

✧ Conservons les deux seules inconnues I_1 et I_3 , nous retrouverons tout le reste après, avec.



◇ Les deux lois des mailles en terme de courant s'écrivent :

$$\begin{cases} E_1 - R_3 I_3 - R_2 (I_1 + I_3) = 0 \\ R_2 (I_1 + I_3) + R_1 I_1 + R' I_1 - E = 0 \end{cases}$$

◇ Maintenant, ce ne sont plus que des calculs. Nous commençons par réarranger les termes : les inconnues d'un côté, les grandeurs connues de l'autre.

$$\begin{cases} R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_3 = E_1 \quad (\odot) \\ (R' + R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_3 = E \quad (\ominus) \end{cases}$$

◇ Nous pouvons alors « éliminer » l'inconnue I_3 en faisant $R_2 \times (\odot) - (R_2 + R_3) \times (\ominus)$. Cela conduit à :

$$\begin{aligned} R_2^2 I_1 - (R_2 + R_3) (R' + R_1 + R_2) I_1 &= R_2 E_1 - (R_2 + R_3) E \\ \rightsquigarrow I_1 &= \frac{R_2 E_1 - (R_2 + R_3) E}{R_2^2 - (R_2 + R_3) (R' + R_1 + R_2)} = 9,9 \text{ mA} \end{aligned}$$

◇ Nous pouvons alors en déduire :

$$\boxed{U_1 = -R_1 I_1 = -4,13 \text{ V}} \quad \text{et} \quad \boxed{U = E - R' I_1 = 5,37 \text{ V}}$$

◇ À partir du système précédent, nous pouvons de même « éliminer » I_1 en faisant $(R' + R_1 + R_2) \times (\odot) - R_2 \times (\ominus)$:

$$\begin{aligned} (R_2 + R_3) (R' + R_1 + R_2) I_3 - R_2^2 I_3 &= (R' + R_1 + R_2) E_1 - R_2 E \\ \rightsquigarrow I_3 &= \frac{(R' + R_1 + R_2) E_1 - R_2 E}{(R_2 + R_3) (R' + R_1 + R_2) - R_2^2} = 12,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

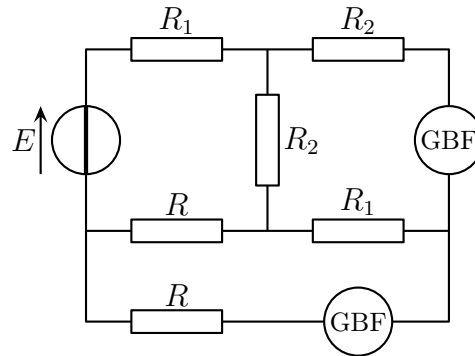
◇ Nous pouvons alors calculer les dernières grandeurs :

$$\boxed{U_3 = -R_3 I_3 = -2,76 \text{ V}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = -I_1 - I_3 = -22 \text{ mA}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_2 = R_2 (I_1 + I_3) = 2,24 \text{ V}}$$

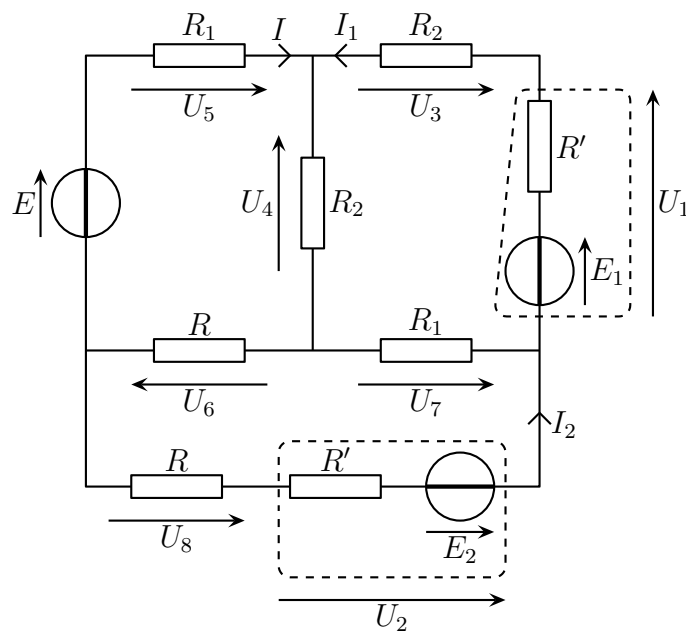
◇ Nous contrôlerons en TP ces calculs. Si ce n'est pas déjà fait !

I-3.v – circuit TP n°2

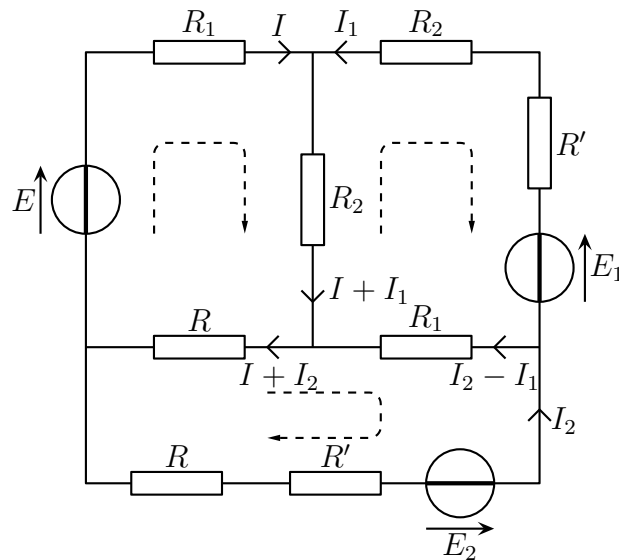
- ◇ Même chose mais en plus complexe tout en restant aussi facile.
- ◇ Nous aimerions faire le circuit ci-dessous avec :
 - $R = 82 \, \Omega$; $R_1 = 100 \, \Omega$; $R_2 = 220 \, \Omega$
 - $E = 12,0 \, \text{V}$
 - un GBF initialement réglé à $E_1 = 10,0 \, \text{V}$ et l'autre à $E_2 = 8,0 \, \text{V}$



- ◇ Le but va être de déterminer *a priori* toutes les intensités circulant dans les générateurs et toutes les tensions de manière à voir si aucune n'est dangereuse pour les dipôles.
- ◇ La première chose à faire est de conventionner le circuit, *ie.* d'écrire dessus la manière dont nous allons parler des intensités et des tensions, tout en remplaçant les GBF par leur modèle électrocinétique.



- ◇ Analyse physique :
 - régime continu
 - grandeurs pertinentes : R_1 , R_2 , R_3 , $R' = 50 \, \Omega$, E , E_1 et E_2 .
- ◇ Analyse technique :
 - c'est un circuit à trois mailles et quatre nœuds principaux (9 en tout) : pas de solutions directe
 - étant donné que nous cherchons de nombreuses grandeurs, il risque de ne pas être très pertinent de transformer le circuit, autant en chercher le maximum d'un coup
 - comme il y a trois mailles, l'approche maillère va donner trois inconnues, donc trois lois à écrire : c'est parti
- ◇ Nous cherchons déjà trois intensités : I , I_1 et I_2 . Ce seront nos inconnues. Normalement, toutes les autres s'en déduisent.



✧ Les trois lois des mailles en terme de courant s'écrivent donc :

$$\begin{cases} +E - R_1 I - R_2 (I + I_1) - R (I + I_2) = 0 \\ +R_2 (I + I_1) + R_2 I_1 + R' I_1 - E_1 - R_1 (I_2 - I_1) = 0 \\ +R (I + I_2) + R_1 (I_2 - I_1) - E_2 + R' I_2 + R I_2 = 0 \end{cases}$$

✧ Maintenant, ce ne sont plus que des calculs. Nous commençons par réarranger les termes : les inconnues d'un côté, les grandeurs connues de l'autre.

$$\begin{cases} (R + R_1 + R_2) I & + R_2 I_1 & + R I_2 & = E \\ R_2 I & + (2 R_2 + R_1 + R') I_1 & - R_1 I_2 & = E_1 \\ R I & - R_1 I_1 & + (2 R + R_1 + R') I_2 & = E_2 \end{cases}$$

✧ Nous pouvons résoudre cela à la main, mais cela ne présente guère d'intérêt. Nous allons plutôt utiliser un logiciel de calculs formels qui nous donne le résultat :

$$\begin{aligned} sol := \left\{ \begin{aligned} i1 &= \frac{R R_2 e_2 + 3 R R_1 e_1 - R R_1 e + R_1^2 e_2 + R_1^2 e_1 + R^2 e_1 - 2 R R_2 e + R_p R_2 e_1 + 2 R R_2 e_1 - R_2 R_p e + R_p R_1 e_1 - R_2 R_1 e + R_1 R_2 e_1 + R R_1 e_2 + R_1 R_2 e_2 + R R_p e_1}{6 R R_1 R_2 + R_2^2 R_p + 4 R R_1 R_p + R_p^2 R_1 + 4 R R_p R_2 + R_p^2 R_2 + 4 R_1 R_p R_2 + R^2 R_p + R^2 R_1 + 2 R R_2^2 + R_2^2 R_1 + 2 R_1^2 R_2 + 2 R R_1^2 + 2 R_1^2 R_p + 2 R^2 R_2 + R R_p^2} \\ i &= \frac{-R R_1 e_1 - R R_1 e_2 + 2 R R_1 e - 2 R R_2 e_1 - 2 R R_2 e_2 - R R_p e_2 + 2 R R_p e + 4 R R_2 e + 2 R_p R_1 e + 2 R_2 R_1 e - R_1 R_2 e_1 - R_1 R_2 e_2 + 2 R_2 R_p e - R_p R_2 e_1 + e R_p^2}{6 R R_1 R_2 + R_2^2 R_p + 4 R R_1 R_p + R_p^2 R_1 + 4 R R_p R_2 + R_p^2 R_2 + 4 R_1 R_p R_2 + R^2 R_p + R^2 R_1 + 2 R R_2^2 + R_2^2 R_1 + 2 R_1^2 R_2 + 2 R R_1^2 + 2 R_1^2 R_p + 2 R^2 R_2 + R R_p^2} \\ i2 &= -\frac{R_2 R_1 e - 3 R_1 R_2 e_2 - R_1 R_2 e_1 - 2 R R_2 e_2 + 2 R R_2 e - R_1^2 e_2 - R R_1 e_2 + R R_1 e - R R_1 e_1 - R R_2 e_1 - R_1^2 e_1 - R_p R_1 e_2 - R_p R_2 e_2 - R_2^2 e_2 - R R_p e_2 + R R_p e}{6 R R_1 R_2 + R_2^2 R_p + 4 R R_1 R_p + R_p^2 R_1 + 4 R R_p R_2 + R_p^2 R_2 + 4 R_1 R_p R_2 + R^2 R_p + R^2 R_1 + 2 R R_2^2 + R_2^2 R_1 + 2 R_1^2 R_2 + 2 R R_1^2 + 2 R_1^2 R_p + 2 R^2 R_2 + R R_p^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

✧ Numériquement, nous obtenons :

$$\boxed{I = 21,2 \text{ mA}} \quad \boxed{I_1 = 11,2 \text{ mA}} \quad \boxed{I_2 = 12,5 \text{ mA}}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire :

$$\begin{aligned} &\boxed{U_1 = E_1 - R' I_1 = 9,44 \text{ V}} & \boxed{U_2 = E_2 - R' I_2 = 7,37 \text{ V}} \\ &\boxed{U_3 = R_2 I_1 = 2,46 \text{ V}} & \boxed{U_4 = R_2 (I + I_1) = 7,12 \text{ V}} & \boxed{U_5 = -R_1 I = -2,12 \text{ V}} \\ &\boxed{U_6 = -R (I + I_1) = -2,76 \text{ V}} & \boxed{U_7 = R_1 (I_2 - I_1) = 0,134 \text{ V}} & \boxed{U_8 = -R I_2 = -1,03 \text{ V}} \end{aligned}$$

✧ Nous contrôlerons en TP ces calculs. Si ce n'est pas déjà fait !

I-4 – Approche nodale et lois de KIRCHHOFF

I-4.i – c'est quoi ?

- ✧ L'approche nodale consiste à voir le circuit comme un ensemble de nœuds : ce sont donc ces lois des nœuds qui vont être au cœur du raisonnement. Les inconnues seront les potentiels associés à ces nœuds.
- ✧ Lorsque nous regardons un circuit avec une approche nodale, s'il y a 3 nœuds, nous pourrions écrire 3 lois mais en fait seules 2 seront utiles. En effet : comment imaginer un circuit à un seul nœud ? C'est impossible et cela signifie qu'il y a toujours un nœud « en trop », celui nécessaire à la fermeture du circuit.
- ✧ Ainsi avec 3 nœuds, nous n'aurons que deux lois. Il faudrait alors 2 inconnues seulement ce qui semble difficilement compatible avec le fait qu'il y a trois potentiels inconnus. Mais en fait, non, tout va bien parce que le potentiel est défini à une constante arbitraire près : il suffit donc de choisir arbitrairement la valeur d'un des nœuds et les autres seront alors parfaitement définis. Pour d'évidentes raisons de simplicité, nous choisirons la valeur nulle à ce nœud si particulier et le nommera « masse ».
- ✧ Comme nous allons le voir, l'approche maillière permet de déterminer facilement des potentiels. C'est donc une approche recommandée quand nous rechercherons une tension.

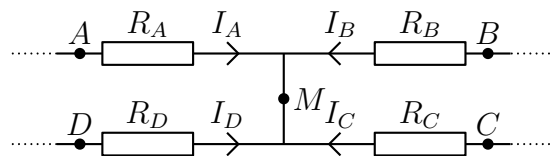
I-4.ii – additivité des tensions – masse d'un circuit

- ✧ Tout comme nous écrivons directement la loi des nœuds sur le circuit lors d'une approche maillière, nous allons poser arbitrairement le potentiel nul, quelque part dans le circuit.
- ✧ Le mieux, c'est à côté de générateurs de tension de telle sorte que les potentiels de l'autre côté du générateur soit connu.

La *masse* se symbolise par  et représente le point du circuit où le potentiel est nul.

I-4.iii – loi des nœuds en terme de potentiel

- ✧ Pour éviter d'écrire des intensités dans le circuit, nous écrirons directement les relations courant – tension dans la loi des nœuds mais cette fois, avec des potentiels.
- ✧ Considérons l'exemple suivant.



- ✧ La loi des nœuds s'écrit, normalement : $I_A + I_B + I_C + I_D = 0$.
- ✧ En utilisant les lois constitutives des résistors, nous obtenons, en remplaçant par des différences de potentiels :

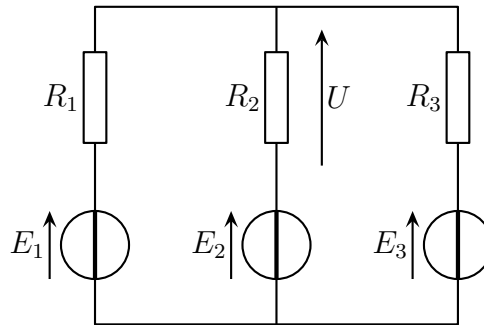
$$\frac{V_A - V_M}{R_A} + \frac{V_B - V_M}{R_B} + \frac{V_C - V_M}{R_C} + \frac{V_D - V_M}{R_D} = 0$$

- ✧ C'est un geste technique à savoir faire « les yeux fermés ».

I-4.iv – idoinotons

★ idoinoton 1

◇ Considérons le circuit ci-dessous pour lequel nous voulons déterminer la tension U .



◇ Analyse physique :

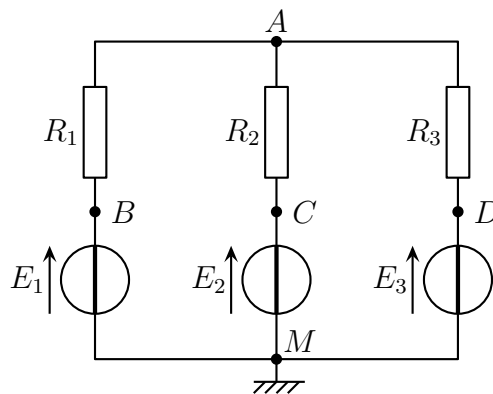
- régime continu
- grandeurs pertinentes : toutes les résistances et toutes les f.é.m.
- grandeurs inconnues : toutes les intensités circulant dans les différentes branches

◇ Analyse technique :

- c'est un circuit à deux mailles et deux nœuds principaux (5 en tout), mais où il y a plus d'un dipôle par branche : réponse pas évidente
- le but est d'obtenir une tension : l'approche nodale semble la meilleure
- avec 5 nœuds, il devrait y avoir 4 inconnues, sauf que les deux générateurs de tension en « enlève » deux, il n'en reste donc qu'une : une loi donnera immédiatement la réponse

◇ Maintenant agissons :

- fixons la masse, la plus proche possible des générateurs idéaux de tension
- nommons les points intéressants



◇ La loi des nœuds en terme de potentiels écrite en A donne donc :

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_C - V_A}{R_2} + \frac{V_D - V_A}{R_3} = 0$$

◇ Or, d'après les lois constitutives des générateurs idéaux de tension et compte tenu du fait que le potentiel est nul à la masse :

$$E_1 = V_B - V_M = V_B \quad E_2 = V_C - V_M = V_C \quad E_3 = V_D - V_M = V_D$$

◇ Nous arrivons alors à :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_A = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} \quad \rightsquigarrow \quad V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

◇ Et enfin :

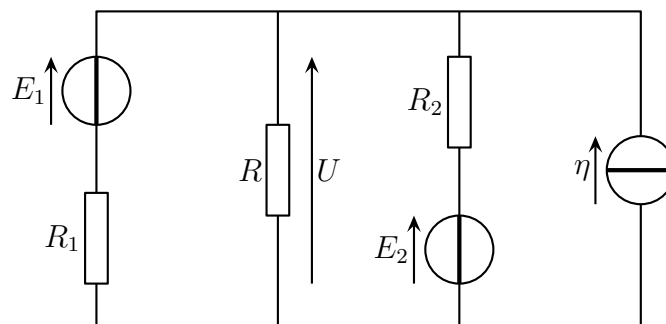
$$U = V_A - E_1 \quad \rightsquigarrow \quad U = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} - E_2$$

◇ Après, « yapuka » simplifier.

◇ L'approche maillère nous aurait obligé à écrire deux lois et à résoudre un système : elle aurait été moins performante.

★ idoinoton 2

◇ Considérons le circuit ci-dessous pour lequel nous cherchons la tension U .



◇ Analyse physique :

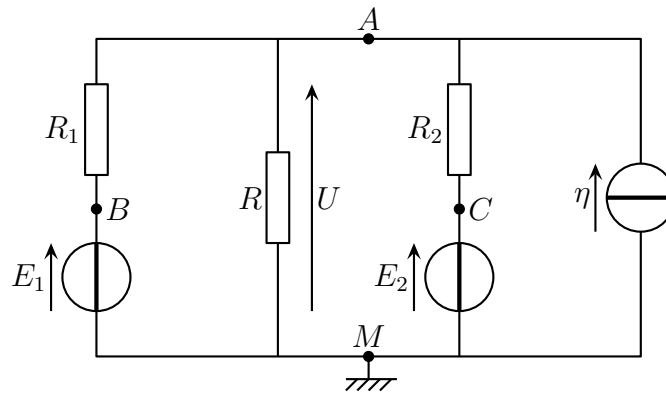
- régime continu
- grandeurs pertinentes : toutes les résistances, toutes les f.é.m. et le c.é.m.

◇ Analyse technique :

- c'est un circuit à trois mailles et deux nœuds principaux (4 en tout), mais avec plusieurs dipôles dans certaines branches : réponse pas évidente
- le but est d'obtenir une tension : l'approche nodale semble la meilleure
- avec 4 nœuds cela donne *a priori* 3 inconnues, sauf qu'il y a 2 générateurs de tension, donc deux inconnues de moins, il en reste qu'une soit une loi des nœuds

◇ Maintenant agissons :

- fixons la masse, la plus proche possible des générateurs idéaux de tension
- nommons les points intéressants
- regroupons près du nœud intéressant les résistors



◇ Comment écrire la loi des nœuds en A ? Ce n'est pas facile avec le générateur idéal de courant. En fait si, justement, parce que c'est un générateur de courant et c'est une loi des nœuds. Elle s'écrit donc :

$$\frac{V_B - V_A}{R} + \frac{V_M - V_A}{R} + \frac{V_C - V_A}{R_2} + \eta = 0$$

◇ Comme précédemment, les lois constitutives des générateurs idéaux de tension et le potentiel nul à la masse permet d'écrire :

$$E_1 = V_B - V_M = V_B \quad \text{et} \quad E_2 = V_C - V_M = V_C$$

◇ Et comme $U = V_A - V_M = V_A$, nous arrivons directement à :

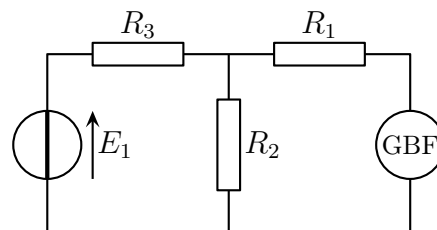
$$u = V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}}$$

◇ Après, « yapuka » simplifier.

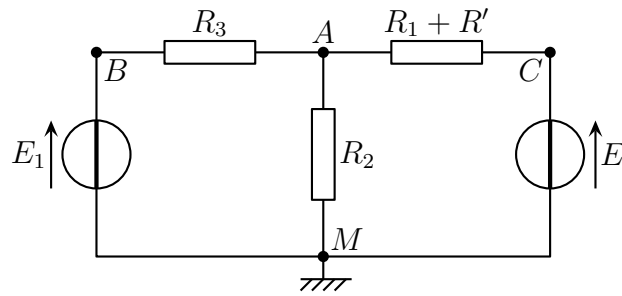
◇ Avec une approche maillère, nous n'aurions pas eu trois lois des mailles à écrire mais seulement deux car dans une des branches il y a un générateur idéal de courant qui impose l'intensité qui le traverse. Il n'en demeure pas moins que cela serait resté moins performant que l'approche nodale.

I.4.v – circuit TP n°1

◇ Rappelons le circuit :



◇ Il y a deux nœuds, ce qui conduit à une seule inconnue pour le potentiel. Réécrivons alors le circuit en utilisant le modèle électrocinétique pour le GBF et en associant les deux résistors :



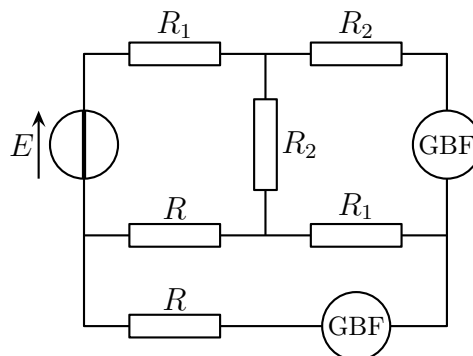
✧ Nous avons alors, en écrivant la loi des nœuds en terme de potentiels en A :

$$\frac{E_1 - V_A}{R_3} + \frac{0 - V_A}{R_2} = \frac{E - V_A}{R_1 + R'} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_A = U_2 = \frac{\frac{E_1}{R_3} + \frac{E}{R_1 + R'}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R'}}}$$

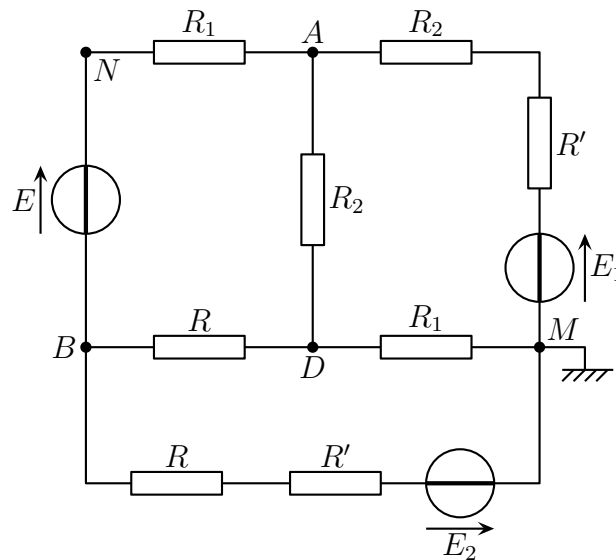
✧ Avec les lois constitutives des dipôles, nous pouvons alors tout retrouver.

I.4.vi – circuit TP n°2

✧ Rappelons le circuit.



- ✧ C'est un circuit à 3 mailles et 7 nœuds dont 4 principaux. Normalement il devrait y avoir 6 inconnues, mais la présence de 3 générateurs **de tension** en supprime de fait 3. Reste 3.
- ✧ Par rapport à l'approche maillère, l'approche nodale ne permettra pas de gagner quelque chose (il y aura aussi 3 équations et 3 inconnues), mais, pour le fun, écrivons ces lois.
- ✧ Il faut tout d'abord réécrire le circuit en tenant compte du modèle électrocinétique des GBF et en choisissant la masse ... là où c'est possible. Profitons-en pour nommer les nœuds intéressants, qu'ils soient principaux ou non.



✧ Nous prendrons systématiquement comme inconnues les potentiels aux nœuds principaux.

✧ La loi des nœuds en terme de potentiel en D ne pose pas de problèmes particuliers :

$$\frac{V_A - V_D}{R_2} + \frac{V_B - V_D}{R} + \frac{0 - V_D}{R_1} = 0$$

✧ Pour la loi des nœuds en terme de potentiel en A , il va falloir faire intervenir le point N qui n'est **pas** une nouvelle inconnue. En effet la loi constitutive du générateur idéal de tension de f.é.m. E donne :

$$E = V_N - V_B \quad \rightsquigarrow \quad V_N = V_B + E$$

✧ Et ainsi la loi des nœuds en terme de potentiel en A s'écrit :

$$\frac{V_B + E - V_A}{R_1} + \frac{V_D - V_A}{R_2} + \frac{E_1 - V_A}{R_2 + R'} = 0$$

✧ Pour la loi des nœuds en terme de potentiels en B , il n'est pas possible de rechanger les dipôles de place et l'intensité du courant traversant un générateur idéal de tension n'est pas connue. Il ne reste alors plus qu'à utiliser *l'autre* dipôle de la branche considérée : R_1 branchée entre N et A . Cela donne :

$$\frac{V_A - (V_B + E)}{R_1} + \frac{V_D - V_B}{R} + \frac{-E_2 - V_B}{R + R'} = 0$$

✧ Là aussi, nous avons 3 équations et 3 inconnues. La résolution analytique n'a strictement aucun intérêt.

II – Tout est désormais possible

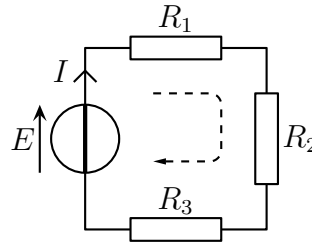
II.1 – Des lois non truquées

✧ Avec les lois fondamentales de l'électrocinétique, nous allons retrouver les lois déjà vues et déjà apprises dans le chapitre précédent. Bien évidemment, il faudra continuer à utiliser les lois rapides « telles quelles » et ne pas repasser systématiquement par les lois de KIRCHHOFF, ce qui serait une perte de temps.

- ✧ Dans ce paragraphe, nous allons montrer sur des exemples comment les lois de KIRCHHOFF permettent de retrouver les résultats que nous connaissons déjà. Nous en profiterons aussi pour élargir les lois d'association.

II.1.i – circuit à une maille – loi de POUILLET

- ✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous cherchons l'intensité I circulant dans la maille.



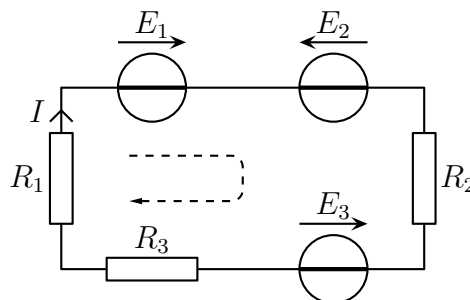
- ✧ La loi des mailles en terme de courant s'écrit :

$$E - R_1 I - R_2 I - R_3 I = 0 \quad \rightsquigarrow \quad E = (R_1 + R_2 + R_3) I \quad \rightsquigarrow \quad I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- ✧ Ce dernier résultat peut se généraliser avec la loi dite de POUILLET.

★ Loi de POUILLET

- ✧ Considérons le circuit à une maille ci-dessous.



- ✧ Analyse technique : c'est un circuit à une seule maille dans lequel nous cherchons une intensité. La loi des mailles en terme de courant est donc toute indiquée puisque cela donnera une relation avec une seule inconnue, celle recherchée. Écrivons-la.

$$\begin{aligned} -R_1 I + E_1 - E_2 - R_2 I - E_3 - R_3 I &= 0 & \rightsquigarrow & \quad (R_1 + R_2 + R_3) I = E_1 - E_2 - E_3 \\ & & \rightsquigarrow & \quad I = \frac{E_1 - (E_2 + E_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

LOI DE POUILLET

Dans un circuit à une seule maille composée uniquement de générateurs idéaux de tension et de résistor, l'intensité circulant dans la maille est donnée par la relation :

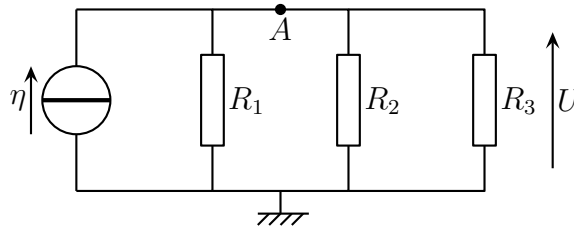
$$I = \frac{(\text{somme des f.é.m. dans le sens de } I) - (\text{somme des f.é.m. dans le sens opposé à } I)}{\text{somme des résistances}}$$

☛ *Remarque* : les f.é.m des générateurs qui sont dans le sens opposé à I sont parfois appelées *force contre électromotrice* notée f.c.é.m.

◇ Il s'agit d'une loi à appliquer, évidemment, telle quelle.

II.1.ii – circuit à deux nœuds

◇ Considérons le circuit à deux nœuds suivant pour lequel nous cherchons U .



◇ Analyse : c'est un circuit à deux nœuds pour lequel il y aura une seule inconnue, le potentiel en un des deux nœuds. Comme, justement, c'est ce que nous cherchons, la loi des nœuds en terme de potentiels est toute indiquée. Écrivons-la au point A en choisissant (judicieusement !) la masse en M de telle sorte que nous ayons $V_A = U$. Ainsi :

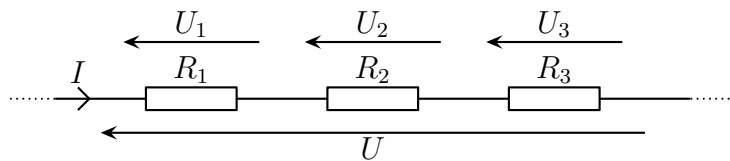
$$\eta + \frac{0 - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + \frac{0 - V_A}{R_3} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \eta = V_A (G_1 + G_2 + G_3) \quad \rightsquigarrow \quad U = \frac{\eta}{G_1 + G_2 + G_3}$$

II.1.iii – diviseurs de tension et de courant

◇ Démontrons dans ce paragraphe les lois dites des diviseurs de tension et de courant.

★ diviseur de tension

◇ Considérons la branche suivante.



◇ L'additivité des tensions et les lois courant – tension des résistors permettent d'écrire :

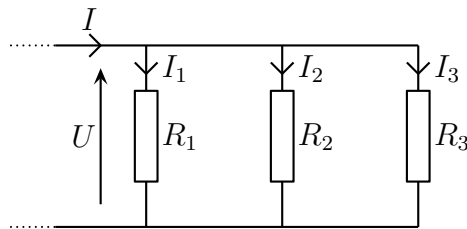
$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I \quad \rightsquigarrow \quad I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

◇ Et comme $U_1 = R_1 I$, nous obtenons bien $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \times U$

◇ Il est important de voir que la tension U n'est pas forcément « fournie » par un générateur : il peut y avoir n'importe quoi dans le reste du circuit.

★ **diviseur de courant**

◇ Considérons les deux nœuds suivants.



◇ La loi des nœuds et les lois courant – tension des résistors permettent d’écrire :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = G_1 U + G_2 U + G_3 U = (G_1 + G_2 + G_3) U \quad \rightsquigarrow \quad U = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3}$$

◇ Et comme $I_1 = G_1 U$, nous obtenons bien $I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \times I$.

◇ De même que précédemment, le courant d’intensité I n’est pas forcément « fournie » par un générateur : il peut y avoir n’importe quoi dans le reste du circuit.

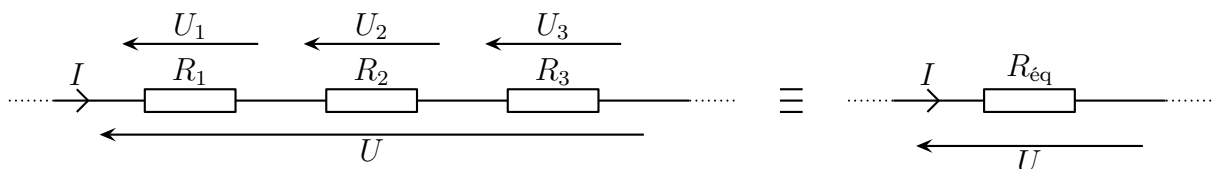
II.1.iv – **association de résistors**★ **idée de la démonstration**

Deux dipôles sont dits *équivalents* lorsqu’ils ont la même relation courant – tension.

◇ Pour déterminer dans quelles conditions deux dipôles sont équivalents, il faut donc trouver leurs relations courant – tension et faire en sorte qu’elles soient identiques. Bien sûr, il faudra faire attention aux conventions avec lesquelles nous écrirons ces relations.

★ **association série de résistors**

◇ Considérons l’association série de résistors ci-dessous.



◇ L’additivité des tensions et les relations courant – tension des résistors donne immédiatement :

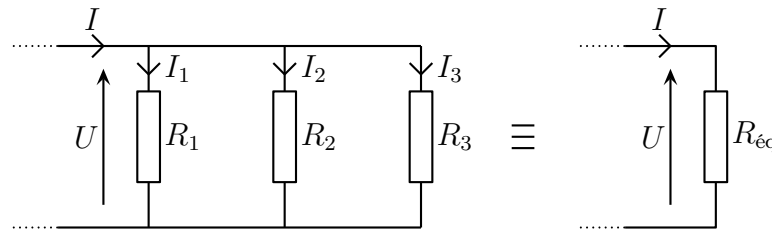
$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I$$

◇ Quant à la relation courant tension du dipôle que nous souhaitons équivalent – un résistor aussi – c’est évidemment $U = R_{\text{eq}} I$.

◇ Par identification, nous pouvons alors déduire $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$.

★ association parallèle

◇ Faisons la même chose avec l'association parallèle ci-dessous.



◇ La loi des nœuds et les relations courant – tension des résistors donnent :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = G_1 U + G_2 U + G_3 U = (G_1 + G_2 + G_3) U$$

◇ Quant à la relation courant tension du dipôle que nous souhaitons équivaler – un résistor aussi – c'est évidemment $I = G_{\text{eq}} U$.

◇ Par identification, nous pouvons alors déduire $G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + G_3$ qui n'est autre que :

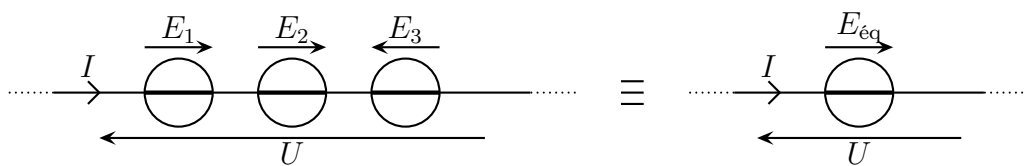
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

☞ *Remarque* : Dans le cas fréquent où il n'y a que deux résistors, nous pouvons écrire directement $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

II.1.v – association de générateurs idéaux de tension ou de courant

★ association série de générateurs idéaux de tension

◇ Considérons l'association série de générateurs idéaux de tension ci-dessous.



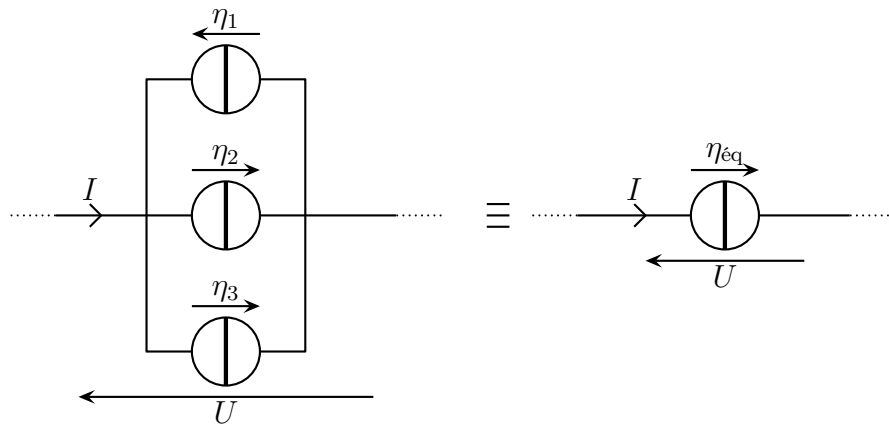
◇ L'additivité des tension et les relations constitutives des générateurs donnent immédiatement :

$$U = -E_1 - E_2 + E_3 \quad \text{et} \quad U = -E_{\text{eq}}$$

◇ Nous pouvons alors en déduire immédiatement $E_{\text{eq}} = E_1 + E_2 - E_3$.

★ association parallèle de générateurs idéaux de courant

◇ Considérons l'association parallèle de générateurs idéaux de courant ci-dessous.



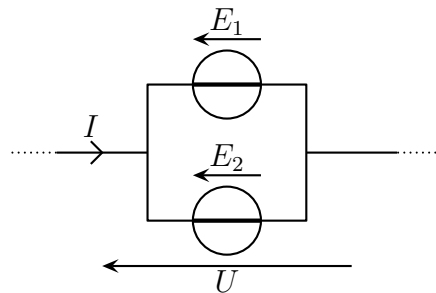
✧ La loi des nœuds et les relations constitutives des générateurs nous donnent immédiatement :

$$I = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \quad \text{et} \quad I = +\eta_{\text{éq}}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire immédiatement $\boxed{\eta_{\text{éq}} = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}$.

★ association parallèle de générateurs idéaux de tension

✧ Considérons l'association parallèle de générateurs idéaux de tension ci-dessous.



✧ Les lois constitutives des générateurs nous donnent :

$$U = +E_1 \quad \text{et} \quad U = +E_2$$

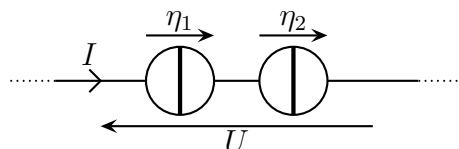
✧ Ces deux relations ne peuvent pas être simultanément vérifiées car il faudrait alors, à une précision extrême $E_1 = E_2$, ce qui n'est physiquement pas possible.

✧ En conséquence de quoi ce montage ne peut pas fonctionner : il risque d'y avoir détérioration des générateurs.

Il n'est pas possible d'associer en parallèle des générateurs idéaux de tension.

★ association série de générateurs idéaux de courant

✧ Considérons l'association série de générateurs idéaux de courant ci-dessous.



✧ Les lois constitutives des générateurs nous donnent :

$$I = +\eta_1 \quad \text{et} \quad I = +\eta_2$$

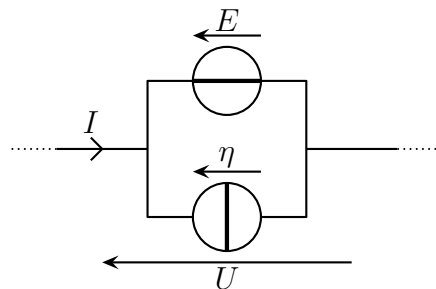
✧ Comme précédemment, ces deux relations ne peuvent pas être simultanément vérifiées.

Il n'est pas possible d'associer en série des générateurs idéaux de courant.

II.1.vi – association de générateurs idéaux de tension et de courant

★ association parallèle

✧ Considérons l'association parallèle ci-dessous.



✧ Nous pouvons alors écrire, pour ce dipôle :

$$U = E \quad \text{et} \quad I = -\eta - I_0$$

où I_0 est l'intensité du courant qui traverse le générateur idéal de tension, *ie.* est totalement inconnue.

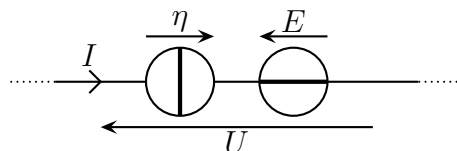
✧ Nous pouvons alors constater que ce dipôle est équivalent à un dipôle tel que $\boxed{U = +E}$

Une association parallèle de dipôles quelconques contenant un générateur idéal de tension de f.é.m. E est équivalent à un générateur idéal de tension unique de f.é.m. E .

✧ L'intérêt d'une telle association peut être, par exemple, de réguler la tension aux bornes du générateur de courant. C'est ce dernier qui fournirait le maximum d'énergie et c'est le générateur idéal de tension qui imposerait la tension.

★ association série

✧ Considérons l'association série ci-dessous.



✧ Nous pouvons alors écrire, pour ce dipôle :

$$I = \eta \quad \text{et} \quad U = E + U_0$$

où U_0 est la tension aux bornes du générateur idéal de courant, *ie.* est totalement inconnue.

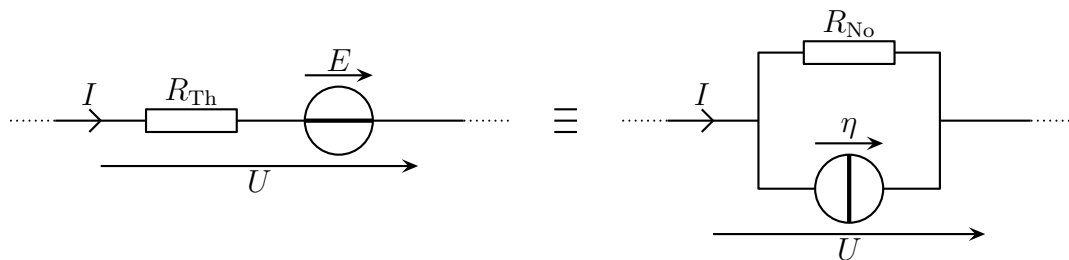
- ✧ Nous pouvons alors constater que ce dipôle est équivalent à un dipôle tel que $I = +\eta$

Une association série de dipôles quelconques contenant un générateur idéal de courant de c.é.m. η est équivalent à un générateur idéal de courant unique de c.é.m. E .

- ✧ Comme pour l'exemple précédent, l'association n'est pas forcément inutile pour des raisons énergétiques.

II.1.vii – Transformation THÉVENIN – NORTON

- ✧ Faisons de même avec les modèles de THÉVENIN et de NORTON du générateur réel.



- ✧ Pour le modèle de THÉVENIN, l'additivité des tensions nous donne :

$$U = -R_{Th} I + E$$

- ✧ Pour le modèle de NORTON, la loi des nœuds fournit la relation :

$$I = -G_{No} U + \eta = -\frac{U}{R_{No}} + \eta \quad \rightsquigarrow \quad U = R_{No} \eta - R_{No} I$$

- ✧ Pour que les deux dipôles soient équivalents, il faut, par identification :

$$\begin{cases} R_{No} = R_{Th} \\ E = R_{No} \eta \end{cases}$$

ce qui est bien les relations connues.

II.2 – Dipôles réels

- ✧ Nous allons voir dans ce paragraphe comment se modélisent les comportements des dipôles réels à partir des dipôles idéaux que nous connaissons.

II.2.i – résistors

- ✧ Les résistors réels sont très peu différents des résistors idéaux.

Un résistor réel se modélise par un résistor idéal.

II.2.ii – les fils

Les fils réels se modélisent par des résistor de résistance faible.

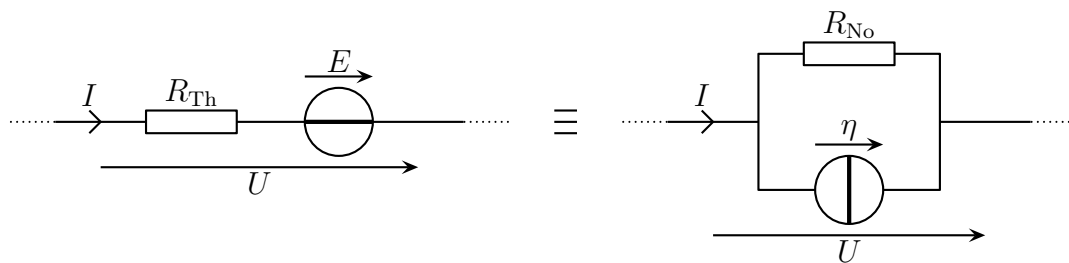
- ◇ La résistance des fils est de l'ordre de $0,1 \, \Omega$ pour les fils simples et de quelques ohms pour les câbles coaxiaux.

Sauf dans des cas exceptionnels, les résistances des fils n'est pas prise en compte.

II.2.iii – générateurs

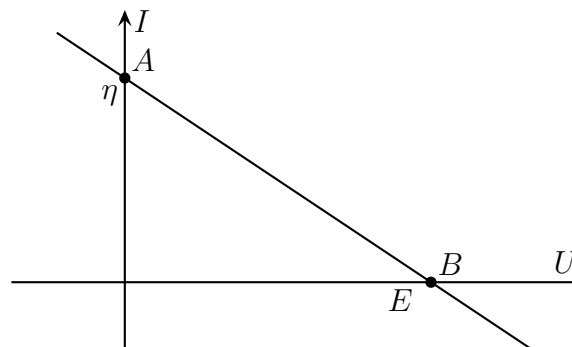
★ la modélisation est connue

- ◇ Rappelons que les deux modèles de générateurs réels sont ceux de THÉVENIN et de NORTON :



★ caractéristique

- ◇ Traçons la relation courant – tension de ce générateur en convention générateur.
- ◇ La loi des nœuds avec le modèle de NORTON donne directement $I = \eta - \frac{U}{R}$ soit :



★ interprétation

- ◇ Le point A correspond à $U = 0$ et $I = \eta$: il s'agit du courant qui circule lorsque la tension est nulle.

Le *courant de court-circuit* d'un dipôle est le courant qui circule dans un fil reliant directement les deux bornes du dipôle.

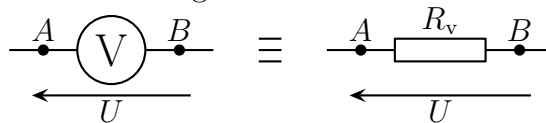
- ◇ Le point B correspond à $U = E$ et $I = 0$: il s'agit de la tension qui règne aux bornes du dipôle lorsqu'aucun courant ne circule, *ie.* lorsqu'il est débranché.

La *tension à vide* d'un dipôle est la tension régnant entre ses bornes lorsque le dipôle n'est pas relié à un circuit.

Si un dipôle est modélisable par un générateur réel, la connaissance du courant de court-circuit et de la tension à vide suffit à le caractériser entièrement.

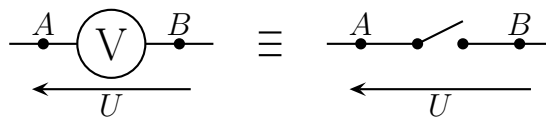
II.2.iv – voltmètre

Un voltmètre réel se comporte comme une résistor de résistance élevée affichant la tension régnant entre ses bornes.



◇ Suivant la qualité du voltmètre, R_v peut aller du $M\Omega$ au $G\Omega$.

Un voltmètre idéal se comporte comme un interrupteur ouvert affichant la tension régnant entre ses bornes.



◇ La plupart du temps, un voltmètre peut être considéré comme idéal.

II.2.v – ampèremètre

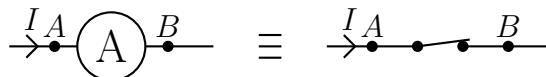
Un ampèremètre réel se comporte comme une résistor affichant l'intensité I du courant qui le traverse.



◇ La résistance R_a varie fortement suivant le calibre utilisé, *ie.* suivant la valeur de l'intensité mesurée.

La tension aux bornes d'un ampèremètre réel est de l'ordre de 0,2 V.

Un ampèremètre idéal se comporte comme un interrupteur fermé affichant l'intensité du courant le traversant.

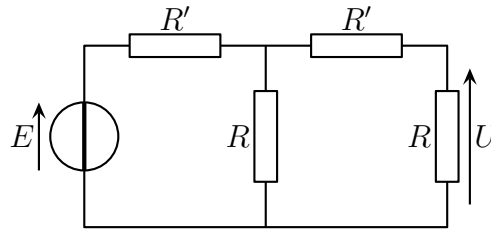


◇ La plupart du temps, il est possible de considérer l'ampèremètre idéal.

II.3 – De nouveaux exemples

II.3.i – ponts à la chaîne

◇ Considérons le circuit ci-dessous constitué de deux ponts successifs et pour lequel nous cherchons U .



◇ Analyse physique :

- régime continu
- grandeurs pertinentes : R , R' et E
- grandeurs inconnues : U et toutes les intensités des courants.

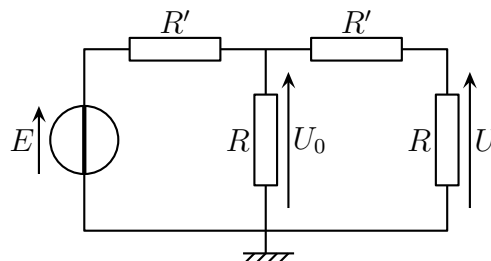
◇ Analyse technique :

- circuit à 2 mailles et 4 nœuds (dont 2 principaux) → c'est un circuit facile
- la grandeur recherchée n'est pas une grandeur directement calculable

◇ Nous pouvons procéder de différentes manières :

- par transformation de circuit → bof car circuit simple
- par approche maillière avec ses deux inconnues → bof car le but est de trouver une tension
- par approche nodale avec ses deux inconnues → oui pour trouver **la grandeur** inconnue, *ie.* le potentiel à l'un des deux nœuds

◇ Réécrivons le circuit avec les grandeurs intéressantes.



◇ Comme les résistors R et R' de la branche de droite sont en série, nous pouvons utiliser le diviseur de tension :

$$U = \frac{R}{R + R'} \times U_0$$

◇ Pour déterminer U_0 , nous allons tout simplement utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels :

$$\frac{E - U_0}{R'} + \frac{0 - U_0}{R} + \frac{0 - U_0}{R + R'} = 0$$

◇ En multipliant par $R R' (R + R')$ et en isolant U_0 , nous obtenons :

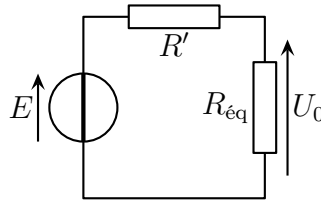
$$E R (R + R') = U_0 \left(R (R + R') + R' (R + R') + R R' \right) \quad \rightsquigarrow \quad U_0 = \frac{R (R + R')}{R^2 + R'^2 + 3 R R'} \times E$$

◇ Nous pouvons remarquer qu'il est plus intéressant de prendre, dans la branche de droite, les deux résistors de manière à obtenir une équation comportant seulement la grandeur inconnue U_0 .

◇ Et avec le résultat précédent sur U , nous obtenons finalement :
$$U = \frac{R^2}{R^2 + R'^2 + 3 R R'} \times E$$
, ce qui est bien un résultat homogène.

★ autre méthode pour trouver U_0 .

- ◇ Il n'est pas possible d'appliquer un diviseur de tension directement entre U_0 et E car les résistors R et R' de gauche ne sont pas en série. En revanche, en associant les trois résistors de droite $R_{\text{éq}} = R \parallel (R \oplus R')$ nous obtenons le circuit équivalent suivant (circuit dans lequel la tension U est perdue) :



où $R_{\text{éq}} = R \parallel (R \oplus R') = \frac{R(R + R')}{R + (R + R')} = \frac{R(R + R')}{2R + R'}$

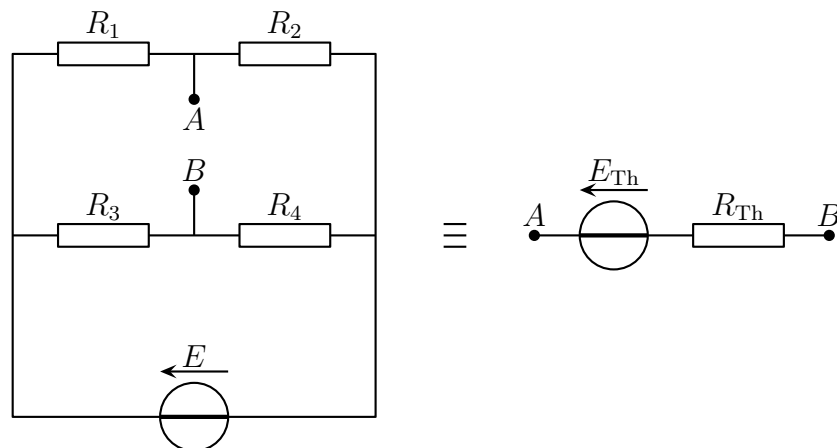
- ◇ Cette fois $R_{\text{éq}}$ et R' sont en série et nous pouvons appliquer un diviseur de tension :

$$U_0 = \frac{R_{\text{éq}}}{R' + R_{\text{éq}}} \times E = \frac{\frac{R(R + R')}{2R + R'}}{R' + \frac{R(R + R')}{2R + R'}} \times E = \frac{R(R + R')}{R'(2R + R') + R(R + R')} \times E$$

- ◇ Et nous retrouvons bien le résultat précédent $U_0 = \frac{R(R + R')}{R^2 + R'^2 + 3RR'} \times E$.

II.3.ii – pont de Wheastone

- ◇ Considérons le dipôle AB ci-dessous. Le but est de trouver son modèle de THÉVENIN équivalent.



- ◇ Analyse physique :

- grandeurs pertinentes : les résistances et la f.é.m.
- grandeurs inconnues : toutes les potentiels et intensités

- ◇ Analyse technique :

- aucun dipôle n'est associé avec un autre en série ou en parallèle → pas de transformation de circuit
- nous pouvons déterminer E_{th} en cherchant la tension U_{AB} à vide
- nous ne pouvons pas déterminer R_{Th} par transformation
- nous pouvons trouver η_{No} en déterminant le courant de court-circuit et en déduire R_{Th}

★ tension à vide E_{th}

◇ Cherchons la tension à vide U_{AB} .

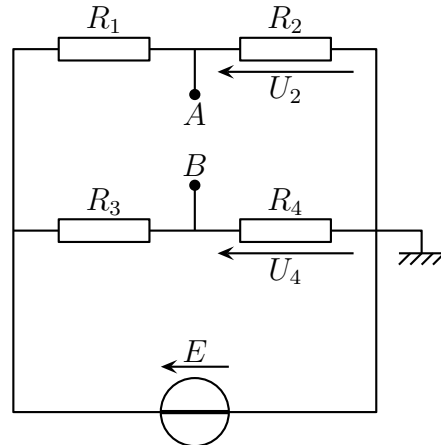
◇ Analyse technique :

→ il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds → nous allons préférer l'approche nodale car le but est de trouver une tension

→ par additivité des tensions, nous pouvons écrire $E_{th} = -U_4 + U_2$

→ fixons la masse à un nœud crucial

◇ Nous obtenons alors le circuit suivant.



◇ Dans ce circuit, nous pouvons appliquer deux diviseurs de tension : entre R_1 et R_2 d'une part et entre R_3 et R_4 d'autre part car ces deux couples de résistors sont en série. Nous obtenons :

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad \text{et} \quad U_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E \quad \rightsquigarrow \quad E_{Th} = U_2 - U_4 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) E$$

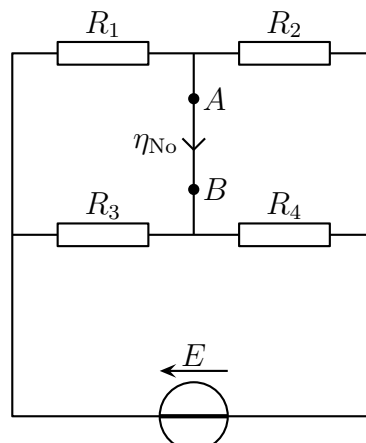
◇ Nous pouvons alors simplifier en réduisant au même dénominateur :

$$E_{Th} = \frac{R_2 (R_3 + R_4) - R_4 (R_1 + R_2)}{(R_3 + R_4) (R_1 + R_2)} E = \frac{R_2 R_3 + \cancel{R_2 R_4} - R_1 R_4 - \cancel{R_2 R_4}}{(R_3 + R_4) (R_1 + R_2)} E$$

◇ Nous obtenons alors $E_{Th} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4) (R_1 + R_2)} E$

★ courant de court-circuit η_{No}

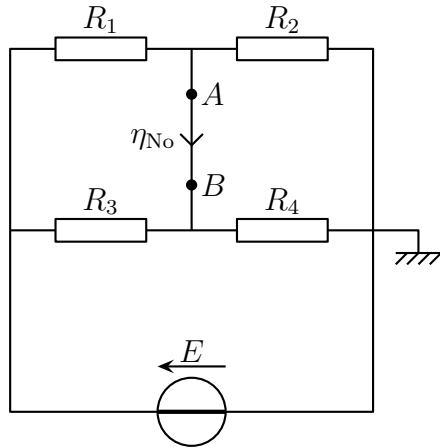
◇ Nous devons déterminer le courant qui circule de A vers B dans le fil qui court-circuite le dipôle AB . Cela donne le circuit suivant.



◇ Analyse technique :

- c'est un circuit à trois mailles et trois nœuds → pas de solution directes
- aucun couple de dipôles n'est associé en série ou en parallèle → pas de transformation possible
- il y aura soit trois inconnues en courant soit deux inconnues en tension. Comme le potentiel d'un nœud est tout de suite connu grâce au générateur de tension U_0 , cela ne laissera qu'une seule inconnue en tension → nous utiliserons l'approche nodale.

◇ Positionnons la masse à un endroit adéquat et n'oublions pas le courant η_{No} .



◇ La loi des nœuds en terme de potentiels au point A (ou B) s'écrit :

$$\frac{E - V_A}{R_1} + \frac{E - V_A}{R_3} + \frac{0 - V_A}{R_2} + \frac{0 - V_A}{R_4} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{(G_1 + G_2) E}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

◇ Pour déterminer η_{No} , nous allons écrire une loi qui parle de courant, donc, ici, une loi des nœuds. Bien sûr, il faut que cette loi des nœuds en terme de potentiels. Écrivons cette loi en A :

$$\frac{E - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} - \eta_{\text{No}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \eta_{\text{No}} = \frac{E}{R_1} - V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = G_1 E - (G_1 + G_2) V_A$$

◇ Il ne reste plus qu'à remplacer V_A par son expression :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{No}} &= \frac{G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_2) (G_1 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \times E \\ &= \frac{\cancel{G_1^2} + \cancel{G_1 G_2} + \cancel{G_1 G_3} + G_1 G_4 - \cancel{G_1^2} - \cancel{G_1 G_3} - G_2 G_1 - G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \\ &= \frac{G_1 G_4 - G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \times E \end{aligned}$$

◇ Et en multipliant par $R_1 R_2 R_3 R_4$:

$$\boxed{\eta_{\text{No}} = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} \times E}$$

★ détermination de R_{Th}

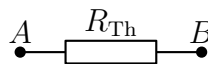
◇ Les équivalences entre modèles permettent d'écrire $R_{Th} = \frac{E_{Th}}{\eta_{No}}$, ce qui donne, ici :

$$\begin{aligned}
 R_{Th} = \frac{E_{Th}}{\eta_{No}} &= \frac{\frac{R_2 R_3 \cancel{R_1 R_4}}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \cancel{E}}{\frac{R_2 R_3 \cancel{R_1 R_4}}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} \cancel{E}} \\
 &= \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \\
 &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}
 \end{aligned}$$

◇ Ou encore : $\boxed{R_{Th} = (R_1 \parallel R_2) \oplus (R_3 \parallel R_4)}$.

★ comme c'est étrange ...

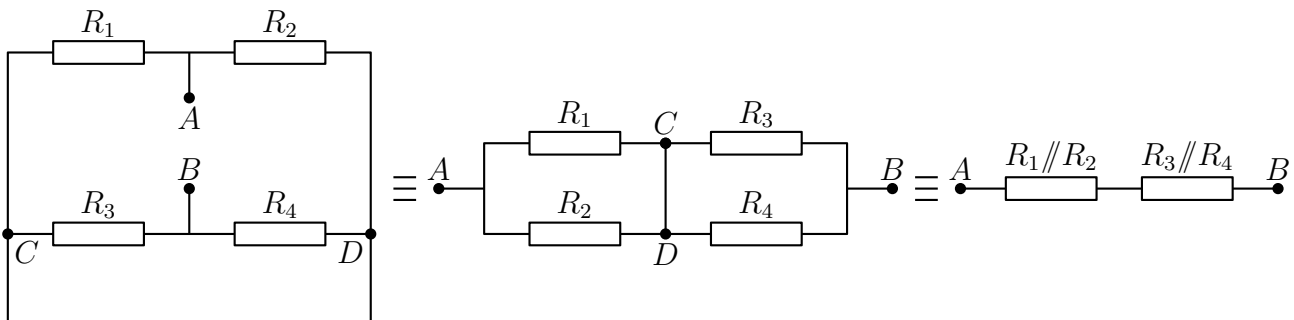
◇ Lorsque nous imposons $E_{Th} = 0$, ce qui revient à « remplacer » le générateur idéal de tension par un fil, le modèle équivalent se réduit à :



c'est-à-dire que le dipôle dans son ensemble est équivalent à une résistance unique.

◇ Imposons alors, dans le dipôle initial $E_{Th} = 0$ en faisant $E = 0$ et cherchons la résistance équivalente.

◇ En réécrivant bien le circuit (en s'aidant des points C et D), nous obtenons :



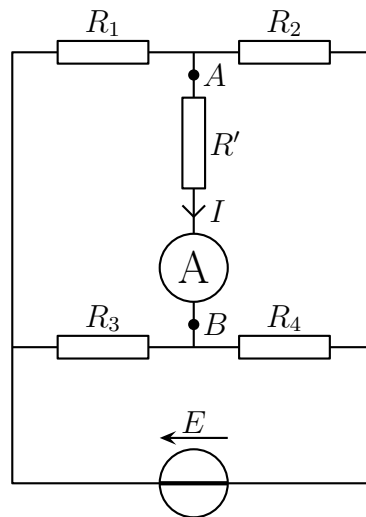
et pouvons alors rapidement constater que nous obtenons bien le résultat attendu, à savoir que la résistance équivalente entre A et B n'est autre que $R_{eq} = (R_1 \parallel R_2) \oplus (R_3 \parallel R_4)$.



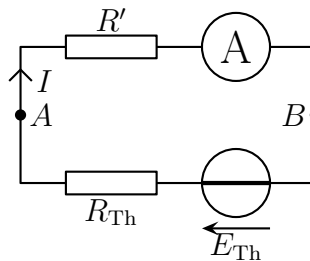
la méthode précédente qui consiste à éteindre des générateurs est généralisable et très puissante mais devient dangereuse. Elle est donc déconseillée à l'emploi. Nous l'avons vu uniquement pour la culture. Pour notre part, nous nous limiterons aux transformations de circuit ou, si le pire des cas arrive, à la détermination de la tension à vide et du courant de court-circuit.

★ utilité de ce pont

◇ Ce genre de pont permet de déterminer précisément la valeur d'une résistance R de la manière suivante. Il suffit de commencer par insérer une résistance R' et un ampèremètre entre les points A et B .



✧ L'équivalence du dipôle AB nous permet alors de transformer le circuit obtenu de la manière suivante :



✧ Il s'agit d'un circuit à une maille et, en considérant l'ampèremètre idéal, nous avons alors :

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R'}$$

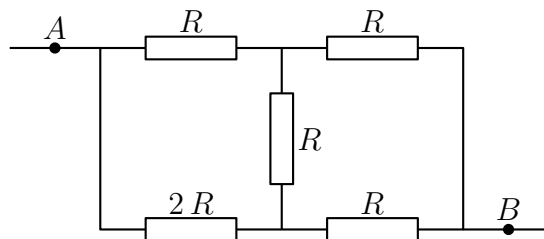
✧ Or E_{Th} est proportionnel à $(R_1 R_4 - R_2 R_3)$. Donc si $R_2 R_3 = R_1 R_4$, I sera forcément nul.

✧ Il ne reste plus qu'à régler R_2 (ou tout autre résistance) jusqu'à obtenir $I = 0$ pour en déduire R_1 : le pont est alors dit *équilibré*.

✧ Et pourquoi mesurer une résistance R ? Parce que les résistances peuvent dépendre de différentes contraintes (température, déformations, ...) et que cela permet, justement, de remonter à ces grandeurs intéressantes. C'est bien pour ça que l'exemple persiste dans le cours : c'est très utilisé en SI !

II.3.iii – dipôle équivalent à un résistor

✧ Le but est de rechercher la résistance équivalente au dipôle ci-dessous.



✧ Analyse physique :

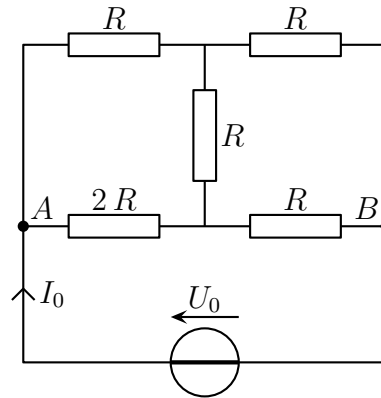
→ la seule grandeur pertinente est R

→ le résultat sera proche de R car toutes les résistances ont des valeurs proches de R

◇ Analyse technique :

- aucun couple de résistances n'est associé en série ou en parallèle → pas de transformation de circuits
- il va falloir revenir à la définition même d'une résistance équivalente, *ie.* trouver la relation courant – tension de l'ensemble

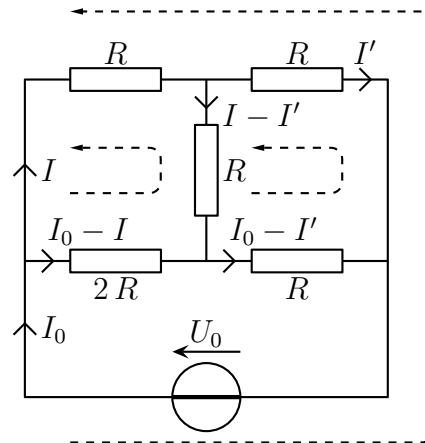
◇ Pour trouver la relation courant tension, nous allons imposer la tension U_0 aux bornes du dipôle AB et en notant I_0 le courant entrant par la borne A , nous allons chercher R_{eq} tel que $U_0 = +R_{\text{eq}} I$.



◇ Analyse technique :

- c'est un circuit à trois mailles et quatre nœuds : quelle que soit l'approche, il y aura 3 inconnues. Toutefois, comme U_0 est (fictivement fixé) alors que I_0 est indéterminé, l'approche maillière va être préférable : il va donc falloir chercher I_0 en fonction de U_0 .
- nous allons veiller à ce que les courants soient bien placés de telle sorte que l'écriture de U_0 soit simplifiée.

◇ Nous obtenons le circuit suivant.



◇ Les trois lois des mailles représentées s'écrivent :

$$\begin{cases} -U_0 + R I' + R I = 0 \\ -2 R (I_0 - I) + R (I - I') + R I = 0 \\ -R (I_0 - I') + R I' - R (I - I') = 0 \end{cases}$$

◇ Réécrivons-les de manière à mettre les inconnues d'un côté et la tension (connue) de l'autre.

$$\begin{cases} R I + R I' & = U_0 \quad (\odot) \\ 4 R I - R I' - 2 R I_0 & = 0 \quad (\ominus) \\ -R I + 3 R I' - R I_0 & = 0 \quad (\bullet) \end{cases}$$

- ✧ Seul I_0 nous intéresse. Nous allons donc éliminer successivement les inconnues intéressantes. Écrivons ce qu'il reste :

$$\begin{cases} 4(\odot) - (\ominus) \rightarrow 5 R I' + 2 R I_0 = 4 U_0 \text{ (III)} \\ (\odot) + (\bullet) \rightarrow 4 R I' - R I_0 = U_0 \text{ (IV)} \end{cases}$$

- ✧ Pour obtenir I_0 il ne reste plus donc qu'à faire :

$$4(\text{III}) - 5(\text{IV}) \rightarrow 13 R I_0 = 11 U_0 \quad \rightsquigarrow \quad U_0 = \frac{13}{11} R I_0 \quad \text{et} \quad R_{\text{eq}} = \frac{13}{11} R$$

- ☕ *Remarque* : le système s'est bien résolu car il y avait de nombreuses simplifications grâce aux valeurs des résistances des résistors.

III – Aspect énergétique

III.1 – Approche de la puissance et de l'énergie

III.1.i – que représente ces grandeurs ?

- ✧ L'énergie est un concept bien compliqué à définir en physique. Disons simplement que c'est une grandeur bien spécifique qui peut prendre différents aspects : énergie cinétique, potentielle, électrique, magnétique, chimique, ...

L'énergie se conserve : elle ne peut ni se créer ni se détruire, seulement s'échanger ou changer de forme.
Elle s'exprime en joule noté J.

- ✧ C'est une des lois physiques les plus fondamentales : elle a notamment permis la découverte du neutrino. Lors d'une expérience nucléaire, il « manquait de l'énergie ». Il a alors été postulé l'existence d'une particule inconnue et non détectée : le neutrino. La suite a mis en évidence l'existence de cette particule.
- ✧ Hormis à la définir par son mode de calcul, il est très difficile de se la représenter tellement l'énergie peut prendre de formes différentes.
- ✧ En électrocinétique, nous parlerons de l'énergie électrique, celle qui permet de faire fonctionner des appareils électriques : celle qui passe par le réseau EDF.
- ✧ La puissance, n'est autre que la vitesse à laquelle s'échange une énergie. Elle représente donc une sorte de flux / flot d'énergie. Plus la puissance est élevée, plus il peut y avoir d'énergie rapidement. D'ailleurs la notion de puissance est bien connue (voiture, lampes de bureau, ...)

III.1.ii – aspect physique : caractère générateur ou récepteur ?

- ✧ L'énergie est un des concepts les plus physique, nous aurons l'occasion d'en reparler tout au long de l'année. Et si certains paradoxes ou choses bizarres apparaîtront ici ou là, ce sera rarement le cas en ce qui concerne l'énergie qui reste, somme toute, très intuitive : il existe ceux qui fournissent l'énergie et ceux qui l'utilisent.

Un dipôle qui fournit effectivement de l'énergie électrique au reste du circuit possède un caractère *générateur*.

Un dipôle qui reçoit effectivement de l'énergie électrique de la part du reste du circuit possède un *caractère récepteur*.

- ✧ Nous verrons que si les générateur ont pour rôle premier d'avoir un caractère générateur, ce n'est pas automatiquement et obligatoirement le cas. Exemple de générateur ayant un caractère récepteur : les batteries de mobile lors de la recharge.
- ✧ De même, certains dipôles qui ne s'appellent pas « générateurs » peuvent avoir un caractère générateur. Les condensateurs par exemple, peuvent stocker de l'énergie (sous forme électrostatique) pour la restituer plus tard, c'est de cette manière que sont conçues certaines mini lampes à LED.
- ✧ Il ne faut pas oublier que le caractère générateur ou récepteur traduit une réalité physique. Pour un problème donné, tout le monde doit donc trouver la même chose.

III.1.iii – aspect conventionnel : reçu ou fourni ?

- ✧ Comme l'énergie va principalement s'échanger (et pour cause!), il faudra bien préciser le sens dans lequel nous allons compter les transferts.

L'*énergie reçue* par un dipôle est une grandeur algébrique telle que :

- elle est positive si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie (caractère récepteur)
- elle est négative si le dipôle fournit effectivement de l'énergie (caractère générateur)

Une grandeur est dite *algébrique* lorsqu'elle peut être positive et négative **et** que le signe a une signification physique.

L'*énergie fournie* par un dipôle n'est autre que l'opposée de l'énergie reçue, à savoir :

- elle est positive si le dipôle fournit effectivement de l'énergie (caractère générateur)
- elle est négative si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie (caractère récepteur)

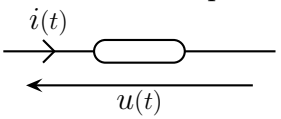
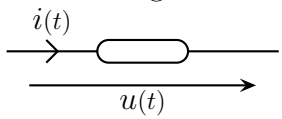
- ✧ Il n'y aura rien de difficile là dedans mais certaines fois, ce sera un peu complexe car il faudra bien prendre en compte toutes les conventions électriques
- ✧ Comme d'habitude, en réfléchissant *a priori* au caractère générateur ou récepteur, il est possible alors de choisir en conséquence les conventions (générateur ou récepteur) et les grandeurs calculées (fournie ou reçue) qui seront, alors, positives. C'est possible mais ce n'est ni nécessaire ni plus efficace : quelles que soient les conventions choisies et la méthode d'étude du problème, l'interprétation des résultats, *ie.* les résultats physiques, seront les mêmes !

III.2 – Déterminer des puissances

III.2.i – expression des puissances reçue et fournie

- ✧ Nous montrerons dans longtemps le résultat suivant.

Soit un dipôle quelconque. Alors la puissance échangée est proportionnelle au produit de la tension entre ses bornes par l'intensité du courant qui le traverse.

	convention récepteur	convention générateur
		
puissance reçue	$\mathcal{P}_r(t) = +u(t) i(t)$	$\mathcal{P}_r(t) = -u(t) i(t)$
puissance fournie	$\mathcal{P}_f(t) = -u(t) i(t)$	$\mathcal{P}_f(t) = +u(t) i(t)$

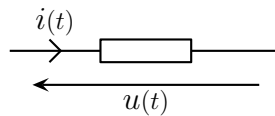
La puissance s'exprime en watt noté W.

- ◇ La méthode de calcul de la puissance est logique puisque :
 - la tension représente la perte énergétique de chaque charge qui traverse le dipôle
 - l'intensité représente la quantité de charge qui traverse le dipôle
- ◇ Du point de vue dimensionnel, nous pouvons constater que $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \times 1 \text{ A}$.
- ◇ Au niveau des dipôles de TP, l'ordre de grandeurs des puissances fournie ou reçue est le watt. La plupart des résistors fondent s'ils reçoivent plus d'un quart de watt de puissance.

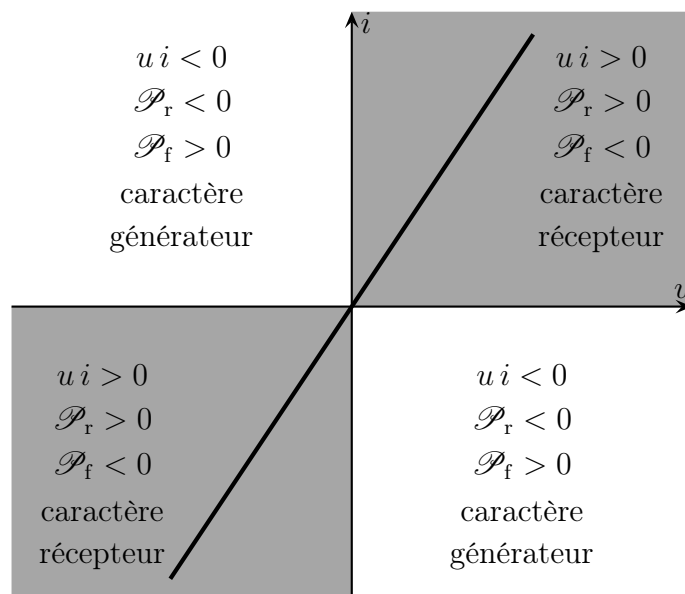
III.2.ii – interprétation des caractéristiques graphiques

☆ exemple du résistor en convention récepteur

- ◇ Considérons le résistor ci-dessous.



- ◇ Étant donné qu'il est en convention récepteur, sa relation courant – tension s'écrit $i(t) = \frac{u(t)}{R}$, ce qui nous permet de tracer sa caractéristique.

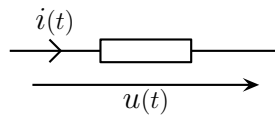


- ◇ Sur cette caractéristique, il est possible de distinguer deux types de cadrans :
 - les grisés qui sont tels que :
 - le produit ui soit positif

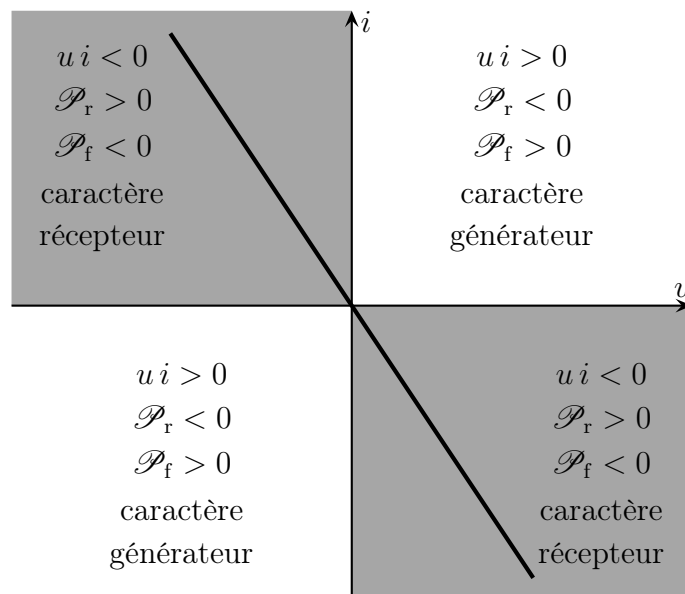
- la puissance reçue soit positive
 - la puissance fournie soit négative
 - le dipôle présente un caractère récepteur
 - les clairs qui sont tels que :
 - le produit $u i$ soit négatif
 - la puissance reçue soit négative
 - la puissance fournie soit positive
 - le dipôle présente un caractère générateur
- ◇ Nous pouvons alors constater que le résistor présente **toujours** un caractère récepteur.

★ exemple du résistor en convention générateur

- ◇ Considérons le résistor ci-dessous.



- ◇ Étant donné qu'il est en convention générateur, sa relation courant – tension s'écrit $i(t) = -\frac{u(t)}{R}$, ce qui nous permet de tracer sa caractéristique.

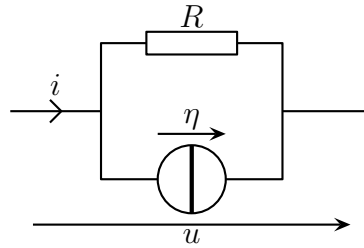


- ◇ Sur cette caractéristique, il est possible de distinguer deux types de cadrans :

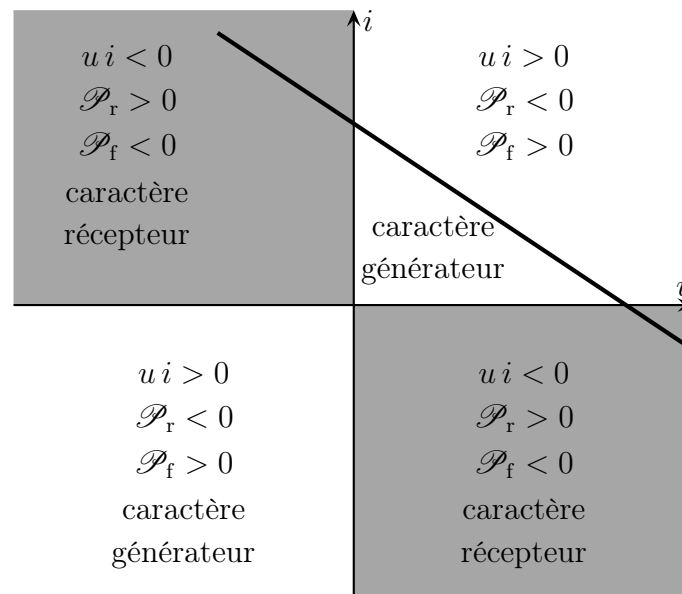
- les grisés qui sont tels que :
 - le produit $u i$ soit négatif
 - la puissance reçue soit positive
 - la puissance fournie soit négative
 - le dipôle présente un caractère récepteur
 - les clairs qui sont tels que :
 - le produit $u i$ soit positif
 - la puissance reçue soit négative
 - la puissance fournie soit positive
 - le dipôle présente un caractère générateur
- ◇ Nous pouvons alors constater que le résistor présente **toujours** un caractère récepteur.

★ exemple du générateur réel

◇ Considérons le modèle de Norton d'un générateur réel en convention générateur.



◇ La loi des nœuds nous permet d'écrire directement $i = \eta - \frac{u}{R}$ et tracer la caractéristique suivante.



◇ Nous pouvons alors constater ce que nous savions déjà : un générateur peut fort bien avoir un caractère récepteur, *ie.* il peut parfois recevoir de l'énergie.

III.2.iii – l'énergie n'est jamais perdue ...

◇ La conservation de l'énergie est vraie à chaque instant ce qui signifie que toute l'énergie ce qui est donnée par un dipôle est instantanément reçue par les autres.

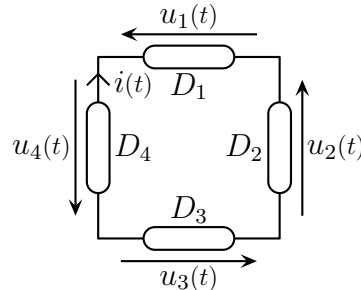
À chaque instant, la somme des puissance fournies par certains dipôles est égale à la somme des puissances reçues par tous les autres dipôles.

◇ En généralisant :

À chaque instant, la somme de toutes les puissance reçues des dipôles est nulle.

★ idée de démonstration

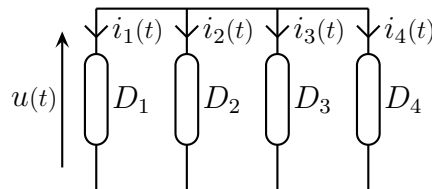
- ✧ La démonstration générale est lourde, mais nous pouvons la faire dans deux cas particuliers : un circuit à une maille et un circuit à deux nœuds. La démonstration est donc valable pour tout circuit qui peut s'y ramener.
- ✧ Considérons le circuit à une maille ci-dessous.



- ✧ Écrivons la loi des mailles et multiplions celle-ci par $i(t)$. Nous voyons alors apparaître immédiatement la loi de conservation de l'énergie.

$$\begin{aligned}
 u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) &= 0 \\
 u_1(t) i(t) + u_2(t) i(t) + u_3(t) i(t) + u_4(t) i(t) &= 0 \\
 \mathcal{P}_{r1}(t) + \mathcal{P}_{r2}(t) + \mathcal{P}_{r3}(t) + \mathcal{P}_{r4}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

- ✧ Il en est de même avec le circuit à deux nœuds ci-dessous.



- ✧ En multipliant la loi des nœuds par $u(t)$, la loi de conservation de l'énergie apparaît.

$$\begin{aligned}
 i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) &= 0 \\
 u(t) i_1(t) + u(t) i_2(t) + u(t) i_3(t) + u(t) i_4(t) &= 0 \\
 \mathcal{P}_{r1}(t) + \mathcal{P}_{r2}(t) + \mathcal{P}_{r3}(t) + \mathcal{P}_{r4}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

- ✧ Le point crucial de cette démonstration tient dans le fait que pour le circuit à une maille $i(t)$ est le même partout et dans le circuit à deux nœuds, $u(t)$ est aussi le même pour tous les dipôles : c'est grâce à l'ARQS.
- ✧ Lorsqu'un jour l'ARQS ne sera plus valide (en spé), il faudra prendre en compte aussi l'énergie « en train de voyager ».

III.2.iv – ... même si elle peut s'échapper

- ✧ Que l'énergie se conserve ne signifie pas que l'énergie électrique se conserve ! Comme nous l'avons vu, les résistors ne font que recevoir de l'énergie électrique. La question est : que font-ils de cette énergie ? La réponse est simple : ils la transforment en une autre forme d'énergie, l'énergie interne, qui a pour conséquence bien connue d'augmenter la température.



La chaleur n'est pas un type d'énergie : les résistors ne peuvent donc pas dissiper l'énergie électrique en chaleur !

Une énergie d'un certain type est dite *dissipée* lorsqu'un dispositif la transforme en un autre type qui n'est plus récupérable.

Le fait que les résistors dissipent l'énergie électrique est appelé *effet Joule*.
La puissance électrique reçue (et donc la puissance dissipée par effet Joule) vaut :

$$\mathcal{P}_r = +R i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}.$$

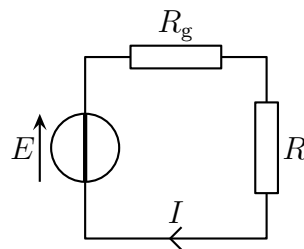
- ◇ De manière générale, ce sont les générateurs qui ont pour rôle d'injecter de l'énergie dans le circuit électrique et, notamment, de compenser les dissipations d'énergie électrique (volontaires ou non) causées par les résistors.

III.2.v – utiliser au mieux d'un générateur

- ◇ Étant donné l'effet Joule, la question est de savoir s'il est possible de rendre maximale l'énergie transférée à la partie utile du circuit électrique.

Il y a *adaptation d'impédance* lorsque la puissance reçue par la partie utile d'un montage de la part d'un générateur donné est maximale.

- ◇ Impédance est un mot que nous reverrons (beaucoup) dans quelques mois.
◇ Étudions le cas le plus simple : celui d'un générateur réel relié à un montage (complexe) qui se comporte comme un résistor de résistance R .



- ◇ Analyse physique :
 → grandeurs connues : les résistances et la f.é.m.
 → grandeur inconnue : I
 ◇ Analyse technique :
 → circuit à une maille → pas de problème

- ◇ La puissance reçue par le résistor R vaut : $\mathcal{P}_r = R I^2 = R \left(\frac{E}{R + R_g} \right)^2 = \frac{R}{(R_g + R)^2} E^2$.

- ◇ Écrivons la puissance sous une forme plus mathématique (pour la première et la dernière fois) : $a \stackrel{\text{not}}{=} E^2$, $x \stackrel{\text{not}}{=} R$ et $x_0 \stackrel{\text{not}}{=} R_g$. Le problème revient alors à trouver le maximum de la fonction $f(x) = \frac{a x}{(x + x_0)^2}$. C'est une fonction qui tend vers 0 en $x = 0$ et en $x = +\infty$. Étant donné son écriture, la fonction est positive : elle admet donc un maximum.

- ◇ Calculons sa dérivée et cherchons le point où elle s'annule.

$$f'(x) = a \frac{(x + x_0)^2 - 2x(x + x_0)}{(x + x_0)^4} = a \frac{x_0 - x}{(x + x_0)^3} \rightsquigarrow f'(x) = 0 \text{ pour } x = x_0$$

◇ Traduction : le transfert de puissance sera optimal pour $R = R_g$ et vaut 50 %.

Dans un circuit purement résistif, il y a adaptation d'impédance quand la résistance de la partie utile du circuit est égal à la résistance du générateur.

☞ *Remarque* : c'est bien la dernière fois que nous transposons en notation mathématique un problème physique.

III.3 – Déterminer des énergies

III.3.i – lien entre la puissance et l'énergie – dériver en physique

La puissance reçue (resp. fournie) est la vitesse à laquelle s'échange l'énergie reçue (resp. fournie). Ainsi :

$$\mathcal{P}_r(t) = \frac{d\mathcal{E}_r(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_f(t) = \frac{d\mathcal{E}_f(t)}{dt}$$

◇ Techniquement, la puissance est la dérivée de l'énergie *par rapport au temps* et se note $\mathcal{P}(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

★ la notation différentielle

- ◇ En physique, dans quasiment tous les cas, nous allons noter la dérivée sous la forme différentielle $\frac{d}{dt}$ pour plusieurs raisons :
- cela permet de savoir par rapport à *quelle variable* nous dérivons car, en physique, nous allons dériver par rapport à un peu tout
 - cela permet une interprétation physique de la dérivée et facilite les raisonnements
 - cela simplifie les calculs

★ variable par rapport à laquelle nous dérivons

- ◇ En physique, il y a toujours beaucoup de grandeurs différentes. Prenons l'exemple précédent.
- ◇ La puissance reçue par le résistor R s'écrit : $\mathcal{P}_r = \frac{R}{(R + R_g)^2} E^2$.
- ◇ En cherchant le maximum à *générateur fixé*, ie. en supposant que R pouvait varier, nous avons dérivé \mathcal{P}_r par rapport à R pour, justement, étudier les variations en fonction de R . Nous aurions alors pu écrire :

$$\frac{d\mathcal{P}_r}{dR} = \frac{(R_g + R)^2 - 2R(R + R_g)}{(R + R_g)^4} E^2 = \frac{R_g - R}{(R + R_g)^3} E^2$$

et nous obtenons bien le résultat qu'il faut dorénavant connaître : il y a adaptation d'impédance pour $R = R_g$.

- ◇ Imaginons maintenant que R soit fixé et que nous cherchions le générateur optimal. Il faut alors chercher comment \mathcal{P}_r varie en fonction de R_g . Dérivons donc par rapport à R_g :

$$\frac{d\mathcal{P}_r}{dR_g} = -\frac{2E^2}{(R + R_g)^3} E^2$$

- ◇ Nous pouvons alors constater que la dérivée est toujours négative, ce qui signifie :

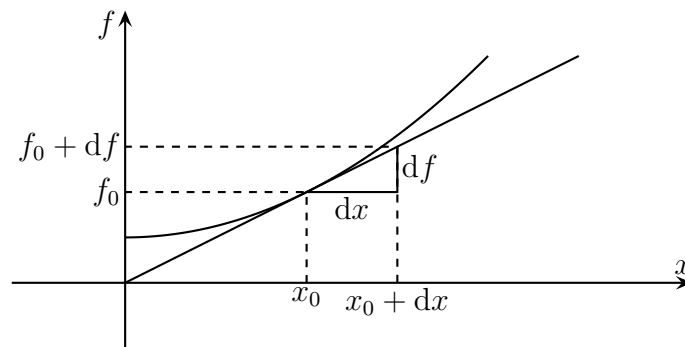
- qu'il n'y a pas de valeur optimale de R_g
- que plus R_g augmente, plus la puissance reçue est faible

ce qui permet de conclure que la meilleure valeur est $R_g = 0$, ce qui, finalement, est normal : la puissance reçue par la partie utile sera maximale lorsque la puissance dissipée inutile sera nulle !

- ◇ Il est donc très important de toujours préciser ce par rapport à quoi nous dérivons et de bien en comprendre la signification.
- ◇ Il y a une seule exception pour la notation de la dérivée : les dérivées temporelles qui, parfois, s'écrivent avec des points (et pas des primes) car c'était la notation de Newton. Exemple : $\mathcal{P}_r(t) = \dot{\mathcal{E}}_r(t)$. L'avantage de cette notation c'est qu'elle est rapide. L'inconvénient c'est que c'est son seul avantage, elle est donc à réserver pour des intermédiaires de calculs.

★ interprétation « physique » de la dérivée

- ◇ Pour cela repartons de l'interprétation graphique de la dérivée.



- ◇ La dérivée en un point x_0 n'est autre que la pente de la tangente en ce point.
- ◇ En prenant deux points très proches sur la courbe, nous pouvons voir que la courbe se confond avec sa tangente et ainsi la pente de la tangente vaut bien $\frac{df}{dx}$ où df est le petit écart de valeur de f entre les deux points et dx l'écart entre les deux points.
- ◇ En fait, cela correspond bien à la limite du taux d'accroissement :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{df}{dx}(x_0)$$

- ◇ Ce genre de raisonnement permettra ultérieurement de raisonner pendant une durée dt très courte afin de voir ce qui s'y produit.

Les quantités notées « d » sont appelées *infinitésimales* ou parfois *élémentaire*.

★ simplification des calculs

- ◇ C'est plus de l'habitude qu'autre chose et ce sera utilisé tout au long de l'année :

Les « d droits » peuvent se manipuler comme des fractions bien que cela ne soit pas des fractions.

- ◇ Comme ce sont des fractions, nous pouvons alors en déduire le lien entre les joules et les watts. En effet, puisque $\mathcal{P}_r = \frac{d\mathcal{E}_r}{dt}$, nous obtenons $\boxed{1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot 1 \text{ s}^{-1}}$.
- ◇ C'est aussi extrêmement utile pour les dérivées composées, mais nous verrons cela au fur et à mesure des choses.

III.3.ii – lien entre énergie et puissance – intégrer en physique

L'énergie reçue entre les instants t_1 et t_2 n'est autre que la somme de toutes les énergies reçues pendant des durées élémentaire dt entre t_1 et t_2 .

- ◇ Pendant la durée dt , l'énergie reçue est infime et vaut $d\mathcal{E}_r = \mathcal{P}_r(t) dt$ car, justement, les notations différentielles peuvent se manipuler comme des fractions. Pour **additionner** toutes ces petites énergies, nous devons donc calculer :

$$\mathcal{E} = \sum d\mathcal{E}_r = \sum \mathcal{P}_r(t) dt$$

- ◇ Techniquement, lorsque nous devons additionner des nombres infinitésimaux, comme des différentielles, nous n'utiliserons pas le symbole \sum qui permet d'additionner des paquets bien connus mais le symbole \int . Et ainsi :

$$\mathcal{E}_r = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_r(t) dt$$

L'intégrale en physique représente la sommation de quantités élémentaires.

- ◇ Même si, techniquement, pour calculer une intégrale, il faut calculer une primitive, il conviendra de ne pas confondre intégrale et primitive : une intégrale représente une sommation (pour le physicien), une primitive n'est qu'un outil de calcul.

III.3.iii – puissance moyenne

★ définition

La *puissance moyenne* reçue (resp. fournie) par un dipôle entre deux instants est le rapport entre l'énergie reçue (resp. fournie) par ce dipôle entre ces deux instants par la durée séparant ces deux instants.

$$P_r = \frac{\mathcal{E}_r(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_r(t) dt$$

- ◇ En fait, ce n'est ni plus ni moins que la définition de la valeur moyenne d'une fonction appliquée à la puissance.

★ **exemple du régime sinusoïdal**

- ◇ Considérons un résistor traversé par un courant $i(t) = I_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$ et calculons la valeur moyenne de la puissance qu'il reçoit sur une période.
- ◇ En appliquant la définition de la puissance sur la période $[0, T]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_r(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T R I_0^2 \cos^2(2\pi f t + \varphi) dt = \frac{R I_0^2}{T} \int_0^T \frac{\cos(4\pi f t + 2\varphi) + 1}{2} dt \\
 &= \frac{R I_0^2}{2T} \left[\frac{\sin(4\pi f t + 2\varphi)}{4\pi f} + t \right]_0^T = \frac{R I_0^2}{2T} \left(\frac{\sin(4\pi f T + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\pi f} + T \right) \\
 &= \frac{R I_0^2}{2T} \left(\frac{\cancel{\sin(4\pi f T + 2\varphi)} - \cancel{\sin(2\varphi)}}{4\pi f} + T \right) = \frac{R I_0^2}{2T} \times T \\
 &= \frac{R I_0^2}{2}
 \end{aligned}$$

Étudier un circuit électrocinétique

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - convention générateur / récepteur, caractère générateur / récepteur, caractéristique
 - tension à vide, courant de court-circuit
 - puissance, énergie, adaptation d'impédance

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - puissance, énergie
- ◇ Connaître les liens entre watt, volt et ampère et entre joule et seconde.

★ Les lois

- ◇ Sont à savoir :
 - les lois des mailles et des nœuds
 - les modèles des différents dipôles réels
 - ce qu'est l'effet Joule

Au niveau de l'analyse

★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir repérer un circuit simplifiable d'un circuit non simplifiable et identifier l'approche (maillière ou nodale) la plus adéquate.

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - retrouver l'expression de l'énergie à partir du raisonnement différentiel
 - retrouver le caractère générateur ou récepteur d'un dipôle à partir de sa caractéristique graphique tracée dans le plan (u, i)

★ exercices classiques

- ◇ Savoir retrouver :
 - la condition d'adaptation d'impédance pour un circuit purement résistif
 - la puissance moyenne reçue par un résistor en régime sinusoïdal

Table des matières

I	Étude par lois fondamentales	1
I-1	Lois de KIRCHHOFF	1
I-1.i	domaine de validité	1
I-1.ii	lois des mailles, additivité des tensions	1
	démonstration	1
I-1.iii	loi des nœuds	2
I-1.iv	de belles lois à ne pas appliquer en l'état	2
I-2	Retour sur les dipôles	3
I-2.i	convention générateur ou récepteur	3
I-2.ii	lois constitutives – caractéristique	3
	le résistor	4
	les générateurs idéaux	4
I-2.iii	dipôle symétrique ou polarisé ?	5
	reconnaître un dipôle symétrique d'un dipôle polarisé	5
I-3	Approche maillère et lois de KIRCHHOFF	5
I-3.i	c'est quoi ?	5
I-3.ii	que faire de la loi des nœuds ?	6
I-3.iii	la loi des mailles en terme de courant	6
I-3.iv	circuit TP n°1	7
I-3.v	circuit TP n°2	9
I-4	Approche nodale et lois de KIRCHHOFF	11
I-4.i	c'est quoi ?	11
I-4.ii	additivité des tensions – masse d'un circuit	11
I-4.iii	loi des nœuds en terme de potentiel	11
I-4.iv	idoinotons	12
	idoinoton 1	12
	idoinoton 2	13
I-4.v	circuit TP n°1	14
I-4.vi	circuit TP n°2	15
II	Tout est désormais possible	16
II-1	Des lois non truquées	16
II-1.i	circuit à une maille – loi de POUILLET	17
	Loi de POUILLET	17
II-1.ii	circuit à deux nœuds	18
II-1.iii	diviseurs de tension et de courant	18
	diviseur de tension	18
	diviseur de courant	19
II-1.iv	association de résistors	19
	idée de la démonstration	19
	association série de résistors	19
	association parallèle	20
II-1.v	association de générateurs idéaux de tension ou de courant	20
	association série de générateurs idéaux de tension	20
	association parallèle de générateurs idéaux de courant	20
	association parallèle de générateurs idéaux de tension	21
	association série de générateurs idéaux de courant	21
II-1.vi	association de générateurs idéaux de tension et de courant	22

	association parallèle	22
	association série	22
II.1.vii	Transformation THÉVENIN – NORTON	23
II.2	Dipôles réels	23
II.2.i	résistors	23
II.2.ii	les fils	24
II.2.iii	générateurs	24
	la modélisation est connue	24
	caractéristique	24
	interprétation	24
II.2.iv	voltmètre	25
II.2.v	ampèremètre	25
II.3	De nouveaux exemples	26
II.3.i	ponts à la chaîne	26
	autre méthode pour trouver U_0	27
II.3.ii	pont de Wheastone	27
	tension à vide E_{th}	28
	courant de court-circuit η_{No}	28
	détermination de R_{Th}	30
	comme c'est étrange	30
	utilité de ce pont	30
II.3.iii	dipôle équivalent à un résistor	31
III	Aspect énergétique	33
III.1	Approche de la puissance et de l'énergie	33
III.1.i	que représente ces grandeurs ?	33
III.1.ii	aspect physique : caractère générateur ou récepteur ?	33
III.1.iii	aspect conventionnel : reçu ou fourni ?	34
III.2	Déterminer des puissances	34
III.2.i	expression des puissances reçue et fournie	34
III.2.ii	interprétation des caractéristiques graphiques	35
	exemple du résistor en convention récepteur	35
	exemple du résistor en convention générateur	36
	exemple du générateur réel	37
III.2.iii	l'énergie n'est jamais perdue	37
	idée de démonstration	38
III.2.iv	... même si elle peut s'échapper	38
III.2.v	utiliser au mieux d'un générateur	39
III.3	Déterminer des énergies	40
III.3.i	lien entre la puissance et l'énergie – dériver en physique	40
	la notation différentielle	40
	variable par rapport à laquelle nous dérivons	40
	interprétation « physique » de la dérivée	41
	simplification des calculs	41
III.3.ii	lien entre énergie et puissance – intégrer en physique	42
III.3.iii	puissance moyenne	42
	définition	42
	exemple du régime sinusoïdal	43
	Les définitions	44
	Les grandeurs	44

Les lois	44
Analyse technique	44
petits gestes	44

Électrocinétique

Chapitre 3

Circuits en régime transitoire

Circuits en régime transitoire

Dans ce chapitre nous allons voir et étudier deux nouveaux composants : la bobine et le condensateur. Au delà de leurs nouveautés en terme de relation courant – tension, au delà même des nouvelles possibilités que cela apportera dans les circuits, ce chapitre est fondamental pour deux raisons :

- nous allons apprendre à utiliser de nouveaux outils mathématiques : les équations différentielles
- les phénomènes physiques que nous verrons dans ce chapitre et qui s'appellent des évolutions d'ordre 1 ou 2, se rencontreront très souvent dans tous les autres domaines de la physique, il sera donc primordial de les maîtriser

I – Phénoménologie

I.1 – Circuits avec bobines et condensateurs

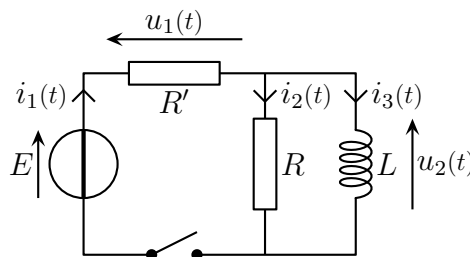
I.1.i – comment « sonder » un circuit ?

- ◇ Nous allons commencer par quelques observations afin de mieux « voir » comment réagissent des circuits dans lesquels il y a bobines et condensateurs.
- ◇ Pour ce faire, nous allons utiliser un logiciel de simulation : c'est un logiciel qui permet de simuler (numériquement) ce qui se passe dans un circuit électrique.
- ◇ Les avantages de tels logiciels sont énormes :
 - l'accès à toute sorte de composants
 - facilité d'utilisation
 - il est possible de suivre en même temps toutes les tensions et intensités intéressantes
- ◇ L'inconvénient principal reste que ce n'est pas de l'expérimental, *ie.* un tel logiciel :
 - ne permet pas de s'exercer au brochage des circuits
 - ne permet pas de voir les défauts des composants réels (à moins qu'ils ne soient modélisés)
- ◇ Mais tous ces inconvénients seront travaillés en TP.

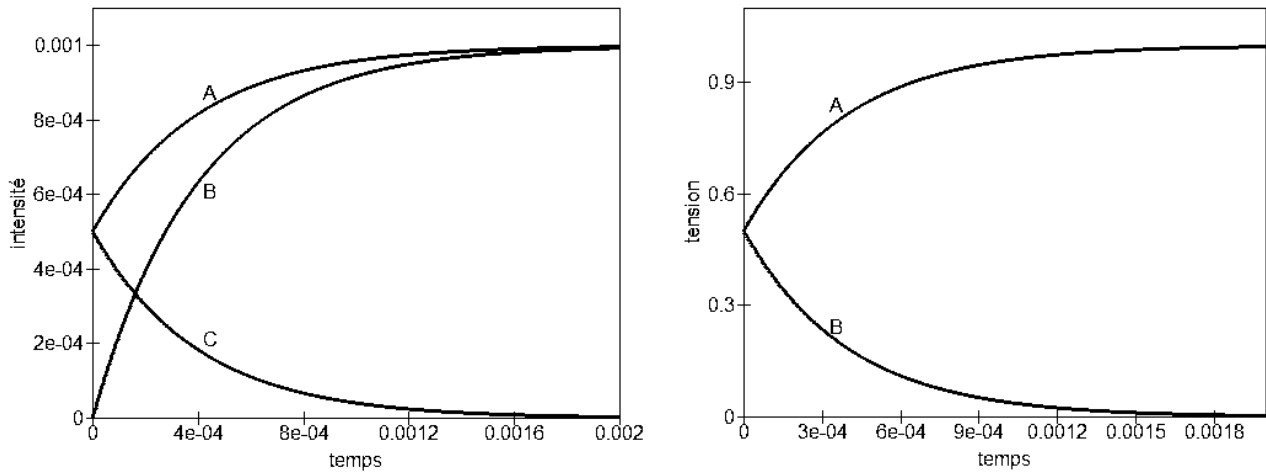
I.1.ii – observation de circuits du premier ordre

★ circuit avec une bobine

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1,0 \text{ V}$; $R = R' = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $L = 0,2 \text{ H}$.



- ◇ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ ainsi que les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.



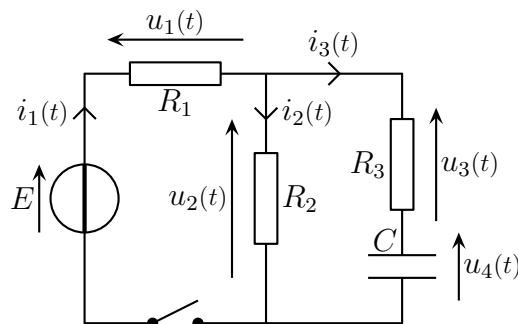
◇ Il apparaît sur ces graphiques que toutes les tensions et toutes les intensités ont des évolutions de même allure :

- évolution rapide au début
- évolution plus lente à la fin pour finir sur une asymptote
- toutes les évolutions (tension et intensité) vont à la même vitesse (elles se finissent en même temps)

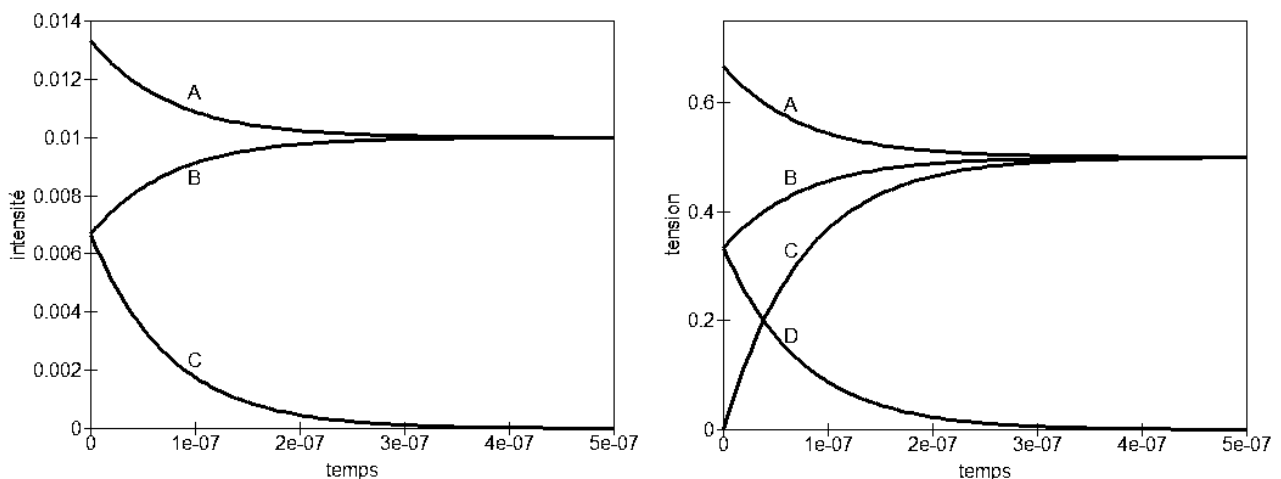
◇ Tout cela est typique des évolutions de premier ordre.

★ circuit avec un condensateur

◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1,0 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \Omega$ et $C = 1,0 \text{ nF}$.



◇ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ ainsi que les tensions $u_1(t)$ à $u_4(t)$.

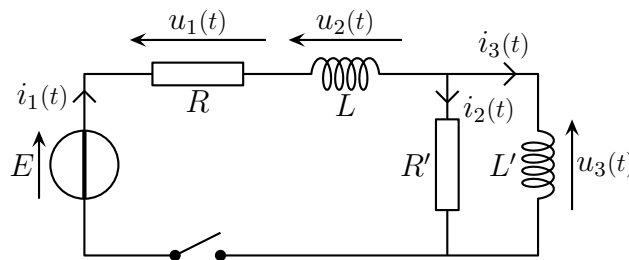


- ◇ Les observations sont identiques à celles du circuit précédent :
 - évolution rapide au début
 - évolution plus lente à la fin pour finir sur une asymptote
 - toutes les évolutions (tension et intensité) vont à la même vitesses (elles se finissent en même temps)
- ◇ Tout cela est typique des évolutions de premier ordre.

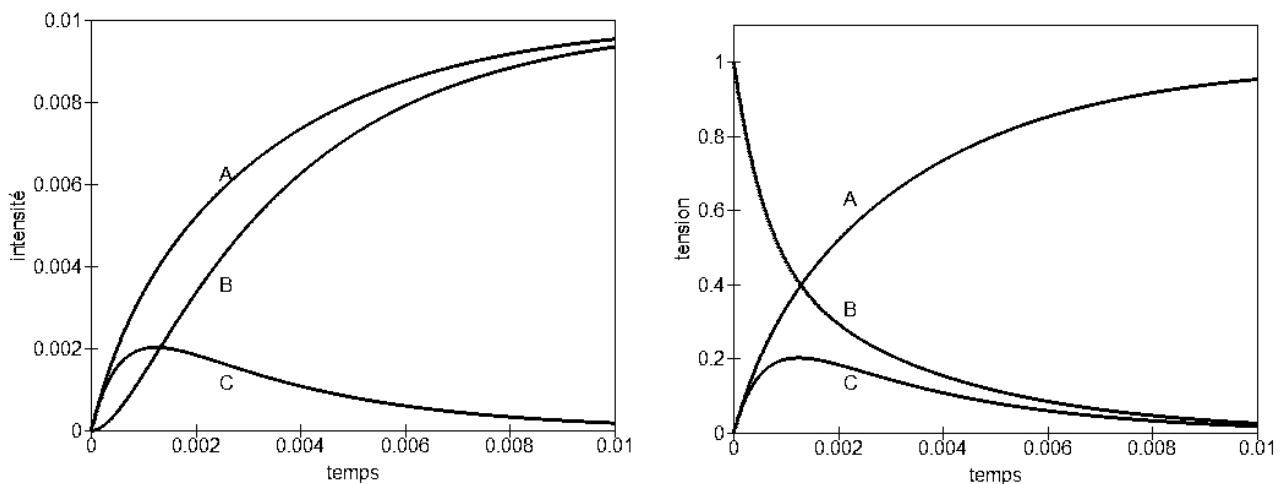
I.1.iii – observation de circuits du deuxième ordre

★ circuit avec deux bobines

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1,0 \text{ V}$; $R = R' = 100 \Omega$ et $L = 2L' = 0,2 \text{ H}$.



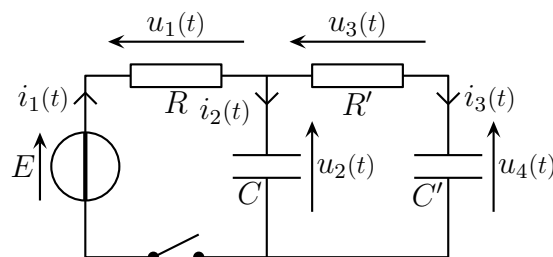
- ◇ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.



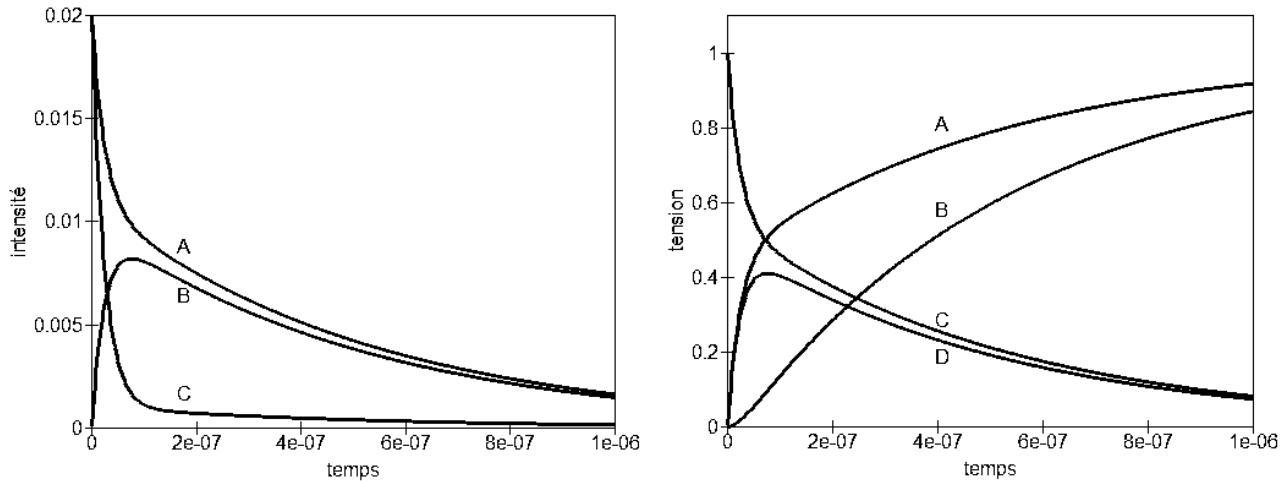
- ◇ Cette fois, il apparaît :
 - que toutes les tensions et toutes les intensités n'ont la même allure (surtout les courbes C)
 - que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps

★ circuit avec deux condensateurs

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1,0 \text{ V}$; $R = R' = 50 \Omega$ et $C' = 5C = 5,0 \text{ nF}$.



◇ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.

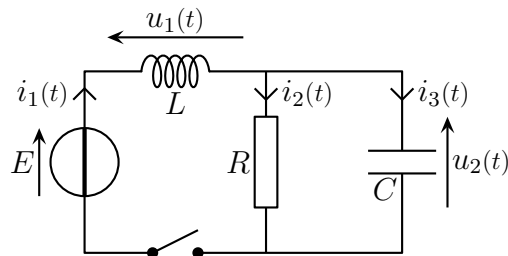


◇ Cette fois, il apparaît :

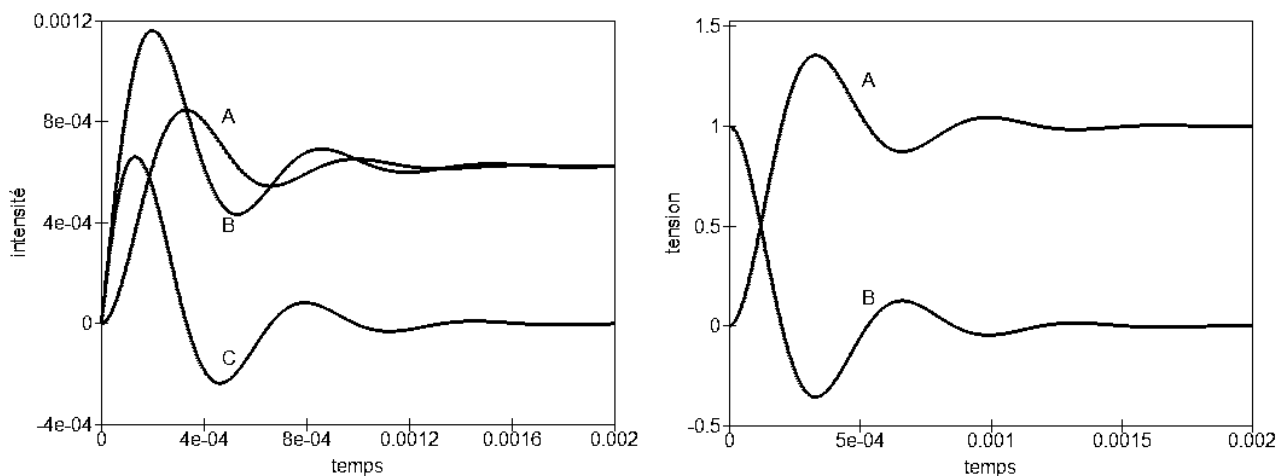
- que toutes les tensions et toutes les intensités n'ont la même allure (surtout les courbes C)
- que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps
- qu'il semble exister deux phases dans le circuit (très visible sur les courbes A et C) ; c'est révélateur de **deux** temps caractéristiques

★ circuit avec une bobine et un condensateur

◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1,0 \text{ V}$; $R = 1,6 \text{ k}\Omega$; $C = 100 \text{ nF}$ et $L = 0,1 \text{ H}$.



◇ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.



◇ Cette fois, il apparaît :

- que toutes les tensions et toutes les intensités ont à nouveau la même allure (des oscillations d'amplitude décroissantes)
- que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps

I.1.iv – régimes libre ou forcé, transitoire ou permanent

- ◇ Les phénomènes que nous avons observés sont complexes. Pour en parler, rien de tel qu'un vocabulaire précis.

★ transitoire ou permanent ?

Le régime est dit *transitoire* lorsqu'il est ni périodique ni continu.

- ◇ Exemple sonore : une explosion, la voix.

Le régime est dit *permanent* lorsque le régime transitoire est terminé.

- ◇ Globalement, cela signifie qu'il n'y a pas d'évolution dans le dispositif : le régime peut être alors continu ou permanent.

- ☕ *Remarque* : de manière tout à fait exceptionnelle, il peut y avoir des régimes permanents non périodiques. Exemple sonore : le bruit d'une cascade.

Une évolution est soit en régime transitoire, soit en régime permanent.

- ◇ Sur chacun des exemples précédents, il est possible d'identifier le régime transitoire du régime permanent. Ceci dit, pour le régime permanent, il faudra se mettre d'accord car il n'est jamais vraiment totalement atteint.

★ libre ou forcé ?

Un dispositif est dit en *régime libre* lorsqu'aucune source ne lui apporte de l'énergie. Il est dit en *régime forcé* sinon.

Un dispositif est soit en régime libre, soit en régime forcé.

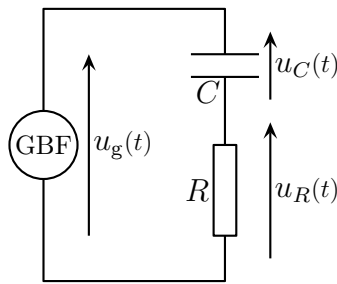
- ◇ Ici, pour tous les exemples :

- le régime est libre **avant** la fermeture de l'interrupteur
- le régime est forcé **après** la fermeture de l'interrupteur

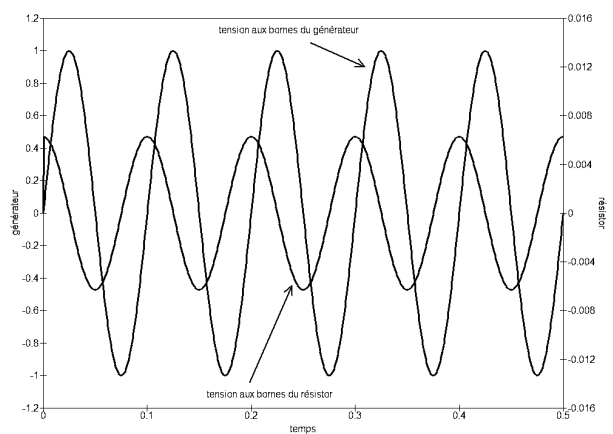
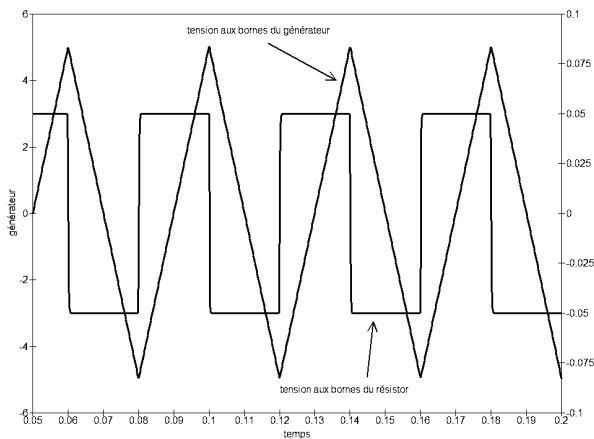
I.2 – Comportement d'un condensateur

I.2.i – observation à l'oscilloscope

- ◇ Le but va être d'observer l'intensité traversant un condensateur tout en lui imposant une tension. Pour cela réalisons le montage ci-dessous avec $C = 100 \text{ nF}$ et $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



- ✧ Expérimentalement parlant, il n'est pas si simple que cela de mesurer une intensité. C'est pourquoi nous avons branché une résistance en série avec le condensateur de manière à accéder à l'intensité par la relation $u_R(t) = Ri(t)$.
- ✧ Toutefois pour que la tension délivrée par le générateur soit celle aux bornes du condensateur, il faudra vérifier que $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$.
- ✧ En envoyant successivement une tension triangulaire puis une tension sinusoïdale, nous obtenons les résultats ci-dessous.



- ✧ Dans les deux cas, nous pouvons effectivement vérifier que la tension aux bornes du résistor (échelle de droite) est très inférieure à la tension totale.
- ✧ Nous pouvons alors observer une propriété fondamentale du condensateur : l'intensité qui le traverse est proportionnelle à la dérivée de la tension à ses bornes.

I.2.ii – condensateur idéal

Le *condensateur idéal* se représente de la façon ci-dessous et est tel qu'il y a proportionnalité entre l'intensité qui le traverse et la dérivée temporelle de la tension entre ses bornes.



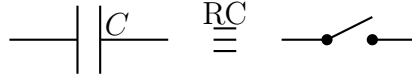
Un condensateur est caractérisé uniquement par sa conductance $C > 0$ en farad (F). Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $i(t) = +C \frac{du(t)}{dt}$.

- ✧ Évidemment, en convention générateur, cela donnera : $i(t) = -C \frac{du(t)}{dt}$.
- ✧ Les capacité (en TP) vont du pF au μF .

I.2.iii – comportement en régime continu

- ◇ Imaginons un condensateur en régime continu. Alors la tension à ses bornes est constante dans le temps et l'intensité qui le traverse aussi. Dans ces conditions, nous pouvons constater alors que l'intensité est nulle.

En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



I.2.iv – comportement en régime transitoire

- ◇ Il est bien sûr hors de question que l'intensité du courant qui traverse le condensateur soit infinie. Pour cela il faut que la tension soit mathématiquement dérivable, ce qui implique :

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps.

⊛ il ne faut pas confondre les deux significations du mot « continu ».

- ◇ Bien que cela ne soit pas précisé, il va de soi que l'intensité du courant qui traverse un condensateur peut être discontinue. Si, par hasard, elle se trouvait être mathématiquement continue, cela serait, justement, le fruit du hasard ou de coïncidence provenant du reste du circuit.

I.2.v – retour sur les exemples

- ◇ Sans en savoir plus que les lois de KIRCHHOFF et le comportement d'un condensateur, nous pouvons retrouver quelles courbes correspondent à quelles grandeurs.
- ◇ À l'instant initial, les condensateur étaient déchargés.

- ◇ Circuit RC :
- | | |
|-------|-------|
| i_A | i_1 |
| i_B | i_2 |
| i_C | i_3 |
- et
- | | |
|-------|-------|
| u_A | u_2 |
| u_B | u_1 |
| u_C | u_4 |
| u_D | u_3 |
- ◇ Circuit d'ordre 2 :
- | | |
|-------|-------|
| i_A | i_1 |
| i_B | i_3 |
| i_C | i_2 |
- et
- | | |
|-------|-------|
| u_A | u_2 |
| u_B | u_4 |
| u_C | u_1 |
| u_D | u_3 |

I.2.vi – approche électrostatique du condensateur

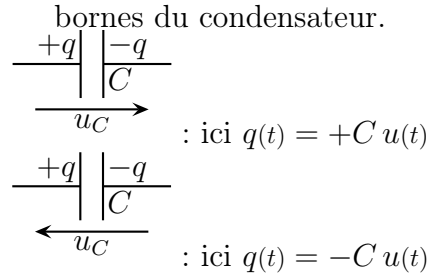
- ◇ Comme nous le verrons dans un des derniers chapitre de l'année :

Un *condensateur* est constitué de deux plaques, appelées armatures, qui peuvent accumuler des charges.

Un condensateur est toujours globalement neutre, ce qui permet d'écrire les charges sur les armatures $+q$ et $-q$.

✧ Bien évidemment, rien n'interdit d'avoir $+q < 0 \dots$

Il y a proportionnalité entre la charge portée par chaque armature et la tension entre les bornes du condensateur.



✧ Le signe entre la charge et la tension est le même que celui devant la charge pointée par la flèche de la tension.

⊛ l'approche électrostatique est **extrêmement piégeuse** pour l'établissement de l'évolution du circuit car elle fait intervenir une nouvelle grandeur q électrocinétiquement inutile et de nouvelles conventions de signes. Cette approche est à éviter à moins d'y être contraint. Si, à un moment ou à un autre il faut chercher des charges portées par des armatures, nous raisonnerons en terme de tension tout le temps et passerons à la charge au dernier moment.

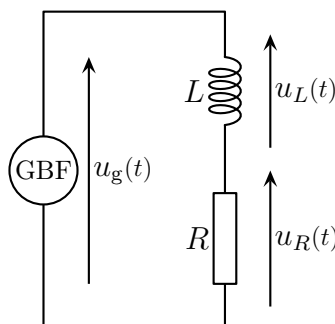
✧ Le seul intérêt de cette approche est de permettre la compréhension du vocabulaire « charge », « déchargé » que nous utiliserons pour le condensateur.

Quand un condensateur est dit *déchargé*, les charges portées par chacune de ses armatures sont nulles et, donc, la tension entre ses bornes aussi.

I.3 – Comportement d'une bobine

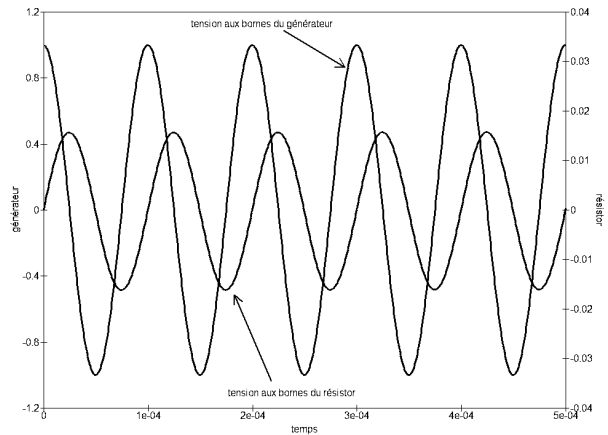
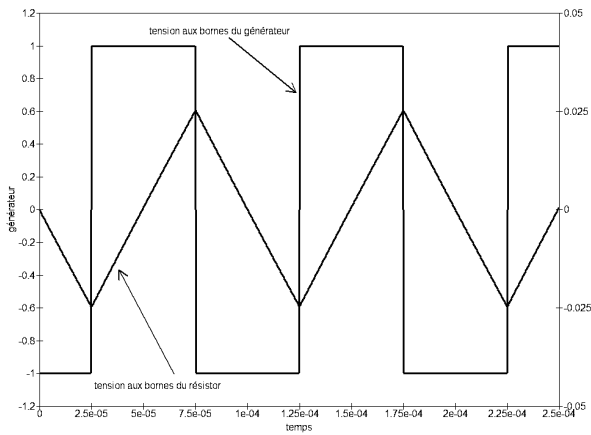
I.3.i – observation à l'oscilloscope

✧ Le but va être d'observer l'intensité traversant une bobine tout en lui imposant une tension. Pour cela réalisons le montage ci-dessous avec $L = 0,1 \text{ H}$ et $R = 100 \Omega$.



✧ De même que pour le condensateur, il faudra vérifier que $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$.

✧ En envoyant successivement une tension rectangulaire puis une tension sinusoïdale, nous obtenons les résultats ci-dessous.



- ◇ Dans les deux cas, nous pouvons effectivement vérifier que la tension aux bornes du résistor (échelle de droite) est très inférieure à la tension totale.
- ◇ Nous pouvons alors observer une propriété fondamentale de la bobine : la tension à ses bornes est proportionnelle à dérivée de l'intensité qui la traverse.

I.3.ii – bobine idéale

Une *bobine idéale* se représente de la façon ci-dessous et est telle qu'il y a proportionnalité entre la tension à ses bornes et la dérivée temporelle de l'intensité qui la traverse.



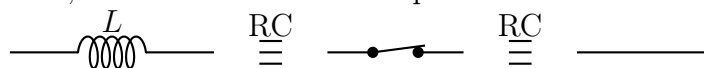
Une bobine idéale est caractérisée uniquement par son inductance $L > 0$ en henry (H). Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $u(t) = +L \frac{di(t)}{dt}$.

- ◇ Évidemment, en convention générateur, cela donnera : $u(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$.
- ◇ Les inductances (en TP) vont du mH au H.

I.3.iii – comportement en régime continu

- ◇ Imaginons une bobine en régime continu. Alors la tension à ses bornes est constante dans le temps et l'intensité qui le traverse aussi. Dans ces conditions, nous pouvons constater alors que la tension est nulle.

En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.



I.3.iv – comportement en régime transitoire

- ◇ Il est bien sûr hors de question que la tension aux bornes de la bobine soit infinie. Pour cela il faut que l'intensité qui la traverse soit mathématiquement dérivable, ce qui implique :

L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps.

- ◇ De manière analogue au condensateur, il va de soi que la tension aux bornes de la bobine peut être discontinue.

I.3.v – retour sur les exemples

- ◇ Nous pouvons maintenant finir de retrouver « qui est qui » dans les circuits comportant des bobines.
- ◇ À l'instant initial, les condensateurs étaient déchargés et les bobines n'étaient pas traversées par des courants.

◇ Circuit RL :

i_A	i_1
i_B	i_3
i_C	i_2

et

u_A	u_1
u_B	u_2

◇ Circuit du second ordre RL :

i_A	i_1
i_B	i_3
i_C	i_2

et

u_A	u_1
u_B	u_2
u_C	u_3

◇ Circuit du second ordre RLC :

i_A	i_2
i_B	i_1
i_C	i_3

et

u_A	u_2
u_B	u_1

I.4 – Étudier un circuit en régime transitoire

I.4.i – comment déterminer *a priori* le régime ?

- ◇ Pour « libre » ou « forcé », c'est simple, il suffit de regarder le circuit : s'il y a un générateur, c'est un régime forcé, s'il n'y en a pas (ou s'il est déconnecté suite à la manipulation d'un interrupteur) c'est un régime libre.
- ◇ Pour « permanent » ou « transitoire », il faut regarder quelles sont les conditions expérimentales : les régimes sont forcés après une durée « longue » ou, au moins, « suffisamment longue ». Ainsi quand il est précisé qu'« on attend longtemps avant de fermer l'interrupteur », cela signifie qu'*avant* la fermeture de l'interrupteur, le régime est permanent. De même, lorsqu'il est demandé de préciser ce qui se passe après la fermeture de l'interrupteur, cela sous-entend qu'il faut déterminer la partie transitoire du régime.
- ◇ Dans quelques chapitres, il y aura un régime forcé qui nous intéressera tout particulièrement : le régime sinusoïdal forcé.

I.4.ii – comment déterminer *a priori* l'ordre d'évolution ?

- ◇ Sauf montages un peu particuliers, s'il y a une seule bobine ou un seul condensateur, le circuit sera d'ordre 1 et toutes les grandeurs auront le même type d'évolution.
- ◇ Quand il y a deux composants (bobine et condensateur), le circuit est d'ordre 2.
- ◇ Avec plus de composants, il est possible de faire des circuits d'ordre 3, mais nous n'en rencontrerons pas trop.

I.4.iii – approche nodale ou maillère

- ◇ Le fait que les circuits vont comporter bobines et condensateurs ne va pas changer fondamentalement les approches nodale et maillère. Il faudra juste faire un peu plus attention à l'écriture des lois.

★ loi des mailles en terme de courant

- ◇ Lorsqu'une bobine est dans la maille, pas de problème, nous pouvons écrire directement la tension à ses bornes en terme de courant : $u_L(t) = \pm L \frac{di_L(t)}{dt}$ suivant la convention.
- ◇ Pour le condensateur, c'est plus délicat. Pour trouver la relation, nous allons devoir **intégrer** la relation courant tension. Cela donne :

$$\int_0^t i_C(t') dt' = \int_0^t C \frac{du_C(t')}{dt'} dt' = C [u_C(t')]_0^t = C u(t) - C u(0)$$

- ◇ Et ainsi nous obtenons :

La tension en terme de courant s'écrit pour un condensateur :

$$u(t) = u(0) \pm \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$

- ◇ Il y a deux choses importantes dans cette loi :
 - la présence du terme $u(0)$, indispensable en tant que « condition initiale »
 - quand nous allons dériver le membre de droite (le seul écrit dans la loi des mailles en terme de courant), nous obtenons $\pm \frac{i_C(t)}{C}$ suivant la convention.
- ◇ Dans la mesure du possible, nous éviterons d'écrire cette loi. En d'autre terme, tant que nous n'aurons pas d'outils plus efficaces (c'est-à-dire pas avant quelques chapitres), nous ferons très attention pour écrire de telles lois.

★ loi des nœuds en terme de potentiel

- ◇ Cette fois c'est le contraire : pour le condensateur, cela se passera bien, mais pas pour la bobine.
- ◇ Pour le condensateurs, nous écrirons tout simplement $i_C(t) = \pm C \frac{d(V_1(t) - V_2(t))}{dt}$ où les points 1 et 2 sont les bornes du condensateur.
- ◇ Pour la bobine, un raisonnement identique au précédent conduit à :

Le courant en terme de potentiel traversant une bobine s'écrit :

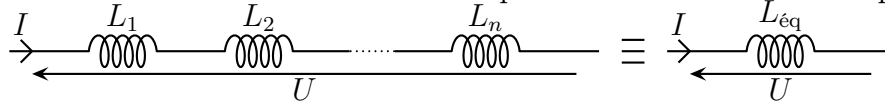
$$i(t) = i(0) \pm \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt'$$

- ◇ Comme précédemment, nous ferons très attention pour écrire des lois de nœuds en terme de potentiel avec des bobines.

I.4.iv – association de bobines ou de condensateurs

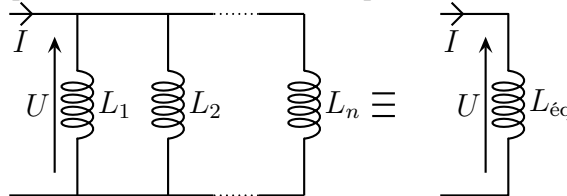
- ◇ Lorsque deux (ou plusieurs) bobines ou condensateurs sont en série ou en parallèle, il est possible de les associer, *ie.* de les remplacer par un seul composant électrocinétiquement équivalent.

Une association série de bobines est équivalente à une bobine unique.



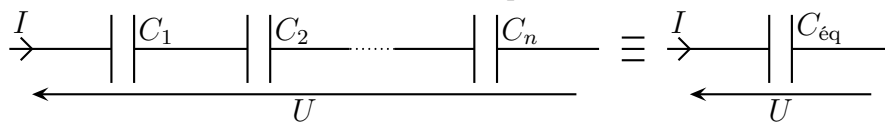
L'inductance de la bobine équivalente vaut $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$.

Une association parallèle de bobines est équivalente à une bobine unique.



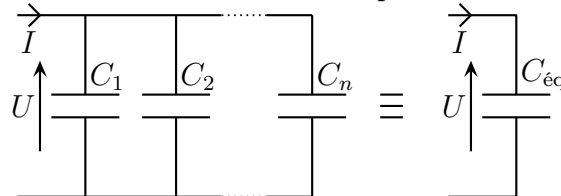
L'inductance de la bobine équivalente vaut $\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$.

Une association série de condensateurs est équivalente à un condensateur unique.



La conductance du condensateur équivalent vaut $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$.

Une association parallèle de condensateurs est équivalente à un condensateur unique.



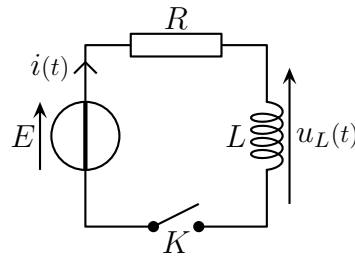
La conductance du condensateur équivalent vaut $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$.

II – Évolution du premier ordre

II.1 – Circuit R, L soumis à un échelon de tension

II.1.i – présentation et analyse

◇ Considérons le circuit ci-dessous.



✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :

- les grandeurs connues sont E , R et L
- nous allons donc chercher $i(t)$ et $u_L(t)$
- il s'agit d'un circuit en régime forcé et transitoire

✧ Analyse technique :

- une seule maille → loi des mailles en terme de courant
- nous utiliserons la relation courant tension de la bobine pour obtenir $u_L(t)$.

II.1.ii – traduction des lois physiques

✧ La loi des mailles en terme de courant s'écrit, **une fois que l'interrupteur est fermé** :

$$E - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E}$$

II.1.iii – interlude mathématique – équation différentielle d'ordre 1

✧ Ou plus précisément : équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.

✧ Comment résoudre l'équation $\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \alpha(t) = \text{qqch}(t)$?

★ approche physique

✧ Intéressons-nous tout d'abords à la dimension de la constante τ . Écrivons pour cela que les deux termes du membre de gauche sont de même dimension :

$$\left[\frac{d\alpha(t)}{dt} \right] = \left[\frac{\alpha(t)}{\tau} \right] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{[d\alpha]}{[dt]} = \frac{[\alpha]}{[\tau]}$$

✧ Et comme la notation différentielle ne représente qu'une différence, nous avons $[d\alpha] = [\alpha]$ et $[dt] = [t]$ d'où $\boxed{[\tau] = (s) = T}$.

La constante τ a la même dimension qu'un temps : elle est appelée *constante de temps*.

✧ Étant donné que la constante τ apparaît dans l'équation, il est normal qu'elle apparaisse dans la solution.

La constante τ représente l'échelle de temps sur laquelle va se faire l'évolution.

✧ De plus la partie « à droite » de l'équation représente les contraintes extérieures (ici le générateur), c'est donc ce qui va être à l'origine du régime forcé.

★ approche technique

◇ Il y a trois étapes à faire et **dans l'ordre** :

- écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
- chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)
- chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

🔗 toutes les solutions possibles

Pour l'équation différentielle $\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \alpha(t) = \text{qqch}(t)$, **toutes** les solutions possibles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \alpha_p(t)$$

où λ est une constante à déterminer et $\alpha_p(t)$ une solution *particulière*.

◇ Nous pouvons constater que $\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \alpha_p(t)$, *ie.* :

La solution particulière $\alpha_p(t)$ n'est autre que la solution en régime *permanent*.

🔗 une solution qui marche

◇ Il faut maintenant chercher une solution qui marche, *ie.* qui vérifie l'équation différentielle complète. La plupart du temps, cela revient à chercher une forme explicite de $\alpha_p(t)$.

Pour trouver la solution particulière, il est recommandé de la chercher avec la même force que celle du membre de droite.

qqch(t)	$\alpha_p(t)$
C ^{te}	C ^{te'}
$A \cos(2\pi f t)$	$B \cos(2\pi f t) + C \sin(2\pi f t)$
$A e^{-t/\tau'}$	$A' e^{-t/\tau'}$
$A + B t + C t^2 + \dots$	$A' + B' t + C' t^2 + \dots$

Pour trouver la solution en régime **permanent**, il faut étudier le circuit équivalent en régime permanent.

🔗 la solution finale

◇ C'est la dernière étape **à faire en dernier**.

Les constante d'intégration se déterminent à partir des conditions aux limites. Il doit y avoir autant de condition aux limites que de constantes d'intégration.

Quand les équations différentielles sont des équations différentielles temporelles, les conditions aux limites sont appelées *conditions initiales* lorsqu'elles correspondent à une condition à respecter à l'instant initial.

- ◇ Il peut parfois arriver (mais c'est rare) que la recherche d'une constante d'intégration pour une équation différentielle temporelle se fasse à un instant autre que l'instant initial.

II.1.iv – solution complète du problème particulier

★ résultat physique

- ◇ Réécrivons l'équation différentielle sous forme canonique.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

La constante de temps d'un circuit R, L est $\tau = \frac{L}{R}$.

★ solution analytique

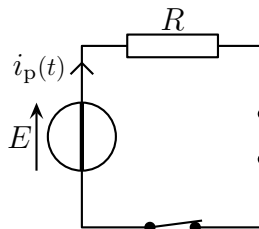
- ◇ Commençons par écrire la solution générale :

$$i(t) = \lambda e^{-t/\tau} + i_p(t)$$

- ◇ Déterminons la solution particulière $i_p(t)$. Pour cela, comme le second membre est constant, supposons qu'elle soit de la forme $i_p(t) = \mu = C^{\text{te}}$ et remplaçons cette solution dans l'équation différentielle :

$$0 + \frac{1}{\tau} \times \mu = \frac{E}{L} \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \frac{E}{L} \times \tau = \frac{E}{L} \times \frac{L}{R} \quad \rightsquigarrow \quad i_p(t) = \frac{E}{R}$$

- ◇ Nous aurions pu aussi déterminer la solution en régime permanent. Pour cela, schématisons le circuit lorsque le régime permanent est atteint. L'interrupteur est fermé et la bobine se comporte comme un fil. Cela donne :



et nous obtenons aussitôt $i_p(t) = \frac{E}{R}$.

- ⚠ bien que cela soit souvent le cas, les deux méthodes ne conduisent pas obligatoirement à la même expression de $i_p(t)$. Seule les solutions finales, à la fin de la 3^e étape, doivent être identiques.

- ◇ La meilleure des deux méthodes est (cette fois) celle que chacun préfère.

- ◇ Pour l'instant la solution s'écrit $i(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$. Reste à déterminer λ .

Ce seront les continuités mathématiques des intensités des courants traversant les bobines et des tensions aux bornes des condensateurs qui permettront de trouver les conditions initiales.

- ◇ Et personne n'a dit que ces continuités *étaient* les conditions initiales ...
- ◇ Ici :
- juste avant de fermer l'interrupteur, aucun courant ne circule **dans la bobine** donc $i(0^-) = 0$
 - la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine assure $i(0^+) = i(0^-)$
 - la solution que nous avons trouvée nous donne $i(0^+) = \lambda + \frac{E}{R}$
- ◇ Ces trois arguments (et il faut les trois arguments) permettent d'aboutir à $\lambda = -\frac{E}{R}$ et ainsi :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

- ◇ C'est bien un résultat homogène !
- ◇ Pour déterminer $u_L(t)$, utilisons la loi constitutive de la bobine :

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \times \frac{E}{R} \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \rightsquigarrow \quad u_L(t) = E e^{-t/\tau}$$

- ◇ C'est bien un résultat homogène **et** proportionnel à $i(t)$ comme nous le savons des évolutions du premier ordre.

☆ interprétation physique

- ◇ À la limite, $i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{E}{R}$ et $u_L(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.
- ◇ Nous constatons que le régime permanent ne dépend pas de l'inductance de la bobine. Rien de plus normal étant donné que le régime permanent est continu qu'en régime continu la bobine se comporte comme un interrupteur fermé quelle que soit son inductance.

II.1.v – régime permanent

- ◇ La question est désormais de savoir *quand* le régime permanent est atteint.
- ◇ Si nous nous en tenons à la définition stricte et rigoureuse de la définition du régime permanent, comme $e^{-t/\tau} \neq 0$ quel que soit t , la réponse est **jamais**.
- ◇ Ceci dit, en dessous d'une certaine marge, il est impossible de faire la différence entre la courbe et son asymptote, c'est pourquoi nous allons chercher quand le régime permanent est atteint à peu près.
- ◇ De manière tout à fait arbitraire, cherchons quand le régime permanent est atteint à mieux que 1 % près.
- ◇ Cela signifie que le terme en $e^{-t/\tau}$ vaut moins de 1 % de sa valeur initiale qui n'est autre que 1 :

$$\begin{aligned} e^{-t/\tau} &\leq \frac{1}{100} \\ e^{t/\tau} &\geq 100 \\ \frac{t}{\tau} &\geq \ln 100 = 2 \ln 10 \\ t &\geq 2 \tau \ln 10 \simeq 4,6 \tau \end{aligned}$$

Au bout d'une durée de 5τ , le régime permanent est atteint à mieux que 1 % près.

✧ Avec un raisonnement identique, nous aurions obtenu :

A bout d'une durée de 3τ , le régime permanent est atteint à 5 % près.

II.1.vi – représentation graphique et interprétation

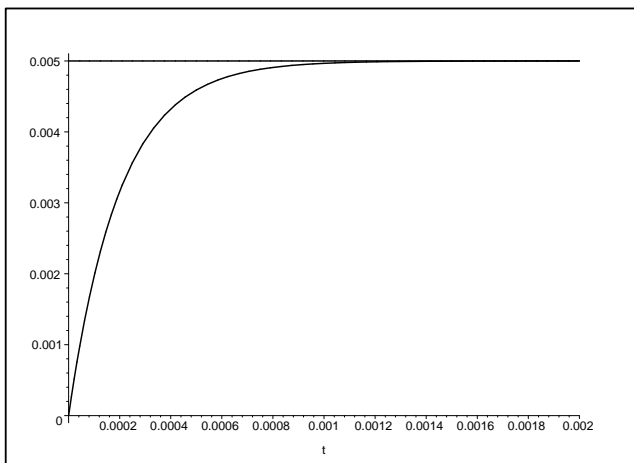
✧ Dans toute la suite, les courbes présentées sont des courbes tracées à partir des solutions analytiques et non des simulations informatique.

✧ Cela donne, pour les valeurs $E = 5,0$ V, $R = 1,0$ Ω et $L = 0,2$ H :

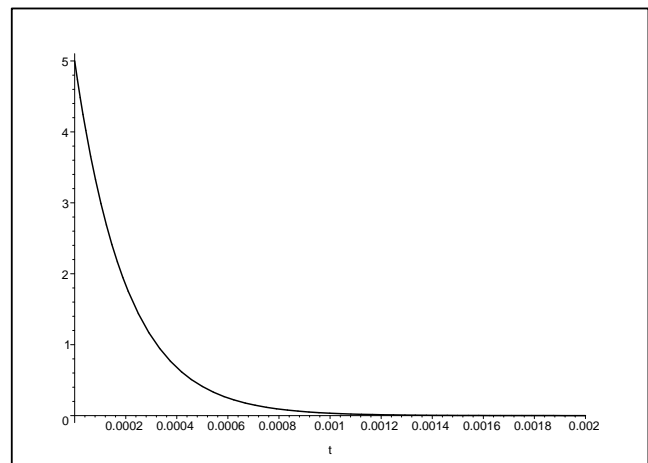
→ graphique 1 : $i(t)$

→ graphique 2 : $u_L(t)$

Graphique 1



Graphique 2



L'intersection de la tangente en un point quelconque d'une évolution exponentielle se fait exactement τ plus tard que le point. C'est la méthode de la tangente n'importe où.

Expérimentalement parlant, la méthode dite de la tangente à l'origine est moins précise : faites-le.

II.1.vii – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,L , il faut connaître sur le bout des doigts :

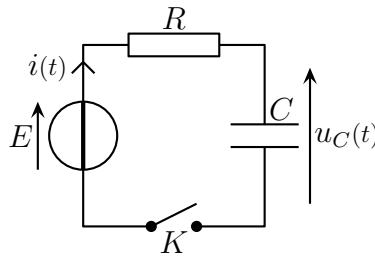
- l'expression de la constante de temps
- la représentation graphique des évolutions avec les asymptotes
- l'interprétation graphique de la constante de temps (méthode de la tangente n'importe où)

II.2 – Circuit R,C soumis à un échelon de tension

✧ Nous allons faire la même chose pour le circuit R,C . Cela ira, forcément, plus vite !

II.2.i – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous.



✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :

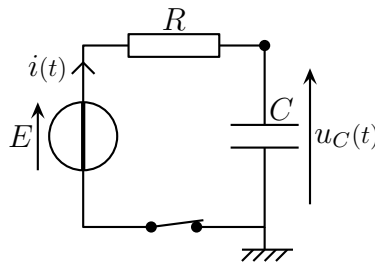
- les grandeurs connues sont E , R et C
- nous allons donc chercher $i(t)$ et $u_C(t)$
- il s'agit d'un circuit en régime forcé et transitoire

✧ Analyse technique :

- une seule maille → loi des mailles bof bof car il y a un condensateur et en plus on cherche l'équation différentielle en $u_C(t)$
- nous utiliserons une approche nodale

II.2.ii – traduction des lois physiques

✧ Plaçons la masse à un endroit adéquate.



✧ La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit, au point situé entre le résistor et le condensateur :

$$\frac{E - u_C(t)}{R} - C \frac{du_C(t)}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{R} \frac{du_C(t)}{dt} + C u_C(t) = \frac{E}{R}$$

soit, sous forme canonique :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{E}{RC}$$

La constante de temps d'un circuit R, C est $\tau = RC$.

II.2.iii – solution complète du problème particulier

★ solution analytique

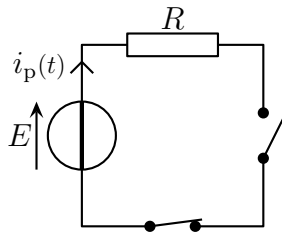
◇ Commençons par écrire la solution générale :

$$u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau} + u_{C,p}(t)$$

◇ Déterminons la solution particulière $u_{C,p}(t)$. Pour cela, comme le second membre est constant, supposons qu'elle soit de la forme $u_{C,p}(t) = \mu = C^{\text{te}}$ et remplaçons cette solution dans l'équation différentielle :

$$0 + \frac{1}{\tau} \times \mu = \frac{E}{RC} \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \frac{E}{RC} \times \tau = \frac{E}{RC} \times RC \quad \rightsquigarrow \quad u_{C,p}(t) = E$$

◇ Nous aurions pu aussi déterminer la solution en régime permanent. Pour cela, schématisons le circuit lorsque le régime permanent est atteint. L'interrupteur est fermé et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Cela donne :



et nous obtenons ainsi $i_p(t) = 0$ et $u_{C,p} = E - R i_p(t) = E$

◇ Pour l'instant la solution s'écrit $u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau} + E$. Reste à déterminer λ .

◇ Ici :

- juste avant de fermer l'interrupteur, le condensateur était déchargé, *ie.* $u_C(0^-) = 0$
- la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur assure $u_C(0^+) = u_C(0^-)$
- la solution que nous avons trouvée nous donne $u_C(0^+) = \lambda + E$

◇ Ces trois arguments (et il faut les trois arguments) permettent d'aboutir à $\lambda = -E$ et ainsi :

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

◇ C'est bien un résultat homogène !

◇ Pour déterminer $i(t)$, utilisons la loi constitutive du condensateur :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

◇ C'est bien un résultat homogène **et** proportionnel à $u_C(t)$ comme nous le savons des évolutions du premier ordre.

★ interprétation physique

◇ À la limite, $i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ et $u_C(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E$.

◇ Nous constatons que le régime permanent ne dépend pas de la capacité du condensateur. Comme pour la bobine, rien de plus normal étant donné que le régime permanent est continu qu'en régime continu le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert quelle que soit sa capacité.

◇ Nous pouvons aussi constater que si la charge s'arrête, ce n'est pas de la faute au condensateur dans lequel il n'y aurait plus de place pour les électrons, mais de la faute au générateur qui n'a pas la force (électromotrice) de le charger davantage.

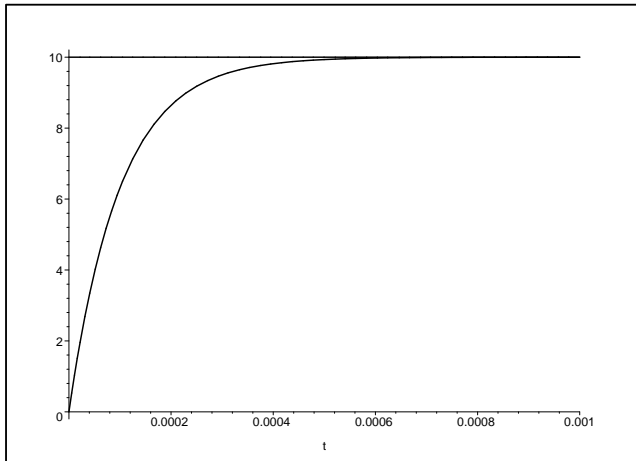
II.2.iv – représentation graphique et interprétation

✧ Cela donne, pour les valeurs $E = 10 \text{ V}$, $R = 1,0 \Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$:

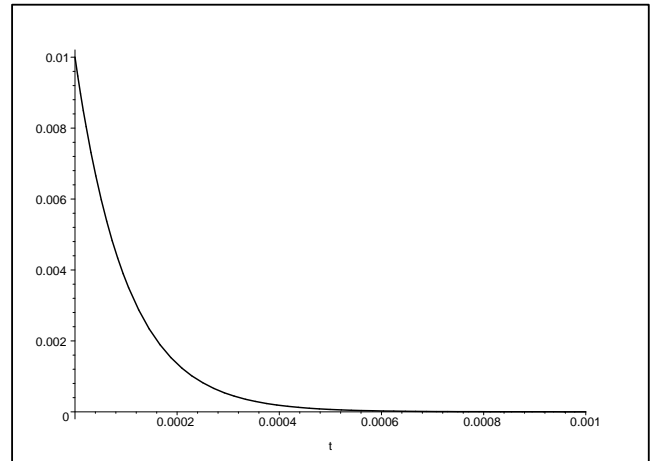
→ graphique 3 : $u_C(t)$

→ graphique 4 : $i(t)$

Graphique 3



Graphique 4



✧ Vous pouvez mesurer expérimentalement τ .

II.2.v – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,C , il faut connaître sur le bout des doigts :

→ l'expression de la constante de temps

→ la représentation graphique des évolutions avec les asymptotes

→ l'interprétation graphique de la constante de temps (méthode de la tangente n'importe où)

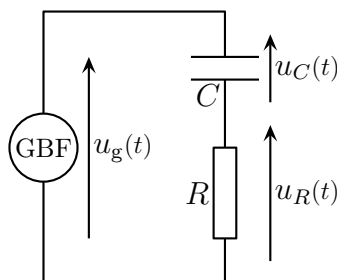
II.3 – Retour sur les simulations

II.3.i – visualisation expérimentale

✧ Revenons sur les simulations de la première partie et cherchons *a posteriori* les conditions nécessaires aux observations des phénomènes désirés.

★ pour le circuit avec le condensateur

✧ Rappelons que le circuit était celui représenté ci-dessous et que le but était de mesurer la tension aux bornes du résistor afin d'observer la relation courant – tension pour la bobine.



✧ Avoir $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$ revient à avoir $|u_R(t)| \ll |u_C(t)|$. Ainsi nous allons chercher à quelle condition

$$\left| RC \frac{du_C(t)}{dt} \right| \ll |u_C(t)|.$$

- ✧ Pour ce faire cherchons des valeurs caractéristiques. Notons tout d'abord U_0 la valeur caractéristique de la tension aux bornes du condensateur. Nous obtenons alors $|u_C(t)| \sim U_0$. Si nous notons T la durée caractéristique de l'évolution (ici, évidemment, la période), nous avons $\left| RC \frac{du_C(t)}{dt} \right| \sim RC \frac{U_0}{T}$.

La condition recherchée est donc :

$$RC \frac{U_0}{T} \ll U_0 \quad \rightsquigarrow \quad T \ll RC = \tau$$

- ✧ Pour que les observations se fassent bien, il fallait que la période soit grande devant la durée caractéristique du circuit RC .

✧ Vérifions :

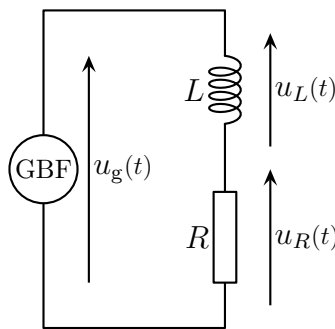
$$\rightarrow \tau = RC = 10^3 \times 100 \cdot 10^{-9} = 10^{-4} \text{ s}$$

$$\rightarrow T_{\sin} = 10^{-1} \text{ s} \gg \tau$$

$$\rightarrow T_{\text{tri}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s} \gg \tau$$

★ pour le circuit avec la bobine

- ✧ Rappelons que le circuit était celui représenté ci-dessous et que le but était de mesurer la tension aux bornes du résistor afin d'observer la relation courant – tension pour la bobine.



- ✧ Avoir $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$ revient à avoir $|u_R(t)| \ll |u_L(t)|$. Ainsi nous allons chercher à quelle condition

$$|Ri(t)| \ll \left| L \frac{di(t)}{dt} \right|.$$

- ✧ Pour ce faire cherchons des valeurs caractéristiques. Notons tout d'abord I_0 la valeur caractéristique de l'intensité. Nous obtenons alors $|Ri(t)| \sim RI_0$. Si nous notons T la durée caractéristique de l'évolution (ici, évidemment, la période), nous avons $\left| L \frac{di(t)}{dt} \right| \sim L \frac{I_0}{T}$. La condition recherchée est donc :

$$RI_0 \ll L \frac{I_0}{T} \quad \rightsquigarrow \quad T \ll \frac{L}{R} = \tau$$

- ✧ Pour que les observations se fassent bien, il fallait que la période soit courte devant la durée caractéristique du circuit R, L .

✧ Vérifions :

$$\rightarrow \tau = \frac{L}{R} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$\rightarrow T_{\sin} = 10^{-4} \text{ s} \ll \tau$$

$$\rightarrow T_{\text{rect}} = 10^{-4} \text{ s} \ll \tau$$

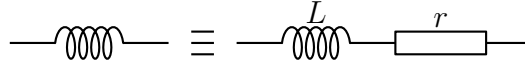
- ✧ Nous constatons à cette occasion que le symbole \ll peut parfois « simplement » représenter un facteur 10.

II.3.ii – bobine et condensateur réels

- ◇ Il faut ajouter aussi que les simulations ont été faites avec des composants idéaux. En effet, les composants réels ne sont pas idéaux.

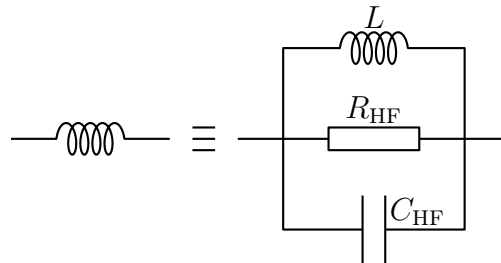
★ modèles de bobine réelle

En basses fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en série avec un résistor.



- ◇ r est de l'ordre de la dizaine d'ohms.

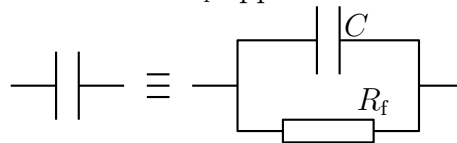
En hautes fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en parallèle avec un résistor et un condensateur.



- ◇ C_{HF} est de l'ordre du pF et R_{HF} du $M\Omega$.
 ◇ La limite hautes / basses fréquence dépend de la bobine.

★ modèles de condensateur réel

Un condensateur réel se comporte comme un condensateur idéal en parallèle avec un résistor de résistance R_f appelée *résistance de fuite*.



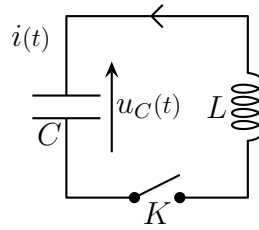
- ◇ La résistance de fuite des condensateurs usuel sont de l'ordre du $M\Omega$ voire bien supérieure.

III – Évolution du second ordre

III.1 – Circuit L, C en régime libre

III.1.i – présentation et analyse

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0 .



- ◇ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.
- ◇ Analyse physique :
 - les grandeurs connues sont L , C et U_0
 - nous allons donc chercher $i(t)$ et $u(t)$, grandeurs communes aux deux dipôles lorsque l'interrupteur est fermé
 - il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire
- ◇ Analyse technique :
 - une seule maille → loi des mailles **mais pas** en terme de courant à cause du condensateur

III.1.ii – traduction des lois physiques

- ◇ Aucune difficulté :

$$u(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad LC \frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t) = 0$$

III.1.iii – interlude mathématique

- ◇ Ou comment résoudre l'équation différentielle écrite sous la forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)}$$

★ notation différentielle

- ◇ La place des « 2 » est fondamentale. En fait nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)$$

- ◇ Il est donc normal d'avoir au numérateur $d^2\alpha$ et dt^2 au dénominateur.

★ approche physique

- ◇ Du point de vue des dimensions, comme précédemment, « les d ne comptent pas », ce qui donne :

$$\left[\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \right] = \frac{[d^2\alpha]}{[dt^2]} = \frac{[\alpha]}{[t^2]} = \frac{[\alpha]}{[t]^2}$$

- ◇ Ainsi, comme deux termes sommés sont homogènes :

$$\left[\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \right] = [\omega_0^2 \alpha(t)] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{[\alpha]}{[t]^2} = [\omega_0^2] [\alpha] \quad \rightsquigarrow \quad [\omega_0] = [t]^{-1} = (\text{s})^{-1} = T^{-1}$$

La constante ω_0 est appelée la *pulsation propre* et s'exprime en rad.s^{-1} .

★ approche technique

- ◇ En fait tout se passe comme pour les équations différentielles d'ordre 1 :
 - écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
 - chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)
 - chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

Toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)$ peuvent s'écrire sous une des deux formes équivalentes suivantes :

- $\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \alpha_p(t)$
- $\alpha(t) = \lambda \cos(\omega_0 t + \varphi) + \alpha_p(t)$
où A, B, λ et φ sont des constantes d'intégration.

- ◇ Dans les deux cas, il y a deux constantes d'intégrations (A et B d'une part, λ et μ d'autre part) qui exigeront deux conditions initiales.
- ◇ Suivant les cas, nous choisirons plutôt une forme ou l'autre :
 - plutôt la première lorsqu'il faudra rechercher explicitement la solution avec deux conditions initiales
 - plutôt la deuxième forme lorsqu'il s'agira d'écrire la solution sans la déterminer entièrement ou lorsque les conditions ne seront pas initiales

★ pulsation

La pulsation d'un signal périodique vaut, par définition, $\omega = 2\pi f$ où f est sa fréquence.
Ainsi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T la période du signal.

III.1.iv – solution complète du problème particulier

- ◇ Ici comme il n'y a pas de second membre qui permettrait un régime forcé, la solution s'écrit tout de suite :

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

- ◇ Utilisons les conditions initiales. D'abord celle sur la tension aux bornes du condensateur :
 - juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0 , donc $u_C(0^-) = U_0$
 - la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
 - la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A + 0$
 - donc $A = U_0$
- ◇ L'autre condition initiale va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du_C(t)}{dt}$$

donnent $i(t) = -C U_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 C \cos(\omega_0 t)$

◇ Et maintenant :

- juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- la solution trouvée donne, pour $t = 0^+ : i(0^+) = 0 + B \omega_0 C$
- donc $B = 0$

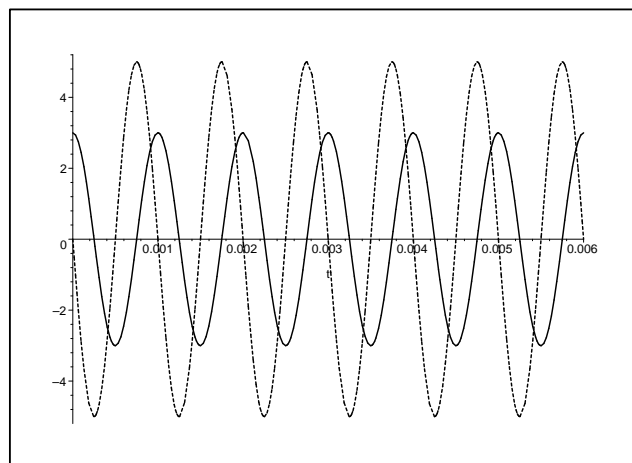
◇ Finalement : $\boxed{u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)}$ et $\boxed{i(t) = -C U_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)}$.

III.1.v – représentation graphique et interprétation

◇ Sur le graphique 5, nous pouvons voir :

- la tension aux bornes du condensateur
- l'intensité traversant le circuit

Graphique 5



◇ Pour retrouver qui est qui, aucune raison physique ne peut les départager car les évolutions sont similaires. Toutefois ici, avec les conditions initiales :

- la tension aux bornes du condensateur est la courbe en trait plein
- l'intensité traversant le circuit est la courbe en tirets

III.1.vi – phénoménologie à connaître

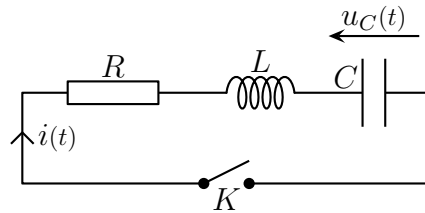
◇ Pour le circuit L, C , il faut connaître sur le bout des doigts :

- l'expression de pulsation propre
- la représentation graphique des évolutions, savoir en particulier qu'elles sont sinusoïdales

III.2 – Circuit R, L, C série en régime libre, première étape

III.2.i – présentation et analyse

◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0 .



- ◇ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.
- ◇ Analyse physique :
 - les grandeurs connues sont L , C , R et U_0
 - nous allons donc chercher $u_C(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé
 - il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire
- ◇ Analyse technique :
 - une seule maille → loi des mailles **mais pas** en terme de courant à cause du condensateur, il faudra donc penser à la relation constitutive du condensateur

III.2.ii – traduction des lois physiques

- ◇ Aucune difficulté :

$$u_C(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad u_C(t) + L C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + R C \frac{du_C(t)}{dt} = 0$$

III.2.iii – interlude mathématique

- ◇ Ou comment résoudre les équations différentielle linéaires, d'ordre deux, à coefficients constant.
- ◇ Adoptons l'écriture canonique suivante :

$$\frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)$$

★ approche physique

- ◇ Pour des raisons similaires à celles évoquées précédemment, ω_0 a la même dimension qu'avant. Ici aussi ω_0 s'appelle la pulsation propre.
- ◇ Cherchons la dimension de Q .

$$\left[\frac{\omega_0}{Q} \frac{d\alpha(t)}{dt} \right] = [\omega_0^2 \alpha(t)] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{[\cancel{\omega_0}][\cancel{\alpha}]}{[Q][t]} = [\omega_0]^2 [\cancel{\alpha}] \quad \text{et} \quad [Q] = \frac{1}{[\omega_0][t]} = \emptyset$$

La constante Q est un nombre sans dimension et s'appelle le *facteur de qualité*.
Il caractérise le type d'évolution du dispositif.

★ approche technique

- ◇ En fait tout se passe comme pour les équations différentielles d'ordre 1 :
 - écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
 - chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)

→ chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

Pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)$, il faut d'abord calculer le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

qui vaut $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

III.2.iv – grandeurs caractéristiques

- ◇ Cherchons l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité d'un circuit R, L, C série.
- ◇ Réécrivons d'abord l'équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

et identifions terme à terme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right.$$

Pour un circuit R, L, C série, la pulsation propre vaut $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité vaut $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

III.3 – Circuit R, L, C série en régime libre et apériodique

III.3.i – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement positif, il existe deux solutions distinctes r_1 et r_2 . Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent alors :

$$\alpha(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + \alpha_p(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

- ◇ Cherchons la condition sur le facteur de qualité pour que le discriminant soit positif :

$$\Delta > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{Q^2} > 4 \quad \rightsquigarrow \quad Q < \frac{1}{2}$$

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement positif si et seulement si le facteur de qualité est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est inférieur à $\frac{1}{2}$, le régime est dit *apériodique*.

III.3.ii – solution complète du problème particulier

★ solutions de l'équation caractéristique

◇ L'équation caractéristique étant $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, les deux racines s'écrivent :

$$\rightarrow r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

$$\rightarrow r_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

◇ Prouvons que les deux racines sont négatives. Pour r_2 c'est évident. Pour r_1 , soit nous le « voyons » en constatant que le terme rajouté est inférieur au terme retranché, soit nous le prouvons en nous rappelant que l'équation caractéristique peut s'écrire :

$$r^2 - Sr + P = 0$$

où S est la somme des deux racines et P leur produit. Avec $P > 0$ et $S < 0$, les deux racines sont forcément négatives.

◇ Comme les racines sont négatives, nous pouvons les noter $r_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ ce qui permet d'écrire la solution sous la forme :

$$u_C(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$$

★ détermination des constantes d'intégration

◇ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

◇ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :

→ juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0 , donc $u_C(0^-) = U_0$

→ la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$

→ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A + B$

→ donc $A + B = U_0$

◇ L'autre condition initial va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2} \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\text{donnent } i(t) = -\frac{AC}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} - \frac{BC}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$$

◇ Et maintenant :

→ juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$

→ la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$

→ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $i(0^+) = -\frac{AC}{\tau_1} + \frac{BC}{\tau_2}$

→ donc $\frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2} = 0$

◇ Nous obtenons ainsi un système de deux équations deux inconnues qui ne pose aucune difficulté de résolution :

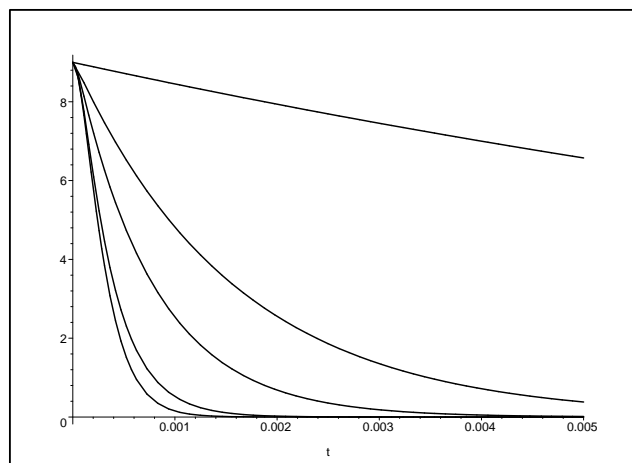
$$\begin{cases} A + B = U_0 \\ \tau_2 A + \tau_1 B = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} A = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} U_0 \\ B = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} U_0 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Finalement : } u_C(t) = \frac{U_0}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2} \right)$$

III.3.iii – représentation graphique et interprétation

◇ Sur le graphique 6 nous pouvons voir 5 régimes apériodiques différant uniquement sur le facteur de qualité Q prenant les valeurs 0,49, 0,4, 0,2, 0,1 et 0,01

Graphique 6



◇ Nous pouvons constater que, dans tous les cas, la tension $u_C(t)$ n'oscille pas, d'où le nom *apériodique*.

◇ La question est qui est qui ? Ou plutôt qui est où ?

→ la courbe la plus haute met longtemps avant de diminuer

→ c'est une somme d'exponentielles, donc l'un des deux termes doit avoir une constante de temps τ_1 ou τ_2 très grande

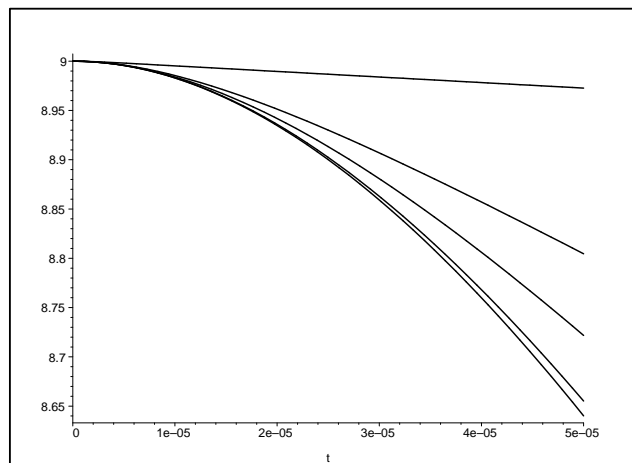
→ ça implique que r_1 ou r_2 quasi nul

→ il ne peut s'agir que de r_1 quasi nul

→ nous pouvons alors constater que r_1 tend vers 0 pour Q tend vers 0 → c'est bon !

✧ Sur le graphique 7 nous pouvons voir des zooms sur l'instant initial

Graphique 7



✧ En effet la dérivée de $u_C(t)$ est proportionnelle à $i(t)$ et est donc nulle à l'instant initial. Et si effectivement c'est bel et bien le cas, lorsque nous regardons à une échelle d'évolution adapté, cela ne se voit pas.

III.3.iv – cas particulier $Q \ll 1$

★ régime permanent

- ✧ Estimons la durée au bout de laquelle le régime permanent est atteint dans le cas où $Q \ll 1$.
- ✧ La tension étant une somme de deux exponentielles différentes, le régime permanent sera atteint lorsque l'évolution *de plus grande constante de temps* sera terminée.
- ✧ Comme nous l'avons vu dans le sous-paragraphe précédent, il s'agit de τ_1 . Nous allons donc exprimer r_1 en fonction de Q .

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - \sqrt{1 - 4Q^2})$$

- ✧ Pour simplifier l'expression précédente, nous allons utiliser une technique ultra puissante, ultra utilisée et ultra facile : les développements limités. Sans entrer dans la théorie, pour l'instant nous avons juste besoin de savoir que :

$$\text{Lorsque } |qqch| \ll 1, \text{ nous avons } \sqrt{1 + qqch} = 1 + \frac{1}{2} qqch.$$

- ✧ Cela nous conduit à :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - (1 - 2Q^2)) = -\frac{\omega_0}{2Q} \times 2Q^2 = -\omega_0 Q$$

- ✧ Avec $\tau_1 = -\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\omega_0 Q}$, la durée recherchée vaut :

$$5\tau_1 = \frac{5}{\omega_0 Q} = \frac{5}{\frac{2\pi}{T_0} Q} = \frac{5T_0}{2\pi Q} \simeq \frac{T_0}{Q}$$

Pour un régime apériodique tel que $Q \ll 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $\frac{T_0}{Q}$ où T_0 est la période propre.

◇ Nous pouvons alors vérifier que plus le facteur de qualité est petit, plus le régime transitoire est long.

★ simplification de la solution

◇ Calculons la constante τ_2 à partir de l'expression de r_2 :

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{\omega_0}{Q}$$

◇ Ce qui implique $\tau_2 = \frac{Q}{\omega_0}$.

◇ Dans ces conditions, avec $\tau_1 = \frac{1}{Q\omega_0}$, nous pouvons voir que $\tau_2 \ll \tau_1$, ce qui implique que le terme exponentielle en τ_2 est fini largement avant τ_1 ou encore que la tension peut s'écrire sous la forme :

$$u_C(t) = A e^{-t/\tau_1}$$

◇ Dans les exemples initiaux, nous avons effectivement constaté l'existence de deux constantes de temps significativement différentes.

★ question de simplification

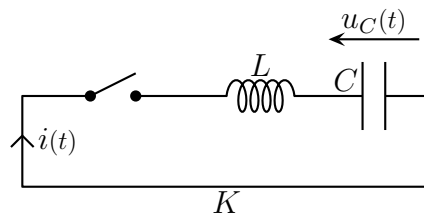
◇ Pourquoi avons-nous utilisé des développements limités pour τ_1 et pas pour τ_2 ?

◇ Parce que pour τ_2 , l'utilisation de développements limités aurait amené à un résultat avec **deux** termes parmi lesquels nous aurions gardé que le prédominant : celui qui correspond à un développement à l'ordre 0.

◇ Quand l'ordre de développement est inconnu, *a priori* nous développerons à l'ordre 1. Dans un certains nombres de cas assez facilement prévisibles, nous développerons à l'ordre 2. Enfin, dans des cas rarissimes, nous développerons à l'ordre 3 ou 4.

★ cas limite

◇ Lorsque $R \rightarrow +\infty$, alors $Q \rightarrow 0$ et le circuit devient :



◇ Nous pouvons alors constater que $i \rightarrow 0$ et $u_C \simeq C^{\text{te}}$, ce qui est cohérent avec un régime apériodique au facteur de qualité extrêmement faible.

III.3.v – phénoménologie à connaître

◇ Pour le circuit R, L, C en régime apériodique il faut connaître sur le bout des doigts :

- la condition sur Δ et sur Q
- la relation entre Q et la durée du régime transitoire dans le cas où $Q \ll 1$

III.4 – Circuit R, L, C série en régime libre et pseudopériodique

III.4.i – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement négatif, il existe deux solutions complexes conjuguées. En les notant sous la forme $r_c = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$, les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = e^{-t/\tau} \left(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right) + \alpha_p(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

◇ Cherchons la condition sur le facteur de qualité pour que le discriminant soit négatif :

$$\Delta < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{Q^2} > 4 \quad \rightsquigarrow \quad Q > \frac{1}{2}$$

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement négatif si et seulement si le facteur de qualité est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est supérieur à $\frac{1}{2}$, le régime est dit *pseudopériodique*.

III.4.ii – solution complète du problème particulier

★ solutions de l'équation caractéristique

◇ L'équation caractéristique étant $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, les racines s'écrivent :

$$r_c = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

◇ Nous obtenons donc $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

◇ La tension aux bornes du condensateur s'écrit donc :

$$u_C(t) = e^{-t/\tau} \left(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right)$$

★ détermination des constantes d'intégration

◇ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

◇ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :
 → juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0 , donc $u_C(0^-) = U_0$

- la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
- la solution trouvée donne, pour $t = 0^+ : u_C(0^+) = A$
- donc $A = U_0$

◇ L'autre condition initial va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = e^{-t/\tau} \left(U_0 \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right) \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\text{donnent } i(t) = e^{-t/\tau} \left[-\frac{U_0 \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)}{\tau} - U_0 \omega_p \sin(\omega_p t) + B \omega_p \cos(\omega_p t) \right]$$

◇ Et maintenant :

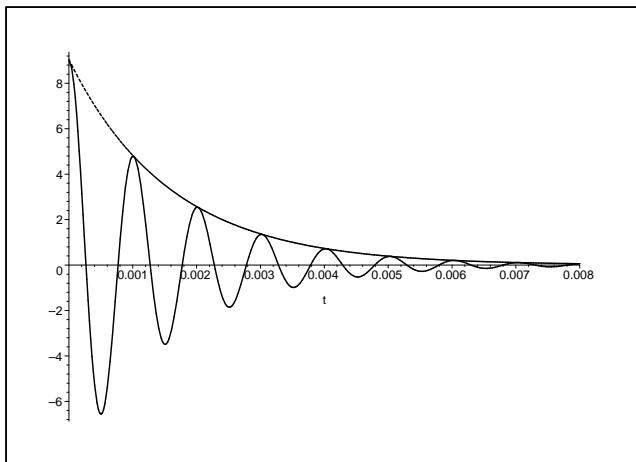
- juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- la solution trouvée donne, pour $t = 0^+ : i(0^+) = -\frac{U_0}{\tau} + B \omega_p$
- donc $B = \frac{U_0}{\tau \omega_p}$

◇ Finalement : $u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \left(\cos(\omega_p t) + \frac{\sin(\omega_p t)}{\tau \omega_p} \right)$

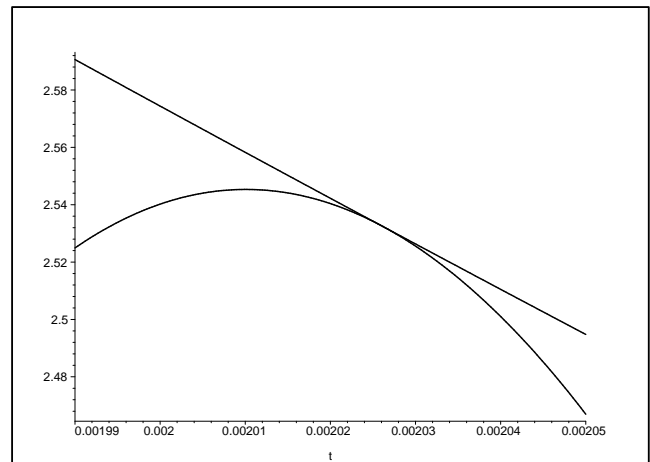
III.4.iii – représentation graphique et interprétation

◇ Sur le graphique 8 nous pouvons voir un régime pseudo-périodique de facteur de qualité $Q = 5$.

Graphique 8



Graphique 9



◇ Sur ce graphique nous avons représenté l'enveloppe exponentielle en $e^{-t/\tau}$ qui limite les oscillations. Notons, comme le montre le graphique 9 que les points de contact entre l'enveloppe et la courbe ne sont pas aux sommets des oscillations.

◇ Nous pouvons constater qu'il existe des oscillations mais que celles-ci sont amorties. La tension n'est donc pas tout à fait périodique. Cela explique le nom de *pseudo-périodique*

◇ Ces oscillations ont pour pulsation $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \neq \omega_0$.

La grandeur $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ est appelée la *pseudo-période*.

★ décréement logarithmique

- ◇ Pour parler de l'enveloppe exponentielle, nous rencontrerons parfois la grandeur appelée décréement logarithmique.

Le *décérement logarithmique* noté δ caractérise la diminution de l'amplitude des pseudo-oscillations pendant la durée d'une pseudo-oscillation.
Si $\alpha(t)$ est la grandeur pseudo-oscillante, il se calcule de la manière suivante avec n un entier quelconque :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t_0)}{x(t_0 + nT)} \right)$$

- ◇ Par définition, $\delta > 0$.

- ◇ Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{-t_0/\tau} \left(\cos(\omega_p t_0) + \frac{\sin(\omega_p t_0)}{\tau \omega_p} \right)}{e^{-(t_0 + nT)/\tau} \left(\cos(\omega_p t_0 + 2\pi n) + \frac{\sin(\omega_p t_0 + 2\pi n)}{\tau \omega_p} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln e^{nT/\tau} = \frac{T}{\tau} \end{aligned}$$

- ◇ Avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ nous obtenons :

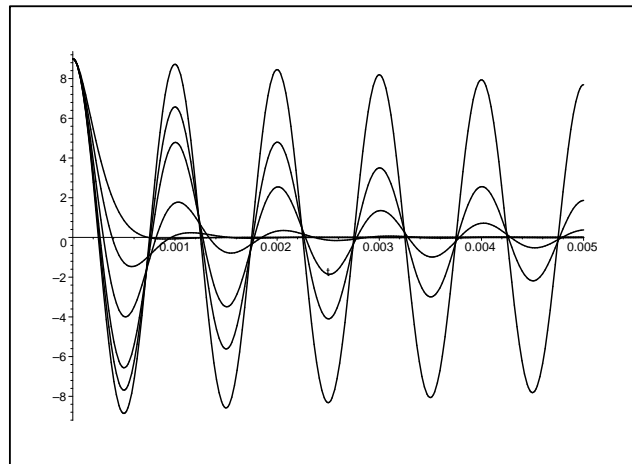
$$\delta = \frac{\pi}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

- ◇ Plus le décréement logarithmique est petit, plus la perte d'amplitude est faible.

★ comparaison de régimes pseudo-périodiques

- ◇ Sur le graphique 10 nous pouvons voir des évolutions pseudo-périodiques de facteur de qualité 0,6 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10 et 100.

Graphique 10



- ◇ Pour retrouver qui est qui, il suffit de penser à l'enveloppe exponentielle qui limite les oscillations et dont la constante de temps est $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$: plus le facteur de qualité est grand, plus la constante de temps associée est grande, plus les oscillations dureront longtemps.
- ◇ C'est cohérent avec l'expression du décrétement logarithmique.
- ◇ Dans les exemples initiaux, nous pouvons constater qu'il y a très peu d'oscillations : le facteur de qualité semble valoir environ 2.

III.4.iv – cas particulier $Q \gg 1$

★ simplification de ω_p

- ◇ Lorsque $Q \gg 1$, alors $\omega_p \rightarrow \omega_0$.

Quand le facteur de qualité est très grand devant 1, la pseudo-pulsation se confond avec la pulsation propre.

★ régime permanent

- ◇ Estimons la durée au bout de laquelle le régime permanent est atteint dans le cas où $Q \gg 1$.
- ◇ Comme la tension est limitée par l'enveloppe exponentielle, la réponse est immédiate : au bout de 5τ

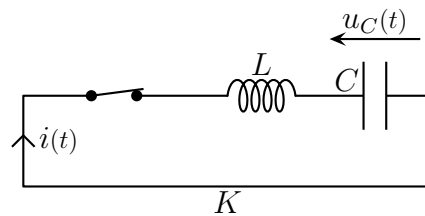
$$5\tau = \frac{10Q}{\omega_0} = \frac{10QT_0}{2\pi} = 2QT_0$$

Pour un régime pseudopériodique tel que $Q \gg 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $2QT_0$ où T_0 est la période propre.

- ◇ Nous pouvons alors vérifier que plus le facteur de qualité est grand, plus le régime transitoire est long.

★ cas limite

- ◇ Lorsque $R \rightarrow 0$, alors $Q \rightarrow +\infty$ et le circuit devient :



✧ Nous pouvons alors constater que ce circuit se comporte comme un L, C , *ie.* oscille sans fin. C'est cohérent avec un régime pseudo-périodique dont le facteur de qualité serait extrêmement faible.

III.4.v – phénoménologie à connaître

- ✧ Pour le circuit R, L, C en régime apériodique il faut connaître sur le bout des doigts :
- la condition sur Δ et sur Q
 - la relation entre Q et la durée du régime transitoire dans le cas où $Q \ll 1$

III.5 – Circuit R, L, C série en régime libre et critique

III.5.i – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul, il existe une racine double r_0 de l'équation caractéristique. Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = e^{r_0 t} (A + B t) + \alpha_p(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul si et seulement si le facteur de qualité vaut $\frac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est égal à $\frac{1}{2}$, le régime est dit *critique*.

III.5.ii – solution complète du problème très particulier

★ solutions de l'équation caractéristique

- ✧ Comme le discriminant est nul, la solution double vaut $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ car $Q = \frac{1}{2}$.
- ✧ La tension s'écrit alors :

$$u_C(t) = e^{-\omega_0 t} (A + B t)$$

★ détermination des constantes d'intégration

- ◇ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.
- ◇ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :
 - juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0 , donc $u_C(0^-) = U_0$
 - la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
 - la solution trouvée donne, pour $t = 0^+ : u_C(0^+) = A$
 - donc $A = U_0$
- ◇ L'autre condition initiale va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = e^{-\omega_0 t} (U_0 + B t) \quad \text{et} \quad i(t) = +C \frac{du_C(t)}{dt}$$

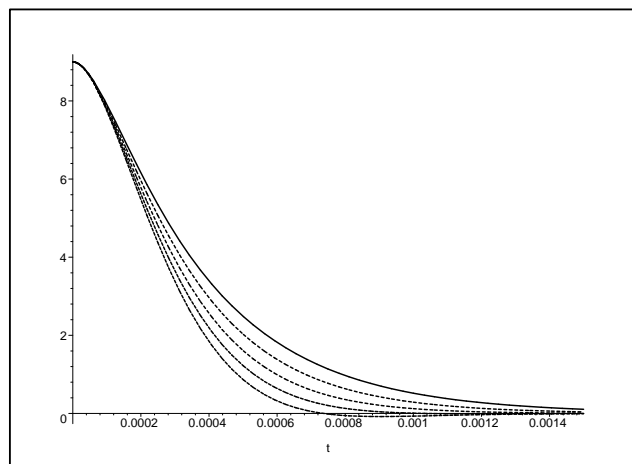
donnent $i(t) = e^{-\omega_0 t} (-\omega_0 U_0 - B \omega_0 t + B)$

- ◇ Et maintenant :
 - juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
 - la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
 - la solution trouvée donne, pour $t = 0^+ : i(0^+) = -U_0 \omega_0 + B$
 - donc $B = \omega_0 U_0$
- ◇ Finalement : $u_C(t) = U_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)$

III.5.iii – représentation graphique et comparaison

- ◇ Sur le graphique 11, nous avons représenté 5 évolutions de facteur de qualité 0,40 ; 0,45 ; 0,5 ; 0,55 et 0,6

Graphique 11



- ◇ Nous pouvons constater que bien que sa forme analytique soit significativement différente des régimes apériodique et pseudopériodique, la représentation graphique, elle, est sensiblement identique.

★ pourquoi est-il si intéressant ?

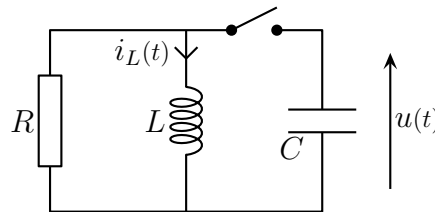
Le régime critique est le régime qui atteint le plus vite son asymptote sans osciller.

- ✧ En SI, vous verrez qu'il existe des régimes pseudo-périodique qui peuvent atteindre plus vite leurs asymptotes, mais, bien sûr, en oscillant.

III.6 – Circuit R, L, C parallèle en régime libre

III.6.i – présentation et analyse

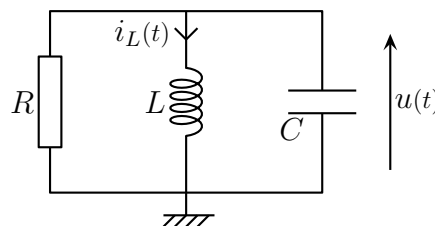
- ✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0 .



- ✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.
- ✧ Analyse physique :
- il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire
 - c'est un circuit à deux mailles et deux nœuds
 - les grandeurs pertinentes sont L , C , R et U_0
- ✧ Analyse technique :
- nous allons chercher $i_L(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé
 - il y a deux nœuds → loi des nœuds en terme de potentiels mais en faisant attention à la bobine.

III.6.ii – rien à refaire ?

- ✧ Pas de difficulté particulière pour trouver l'équation différentielle régissant l'évolution de $i_L(t)$. Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au nœud supérieur.



$$\frac{0 - u(t)}{R} - i(0) - \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' - C \frac{du(t)}{dt} = 0$$

donne en dérivant $\frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} u(t) + C \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 0$

- ✧ Ce qui s'écrit, sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0$$

III.6.iii – rien à refaire !

✧ Une fois trouvés la pulsation propre et le facteur de qualité, non, il n'y aura rien à refaire : les résultats précédents sont applicables à **n'importe quel** dispositif obéissant à cette équation différentielle. C'est tout l'intérêt de ce chapitre d'ailleurs ...

✧ Ici, en identifiant avec la forme canonique $\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$, nous obtenons :

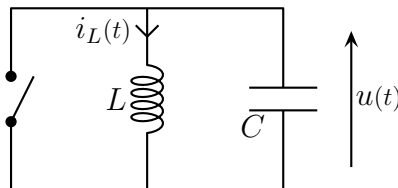
$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

La pulsation propre du circuit R, L, C parallèle est $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Son facteur de qualité est inverse de celui du circuit R, L, C série : $Q_{\parallel} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$.

★ cas limite

✧ Lorsque $R \rightarrow +\infty$, alors $Q \rightarrow +\infty$ et le circuit devient :



✧ Nous pouvons alors constater que ce circuit se comporte comme un L, C , *ie.* oscille sans fin. C'est cohérent avec un régime pseudo-périodique dont le facteur de qualité serait extrêmement faible.

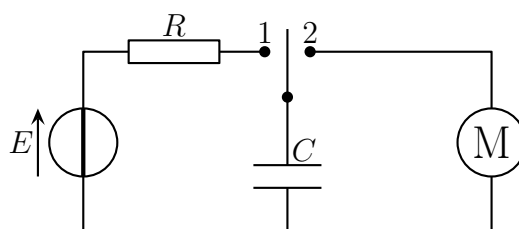
IV – Aspect énergétique

IV.1 – Deux réservoirs d'énergie

IV.1.i – monstrations expérimentales

★ avec le condensateur

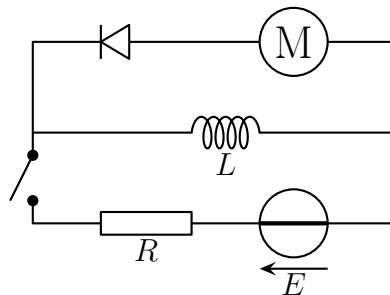
✧ Dans le montage présenté, un condensateur peut être relié soit à un générateur, soit à un petit moteur électrique par l'intermédiaire d'un commutateur. Le schéma équivalent est représenté ci-dessous.



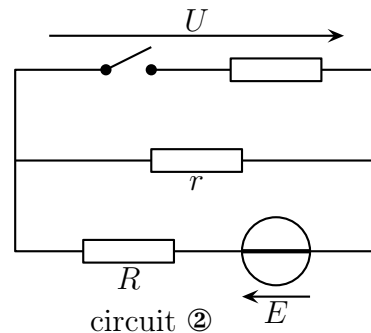
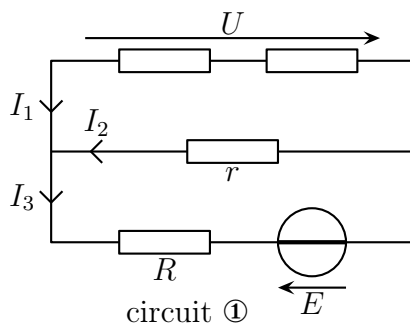
- ✧ Lorsque dans un premier temps le commutateur est sur la position 1, nous avons affaire avec un circuit R, C , *ie.* le condensateur va se charger sous la tension E . Au bout de la durée $5\tau = 5RC$, la charge sera terminée : le courant sera nul.
- ✧ Nous pourrions alors débrancher le condensateur et passer le commutateur en position 2. Le générateur n'étant pas relié au moteur, s'il se passe quelque chose, ce sera de la « faute » du condensateur.
- ✧ En effet nous constatons que :
 - la masse monte
 - plus la tension initiale est grande, plus la masse monte
 - si on change R , la masse ne monte pas plus
 - plus on attend dans la commutation, moins la masse monte
- ✧ Comme il faut de l'énergie pour faire bouger quelque chose, et qu'il n'y en avait évidemment pas dans le moteur (sinon la masse serait montée avant), c'est qu'il y en avait dans le condensateur.

★ avec la bobine

- ✧ Pour montrer qu'il existe de l'énergie dans une bobine, c'est un peu plus délicat car il n'est pas possible de débrancher une bobine (à cause de la continuité du courant). Pour la transporter, il faudrait la court-circuiter, mais en la court-circuitant, cela la transforme en un simple circuit r, L où r est sa propre résistance. Avec $r = 10\ \Omega$ et $L = 0,1\ \text{H}$, cela donne une constante de temps de $\tau = 10^{-2}$: on a moins de 5 centièmes de secondes pour la transporter et la relier à un autre circuit : impossible.
- ✧ C'est la raison pour laquelle nous allons utiliser un composant que nous reverrons plus tard : une diode. La diode sert à de multiples choses, mais nous allons l'utiliser en tant que contrôleur du sens du courant. En effet, le courant électrique, le réel, le physique, ne peut traverser la diode que dans un sens. Cela nous permet de réaliser le montage suivant.



- ✧ En régime permanent, la diode se comporte soit comme un interrupteur ouvert, soit comme une (très faible) résistance. Ainsi, une fois l'interrupteur fermé, soit nous aurons affaire au circuit ①, soit au circuit ②.



- ✧ Le circuit ①, par la présence de la diode, implique $I_1 > 0$. Nous en déduisons alors $U > 0$ puis $I_2 > 0$. Dès lors, cela implique $I_3 > 0$ et l'énergie reçue par le générateur positive. Ce qui n'est pas possible

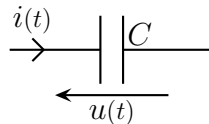
étant donné qu'il n'y a que des résistors dans le circuit. Par conséquent le circuit ① est impossible, c'est le circuit ② qui s'impose.

- ✧ À la réouverture de l'interrupteur, cette fois, nous aurons un circuit avec un moteur, une bobine et une diode placée de telle façon que la continuité du courant peut être assurée.
- ✧ Une diode placée de cette manière, *ie.* de façon à assurer la continuité du courant dans une bobine lors de l'ouverture d'un interrupteur est appelée *diode de roue libre*.
- ✧ En faisant l'expérience, nous constatons que :
 - la masse monte
 - plus la tension initiale est grande, plus la masse monte
 - plus la résistance est faible, plus la masse monte
- ✧ Cela laisse suggérer l'idée que la bobine contient de l'énergie fonction de l'intensité du courant qui la traverse.

IV.1.ii – énergie contenue dans le condensateur et la bobine

★ dans le condensateur

- ✧ Considérons un condensateur en convention récepteur.



- ✧ Nous savons que la puissance qu'il reçoit s'écrit $\mathcal{P}_r(t) = +u(t) i(t)$ qui peut s'écrire, grâce à la relation constitutive du condensateur : $\mathcal{P}_r(t) = +C u(t) \frac{du(t)}{dt}$ ou encore, avec $a f f' = \left(\frac{1}{2} a f^2\right)'$:

$$\mathcal{P}_r(t) = + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2(t) \right)$$

- ✧ En rapprochant l'écriture de la puissance de la forme $\mathcal{P}_r(t) = \frac{d\mathcal{E}_r(t)}{dt}$, nous pouvons dire que l'énergie reçue entre les instants t et 0 vaut donc : $\mathcal{E}_r(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) - \frac{1}{2} C u^2(0)$.
- ✧ Cette dernière expression peut se réinterpréter différemment. En constatant que l'énergie reçue entre deux instants est la différence de deux énergies relatives au condensateur **entre ces mêmes instants**, nous pouvons voir dans ces énergies, l'énergie *contenue* dans le condensateur à des instants précis.

Un condensateur est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $u^2(t)$.
L'énergie contenue dans un condensateur à un instant t s'écrit $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$.

- ✧ Peu importe la convention utilisée pour la tension aux bornes du condensateur car elle est élevée au carrée.
- ✧ Cela permet de mieux comprendre l'expérience :
 - augmenter E permettait d'obtenir une tension finale plus grande donc plus d'énergie dans le condensateur
 - changer R ne changeait que la durée de charge mais pas la charge finale, donc c'était normal que la masse ne monte pas trop plus
 - attendre lors de la commutation permettait au condensateur de se décharger un peu, donc de perdre de l'énergie

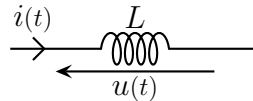
En terme de charges, l'énergie contenue à l'instant t dans un condensateur s'écrit

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{q^2(t)}{2C}.$$

✧ L'énergie n'est pas vraiment électrique mais conservée sous forme d'un champ électrostatique.

★ dans la bobine

✧ Considérons une bobine en convention récepteur.



✧ De la même manière que pour le condensateur, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{P}_r(t) = +u(t)i(t) = +L i(t) \frac{di(t)}{dt} = +\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2(t) \right)$$

✧ De manière tout à fait analogue au cas étudié pour le condensateur, nous pouvons alors dire :

Une bobine est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $i^2(t)$ où $i(t)$ est l'intensité du courant qui la traverse.

L'énergie contenue dans une bobine à un instant t s'écrit $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$.

✧ Peu importe la convention utilisée pour l'intensité du courant traversant la bobine car elle est élevée au carré.

✧ Cela permet de mieux comprendre l'expérience :

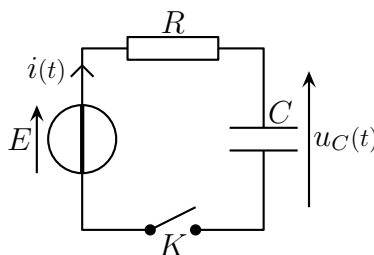
- augmenter E permettrait d'obtenir une intensité finale plus grande donc plus d'énergie dans la bobine
- diminuer R permettrait d'obtenir une intensité finale plus grande donc plus d'énergie dans la bobine

✧ L'énergie n'est pas vraiment électrique mais conservée sous forme magnétique.

IV.2 – Bilans pour les évolutions du premier ordre

IV.2.i – analyse du circuit R,C

✧ Rappelons le montage :



✧ À l'instant initial, le condensateur n'est pas chargé, il ne contient pas d'énergie.

✧ En régime permanent :

- la tension aux bornes du condensateur est E donc il contient de l'énergie
 - le courant est nul donc il n'y a plus d'effet JOULE
 - le courant est nul donc le générateur ne fournit plus d'énergie.
- ◇ En conséquence de quoi, nous pouvons déterminer les énergies échangées entre les différents dipôles de l'instant initial jusqu'au régime permanent.

IV.2.ii – bilan du circuit R,C

★ rappel des résultats

- ◇ Nous avons trouvé :
- la tension aux bornes du condensateur : $u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = RC$
 - l'intensité du courant parcourant la maille : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$
- ◇ Comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, pour déterminer une énergie reçue entre les instants t_1 et t_2 , nous devons calculer :

$$\mathcal{E}_r(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_r(t) dt$$

★ énergie fournie par le générateur

- ◇ L'expression de l'énergie fournie par un dipôle est la même que ci-dessus mais avec la puissance fournie, évidemment. Cela donne, pour le générateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,g} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_{f,g}(t) dt = \int_0^\infty E i(t) dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^\infty = \frac{E^2}{R} \times \tau \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{f,g} = C E^2} \end{aligned}$$

★ énergie reçue par le résistor

- ◇ Faisons de même pour l'énergie reçue par le résistor.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{r,r} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_{r,r}(t) dt = \int_0^\infty R i^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^\infty = \frac{E^2}{2R} \times \tau \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{r,r} = \frac{C E^2}{2}} \end{aligned}$$

★ énergie reçue par le condensateur

- ◇ Pour le condensateur, cela va vite étant donné que nous connaissons l'énergie qui y est contenue à chaque instant :

$$\mathcal{E}_{r,c} = \mathcal{E}_c(\infty) - \mathcal{E}_c(0) = \frac{1}{2} C u^2(\infty) - \frac{1}{2} C u^2(0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{r,c} = \frac{C E^2}{2}}$$

★ décompte et interprétation

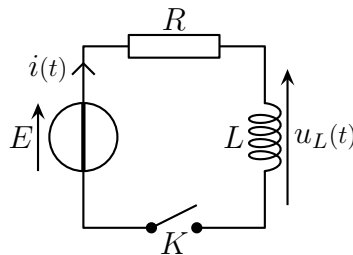
◇ Nous pouvons constater aisément que le bilan énergétique est bien vérifié, *ie.* que nous avons :

$$\boxed{\mathcal{E}_{f,g} = \mathcal{E}_{r,r} + \mathcal{E}_{r,c}}$$

◇ Nous pouvons alors remarquer que cette fois, la résistance du résistor n'intervient pas dans le bilan énergétique : quelle que soit la résistance choisie, l'énergie gagnée par le condensateur sera la même (ça, on le savait déjà) et l'énergie perdu

IV.2.iii – analyse du circuit R, L

◇ Rappelons le montage :



◇ À l'instant initial, aucun courant ne circule, la bobine ne contient donc pas d'énergie.

◇ En régime permanent :

→ le courant est non nul donc la bobine a accumulé une certaine quantité d'énergie

→ le courant est non nul donc il n'y a un effet JOULE continuellement compensé par un apport énergétique de la part du générateur

◇ En conséquence de quoi, nous ne pouvons pas déterminer les énergies échangées entre les différents dipôles de l'instant initial jusqu'au régime permanent. Il va falloir s'arrêter à un instant t_0 quelconque.

IV.2.iv – bilan du circuit R, L

★ rappel des résultats

◇ Nous avons trouvé :

→ l'intensité du courant parcourant la maille : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.

→ la tension aux bornes de la bobine : $u_L(t) = E e^{-t/\tau}$

★ énergie fournie par le générateur

◇ Comme précédemment :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,g}(t_0) &= \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{f,g}(t) dt = \int_0^{t_0} E i(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{E^2}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt \\ &= \frac{E^2}{R} \int_0^{t_0} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \tau e^{-t/\tau} \right]_0^{t_0} = \frac{E^2}{R} \times \left(t_0 + \tau e^{-t_0/\tau} - \tau \right) \end{aligned}$$

◇ Et ainsi $\boxed{\mathcal{E}_{f,g}(t_0) = \frac{E^2}{R} \left(t_0 + \frac{L}{R} e^{-t_0/\tau} - \frac{L}{R} \right)}$

★ énergie reçue par le résistor

◇ Faisons de même pour l'énergie reçue par le résistor.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{r,r}(t_0) &= \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{r,r}(t) dt = \int_0^{t_0} R i^2(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{E^2}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 dt \\ &= \frac{E^2}{R} \int_0^{t_0} \left(1 + e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t - \frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} + 2\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{t_0} \\ &= \frac{E^2}{R} \left(t_0 - \frac{\tau}{2} e^{-2t_0/\tau} + \frac{\tau}{2} + 2\tau e^{-t_0/\tau} - 2\tau \right)\end{aligned}$$

◇ Et ainsi $\boxed{\mathcal{E}_{r,r}(t_0) = \frac{E^2}{R} \left(t_0 - \frac{L}{2R} e^{-2t_0/\tau} + 2\frac{L}{R} e^{-t_0/\tau} - \frac{3L}{2R} \right)}$

★ énergie reçue par la bobine

◇ Pour la bobine, cela va vite étant donné que nous connaissons l'énergie qui y est contenue à chaque instant :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{r,b}(t_0) &= \mathcal{E}_b(\infty) - \mathcal{E}_b(0) = \frac{1}{2} L i^2(\infty) - \frac{1}{2} L i^2(0) \\ &= \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R^2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{R} \frac{L}{2R} \left(1 - e^{-2t_0/\tau} - 2e^{-t_0/\tau}\right)\end{aligned}$$

◇ Et ainsi $\boxed{\mathcal{E}_{r,b}(t_0) = \frac{E^2}{R} \left(\frac{L}{2R} e^{-2t_0/\tau} - \frac{L}{R} e^{-t_0/\tau} + \frac{L}{2R} \right)}$

★ décompte et interprétation

◇ En rassemblant les termes en $e^{-2t_0/\tau}$, en $e^{-t_0/\tau}$ en t_0 et en τ , nous pouvons constater que le bilan énergétique est bien vérifié, *ie.* que nous avons :

$$\boxed{\mathcal{E}_{f,g}(t_0) = \mathcal{E}_{r,r}(t_0) + \mathcal{E}_{r,b}(t_0)}$$

◇ Nous pouvons alors remarquer que si la bobine accumule une quantité limitée d'énergie, le générateur, lui, en fournit continuellement.

★ petit paradoxe

◇ En régime permanent le circuit est équivalent au schéma ① donc au schéma ②.

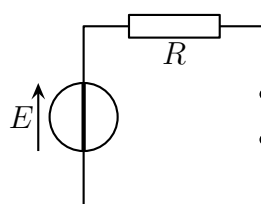


schéma ①

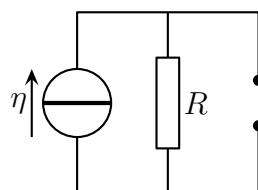


schéma ②

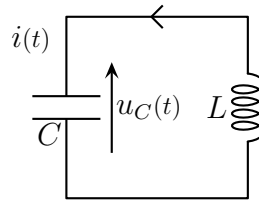
- ◇ Or dans le schéma ②, il n'y a pas d'effet JOULE. Comment cela se fait-il ?
- ◇ En fait l'équivalence entre les deux circuits se fait entre deux générateurs réels, *ie.* pour les deux couples de dipôles (E, R) d'une part et (η, R) d'autre part. Le premier **dipôle** ne fournit pas d'énergie à autrui (il « dissipe » de l'énergie en interne, mais ça, c'est son problème) et il en est de même pour le second dipôle qui ne fournit pas **non plus** d'énergie au reste du monde.
- ◇ Ensuite que les deux représentation aient des comportements internes différents, c'est normal car le but de ces équivalences n'est pas de respecter le fonctionnement interne mais le fonctionnement externe.

IV.3 – Bilans pour les évolutions du second ordre

IV.3.i – oscillation dans le circuit L, C

★ rappel des résultats

- ◇ Rappelons le montage.



- ◇ Nous avons trouvé :

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = -C U_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

★ énergie contenue dans le condensateur

- ◇ Avec l'expression de l'énergie contenue dans le condensateur, nous obtenons directement :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

- ◇ Et avec une formule trigonométrique qui va bien :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

★ énergie contenue dans la bobine

- ◇ Avec l'expression de l'énergie contenue dans le condensateur, nous obtenons directement :

$$\mathcal{E}_b(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L U_0^2 C^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

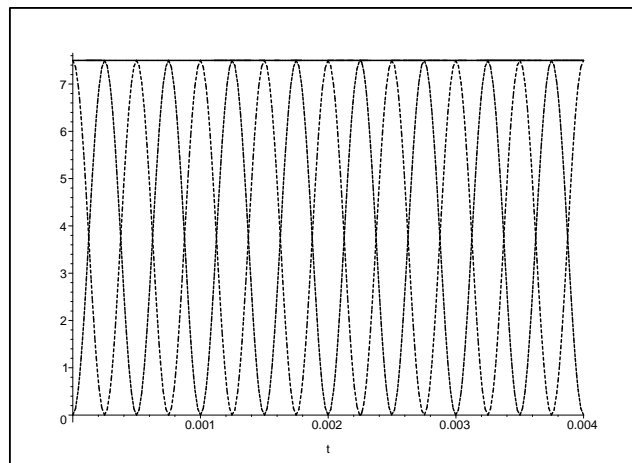
- ◇ Avec une formule trigonométrique qui va bien et l'expression de la pulsation propre :

$$\mathcal{E}_b(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \times \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

★ énergie totale, représentation

- ◇ Nous pouvons alors constater $\mathcal{E}_b(t) + \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C U_0^2$.
- ◇ Cela signifie que l'énergie est constante dans le circuit ce qui est normal étant donné qu'il n'y a pas de dipôle qui pourrait dissiper de l'énergie (résistor) ou en engendrer sous une autre forme (générateur par exemple).
- ◇ De même, nous pouvons constater l'importance physique de charger initialement le condensateur : apporter de l'énergie dans le circuit pour qu'il puisse se passer quelque chose.
- ◇ Sur le graphique 12, nous avons représenté les énergies instantanées contenues dans le condensateur et la bobine ainsi que l'énergie totale.

Graphique 12



- ◇ Pour pouvoir distinguer qui est qui, impossible : il faut connaître les conditions initiales.

★ interprétation fondamentale

Pour qu'il y ait oscillations, il faut qu'il y ait un échange énergétique entre deux formes différentes.

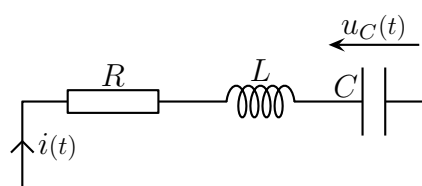
- ◇ Ici les deux formes sont magnétique (dans la bobine) et électrostatique (dans le condensateur).
- ◇ Dans les circuits du tout début du chapitre, ceux dans lesquels il y avait uniquement des bobines ou uniquement des condensateurs, il ne pouvait donc pas y avoir d'oscillation. Le régime était forcément apériodique ou critique.

☞ *Remarque* : Je recherche une « démonstration » physique de cette loi **fondamentale**.

IV.3.ii – circuit R, L, C série, régime pseudopériodique

★ rappel des résultats et adaptation au cas $Q \gg 1$

- ◇ Rappelons le montage.



◇ Nous avons trouvé :

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \left(\cos(\omega_p t) + \frac{\sin(\omega_p t)}{\tau \omega_p} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

◇ Pour $Q \gg 1$ nous obtenons :

$$\omega_p = \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau \omega_p} = \frac{1}{2Q} \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t)$$

◇ Utilisons la relation constitutive du condensateur pour obtenir l'intensité :

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = C U_0 e^{-t/\tau} \left(-\frac{\cos(\omega_0 t)}{\tau} - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= -C U_0 \omega_0 e^{-t/\tau} \left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{\tau \omega_0} + \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

◇ Et ainsi, avec les mêmes approximations que pour la tension, $i(t) = -C U_0 \omega_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t)$

★ énergie totale

◇ Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_b(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \\ &= \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2t/\tau} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \underbrace{L C^2 U_0^2 \omega_0^2}_{C U_0^2} e^{-2t/\tau} \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2t/\tau} \left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

◇ Et ainsi : $\boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 e^{-2t/\tau}}$

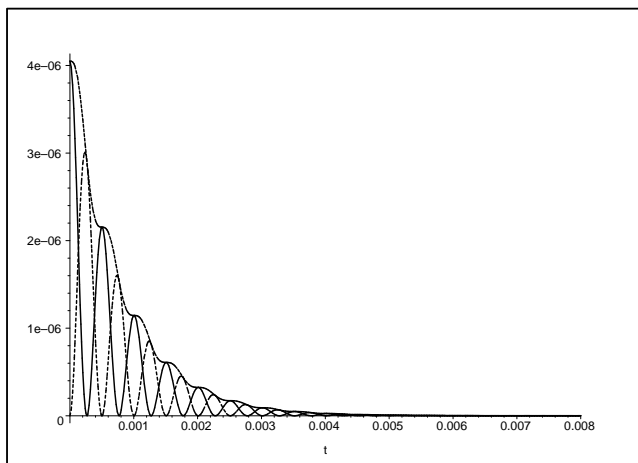
◇ L'énergie totale contenue dans le circuit diminue. Rien de plus normal avec le résistor et son effet joule.

◇ La constante de temps de décroissance de l'énergie vaut $\frac{\tau}{2} = \frac{Q}{\omega_0}$, *ie.* est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand. C'est normal aussi puisque le facteur de qualité est relié à la résistance du résistor

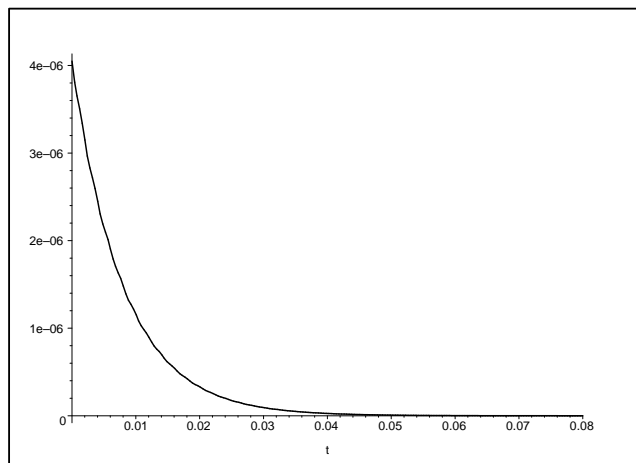
★ représentation

◇ Sur le graphiques 13 nous pouvons voir les énergies contenues dans le condensateur, dans la bobine et la somme des deux pour un circuit de facteur de qualité 5.

Graphique 13



Graphique 14



- ◇ Qui est qui sur le graphique 13 ? Il est possible de trouver sans parler des conditions initiales. En effet, nous pouvons constater que l'énergie totale diminue fortement à certains moments : c'est lorsque du courant circule, *ie.* lorsque l'énergie contenue dans la bobine est maximale.
- ◇ Sur le graphique 14, nous pouvons voir l'énergie totale pour un circuit de facteur de qualité 50. Si pour le graphique 13 l'évolution n'était sensiblement pas exponentielle, pour le graphique 14, cette fois, elle l'est.

Circuits en régime transitoire

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - régime transitoire / permanent, régime libre / forcé
 - pulsation, pseudo-période

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - inductance, capacité,
 - pulsation propre, facteur de qualité
- ◇ Connaître les liens entre farad, henry et rad.s^{-1} , entre henry, farad et ohm.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - les lois constitutives de la bobine et du condensateur
 - l'approche électrostatique du condensateur
 - les modèles du condensateur réel, de la bobine réelle
 - le comportement en régime continu du condensateur, de la bobine
 - les continuités mathématiques de grandeurs concernant le condensateur et la bobine

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - le comportement de circuits d'ordre 1, d'ordre 2
 - les constantes de temps des circuits R,C et R,L
 - la durée au bout de laquelle une évolution exponentielle est terminée
 - la phénoménologie des circuits R,C et R,L
 - la pulsation propre et le facteur de qualité des circuits R,L,C série et parallèle
 - la phénoménologie des régimes apériodique, pseudopériodique et critique
 - la durée au bout de laquelle des évolutions transitoires apériodique ou pseudopériodique sont terminées

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir déterminer *a priori* quel est le régime du circuit étudié.

★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir déterminer la meilleure approche (maillière ou nodale) compte tenu de la présence de condensateurs ou de bobines.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

◇ Connaître parfaitement :

- l'expression approchée de $\sqrt{1 + \text{qqch}}$
- la méthode de résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2
- l'écriture des solutions des équations différentielles d'ordre 1
- l'écriture des solutions des équations différentielles d'ordre 2 suivant le type de régime
- l'expression de $\cos^2(npq)$ et $\sin^2(npq)$ en fonction de $\cos(2npq)$.

★ exercices classiques

◇ Savoir refaire :

- tout le circuit R, C (avec le bilan énergétique)
- tout le circuit R, C (avec le bilan énergétique)
- tout le circuit R, L, C (avec le bilan énergétique)

Table des matières

I	Phénoménologie	1
I-1	Circuits avec bobines et condensateurs	1
I-1.i	comment « sonder » un circuit ?	1
I-1.ii	observation de circuits du premier ordre	1
	circuit avec une bobine	1
	circuit avec un condensateur	2
I-1.iii	observation de circuits du deuxième ordre	3
	circuit avec deux bobines	3
	circuit avec deux condensateurs	3
	circuit avec une bobine et un condensateur	4
I-1.iv	régimes libre ou forcé, transitoire ou permanent	5
	transitoire ou permanent ?	5
	libre ou forcé ?	5
I-2	Comportement d'un condensateur	5
I-2.i	observation à l'oscilloscope	5
I-2.ii	condensateur idéal	6
I-2.iii	comportement en régime continu	7
I-2.iv	comportement en régime transitoire	7
I-2.v	retour sur les exemples	7
I-2.vi	approche électrostatique du condensateur	7
I-3	Comportement d'une bobine	8
I-3.i	observation à l'oscilloscope	8
I-3.ii	bobine idéale	9
I-3.iii	comportement en régime continu	9
I-3.iv	comportement en régime transitoire	9
I-3.v	retour sur les exemples	10
I-4	Étudier un circuit en régime transitoire	10
I-4.i	comment déterminer <i>a priori</i> le régime ?	10
I-4.ii	comment déterminer <i>a priori</i> l'ordre d'évolution ?	10
I-4.iii	approche nodale ou maillère	10
	loi des mailles en terme de courant	11
	loi des nœuds en terme de potentiel	11
I-4.iv	association de bobines ou de condensateurs	11
II	Évolution du premier ordre	12
II-1	Circuit R, L soumis à un échelon de tension	12
II-1.i	présentation et analyse	12
II-1.ii	traduction des lois physiques	13
II-1.iii	interlude mathématique – équation différentielle d'ordre 1	13
	approche physique	13
	approche technique	14
II-1.iv	solution complète du problème particulier	15
	résultat physique	15
	solution analytique	15
	interprétation physique	16
II-1.v	régime permanent	16
II-1.vi	représentation graphique et interprétation	17
II-1.vii	phénoménologie à connaître	17

II.2	Circuit R, C soumis à un échelon de tension	17
II.2.i	présentation et analyse	18
II.2.ii	traduction des lois physiques	18
II.2.iii	solution complète du problème particulier	19
	solution analytique	19
	interprétation physique	19
II.2.iv	représentation graphique et interprétation	20
II.2.v	phénoménologie à connaître	20
II.3	Retour sur les simulations	20
II.3.i	visualisation expérimentale	20
	pour le circuit avec le condensateur	20
	pour le circuit avec la bobine	21
II.3.ii	bobine et condensateur réels	22
	modèles de bobine réelle	22
	modèles de condensateur réel	22
III	Évolution du second ordre	22
III.1	Circuit L, C en régime libre	22
III.1.i	présentation et analyse	22
III.1.ii	traduction des lois physiques	23
III.1.iii	interlude mathématique	23
	notation différentielle	23
	approche physique	23
	approche technique	24
	pulsation	24
III.1.iv	solution complète du problème particulier	24
III.1.v	représentation graphique et interprétation	25
III.1.vi	phénoménologie à connaître	25
III.2	Circuit R, L, C série en régime libre, première étape	25
III.2.i	présentation et analyse	25
III.2.ii	traduction des lois physiques	26
III.2.iii	interlude mathématique	26
	approche physique	26
	approche technique	26
III.2.iv	grandeurs caractéristiques	27
III.3	Circuit R, L, C série en régime libre et apériodique	27
III.3.i	solution générale de l'équation différentielle	27
III.3.ii	solution complète du problème particulier	28
	solutions de l'équation caractéristique	28
	détermination des constantes d'intégration	28
III.3.iii	représentation graphique et interprétation	29
III.3.iv	cas particulier $Q \ll 1$	30
	régime permanent	30
	simplification de la solution	31
	question de simplification	31
	cas limite	31
III.3.v	phénoménologie à connaître	31
III.4	Circuit R, L, C série en régime libre et pseudopériodique	32
III.4.i	solution générale de l'équation différentielle	32
III.4.ii	solution complète du problème particulier	32

	solutions de l'équation caractéristique	32
	détermination des constantes d'intégration	32
III·4·iii	représentation graphique et interprétation	33
	décroissement logarithmique	34
	comparaison de régimes pseudo-périodiques	34
III·4·iv	cas particulier $Q \gg 1$	35
	simplification de ω_p	35
	régime permanent	35
	cas limite	35
III·4·v	phénoménologie à connaître	36
III·5	Circuit R, L, C série en régime libre et critique	36
III·5·i	solution générale de l'équation différentielle	36
III·5·ii	solution complète du problème très particulier	36
	solutions de l'équation caractéristique	36
	détermination des constantes d'intégration	37
III·5·iii	représentation graphique et comparaison	37
	pourquoi est-il si intéressant ?	37
III·6	Circuit R, L, C parallèle en régime libre	38
III·6·i	présentation et analyse	38
III·6·ii	rien à refaire ?	38
III·6·iii	rien à refaire !	39
	cas limite	39
IV	Aspect énergétique	39
IV·1	Deux réservoirs d'énergie	39
IV·1·i	monstrations expérimentales	39
	avec le condensateur	39
	avec la bobine	40
IV·1·ii	énergie contenue dans le condensateur et la bobine	41
	dans le condensateur	41
	dans la bobine	42
IV·2	Bilans pour les évolutions du premier ordre	42
IV·2·i	analyse du circuit R, C	42
IV·2·ii	bilan du circuit R, C	43
	rappel des résultats	43
	énergie fournie par le générateur	43
	énergie reçue par le résistor	43
	énergie reçue par le condensateur	43
	décompte et interprétation	44
IV·2·iii	analyse du circuit R, L	44
IV·2·iv	bilan du circuit R, L	44
	rappel des résultats	44
	énergie fournie par le générateur	44
	énergie reçue par le résistor	45
	énergie reçue par la bobine	45
	décompte et interprétation	45
	petit paradoxe	45
IV·3	Bilans pour les évolutions du second ordre	46
IV·3·i	oscillation dans le circuit L, C	46
	rappel des résultats	46

	énergie contenue dans le condensateur	46
	énergie contenue dans la bobine	46
	énergie totale, représentation	47
	interprétation fondamentale	47
IV.3.ii	circuit R,L,C série, régime pseudopériodique	47
	rappel des résultats et adaptation au cas $Q \gg 1$	47
	énergie totale	48
	représentation	48
	Analyse physique	50

Électrocinétique

Chapitre 4

Amplificateur Opérationnel

Amplificateur Opérationnel

Dans ce chapitre, nous allons présenter et étudier un nouveau composant : l'amplificateur opérationnel. C'est un composant très utilisé en électronique car il permet de faire de nombreuses opérations sur les signaux.

Dans une première partie nous verrons comment fonctionne le composant idéal. Dans une seconde partie, nous verrons comment prendre en compte les défauts d'un amplificateur opérationnel réel.

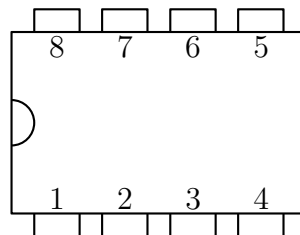
I – L'amplificateur opérationnel idéal

I.1 – Un nouveau composant

I.1.i – à quoi ça ressemble ?

◇ C'est un circuit intégré (quelques dizaines de transistors) relié à l'extérieur, *ie.* au circuit électronique, par 8 bornes :

- 2 bornes de commande (entrée)
- une borne commandée (sortie)
- 2 bornes d'alimentation
- 2 bornes de réglage
- 1 borne inutilisée



Faire passer un AO dans la classe.

- ◇ La borne inutilisée n'est là que pour faire un composant à 8 bornes de taille normalisée.
- ◇ En pratique les deux bornes de réglages ne sont utilisées que pour les montages de grande précision : jamais pour nous.
- ◇ Il reste un composant avec 5 bornes utilisées dont 2 d'alimentation.

I.1.ii – à quoi ça sert ?

- ◇ Comme le laisse suggérer le nom des bornes, l'une sera commandée par les deux autres.
- ◇ Cette commande se fait en potentiel, *ie* le potentiel de sortie, V_s sera entièrement déterminé par la seule donnée des potentiels d'entrée ou plutôt de leur différence : ε .
- ◇ Cette nouvelle loi de fonctionnement « tension \rightarrow tension » est tout à fait nouvelle (pour les trois dipôles connus, il s'agit d'une relation courant – tension) et, en ce sens, va permettre de réaliser de nouvelles fonctions.
- ◇ En pratique, un AO permet de réaliser plein de petites opérations toutes simple : amplification, sommation, dérivation, intégration, ce qui est à la base même de l'électronique.
- ◇ Pour pouvoir fonctionner, ce composant aura besoin d'un apport énergétique extérieur : c'est l'alimentation. En ce sens, l'AO peut être considéré comme ayant un caractère générateur.

I.1.iii – comment ça marche ?

- ◇ Il y a deux niveaux pour répondre à cette question.
- ◇ Comment ça marche en détail à l'intérieur ? Réponse : c'est compliqué, pas forcément inintéressant en soi, mais complètement inutile pour la suite. C'est comme une voiture : qui sait comment fonctionne l'accélérateur, la boîte de vitesse, le différentiel, l'essuie-glace intermittent ?
- ◇ En revanche, pour une voiture, nous savons ce que permet de faire l'accélérateur, le levier de vitesse, le volant, ... et c'est ce que nous verrons avec l'amplificateur différentiel : uniquement son fonctionnement extérieur.

Le rôle de l'amplificateur opérationnel est d'amplifier sa tension d'entrée.

- ◇ C'est tout, mais c'est déjà énorme !

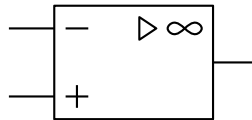
I.2 – L'AO en électrocinétique

I.2.i – schématisation

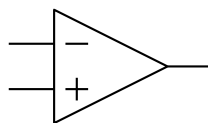
- ◇ Sur un schéma électrocinétique, nous n'allons représenter que les bornes utiles : les 2 de commande et celle de sortie.

Un amplificateur opérationnel est schématisé sous la forme ci-dessous où :

- la borne notée + est l'*entrée non inverseuse*
- la borne notée – est l'*entrée inverseuse*
- la 3^e borne est la *sortie*



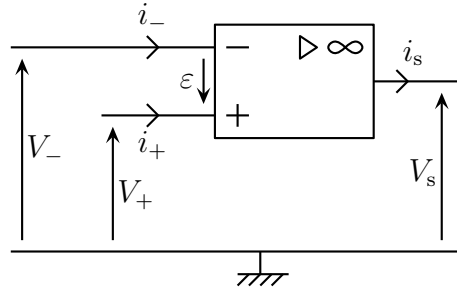
- ◇ Nous ne représenterons pas les bornes d'alimentation :
 - cela donnera parfois l'impression fausse que c'est l'AO qui fournit de l'énergie alors que ce sont ses générateurs d'alimentation, l'AO n'étant là que pour réguler (sur commande) la transmission d'énergie
 - il n'est donc plus possible de vérifier la loi de conservation de l'énergie avec un circuit comportant un AO
 - il n'est plus possible d'utiliser la loi des nœuds sur le composant en entier : le courant total qui rentre par les bornes d'entrée ne vaut pas celui qui sort par la borne de sortie
- ◇ Il existe, parfois, dans des sujets, des vieilles représentation d'AO : ce sont les mêmes AO, mais ce n'est plus le même dessin.



★ grandeurs caractéristiques

- ◇ De nombreuses grandeurs concernent l'AO.

Conventionnellement, nous noterons :



- ◇ Remarquez la position des courants conventionnels : i_+ et i_- « rentrent » dans l'AO, alors que i_s en sort. Rappelons que ce n'est que conventionnel : le courant réel peut très bien rentrer dans l'AO, ce qui se traduirait alors par $i_s < 0$.

Les courants i_+ et i_- sont appelés *courants de polarisation*.

- ◇ Remarquons que les grandeurs intéressantes sont :

- le potentiel de l'entrée inverseuse V_-
- le potentiel de l'entrée non inverseuse V_+
- le potentiel de la sortie V_s

La présence et la position de la masse est fondamentale pour le bon fonctionnement (tant expérimental que théorique) d'un AO.

I.2.ii – phénoménologie – loi de fonctionnement

★ phénoménologie

Le potentiel de sortie est entièrement commandé par la tension $\varepsilon \triangleq V_+ - V_-$.

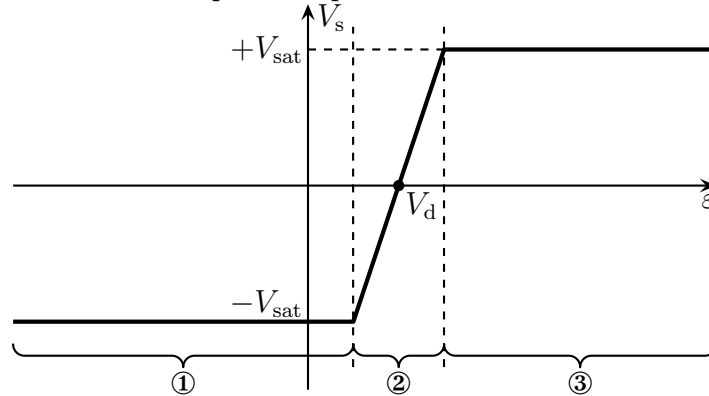
- ◇ En fait, le rôle d'un AO c'est seulement d'amplifier ε et de répercuter le résultat sur V_s .

★ caractéristique

- ◇ Nous allons présenter la caractéristique statique de l'AO.

Une caractéristique est dite *statique* lorsqu'elle correspond à des grandeurs constantes dans le temps.

La caractéristique statique d'un AO est la suivante :



Elle fait apparaître plusieurs zones :

- ① et ③ : régime de saturation, domaine non linéaire
- ② : régime linéaire

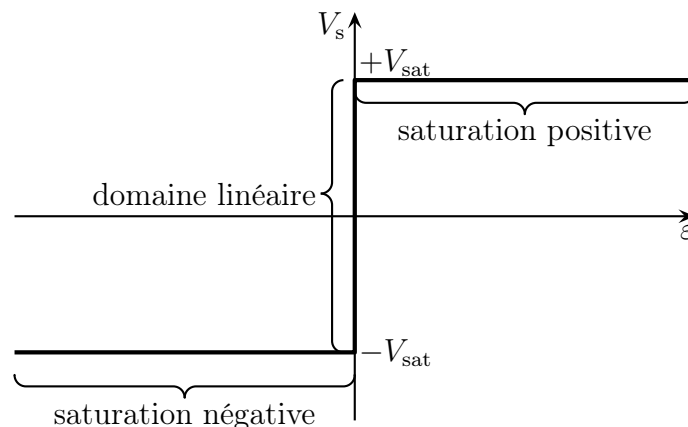
- ◇ Lorsque $\varepsilon(t)$ et (donc) $v_s(t)$, alors le lien entre les deux est légèrement différent, notamment l'amplification dépend de la fréquence (cf. 2^e partie).
- ◇ Nous pouvons voir sur cette caractéristique deux grands types de fonctionnement :
 - un régime saturé (domaines ① et ③) pour lequel $V_s = \pm V_{\text{sat}}$ (typiquement $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$. C'est un régime **non linéaire**)
 - un régime linéaire (domaine ②) pour lequel $V_s = \mu_0 (\varepsilon - V_d)$ où V_d est la tension de décalage ($V_d \simeq 0,1 \text{ V}$) et $\mu_0 \simeq 10^5$ le coefficient d'amplification statique.
- ◇ La largeur de la zone linéaire est de quelques millivolt, mais c'est elle que nous utiliserons le plus souvent, car c'est dans cette zone que l'AO est vraiment commandé. Il faudra bien viser ...

I.2.iii – idéalisation

Pour un AO idéal, nous avons :

- des courants de polarisation nuls : $i_+ = i_- = 0$
- une tension de décalage nulle : V_d
- une amplification statique infinie : $\mu_0 = \infty$

- ◇ Dans ces conditions, la caractéristique devient :



Pour un AO idéal, il existe deux domaines de fonctionnement :

- le régime linéaire pour lequel $\varepsilon = 0$, ou $V_+ = V_-$ et $-V_{\text{sat}} < V_s < +V_{\text{sat}}$
- le régime de saturation (non linéaire) pour lequel :
 - $\varepsilon > 0$ et $V_s = +V_{\text{sat}}$
 - ou $\varepsilon < 0$ et $V_s = -V_{\text{sat}}$

I.3 – Étudier un circuit avec un AO

I.3.i – étude des rétroactions

Une *rétroaction* est une chaîne de dipôles reliant la sortie de l'amplificateur à l'entrée sans passer par la masse.

- ◇ Ce sont les rétroactions qui permettent de faire fonctionner l'AO : sans elles il serait impossible de faire en sorte que ε soit (quasi) nul de manière à ce que l'AO fonctionne en régime linéaire.
- ◇ Le principe d'une rétroaction est de faire en sorte que les conséquences d'une commande agissent sur la commande elle-même. Par exemple quand nous écrivons, bien que nous sachions écrire sur les lignes, nos yeux exercent constamment une rétroaction sur nos mains pour que tout reste bien droit.
- ◇ Ici, l'AO amplifie la différence $V_+ - V_-$:
 - s'il y a une rétroaction sur V_- : alors quand V_s augmente, V_- augmente, mais ça fait diminuer ε et V_s doit donc moins augmenter et, finalement, V_s ne pourra pas être trop grand car sinon V_- serait plus grand que V_+ ce qui obligerait V_s à devenir très négatif
 - s'il y a une rétroaction sur V_+ : alors quand V_s augmente, V_+ augmente, ça fait augmenter ε et V_s doit donc encore plus augmenter, ce qui augmentera V_+ encore plus, ...

Une rétroaction négative a tendance à stabiliser un dispositif, alors qu'une rétroaction positive a tendance à le déstabiliser.

I.3.ii – conséquence des rétroactions

★ cas le plus simple

S'il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée inverseuse, alors l'AO est en régime de saturation.

- ◇ C'est systématique, il n'y a pas d'exception.

★ cas très souvent très simple

S'il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse et pas de rétroaction sur l'entrée non inverseuse, alors l'AO est en régime linéaire.

- ◇ Il y a quelques exceptions (dont le célèbre montage « intégrateur » que nous verrons) mais c'est assez rare.

★ cas non décidable cette année

S'il y a deux rétroactions, une sur l'entrée inverseuse et une autre sur l'entrée non inverseuse, l'AO peut être aussi bien en régime linéaire qu'en régime de saturation.

- ◇ Seule une étude plus approfondie (en 2^e année) peut permettre de décider, de prévoir et de détailler dans quelles conditions l'AO est en régime linéaire ou en régime de saturation. Qualitativement, il faut que la rétroaction négative soit plus forte que la rétroaction positive. Mais cela ne nous avance guère ...
- ◇ Lorsqu'un AO présentera deux rétroactions, il y aura deux possibilités :
 - il faudra regarder les hypothèses faites dans l'énoncé
 - il faudra imaginer quel régime est adapté à l'objectif du montage

I.3.iii – pourquoi privilégier l'approche nodale ?

- ◇ La réponse est évidente : parce que l'AO a une loi constitutive qui relie tension et potentiel, grandeurs qui sont les inconnues naturelles de l'approche nodale.
- ◇ Il sera donc très pratique / utile / puissant d'écrire des lois des nœuds en terme de potentiels. Toutefois, il faudra faire attention !
- ◇ L'AO possède trois bornes importantes :
 - les deux bornes d'entrées pour lesquelles le courant entrant est connu (il est nul dans le cas de l'AO idéal) : la loi des nœuds sera facile à écrire
 - la borne de sortie, la borne commandée, celle qui s'adapte au reste du circuit sort un courant qui n'obéit à aucune loi fonctionnelle de l'AO, il sera donc peu pertinent d'écrire la loi des nœuds à cet endroit là

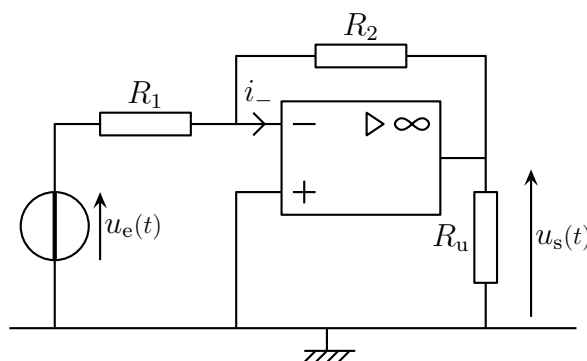
Écrire la loi des nœuds en terme de potentiel en sortie d'un AO est, au mieux, inutile mais le plus souvent faux.

I.4 – Montages amplificateurs

I.4.i – amplificateur inverseur

★ montage

- ◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la relation entre $u_s(t)$ et $u_e(t)$.



- ◇ Analyse physique :

- le circuit est en régime inconnu
 - il n'y a qu'une seule rétroaction sur l'entrée inverseuse, l'AO est donc en régime linéaire
 - les grandeurs pertinentes sont R_1 , R_2 , R_u et $u_e(t)$ en tant que contrainte
- ◇ Analyse technique :
- c'est un AO pour lequel nous recherchons une relation entre des tension, l'approche nodale nous ouvre ses bras
 - il y a trois nœuds dont la masse donc cela fait deux inconnues donc deux lois.
- ◇ La première loi c'est la loi des nœuds en terme de potentiels écrite à l'entrée inverseuse :

$$\frac{u_e(t) - v_-(t)}{R_1} + \frac{u_s(t) - v_-(t)}{R_2} - \underbrace{i_-}_{=0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{u_e(t)}{R_1} + \frac{u_s(t)}{R_2} = v_-(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

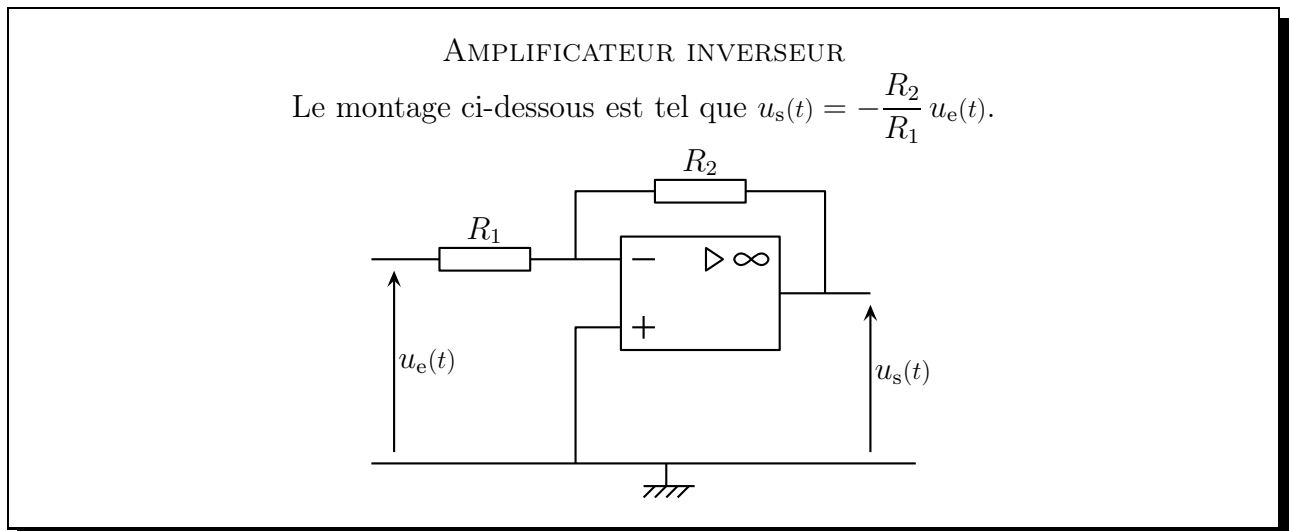
- ◇ La deuxième loi c'est ... la loi de fonctionnement de l'AO. Ici le régime linéaire se traduit pour un AO idéal : $V_- = V_+$ et $V_+ = 0$ c'est déjà connu.
- ◇ Nous obtenons donc $\frac{u_e(t)}{R_1} + \frac{u_s(t)}{R_2} = 0$ soit $u_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_e(t)$.
- ◇ Que constatons-nous ?

Le fonctionnement de l'AO idéal est indépendant de ce qui est branché directement sur sa sortie.

- ◇ Remarquons aussi que nous n'avons pas dit « générateur idéal » dans les lois de fonctionnement !

★ simplification fonctionnelle du montage

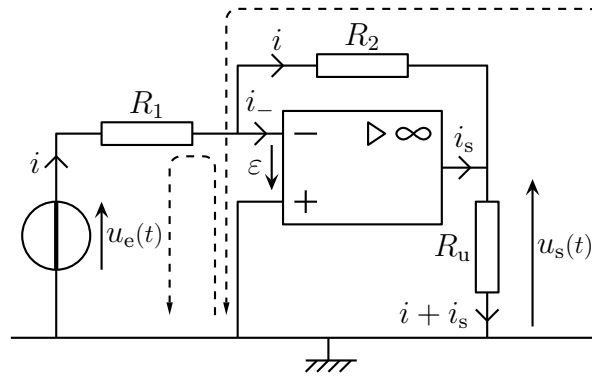
- ◇ Supprimons du montage, tout ce qui est inutile pour le fonctionnement de l'AO.



- ◇ Nous pouvons constater que le montage ci-dessus permet d'écrire les mêmes lois que précédemment.
- ◇ Le montage est dit *inverseur* car l'entrée et la sortie sont de signes opposés.
- ◇ Bien que le montage soit dit *amplificateur*, il est possible de réaliser une atténuation de $u_e(t)$, ne serait-ce qu'en prenant $R_1 > R_2$.

★ approche maillère

- ◇ Amusons-nous une fois. Étudions le premier montage avec une approche maillère pour le montage :



◇ Comment compter les mailles ? Deux méthodes :

- *a priori* : c'est le nombre de chemins qui mènent de la masse à la masse en passant par des fils, des dipôles et ε
- *a posteriori* : écrire les inconnues en intensité en respectant les lois des nœuds, c'est le nombre d'inconnues

◇ Ici en écrivant les intensités, nous trouvons deux inconnues : $i(t)$ et $i_s(t)$.

◇ Ces deux lois en terme de potentiels s'écrivent :

$$-\varepsilon(t) + R_1 i(t) - u_e(t) = 0 \quad \text{et} \quad R_u(i_s(t) + i(t)) + R_2 i(t) + \varepsilon = 0$$

◇ À ce stade, nous avons fait apparaître une inconnue ε et toujours pas la grandeur recherchée $u_s(t)$.

◇ Pour ε , utilisons la loi constitutive de l'AO idéal en régime linéaire : $\varepsilon = 0$.

◇ En remarquant en plus que $u_s(t) = R_u(i_s(t) + i(t))$, nous nous rendons compte que les lois des mailles se réécrivent :

$$\begin{cases} R_1 i(t) - u_e(t) = 0 \\ u_s(t) + R_2 i(t) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow u_s(t) = R_2 i(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_e(t)$$

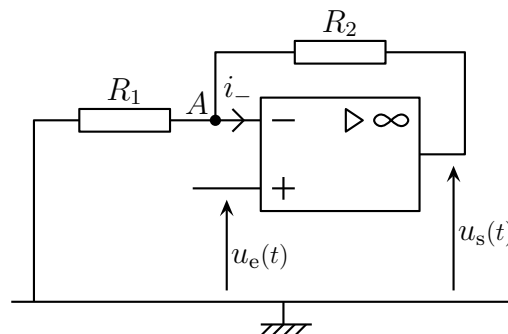
◇ Morale : ça marche quand même (heureusement), mais c'est bien plus du bidouillage : écrire les bonnes lois, au bon moment en remarquant les bonnes relations. Bref à éviter.

◇ En fait l'approche maillère est tellement à éviter que, sauf cas rares, même lorsqu'il s'agira de déterminer un courant, il sera souvent plus facile d'utiliser une approche nodale.

I.4.ii – amplificateur non inverseur

★ montage et analyse

◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la relation entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



◇ Analyse physique :

- circuit en régime inconnu

- il y a un AO avec rétroaction négative : régime linéaire
- $u_e(t)$ va commander la sortie $u_s(t)$, peu importe donc la résistance branchée à la sortie de l'AO
- GP : R_1 , R_2 et $u_e(t)$ en tant que contrainte

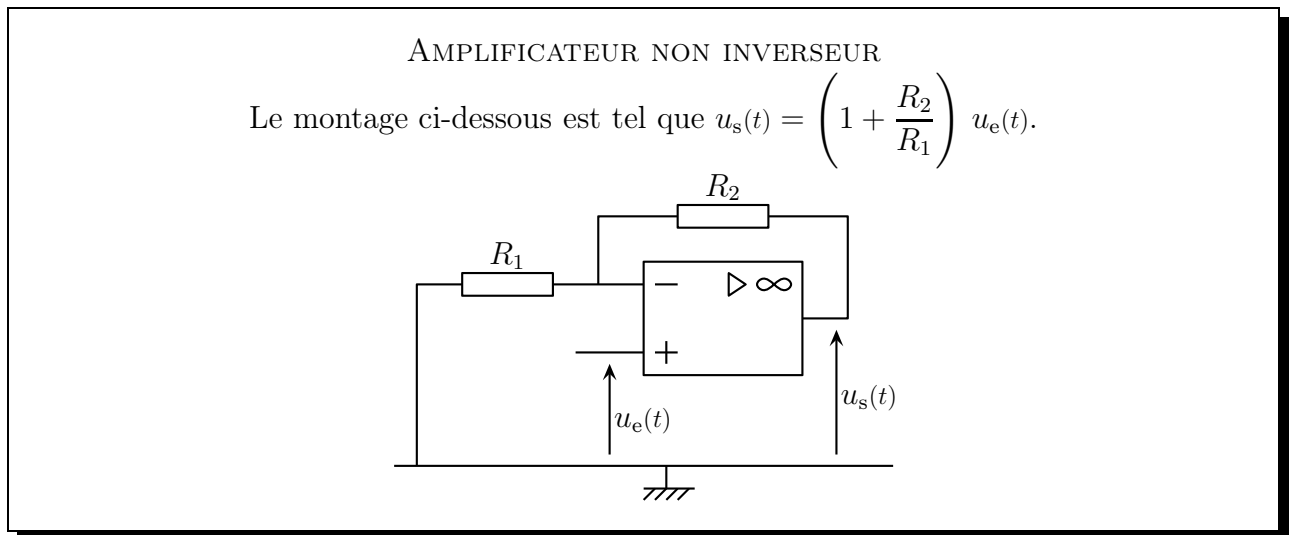
◇ Analyse technique :

- il y a un AO et nous ne cherchons pas de courants : approche nodale
- il y a deux potentiels inconnus : celui en A et celui à la sortie de l'AO, il faudra deux lois, la loi de fonctionnement de l'AO et une loi des nœuds en terme de potentiels.

★ loi de fonctionnement

- ◇ Loi de fonctionnement de l'AO. C'est un AO idéal en régime linéaire donc $V_+ = V_-$ et comme ici $V_+ = u_e(t)$, nous avons $V_-(t) = u_e(t)$.
- ◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_A(t) = u_e(t)$:

$$\frac{0 - V_A(t)}{R_1} + \frac{u_s(t) - V_A(t)}{R_2} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_e(t)$$



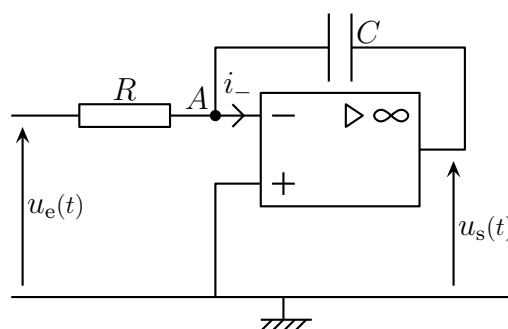
- ◇ Ici il y a vraiment amplification car le coefficient entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$ est forcément plus grand que 1. Le nom « non inverseur » vient du fait que ce coefficient est positif.

I.5 – Avec un condensateur

I.5.i – montage intégrateur

★ montage et analyse

- ◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la relation entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



◇ Analyse physique :

- circuit en régime inconnu
- il y a un AO avec rétroaction négative : régime linéaire
- il y a un condensateur : évolution d'ordre 1
- $u_e(t)$ va commander la sortie $u_s(t)$, peu importe donc la résistance branchée à la sortie de l'AO
- GP : R , C et u_e

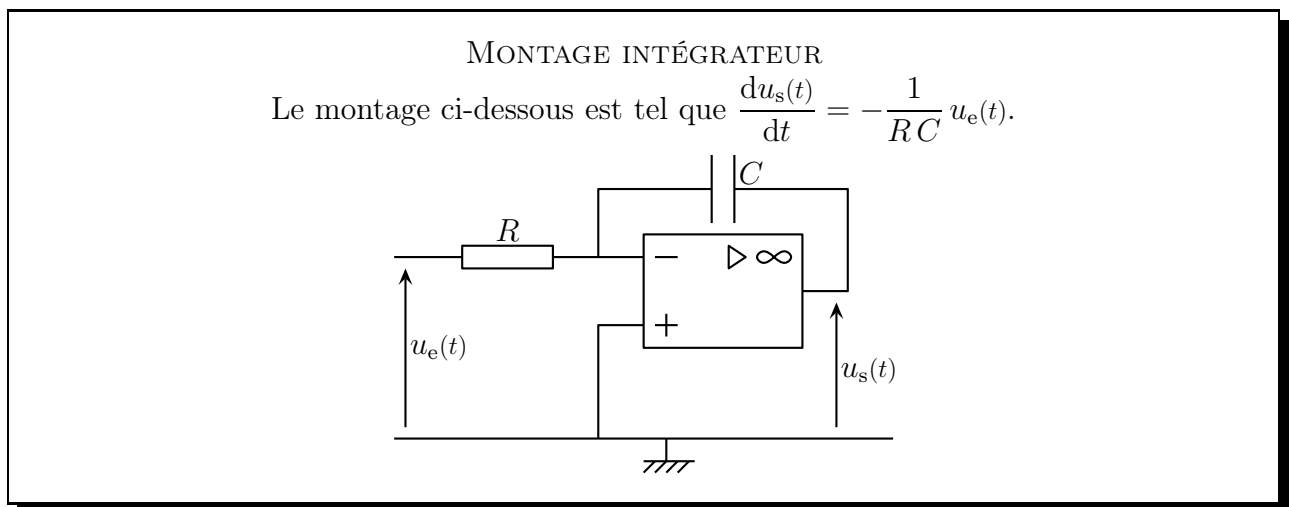
◇ Analyse technique :

- il y a un AO et nous ne cherchons pas de courants : approche nodale
- il y a deux potentiels inconnus : celui en A et celui à la sortie de l'AO, il faudra deux lois, la loi de fonctionnement de l'AO et une loi des nœuds en terme de potentiels.

★ loi de fonctionnement

- ◇ Loi de fonctionnement de l'AO. C'est un AO idéal en régime linéaire donc $V_+ = V_-$ et comme ici $V_+ = 0$, nous avons $V_-(t) = 0$.
- ◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_A(t) = 0$:

$$\frac{u_e(t) - 0}{R} + C \frac{d(u_s(t) - 0)}{dt} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} u_e(t)$$



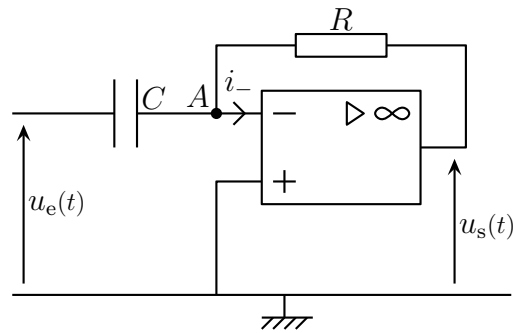
- ◇ Puisque la dérivée de la sortie est proportionnelle à l'entrée, la sortie est bien une primitive de l'entrée : ce montage « intègre » l'entrée.
- ◇ C'est bien une évolution d'ordre 1 !
- ◇ Pour écrire directement la sortie en fonction de l'entrée, il ne faut pas oublier la condition initiale :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} u_e(t) \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) - u(0) = \int_0^t \frac{1}{RC} u_e(t') dt'$$

I.5.ii – montage dérivateur

★ montage et analyse

- ◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la relation entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



◇ Analyse physique :

- le circuit est en régime inconnu
- il y a un AO avec rétroaction négative : régime linéaire
- il y a un condensateur : évolution d'ordre 1
- $u_e(t)$ va commander la sortie $u_s(t)$, peu importe donc la résistance branchée à la sortie de l'AO
- GP : C , R et u_e

◇ Analyse technique :

- il y a un AO et nous ne cherchons pas de courants : approche nodale
- il y a deux potentiels inconnus : celui en A et celui à la sortie de l'AO, il faudra deux lois, la loi de fonctionnement de l'AO et une loi des nœuds en terme de potentiels.

★ loi de fonctionnement

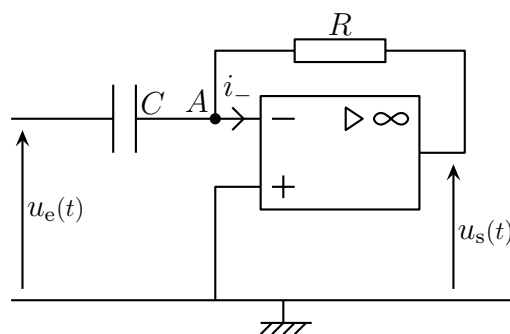
◇ Loi de fonctionnement de l'AO. C'est un AO idéal en régime linéaire donc $V_+ = V_-$ et comme ici $V_+ = 0$, nous avons $V_-(t) = 0$.

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_A(t) = 0$:

$$C \frac{d(u_e(t) - 0)}{dt} + \frac{u_s(t) - 0}{R} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) = -RC \frac{du_e(t)}{dt}$$

MONTAGE DÉRIVATEUR

Le montage ci-dessous est tel que $u_s(t) = -RC \frac{du_e(t)}{dt}$.



◇ Puisque la sortie est proportionnelle à la dérivée de l'entrée, il est naturel d'appeler ce montage « dérivateur ».

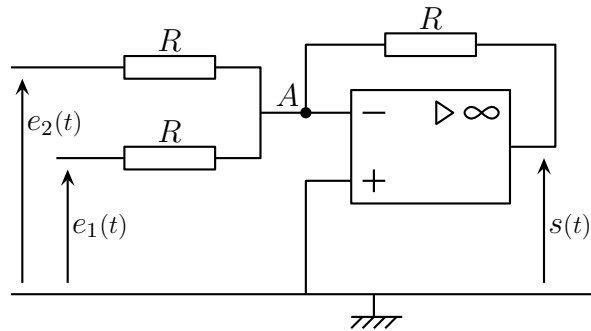
◇ C'est une relation d'ordre 1 puisqu'il y a une et une seule dérivée.

I.6 – Et d'autres

I.6.i – sommateur

★ montage et analyse

◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la relation entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



◇ Analyse physique :

- le circuit est en régime inconnu
- il y a un AO avec rétroaction négative : régime linéaire
- GP : R et u_e en tant que contrainte
- l'homogénéité nous dit que la sortie $u_s(t)$ ne peut pas être fonction de R

◇ Analyse technique :

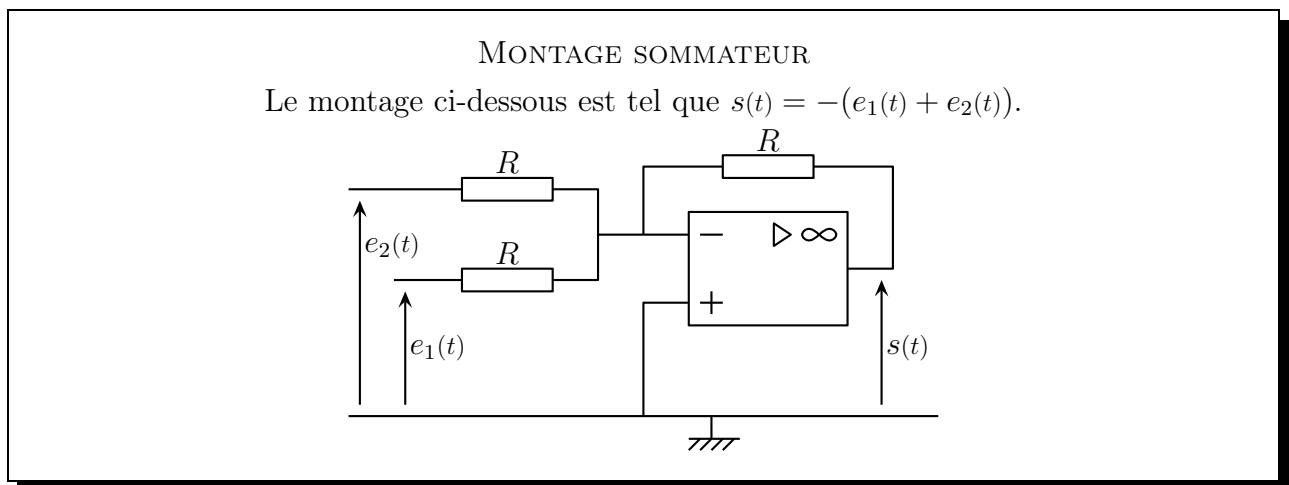
- il y a un AO et nous ne cherchons pas de courants : approche nodale
- il y a deux potentiels inconnus : celui en A et celui à la sortie de l'AO, il faudra deux lois, la loi de fonctionnement de l'AO et une loi des nœuds en terme de potentiels.

★ loi de fonctionnement

◇ Loi de fonctionnement de l'AO. C'est un AO idéal en régime linéaire donc $V_+ = V_-$ et comme ici $V_+ = 0$, nous avons $V_-(t) = 0$.

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_A(t) = 0$:

$$\frac{e_1(t) - 0}{R} + \frac{e_2(t) - 0}{R} + \frac{s(t) - 0}{R} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad s(t) = -(e_1(t) + e_2(t))$$

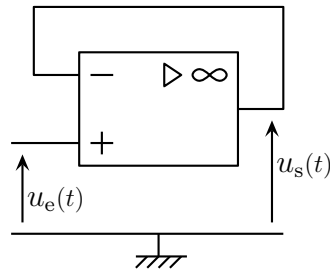


◇ La sortie est bien proportionnelle à la somme des tensions d'entrée, c'est donc normal d'appeler ce montage « sommateur »

I.6.ii – suiveur

★ montage et analyse

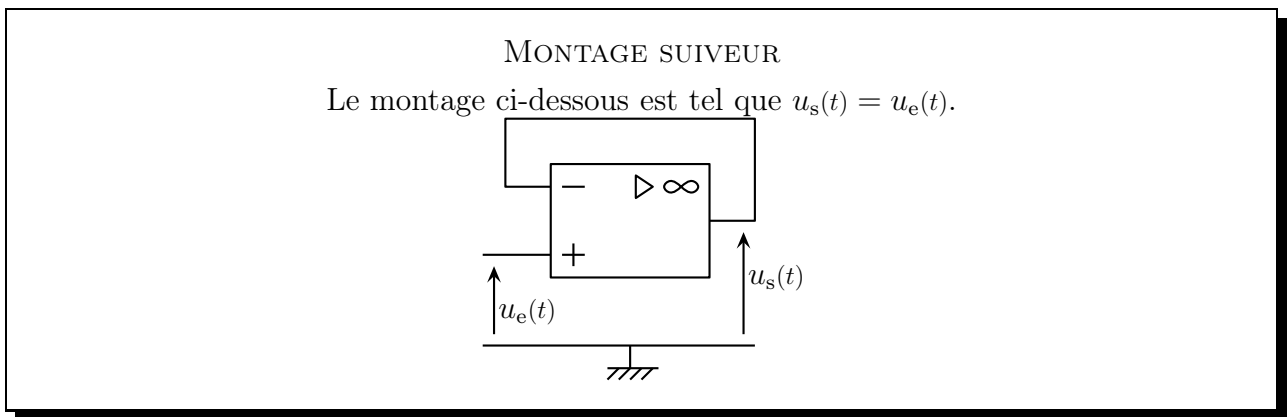
◇ Considérons le montage suivant et cherchons la relation entre $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



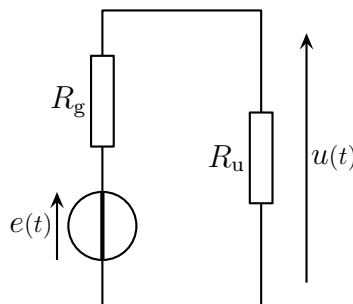
- ◇ Analyse physique : c'est un AO en régime linéaire ...
- ◇ Analyse technique : approche nodale, un seul potentiel inconnu, la loi de fonctionnement devrait suffire.

★ loi de fonctionnement et intérêt

- ◇ Puisqu'il s'agit d'un AO idéal en régime linéaire, nous avons $V_+(t) = V_-(t)$ et donc $u_e(t) = u_s(t)$.

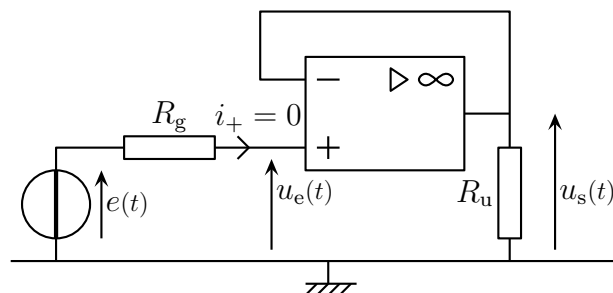


- ◇ À quoi cela peut-il servir ? Pourquoi passer par un AO ?
- ◇ Imaginons un générateur réel relié à une résistance R_u .



- ◇ Avec un diviseur de tension, nous trouvons immédiatement $u(t) = \frac{R_u}{R_g + R_u} e(t)$.

- ◇ Plaçons maintenant ce générateur de tension en entrée d'un montage suiveur et R_u en sortie.



- ◇ Cette fois, comme le courant i_+ est nul, nous avons $u_e(t) = e(t)$ et donc $\boxed{u_s(t) = e(t)}$.
- ◇ Le montage suiveur permet de faire « suivre » le potentiel en un point sans perturber ce sur quoi le potentiel est pris.

II – L'amplificateur opérationnel réel

II.1 – Quelques petites différences

II.1.i – limitations

- ◇ Les AO ne sont pas faits, *a priori* pour délivrer de grandes puissances (sinon ils grilleraient), c'est pourquoi leur courant de sortie est volontairement limité.

Le courant de sortie d'un AO est limité : $|i_s(t)| \leq I_{\max}$ avec $I_{\max} \simeq 20 \text{ mA}$.

- ◇ Une autre limitation c'est celle de la vitesse de variation de la sortie.

Le potentiel de sortie d'un AO ne peut pas varier trop vite : $\left| \frac{dv_s(t)}{dt} \right| \leq \sigma$.
Ce phénomène est appelé *slew rate*.

- ◇ Il existe deux grands types d'AO :

- les $\mu\text{A}741$: $\sigma \simeq 0,5 \text{ V.ms}^{-1}$
- les TL081 : $\sigma \simeq 20 \text{ V.ms}^{-1}$

Un AO qui n'est pas limité en sortie tant au niveau de l'intensité qu'au niveau du slew rate est dit *parfait*.

- ◇ La différence entre « parfait » et « idéal » n'est pas fondamentale mais est à connaître « au cas où ».

Les limitations de l'AO sont des défauts non linéaires car non modélisables par des composants linéaires.

- ◇ C'est pour cette raison que nous ne nous intéresserons que peu à ces défauts, du moins dans l'aspect théorique. Au laboratoire, en revanche, il faudra constamment y penser.

II.1.ii – défauts

- ◇ Il y en a plusieurs.

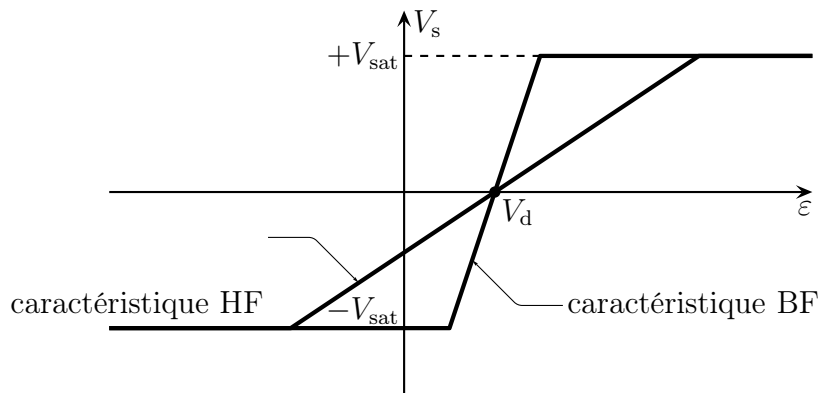
Les courants de polarisation pour un AO réel sont non nuls.

- ◇ Nous nous en doutions, mais ça vaut le coup de le rappeler.

La tension de décalage pour un AO réel n'est pas nulle.

Le coefficient d'amplification d'un AO réel dépend de la fréquence.

✧ Pour les deux derniers, cela implique que la caractéristique de l'AO réel devient :



✧ Typiquement nous avons les valeurs :

✧ Il existe deux grands types d'AO :

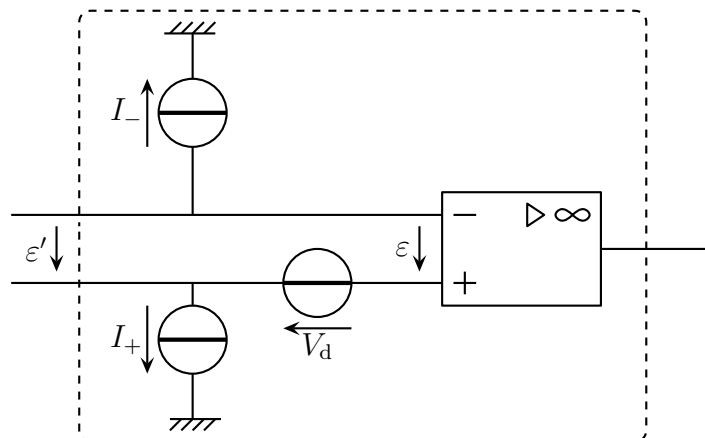
- pour les courants de polarisation : $I_+ \simeq I_- \simeq \mu\text{A}$ (pour les $\mu\text{A}741$) et $I_+ \simeq I_- \simeq \text{nA}$ (pour les TL081)
- pour la tension de décalage : V_d est très variable, de quelques mV à 100 mV pour les mauvais $\mu\text{A}741$.

II.1.iii – modélisation

✧ Il n'est pas possible de modéliser de manière simple les limites des AO, c'est pourquoi nous ne les modéliserons pas et nous contenterons de vérifier (quand cela est demandé) que $|i_s(t)| \leq I_{\text{max}}$ ou

encore que $\left| \frac{du_s(t)}{dt} \right| \leq \sigma$.

✧ En revanche, nous allons modifier quelques défauts : les courants de polarisation non nuls et la tension de décalage non nulle.



✧ La modélisation pour l'amplification dépendant de la fréquence sera vue en exercice dans le chapitre suivant et, surtout, l'année prochaine.

II.2 – Une autre manière d'étudier un circuit contenant plusieurs sources

- ◇ Il existe toujours la solution bourrине de tout prendre en compte, mais nous pouvons faire autrement. Une méthode plus « physique ».

II.2.i – quand tout est linéaire, tout va bien

★ théorème de superposition

Dans un circuit linéaire, toute tension (resp. toute intensité) est la somme des tensions (resp. des intensités) qu'il y aurait eu avec chaque générateur pris l'un après l'autre.

- ◇ Ce théorème est aussi appelé « principe de superposition ».

★ idée de démonstration

- ◇ En fait c'est valable pour n'importe quel phénomène où les lois sont linéaires ! C'est dire la puissance et la portée de ce théorème.
- ◇ Imaginons un circuit linéaire pour lequel nous cherchons une tension $u(t)$. Après avoir posé les lois des mailles, les lois des nœuds et isolé $u(t)$, en notant $e(t)$ et $\eta(t)$ respectivement la f.é.m. et le c.é.m. de générateur, nous arrivons à une équation différentielle du type

$$a \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b \frac{du(t)}{dt} + c u(t) = f(e(t)) + g(\eta(t))$$

où a , b et c sont des constantes dépendant des grandeurs caractéristiques des dipôles (R , C , L)

- ◇ Le théorème de superposition ne dit ni plus ni moins que la solution $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ où $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont les solutions respectives de :

$$a \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + b \frac{du_1(t)}{dt} + c u_1(t) = f(e(t)) \quad \text{et} \quad a \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + b \frac{du_2(t)}{dt} + c u_2(t) = g(\eta(t))$$

★ interprétation

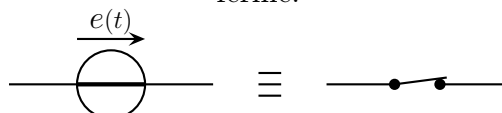
- ◇ L'approche d'un problème avec ce théorème permet d'étudier chaque cause séparément et donc de mieux voir qui est la cause de quoi.



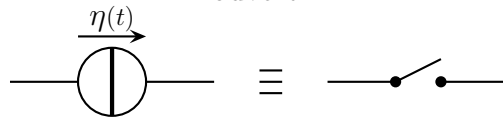
Cela ne fonctionne qu'avec des phénomènes linéaires.

- ◇ Comment faire pour retirer un générateur ? Il faut que son influence soit nulle, *ie.* il faut faire soit $e(t) = 0$ soit $\eta(t) = 0$.

Un générateur idéal de tension d'influence nulle se comporte comme un interrupteur fermé.



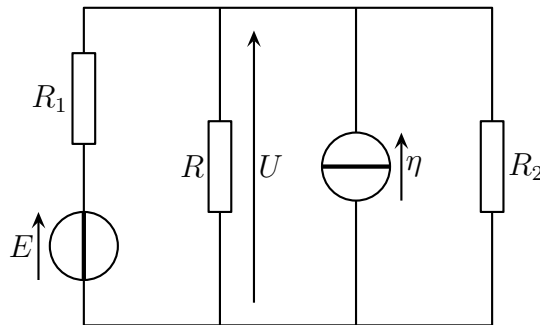
Un générateur idéal de courant d'influence nulle se comporte comme un interrupteur ouvert.



II.2.ii – idoinoton

★ montage

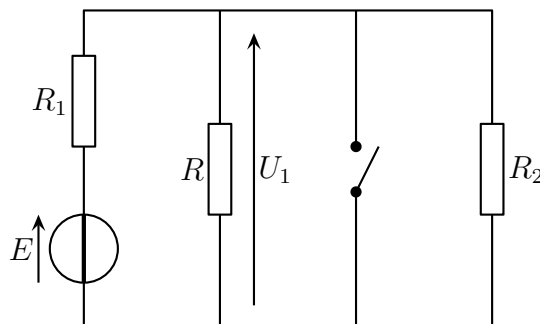
◇ Considérons le montage ci-dessous et cherchons la tension U .



- ◇ Normalement l'analyse physique nous dit qu'il s'agit d'un circuit à trois mailles et deux nœuds principaux et que les résultats dépendront de E , R , R_1 , R_2 et η .
- ◇ L'analyse technique doit nous dire que puisqu'il s'agit d'un circuit à deux nœuds et qu'en plus nous recherchons une tension, mieux vaut utiliser l'approche nodale. Cela devrait donner le résultat directement. Oui, mais utilisons le théorème de superposition.

★ premier générateur

◇ Enlevons l'influence du générateur de courant. Le circuit est alors équivalent au schéma ci-dessous.

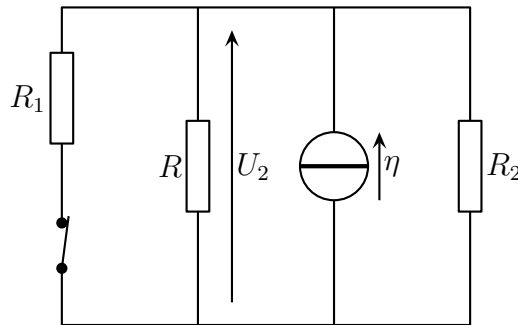


◇ Nous pouvons alors reconnaître un diviseur de tension entre R_1 et $R \parallel R_2$, ce qui nous donne :

$$U_1 = \frac{\frac{R R_2}{R + R_2}}{R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2}} E = \frac{R R_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R R_2} E$$

★ deuxième générateur

✧ Enlevons l'influence du générateur de courant. Le circuit est alors équivalent au schéma ci-dessous.



✧ Nous sommes alors face à un circuit à deux nœuds et nous pouvons écrire directement :

$$U_2 = \frac{\eta}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R R_2 R_1}{R R_1 + R_1 R_2 + R R_2} \eta$$

★ rassemblement et morale

✧ Le théorème de superposition donne ainsi :

$$U = U_1 + U_2 = \frac{R R_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R R_2} (E + R_1 \eta)$$

- ✧ L'intérêt de ce théorème est de ne pouvoir étudier qu'une partie du montage. S'il s'agit de trouver toutes les influences, autant tout faire d'un coup, cela évite de refaire plusieurs fois la même chose.
- ✧ Finalement ce théorème sera surtout utile non pas lorsque nous chercherons une grandeur dans un circuit complexe, mais plutôt lorsque nous chercherons l'influence particulière d'un générateur à un endroit précis du circuit.

II.2.iii – utilisation dans le cas d'un AO réel

✧ Tout ce qui est résistor, condensateur ou bobine ne posent pas de soucis : ce sont des dipôles linéaires.

Un dipôle est dit *linéaire* si sa loi de fonctionnement est une équation différentielle linéaire.

✧ C'est bien le cas de :

$$u(t) = R i(t) \qquad i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

✧ Cela peut paraître évident, mais mieux vaut le dire quand même.

Un AO conserve le caractère linéaire d'un circuit si et seulement si il fonctionne en régime linéaire.

✧ Pour étudier les défauts des montages linéaires, nous ne nous intéresserons qu'aux défauts et éliminerons l'effet de la tension d'entrée : nous la considérerons comme nulle.

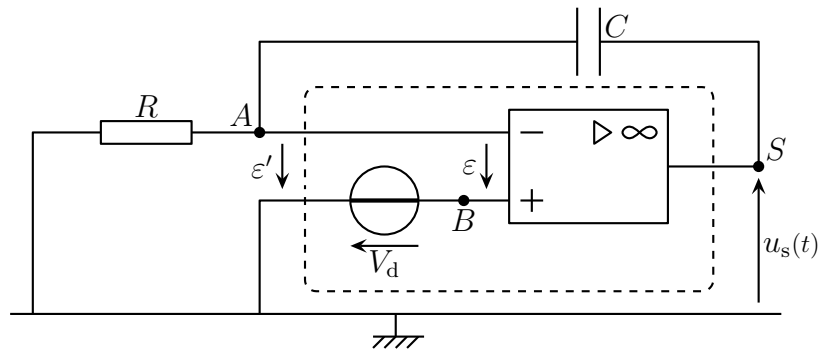
II.3 – Le montage intégrateur

II.3.i – en fait, il dérive ...

- ◇ Le titre est un jeu de mot. Nous allons étudier séparément les conséquences de la tension de décalage et des courants de polarisation. Le théorème de superposition fera le reste.
- ◇ Nous verrons alors que les défauts auront tendance à faire augmenter sans cesse la tension de sortie : elle va « dériver » comme le fait un bateau entraîné par un courant.

★ conséquence de la tension de décalage

- ◇ Faisons le montage intégrateur en prenant en compte la tension de décalage.



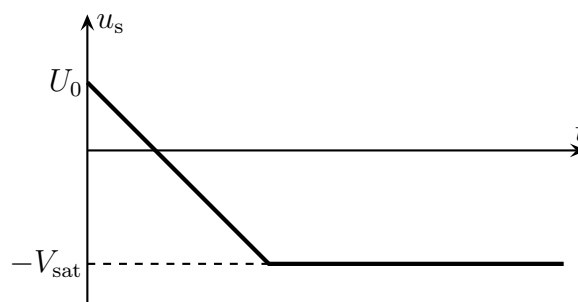
- ◇ Étant donné que l'entrée est nulle, la sortie devrait être nulle. Sauf que ...
- ◇ Analyse physique :
 - c'est un circuit à trois points de potentiels inconnus A , B et S de potentiels V_- , V_+ et $u_s(t)$
 - les résultats s'exprimeront en fonction de R , C et V_d .
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale
 - une loi de fonctionnement de l'AO, une loi des nœuds en terme de potentiels en A et la loi constitutive du générateur V_d
- ◇ La loi constitutive du générateur V_d donne :

$$0 - V_+ = V_d \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = -V_d$$

- ◇ Comme l'AO idéal est en régime linéaire, nous avons $V_+ = V_-$ et donc $V_- = -V_d$.
- ◇ Écrivons maintenant la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse de l'AO sans oublier que $V_- = -V_d$:

$$\frac{0 - (-V_d)}{R} + C \frac{d}{dt}(u_s(t) - (-V_d)) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} = -\frac{V_d}{RC} \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) = -\frac{V_d}{RC} t + U_0$$

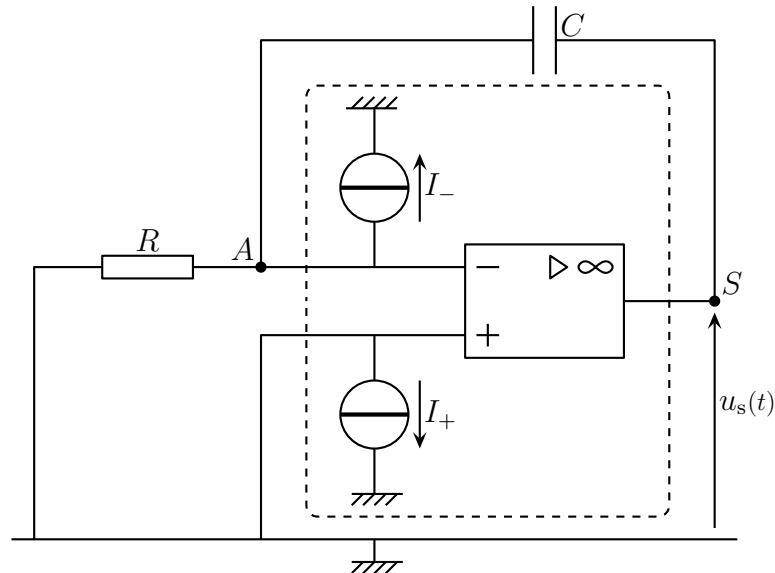
- ◇ Graphiquement cela donne la représentation ci-dessous.



- ◇ Il arrivera forcément un instant où la tension atteindra $-V_{\text{sat}}$ et l'AO fonctionnera alors en régime non linéaire.
- ◇ Remarquons qu'ici l'AO réel est en régime linéaire et qu'entre ses bornes la tension ε' vaut $\varepsilon' = 0 - V_- = +V_d \neq 0$.

★ conséquence des courants de polarisation

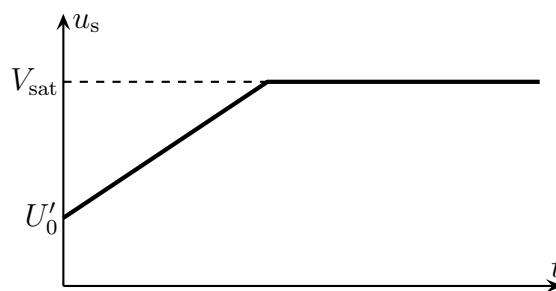
- ◇ Considérons le montage intégrateur en prenant en compte uniquement les courants de polarisation.



- ◇ Étant donné que l'entrée est nulle, la sortie devrait être nulle. Sauf que ...
- ◇ Analyse physique :
 - c'est un circuit à 2 points de potentiels inconnus A et S de potentiels V_- et $u_s(t)$
 - les résultats s'exprimeront en fonction de R , C , I_- et I_+
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale
 - une loi de fonctionnement de l'AO, une loi des nœuds en terme de potentiels en A et ça ira
- ◇ Comme l'AO idéal est en régime linéaire, nous avons $V_+ = V_-$ et donc $V_- = 0$.
- ◇ Écrivons maintenant la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse de l'AO sans oublier que $V_- = 0$:

$$\frac{0 - 0}{R} + C \frac{d}{dt}(u_s(t) - 0) - I_- = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} = +\frac{I_-}{C} \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) = \frac{I_-}{C} t + U'_0$$

- ◇ Graphiquement cela donne la représentation ci-dessous.



- ◇ Il arrivera forcément un instant où la tension atteindra V_{sat} et l'AO fonctionnera alors en régime non linéaire.

★ rassemblement et conclusion

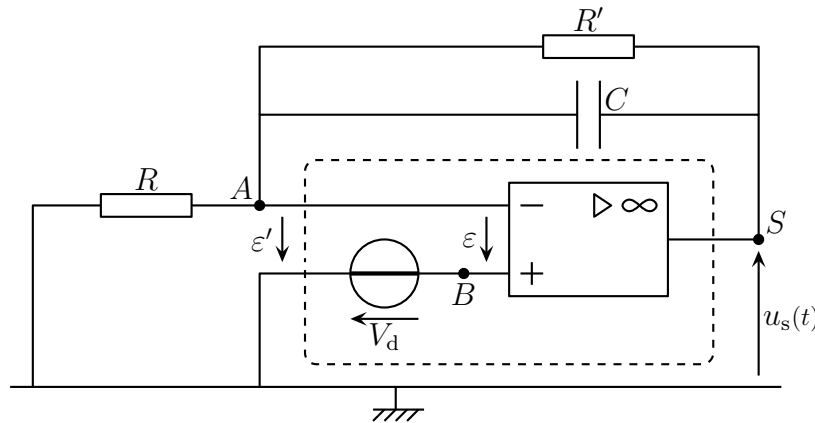
- ◇ L'erreur totale s'écrit donc $u_s = U_0'' + \left(\frac{I_-}{C} - \frac{V_d}{RC} \right) t$.
- ◇ Comme il n'y a aucune raison pour que le terme d'erreur s'annule parfaitement, l'erreur est telle que l'AO va lentement voir sa sortie diverger vers $\pm V_{\text{sat}}$. À partir de ce moment là il fonctionnera en régime non linéaire et sera inutilisable en tant qu'intégrateur.
- ◇ Pour un AO $\mu A741$ cela peut prendre entre une fraction de seconde et une dizaine de secondes. Pour un TL081, il n'est pas rare que les défauts mettent plusieurs minutes à faire complètement diverger l'AO.

II.3.ii – mais ça se limite

- ◇ En fait il suffit de mettre un résistor de résistance R' en parallèle du condensateur pour que l'effet de dérive n'existe plus.

★ conséquence de la tension de décalage

- ◇ Faisons le montage intégrateur corrigé.



- ◇ Analyse physique :
 - c'est un circuit à trois points de potentiels inconnus A , B et S de potentiels V_- , V_+ et $u_s(t)$
 - les résultats s'exprimeront en fonction de R , C et V_d .
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale
 - une loi de fonctionnement de l'AO, une loi des nœuds en terme de potentiels en A et la loi constitutive du générateur V_d
- ◇ La loi constitutive du générateur V_d donne :

$$0 - V_+ = V_d \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = -V_d$$

- ◇ Comme l'AO idéal est en régime linéaire, nous avons $V_+ = V_-$ et donc $V_- = -V_d$.
- ◇ Écrivons maintenant la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse de l'AO sans oublier que $V_- = -V_d$:

$$\frac{0 - (-V_d)}{R} + C \frac{d}{dt}(u_s(t) - (-V_d)) + \frac{u_s(t) - (-V_d)}{R'} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \frac{1}{R' C} u_s(t) = -\frac{V_d}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

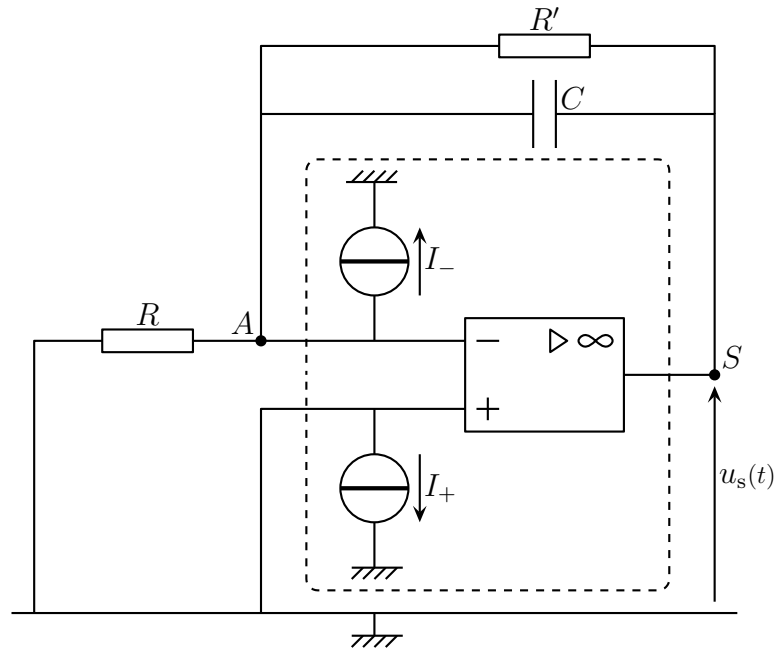
- ◇ C'est une équation différentielle dont la solution peut s'écrire directement :

$$u_s(t) = U_0 e^{-t/(R' C)} - \left(1 + \frac{R'}{R}\right) V_d$$

- ◇ Au bout de longtemps, l'erreur se stabilisera à $-\left(1 + \frac{R'}{R}\right) V_d$ ce qui n'est certes pas nul mais en tout cas limité. L'effet de dérive est contrôlé!

★ conséquence des courants de polarisation

- ◇ Considérons le montage intégrateur en prenant en compte uniquement les courants de polarisation.



- ◇ Analyse physique :
- c'est un circuit à 2 points de potentiels inconnus A et S de potentiels V_- et $u_s(t)$
 - les résultats s'exprimeront en fonction de R , C , I_- et I_+
- ◇ Analyse technique :
- approche nodale
 - une loi de fonctionnement de l'AO, une loi des nœuds en terme de potentiels en A et ça ira
- ◇ Comme l'AO idéal est en régime linéaire, nous avons $V_+ = V_-$ et donc $V_- = 0$.
- ◇ Écrivons maintenant la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse de l'AO sans oublier que $V_- = 0$:

$$\frac{0 - 0}{R} + C \frac{d}{dt}(u_s(t) - 0) + \frac{u_s(t) - 0}{R'} - I_- = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \frac{1}{R' C} u_s(t) = + \frac{I_-}{C}$$

- ◇ Là aussi nous pouvons écrire la solution directement : $u_s(t) = U'_0 e^{-t/(R' C)} + R' I_-$

★ cohérence des résultats

- ◇ Lorsqu'il n'y avait pas de résistance R' cela signifiait que $R' \rightarrow \infty$.
- ◇ Nous pouvons alors voir que les erreurs associées :
- $R' I_-$ devient infinie
 - $-\left(1 + \frac{R'}{R}\right) V_d$ devient infinie

→ et que le régime permanent n'est jamais atteint puisque la constante de temps $R' C$ devient infinie

II.3.iii – quid du caractère intégrateur ?

- ◇ L'effet de dérive est désormais limité, c'est une bonne chose, mais le circuit a changé et il faut s'assurer qu'il remplisse encore bien son rôle à savoir intégrer la tension d'entrée.
- ◇ Pour cela, il faut que l'effet de R' soit le plus limité possible.
- ◇ Dans le cas idéal, R' doit être infini, *ie.* doit se comporter comme un circuit ouvert. Il faut donc vérifier que le courant qui le traverse soit le plus faible possible.
- ◇ En fait il faut que le courant soit négligeable devant celui traversant le condensateur : $|i_C(t)| \gg |i_{R'}(t)|$.
- ◇ En ordre de grandeur cela donne, en notant $u(t)$ la tension commune à R' et C et T la durée caractéristique du signal :

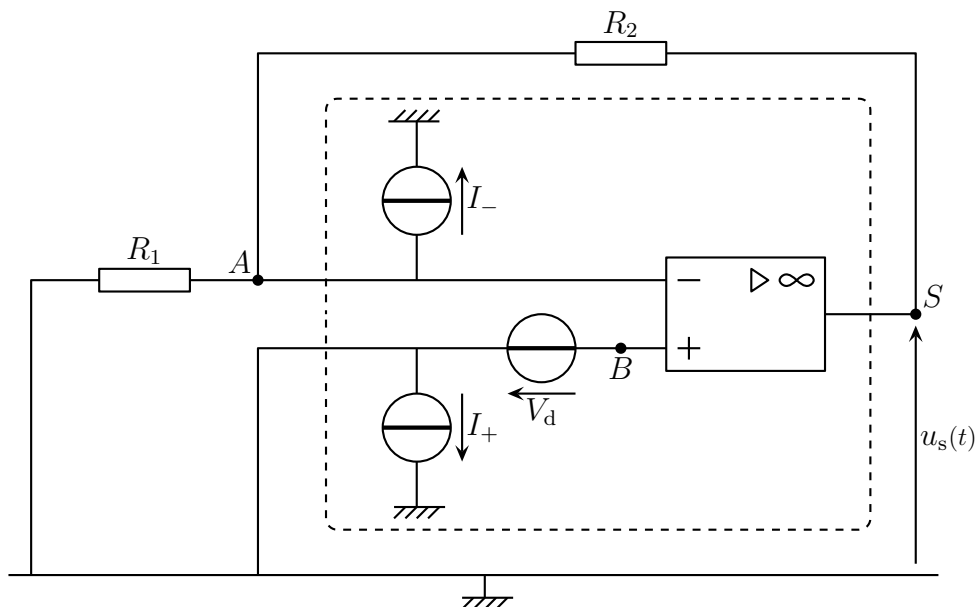
$$\left\{ \begin{array}{l} i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} \longrightarrow i_C \sim C \frac{U_0}{T} \\ i_{R'}(t) = \frac{u(t)}{R'} \longrightarrow i_{R'} \sim C \frac{U_0}{R'} \end{array} \right. \rightsquigarrow C \frac{U_0}{T} \gg \frac{U_0}{R'} \rightsquigarrow T \ll R' C$$

- ◇ Finalement le circuit conserve son caractère intégrateur lorsque la durée caractéristique du signal est très petite devant $R' C$, *ie.* lorsque le montage est utilisé en hautes fréquences.

II.4 – Amplificateur inverseur

II.4.i – l'erreur commise ...

- ◇ Considérons le montage amplificateur inverseur ci-dessous où seuls sont pris en compte les défauts de tension de décalage et de courant de polarisation.



- ◇ Normalement, la tension d'entrée étant nulle la sortie devrait être nulle. Sauf que ...
- ◇ Analyse physique :
 - c'est un montage linéaire (il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse)
 - c'est un montage à trois nœuds de potentiels inconnus A , B et S

- les résultats dépendront de R_1 , R_2 , I_- , I_+ , V_d
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale (il y a un AO) avec trois inconnues
 - une loi de fonctionnement de l'AO, une loi des nœuds en terme de potentiel en A et la loi constitutive du générateur en B
- ◇ La loi constitutive du générateur donne :

$$0 - V_+ = V_d \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = -V_d$$

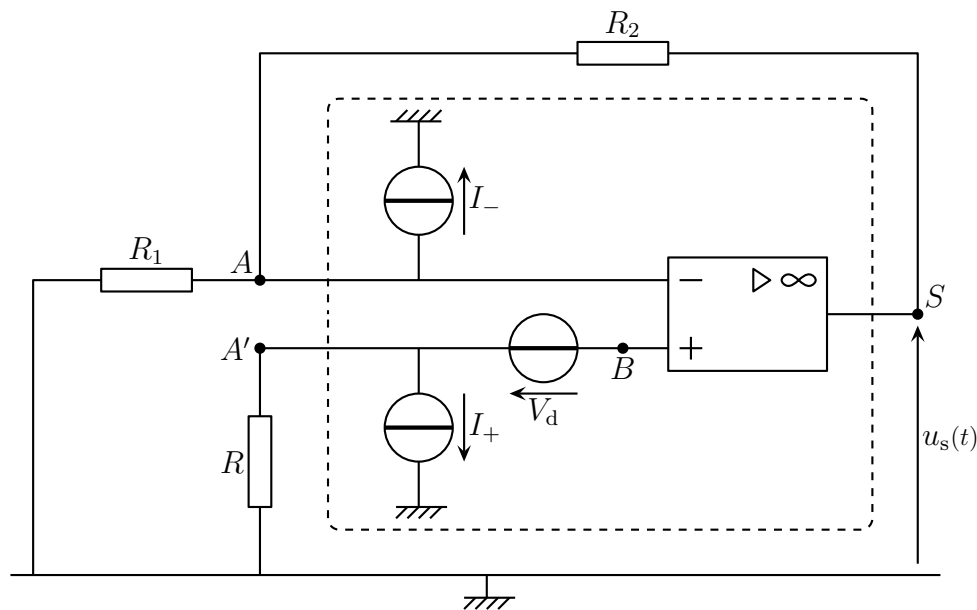
- ◇ Comme l'AO idéal fonctionne en régime linéaire, nous avons $V_- = V_+ = -V_d$.
- ◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_- = -V_d$:

$$\frac{0 - (-V_d)}{R_1} + \frac{u_s(t) - (-V_d)}{R_2} - I_- = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s = R_2 I_- - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_d$$

- ◇ Ce n'est pas une erreur nulle ...

II.4.ii – ... s'annule en partie

- ◇ Rajoutons un résistor de résistance R à un endroit *a priori* inutile.



- ◇ Analyse physique :
 - c'est un montage linéaire (il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse)
 - c'est un montage à quatre nœuds de potentiels inconnus A , A' , B et S
 - les résultats dépendront de R_1 , R_2 , R , I_- , I_+ , V_d
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale (il y a un AO) avec quatre inconnues
 - une loi de fonctionnement de l'AO, deux loi des nœuds en terme de potentiel en A et A' et la loi constitutive du générateur en B
- ◇ La loi des nœuds en terme de potentiel en A' donne :

$$\frac{0 - V_{A'}}{R} - I_+ = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_{A'} = -R I_+$$

- ◇ La loi constitutive du générateur donne :

$$V_{A'} - V_+ = V_d \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = -R I_+ - V_d$$

◇ Comme l'AO idéal fonctionne en régime linéaire, nous avons $V_- = V_+ = -V_d - R I_+$.

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A sans oublier que $V_- = -V_d$:

$$\frac{0 - (-V_d - R I_+)}{R_1} + \frac{u_s(t) - (-V_d - R I_+)}{R_2} - I_- = 0 \rightsquigarrow u_s = R_2 I_- - \left(R + \frac{R R_2}{R_1}\right) I_+ - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_d$$

◇ Sauf que les AO sont tels que $I_+ = I_-$, ce qui donne :

$$u_s = \left(R_2 - R - \frac{R R_2}{R_1}\right) I_+ - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_d$$

◇ Nous pouvons annuler l'erreur due aux courants de polarisation en ajustant R de telle sorte que :

$$R_2 - R - \frac{R R_2}{R_1} = 0 \rightsquigarrow R_2 = R \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \rightsquigarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

◇ C'est un résultat complètement non intuitif!

Amplificateur Opérationnel

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - rétroaction
 - tension de décalage, courants de polarisation
 - circuits linéaires

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les valeurs des défauts usuels (tension de décalage, courants de polarisation, coefficient d'amplification)

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - la loi de fonctionnement d'un AO idéal en régime linéaire et non linéaire
 - la modélisation d'un AO réel

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - le principe de fonctionnement d'un AO
 - les défauts et les limites de l'AO réel
 - l'effet de dérive du montage intégrateur ainsi que sa remédiation

★ les exemples fondamentaux

- ◇ Connaître :
 - les montages amplificateurs inverseur et non inverseur
 - les montages intégrateurs et dérivateurs
 - les montages sommateurs et suiveur

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir repérer les rétroactions et en déduire *a priori* le régime de fonctionnement d'un AO

Au niveau des savoir-faire

★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
 - le montage intégrateur modifié

Table des matières

I	L'amplificateur opérationnel idéal	1
I-1	Un nouveau composant	1
I-1.i	à quoi ça ressemble ?	1
I-1.ii	à quoi ça sert ?	1
I-1.iii	comment ça marche ?	2
I-2	L'AO en électrocinétique	2
I-2.i	schématisation	2
	grandeurs caractéristiques	2
I-2.ii	phénoménologie – loi de fonctionnement	3
	phénoménologie	3
	caractéristique	3
I-2.iii	idéalisations	4
I-3	Étudier un circuit avec un AO	5
I-3.i	étude des rétroactions	5
I-3.ii	conséquence des rétroactions	5
	cas le plus simple	5
	cas très souvent très simple	5
	cas non décidable cette année	6
I-3.iii	pourquoi privilégier l'approche nodale ?	6
I-4	Montages amplificateurs	6
I-4.i	amplificateur inverseur	6
	montage	6
	simplification fonctionnelle du montage	7
	approche maillière	7
I-4.ii	amplificateur non inverseur	8
	montage et analyse	8
	loi de fonctionnement	9
I-5	Avec un condensateur	9
I-5.i	montage intégrateur	9
	montage et analyse	9
	loi de fonctionnement	10
I-5.ii	montage dérivateur	10
	montage et analyse	10
	loi de fonctionnement	11
I-6	Et d'autres	11
I-6.i	sommateur	11
	montage et analyse	12
	loi de fonctionnement	12
I-6.ii	suiveur	12
	montage et analyse	12
	loi de fonctionnement et intérêt	13
II	L'amplificateur opérationnel réel	14
II-1	Quelques petites différences	14
II-1.i	limitations	14
II-1.ii	défauts	14
II-1.iii	modélisation	15
II-2	Une autre manière d'étudier un circuit contenant plusieurs sources	15

II.2.i	quand tout est linéaire, tout va bien	16
	théorème de superposition	16
	idée de démonstration	16
	interprétation	16
II.2.ii	idoinoton	17
	montage	17
	premier générateur	17
	deuxième générateur	17
	rassemblement et morale	18
II.2.iii	utilisation dans le cas d'un AO réel	18
II.3	Le montage intégrateur	18
II.3.i	en fait, il dérive	18
	conséquence de la tension de décalage	18
	conséquence des courants de polarisation	19
	rassemblement et conclusion	20
II.3.ii	mais ça se limite	21
	conséquence de la tension de décalage	21
	conséquence des courants de polarisation	22
	cohérence des résultats	22
II.3.iii	quid du caractère intégrateur ?	22
II.4	Amplificateur inverseur	23
II.4.i	l'erreur commise	23
II.4.ii	... s'annule en partie	24
	Analyse physique	26

Électrocinétique

Chapitre 5

Régimes sinusoïdaux forcés

Régimes sinusoïaux forcés

Le but de ce chapitre est d'adapter à l'étude de circuits électrocinétique le nouvel outil qu'est la notation complexe.

Nous admettrons le théorème suivant :

Dans un circuit constitué uniquement de composants linéaires, s'il y a un seul générateur (de tension ou de courant) sinusoïdal, alors **toutes** les grandeurs du circuit (tension et courant) :

- sont sinusoïdales
- ont la même pulsation que celle du générateur

Le cas où un circuit possède plusieurs générateurs sinusoïdaux sera vu dans le chapitre suivant.

I – La notation complexe en électrocinétique

I.1 – En électrocinétique, c'est comme en mécanique

I.1.i – rappels

La grandeur réelle $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ où :

- $I_m = |\underline{I}_m| = |\underline{i}(t)|$ est l'amplitude réelle;
- $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe;
- $\omega t + \varphi$ est la phase instantanée;
- φ est la phase à l'origine des dates.

- ◇ Pour passer de la notation réelle à la notation complexe, il suffit de transformer $\cos() \rightarrow e^0$.
- ◇ Pour passer de la notation complexe à la notation réelle, nous avons $i(t) = \Re(\underline{i}(t))$.
- ◇ La notation complexe n'est qu'une notation / une représentation : aucune tension, aucune intensité n'est complexe. C'est juste un outil très puissant pour étudier les régimes sinusoïaux forcés en régime permanent.
- ◇ Rappelons que l'énorme avantage de la notation complexe, c'est la dérivation :

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times j\omega$$

I.1.ii – quelques nouvelles définitions

Lorsque deux grandeurs s'écrivent $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ vaut $\varphi_u - \varphi_i$.

Le déphasage est choisi tel que sa valeur soit comprise entre $-\pi$ et π .

Le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est l'opposé de celui de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

- ◇ L'avantage c'est qu'il est possible de parler de déphasage ou de comparer les phases de n'importe quelles grandeurs.

Une grandeur sinusoïdale $\xi_1(t) = \xi_{1,m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ est dite en *avance de phase* sur $\xi_2(t) = \xi_{2,m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ lorsque $\varphi_1 > \varphi_2$ et en *retard de phase* lorsque $\varphi_1 < \varphi_2$.

- ◇ Donc bien évidemment si $\xi_1(t)$ est en avance de phase par rapport à $\xi_2(t)$, alors $\xi_2(t)$ est en retard de phase par rapport à $\xi_1(t)$.

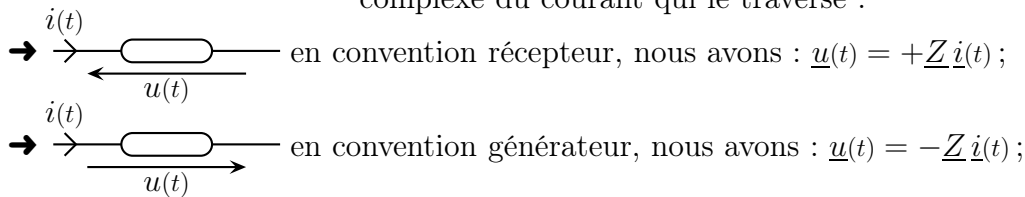
Deux grandeurs sinusoïdales $\xi_1(t) = \xi_{1,m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $\xi_2(t) = \xi_{2,m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ sont dites *en quadrature* lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$.

I.2 – Décrire le comportement des dipôles en RSF

I.2.i – notion d'impédance

★ définition

L'*impédance* d'un dipôle se note \underline{Z} et est le lien entre la tension complexe et l'intensité complexe du courant qui le traverse :



- ◇ D'un point de vue dimensionnel, cela donne :

$$[\underline{Z}] = \frac{[\underline{u}(t)]}{[\underline{i}(t)]} = \frac{(\text{V})}{(\text{A})}$$

et ainsi :

L'unité de l'impédance est le ohm (Ω), comme une résistance.

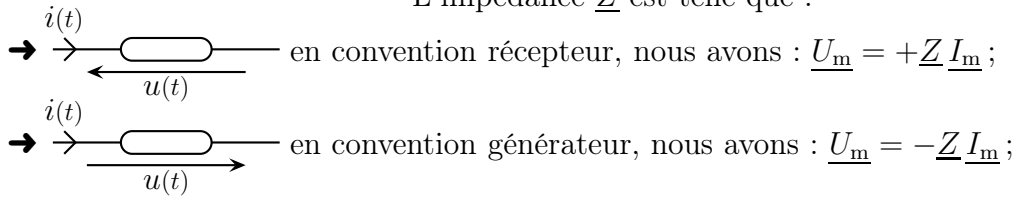
- ◇ En fait, l'impédance est analogue à une résistance, mais en version notation complexe.

Un dipôle d'impédance \underline{Z} impose un déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$ de la tension entre ses bornes par rapport à l'intensité du courant qui le traverse.

★ avec les amplitudes complexes

- ◇ Comme nous avons $\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$, nous obtenons :

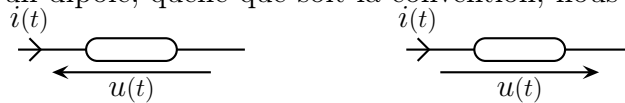
L'impédance \underline{Z} est telle que :



★ avec les amplitudes réelles

◇ Nous avons $U_m = |\underline{U}_m|$ et $I_m = |\underline{I}_m|$ et donc, en prenant le module des relations précédentes :

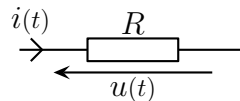
Pour un dipôle, quelle que soit la convention, nous avons :



$$U_m = Z I_m \quad \text{où} \quad Z = |\underline{Z}|$$

I.2.ii – impédance du résistor

◇ Considérons le résistor ci-dessous pour lequel $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.



◇ Écrivons la relation constitutive du résistor et passons la en complexe :

$$i(t) = +\frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{i}(t) = \frac{U_m}{R} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

◇ Ainsi : $\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = R$.

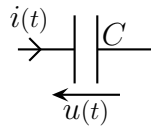
Pour un résistor, l'impédance vaut : $\underline{Z}_R = R$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un résistor est en phase avec l'intensité du courant qui le traverse.

I.2.iii – condensateur idéal

★ impédance

◇ Considérons le condensateur ci-dessous pour lequel $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.



✧ Écrivons la relation constitutive du condensateur et passons la en complexe :

$$i(t) = +C \frac{du(t)}{dt} = -C U_m \omega \sin(\omega t) = C U_m \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \underline{i}(t) = \underline{U}_m C \omega e^{j(\omega t + \pi/2)} = \underline{U}_m C \omega e^{j\omega t} \underbrace{e^{j\pi/2}}_{=j} = jC\omega \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

✧ Ainsi : $\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{1}{jC\omega}$.

Pour un condensateur idéal, l'impédance vaut : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en retard par rapport à l'intensité.

★ méthode rapide pour retrouver l'impédance

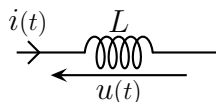
- ✧ D'après la relation constitutive du condensateur, nous avons $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$.
- ✧ Nous savons que la notation complexe de la dérivée n'est autre que la dérivée de la notation complexe, ainsi :

$$\underline{i}(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = C \underline{U}_m \frac{de^{j\omega t}}{dt} = jC\omega \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

✧ Le résultat est alors immédiat.

I.2.iv – bobine idéale

✧ Considérons la bobine ci-contre pour laquelle $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.



- ✧ D'après la relation constitutive de la bobine, nous avons $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$.
- ✧ En utilisant le fait que la notation complexe de la dérivée n'est autre que la dérivée de la notation complexe, cela donne :

$$\underline{u}(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = L \underline{I}_m \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underbrace{jL\omega \underline{I}_m}_{\underline{U}_m} e^{j\omega t} \rightsquigarrow \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = jL\omega$$

Pour une bobine idéale, l'impédance vaut : $\underline{Z}_L = j L \omega$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en avance par rapport à l'intensité.

I.2.v – cas général

★ impédance

L'impédance \underline{Z} d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Z} = R + j X \quad \text{où :}$$

- $R > 0$ est la *résistance* du dipôle et s'exprime en Ω ;
- $X \geq 0$ est la *réactance* du dipôle et s'exprime en Ω .

★ admittance

L'admittance complexe \underline{Y} d'un dipôle d'impédance \underline{Z} est définie par :

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}}$$

L'admittance \underline{Y} d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Y} = G + j B \quad \text{où :}$$

- $G > 0$ est la *conductance* du dipôle et s'exprime en S ;
- $B \geq 0$ est la *susceptance* du dipôle et s'exprime en S.

⚠ Attention à la définition de la conductance : $R \neq \frac{1}{G}$ car $\Re(\underline{Y}) \neq \frac{1}{\Re(\underline{Z})}$.

I.2.vi – comportement phénoménologique des dipôles

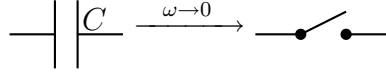
- ◇ En ce qui concerne les résistors, aucune surprise, cela reste un résistor, même en RSF.
- ◇ Regardons les impédance d'un condensateur et d'une bobine :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega} = -\frac{j}{C \omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_L = j L \omega$$

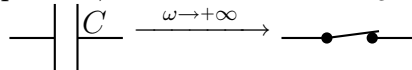
- ✧ Nous pouvons constater que la réactance d'un condensateur est négative alors que celle d'une bobine est positive : ils ont donc des comportements absolument pas analogues mais qui peuvent éventuellement se compenser à certaines fréquences particulières.

★ hautes et basses fréquences

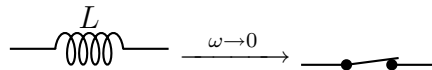
En basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ et ainsi $Z_C \rightarrow +\infty$ ou encore :



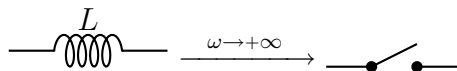
En hautes fréquences, $\omega \rightarrow +\infty$ et ainsi $Z_C \rightarrow 0$ ou encore :



En basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ et ainsi $Z_L \rightarrow 0$ ou encore :



En hautes fréquences, $\omega \rightarrow +\infty$ et ainsi $Z_L \rightarrow +\infty$ ou encore :



I.3 – Étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé

- ✧ Le but de ce paragraphe est de transcrire les lois physiques en notation complexe.

I.3.i – les lois

★ additivité des tensions

L'additivité des tensions $u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) = u(t)$ s'écrit en notation complexe :

→ $\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_n(t) = \underline{u}(t)$ en grandeurs instantanées

→ $\underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} + \dots + \underline{U}_{n,m} = \underline{U}_m$ en amplitudes complexes

- ✧ Nous avons :

$$\begin{aligned} \Re(\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_n(t)) &= \Re(\underline{u}_1(t)) + \Re(\underline{u}_2(t)) + \dots + \Re(\underline{u}_n(t)) \\ &= u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) \\ &= u(t) \quad \text{additivité des tensions} \\ &= \Re(\underline{u}(t)) \end{aligned}$$

- ✧ Et en remarquant que seules les parties réelles ont une signification physique, nous pouvons effectivement poser :

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \cdots + \underline{u}_n(t) = \underline{u}(t)$$

◇ Cela donne en termes d'amplitudes complexes :

$$\underline{U}_{1,m} e^{j\omega t} + \underline{U}_{2,m} e^{j\omega t} + \cdots + \underline{U}_{n,m} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} + \cdots + \underline{U}_{n,m} = \underline{U}_m$$

★ loi des nœuds

La loi des nœuds $i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = i(t)$ s'écrit en notation complexe :

→ $\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \cdots + \underline{i}_n(t) = \underline{i}(t)$ en grandeurs instantanées

→ $\underline{I}_{1,m} + \underline{I}_{2,m} + \cdots + \underline{I}_{n,m} = \underline{I}_m$ en amplitudes complexes

◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \Re(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \cdots + \underline{i}_n(t)) &= \Re(\underline{i}_1(t)) + \Re(\underline{i}_2(t)) + \cdots + \Re(\underline{i}_n(t)) \\ &= i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) \\ &= i(t) \quad \text{loi des nœuds} \\ &= \Re(\underline{i}(t)) \end{aligned}$$

◇ Et en remarquant que seules les parties réelles ont une signification physique, nous pouvons effectivement poser :

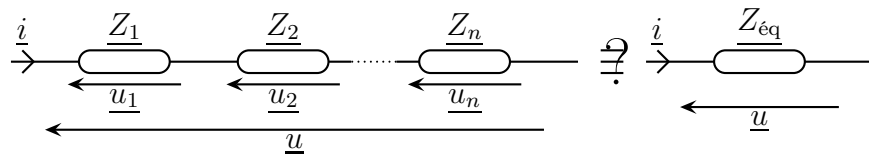
$$\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \cdots + \underline{i}_n(t) = \underline{i}(t)$$

◇ Cela donne :

$$\underline{I}_{1,m} e^{j\omega t} + \underline{I}_{2,m} e^{j\omega t} + \cdots + \underline{I}_{n,m} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{I}_{1,m} + \underline{I}_{2,m} + \cdots + \underline{I}_{n,m} = \underline{I}_m$$

I.3.ii – association de dipôles

★ loi d'association



◇ Les relations constitutives des dipôles donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1(t) = \underline{Z}_1 \underline{i}(t) \\ \underline{u}_2(t) = \underline{Z}_2 \underline{i}(t) \\ \vdots \\ \underline{u}_n(t) = \underline{Z}_n \underline{i}(t) \end{array} \right\} \rightarrow \sum \underline{u}_k(t) = \left(\sum \underline{Z}_k \right) \underline{i}(t)$$

◇ Finalement, avec ce qui précède, nous obtenons :

$$\underline{u}(t) = \left(\sum \underline{Z}_k \right) \underline{i}(t) = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{i}(t)$$

et donc :

L'association série de dipôles d'impédance \underline{Z}_k est équivalente à un dipôle unique d'impédance :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_n$$

🔍 retrouvailles

✧ Pour des résistances en série, la loi précédente donne directement :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

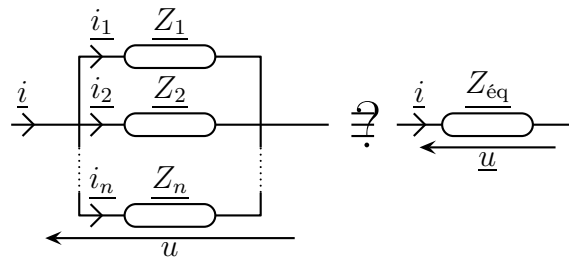
✧ Pour des bobines en série, la loi précédente donne :

$$\mathrm{j} L_{\text{éq}} \omega = \mathrm{j} L_1 \omega + \mathrm{j} L_2 \omega + \cdots + \mathrm{j} L_n \omega \longrightarrow L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

✧ Pour des condensateurs en série, la loi précédente donne :

$$\frac{1}{\mathrm{j} C_{\text{éq}} \omega} = \frac{1}{\mathrm{j} C_1 \omega} + \frac{1}{\mathrm{j} C_2 \omega} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{j} C_n \omega} \longrightarrow \frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

★ en parallèle



✧ Les relations constitutives des dipôles donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{i}_1(t) = \underline{Y}_1 \underline{u}(t) \\ \underline{i}_2(t) = \underline{Y}_2 \underline{u}(t) \\ \vdots \\ \underline{i}_n(t) = \underline{Y}_n \underline{u}(t) \end{array} \right\} \longrightarrow \sum \underline{i}_k(t) = \left(\sum \underline{Y}_k \right) \underline{u}(t)$$

✧ Finalement, avec ce qui précède, nous obtenons :

$$\underline{i}(t) = \left(\sum \underline{Y}_k \right) \underline{u}(t) = \underline{Y}_{\text{éq}} \underline{u}(t)$$

et donc :

L'association parallèle de dipôles d'admittance \underline{Y}_k est équivalente à un dipôle unique d'admittance :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \cdots + \underline{Y}_n$$

🔍 retrouvailles

✧ Pour des résistances en parallèle, la loi précédente donne directement :

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

✧ Pour des bobines en parallèle, la loi précédente donne :

$$\frac{1}{j L_{\text{eq}} \omega} = \frac{1}{j L_1 \omega} + \frac{1}{j L_2 \omega} + \cdots + \frac{1}{j L_n \omega} \longrightarrow \frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

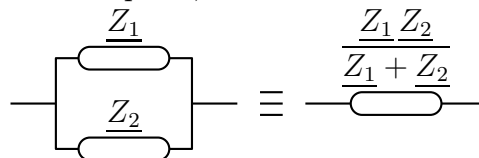
✧ Pour des condensateurs en parallèle, la loi précédente donne :

$$j C_{\text{eq}} \omega = j C_1 \omega + j C_2 \omega + \cdots + j C_n \omega \longrightarrow C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

🔍 cas particulier

✧ Comme $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$ nous obtenons :

Pour deux dipôles, nous avons directement :



I.3.iii – dorénavant

Toute loi peut s'écrire en notation complexe à condition de procéder aux changements :

- ➔ les grandeurs réelles \longrightarrow grandeurs complexes (en instantané ou en amplitude) ;
- ➔ résistance \longrightarrow impédances ;
- ➔ conductance \longrightarrow admittance.

✧ Il existe quelques fois (surtout en 2^e année) la convention :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

qui vérifie aussi $i(t) = \text{Re}(\underline{i}(t))$.

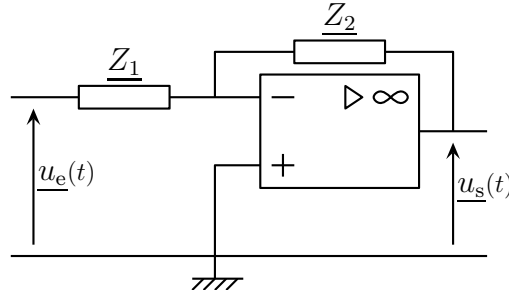
✧ Dans ce cas on a $\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times -j\omega$.

I.4 – Idoinotons

I.4.i – l'idoinoton 3 en 1

★ montage

◇ On considère le montage ci-dessous dans lequel l'AO est idéal.



◇ Analyse physique :

- il y a une seule rétroaction sur l'entrée inverseuse donc l'AO est en régime linéaire
- $\underline{u_s(t)}$ va être proportionnel à $\underline{u_e(t)}$

◇ Analyse technique :

- l'approche nodale puisque nous avons affaire avec un AO et qu'en plus nous cherchons un potentiel
- il y a deux potentiels inconnus donc deux lois

★ relation de fonctionnement

◇ L'AO est idéal et en régime linéaire donc $V_- = V_+$ et comme $V_+ = 0$, nous obtenons $V_- = 0$.

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse :

$$\frac{U_e - 0}{\underline{Z_1}} + \frac{U_s - 0}{\underline{Z_2}} - \underbrace{I_-}_{=0 \text{ (AO idéal)}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{U_s} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}} \times \underline{U_e}}$$

★ 1^{er} cas

◇ Prenons $\underline{Z_1} = R_1$ et $\underline{Z_2} = R_2$. Nous obtenons alors : $\underline{U_{s,m}} = -\frac{R_2}{R_1} \underline{U_{e,m}}$ ou encore, en notation réelle :

$$u_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_e(t)$$

◇ Il s'agit du montage amplificateur inverseur.

★ 2^e cas

◇ Prenons $\underline{Z_1} = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z_2} = R$. Nous obtenons alors : $\underline{U_{s,m}} = -jRC\omega \underline{U_{e,m}}$ ou encore, en notation réelle :

$$u_s(t) = -RC \frac{du_e(t)}{dt}$$

◇ Il s'agit du montage dérivateur.

★ 3^e cas

◇ Prenons $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$. Nous obtenons alors : $\underline{U}_{s,m} = -\frac{\underline{U}_{e,m}}{jRC\omega}$ d'où $\underline{U}_{e,m} = -jRC\omega \underline{U}_{s,m}$ ou encore, en notation réelle :

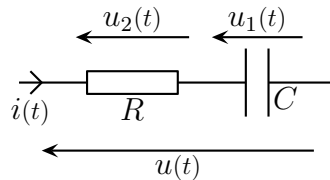
$$u_e(t) = -RC \frac{du_s(t)}{dt}$$

◇ Il s'agit du montage intégrateur.

☛ *Remarque* : lorsque $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Il n'y a donc plus de rétroaction sur l'entrée inverseuse et l'AO fonctionne donc en régime de saturation. Cela justifie l'effet de dérive dû à des défauts constant (*ie.* de pulsation nulle).

I.4.ii – association R, C en série

◇ Considérons la portion de circuit ci-dessous pour laquelle nous savons que $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et cherchons la tension à ses bornes sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.



◇ Avec la notation complexe, cela donne :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$$

◇ L'additivité des tensions en complexe s'écrit :

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} = \frac{\underline{I}_m}{jC\omega} + R \underline{I}_m = \left(\frac{1}{jC\omega} + R \right) \underline{I}_m$$


◇ Ainsi :

$$\begin{aligned} U_m &= |\underline{U}_m| = \left| \left(\frac{1}{jC\omega} + R \right) \underline{I}_m \right| \\ &= \left| \frac{1}{jC\omega} + R \right| I_m = \left| R - \frac{j}{C\omega} \right| I_m \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{U_m = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \times I_m}$$

◇ Nous avons aussi :

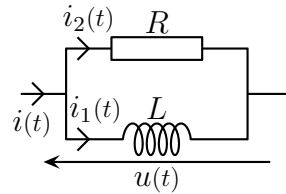
$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{U}_m) = \arg(\underline{I}_m) + \arg\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right) \\ &= 0 + \arg\left(R - \frac{j}{C\omega}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right) \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\varphi = -\arctan \frac{1}{RC\omega}}$$

Lorsque $X > 0$: $\arg(X + jY) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

 Il faudra faire attention lorsque les nombres complexes dont nous voulons l'argument auront une partie réelle négative ou (pire) une partie réelle qui change de signe.

I.4.iii – association R, L en parallèle

◇ Considérons la portion de circuit ci-contre pour laquelle nous savons que $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et cherchons l'intensité traversant l'ensemble sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



◇ Avec la notation complexe, cela donne :

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$$

◇ La loi des nœuds en complexe s'écrit :

$$\underline{I_m} = \underline{I_{1,m}} + \underline{I_{2,m}} = \frac{\underline{U_m}}{jL\omega} + \frac{\underline{U_m}}{R} = \left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) \underline{U_m}$$

◇ Ainsi, pour l'amplitude réelle :

$$\begin{aligned} I_m &= |\underline{I_m}| = \left| \left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) \underline{U_m} \right| \\ &= \left| \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right| I_m = \left| \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} \right| I_m \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I_m = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2 \omega^2}} \times U_m}$$

◇ Et pour le déphasage :

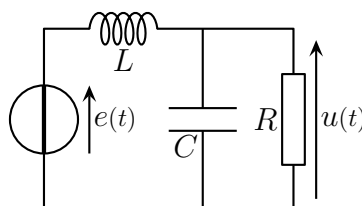
$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{I_m}) = \arg(\underline{U_m}) + \arg\left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}\right) \\ &= 0 + \arg\left(\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right) = \arctan\left(-\frac{R}{L\omega}\right) \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\varphi = -\arctan\frac{R}{L\omega}}$$

◇ Ici la partie réelle de $\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$ était bien positive donc pas de problème pour l'expression de l'argument.

I.4.iv – circuit R, L, C

★ circuit

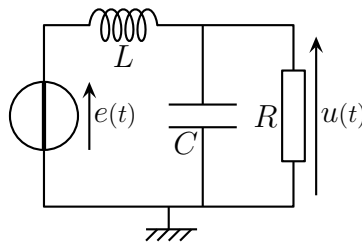
◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



- ◇ Cherchons $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Nous devons donc trouver les expressions de U_m et de φ en fonction de E_m , R , L , C et ω .
- ◇ Analyse physique :
- régime sinusoïdal forcé
 - les grandeurs dépendront de E_m , R , L , C et ω
 - il y a deux mailles et deux nœuds
- ◇ Analyse technique :
- notation complexe !
 - nous cherchons une tension, c'est l'approche nodale qu'il nous faut : une seule inconnue, une seule loi.

★ résolution normale

- ◇ Mettons la masse au « bon » endroit et écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels.



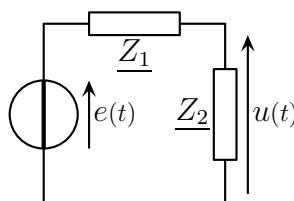
$$\frac{E - \underline{U_m}}{j L \omega} + \frac{0 - \underline{U_m}}{\frac{1}{j C \omega}} + \frac{0 - \underline{U_m}}{0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{E}{j L \omega} = \left(\frac{1}{j L \omega} + j C \omega + \frac{1}{R} \right)$$

◇ Et ainsi :
$$\underline{U_m} = \frac{E}{1 - L C \omega^2 + j \frac{L \omega}{R}}.$$

★ autre méthode

- ◇ Comme R et C sont en parallèle, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous où :

$$\underline{Z_1} = j L \omega \quad \text{et} \quad \underline{Z_2} = R // C = \frac{R \times \frac{1}{j C \omega}}{R + \frac{1}{j C \omega}} = \frac{R}{1 + j R C \omega}$$



- ◇ Comme $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ sont en série, nous pouvons appliquer un diviseur de tension et :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_m &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{E}_m \\
 &= \frac{R}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}} \times \underline{E}_m = \frac{R}{jL\omega(1 + jRC\omega) + R} \times \underline{E}_m \\
 &= \frac{R}{R - LC R \omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}_m = \frac{\underline{E}_m}{1 - LC \omega^2 + j \frac{L}{R} \omega}
 \end{aligned}$$

★ réponses

◇ Nous avons tout d'abord :

$$U_m = |\underline{U}_m| = \frac{E_m}{\left| 1 - LC \omega^2 + j \frac{L}{R} \omega \right|} \rightsquigarrow \boxed{U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - LC \omega^2)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}}}}$$

◇ Pour la phase cela donne :

$$\varphi = \arg(\underline{U}_m) = \arg(E_m) - \arg\left(1 - LC \omega^2 + j \frac{L}{R} \omega\right)$$

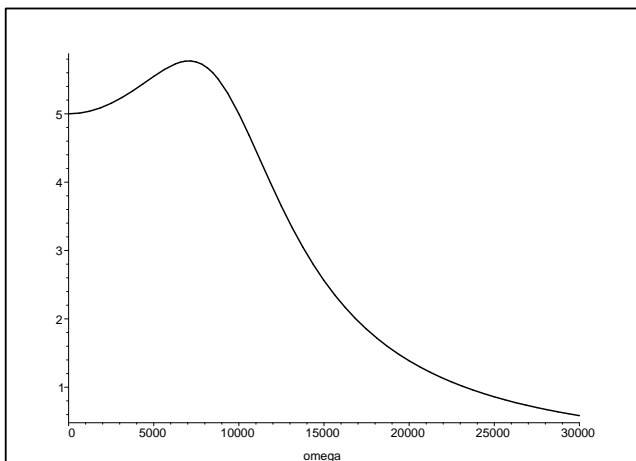
◇ Ici la partie réelle change de signe ! Pour écrire l'argument correctement, nous allons passer par une astuce : transformer la partie imaginaire en partie réelle en factorisant par j . Cela donne :

$$\varphi = 0 - \arg\left[j \left(\frac{L\omega}{R} + j(LC \omega^2 - 1)\right)\right] = -\arg j - \arg\left(\frac{L}{R} + j(LC \omega^2 - 1)\right)$$

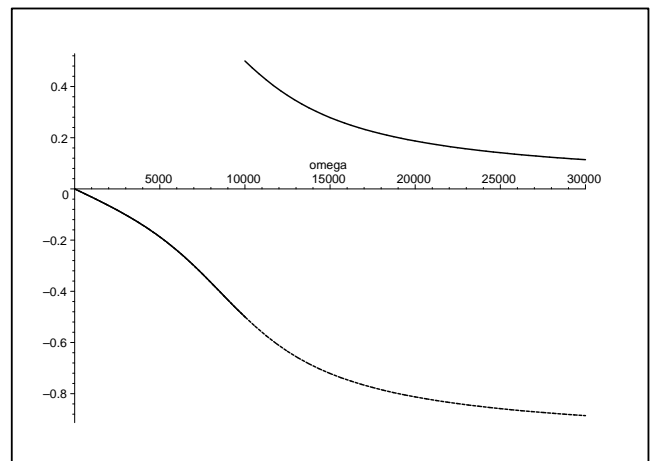
◇ Et ainsi : $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{R(LC \omega^2 - 1)}{L\omega}}$

★ représentation graphique

Graphique 1



Graphique 2



◇ Le graphique 1 représente U_m en fonction de ω pour :

- $R = 1000 \text{ k}\Omega$;
- $L = 0,10 \text{ H}$;

- $C = 100 \text{ nF}$;
- $E_m = 5,0 \text{ V}$.

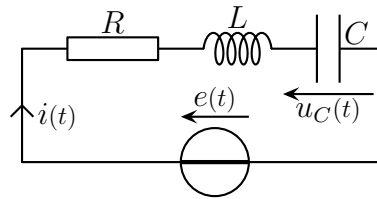
◇ Le graphique 2 représente φ en fonction de ω . La courbe en rouge représente $-\arctan \frac{L\omega}{R(LC\omega^2 - 1)}$.

II – Circuit R, L, C série en régime sinusoïdal forcé

II.1 – Dispositif

◇ Le générateur est sinusoïdal, ie. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et nous cherchons

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{et} \quad u_C(t) = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi_u)$$



◇ Analyse physique :

- c'est un circuit en régime sinusoïdal forcé
- il n'y a qu'une maille
- GP : R, L, C pour les composants et E_m et ω pour les contraintes
- comme il s'agit d'un circuit R, L, C série, les grandeurs caractéristiques $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

◇ Analyse physique :

- notation complexe à cause du RSF
- une seule maille donc approche maillère.

◇ Remarquons qu'avec le choix de $e(t)$ comme origine des phases, nous avons $\underline{E_m} = E_m e^{j0} = E_m$ et φ_u (resp. φ_i) représente le déphasage de $u_C(t)$ (resp. $i(t)$) par rapport à $e(t)$.

Pour un circuit en régime sinusoïdal forcé, le générateur est souvent celui qui sert de référence pour la phase, ie. :

- son déphasage à l'origine est nul
- son amplitude complexe est donc une amplitude réelle, notée sans barre

II.2 – Amplitudes complexes

II.2.i – pour l'intensité

◇ La loi de POUILLET en complexe donne :

$$\begin{aligned} \underline{I_m} &= \frac{E_m}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \times E_m \\ &= \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times \frac{E_m}{R} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times I_0 \end{aligned}$$

II.2.ii – pour la tension aux bornes du condensateur

◇ La loi constitutive du condensateur donne directement :

$$\underline{U_{C,m}} = \frac{\underline{I_m}}{j C \omega} = \frac{E_m}{1 - LC \omega^2 + j RC \omega}$$

II.2.iii – écriture canonique

◇ Introduisons les grandeurs caractéristiques du circuit R, L, C série :

→ la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

→ le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

◇ Nous avons alors : $RC = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times C = \frac{\sqrt{LC}}{Q} = \frac{1}{Q \omega_0}$.

★ pour l'intensité

◇ En remplaçant LC et RC par les expressions précédentes nous obtenons

$$\underline{I_m} = \frac{j \frac{\omega}{Q \omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} I_0$$

◇ Et en utilisant la pulsation réduite $x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{I_m} = \frac{j x}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \times \frac{I_0}{Q}$.

★ pour la tension

◇ Procédons de même :

$$\underline{U_{C,m}} = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = \left(\frac{E_m}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} = \underline{U_m} \right)$$

II.2.iv – analogie mécanique

◇ Nous avons déjà vu :

$$h \longleftrightarrow R \qquad m \longleftrightarrow L \qquad k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$$

◇ Maintenant nous avons en plus, grâce aux notations complexes :

$$\text{position} \longleftrightarrow u_C \qquad \text{et} \qquad \text{vitesse} \longleftrightarrow i$$

☛ *Remarque* : il est possible de définir une impédance mécanique $\underline{Z_{méca}} = \frac{\underline{X_m}}{\underline{V_m}} \rightsquigarrow \frac{\underline{F_m}}{\underline{V_m}}$ pour prolonger cette analogie (en général \underline{Z} est défini comme le rapport de deux grandeurs dont le produit est homogène à une puissance.)

II.3 – Courbe de résonance en tension

II.3.i – rappel

◇ Avec $\underline{U_{C,m}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ nous avons (résultats à savoir retrouver mais à ne pas connaître par cœur) :

→ une résonance en $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ pourvu que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

→ une valeur de $U_{\max} = \frac{Q E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ à la résonance.

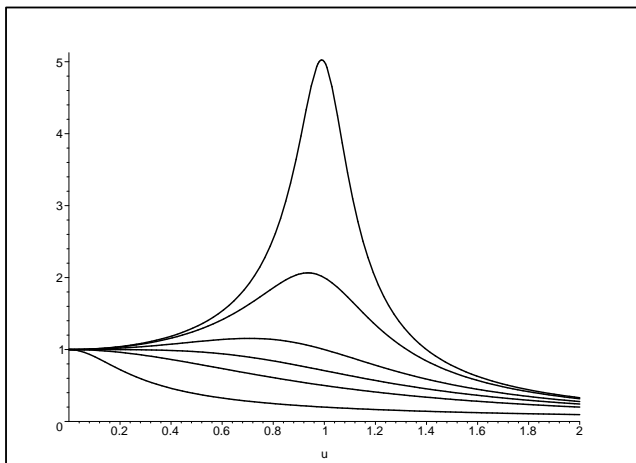
◇ Et pour $Q \gg 1$, ie. pour $Q > 5$ nous avons :

→ une résonance en $x_r = 1$;

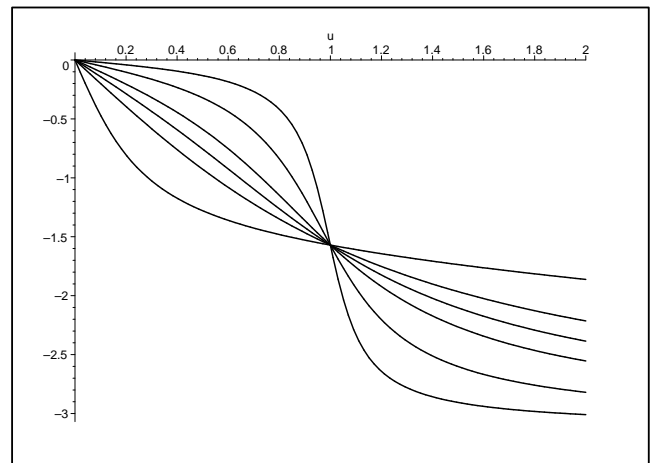
→ une valeur de $U_{\max} = Q E_m$ à la résonance.

★ tracés

Graphique 3



Graphique 4



◇ La résonance est aiguë pour $Q \gg 1$.

II.3.ii – bande passante

La *bande passante* est l'ensemble des fréquences (ou des pulsations) telle que la valeur intéressante soit au moins égal à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$.

La *fréquence (ou pulsation) de coupure* est une fréquence (ou pulsation) telle que la valeur intéressante soit exactement égale à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$, une fréquence de coupure est donc à la limite d'une bande passante.

◇ La raison du facteur $\sqrt{2}$ s'expliquera à la fin du chapitre.

◇ Ici la valeur intéressante est $U_{C,m}$ et nous connaissons déjà la valeur maximale possible, c'est $Q E_m$.

◇ Dans le cas où $Q \gg 1$, nous voyons graphiquement qu'il va y avoir deux valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles nous aurons :

$$U_{C,m}(x_1) = U_{C,m}(x_2) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

✧ L'équation à résoudre est donc :

$$U_{C,m}(x) = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{Q E_m}{\sqrt{2}}$$

✧ Cela donne :

$$(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} \quad \rightsquigarrow \quad x^4 + \underbrace{\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)}_{-x_1 x_2 \leq 0} x^2 + \underbrace{1 - \frac{2}{Q^2}}_{x_1 x_2 \geq 0}$$

✧ Nous pouvons déjà en déduire que les deux solutions sont de même signe et positives.

✧ Le discriminant vaut alors en tenant compte du fait que $\frac{1}{Q^4} \ll \frac{1}{Q^2}$:

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right) = 4 + \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} - 4 + \frac{8}{Q^2} \simeq \frac{4}{Q^2}$$

Cela donne, toujours avec $\frac{1}{Q^2} \ll \frac{1}{Q}$:

$$x_1^2 = \frac{2 - \frac{1}{Q^2} + \frac{2}{Q}}{2} \simeq 1 + \frac{1}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \simeq 1 + \frac{1}{2Q}$$

✧ De même :

$$x_2^2 = \frac{2 - \frac{1}{Q^2} - \frac{2}{Q}}{2} \simeq 1 - \frac{1}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2Q}$$

✧ En regroupant l'ensemble, nous avons :

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 x_1 - \omega_0 x_2 = \omega_0 \Delta x = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} - 1 + \frac{1}{2Q}\right) = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour la résonance en tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit R, L, C série, lorsque $Q \gg 1$, la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

✧ Il s'agit là d'une méthode simple pour mesurer graphiquement le facteur de qualité d'un dispositif.

II.4 – Courbe de résonance en intensité

II.4.i – rappel ?

◇ En mécanique, nous avons $\underline{V}_m = \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ et (résultats à savoir retrouver mais à ne pas connaître

par cœur) :

- le maximum était en $x_r = 1$;
- le maximum valait $V_{\max} = Q V_0$.

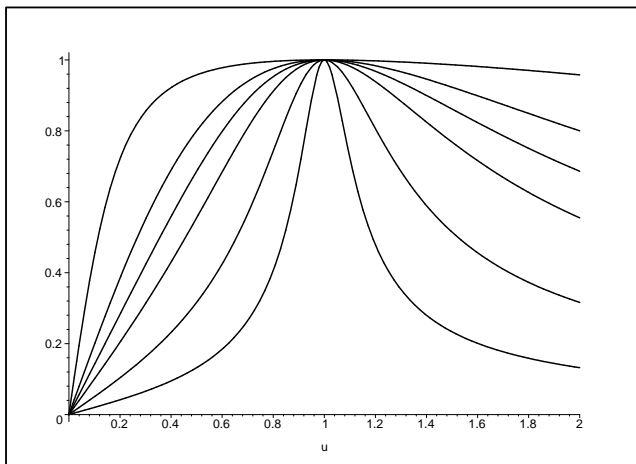
◇ Ici, comme c'est $\frac{I_0}{Q}$ qui joue le rôle de V_0 , nous aurons :

- un maximum en $x_r = 1$;
- de valeur I_0 .

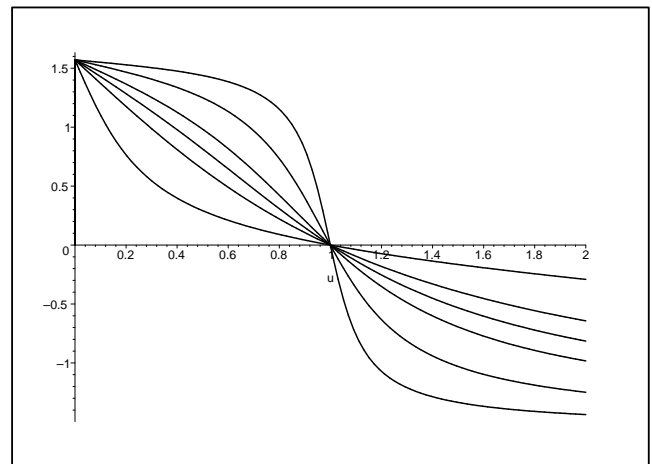
★ les tracés

◇ Cela change un tout petit peu.

Graphique 5



Graphique 6



★ interprétation de la résonance

◇ Nous pouvons constater qu'à la résonance, nous avons $I_m = \frac{E}{R}$ qui est un résultat surprenant étant donné qu'il ne dépend ni de L ni de C , comme s'ils n'étaient pas là.

◇ Réécrivons l'amplitude complexe de l'intensité :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

◇ Comme les réactances de la bobine et du condensateur sont opposées, elles peuvent se compenser et se compensent effectivement à la résonance :

$$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} \rightsquigarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

◇ C'est l'ensemble $L \oplus C$ qui se comporte comme un fil, certainement pas chaque dipôle pris séparément, comme le montre l'étude sur $U_{C,m}$.

II.4.ii – bande passante

- ✧ Les graphiques précédents nous incitent à chercher les pulsations réduites de coupure x_1 et x_2 telles que

$$I_m(x_1) = I_m(x_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

- ✧ Cela donne successivement :

$$\frac{i_0}{Q \sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad Q^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 1 = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

★ première méthode

- ✧ Et en posant $\varepsilon = \pm 1$ (ce qui permettra de résoudre tous les cas en une seule fois) :

$$\frac{1}{x} - x = \frac{\varepsilon}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + \frac{\varepsilon}{Q} - 1 = 0$$

- ✧ Calculons le discriminant $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$ et écrivons toutes les solutions :

$$x_c = \frac{-\frac{\varepsilon}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

- ✧ Gardons uniquement les solutions positives en remarquant que $\sqrt{\Delta} > \frac{1}{Q}$. Cela donne :

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

- ✧ En rassemblant le tout, nous obtenons :

$$\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \omega_0 (x_2 - x_1) = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour la résonance en intensité dans un circuit R, L, C série, quel que soit Q , la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

- ✧ Là aussi il s'agit d'un critère graphique permettant de mesurer expérimentalement Q .

★ deuxième méthode

- ✧ Soit x_{c1} une pulsation de coupure, ie. telle que $\left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$.

◇ Alors $x_{c2} = \frac{1}{x_{c1}}$ est aussi une pulsation de coupure. En effet :

$$\left(\frac{1}{x_{c2}} - x_{c2}\right)^2 = \left(x_{c1} - \frac{1}{x_{c1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

◇ Dans ces conditions, la bande passante vaut :

$$(x_{c2} - x_{c1})^2 = \left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \quad \rightsquigarrow \quad x_{c2} - x_{c1} = \frac{1}{Q}$$

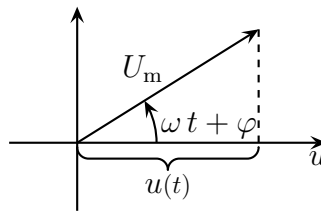
◇ Avec cette méthode, nous n'avons pas calculé x_{c1} et x_{c2} .

III – La construction de FRESNEL

III.1 – Une autre représentation des grandeurs sinusoïdales

III.1.i – présentation

◇ Cette représentation est basée sur la représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe, *ie.* on représente ces grandeurs (tension ou intensité) par des vecteurs tournants.



- ◇ L'axe des ordonnées n'a pas de nom : ça a la dimension d'une tension, mais ça n'a pas d'interprétation physique simple.
- ◇ Quand t évolue, le vecteur représentant le vecteur tension tourne à la vitesse angulaire ω .
- ◇ L'axe des abscisses est l'origine des phases.
- ◇ Comme les vecteurs tournent de manière synchrone, autant toujours les représenter à l'instant initial de manière à interpréter facilement les déphasages par rapport à la référence de phase.

Une grandeur sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ se représente par un vecteur de norme U_m et faisant avec l'axe des abscisses un angle φ .

III.1.ii – quand l'utiliser ?

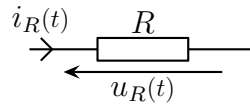
- ◇ Cette construction n'est ni plus ni moins que du calcul sur les complexes en version géométrique. Les résultats seront identiques mais la façon d'y parvenir sera plus visuelle.
- ◇ Cette approche est pratique quand toutes les grandeurs intéressantes pourront être sommées car cela reviendra à faire des additions vectorielles ce qui sera relativement simple. Cela implique :
 - si les grandeurs intéressantes sont les tensions, il faut que tous les dipôles soient en série
 - si les grandeurs intéressantes sont les intensités, il faut que tous les dipôles soient en parallèle

La représentation de FRESNEL est très utile pour les circuits simples : ceux à une maille ou à deux nœuds.

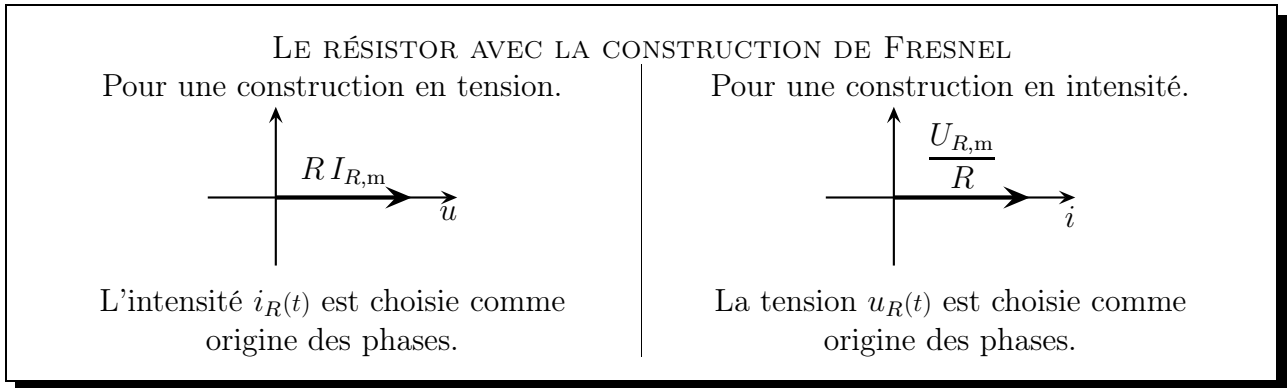
III.2 – Représentation de dipôles usuels

III.2.i – le résistor

✧ Pour un résistor, comme représenté ci-dessous, on a $\underline{u}_R(t) = R \underline{i}_R(t)$.

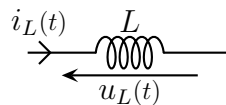


✧ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_R(t)) = \underbrace{\arg(R)}_{=0} + \arg(\underline{i}_R(t)) = \arg(\underline{i}_R(t))$.

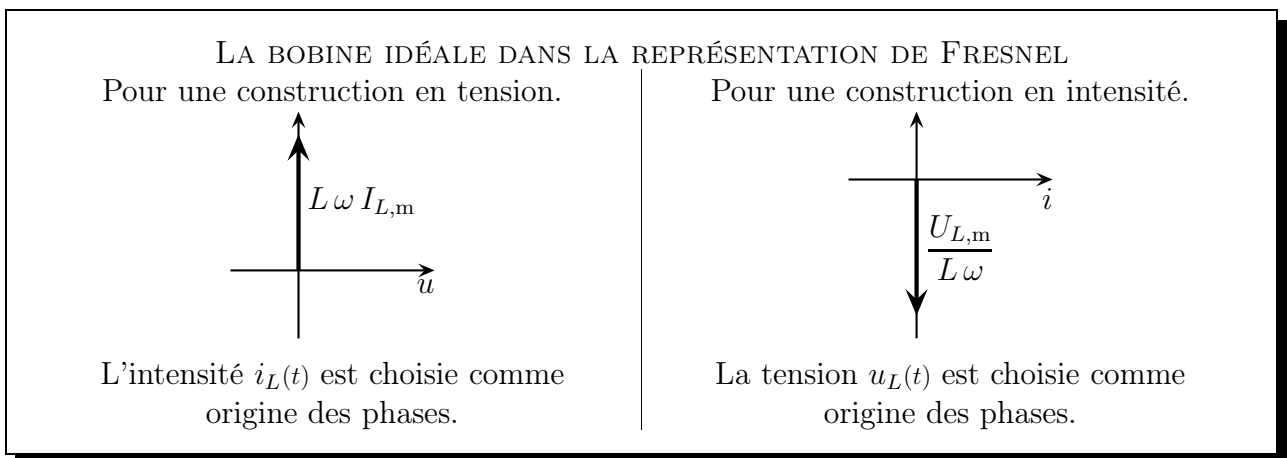


III.2.ii – la bobine idéale

✧ Pour une bobine, comme représenté ci-dessous, nous avons $\underline{u}_L(t) = j L \omega \underline{i}_L(t)$.

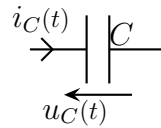


✧ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_L(t)) = \underbrace{\arg(j L \omega)}_{=\pi/2} + \arg(\underline{i}_L(t)) = \frac{\pi}{2} + \arg(\underline{i}_L(t))$



III.2.iii – le condensateur idéal

✧ Pour un condensateur, comme représenté ci-dessous, nous avons $\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{i}_C(t)}{j C \omega}$.



◇ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_C(t)) = \arg(\underline{i}_C(t)) - \underbrace{\arg(j C \omega)}_{=\pi/2} = \arg(\underline{i}_L(t)) - \frac{\pi}{2}$

LE CONDENSATEUR IDÉAL DANS LA CONSTRUCTION DE FRESNEL	
<p>Pour une construction en tension.</p> <p>L'intensité $i_C(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>	<p>Pour une construction en intensité.</p> <p>La tension $u_C(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>

III.2.iv – retrouver le comportement en construction de FRESNEL

- ◇ Il est trop lourd, inutile et dangereux d'apprendre par cœur les comportements des différents dipôles en construction de FRESNEL.
- ◇ Mais comme il faut les connaître, il ne reste plus qu'à savoir les retrouver très vite.
- ◇ Pour cela le plus simple est de repartir de l'expression de l'impédance complexe \underline{Z} qui introduit un déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$ à la tension par rapport à l'intensité.
- ◇ Ensuite, connaissant $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = j L \omega$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega}$, il est facile de tout retrouver.

III.2.v – dipôle quelconque

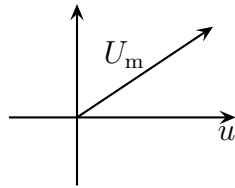
★ caractère inductif

Un dipôle possède un *caractère inductif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme une bobine, *ie.* quand :

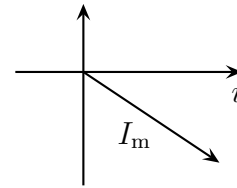
- $\underline{Z} = R = j X$ avec $X > 0$;
- en convention récepteur, la tension à ses bornes est en avance par rapport à l'intensité qui le traverse.

Un dipôle inductif dans la construction de FRESNEL

Pour une construction en tension.

L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.

Pour une construction en intensité.

La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.

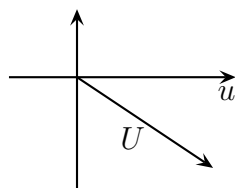
★ caractère capacitif

Un dipôle possède un *caractère capacitif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme un condensateur, *ie.* lorsque :

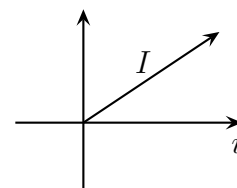
- $Z = R = jX$ avec $X < 0$;
- en convention récepteur, la tension à ses bornes est en retard par rapport à l'intensité qui le traverse.

UN DIPÔLE CAPACITIF DANS LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

Pour une construction en tension.

L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.

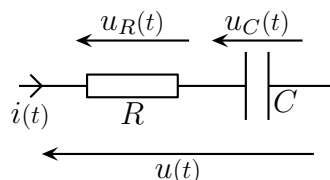
Pour une construction en intensité.

La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.

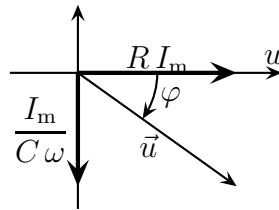
III.3 – Association de dipôles

III.3.i – association série

◇ Reprenons l'exemple précédent de la première partie.



- ◇ Ici, comme les deux dipôles sont en série, nous allons utiliser la construction de FRESNEL avec $i(t)$ comme origine des phases puisque c'est la grandeur commune aux deux dipôles.
- ◇ Nous avons donc $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.
- ◇ La construction de FRESNEL de l'association est représentée ci-dessous.



◇ Pythagore donne alors $U_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2 \omega^2}} = I_m \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$.

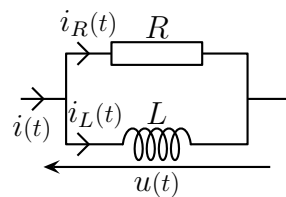
◇ De même la trigonométrie donne :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{I_m}{C \omega}}{R I_m} = -\frac{1}{R C \omega} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{R C \omega}\right)$$

◇ Ce sont bien les résultats trouvés précédemment.

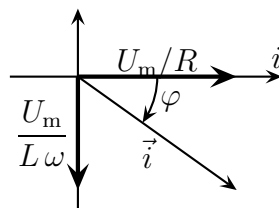
III.3.ii – association parallèle

◇ Reprenons l'exemple de la première partie.



◇ Comme $u(t)$ est la grandeur commune aux deux dipôles, nous allons la choisir comme origine des phases. Nous avons ainsi $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

◇ La construction de FRESNEL de l'association est représentée ci-dessous.



◇ Pythagore donne alors $I_m = \sqrt{\frac{U_m^2}{R^2} + \frac{U_m^2}{L^2 \omega^2}} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2 \omega^2}}$.

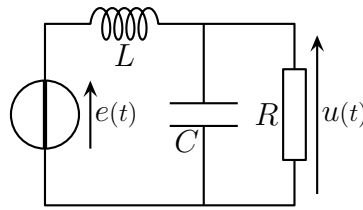
◇ De même la trigonométrie donne :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{U_m}{L \omega}}{\frac{U_m}{R}} = -\frac{R}{L \omega} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{R}{L \omega}\right)$$

◇ Ce sont bien les résultats que nous avons trouvés avec la notation complexe.

III.3.iii – idoinoton

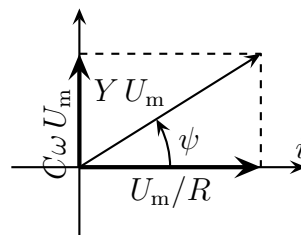
✧ Reprenons l'idoinoton de la première partie dans lequel nous avons $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



- ✧ Là aussi, nous allons chercher $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec U_m et φ à exprimer en fonction de E_m , R , L , C et ω .
- ✧ Tous les dipôles ne sont pas en série ou en parallèle. Il nous faut d'abord trouver comment se représente l'association parallèle $C \parallel R$ en construction de FRESNEL avant de l'associer en série avec la bobine.

★ d'abord l'association $R, C \dots$

✧ Représentons le comportement du dipôle R, C avec la construction de FRESNEL.



- ✧ Il s'agit d'une association parallèle, nous allons donc prendre la tension commune comme origine des phases.
- ✧ L'intensité qui passe alors dans ce dipôle est telle que, avec Pythagore :

$$I_{d,m} = \sqrt{\frac{U_m^2}{R^2} + C^2 \omega^2 U_m^2} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2}$$

✧ D'après la définition de l'admittance nous avons $I_{d,m} = Y U_m$ et avec $Y = \frac{1}{Z}$ nous obtenons :

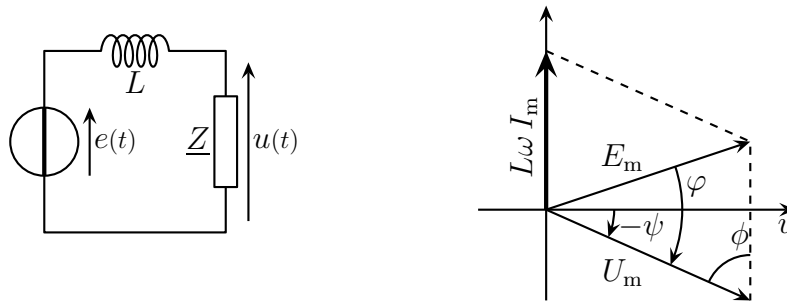
$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

✧ De plus, la géométrie du triangle rectangle donne :

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{C \omega U_m}{U_m/R} = R C \omega \\ \sin \psi &= \frac{C \omega U_m}{Y U_m} = Z C \omega = \frac{R C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \cos \psi &= \frac{U_m/R}{Y U_m} = \frac{Z}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \end{aligned}$$

★ ... ensuite on cherche U_m ...

◇ Le montage initial est donc équivalent au circuit ci-dessous.



◇ L'intensité du courant étant identique pour les trois dipôle, c'est elle que nous choisirons comme origine des phases. Il faut donc faire attention à la représentation de \vec{e} et aussi à l'interprétation géométrique de φ .

◇ Pythagore donne donc :

$$\begin{aligned}
 E_m^2 &= (Z I_m \cos \psi)^2 + (Z I_m \sin \psi - L \omega I_m)^2 \\
 &= U_m^2 \cos^2 \psi + U_m^2 \sin^2 \psi + L^2 \omega^2 I_m^2 - 2 L \omega I_m U_m \sin \psi \\
 &= U_m^2 + L^2 \omega^2 \frac{U_m^2}{Z^2} - 2 L \omega \frac{I_m^2}{Z} Z C \omega \\
 &= U_m^2 \times \left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} (1 + R^2 C^2 \omega^2) - 2 L C \omega^2 \right) \\
 &= U_m^2 \times \left(1 + L^2 C^2 \omega^4 - 2 L C \omega^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} \right) \\
 &= U_m^2 \times \left((1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

◇ Nous avons donc $U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R} \right)^2}} \stackrel{\text{not}}{=} \xi E_m$.

★ ... et enfin φ

◇ Pour déterminer $\tan \varphi$, nous allons calculer $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ grâce à deux relations géométriques.

◇ L'additivité des tensions donne : $u_L(t) = e(t) - u(t)$, ce qui s'écrit, pour la représentation de FRESNEL :

$$\vec{u}_L = \vec{e} - \vec{u}$$

◇ En élevant au carré :

$$\vec{u}_L^2 = (\vec{e} - \vec{u})^2 \quad \rightsquigarrow \quad U_{L,m}^2 = E_m^2 + U_m^2 - 2 E_m U_m \cos \varphi$$

et avec $U_{L,m} = L \omega I_m$ et $I_m = \frac{U_m}{Z}$ nous obtenons :

$$\cos \varphi = \frac{E_m^2 + U_m^2 - L^2 \omega^2 I_m^2}{2 E_m U_m} = \frac{E_m^2 + U_m^2 - \frac{L^2 \omega^2 U_m^2}{Z^2}}{2 E_m U_m} \rightsquigarrow \cos \varphi = \frac{1 + \xi^2 \left(1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2}\right)}{2 \xi}$$

◇ Les relations géométriques du triangle donnent : $\frac{\sin \phi}{E_m} = \frac{\sin(-\varphi)}{L \omega I_m}$.

or $\sin \phi = \cos \psi = \frac{Z}{R}$, ce qui amène à :

$$\frac{Z}{R E_m} = \frac{\sin(-\varphi)}{L \omega I_m} \rightsquigarrow \sin \varphi = -\frac{Z L \omega I_m}{R I_m E_m} = -\frac{L \omega U_m}{R E_m} = -\frac{L \omega}{R} \xi$$

◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{L \omega}{R} \times \xi \times \frac{2 \xi}{1 + \xi^2 \left(1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2}\right)} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2} + \frac{1}{\xi^2}} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{R^2} (1 + R^2 C^2 \omega^2) + (1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R}\right)^2} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{R^2} - L^2 C^2 \omega^4 + 1 + L^2 C^2 \omega^4 - 2 L C \omega^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times \frac{2}{2 - 2 L C \omega^2} = -\frac{L \omega}{R (1 - L C \omega^2)} \rightsquigarrow \varphi = -\arctan \left(\frac{L \omega}{R (1 - L C \omega^2)} \right) \end{aligned}$$

◇ De plus avec $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, nous trouvons bien le résultat :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{R (1 - L C \omega^2)}{L \omega} \right)$$

◇ Nous constatons aisément que la méthode avec les complexes est bien plus facile que la méthode avec FRESNEL lors d'association quelconque. En revanche, s'il n'y a qu'un seul type d'association (tous les dipôles sont en série ou tous les dipôles sont en parallèle), FRESNEL peut être très rapide.

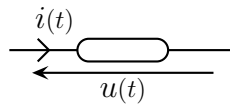
IV – Aspect énergétique

IV.1 – Puissance moyenne consommée par un dipôle

IV.1.i – en terme de puissance moyenne

★ analyse du problème

◇ Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur.

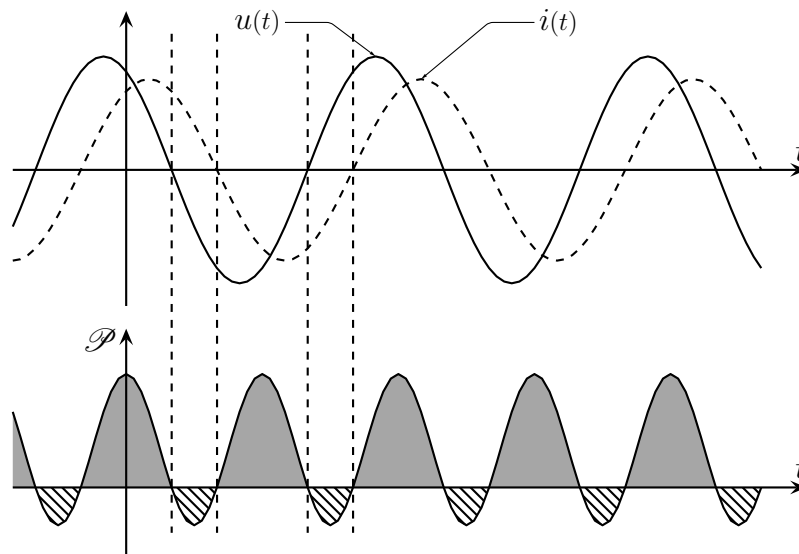


- ◇ Nous savons alors que la puissance qu'il reçoit à chaque instant s'écrit $\mathcal{P}(t) = +u(t) i(t)$.
- ◇ Le problème est que cette grandeur va être variable dans le temps étant donné que

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

★ représentation graphique

- ◇ Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur et représentons le chronogramme de $u(t)$, $i(t)$, $\mathcal{P}(t)$.



- ◇ Nous pouvons déjà voir pour ce dipôle que la tension est en avance de phase par rapport à l'intensité.
- ◇ Nous pouvons aussi constater qu'il existe des moments où :
 - le dipôle possède un caractère récepteur $\mathcal{P}(t) > 0$ dans les zones
 - le dipôle possède un caractère générateur $\mathcal{P}(t) < 0$ dans les zones
- ◇ L'énergie totale reçue n'est autre que l'aire sous la courbe $\mathcal{P}(t)$ et nous devinons qu'elle est globalement positive.
- ◇ Pour ce dipôle, la puissance moyenne reçue est positive.

IV.1.ii – et surtout pas complexe

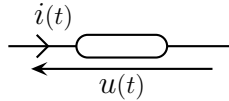
- ◇ La puissance reçue par un dipôle n'est pas une grandeur linéaire.
- ◇ En effet, si tous les générateurs ont leurs f.é.m. multipliées par 2, alors toutes les tensions et toutes les intensités seront multipliées par 2 étant donné le caractère linéaire supposé du circuit (sans lequel la notation complexe n'a pas de raison d'être).
- ◇ Dans ces conditions, la puissance instantanée reçue est multipliée par 4 !

Il n'est pas possible d'associer à la puissance instantanée reçue une représentation complexe.

IV.1.iii – expression simple – facteur de puissance

✧ Juste calculons la puissance moyenne reçue par le dipôle ci-dessous pour lequel nous avons :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$



$$\begin{aligned} P &= \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) dt \\ &= \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)}{2} dt \\ &= \frac{U_m I_m}{T} \left(\langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \rangle + \langle \cos(\varphi_u - \varphi_i) \rangle \right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \end{aligned}$$

La puissance moyenne reçue par un dipôle vaut $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$ où :

- U_m et I_m sont les amplitudes réelles de la tension à ses bornes et de l'intensité le traversant
- φ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité
- P est appelée la *puissance active* et s'exprime en W
- $\cos \varphi$ est appelée le *facteur de puissance*

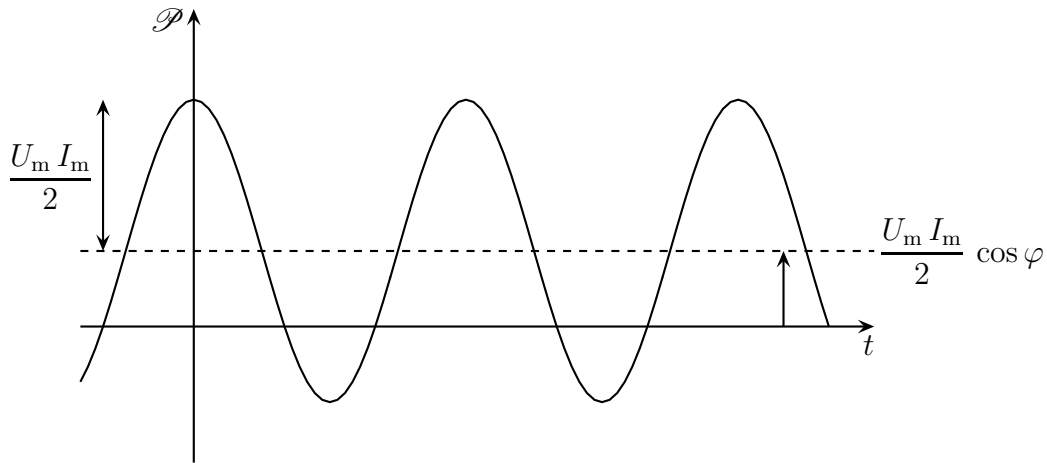
✧ La grandeur $\frac{U_m I_m}{2}$ est appelée puissance apparente et s'exprime en V.A et non en W.

✧ Bien que la puissance reçue soit une grandeur physique donc indépendante de la convention avec laquelle le dipôle est étudié, il faudra faire attention à ce que le dipôle soit bien en convention récepteur pour bien calculer le déphasage $\varphi_u - \varphi_i$

★ interprétation

✧ Reprenons le graphique de $\mathcal{P}(t)$ et réinterprétons à l'aide de l'expression

$$\mathcal{P}(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$



Plus le facteur de qualité est élevé moins le dipôle restitue de l'énergie au circuit.

IV.2 – Le $\cos \varphi$ est caractéristique du dipôle

IV.2.i – le voir dans l'impédance

- ✧ Pour un dipôle en convention récepteur, nous avons $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$ et donc $\varphi_u = \arg(\underline{Z}) + \varphi_i$, c'est-à-dire $\varphi = \arg(\underline{Z})$.
- ✧ Écrivons l'impédance sous sa forme exponentielle et algébrique :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + j X$$

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'impédance du dipôle et vaut :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\Re(\underline{Z})}{Z}.$$

IV.2.ii – le voir dans l'admittance

- ✧ Pour un dipôle en convention récepteur, nous avons $\underline{i}(t) = \underline{Y} \underline{u}(t)$ et donc $\varphi_i = \arg(\underline{Y}) + \varphi_u$, c'est-à-dire $\varphi = -\arg(\underline{Y})$.
- ✧ Écrivons l'impédance sous sa forme exponentielle et algébrique :

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G + j B$$

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'admittance du dipôle et vaut :

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y} = \frac{\Re(\underline{Y})}{Y}.$$

IV.2.iii – dipôles usuels

- ✧ Nous avons $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega}$ et $\underline{Z}_L = j L \omega$.

✧ Nous pouvons donc voir que le facteur de qualité du résistor vaut 1.

Un résistor consomme toute la puissance qu'il reçoit.

✧ De plus :

$$\arg(\underline{Z}_C) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}_L) = +\frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \cos \varphi_C = 0 \quad \text{et} \quad \cos \varphi_L = 0$$

En moyenne les condensateurs idéaux et les bobines idéales ne consomment pas de puissance.

✧ C'est normal : n'oublions qu'il s'agit, pour tous les deux, de réservoir énergétiques.

IV.3 – De trop nombreuses autres expressions

IV.3.i – avec les caractéristiques du dipôle

✧ Écrivons le facteur de qualité en fonction des caractéristiques du dipôle :

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{Z} = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{U_m/I_m} = I_m \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{U_m} \quad \rightsquigarrow \quad P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z})$$

✧ De même, en travaillant avec l'admittance :

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Y})}{Y} = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Y})}{I_m/U_m} = U_m \frac{\operatorname{Re}(\underline{Y})}{I_m} \quad \rightsquigarrow \quad P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{U_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Y})$$

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = \frac{U_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Y})$$

IV.3.ii – avec la valeur efficace

★ définition

La *valeur efficace* U_m d'un signal périodique $u(t)$ est la valeur moyenne quadratique de ce signal :

$$U_{\text{eff}}^2 = \left\langle u^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

★ pour un signal sinusoïdal

✧ Prenons un signal quelconque : $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$:

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = U_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = U_m^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{U_m^2}{2}$$

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude U_m et de valeur moyenne nulle, la valeur efficace vaut :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- ◇ Le 230 V domestique est une valeur efficace : en fait, l'amplitude de la tension délivrée par u.é.m. vaut $230\sqrt{2} = 325$ V.

★ expression de la puissance reçue

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \text{ou} \quad P = I_{\text{eff}}^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = U_{\text{eff}}^2 \operatorname{Re}(\underline{Y})$$

IV.3.iii – avec les grandeurs complexes

- ◇ Considérons un dipôle en RSF en convention générateur et les représentations complexes de la tension à ses bornes et de l'intensité du courant qui le traverse.

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$$

Le complexe conjugué d'une grandeur complexe \underline{X} se note \underline{X}^* .

- ◇ Calculons $\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)$:


$$\underline{u}(t) \underline{i}^*(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} I_m e^{-j\varphi_i} e^{-j\omega t} = U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

- ◇ Et ainsi : $\operatorname{Re}(\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)) = U_m I_m \cos \varphi$!

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}^*(t) \underline{i}(t))$$

ou $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_m^* \underline{I}_m)$

 L'expression précédente n'est pas du tout la représentation complexe de la puissance car nous n'avons **pas** $\mathcal{P}(t) = \operatorname{Re}(\text{qqch}(t))$. Cette expression nous fournit une valeur moyenne à partir de grandeurs en notation complexe. Nuance.

IV.3.iv – puissance et bande passante

- ◇ Rappelons que la bande passante a été définie comme l'ensemble des fréquences où la sortie valait au moins la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$.
- ◇ Les valeurs de sortie intéressantes étaient en fait des tensions ou des intensités qui concernaient forcément **un** dipôle particulier (éventuellement résultant de l'association de plusieurs dipôle). Dans ces conditions, ce dipôle recevait en moyenne la puissance $P = \frac{U_m^2}{2} \cos \varphi$.

- ✧ Nous constatons que la puissance reçue est proportionnelle au carré de l'amplitude **réelle** de la tension. Ainsi la puissance reçue sera maximale lorsque l'amplitude sera maximale. Notons cette puissance $P_{\max} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{U_{m,\max}^2}{2} \cos \varphi$.
- ✧ À l'intérieur de la bande passante, l'amplitude de la tension valant au moins $\frac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}}$, la puissance reçue vaudra au minimum :

$$\left(\frac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} \times \frac{U_{m,\max}^2}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} P_{\max}$$

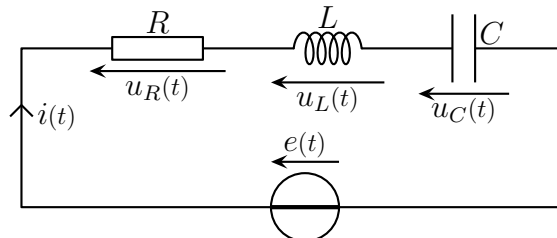
À l'intérieur de la bande passante, le dipôle étudié reçoit, en moyenne, au moins la moitié de la puissance maximale qu'il peut recevoir.

- ✧ Il est possible de définir des bandes passantes telles qu'à l'intérieur de ces bandes passantes, la puissance reçue soit au minimum de 80 % de la puissance maximale possible, mais conventionnellement, si rien n'est précisé, c'est ce facteur 50 % qui est choisi.

IV.4 – Cas du R, L, C série

IV.4.i – une association de consommateurs ?

- ✧ Considérons le circuit ci-dessous étudié dans la partie II.



- ✧ Autant ne pas calculer pour chaque dipôle la tension entre leurs bornes mais plutôt utiliser la grandeur commune $\underline{i}(t)$ et l'expression de la puissance reçue en fonction de l'admittance :

$$P_R = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_R) = R \frac{I_m^2}{2} \quad P_C = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_C) = 0 \quad P_L = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_L) = 0$$

- ✧ Le bilan énergétique moyen s'écrit donc : $P_g = P_R > 0$ où P_g est la puissance moyenne fournie par le générateur.

IV.4.ii – expression de la puissance consommée

- ✧ Comme nous ne connaissons pas l'impédance d'un générateur, nous ne pouvons pas calculer la puissance qu'il fournit avec une expression du type $\frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Y}_R)$. En revanche, nous pourrions le faire avec $P_g = \frac{E_m I_m}{2} \cos \varphi_g$ où φ_g est le déphasage entre $e(t)$ et $-i(t)$ (pour que le générateur soit en convention récepteur).
- ✧ Cherchons plutôt P_R !

✧ Retrouvons rapidement $\underline{I_m}$ avec la loi de POUILLET :

$$\underline{I_m} = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} E_m$$

✧ Or $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{Q} = \frac{1}{Q\omega_0}$:

$$\underline{I_m} = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \times \frac{E_m}{R} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{jx}{Q(1-x^2) + jx} I_0$$

✧ Et ainsi $P_R = R \frac{I_m^2}{2} = \frac{R}{2} |\underline{I_m}|^2 = \frac{R}{2} \left| \frac{jx}{Q(1-x^2) + jx} I_0 \right|^2 = \frac{I_0^2}{2R} \times \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}$ d'où :

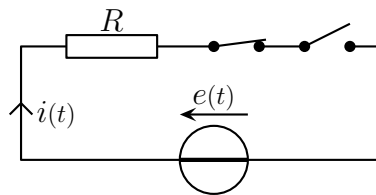
$$P(x) = \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2 + x^2} \times P_0$$

IV.4.iii – représentation de $P(x)$

★ comportement asymptotique

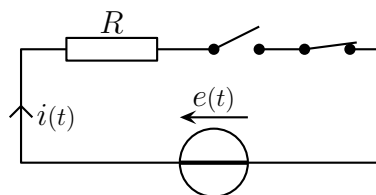
✧ Techniquement lorsque $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$ et $P(x) \sim x^2 P_0 \rightarrow 0$.

✧ Physique le circuit se comporte comme ci-dessous et nous avons $P(x) \rightarrow 0$ car $i \rightarrow 0$.



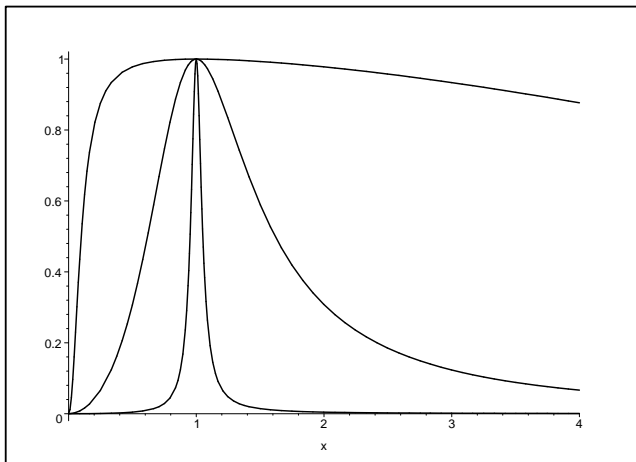
✧ Techniquement lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\omega \rightarrow +\infty$ et $P(x) \sim \frac{x^2 P_0}{x^4} \sim \frac{P_0}{x^2} \rightarrow 0$.

✧ Physique le circuit se comporte comme ci-dessous et nous avons $P(x) \rightarrow 0$ car $i \rightarrow 0$.

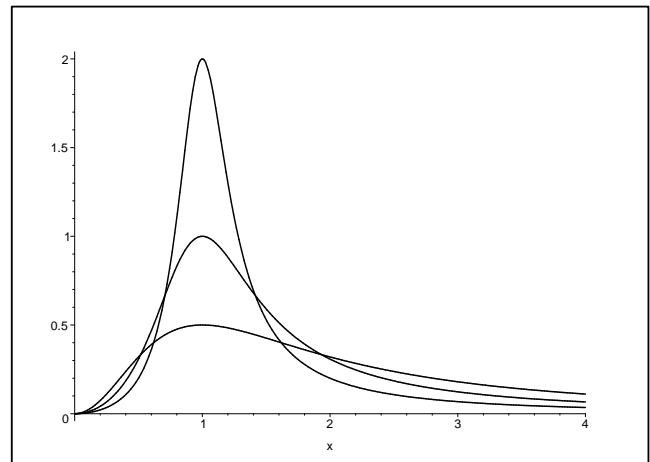


★ tracés

Graphique 7



Graphique 8



- ◇ Sur le graphique 7 nous avons représenté $P(x)$ à P_0 fixé pour différentes valeurs de Q : $Q = 0,1$; $Q = 1$; $Q = 10$. La courbe la plus pointue est celle correspondant à $Q = 10$.
- ◇ En pratique, il est assez difficile de faire varier Q sans faire varier ni $P_0 = \frac{E_m^2}{2R}$ ni ω_0 car cela impose de modifier à la fois R et E_m .
- ◇ C'est pourquoi sur le graphique 8 nous avons représenté $P(x)$ pour différentes valeurs de R telles que $Q = 0,5$; $Q = 1$ et $Q = 2$. Nous pouvons alors constater que la valeur maximale de la puissance consommée par le circuit est d'autant plus élevée que le facteur de qualité est faible ce qui est normal étant donné le comportement du circuit à la résonance.

★ bande passante

- ◇ Puisque $P = R \frac{I_m^2}{2}$, la bande-passante pour la puissance n'est autre que la bande-passante pour I_m intensité traversant le circuit R, L, C série.
- ◇ En effet, en terme de puissance, la bande-passante est telle que $P(x_c) = \frac{P_{\max}}{2}$ ce qui correspond bien à $I_m(x_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.
- ◇ Rappelons les résultats :
 - il y a toujours résonance en ω_0
 - la bande-passante est telle que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

IV.5 – Relèvement d'un facteur de puissance

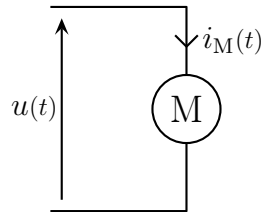
IV.5.i – problème – analyse

★ problème

- ◇ Considérons un moteur électrique consommant $P = 10$ kW de puissance active sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220$ V et qui possède un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,70$.
- ◇ Nous voulons savoir quel condensateur mettre en parallèle de ce moteur pour que l'ensemble ait un facteur de qualité $\cos \varphi' = 1$.
- ◇ Quel peut-être l'intérêt d'un tel dispositif?

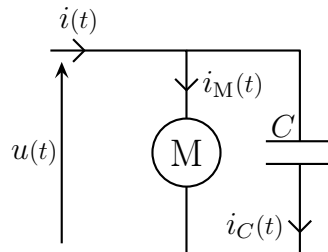
★ analyse

◇ Schématisons tout d'abord ce qu'il se passe avec le moteur « seul » et avec le condensateur.



Les moteurs électriques étant constitués de bobines, ils ont un effet inductif.

- ◇ Dans ces conditions le courant $i_M(t)$ traversant le moteur est en retard par rapport à la tension à ses bornes (effet inductif). Ce retard de phase, caractéristique du moteur n'est autre que le φ du $\cos \varphi$. Connaître $\cos \varphi$ c'est connaître beaucoup de chose sur \underline{Z}_M .
- ◇ Une fois le condensateur branché, la situation est la suivante.

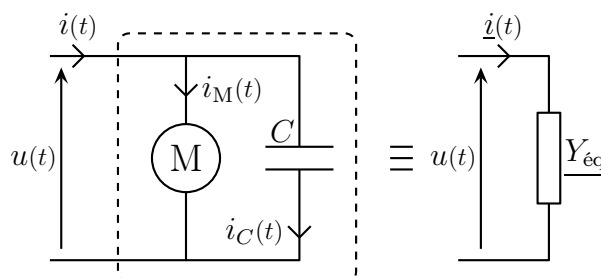


- ◇ Étant donné que le moteur et le condensateur sont en parallèle, $i_M(t)$ est rigoureusement le même dans les deux cas puisque $\underline{I}_{M,m} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_M}$.
- ◇ Il faudra faire en sorte que $i(t)$ et $u(t)$ soient en phase pour avoir $\cos \varphi' = 1$.
- ◇ Analyse physique :
- petit circuit à deux dipôles et un générateurs, tous en parallèle
 - circuit en RSF
 - grandeurs pertinentes : C , P et $\cos \varphi$ en tant que caractéristiques de composants, U_{eff} et ω en tant que contrainte
- ◇ Analyse technique :
- approche nodale donc en terme de courant et d'admittance
 - soit notation complexe soit FRESNEL puisque tout est en parallèle

IV.5.ii – solution « complexe »

★ condition de mise en phase

◇ Reschématisons le circuit avec condensateur en complexe.



- ✧ Pour ce dipôle équivalent, le facteur de qualité sera tel que $\cos \varphi' = 1$ lorsque la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ seront en phase, *ie.* dès lors que $\underline{Y}_{\text{eq}}$ sera réel.
- ✧ Notons $\underline{Y}_M = G + jB$ l'admittance (provisoirement inconnue) du moteur. L'admittance équivalente est alors telle que :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_M + \underline{Y}_C = G + jB + jC\omega = G + j(B + C\omega)$$

- ✧ La condition de mise en phase est donc $C\omega = -B$. Reste à déterminer B .
- ✧ Nous savons que $\underline{Y}_M = Y_M e^{-j\varphi}$ où φ est le même que dans le facteur de puissance. Il ne reste plus qu'à calculer Y_M .

$$Y_M = \frac{I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}} \quad \text{et} \quad P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \rightsquigarrow \quad Y_M = \frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi}$$

- ✧ Nous avons alors :

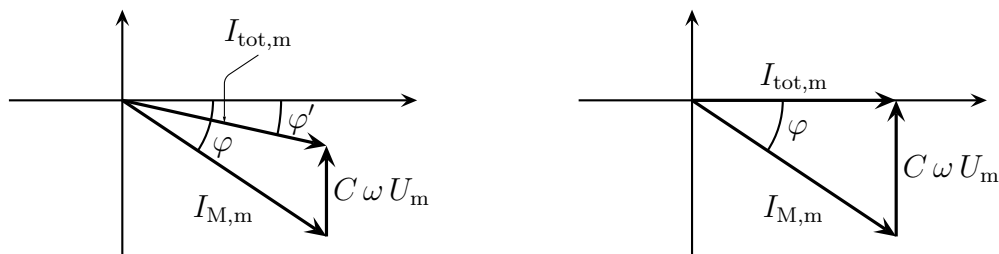
$$B = \text{Im}(\underline{Y}_M) = -Y_M \sin \varphi = -\frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sin \varphi = -\frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

- ✧ Finalement :

$$C\omega = -B \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{P}{\omega U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$$

IV.5.iii – version Fresnel

- ✧ Faisons une construction en intensité du montage { moteur + condensateur } sans oublier l'effet inductif du moteur, *ie.* sans oublier que l'intensité est en retard par rapport à la tension. L'origine des phases est prise sur la grandeur commune aux deux dipôles, *ie.* sur $u(t)$.



- ✧ La construction est telle qu'à la fin $I_{\text{tot},m}$ soit en phase avec $u(t)$.
- ✧ Géométriquement, nous voyons alors qu'il faut $C\omega U_m = I_{M,m} \sin \varphi$ ou $C\omega U_{\text{eff}} = I_{M,\text{eff}} \sin \varphi$ ou
- ✧ De cette relation, il ne manque que $I_{M,\text{eff}}$ que nous pouvons déterminer comme précédemment :

$$C = \frac{1}{\omega U_{\text{eff}}} \left(\frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{P}{\omega U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$$

- ✧ Le résultat est identique, évidemment.

IV.5.iv – intérêt

- ✧ Pour que le courant électrique arrive quelque part, il faut l'acheminer par des lignes électriques (normal!). Mais à ce moment là, l'effet JOULE agit et la puissance perdue lors du transport de l'énergie électrique est proportionnelle à $I_{\text{tot},\text{eff}}^2$.
- ✧ Avant le rajout du condensateur :

$$I_{\text{avant}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}$$

◇ Après le rajout du condensateur, la puissance totale consommée vaut $P' = P + P_C = P$ car un condensateur ne consomme pas de puissance en moyenne. Nous avons ainsi :

$$I_{\text{après}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi'} = \frac{P}{U_{\text{eff}}} < I_{\text{avant}}$$

◇ La diminution relative des pertes vaut :

$$\eta = \frac{I_{\text{avant}}^2 - I_{\text{après}}^2}{I_{\text{avant}}^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = 1 - \cos^2 \varphi = 0,51$$

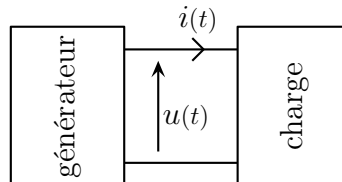
◇ Ici il y a donc deux fois moins d'énergie perdue par effet JOULE avec le condensateur.

◇ L'effet bobine du moteur est tel que le moteur renvoie un peu d'énergie au réseau électrique. C'est cette énergie voyageuse inutile qui crée un surplus d'effet JOULE. Avec le bon condensateur, cette énergie renvoyée ne retourne pas d'où elle vient mais s'accumule provisoirement dans le condensateur.

IV.6 – Adaptation d'impédance

IV.6.i – du déjà vu

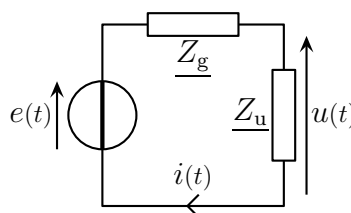
◇ Considérons un montage vu sous sa forme générale : une partie fournisseuse d'énergie et une partie consommatrice d'énergie.



Il y a *adaptation d'impédance* lorsque la puissance transférée entre le générateur et la partie utile d'un circuit est maximale.

IV.6.ii – condition d'adaptation

◇ Considérons le cas général simple où le circuit peut être modélisé par le circuit suivant :



◇ La puissance reçue par \underline{Z}_u s'écrit :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = \frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E \quad \text{et} \quad \underline{I}_m = \frac{1}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E$$

◇ Cela donne donc :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E \times \frac{1}{\underline{Z}_u^* + \underline{Z}_g^*} E \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{Z}_u}{|\underline{Z}_u + \underline{Z}_g|^2} E^2 \right) = \frac{E^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{Z}_u}{|\underline{Z}_u + \underline{Z}_g|^2} \right)$$

◇ Notons $\underline{Z}_u = R_u + j X_u$ et $\underline{Z}_g = R_g + j X_g$ cela donne :

$$P = \frac{E^2}{2} \times \operatorname{Re} \left(\frac{R_u + j X_u}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2} \right) = \frac{E^2}{2} \times \frac{R_u}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2}$$

◇ Il faut maintenant trouver les conditions sur X_u et R_u pour que cela soit maximal.

◇ Tout d'abord nous pouvons constater que quel que soit R_u , la puissance est maximale pour $X_u = -X_g$.

◇ Il reste maintenant $P = \frac{E^2}{2} \times \frac{R_u}{(R_u + R_g)^2}$.

◇ Calculons la dérivée :

$$\frac{dP}{dR_u} = \frac{(R_u + R_g)^2 - R_u \cdot 2(R_u + R_g)}{(R_u + R_g)^4} = \frac{R_g - R_u}{(R_u + R_g)^3}$$

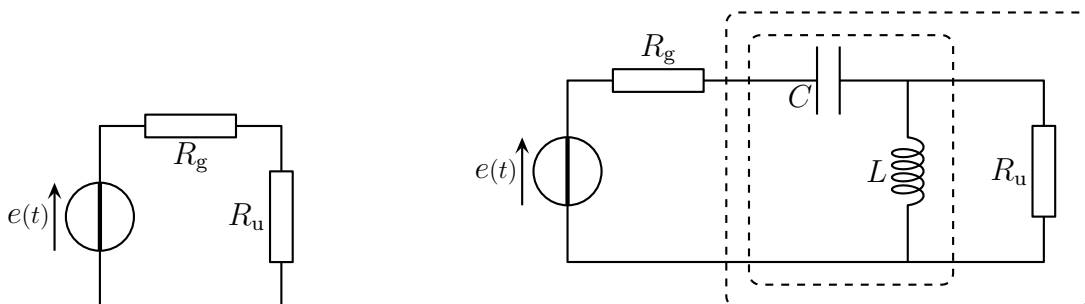
◇ La condition recherchée est donc R_g et R_u .

Il y a adaptation d'impédance pour $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$.

IV.6.iii – idoinoton

★ problème – analyse

◇ Considérons le circuit suivant pour lequel il n'y a pas d'adaptation d'impédance et introduisons entre le générateur et la charge un quadripôle permettant de réaliser l'impédance.



◇ Cherchons les valeurs de L et C permettant de réaliser l'adaptation.

◇ Analyse physique :

→ circuit en RSF

→ les résultats vont dépendre de R_u , R_g et ω .

◇ Analyse technique :

- notation complexe
- il va être plus pratique de considérer le quadripôle dans la partie utile que dans la partie générateur

★ condition d'adaptation

◇ Déterminons tout d'abord l'expression de l'impédance de la nouvelle charge :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = (R \parallel \underline{Z}_L) \oplus \underline{Z}_C = \frac{j R_u L \omega}{R_u + j L \omega} + \frac{1}{j C \omega}$$

◇ La condition d'adaptation impose $\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_g^* = R_g$. Or :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{j R_u L \omega (R_u - j L \omega)}{R_u^2 + L^2 \omega^2} - j \frac{1}{C \omega} = \frac{R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2} + j \left(\frac{R_u^2 L \omega}{R_u^2 + L^2 \omega^2} - \frac{1}{C \omega} \right)$$

◇ Par identification avec les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}_g = R_g$ nous arrivons à :

$$\frac{R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2} = R_g \quad \text{et} \quad \frac{R_u^2 L \omega}{R_u^2 + L^2 \omega^2} = \frac{1}{C \omega}$$

◇ La première condition ne contient que du L , nous pouvons donc en déduire :

$$R_u L^2 \omega^2 = R_g R_u^2 + R_g L^2 \omega^2 \quad \rightsquigarrow \quad L^2 \omega^2 = \frac{R_g R_u^2}{R_u - R_g} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{L = \frac{R_u}{\omega} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}}$$

◇ Ensuite en divisant les deux conditions afin d'éliminer les dénominateurs en $R_u^2 + L^2 \omega^2$:

$$\frac{L}{R_u C} = R_g \quad \rightsquigarrow \quad C = \frac{L}{R_u R_g} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega R_g} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}}$$

◇ Nous pouvons constater que ce mode d'adaptation n'est possible que si $R_u > R_g$.

Régimes sinusoïdaux forcés

Au niveau du cours

★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- amplitude, amplitude complexe, phase, pulsation, phase à l'origine
- impédance, résistance, réactance, admittance
- bande passante
- puissance active, facteur de puissance
- adaptation d'impédance

★ Les grandeurs

◇ Connaître la dimension d'une impédance, d'une admittance, d'un facteur de puissance.

★ Les lois

◇ Sont à connaître :

- les impédances des dipôles usuels
- les associations de dipôles en série et en parallèle
- les lois électrodynamique en régime sinusoïdal forcé
- la représentation de FRESNEL des dipôles usuels ainsi que la construction de FRESNEL
- les expressions de la puissance moyenne consommée par un dipôle
- la condition d'adaptation d'impédance

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- le comportement en hautes et basses fréquence des dipôles usuels
- la résonance en tension aux bornes d'un R, L, C série
- la résonance en intensité dans un R, L, C série
- l'interprétation graphique et énergétique du facteur de puissance
- le comportement qualitatif d'un moteur électrique du point de vue électrodynamique

★ les exemples fondamentaux

◇ Connaître le R, L, C série.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Il faut :

- savoir repérer *a priori* de quelles grandeurs vont dépendre le résultat recherché
- savoir déterminer le comportement asymptotique de circuits

★ Analyse technique

◇ Il faut savoir :

- savoir choisir entre l'approche maillère et l'approche nodale en fonction des grandeurs recherchées et du nombre d'inconnues que cela engendre
- savoir traduire les conditions de mise en phase de deux grandeurs
- savoir choisir entre l'approche par la notation complexe et l'approche par construction de FRESNEL

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

◇ Connaître parfaitement :

- la manipulation de nombres complexes
- le calcul du module d'un nombre complexe
- l'expression de l'argument d'un nombre complexe avec la fonction arctan

★ petits gestes

◇ Il faut :

- savoir déterminer le comportement asymptotique de fonctions à valeurs complexes et en déduire leurs éventuelles valeurs limites.
- savoir déterminer une bande passante

★ exercices classiques

◇ Savoir refaire :

- le relèvement d'un facteur de puissance d'un moteur électrique jusqu'à $\cos \varphi' = 1$.

Table des matières

I	La notation complexe en électrocinétique	1
I-1	En électrocinétique, c'est comme en mécanique	1
I-1.i	rappels	1
I-1.ii	quelques nouvelles définitions	1
I-2	Décrire le comportement des dipôles en RSF	2
I-2.i	notion d'impédance	2
	définition	2
	avec les amplitudes complexes	2
	avec les amplitudes réelles	3
I-2.ii	impédance du résistor	3
I-2.iii	condensateur idéal	3
	impédance	3
	méthode rapide pour retrouver l'impédance	4
I-2.iv	bobine idéale	4
I-2.v	cas général	5
	impédance	5
	admittance	5
I-2.vi	comportement phénoménologique des dipôles	5
	hautes et basses fréquences	6
I-3	Étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé	6
I-3.i	les lois	6
	additivité des tensions	6
	loi des nœuds	7
I-3.ii	association de dipôles	7
	loi d'association	7
	en parallèle	8
I-3.iii	dorénavant	9
I-4	Idoinotons	10
I-4.i	l'idoïnoton 3 en 1	10
	montage	10
	relation de fonctionnement	10
	1 ^{er} cas	10
	2 ^e cas	10
	3 ^e cas	11
I-4.ii	association R, C en série	11
I-4.iii	association R, L en parallèle	12
I-4.iv	circuit R, L, C	12
	circuit	12
	résolution normale	13
	autre méthode	13
	réponses	14
	représentation graphique	14
II	Circuit R, L, C série en régime sinusoïdal forcé	15
II-1	Dispositif	15
II-2	Amplitudes complexes	15
II-2.i	pour l'intensité	15
II-2.ii	pour la tension aux bornes du condensateur	16

II.2.iii	écriture canonique	16
	pour l'intensité	16
	pour la tension	16
II.2.iv	analogie mécanique	16
II.3	Courbe de résonance en tension	17
II.3.i	rappel	17
	tracés	17
II.3.ii	bande passante	17
II.4	Courbe de résonance en intensité	19
II.4.i	rappel ?	19
	les tracés	19
	interprétation de la résonance	19
II.4.ii	bande passante	20
	première méthode	20
	deuxième méthode	20
III	La construction de FRESNEL	21
III.1	Une autre représentation des grandeurs sinusoïdales	21
III.1.i	présentation	21
III.1.ii	quand l'utiliser ?	21
III.2	Représentation de dipôles usuels	22
III.2.i	le résistor	22
III.2.ii	la bobine idéale	22
III.2.iii	le condensateur idéal	22
III.2.iv	retrouver le comportement en construction de FRESNEL	23
III.2.v	dipôle quelconque	23
	caractère inductif	23
	caractère capacitif	24
III.3	Association de dipôles	24
III.3.i	association série	24
III.3.ii	association parallèle	25
III.3.iii	idoinoton	26
	d'abord l'association R, C	26
	... ensuite on cherche U_m	27
	... et enfin φ	27
IV	Aspect énergétique	28
IV.1	Puissance moyenne consommée par un dipôle	28
IV.1.i	en terme de puissance moyenne	28
	analyse du problème	28
	représentation graphique	29
IV.1.ii	et surtout pas complexe	29
IV.1.iii	expression simple – facteur de puissance	30
	interprétation	30
IV.2	Le $\cos \varphi$ est caractéristique du dipôle	31
IV.2.i	le voir dans l'impédance	31
IV.2.ii	le voir dans l'admittance	31
IV.2.iii	dipôles usuels	31
IV.3	De trop nombreuses autres expressions	32
IV.3.i	avec les caractéristiques du dipôle	32

IV.3.ii	avec la valeur efficace	32
	définition	32
	pour un signal sinusoïdal	32
	expression de la puissance reçue	33
IV.3.iii	avec les grandeurs complexes	33
IV.3.iv	puissance et bande passante	33
IV.4	Cas du R, L, C série	34
IV.4.i	une association de consommateurs?	34
IV.4.ii	expression de la puissance consommée	34
IV.4.iii	représentation de $P(x)$	35
	comportement asymptotique	35
	tracés	36
	bande passante	36
IV.5	Relèvement d'un facteur de puissance	36
IV.5.i	problème – analyse	36
	problème	36
	analyse	37
IV.5.ii	solution « complexe »	37
	condition de mise en phase	37
IV.5.iii	version Fresnel	38
IV.5.iv	intérêt	38
IV.6	Adaptation d'impédance	39
IV.6.i	du déjà vu	39
IV.6.ii	condition d'adaptation	39
IV.6.iii	idoinoton	40
	problème – analyse	40
	condition d'adaptation	41
	Analyse physique	42

Électrocinétique

Chapitre 6

Filtres

Filtres

Comme nous le savons, en électrocinétique, il y a l'électricité et l'électronique. L'électricité s'occupe davantage des transports énergétiques alors que l'électronique s'occupe plus des signaux et des informations qu'ils transportent. Jusqu'à présent nous avons davantage centré nos efforts sur l'électricité car seul le chapitre sur l'amplificateur opérationnel relève de l'électronique. Nous allons maintenant nous pencher sur cette dernière.

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord présenter l'analyse fréquentielle d'un circuit. Cela nous permettra de mieux comprendre ce que sont les filtres et leur utilité. Nous verrons ensuite comment représenter graphiquement leur fonctionnement. Nous pourrons alors étudier tous les filtres classiques. Enfin, dans une dernière partie, nous verrons quelques aspects plus approfondis du filtrage en général.

I – Analyse fréquentielle

I.1 – Une autre vision des signaux périodiques

I.1.i – ce sont tous des (sommés de) sinusoïdes !

★ propriété fondamentale

Tout signal périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Cette écriture est appelée *décomposition en série de FOURIER*.

Pour un signal de période T :

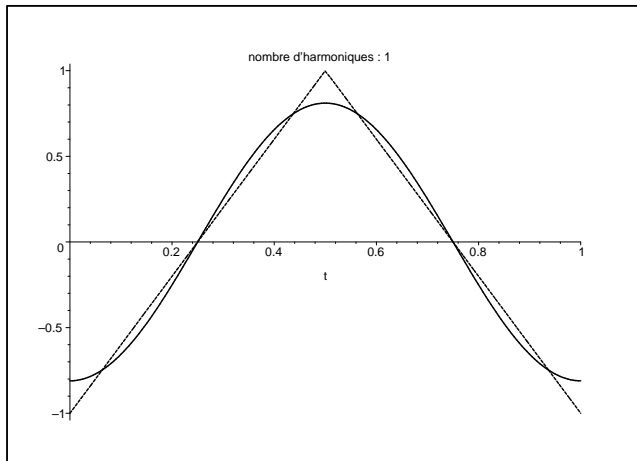
- la sinusoïde correspondant à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelée le *fondamental*
- les sinusoïdes correspondant aux pulsations $\omega = n \frac{2\pi}{T}$ avec $n \neq 1$ sont appelées les *harmoniques*

◇ Il s'agit d'une propriété mathématique. Bien sûr il existe des conditions que doit vérifier une fonction $u(t)$ pour se décomposer en série de FOURIER, mais en physique ces conditions sont toujours remplies.

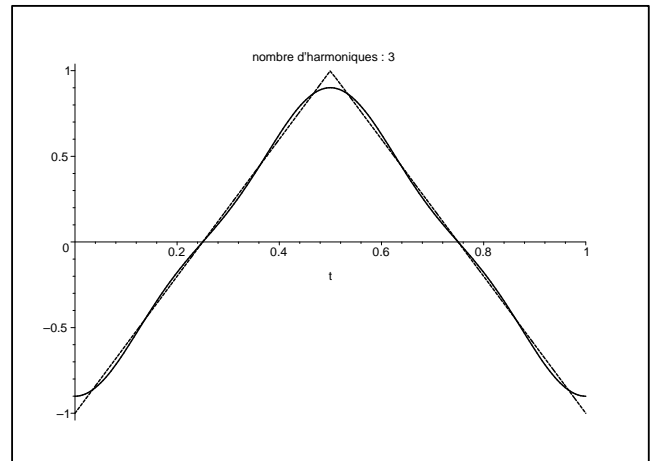
★ exemples

◇ Regardons un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes.

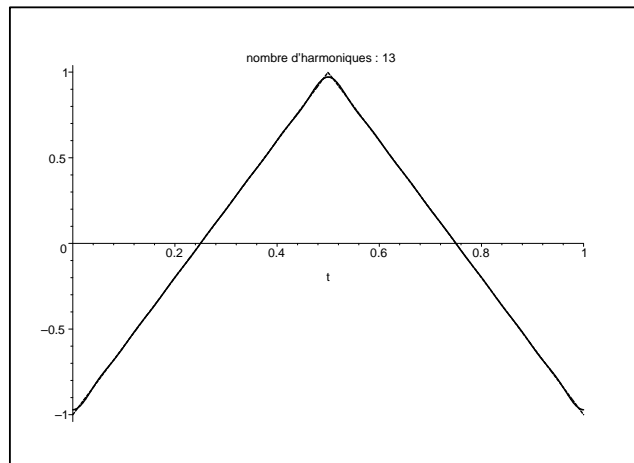
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

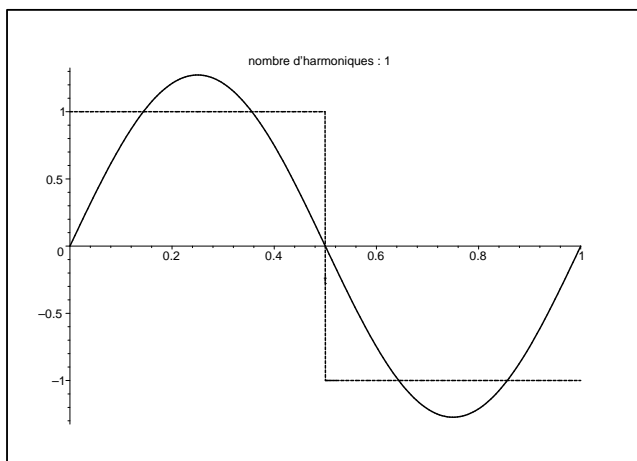


◇ Nous pouvons voir :

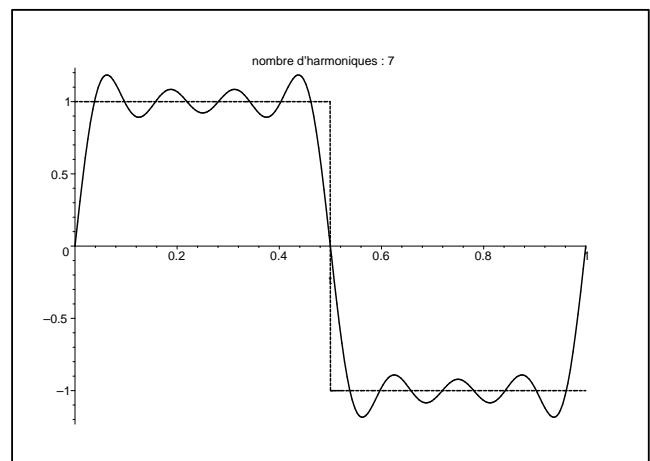
- uniquement le fondamental sur le graphique 1
- le fondamental et la première harmonique non nulle sur le graphique 2
- le fondamental et 5 harmoniques non nulles sur le graphique 3

◇ Regardons un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes.

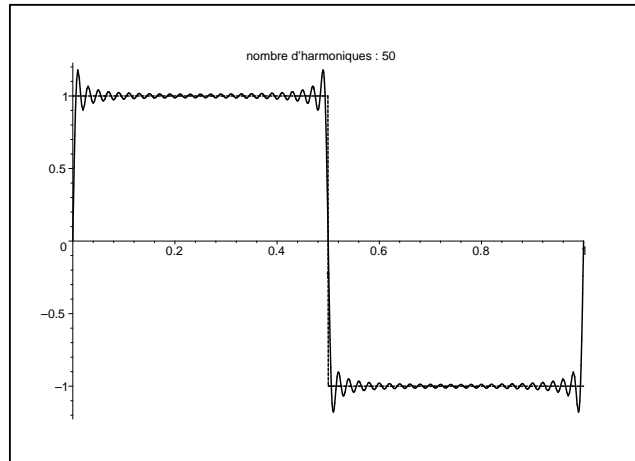
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



◇ Nous pouvons voir :

- uniquement le fondamental sur le graphique 4
- le fondamental et 3 harmoniques non nulles sur le graphique 5
- le fondamental et 24 harmoniques non nulles sur le graphique 6

★ autre écriture

◇ Il est aussi possible d'écrire une fonction périodique sous la forme :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t) \right)$$

◇ Cette écriture est plus pratique en ce qui concerne les calculs étant donné que nous avons :

$$a_0 = \langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n \omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n \omega t) dt$$

◇ Après avec de la trigonométrie, il est possible de passer d'une représentation à une autre, comme par exemple $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

La représentation d'un signal périodique en somme de $c_n \cos(n \omega t)$ est plus physique car chaque c_n représente l'amplitude de l'harmonique n .

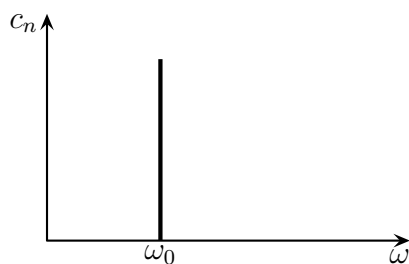
I.1.ii – représentation fréquentielle

★ signaux usuels

Le *spectre* d'un signal est la représentation de l'amplitude de chacune de ses composantes sinusoïdales en fonction de la pulsation.

◇ Cela revient à représenter le c_n en fonction de ω .

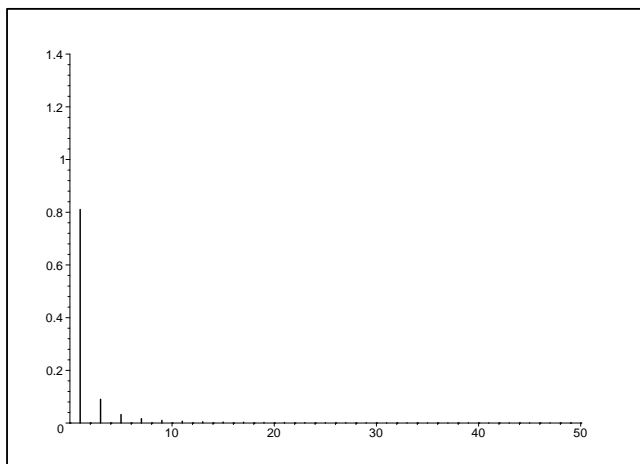
◇ Regardons ce que cela donne pour un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 .



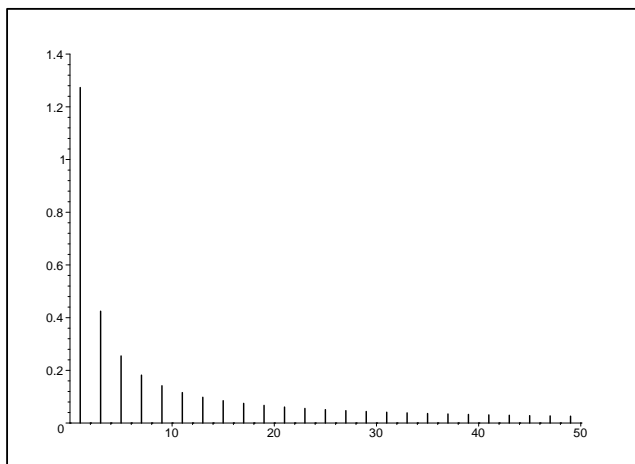
✧ Dans une sinusoïde, il n'y a qu'une seule sinusoïde (non ? si !) et le spectre se réduit à un trait unique de hauteur l'amplitude de la sinusoïde.

✧ Regardons maintenant sur les graphiques 7 et 8 les spectres des signaux triangulaire et rectangulaire.

Graphique 7



Graphique 8



✧ Nous pouvons constater que :

- il n'y a pas d'harmoniques paires
- les harmoniques décroissent plus vite pour le signal triangulaire

Un signal triangulaire symétrique ne comporte que des harmoniques impaires décroissant en $\frac{1}{n^2}$.

Un signal rectangulaire symétrique ne comporte que des harmoniques impaires décroissant en $\frac{1}{n}$.

★ phénoménologie

✧ Pour les signaux symétriques, il est assez facile de montrer que les harmoniques sont d'ordre impair.

Les discontinuités d'un signal engendrent des harmoniques d'ordre élevé.

★ propriété fondamentale

La décomposition en série de FOURIER est unique : à un signal correspond une et une seule décomposition.

- ◇ Cette propriété est fondamentale car elle signifie que toute l'information d'un signal périodique est contenue dans cette somme !
- ◇ Autrement dit, il est possible de « voir » (ou « lire ») le signal uniquement en représentant son spectre.
- ◇ Avec l'habitude, c'est ce que nous ferons : plus ça ira, plus nous parlerons en termes de fréquences et non en termes temporels.

I.2 – Phénoménologie d'un filtre

I.2.i – de l'utilité des circuits linéaires

★ avec le théorème de superposition

- ◇ Imaginons que dans un circuit linéaire il y ait une tension d'entrée :

$$e(t) = E_{1,m} \cos(\omega_1 t) + E_{2,m} \cos(\omega_2 t + \psi)$$

- ◇ Alors, parce que le circuit est linéaire, nous pouvons écrire que toute grandeur du circuit peut s'écrire sous la forme :

$$u(t) = U_{1,m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{2,m} \cos(\omega_2 t + \psi + \varphi_2)$$

avec :

- $U_{1,m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ la tension lorsque l'entrée se réduit à $E_{1,m} \cos(\omega_1 t)$
- $U_{2,m} \cos(\omega_2 t + \psi + \varphi_2)$ la tension lorsque l'entrée se réduit à $E_{2,m} \cos(\omega_2 t + \psi)$

Dans un circuit linéaire chaque composante du spectre peut être traitée indépendamment des autres.

★ d'où l'importance du RSF

- ◇ Nous pouvons donc constater que le cas particulier du régime sinusoïdal forcé n'est pas si tant que cela un cas particulier puisqu'il correspond en fait aux harmoniques présentes dans n'importe quel signal périodique !
- ◇ Cette approche, en terme d'harmoniques, *ie.* en termes de fréquences est tellement puissante / pratique / utile pour tout ce qui est linéaire qu'il est même possible de l'étendre à des signaux qui ne sont pas périodiques. Dans ces conditions la somme de sinusoïdes n'est pas une somme en \sum mais une somme en $\int d\omega$.

★ du déjà fait !

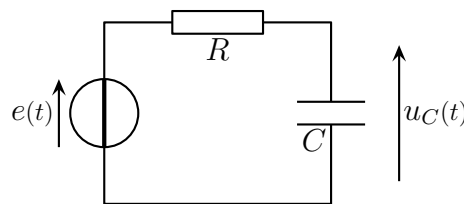
- ◇ Remarquons que cette approche fréquentielle est naturelle dans un domaine déjà étudié : l'optique.

- ✧ En effet chaque radiation de longueur d'onde λ était traitée indépendamment des autres : peu importait la déviation de la radiation rouge pour déterminer la déviation de la radiation bleue pour le prisme.
- ✧ Là aussi c'était dû au caractère linéaire des lois de l'optique. Si tel n'avait pas été le cas (avec des indices dépendant de la puissance totale transportée par exemple), nous n'aurions pas pu avoir une telle approche.
- ✧ Il faut bien comprendre que l'approche fréquentielle, si naturelle en optique, est rigoureusement analogue en électrocinétique. Si tel ne semble pas être le cas c'est parce qu'en électrocinétique la vision temporelle reste importante.

I.2.ii – mon premier filtre

★ montage

- ✧ Considérons le circuit ci-dessous.

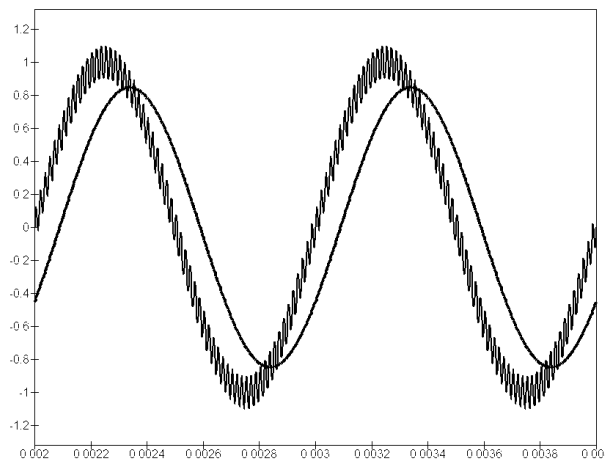


- ✧ Dans ce circuit nous avons :

- $e(t) = E_{1,m} \cos(2\pi f_1 t) + E_{2,m} \cos(2\pi f_2 t)$ avec $E_{1,m} = 1,0 \text{ V}$; $f_1 = 1,0 \text{ kHz}$; $E_{2,m} = 0,1 \text{ V}$ et $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 30 \text{ nF}$

★ simulation et interprétation

- ✧ Observons $e(t)$ et $u_C(t)$.



- ✧ Nous pouvons voir :
 - que l'entrée correspond à une somme de sinusoïde, la petite « floutant » celle de grande amplitude
 - qu'à la sortie, il ne reste que la grande sinusoïde « nettoyée » de la petite
 - la tension de la grande sinusoïde est légèrement plus faible en sortie qu'en entrée
 - il y a un léger déphasage entre la sortie et l'entrée
- ✧ Nous sommes donc face à un filtre qui, ici, élimine les hautes fréquences pour ne conserver que les basses fréquences.

I-3 – Tout est dans la fonction de transfert

I-3.i – qu'est-ce que la fonction de transfert ?

Un *filtre* en électrocinétique permet de modifier une grandeur, dite *entrée*, en une autre grandeur, dite *sortie*.

La *fonction de transfert* d'un filtre est la fonction qui permet de déterminer la grandeur de sortie connaissant la grandeur d'entrée.

★ exemple

- ◇ Dans le filtre précédent, la grandeur d'entrée était $e(t)$ et la sortie était $u_C(t)$.
- ◇ Reprenons l'exemple précédent et cherchons la sortie en fonction de l'entrée, *ie.* $u_C(t)$ en fonction de $e(t)$.
- ◇ Comme nous l'avons déjà dit, grâce au caractère linéaire du circuit, nous pouvons nous intéresser à chaque composante sinusoïdale prise séparément.

Un filtre s'étudie toujours en régime sinusoïdal forcé.

- ◇ Ici avec un simple diviseur de tension :

$$\underline{U_{C,m}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} E_m = \frac{1}{1 + jRC\omega} E_m$$

Un filtre amplificateur de tension est caractérisé par le *gain en tension* défini par

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_{s,m}}}{\underline{U_{e,m}}}$$

- ◇ Ici le gain en tension s'écrit $\underline{H(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.
- ◇ Lorsque rien n'est précisé, le filtre étudié est un filtre amplificateur de tension et la fonction de transfert recherchée est le gain en tension.

★ forme canonique

- ◇ Bien que cela ne soit pas obligatoire, la plupart du temps, les fonctions de transfert s'écrivent sous la forme d'une fraction de polynômes en $j\omega$:

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{N_0 + N_1 j\omega + N_2 (j\omega)^2}{D_0 + D_1 j\omega + D_2 (j\omega)^2}$$

- ◇ Dans l'exemple précédent : $N(x) = 1$ et $D(x) = 1 + RCx$.

I.3.ii – que faire de la fonction de transfert ?

La fonction de transfert permet de déterminer l'amplitude et le déphasage de chaque composante sinusoïdale du signal de sortie.

◇ Pour cela, il suffit de prendre module et argument.

◇ Ainsi, dans l'exemple précédent :

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} E_m \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \arg\left(\frac{1}{1 + j2\pi f RC}\right) = -\arctan(2\pi f RC)$$

◇ Numériquement ($C = 100 \text{ nF}$ et $R = 1,0 \text{ k}\Omega$) :

fréquence	entrée		sortie	
	amplitude	phase à l'origine	amplitude	phase à l'origine
1,0 kHz	1,0 V	0	0,846733 V	-32,1419 °
60 kHz	0,1 V	0	$2,65165 \times 10^{-3} \text{ V}$	-88,4805 °

I.3.iii – relation entre équation différentielle et fonction de transfert

◇ En fait c'est une nouvelle méthode pour tout ce qui est régime transitoire.

★ idée

◇ C'est simple, il suffit de tout écrire en polynôme de $j\omega$ et de faire $\times j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$.

★ exemple précédent

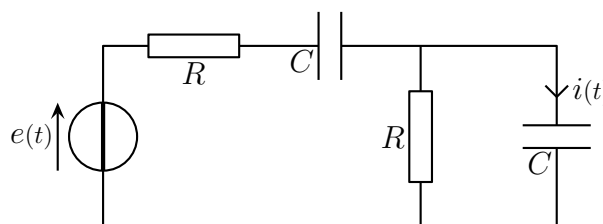
◇ Reprenons le gain en tension de l'exemple précédent :

$$\frac{U_{C,m}}{U_{e,m}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \rightsquigarrow (1 + jRC\omega) \underline{U_{C,m}} = \underline{U_e} \rightsquigarrow \underline{U_{C,m}} + RC(j\omega) \underline{U_{C,m}} = \underline{U_{e,m}}$$

◇ Et ainsi, en notation réelle : $u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} = e(t)$.

★ idoinoton

◇ Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ dans le circuit suivant.



◇ Analyse physique :

→ c'est un circuit en régime transitoire, *a priori* du 2^e ordre

- l'équation différentielle va dépendre de R , C (composants) et $e(t)$ (contrainte)
- ◇ Analyse technique :
 - vision en RSF du circuit, c'est plus facile pour trouver une ED du 2^e ordre
 - approche nodale : un seul nœud principal mais donne un potentiel et pas un courant
 - approche maillère : le courant total délivré par le générateur se répartit entre le résistor et le condensateur
- ◇ Nous pouvons donc directement écrire qu'il y a un diviseur de courant pour le courant total :

$$\underline{I_m} = \frac{\underline{Y_C}}{\underline{Y_C} + \underline{Y_R}} \underline{I_{\text{tot},m}} = \frac{\underline{Y_C}}{\underline{Y_C} + \underline{Y_R}} \times \frac{\underline{E_m}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R} + \underline{Z_{\text{eq}}}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z_{\text{eq}}} = C \parallel R$$

- ◇ En remplaçant et en simplifiant, cela donne :

$$\begin{aligned} \underline{I_m} &= \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R}} \times \frac{E_m}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{\frac{jC\omega}{R}}{R + \frac{1}{jC\omega}}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times \frac{jC\omega E_m}{jRC\omega + 1 + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega \times jC\omega E_m}{jRC\omega + (jRC\omega)^2 + 1 + jRC\omega + jRC\omega} = \frac{jRC\omega \times jC\omega E_m}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \end{aligned}$$

- ◇ Et ainsi en développant $\underline{I_m} + 3RC(j\omega)\underline{I_m} + (RC)^2(j\omega)^2\underline{I_m} = RC^2(j\omega)^2 E_m$ soit :

$$i(t) + 3RC \frac{di(t)}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2i(t)}{dt^2} = RC^2 \frac{d^2e(t)}{dt^2}$$

I.3.iv – pseudo-intégrateur

★ intégration en terme fréquentiels

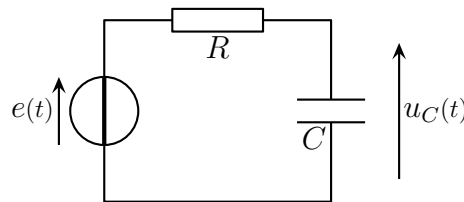
En termes fréquentiels, intégrer revient à multiplier par $\frac{1}{j\omega}$.

Un filtre est dit *pseudo-intégrateur* lorsque sa fonction de transfert vaut $H(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega}$ sur une plage limitée de pulsations.

- ◇ En regardant la décomposition de FOURIER d'un signal périodique, nous pouvons dire que chaque pulsation s'écrit $\omega = n\omega_0$ où ω_0 est la pulsation du fondamental. Ainsi, intégrer revient à diviser chaque harmonique par son rang n .
- ◇ Souvenons nous qu'un rectangle possède un spectre qui décroît en $\frac{1}{n}$. Dans ces conditions, sa primitive sera un spectre dont la décroissance sera en $\frac{1}{n^2}$. Ce sera un signal triangle !

★ circuit

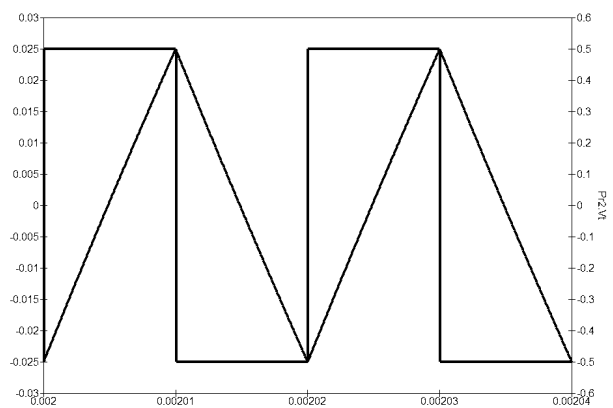
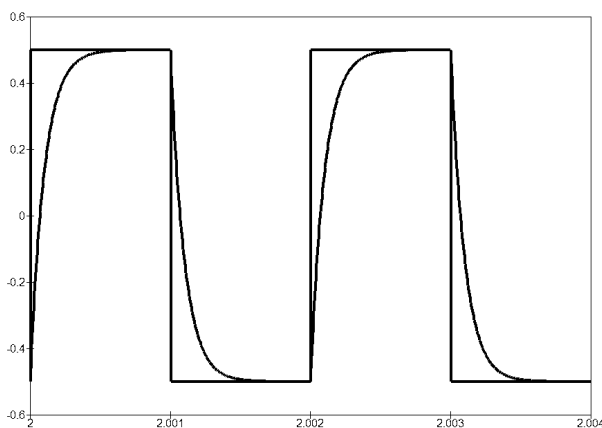
- ◇ Reprenons le circuit connu pour lequel nous avons $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$.



- ◇ En hautes fréquences, *ie.* pour $RC\omega \gg 1$, nous avons $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{1}{jRC\omega}$, *ie.* le filtre se comporte comme un intégrateur.

★ simulation

- ◇ Regardons ce que donne le signal de sortie pour deux valeurs de fréquences telles que $RC\omega = 0,3$ et $RC\omega = 30$ avec $C = 100$ nF et $R = 1,0$ k Ω .



- ◇ Nous pouvons constater que lorsque $RC\omega \gg 1$, l'intégration se passe bien. Toutefois, le signal de sortie est faible, ce qui n'est pas surprenant étant donné que la fonction de transfert s'écrit, pour ces pulsations $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{jRC\omega}$.

I.3.v – pseudo-dérivateur

- ◇ L'idée est la même que pour l'intégration.

★ dérivation en terme fréquentiels

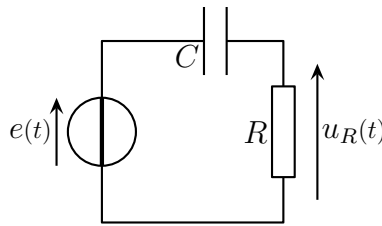
En termes fréquentiels, dériver revient à multiplier par $j\omega$.

Un filtre est dit *pseudo-dérivateur* lorsque sa fonction de transfert vaut $H(j\omega) = H_0 j\omega$ sur une plage limitée de pulsations.

- ◇ En regardant la décomposition de FOURIER d'un signal périodique, nous pouvons dire que chaque pulsation s'écrit $\omega = n\omega_0$ où ω_0 est la pulsation du fondamental. Ainsi, dériver revient à multiplier chaque harmonique par son rang n .
- ◇ Ainsi, le signal triangle, qui possède un spectre qui décroît en $\frac{1}{n^2}$ aura, une fois dérivé, un spectre à décroissance en $\frac{1}{n}$: ce sera un signal rectangle !

★ circuit – fonction de transfert

◇ Considérons le circuit ci-dessous.



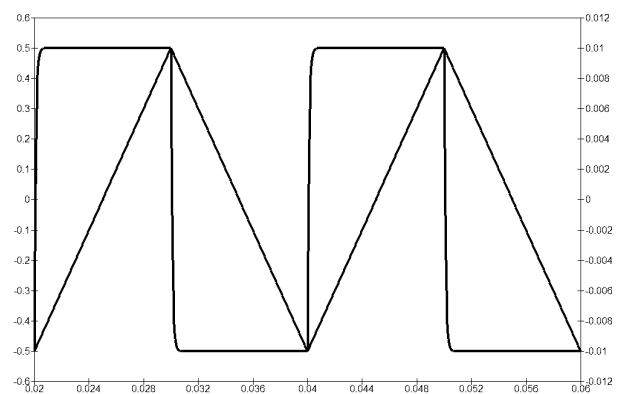
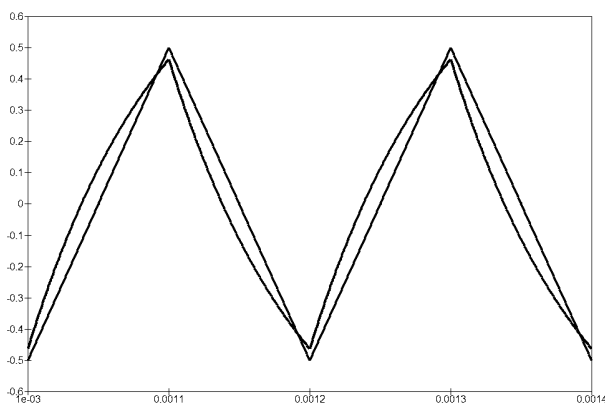
◇ Avec un diviseur de tension, nous trouvons :

$$\underline{U_{R,m}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} E_m = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} E_m \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

◇ En basses fréquences, *ie.* pour $RC\omega \ll 1$, nous avons $\underline{H(j\omega)} \sim \frac{jRC\omega}{1}$, *ie.* le filtre se comporte comme un dérivateur.

★ simulation

◇ Regardons ce que donne le signal de sortie pour deux valeurs de fréquences telles que $RC\omega = 0,03$ et $RC\omega = 3$ avec $C = 100$ nF et $R = 1,0$ k Ω .



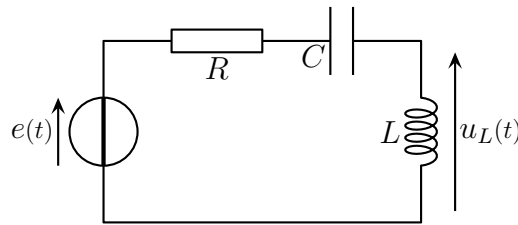
◇ Nous pouvons constater que lorsque $RC\omega \ll 1$, la dérivation se passe bien. Toutefois, le signal de sortie est faible, ce qui n'est pas surprenant étant donné que la fonction de transfert s'écrit, pour ces pulsations $\underline{H(j\omega)} = H_0 \times jRC\omega$.

II – Représentation graphique de la fonction de transfert

II.1 – Cas du R,L,C série

II.1.i – montage – analyse

◇ Dans toute cette partie, nous allons étudier le montage suivant en tant que filtre.



◇ Analyse physique :

→ filtre donc circuit en RSF

→ grandeurs pertinentes : R, L, C (composants), U_e et ω (contraintes)

→ c'est un R, L, C série donc les résultats vont dépendre de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

◇ Analyse technique :

→ circuit à une maille, c'est un circuit simple, un diviseur de tension ça ira.

II.1.ii – c'est bien un filtre

★ fonction de transfert

◇ Étant donné que tous les dipôles sont en série, nous pouvons écrire un diviseur de tension :

$$\frac{U_{L,m}}{E_m} = \frac{j L \omega}{R + \frac{1}{j C \omega} + j L \omega} E_m \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{U_{L,m}}{E_m} = -\frac{L C \omega^2}{1 - L C \omega^2 + j R C \omega}$$

★ écriture canonique

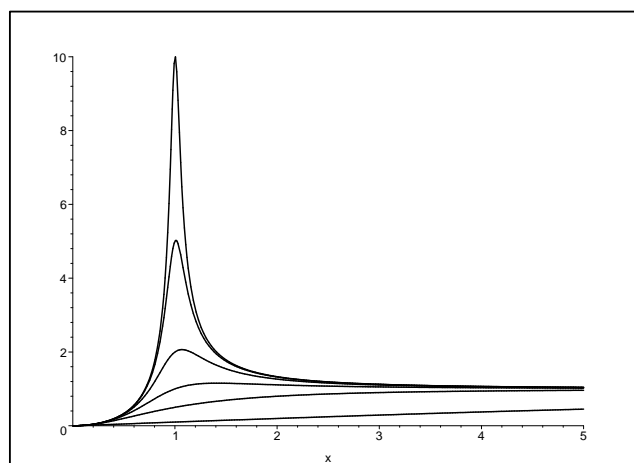
◇ Nous avons $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} C = \frac{\sqrt{LC}}{Q} = \frac{1}{Q \omega_0}$ et ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(jx) = -\frac{x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

★ tracé

◇ Représentons $|\underline{H}|(\omega)$ pour les facteurs de qualité $Q : 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10$.

Graphique 9



◇ Les courbes présentant les pics correspondent aux facteurs de qualité les plus élevés.

II.2 – Gain en décibel

II.2.i – une drôle de définition

Le *gain* d'une fonction de transfert s'écrit :

$$G = |\underline{H}(j\omega)|$$

Le *gain en décibels* d'une fonction de transfert s'écrit :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|)$$

◇ Rappelons que le gain « tout court » d'une fonction de transfert est son module : $G = |\underline{H}(j\omega)|$.

⊛ Il faut que $\underline{H}(j\omega)$ soit sans dimension pour pouvoir parler du gain en décibels. Si la fonction de transfert avait été dimensionnée, il aurait fallu écrire $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{|\underline{H}(j\omega)|}{H_{\text{réf}}}$ avec $H_{\text{réf}}$ une valeur de référence (en général le maximum).

☆ origine de la définition

◇ En fait le gain se mesure en bel et vaut $G_{\text{B}} = \log \frac{P_{\text{s}}}{P_{\text{e}}}$ où P_{e} et P_{s} sont respectivement les puissances fournies en entrée et reçues en sortie.

◇ Or nous savons que $P_{\text{s}} \propto U_{\text{s,m}}^2$ et $P_{\text{e}} \propto U_{\text{e,m}}^2$, ce qui permet d'écrire :

$$G_{\text{B}} = 2 \log \frac{U_{\text{s,m}}}{U_{\text{e,m}}} = 2 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

◇ Enfin, en comptant en **décibel** et non en bel, cela donne bien $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$.

☆ interprétation des dB

◇ Invertissons la définition :

$$U_{\text{s,m}} = U_{\text{e,m}} \times 10^{G_{\text{dB}}/20}$$

Un gain de 20 dB correspond à une amplification d'un facteur 10.
Un gain de 40 dB correspond à une amplification d'un facteur 100.

Un gain de -20 dB correspond à une atténuation d'un facteur 10.
Un gain de -40 dB correspond à une atténuation d'un facteur 100.

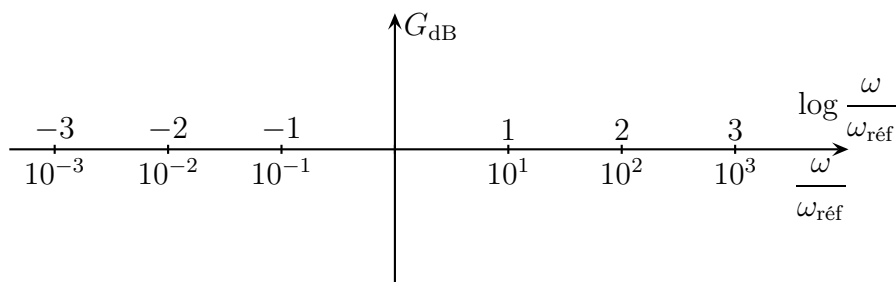
Un gain en décibel positif correspond à une amplification.
Un gain en décibel négatif correspond à une atténuation.

Un gain positif correspond à une amplification du signal.
 Un gain négatif correspond à une atténuation du signal.
 Un gain nul en décibel correspond à une non amplification non atténuation du signal.

II.2.ii – un diagramme particulier

Les *diagrammes de BODE* sont des représentations d'une grandeur en fonction du logarithme décimal d'une autre.

◇ Nous nous commencerons par représenter le gain en décibel en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$.



⊞ pour respecter l'homogénéité, il faut représenter en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ où $\omega_{\text{réf}}$ est une pulsation de référence. Cette pulsation sera choisie de manière assez naturelle une fois connue la fonction de transfert.

◇ Par exemple, pour le circuit R, L, C série, nous savons déjà que la pulsation de référence sera la pulsation propre. Il serait inopportun de choisir autre chose étant donné que cette pulsation est véritablement caractéristique du fonctionnement du circuit R, L, C série.

◇ Pour le tracé, soit il se fait à la main, juste pour une allure et à se moment là l'axe représente $\log \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$, soit c'est en TP et pour reporter des mesures nous utiliserons un axe semi-logarithmique gradué directement en $\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ voire en ω ou f directement !

II.2.iii – comportement asymptotique

★ écriture complète du G_{dB}

◇ Ici la fonction de transfert est déjà écrite en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Nous allons donc chercher à écrire G_{dB} en fonction de $\log x$.

◇ D'après la définition :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \left| -\frac{x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \right| = 20 \log \left(\frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right)$$

◇ Ce n'est pas une écriture simple, ce n'est donc pas vraiment utile de l'écrire.

★ équation des asymptotes

🕒 en basses fréquences

◇ Nous avons $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$. Et ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) \sim -\frac{x^2}{1} = -x^2 \quad \rightsquigarrow \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

◇ Cette fois nous avons bien réussi à écrire G_{dB} en fonction de $X = \log x$: $G_{\text{dB}} = 40 X$. Il s'agit d'une droite de pente +40 dB/déc et d'ordonnée à l'origine nulle.

🕒 une valeur particulière

◇ Choisissons naturellement $\omega = \omega_0$ donc $x = 1$ et $\log x = 0$. Et ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{1 - 1 + j\frac{1}{Q}} = jQ \quad \rightsquigarrow \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log Q$$

🕒 en hautes fréquences

◇ Nous avons $\omega \rightarrow +\infty$ donc $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$. Et ainsi :

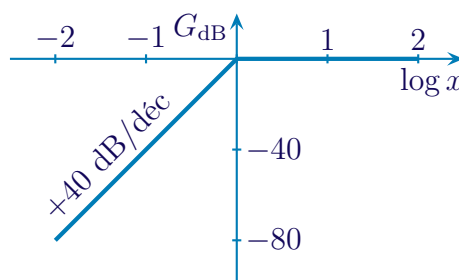
$$\underline{H}(j\omega) \sim -\frac{x^2}{-x^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 20 \log 1 = 0$$

◇ L'asymptote HF est une droite horizontale d'ordonnée nulle.

II.2.iv – tracé

★ diagramme asymptotique

◇ Il est toujours possible de tracer à la main les asymptotes des diagrammes de BODE car ce sont des portions de droite.



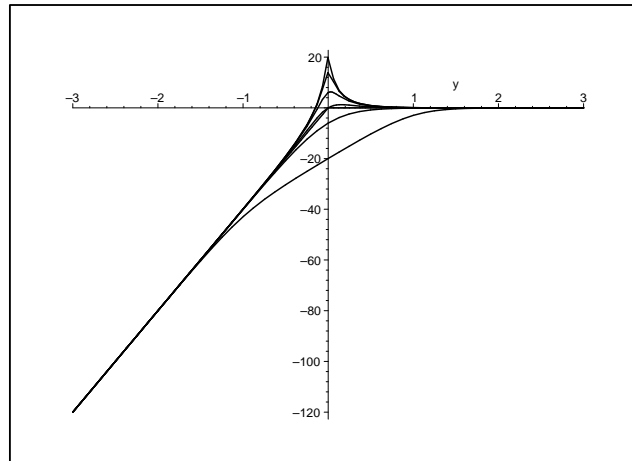
◇ Sur ce tracé, il faut bien faire apparaître les pentes des asymptotes.

◇ Il n'est pas tellement utile de tracer au delà -3 et de $+3$ car cela correspond déjà à une échelle de 10^6 en fréquence ce qui est énorme.

★ diagramme réel

◇ Regardons ce que donne le diagramme réel pour différentes valeurs de Q : 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10.

Graphique 10

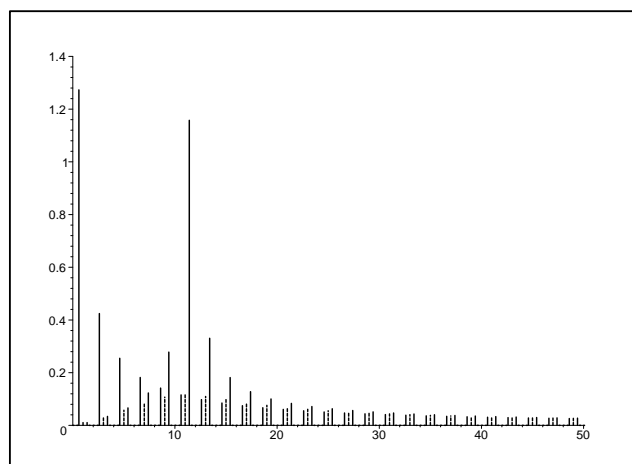


- ◇ Comment reconnaître les différentes courbes ? Avec la valeur en $\log x = 0$: $G_{dB}(x = 1) = 20 \log Q$.
- ◇ Nous pouvons constater qu'au delà d'une décade, les diagrammes réels collent véritablement aux asymptotes.

★ réponse en fréquences

- ◇ Regardons l'effet du filtre en termes fréquentiels pour deux facteurs de qualité (1 et 10) sur un signal rectangulaire et tel que $\omega_0 = 11 \omega_{\text{fond}}$.

Graphique 11



- ◇ La première série de pics (à gauche) correspond au spectre avant filtrage.
- ◇ Nous pouvons constater qu'il y a amplification notable autour de la pulsation propre du circuit pour $Q = 10$ et qu'en termes fréquentiels, c'est encore les harmoniques autour de la pulsation propre du circuit qui sont sensiblement les plus présents. Alors que le filtre est un passe haut, ce n'est pas tout à fait normal.

II.2.v – décade ou octave ?

Une *décade* est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ ou de pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ tel que $f_2 = 10 f_1$ ou $\omega_2 = 10 \omega_1$.

Une *octave* est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ ou de pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ tel que
 $f_2 = 2 f_1$ ou $\omega_2 = 2 \omega_1$.

◇ Le nom « octave » vient du fait qu'il y a 8 notes de musiques par octave.

II.3 – Réponse en phase

II.3.i – c'est du connu, même si ...

La *réponse en phase* d'un filtre correspond au déphasage rajouté par le filtre à la sortie par rapport à l'entrée :

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$$

◇ La différence c'est que maintenant nous représenterons ce déphasage en fonction de $\log x$.

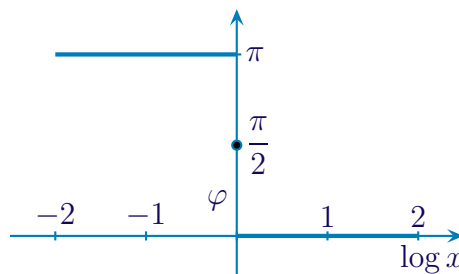
II.3.ii – comportement asymptotique

- ◇ En basses fréquences nous avons $\underline{H}(j\omega) \sim -x^2$ donc $\varphi \rightarrow \pm\pi$.
- ◇ Pour $x = 1$ nous avons $\underline{H}(j) = jQ$ donc $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.
- ◇ En hautes fréquences nous avons $\underline{H}(j\omega) \sim 1$ donc $\varphi \rightarrow 0$.
- ◇ De ces valeurs, nous pouvons en déduire $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\pi$.

II.3.iii – tracé

★ diagramme asymptotique

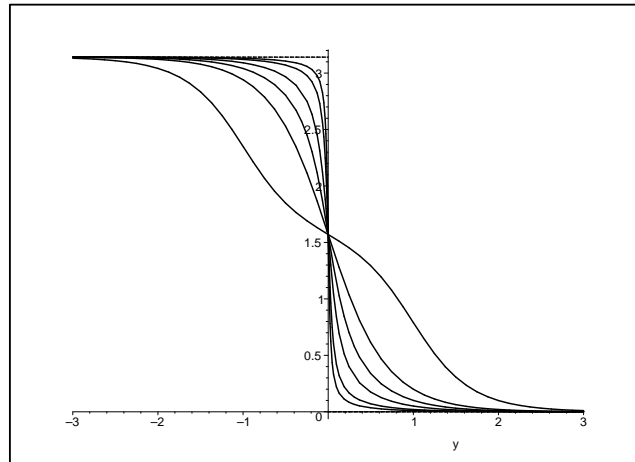
- ◇ Tout comme pour le diagramme du gain en décibel, il est facile de faire le diagramme asymptotique de la réponse en phase.



★ diagramme réel

- ◇ Regardons ce que donne le diagramme réel pour différentes valeurs de Q : 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10.

Graphique 12



- ◇ Comment reconnaître les différentes courbes ? Cela ne peut pas se voir dans le diagramme asymptotique car même la valeur particulière de x ne permet pas de faire apparaître la dépendance en Q . Reprenons donc la fonction de transfert complète $\underline{H}(j\omega) = -\frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$
- ◇ Posons-nous la question : quel est le diagramme qui colle le plus aux asymptotes ? Le diagramme tel que la fonction de transfert soit quasiment tout le temps réel. Pour cela il faut que le terme en $j\frac{x}{Q}$ soit négligeable ce qui est le cas pour $Q \gg 1$.
- ◇ Nous pouvons constater que le diagramme en phase colle moins aux asymptotes que le diagramme du gain en décibels.

II.4 – Caractérisation d'un filtre

II.4.i – nature d'un filtre

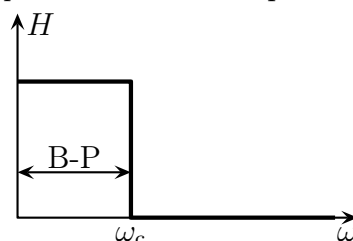
★ grandeur intéressante

- ◇ La plupart du temps, la grandeur intéressante est l'amplitude de la tension de sortie. C'est pourquoi nous allons essentiellement représenter $|\underline{H}(j\omega)|$ qui correspond au facteur multiplicateur entre la tension d'entrée et la tension de sortie : plus $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ est petit, plus la sortie est faible.

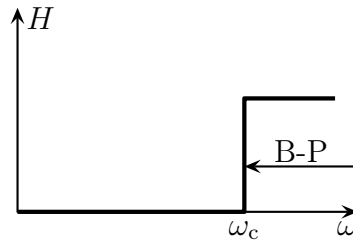
★ filtre idéal

La *bande passante* d'un filtre est l'ensemble des pulsations (ou des fréquences) que laisse passer le filtre. Cette bande passante est limitée par les *pulsations de coupure* (ou fréquence de coupure).

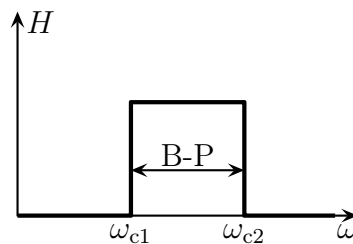
Un filtre est qualifié de *passe-bas* s'il laisse passer les basses fréquences.



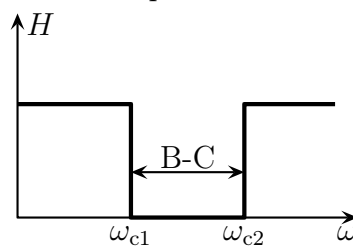
Un filtre est qualifié de *passé-haut* s'il laisse passer les hautes fréquences.



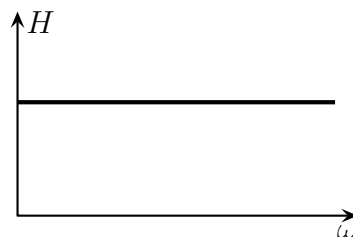
Un filtre est qualifié de *passé-bande* s'il laisse passer une plage limitée de fréquences.



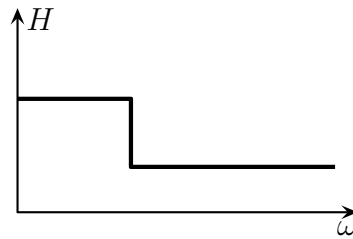
Un filtre est qualifié de *coupe-bande* s'il ne laisse pas passer uniquement une plage limitée de fréquences. Le filtre est alors caractérisé par sa *bande coupée* plutôt que par sa bande passante.



Un filtre est qualifié de *déphaseur* si son rôle se borne à modifier la phase entre l'entrée et la sortie.



Un filtre est qualifié d'*atténuateur* si laisse passer hautes et basses fréquence mais avec des amplifications différentes.



★ filtre réel

- ◇ En réalité, les transitions entre bande passante et bande coupée sont plus douces. Il faut donc poser une limite arbitraire.

Pour un filtre réel, les pulsations de coupures ω_c sont définies par $H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ où H_{\max} est l'amplification maximale possible avec le filtre.

- ◇ Et en terme de gain en décibels ? Calculons le gain en dB pour une pulsation de coupure :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = 20 \log \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = 20 \log H_{\max} - 20 \log \sqrt{2} = G_{\text{dB},\max} - 3,0 \text{ dB}$$

Pour un filtre réel, les pulsations de coupures ω_c sont telles que le gain soit tel que :

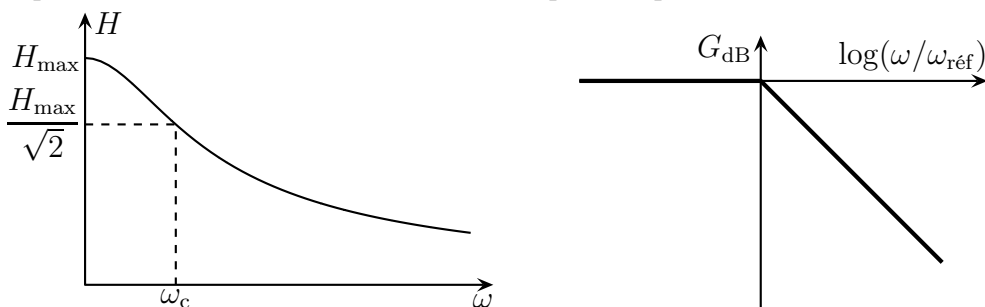
$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB},\max} - 3,0 \text{ dB}$$

- ◇ Comme nous l'avons dit, la bande passante a été définie comme étant l'intervalle de fréquence pour laquelle la puissance est au moins la moitié de la puissance maximale possible.

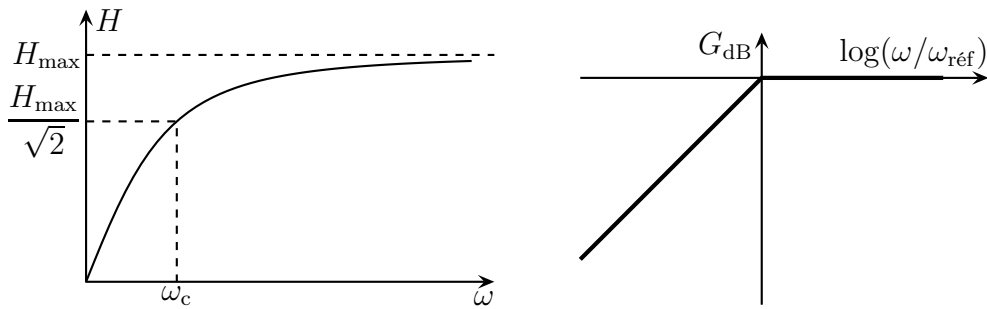
Une augmentation de 3,0 dB correspond à un doublement de la puissance mise en jeu.

- ◇ C'est valable dans n'importe quel domaine, y compris auditif. À 41 dB, ce n'est pas très bruyant, mais à 44 dB ça l'est deux fois plus ! Autrement dit : 41 dB + 41 dB = 44 dB !

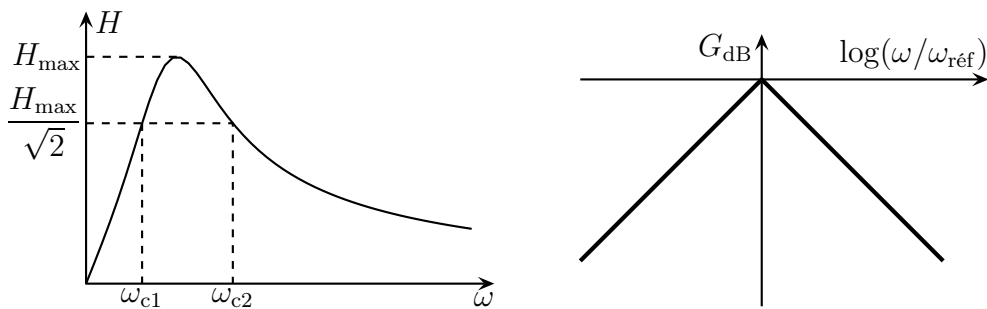
Un filtre passe-bas a une fonction de transfert qui se représente sous les formes suivantes.



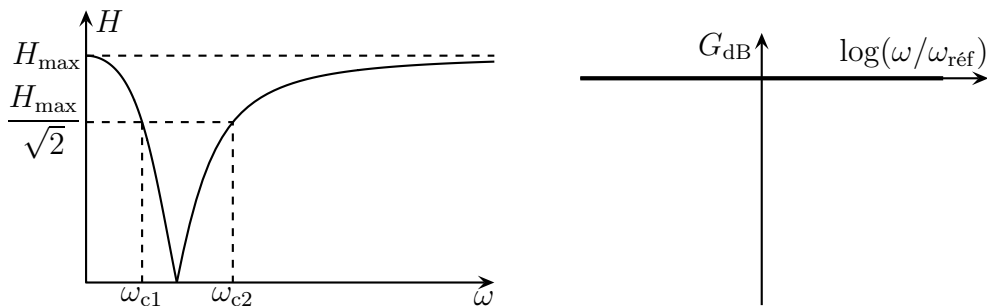
Un filtre passe-haut a une fonction de transfert qui se représente sous les formes suivantes.



Un filtre passe-bande a une fonction de transfert qui se représente sous les formes suivantes.



Un filtre coupe-bande a une fonction de transfert qui se représente sous les formes suivantes.



- ✧ En ce qui concerne le filtre R, L, C , étant donné son comportement asymptotique, cela devrait être un filtre passe-haut. Toutefois, s'il présente une résonance, il ne plus être considéré comme tel car il devient alors un filtre passe-bande.

II.4.ii – ordre d'un filtre

- ✧ C'est une autre façon de caractériser les filtres.

L'ordre d'un filtre est le degré le plus élevé des deux polynômes de la fonction de transfert écrite sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$.

- ◇ Par exemple pour le filtre vu dans la première partie $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$, nous avons $N(X) = 1$ de degré 0 et $D(X) = 1 + RCX$ de degré 1, c'est donc un filtre d'ordre 1.
- ◇ Pour le filtre R,L,C , nous avons $\underline{H}(j\omega) = -\frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$, les polynômes s'écrivent donc $N(X) = X^2$ de degré 2 et $D(X) = 1 + \frac{X}{Q} + X^2$ de degré 2 aussi. Il s'agit donc d'un filtre d'ordre 2.

III – Filtres réels d'ordre 1 et 2 (exemples de)

III.1 – Intérêt des filtres d'ordre 1 et 2

III.1.i – tout se décompose en filtres d'ordre 1 et 2

- ◇ Un théorème de mathématiques dit qu'il est possible de décomposer tout polynômes à coefficients réels en un produit de polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
- ◇ Imaginons une fonction de transfert compliquée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(X) = N_1(X) \times N_2(X) \times \cdots \times N_n(X) = \prod N_i(X) \\ D(X) = D_1(X) \times D_2(X) \times \cdots \times D_n(X) = \prod D_i(X) \end{cases}$$

- ◇ Alors nous pouvons écrire :

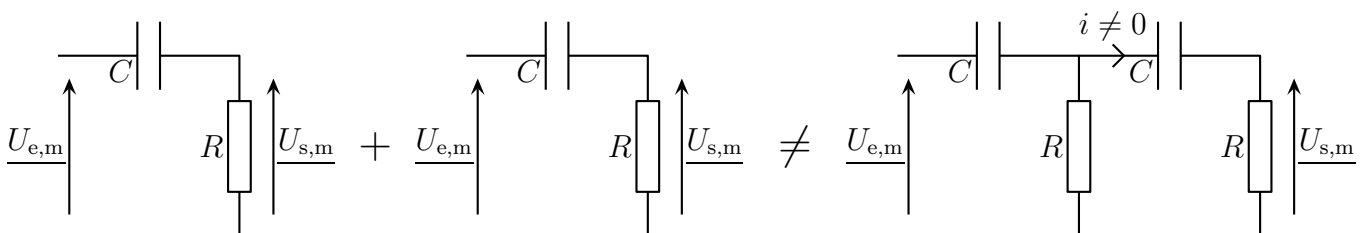
$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{N_1(j\omega) \times N_2(j\omega) \times \cdots \times N_n(j\omega)}{D_1(j\omega) \times D_2(j\omega) \times \cdots \times D_n(j\omega)} = \frac{N_1(j\omega)}{D_1(j\omega)} \times \frac{N_2(j\omega)}{D_2(j\omega)} \times \cdots \times \frac{N_n(j\omega)}{D_n(j\omega)} \\ &= \prod \frac{N_i(j\omega)}{D_i(j\omega)} = \prod \underline{H}_i(j\omega) \end{aligned}$$

où chaque fonction de transfert $\underline{H}_i(j\omega)$ est une fonction de transfert d'ordre 1 ou 2.

Toute fonction de transfert peut s'écrire comme le produit de fonctions de transfert d'ordre 1 ou 2.

III.1.ii – physiquement il faut faire attention

- ◇ La plupart du temps les filtres étudiés sont tels qu'aucun courant n'est pris en sortie. Il faut donc s'assurer que tel est encore bien le cas après l'association.



III.1.iii – mais quand c'est bon, tout s'additionne

✧ Imaginons que nous ayons une fonction de transfert telle que $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)$. Alors :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20 \log(|\underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)|) = 20 \log(|\underline{H}_1(j\omega)|) + 20 \log(|\underline{H}_2(j\omega)|) = G_{dB,1} + G_{dB,2}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(\underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)) = \arg(\underline{H}_1(j\omega)) + \arg(\underline{H}_2(j\omega)) = \varphi_1 + \varphi_2$$

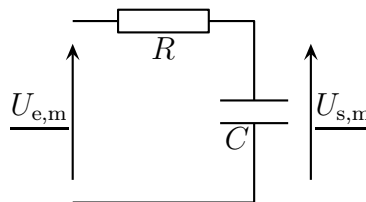
III.2 – Étudier un filtre

- ✧ Pour étudier un filtre, il faut faire 3 ou 4 étapes :
 - déterminer la nature du filtre
 - trouver la fonction de transfert du filtre
 - tracer les diagrammes asymptotiques puis réel du filtre
 - étudier éventuellement quelques caractéristiques précises du filtre
- ✧ Pour déterminer la nature du filtre (passe-bas, passe-haut), il faut étudier le comportement du circuit en basses et hautes fréquences, avec les comportements équivalents des bobines et des condensateurs. Il ne faudra pas hésiter à refaire un schéma sans oublier que le circuit est alors simplifié.
- ✧ Trouver la fonction de transfert est un problème usuel en électrocinétique : c'est trouver une grandeur en fonction d'autres grandeurs.
- ✧ Pour tracer les diagrammes asymptotiques, il faut d'abord trouver le comportement équivalent de la fonction de transfert en basses et hautes fréquence ainsi qu'une valeur particulière, en général assez facile à deviner. Nous en profiterons pour vérifier que cela concorde avec la nature du filtre trouvé au préalable.
- ✧ Enfin, dans un dernier temps, il sera peut-être utile de chercher la bande passante, la ou les pulsations de coupure, ...
- ✧ La détermination de la nature du filtre n'est autre qu'une partie de l'analyse physique d'un filtre !

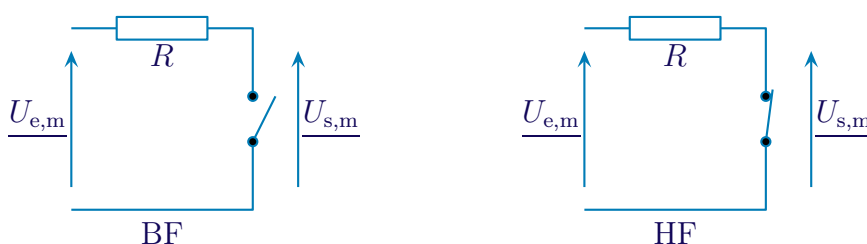
III.3 – Filtre passe-bas d'ordre 1

III.3.i – montage – analyse

✧ Considérons le filtre ci-dessous.



✧ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



- ◇ Dans le cas BF, la tension aux bornes d'un interrupteur n'est pas connu et il ne vaut mieux pas écrire une loi des mailles en terme de courants. Écrivons plutôt une loi des nœuds en terme de potentiels : $\frac{U_{e,m} - U_{s,m}}{R} + 0 = 0$ et donc $U_{s,m} = U_{e,m}$, *ie.* le filtre laisse passer les basses fréquences.
- ◇ Dans le cas HF, nous pouvons tout de suite écrire $U_{s,m} = 0$ car il s'agit de la tension aux bornes d'un fil.
- ◇ Finalement, le filtre est un passe-bas.
- ◇ Analyse physique :
 - le filtre est un passe-bas
 - la pulsation caractéristique du filtre sera fonction de R et C
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »
 - ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.3.ii – fonction de transfert

- ◇ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U_{s,m}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{U_{e,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_{s,m}}}{\underline{U_{e,m}}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

★ écriture canonique

- ◇ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H(jx)} = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$$

- ◇ Dans notre cas : $H_0 = 1$ et $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$.

III.3.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

- ◇ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H(jx)} \sim \frac{H_0}{1} = H_0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log |H_0| \rightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pm\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- ◇ L'asymptote BF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.
- ◇ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+j} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{|H_0|}{|1+j|} = 20 \log \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = 20 \log |H_0| - 3,0 \text{ dB} \\ \varphi = \arg(H_0) - \arg(1+j) = \arg(H_0) - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \text{ si } H_0 > 0 \\ \frac{3\pi}{4} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$:

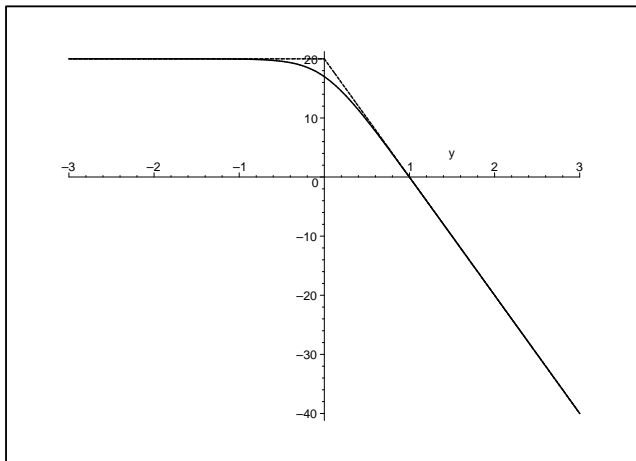
$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{jx} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log \frac{|H_0|}{x} \sim 20 \log |H_0| - 20 \log x \\ \varphi \sim \arg \frac{H_0}{jx} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote HF admet une pente de -20 dB/déc d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0|$.

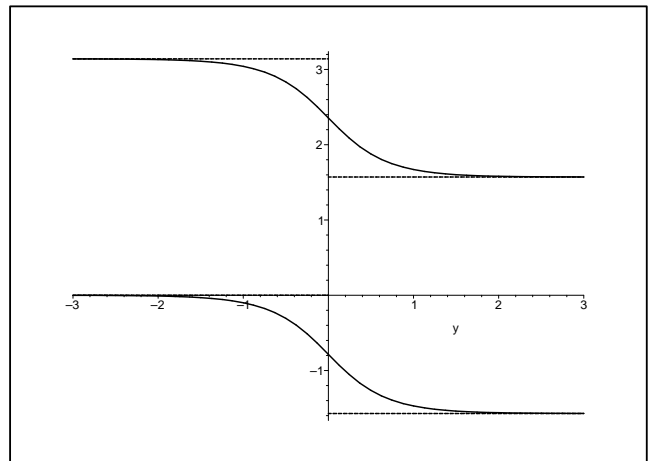
★ tracés des diagrammes de BODE

◇ Les tracés sont les suivants pour $H_0 = \pm 10$.

Graphique 13



Graphique 14



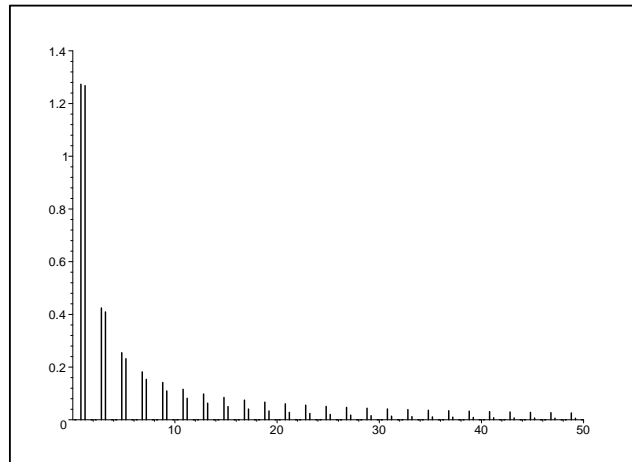
◇ Nous pouvons constater que :

- les diagrammes réels collent aux asymptotes pour le gain en décibels mais pas trop pour la phase
- que le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase

★ point de vue fréquentiel

◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et $H_0 = 1$.

Graphique 15



- ✧ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée alors que la série à droite est le spectre du signal de sortie.
- ✧ Nous pouvons constater que, comme prévu, les harmoniques de fréquence élevée sont atténuées. Toutefois nous pouvons aussi voir qu'il reste des harmoniques en hautes fréquences visibles à l'échelle du graphique. Le filtrage n'est peut-être pas si bon que cela.

III.3.iv – caractéristiques

★ gain maximal

- ✧ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$.
- ✧ Nous avons $H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+x^2}}$ dont le maximum est visiblement atteint en $x = 0$, ce qui donne $H_{\max} = |H_0|$.

★ pulsations de coupure

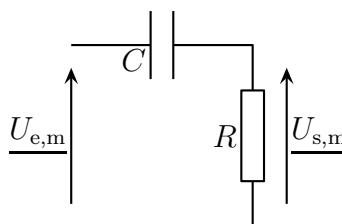
- ✧ Par définition :

$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{x_c = 1}$$

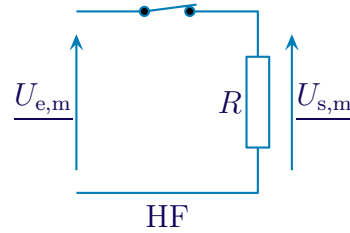
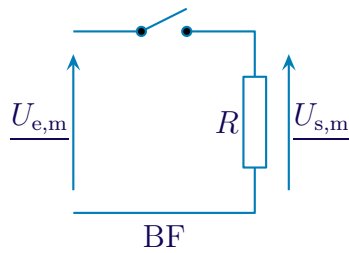
III.4 – Filtre passe-haut d'ordre 1

III.4.i – montage – analyse

- ✧ Considérons le filtre ci-dessous.



- ✧ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



- ◇ Dans le cas BF, la tension aux bornes du résistor est nulle car aucun courant ne le traverse. Ainsi $\underline{U_{s,m}} = 0$, *ie.* le filtre ne laisse pas passer les basses fréquences.
- ◇ Dans le cas HF, nous pouvons tout de suite écrire $\underline{U_{s,m}} = \underline{U_{e,m}}$.
- ◇ Finalement, le filtre est un passe-haut.
- ◇ Analyse physique :
 - le filtre est un passe-haut
 - la pulsation caractéristique du filtre sera fonction de R et C
- ◇ Analyse technique :
 - approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »
 - ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.4.ii – fonction de transfert

- ◇ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U_{s,m}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \times \underline{U_{e,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_{s,m}}}{\underline{U_{e,m}}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

★ écriture canonique

- ◇ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H(jx)} = H_0 \times \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$$

- ◇ Dans notre cas : $H_0 = 1$ et $\omega_{\text{réf}} = \frac{1}{RC}$.

III.4.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

- ◇ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H(jx)} \sim \frac{H_0 jx}{1} = H_0 jx \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log(|H_0| x) \sim 20 \log |H_0| + 20 \log x \\ \varphi \sim \arg(H_0 jx) \rightarrow \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- ◇ L'asymptote BF admet une pente de +20 dB/déc d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0|$.

◇ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0 j}{1+j} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{|H_0|}{|1+j|} = 20 \log \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = 20 \log |H_0| - 3,0 \text{ dB} \\ \varphi = \arg(H_0 j) - \arg(1+j) = \arg(H_0) - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ si } H_0 > 0 \\ -\frac{3\pi}{4} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$:

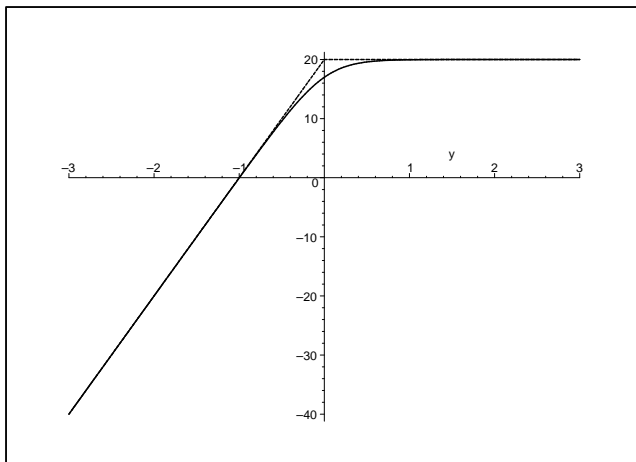
$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0 j x}{j x} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log |H_0| \rightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg H_0 \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ -\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote HF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.

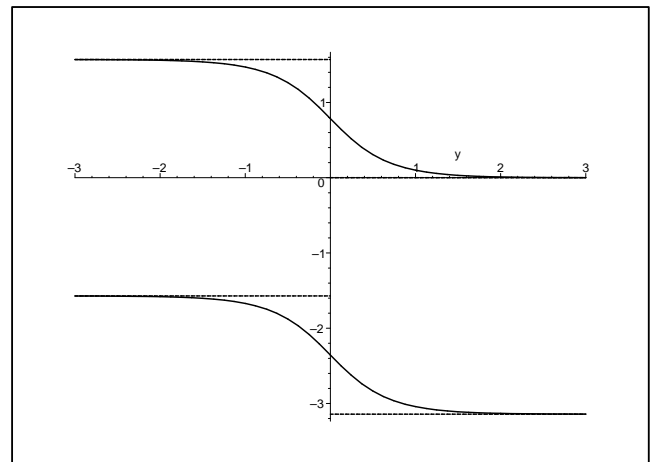
★ tracés des diagrammes de BODE

◇ Les tracés sont les suivants pour $H_0 = \pm 10$.

Graphique 16



Graphique 17



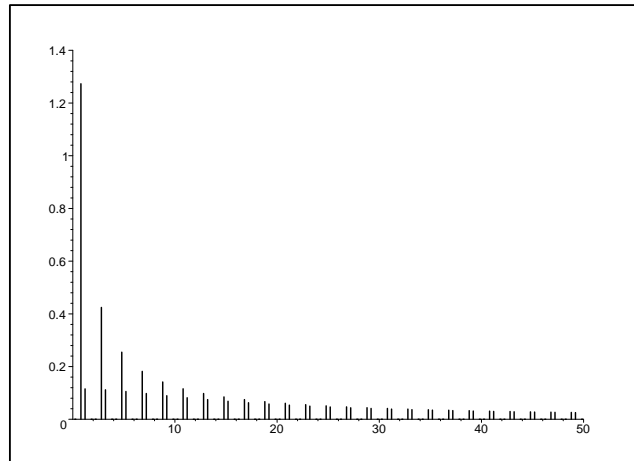
◇ Nous pouvons constater que :

- les diagrammes réels collent aux asymptotes pour le gain en décibels mais pas trop pour la phase
- que le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase

★ point de vue fréquentiel

◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et $H_0 = 1$.

Graphique 18



- ◇ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée alors que la série à droite est le spectre du signal de sortie.
- ◇ Nous pouvons constater que, comme prévu, les harmoniques de basse fréquence sont atténuées. Toutefois nous pouvons aussi voir que malgré l'atténuation, les pics de basse fréquence sont loin d'être négligeables devant les pics situés en haute fréquence.

III.4.iv – caractéristiques

★ gain maximal

- ◇ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$.
- ◇ Réécrivons la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{\frac{1}{jx} + 1} = \frac{H_0}{1 - \frac{j}{x}}$.
- ◇ Nous avons alors $H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$ dont le maximum est visiblement atteint en $x = +\infty$, ce qui donne

$$\boxed{H_{\max} = |H_0|}.$$

★ pulsations de coupure

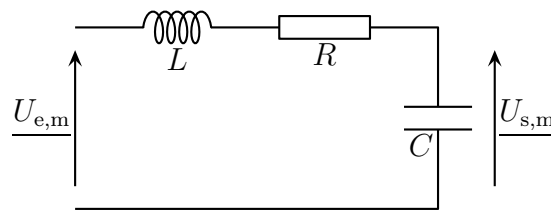
- ◇ Par définition :

$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_c^2}}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{x_c = 1}$$

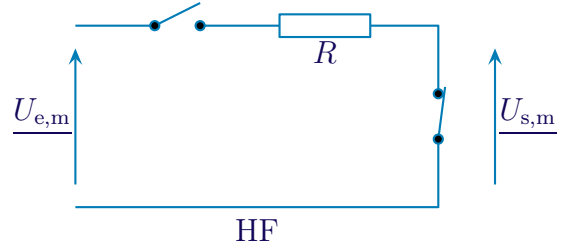
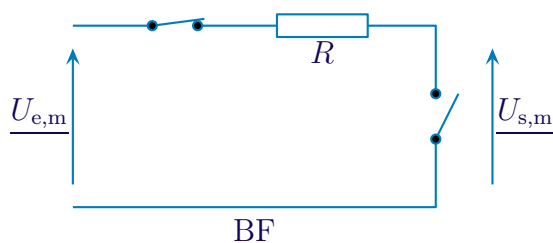
III.5 – Filtre passe-bas d'ordre 2

III.5.i – montage – analyse

- ◇ Considérons le filtre ci-dessous.



◇ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



◇ Dans le cas BF, la tension aux bornes d'un interrupteur n'est pas connu et il ne vaut mieux pas écrire une loi des mailles en terme de courants. Écrivons plutôt une loi des nœuds en terme de potentiel :

$$\frac{U_{e,m} - U_{s,m}}{R} + 0 = 0 \text{ et donc } U_{s,m} = U_{e,m}, \text{ ie. le filtre laisse passer les basses fréquences.}$$

◇ Dans le cas HF, nous pouvons tout de suite écrire $U_{s,m} = 0$ car il s'agit de la tension aux bornes d'un fil.

◇ Finalement, le filtre est un **passe-bas**.

◇ Analyse physique :

→ le filtre est un **passe-bas**

→ il s'agit d'un circuit R, L, C série donc la pulsation caractéristique du filtre sera proportionnelle

$$\text{à } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et le facteur de qualité } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ interviendra dans les résultats.}$$

◇ Analyse technique :

→ approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »

→ ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.5.ii – fonction de transfert

◇ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U_{s,m}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \times U_{e,m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_{s,m}}}{\underline{U_{e,m}}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

★ écriture canonique

◇ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H(jx)} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{avec} \quad H_0 \geqslant 0 \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} \quad \text{et} \quad Q > 0$$

◇ Par identification nous avons :

$$\begin{cases} LC = \frac{1}{\omega_{\text{réf}}^2} \\ RC = \frac{1}{Q_{\text{filtre}} \omega_{\text{réf}}} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega_{\text{réf}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \\ Q_{\text{filtre}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \end{cases}$$

◇ Ainsi le facteur de qualité du filtre n'est autre que le facteur de qualité du circuit. Quelle surprise !

III.5.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

◇ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{1} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log |H_0| \rightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pm\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote BF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.

◇ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{j} = -j Q H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |Q H_0| = 20 \log Q + 20 \log |H_0| \\ \varphi = \arg(-j Q H_0) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{-x^2} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log \frac{|H_0|}{x^2} \sim 20 \log |H_0| - 20 \log x^2 \sim 20 \log |H_0| - 40 \log x \\ \varphi \sim \arg\left(-\frac{H_0}{x^2}\right) \rightarrow \begin{cases} -\pi \text{ si } H_0 > 0 \\ 0 \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote HF admet une pente de -40 dB/déc d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0|$.

★ troisième asymptote

◇ Le dénominateur de la fonction de transfert est une somme de 3 termes dont 2 sont prédominants en BF ou HF. Cherchons ce qu'il se passe lorsque c'est le 3^e qui prédomine et dans quelle condition il peut le faire.

◇ Nous avons alors, par volonté :

$$\underline{H(jx)} \sim \frac{H_0}{j \frac{x}{Q}} = -j \frac{Q H_0}{x} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log \frac{|Q H_0|}{x} \sim 20 \log |H_0| + 20 \log Q - 20 \log x \\ \varphi \sim \arg \left(-j \frac{Q H_0}{x} \right) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ +\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Pour que le 3^e terme soit prépondérant, il faut :

$$\begin{cases} \frac{x}{Q} \gg 1 \\ \frac{x}{Q} \gg x^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Q \ll x \\ Q \ll \frac{1}{x} \end{cases} \rightsquigarrow Q \ll 1$$

La 3^e asymptote, de pente -20 dB/déc , n'existe que si le facteur de qualité est très faible.

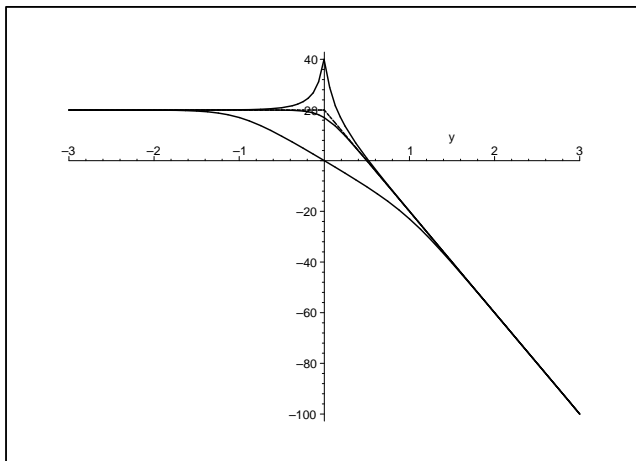
◇ C'est normal pour deux raisons :

- techniquement c'est la seule façon de donner de l'importance au terme $j \frac{x}{Q}$
- avec un facteur de qualité très faible, le circuit est plutôt en mode apériodique ce qui fait apparaître deux constantes de temps (celle des solutions en e^{-t/τ_1} et e^{-t/τ_2}) et donc deux pulsations particulières distinctes : l'une sera la limite des basses fréquences, l'autre la limite des hautes fréquences

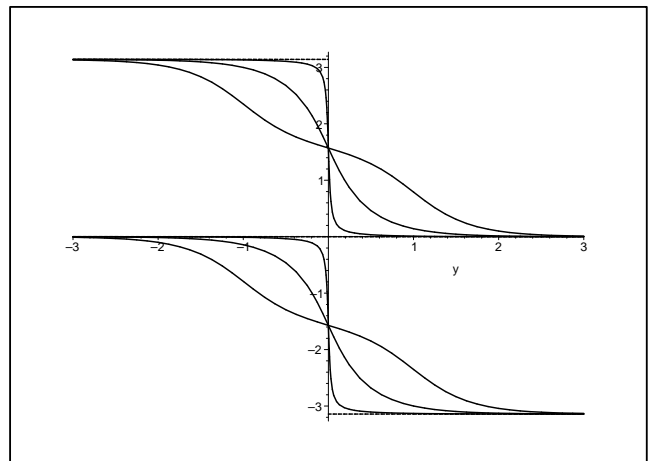
★ tracés des diagrammes de BODE

◇ Les tracés sont les suivants pour trois facteurs de qualité $Q : 0,1 ; \frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = \pm 10$.

Graphique 19



Graphique 20



◇ Nous pouvons constater que :

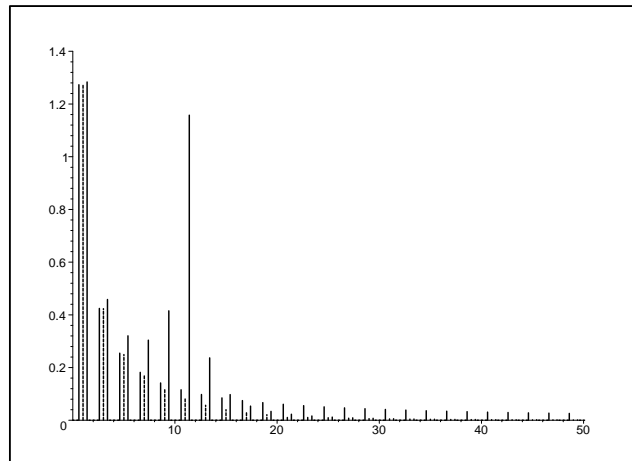
- les diagrammes réels collent aux asymptotes pour le gain en décibels mais pas trop pour la phase
- le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase
- lorsque le facteur de qualité est élevé, il y a un phénomène de résonance.
- lorsque le facteur de qualité est faible, nous pouvons nettement distinguer une 3^e asymptote.

Pour un filtre passe-bas, le phénomène de résonance est néfaste.

☆ point de vue fréquentiel

- ◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et pour deux facteurs de qualité : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = 1$.

Graphique 21



- ◇ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée, la série du milieu correspond à $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la série de droite à $Q = 10$.
- ◇ Nous pouvons constater que, comme prévu, les harmoniques de fréquence élevée sont atténuées, mais cette fois et contrairement au filtre d'ordre 1, l'atténuation est excellente en HF. Comme prévu par les diagrammes, nous pouvons voir un net effet d'amplification par le phénomène de résonance.

III.5.iv – caractéristiques pour le filtre optimal

- ◇ Étant donné que nous nous intéressons à un filtre passe-bas, nous allons chercher les caractéristiques du filtre passe-bas. Il ne faut donc pas que le filtre présente de résonance.
- ◇ Plaçons-nous juste à la limite de la résonance, *ie.* choisissons $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

☆ gain maximal

- ◇ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\sqrt{2}x}$.
- ◇ Nous avons :

$$H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + x^4}}$$

- ◇ Le maximum est visiblement atteint en $x = 0$, ce qui donne $H_{\text{max}} = |H_0|$.

☆ pulsations de coupure

- ◇ Par définition :

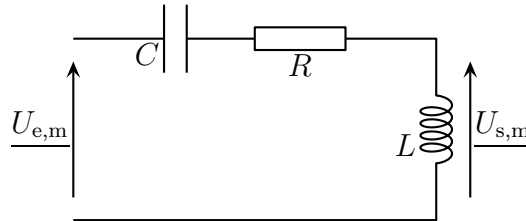
$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{x_c = 1}$$

- ✧ Pour ce filtre très particulier, la pulsation de coupure n'est autre que la pulsation propre du circuit R, L, C série.

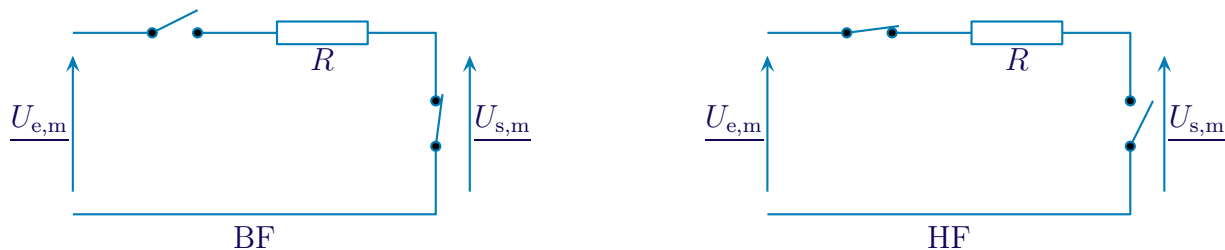
III.6 – Filtre passe-haut d'ordre 2

III.6.i – montage – analyse

- ✧ Considérons le filtre ci-dessous.



- ✧ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



- ✧ Dans le cas BF, nous pouvons tout de suite écrire $\underline{U_{s,m}} = 0$ car il s'agit de la tension aux bornes d'un fil.
- ✧ Dans le cas HF, la tension aux bornes d'un interrupteur n'est pas connu et il ne vaut mieux pas écrire une loi des mailles en terme de courants. Écrivons plutôt une loi des nœuds en terme de potentiel : $\frac{\underline{U_{e,m}} - \underline{U_{s,m}}}{R} + 0 = 0$ et donc $\underline{U_{s,m}} = \underline{U_{e,m}}$, *ie.* le filtre laisse passer les hautes fréquences.
- ✧ Finalement, le filtre est un passe-haut.
- ✧ Analyse physique :

- le filtre est un passe-haut
- il s'agit d'un circuit R, L, C série donc la pulsation caractéristique du filtre sera proportionnelle à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ interviendra dans les résultats.

- ✧ Analyse technique :

- approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »
- ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.6.ii – fonction de transfert

- ✧ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U_{s,m}} = \frac{jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} \times \underline{U_{e,m}} \rightsquigarrow \underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_{s,m}}}{\underline{U_{e,m}}} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

★ écriture canonique

✧ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0 \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} \quad \text{et} \quad Q > 0$$

✧ Par identification nous avons :

$$\begin{cases} LC = \frac{1}{\omega_{\text{réf}}^2} \\ RC = \frac{1}{Q_{\text{filtre}} \omega_{\text{réf}}} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega_{\text{réf}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \\ Q_{\text{filtre}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \end{cases}$$

✧ Ainsi le facteur de qualité du filtre n'est autre que le facteur de qualité du circuit. Quelle surprise !

III.6.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

✧ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim -\frac{H_0 x^2}{1} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log |H_0 x^2| \sim 20 \log |H_0| + 40 \log x \\ \varphi \sim \arg\left(-\frac{H_0}{x^2}\right) \rightarrow \begin{cases} \pm\pi \text{ si } H_0 > 0 \\ 0 \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ L'asymptote BF admet une pente de +40 dB/déc d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0|$.

✧ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) = \frac{-H_0}{j \frac{1}{Q}} = j Q H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |Q H_0| = 20 \log Q + 20 \log |H_0| \\ \varphi = \arg(j Q H_0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{-H_0 x^2}{-x^2} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \rightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ -\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ L'asymptote HF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.

★ troisième asymptote

✧ Le dénominateur de la fonction de transfert est une somme de 3 termes dont 2 sont prédominants en BF ou HF. Cherchons ce qu'il se passe lorsque c'est le 3^e qui prédomine et dans quelle condition il peut le faire.

◇ Nous avons alors, par volonté :

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{-H_0 x^2}{j \frac{x}{Q}} = j Q H_0 x \rightsquigarrow \begin{cases} G_{dB} \sim 20 \log |Q H_0 x| \sim 20 \log |H_0| + 20 \log Q + 20 \log x \\ \varphi \sim \arg(j Q H_0 x) \longrightarrow \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Pour que le 3^e terme soit prépondérant, il faut :

$$\begin{cases} \frac{x}{Q} \gg 1 \\ \frac{x}{Q} \gg x^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Q \ll x \\ Q \ll \frac{1}{x} \end{cases} \rightsquigarrow Q \ll 1$$

◇ La 3^e asymptote, de pente +20 dB/déc et d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0| + 20 \log Q$, n'existe que si le facteur de qualité est très faible.

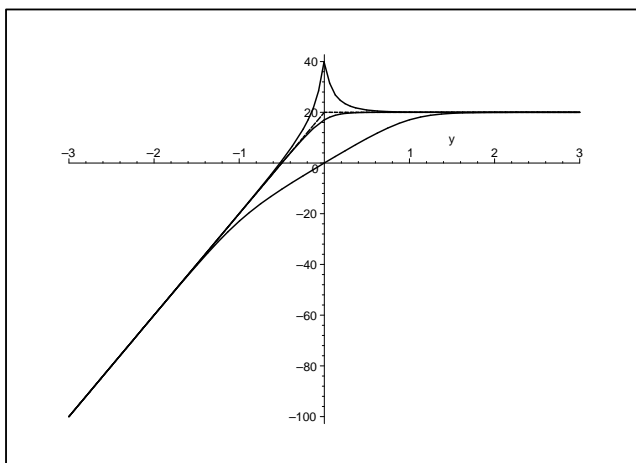
◇ C'est normal pour les mêmes raisons que pour le filtre passe-bas :

- techniquement c'est la seule façon de donner de l'importance au terme $j \frac{x}{Q}$
- avec un facteur de qualité très faible, le circuit est plutôt en mode apériodique ce qui fait apparaître deux constantes de temps (celle des solutions en e^{-t/τ_1} et e^{-t/τ_2}) et donc deux pulsations particulières distinctes : l'une sera la limite des basses fréquences, l'autre la limite des hautes fréquences

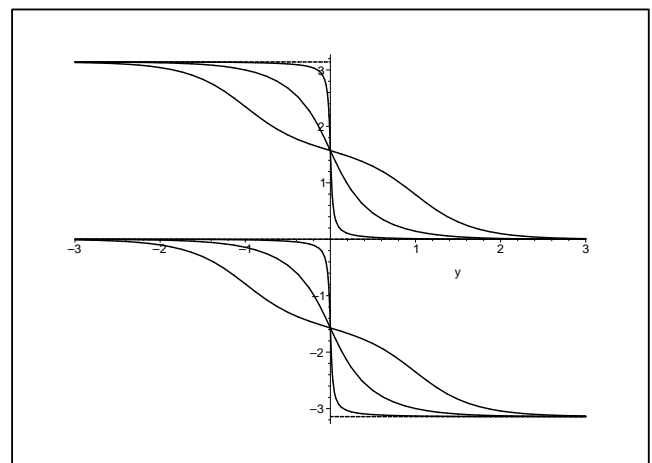
★ tracés des diagrammes de BODE

◇ Les tracés sont les suivants pour trois facteurs de qualité $Q : 0,1 ; \frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = \pm 10$.

Graphique 22



Graphique 23



◇ Nous pouvons constater que :

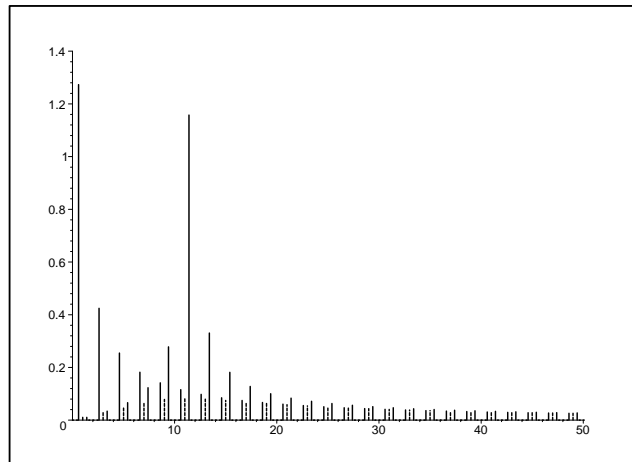
- les diagrammes réels collent aux asymptotes pour le gain en décibels mais pas trop pour la phase
- le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase
- lorsque le facteur de qualité est élevé, il y a un phénomène de résonance.
- lorsque le facteur de qualité est faible, nous pouvons nettement distinguer une 3^e asymptote.

Pour un filtre passe-haut, le phénomène de résonance est néfaste.

★ point de vue fréquentiel

- ◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et pour deux facteurs de qualité : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = 1$.

Graphique 24



- ◇ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée, la série du milieu correspond à $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la série de droite à $Q = 10$.
- ◇ Nous pouvons constater que, comme prévu, les harmoniques de basse fréquence sont atténuées, mais cette fois et contrairement au filtre d'ordre 1, l'atténuation est excellente. Comme prévu par les diagrammes, nous pouvons voir un net effet d'amplification par le phénomène de résonance.

III.6.iv – caractéristiques pour le filtre optimal

- ◇ Étant donné que nous nous intéressons à un filtre passe-haut, nous allons chercher les caractéristiques du filtre passe-haut. Il ne faut donc pas que le filtre présente de résonance.
- ◇ Plaçons-nous juste à la limite de la résonance, *ie.* choisissons $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

★ gain maximal

- ◇ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(j\omega) = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\sqrt{2}x}$.
- ◇ Nous avons :

$$H(x) = \frac{|H_0| x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{|H_0| x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}$$

- ◇ Le maximum est visiblement atteint en $x = +\infty$, ce qui donne $H_{\text{max}} = |H_0|$.

★ pulsations de coupure

- ◇ Par définition :

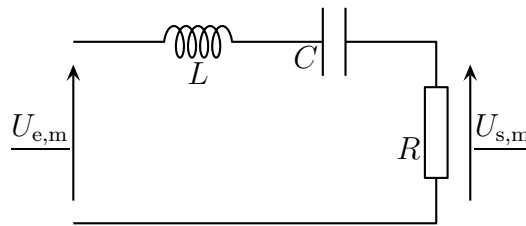
$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_c^2}}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{x_c = 1}$$

- ✧ Pour ce filtre très particulier, la pulsation de coupure n'est autre que la pulsation propre du circuit R, L, C série.

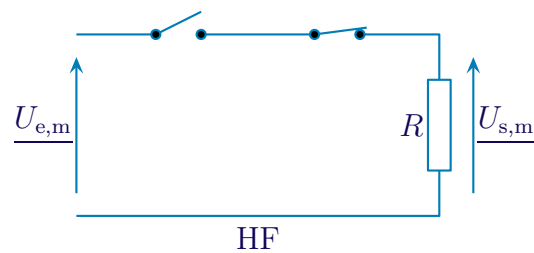
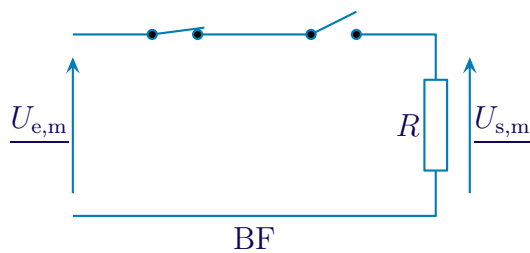
III.7 – Filtre passe-bande d'ordre 2

III.7.i – montage – analyse

- ✧ Considérons le filtre ci-dessous.



- ✧ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



- ✧ Dans les deux cas la tension est nulle aux bornes du résistor car aucun courant ne le traverse. Dans ces conditions, aussi bien en BF qu'en HF, $\underline{U}_{s,m} = 0$.

- ✧ Finalement, le filtre est un passe-bande.

- ✧ Analyse physique :

- le filtre est un passe-bande
- il s'agit d'un circuit R, L, C série donc la pulsation caractéristique du filtre sera proportionnelle à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ interviendra dans les résultats.

- ✧ Analyse technique :

- approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »
- ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.7.ii – fonction de transfert

- ✧ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U}_{s,m} = \frac{R}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} \times \underline{U}_{e,m} \rightsquigarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{s,m}}{\underline{U}_{e,m}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega}$$

★ écriture canonique

✧ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0 \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} \quad \text{et} \quad Q > 0$$

✧ Par identification nous avons :

$$\begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q_{\text{filtre}}}{\omega_{\text{réf}}} \\ \frac{1}{RC} = Q_{\text{filtre}} \omega_{\text{réf}} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \omega_{\text{réf}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \\ Q_{\text{filtre}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \end{cases}$$

✧ Ainsi le facteur de qualité du filtre n'est autre que le facteur de qualité du circuit. Quelle surprise !

III.7.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

✧ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{-j\frac{Q}{x}} = j\frac{H_0 x}{Q} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log \left| \frac{H_0 x}{Q} \right| \sim 20 \log |H_0| - 20 \log Q + 20 \log x \\ \varphi \sim \arg \left(j\frac{H_0 x}{Q} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ L'asymptote BF admet une pente de +20 dB/déc et d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0| - 20 \log Q$.

✧ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| \\ \varphi = \arg(H_0) = \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ -\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\log x \rightarrow +\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{jQx} = -j\frac{H_0}{Qx} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \sim 20 \log \left| \frac{H_0}{Qx} \right| \sim 20 \log |H_0| - 20 \log Q - 20 \log x \\ \varphi \sim \arg \left(-j\frac{H_0}{Qx} \right) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 > 0 \\ +\frac{\pi}{2} \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

✧ L'asymptote HF admet une pente de -20 dB/déc et d'ordonnée à l'origine $20 \log |H_0| - 20 \log Q$.

★ troisième asymptote

- ◇ Le dénominateur de la fonction de transfert est une somme de 3 termes dont 2 sont prédominants en BF ou HF. Cherchons ce qu'il se passe lorsque c'est le 3^e qui prédomine et dans quelle condition il peut le faire.
- ◇ Nous avons alors, par volonté :

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{1} = H_0 \rightsquigarrow \begin{cases} G_{dB} \rightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ -\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- ◇ Pour que le 3^e terme soit prépondérant, il faut :

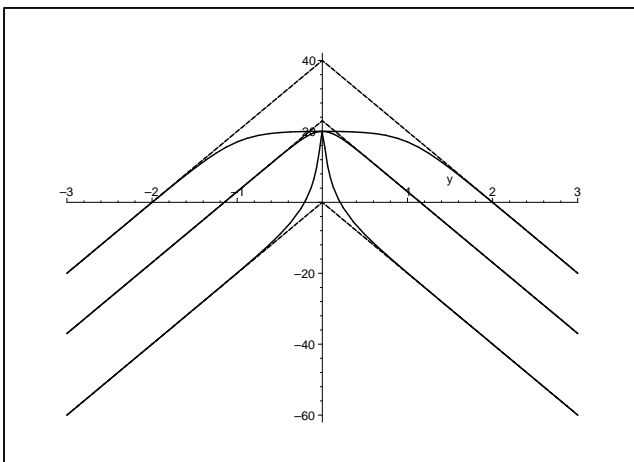
$$\begin{cases} Qx \ll 1 \\ \frac{Q}{x} \ll 1 \end{cases} \rightsquigarrow \rightsquigarrow Q \ll 1$$

- ◇ La 3^e asymptote, horizontale et d'ordonnée $20 \log |H_0|$, n'existe que si le facteur de qualité est très faible.
- ◇ C'est normal pour les mêmes raisons que pour le filtre passe-bas :
 - techniquement c'est la seule façon de donner de l'importance au terme $j \frac{x}{Q}$
 - avec un facteur de qualité très faible, le circuit est plutôt en mode apériodique ce qui fait apparaître deux constantes de temps (celle des solutions en e^{-t/τ_1} et e^{-t/τ_2}) et donc deux pulsations particulières distinctes : l'une sera la limite des basses fréquences, l'autre la limite des hautes fréquences

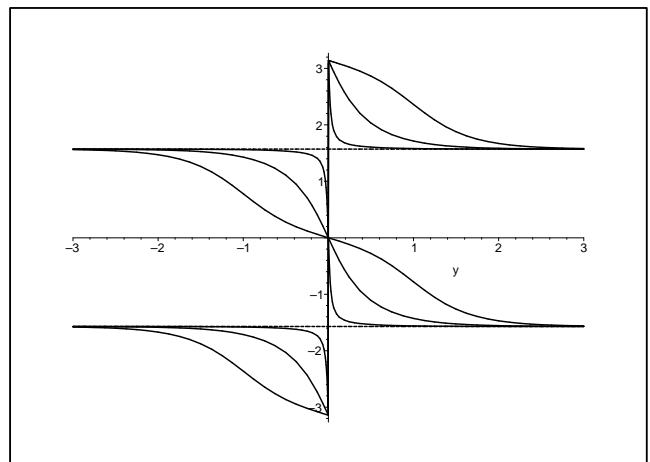
★ tracés des diagrammes de BODE

- ◇ Les tracés sont les suivants pour trois facteurs de qualité $Q : 0,1 ; \frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = \pm 10$.

Graphique 25



Graphique 26



- ◇ Nous pouvons constater que :
 - les diagrammes réels collent aux asymptotes pour le gain en décibels mais pas trop pour la phase
 - le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase

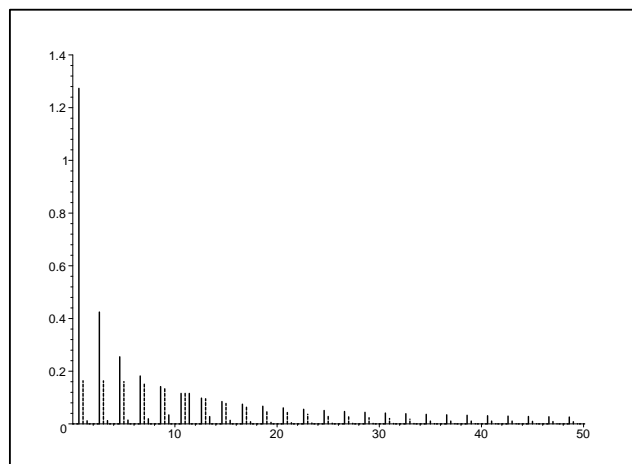
- le diagramme en phase n'est pas discontinu lorsque $H_0 < 0$ car $-\pi = \pi$ à 2π près pour les phases
- lorsque le facteur de qualité est élevé, il y a un phénomène de résonance
- lorsque le facteur de qualité est faible, nous pouvons nettement distinguer une 3^e asymptote

Pour un filtre passe-bande, le phénomène de résonance est souhaitable.

★ point de vue fréquentiel

- ◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et pour deux facteurs de qualité : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = 1$.

Graphique 27



- ◇ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée, la série du milieu correspond à $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la série de droite à $Q = 10$.
- ◇ Nous pouvons constater que, comme prévu, les harmoniques de basse et haute fréquence sont atténuées. Toutefois si l'atténuation est excellente pour le filtre tel que $Q = 10$, cela est un peu moins vrai pour celui tel que $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.7.iv – caractéristiques pour un filtre quelconque

- ◇ Le filtre passe-bande, écrit sous une forme adéquate, a des caractéristiques qui se calculent facilement.

★ gain maximal

- ◇ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$.

- ◇ Nous avons :

$$H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

- ◇ Le maximum est visiblement atteint en $x = 1$, ce qui donne $H_{\text{max}} = |H_0|$.

★ pulsations de coupure

◇ Par définition :

$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1$$

◇ En résolvant l'équation précédente nous pouvons trouver les deux pulsations de coupure.

★ bande passante

◇ Notons x_{c1} une pulsation de coupure. Nous avons donc $Q^2 \left(x_{c1} - \frac{1}{x_{c1}}\right)^2 = 1$

◇ Alors $x_{c2} = \frac{1}{x_{c1}}$ est aussi une pulsation de coupure car :

$$Q^2 \left(x_{c2} - \frac{1}{x_{c2}}\right)^2 = Q^2 \left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = Q^2 \left(x_{c1} - \frac{1}{x_{c1}}\right)^2 = 1$$

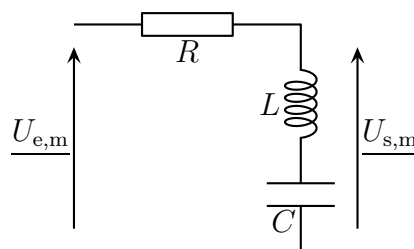
◇ La bande passante est alors telle que :

$$(x_{c1} - x_{c2})^2 = \left(x_{c1} - \frac{1}{x_{c1}}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \rightsquigarrow (x_{c1} - x_{c2}) = \frac{1}{Q}$$

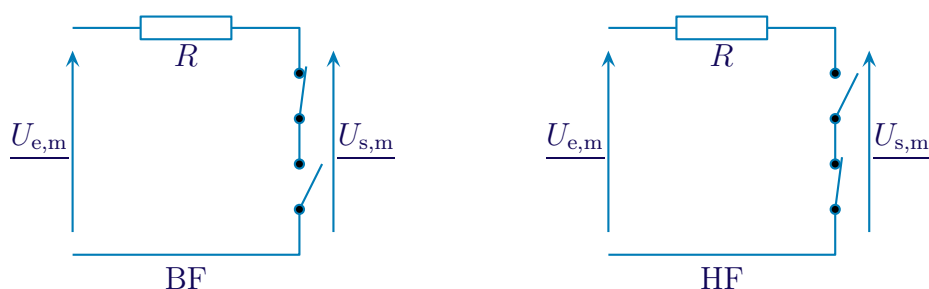
III.8 – Filtre coupe-bande d'ordre 2

III.8.i – montage – analyse

◇ Considérons le filtre ci-dessous.



◇ Déterminons les comportements basses et hautes fréquences du filtre.



- ◇ Dans les deux cas nous pouvons écrire la loi des nœuds en terme de potentiels $\frac{U_{e,m} - U_{s,m}}{R} + 0 = 0$ ce qui donne $\underline{U}_{s,m} = \underline{U}_{e,m}$.
- ◇ Finalement, nous ne pouvons pas encore tout à fait nous prononcer sur le type de filtre car il peut très bien s'agir d'un filtre déphaseur.
- ◇ Analyse physique :
- le filtre est un coupe-bande ou un déphaseur
 - il s'agit d'un circuit R, L, C série donc la pulsation caractéristique du filtre sera proportionnelle à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ interviendra dans les résultats.
- ◇ Analyse technique :
- approche nodale car il y a un seul potentiel inconnu une fois la masse posée « en bas »
 - ou approche maillère car tous les dipôles sont en série

III.8.ii – fonction de transfert

- ◇ Utilisons l'approche maillère et écrivons un diviseur de tension :

$$\underline{U}_{s,m} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} \times \underline{U}_{e,m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{s,m}}{\underline{U}_{e,m}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}}$$

★ écriture canonique

- ◇ Écrivons la fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0 \quad x = \frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}} \quad \text{et} \quad Q > 0$$

- ◇ Par identification nous avons :

$$\begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q_{\text{filtre}}}{\omega_{\text{réf}}} \\ \frac{1}{RC} = Q_{\text{filtre}} \omega_{\text{réf}} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \omega_{\text{réf}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \\ Q_{\text{filtre}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \end{cases}$$

- ◇ Ainsi le facteur de qualité du filtre n'est autre que le facteur de qualité du circuit. Quelle surprise !

III.8.iii – représentations graphiques

★ comportement asymptotique

- ◇ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{H}(jx) \sim H_0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} \longrightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pm\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote BF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.

◇ Lorsque $\omega = \omega_{\text{réf}}$, $x = 1$ et $\log x = 0$:

$$\underline{H}(jx) \sim \frac{H_0}{\frac{1}{jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} = jH_0Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \longrightarrow -\infty \\ \varphi = \arg\left(jH_0Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ pour } x > 1 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \text{ pour } x < 1 \text{ si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } x > 1 \text{ et } +\frac{\pi}{2} \text{ pour } x < 1 \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ Lorsque $\omega \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow +\infty$ et $\log x \longrightarrow +\infty$:

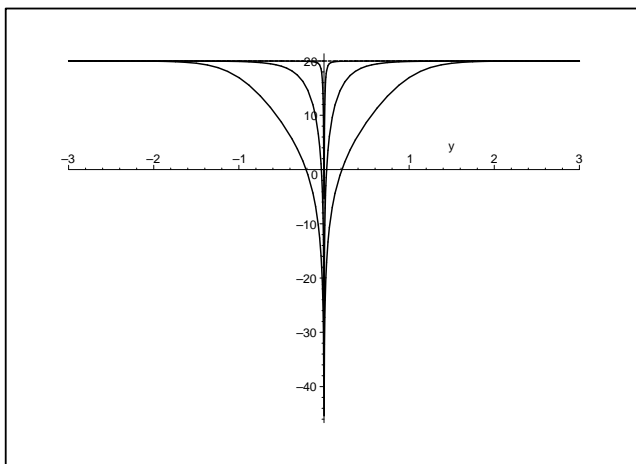
$$\underline{H}(jx) \sim H_0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} \longrightarrow 20 \log |H_0| \\ \varphi \sim \arg(H_0) \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pm\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

◇ L'asymptote HF est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log |H_0|$.

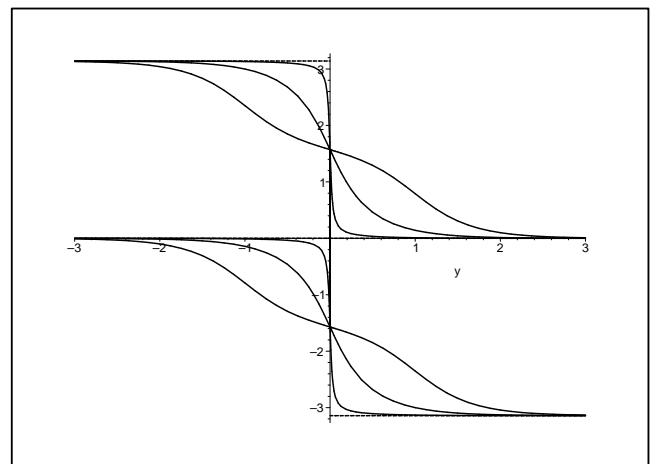
★ tracés des diagrammes de BODE

◇ Les tracés sont les suivants pour trois facteurs de qualité Q : 0,1 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = \pm 10$.

Graphique 28



Graphique 29



◇ Nous pouvons constater que :

→ les diagrammes réels ne présentent guère d'intérêt

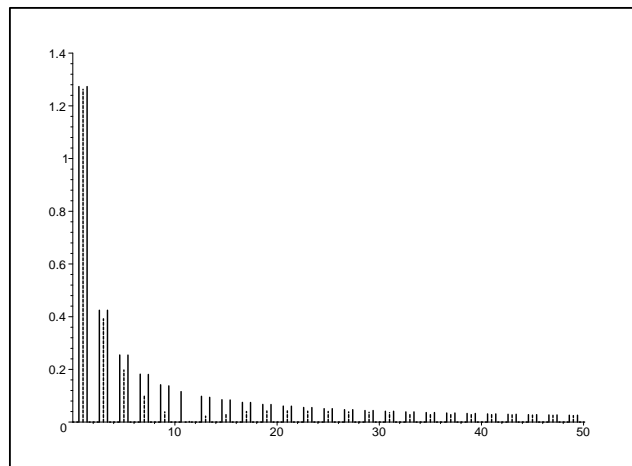
- le gain en décibel est le même quel que soit le signe de H_0 alors que ce n'est pas le cas pour la phase
- le diagramme en phase est vraiment discontinu en $x = 1$
- lorsque le facteur de qualité est élevé, la bande coupée est très faible

Pour un filtre coupe-bande, le phénomène de résonance est souhaitable.

★ point de vue fréquentiel

- ◇ Regardons l'effet de ce filtre sur un signal rectangulaire tel que $\omega_{\text{fond}} = \frac{\omega_{\text{réf}}}{11}$ et pour deux facteurs de qualité : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 10 et $H_0 = 1$.

Graphique 30



- ◇ La série de pic à gauche est le spectre du signal d'entrée, la série du milieu correspond à $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la série de droite à $Q = 10$.
- ◇ Nous pouvons constater que, comme prévu, l'harmonique 11 est coupée. Mais nous remarquons aussi que lorsque le facteur de qualité est élevé, c'est la seule harmonique coupée alors qu'avec le filtre de moins bonne qualité, les autres harmoniques sont aussi sensiblement modifiées.

III.8.iv – caractéristiques pour un filtre quelconque

- ◇ Comme pour le filtre passe-bande, le filtre coupe-bande, écrit sous forme idoine, se prête facilement à la détermination de ses caractéristiques.

★ gain maximal

- ◇ Cherchons l'amplification maximale de $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}}$.

- ◇ Nous avons :

$$H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

◇ Le maximum est visiblement atteint en $x = 0$ ou en $x \rightarrow \infty$, ce qui donne $H_{\max} = |H_0|$.

★ pulsations de coupure

◇ Par définition :

$$H(x_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1$$

◇ En résolvant l'équation précédente nous pouvons trouver les deux pulsations de coupure.

★ bande passante

◇ Comme pour le filtre passe-bande, la bande coupée est telle que $x_{c1} - x_{c1} = \frac{1}{Q}$

III.9 – Résumé

III.9.i – phénoménologie

Chaque ordre de filtre peut faire modifier la phase de $\frac{\pi}{2}$.

Dans le diagramme asymptotique de gain en décibel, pour chaque ordre de filtre, il peut y avoir une variation de pente de 20 dB/déc.

◇ Ainsi :

- passe-bas d'ordre 1 : $0 \rightarrow -20$ dB/déc
- passe-bas d'ordre 2 : $0 \rightarrow -40$ dB/déc
- passe-haut d'ordre 1 : 20 dB/déc $\rightarrow 0$
- passe-haut d'ordre 2 : 40 dB/déc $\rightarrow 0$
- passe-bande d'ordre 2 : 20 dB/déc $\rightarrow -20$ dB/déc

◇ Bien sûr, c'est une possibilité, ça ne marche par partout, notamment pour le coupe-bande.

III.9.ii – à retenir

- ◇ Il faut retenir le cheminement de l'étude d'un filtre *a priori* inconnu.
- ◇ Il faut savoir que le phénomène de résonance peut parfois être néfaste et parfois souhaitable.

IV – Pour aller plus loin

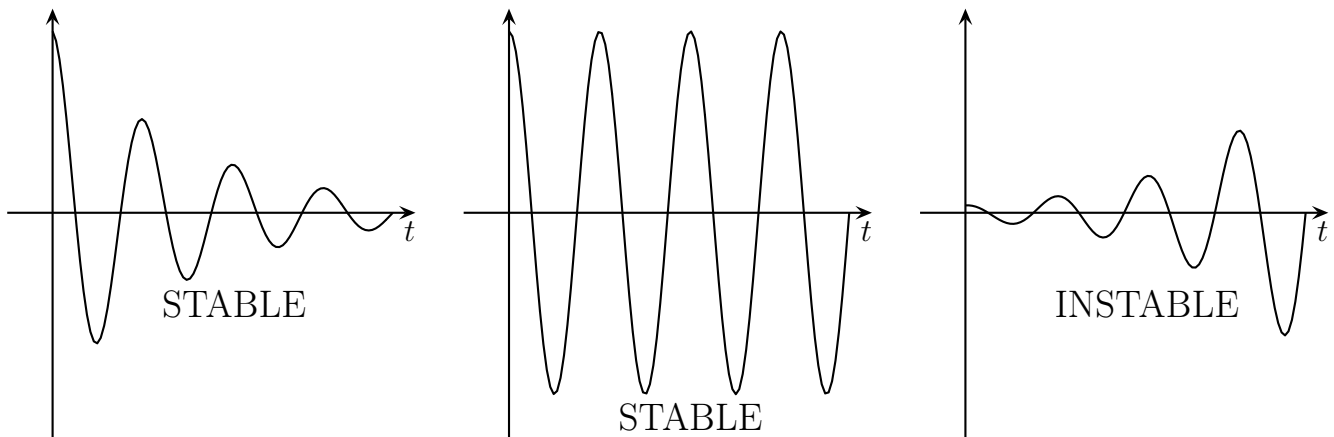
IV.1 – Stabilité d'un filtre

IV.1.i – vous avez dit « stable » ?

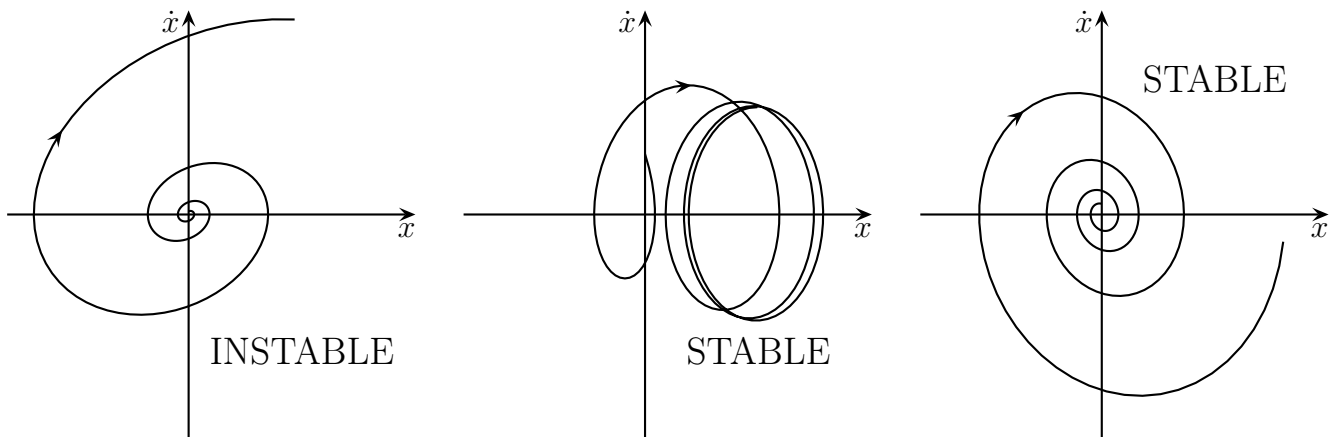
◇ Pour un filtre, être stable, ce n'est pas systématiquement revenir à 0.

Un filtre est dit *stable* lorsque, à entrée bornée, la sortie est bornée quelle que soit la fréquence.

◇ Temporellement, cela correspond à des situations comme :



◇ Dans le plan de phase, cela correspond à des situations comme :



IV.1.ii – conditions de stabilité

★ filtres étudiés

◇ Étant donné que tout filtre peut être considéré comme l'association de filtres d'ordre 1 et 2, nous étudierons un filtre quelconque d'ordre 2 et nous écrirons sa fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{s,m}}{\underline{U}_{e,m}} = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} = \frac{N_0 + N_1(j\omega) + N_2(j\omega)^2}{D_0 + D_1(j\omega) + D_2(j\omega)^2}$$

★ en régime libre

- ✧ Étudions voir ce que cela donne si l'entrée est nulle. Pour cela cherchons l'équation différentielle vérifiée par la tension de sortie :

$$(D_0 + D_1(j\omega) + D_2(j\omega)^2) \underline{U_{s,m}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad D_0 u_s(t) + D_1 \frac{du_s(t)}{dt} + D_2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} = 0$$

- ✧ Posons $D_2 > 0$. Si tel n'est pas le cas, multiplions par -1 et revenons au cas $D_2 > 0$.

🔗 quand $D_2 > 0$, il faut $D_0 > 0$

- ✧ Montrons que pour que la solution reste bornée, il faut que $D_0 > 0$. Pour cela procédons par l'absurde et supposons $D_0 < 0$. L'équation caractéristique s'écrit :

$$D_0 + D_1 r + D_2 r^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = D_1^2 - 4 D_0 D_2 > 0$$

- ✧ Les solutions sont donc en $u_s(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique. Sauf que le produit des racines vaut $P = \frac{D_0}{D_2} < 0$: il y a une racine positive. La solution diverge, donc ce n'est pas stable.
- ✧ Nous savons donc maintenant que pour assurer la stabilité il faut $D_0 \geq 0$.

🔗 quand $D_2 > 0$, il faut $D_0 > 0$ et $D_1 > 0$

- ✧ Supposons $D_0 > 0$ et montrons que $D_1 > 0$. En fait, avec $D_1 < 0$ nous pourrions définir un facteur de qualité $Q < 0$. Or dans toutes les solutions connues, le facteur de qualité intervient dans l'exponentielle décroissante. Changer le signe de Q reviendrait à transformer cette exponentielle en exponentielle croissante et la sortie divergerait.
- ✧ Nous avons donc D_0, D_1 et D_2 de même signe.

🔗 quand $D_2 = 0$

- ✧ Si le filtre n'avait été que du premier ordre, l'équation différentielle $D_0 u_s(t) + D_1 \frac{du_s(t)}{dt} = 0$ a pour solution $u_s(t) = \lambda e^{-D_0 t/D_1}$. Il faut là aussi que D_0 et D_1 soient de même signe pour que le filtre soit stable.

★ en régime forcé

- ✧ Il ne faut pas que $\underline{H}(j\omega)$ diverge pour une valeur particulière de ω .
- ✧ Il faut donc tout d'abord que le degré du dénominateur soit supérieur (ou égal) à celui du numérateur. Sinon $|\underline{H}(j\omega)|$ diverge en HF.
- ✧ Imaginons que tel soit le cas et regardons ce qui se passe quand il manque un terme au dénominateur (rappelons qu'ils sont tous de même signe) :

→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{N_0 + N_1(j\omega) + N_2(j\omega)^2}{D_0 + D_2(j\omega)^2} = \frac{N_0 + N_1(j\omega) + N_2(j\omega)^2}{D_0 - D_2\omega^2}$: pour $\omega = \sqrt{\frac{D_0}{D_2}}$, le dénominateur s'annule, le module devient infini, c'est instable

→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{N_0 + N_1(j\omega) + N_2(j\omega)^2}{D_1(j\omega) + D_2(j\omega)^2}$: pour $\omega = 0$, le dénominateur s'annule, le module devient infini, c'est instable

★ regroupement

Critère de CAUCHY

Un filtre d'ordre 1 ou 2 est stable s'il respecte deux conditions :

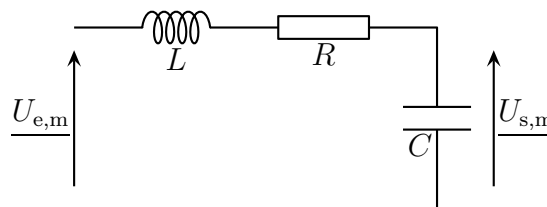
- le degré du dénominateur est au moins égal à celui du numérateur
- tous les coefficients du polynôme en $j\omega$ du dénominateur sont non nuls et de même signe

IV.2 – Idoinotons

◇ Reprenons quelques montages connus pour voir s'ils sont, ou non, stables.

IV.2.i – circuit R, L, C série

◇ Considérons le filtre passe bas ci-dessous.



◇ La fonction de transfert s'écrit :

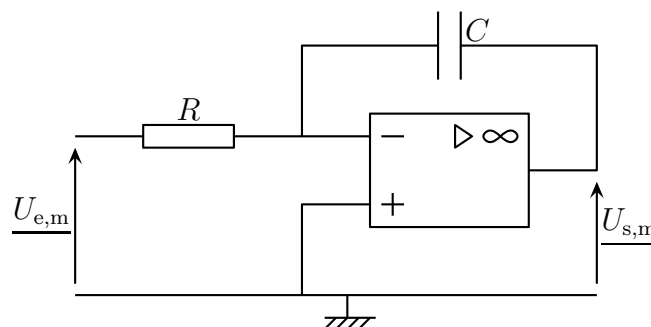
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}$$

◇ Ce filtre est bien stable car le polynôme en $(j\omega)$ du dénominateur a bien tous ses coefficients de même signe.

IV.2.ii – intégrateur

★ intégrateur classique

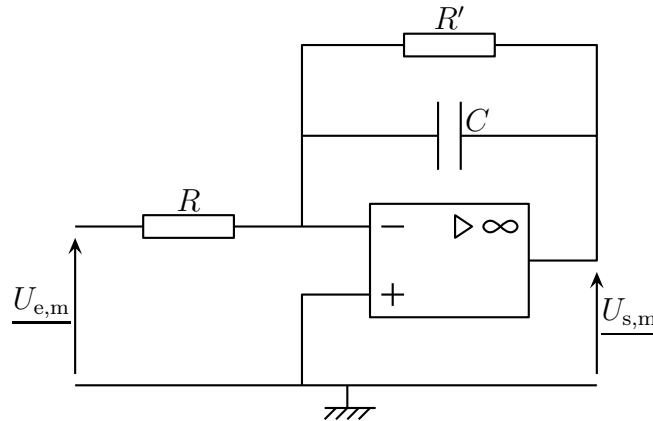
◇ Considérons le montage connu.



- ◇ Il s'agit d'un inverseur généralisé $\frac{U_{s,m}}{U_{e,m}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$. Avec $\underline{Z_2} = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z_1} = R$ nous trouvons la fonction de transfert connue $\underline{H(j\omega)} = -\frac{1}{jRC\omega}$.
- ◇ Ce filtre est instable car lorsque ω tend vers 0, la fonction de transfert tend vers $+\infty$.
- ◇ Notons que cela est cohérent avec ce que nous savons du montage intégrateur : il subit un effet de dérive à cause des contraintes continues et passe en régime non linéaire au bout d'un certain temps.

★ intégrateur modifié

- ◇ Rajoutons maintenant une résistance en parallèle du condensateur.



- ◇ Nous avons ici aussi un inverseur généralisé avec $\underline{Z_2} = C \parallel R'$. Cela donne :

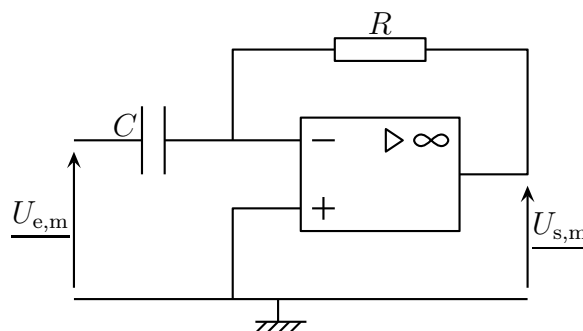
$$\underline{H(j\omega)} = -\frac{R' \times \frac{1}{jC\omega}}{R' + \frac{1}{jC\omega}} = -\frac{R'}{R + jRR'C\omega}$$

- ◇ Maintenant, c'est stable, pas de problème !
- ◇ Toutefois en tant qu'intégrateur, nous pouvons constater que le montage remplit bien son rôle que pour ω suffisamment grand. Le problème est qu'alors la pulsation se situe dans la bande coupée du filtre. Il faudra donc faire un choix entre qualité de l'intégration et tension de sortie.

IV.2.iii – dérivateur

★ dérivateur classique

- ◇ Considérons le montage dérivateur ci-dessous.



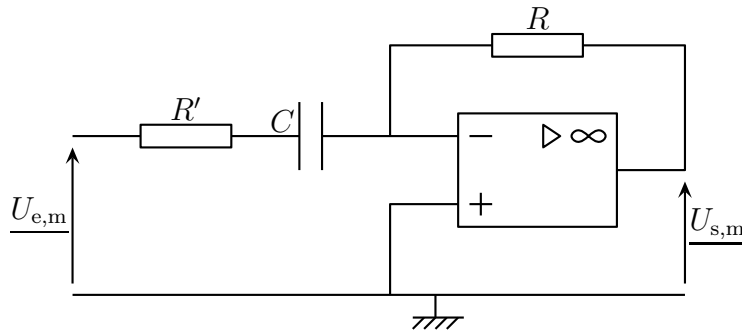
◇ Il s'agit d'un inverseur généralisé avec $\underline{Z}_2 = R$ et $\underline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega}$, ce qui donne :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R}{\frac{1}{jC\omega}} = -jRC\omega$$

◇ Ce filtre n'est pas stable car $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow +\infty$ lorsque $\omega \rightarrow +\infty$.

★ dérivateur modifié

◇ Modifions le montage dérivateur de la manière suivante.



◇ Il s'agit toujours d'un inverseur généralisé avec $\underline{Z}_2 = R$ et $\underline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega} \oplus R'$, ce qui donne :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R}{R' + \frac{1}{jC\omega}} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$$

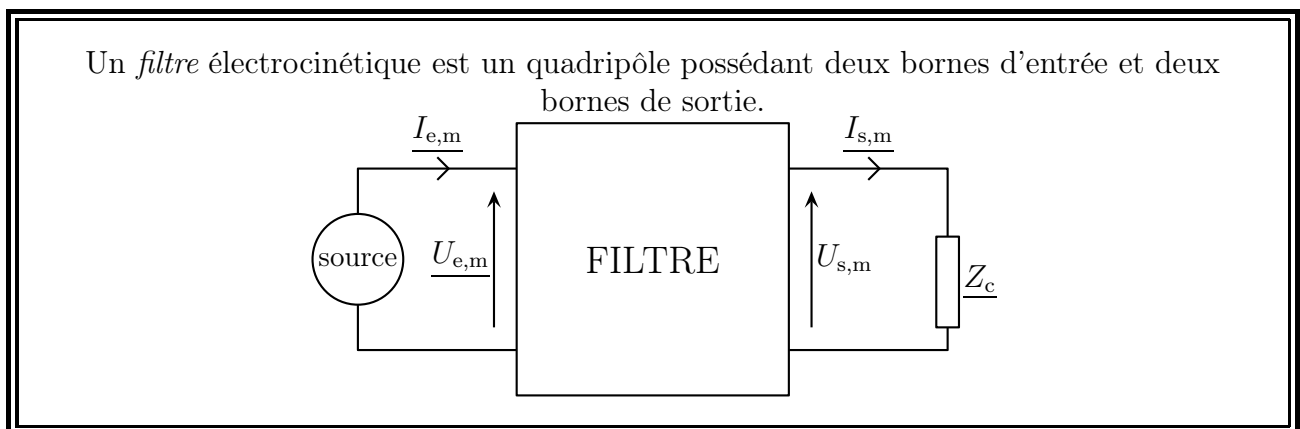
◇ Ce filtre est désormais stable.

◇ Toutefois en tant que dérivateur, comme pour le montage intégrateur, nous pouvons voir qu'il n'est dérivateur que pour une certaine plage de fréquence, plage qui se situe malheureusement dans la bande coupée de ce filtre passe-haut.

IV.3 – Modélisation d'un filtre

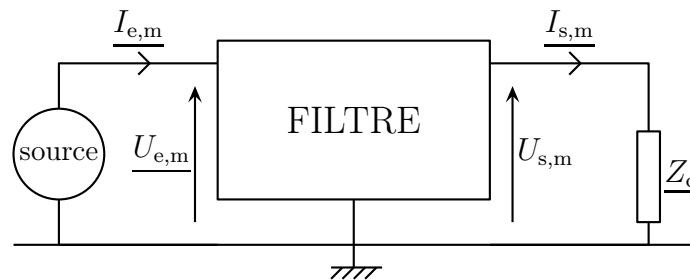
◇ Généralisons un peu ce que nous savons sur les filtres.

IV.3.i – quadripôle

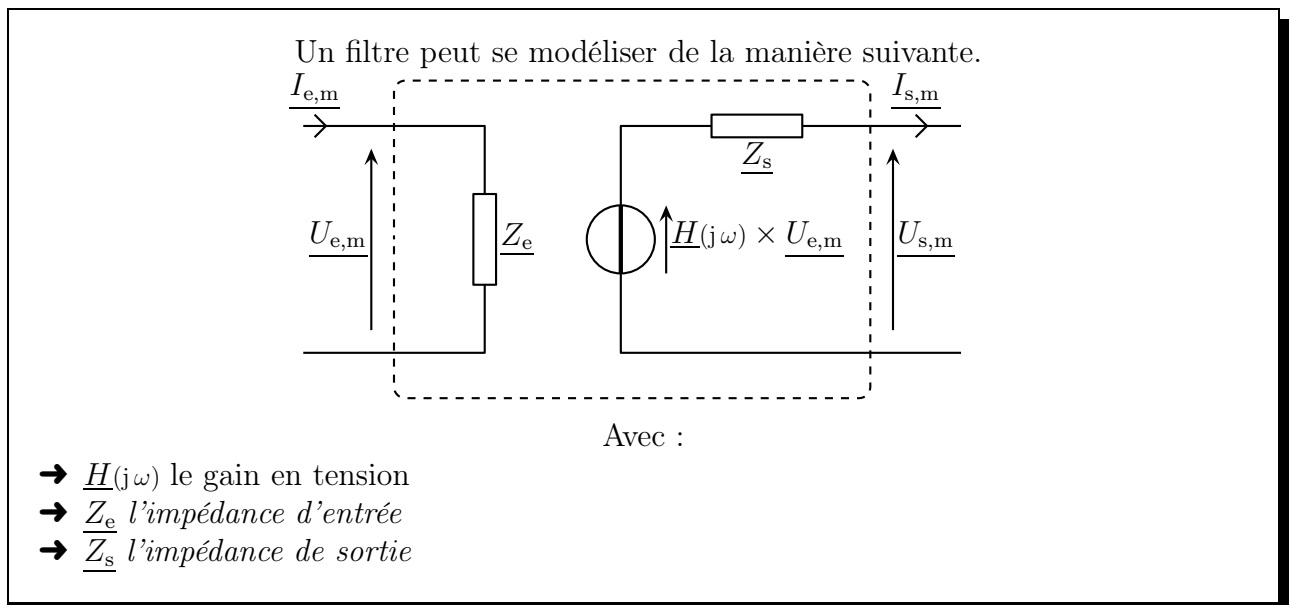


◇ Cette définition implique que le filtre n'est *a priori* pas symétrique : il faut l'utiliser dans un sens et pas dans l'autre.

- ◇ Toujours *a priori* il peut y avoir à peu près n'importe quoi dans le filtre : dipôles actifs, passifs, AO, ...
- ◇ Comme souvent une borne est commune (la masse), il est possible aussi de représenter le filtre sous la forme :



IV.3.ii – impédance d'entrée et de sortie



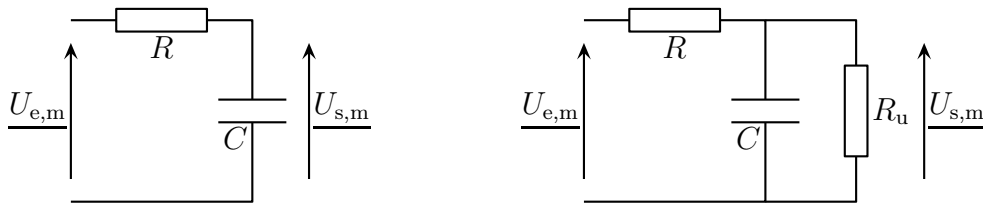
- ◇ Nous avons donc naturellement $Z_e = \frac{U_{e,m}}{I_{e,m}}$.
- ◇ Il n'est *a priori* pas simple de déterminer Z_s .

IV.3.iii – cas idéal

- ◇ Pour une amplification en tension, le cas idéal correspond à une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle.
- ◇ En effet, il faut que l'impédance d'entrée soit infini pour faire une prise de tension parfaite, comme un voltmètre idéal.
- ◇ De plus, afin de ne pas provoquer une effet diviseur de tension sur la tension de sortie, il faut que l'impédance de sortie soit nulle.

IV.3.iv – filtre passif

- ◇ Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre.



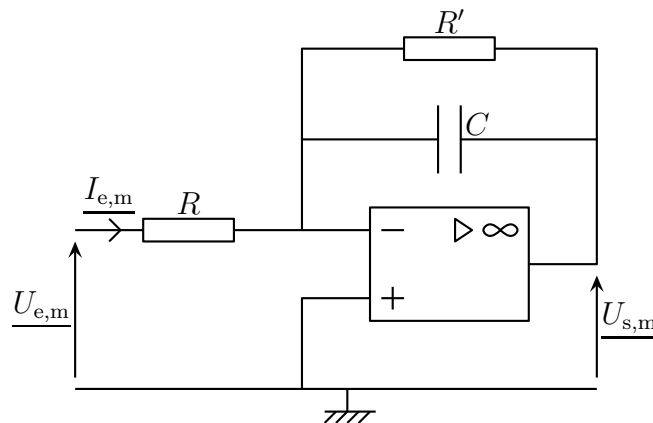
◇ Nous avons tout de suite $\underline{Z}_e = R + \frac{1}{jC\omega} \neq \infty$.

◇ De plus si nous branchons une résistance en sortie du filtre conformément au schéma ci-dessus, alors la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_u \times \frac{1}{jC\omega}}{R_u + \frac{1}{jC\omega}}}{R + \frac{R_u \times \frac{1}{jC\omega}}{R_u + \frac{1}{jC\omega}}} = \frac{\frac{R_u}{1 + jR_u C\omega}}{R + \frac{R_u}{1 + jR_u C\omega}} = \frac{R_u}{(R_u + R) + jR R_u C\omega} \neq \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

IV.3.v – cas avec AO

◇ Considérons l'intégrateur modifié.



◇ Nous savons déjà que l'impédance de sortie de ce filtre est nulle car la tension de sortie de l'AO ne dépend pas, justement, de ce qui est branché directement entre sa sortie et la masse.

◇ Quid en revanche de l'impédance d'entrée ?

◇ Ici $\underline{I}_{e,m}$ traverse le résistor R . Comme le potentiel V_- est nul (car l'AO est idéal et en régime linéaire donc $V_+ = V_-$ et que $V_+ = 0$). Nous avons ainsi $(\underline{U}_{e,m} - 0) = R \underline{I}_{e,m}$ soit $\underline{Z}_e = R$.

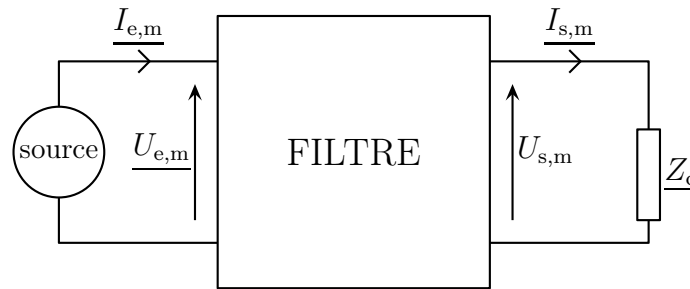
◇ Pour un filtre à AO, l'impédance d'entrée n'est pas infinie.

◇ Si on voulait vraiment une impédance d'entrée infinie, nous pourrions utiliser des montages suiveurs, mais ça risquerait d'introduire de nouveaux défauts.

IV.4 – D'autres fonctions de transfert

IV.4.i – entre grandeur de sortie et grandeur d'entrée

◇ De manière plus générale, pour le filtre ci-dessous, il est possible de définir plusieurs fonctions de transfert.



◇ La fonction de transfert est le rapport d'une grandeur de sortie sur une grandeur d'entrée :

→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{s,m}}{U_{e,m}}$: gain en tension, c'est connu

→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{I_{s,m}}{I_{e,m}}$: gain en courant

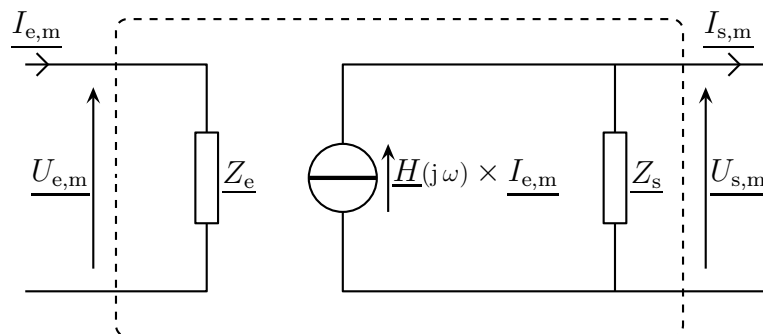
→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{s,m}}{I_{e,m}}$: transimpédance en Ω

→ $\underline{H}(j\omega) = \frac{I_{s,m}}{U_{e,m}}$: transadmittance en S

IV.4.ii – quelques modifications

★ modélisation

◇ Considérons l'exemple d'un filtre de gain en courant. Alors sa modélisation est la suivante :



◇ Il a fallu modéliser le générateur de sortie en NORTON.

◇ Dans ces conditions, le filtre est idéal pour $\underline{Z}_e = 0$ (comme un ampèremètre idéal) et \underline{Z}_s infini.

★ et le gain en dB ?

◇ Pour la transimpédance et la transadmittance, comme les fonctions de transferts sont dimensionnées, il n'est pas possible de calculer directement le gain en dB. Il faut pour cela transformer légèrement la définition avec une grandeur H_0 de référence (souvent, mais pas obligatoirement H_{\max}) :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{|\underline{H}(j\omega)|}{H_0}$$

Filtres

Au niveau du cours

★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- filtre, fonction de transfert, nature d'un filtre, ordre d'un filtre
- approche fréquentielle, spectre d'un signal
- pulsation de coupure, bande passante, bande coupée
- gain en décibel, réponse en phase, diagrammes de BODE

★ Les lois

◇ Connaître les conditions de stabilité d'un filtre.

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- les spectres d'un signal triangulaire, d'un signal rectangulaire
- les effets en terme de fréquence des filtres
- les effets que peuvent avoir au niveau de la réponse en phase et du gain en dB chaque ordre de filtre

★ les exemples fondamentaux

◇ Connaître :

- les filtres d'ordre 1 R, C passe-bas et passe-haut
- les filtres d'ordre 2 R, L, C série passe-haut, passe-bas, passe-bande et coupe-bande

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Il faut savoir déterminer *a priori* la nature et l'ordre d'un filtre.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

◇ Connaître parfaitement :

- la manière de déterminer le comportement équivalent de fonction

★ petits gestes

◇ Il faut :

- savoir déterminer les équations des asymptotes pour les diagrammes de BODE
- savoir déterminer une bande passante, une pulsation de coupure

Table des matières

I	Analyse fréquentielle	1
I-1	Une autre vision des signaux périodiques	1
I-1.i	ce sont tous des (sommes de) sinusoïdes!	1
	propriété fondamentale	1
	exemples	1
	autre écriture	3
I-1.ii	représentation fréquentielle	3
	signaux usuels	3
	phénoménologie	4
	propriété fondamentale	5
I-2	Phénoménologie d'un filtre	5
I-2.i	de l'utilité des circuits linéaires	5
	avec le théorème de superposition	5
	d'où l'importance du RSF	5
	du déjà fait!	5
I-2.ii	mon premier filtre	6
	montage	6
	simulation et interprétation	6
I-3	Tout est dans la fonction de transfert	7
I-3.i	qu'est-ce que la fonction de transfert?	7
	exemple	7
	forme canonique	7
I-3.ii	que faire de la fonction de transfert?	8
I-3.iii	relation entre équation différentielle et fonction de transfert	8
	idée	8
	exemple précédent	8
	idoinoton	8
I-3.iv	pseudo-intégrateur	9
	intégration en terme fréquentiels	9
	circuit	9
	simulation	10
I-3.v	pseudo-dérivateur	10
	dérivation en terme fréquentiels	10
	circuit – fonction de transfert	11
	simulation	11
II	Représentation graphique de la fonction de transfert	11
II-1	Cas du R, L, C série	11
II-1.i	montage – analyse	11
II-1.ii	c'est bien un filtre	12
	fonction de transfert	12
	écriture canonique	12
	tracé	12
II-2	Gain en décibel	13
II-2.i	une drôle de définition	13
	origine de la définition	13
	interprétation des dB	13
II-2.ii	un diagramme particulier	14

II.2.iii	comportement asymptotique	14
	écriture complète du G_{dB}	14
	équation des asymptotes	15
II.2.iv	tracé	15
	diagramme asymptotique	15
	diagramme réel	15
	réponse en fréquences	16
II.2.v	décade ou octave?	16
II.3	Réponse en phase	17
II.3.i	c'est du connu, même si	17
II.3.ii	comportement asymptotique	17
II.3.iii	tracé	17
	diagramme asymptotique	17
	diagramme réel	17
II.4	Caractérisation d'un filtre	18
II.4.i	nature d'un filtre	18
	grandeur intéressante	18
	filtre idéal	18
	filtre réel	20
II.4.ii	ordre d'un filtre	21
III	Filtres réels d'ordre 1 et 2 (exemples de)	22
III.1	Intérêt des filtres d'ordre 1 et 2	22
III.1.i	tout se décompose en filtres d'ordre 1 et 2	22
III.1.ii	physiquement il faut faire attention	22
III.1.iii	mais quand c'est bon, tout s'additionne	23
III.2	Étudier un filtre	23
III.3	Filtre passe-bas d'ordre 1	23
III.3.i	montage – analyse	23
III.3.ii	fonction de transfert	24
	écriture canonique	24
III.3.iii	représentations graphiques	24
	comportement asymptotique	24
	tracés des diagrammes de BODE	25
	point de vue fréquentiel	25
III.3.iv	caractéristiques	26
	gain maximal	26
	pulsations de coupure	26
III.4	Filtre passe-haut d'ordre 1	26
III.4.i	montage – analyse	26
III.4.ii	fonction de transfert	27
	écriture canonique	27
III.4.iii	représentations graphiques	27
	comportement asymptotique	27
	tracés des diagrammes de BODE	28
	point de vue fréquentiel	28
III.4.iv	caractéristiques	29
	gain maximal	29
	pulsations de coupure	29
III.5	Filtre passe-bas d'ordre 2	29

III.5.i	montage – analyse	29
III.5.ii	fonction de transfert	30
	écriture canonique	30
III.5.iii	représentations graphiques	31
	comportement asymptotique	31
	troisième asymptote	31
	tracés des diagrammes de BODE	32
	point de vue fréquentiel	33
III.5.iv	caractéristiques pour le filtre optimal	33
	gain maximal	33
	pulsations de coupure	33
III.6	Filtre passe-haut d'ordre 2	34
III.6.i	montage – analyse	34
III.6.ii	fonction de transfert	34
	écriture canonique	35
III.6.iii	représentations graphiques	35
	comportement asymptotique	35
	troisième asymptote	35
	tracés des diagrammes de BODE	36
	point de vue fréquentiel	37
III.6.iv	caractéristiques pour le filtre optimal	37
	gain maximal	37
	pulsations de coupure	37
III.7	Filtre passe-bande d'ordre 2	38
III.7.i	montage – analyse	38
III.7.ii	fonction de transfert	38
	écriture canonique	39
III.7.iii	représentations graphiques	39
	comportement asymptotique	39
	troisième asymptote	40
	tracés des diagrammes de BODE	40
	point de vue fréquentiel	41
III.7.iv	caractéristiques pour un filtre quelconque	41
	gain maximal	41
	pulsations de coupure	42
	bande passante	42
III.8	Filtre coupe-bande d'ordre 2	42
III.8.i	montage – analyse	42
III.8.ii	fonction de transfert	43
	écriture canonique	43
III.8.iii	représentations graphiques	43
	comportement asymptotique	43
	tracés des diagrammes de BODE	44
	point de vue fréquentiel	45
III.8.iv	caractéristiques pour un filtre quelconque	45
	gain maximal	45
	pulsations de coupure	46
	bande passante	46
III.9	Résumé	46
III.9.i	phénoménologie	46

III.9.ii	à retenir	46
IV	Pour aller plus loin	47
IV.1	Stabilité d'un filtre	47
IV.1.i	vous avez dit « stable » ?	47
IV.1.ii	conditions de stabilité	47
	filtres étudiés	47
	en régime libre	48
	en régime forcé	48
	regroupement	49
IV.2	Idoïnnotons	49
IV.2.i	circuit R, L, C série	49
IV.2.ii	intégrateur	49
	intégrateur classique	49
	intégrateur modifié	50
IV.2.iii	dérivateur	50
	dérivateur classique	50
	dérivateur modifié	51
IV.3	Modélisation d'un filtre	51
IV.3.i	quadripôle	51
IV.3.ii	impédance d'entrée et de sortie	52
IV.3.iii	cas idéal	52
IV.3.iv	filtre passif	52
IV.3.v	cas avec AO	53
IV.4	D'autres fonctions de transfert	53
IV.4.i	entre grandeur de sortie et grandeur d'entrée	53
IV.4.ii	quelques modifications	54
	modélisation	54
	et le gain en dB ?	54
	Analyse physique	55

Électrocinétique

Chapitre 7

Circuits non linéaires

Circuits non linéaires


Dans ce chapitre nous allons étudier quelques circuits non-linéaires composés de diodes et d'AO fonctionnant en régime non linéaire. La différence c'est que dans ces conditions, il ne sera plus possible d'utiliser la notation complexe : il faudra utiliser d'autres moyens d'étude et d'analyse.

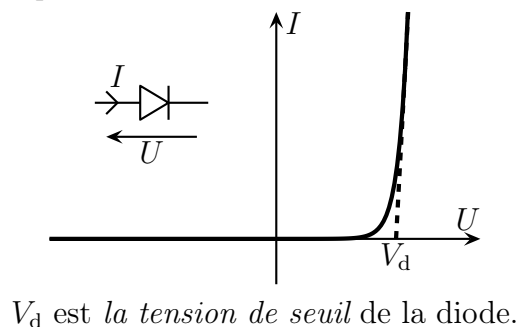
Dans une première partie, nous présenterons la diode ainsi que la méthode générale pour étudier un circuit non-linéaire de manière à pouvoir analyser quelques circuits classiques. Dans une deuxième partie nous verrons l'amplificateur opérationnel idéal fonctionnant en régime non linéaire. Enfin dans une dernière partie nous étudierons un circuit complexe en guise d'exemple approfondi.

I – Avec une diode

I.1 – Diode de redressement

I.1.i – présentation

La *diode* est un composant fait de semi-conducteurs, symbolisé par  et dont la caractéristique avec la convention naturelle suivante est :



Un composant est *polarisé* lorsque son sens de branchement influence son fonctionnement. Un composant non polarisé est dit *symétrique*.

✧ Les résistors, bobines et condensateurs sont symétriques, les générateurs et les AO sont polarisés.

La diode est un dipôle passif, polarisé, non linéaire.

✧ Étant donné que la diode est polarisée, il faudra faire attention à son sens de branchement en TP.

I.1.ii – phénoménologie

✧ Interprétons la caractéristique précédente.

✧ Cette caractéristique laisse clairement apparaître deux grandes zones de fonctionnement :

- tant que la tension n'est pas assez élevée (inférieure à V_d) aucun courant ne passe à travers la diode
- quand la tension est assez élevée, le courant devient très vite important

- ◇ Ainsi dans la première zone, tant que le courant n'a pas assez d'énergie (lié au potentiel rappelons-le), il ne peut pas passer à travers la diode.
- ◇ Il suffit qu'il y ait un peu plus d'énergie avant la diode pour que tout le courant puisse passer. C'est un peu comme un barrage : dès que l'eau dépasse le niveau du barrage, tout s'écoule.

Une diode usuelle ne permet de laisser passer le courant que dans un seul sens.

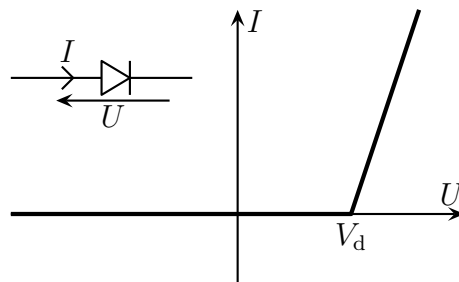
Lorsque la diode laisse passer le courant, elle est dite *passante*. Sinon elle est dite *bloquée*.

- ◇ En réalité, une diode permet à un courant de passer dans l'autre sens, mais pour cela il lui faut de l'énergie :
 - l'énergie qu'elle a naturellement en elle provoque un courant de l'ordre du nA
 - en l'éclairant le courant **inverse** peut atteindre quelques mA : les diodes sont alors utilisées comme détecteur de lumière ou comme photopile (panneaux solaires), elles sont alors actives au sens où elles peuvent fournir de l'énergie électrique.

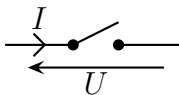
I.1.iii – plusieurs modélisations

- ◇ Étant donné qu'il n'est pas forcément évident de travailler avec la caractéristique exacte de la diode, nous allons la modéliser la caractéristique par des portions de droites.

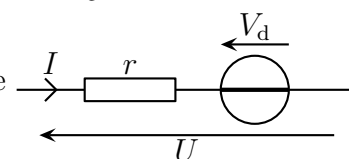
Le modèle linéaire de la diode réelle possède la caractéristique suivante :



→ lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme



→ lorsque la diode est passante, elle se comporte comme



r est appelée la *résistance dynamique* de la diode et est de l'ordre du ohm.

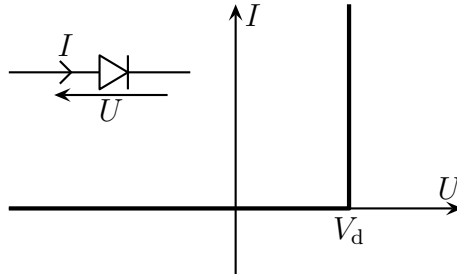
Pour une diode usuelle, $V_d \simeq 0,6 \text{ V}$ et $r \simeq 10 \text{ } \Omega$

- ◇ Il faut bien faire attention que dans le modèle de la diode passante le générateur est opposé au sens du courant. Il représente la force électromotrice à vaincre pour faire passer du courant dans le bon sens.
- ◇ La résistance est dite *dynamique* car cet effet ne se fait sentir que lorsque la diode est passante.
- ◇ Pour le domaine « diode bloquée », le modèle est évident.
- ◇ Pour le domaine « diode passante », nous constatons que la portion de droite peut s'écrire sous la forme :

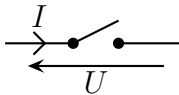
$$I = \frac{1}{r} (U - V_d) \quad \rightsquigarrow \quad U = r I + V_d$$

✧ Nous constatons alors que l'expression de U est bien celle que nous obtenons avec l'additivité des tensions à partir du modèle électrocinétique.

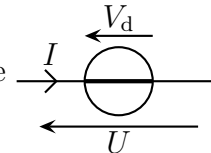
La diode idéale à tension de seuil non nul possède la caractéristique suivante :



→ lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme

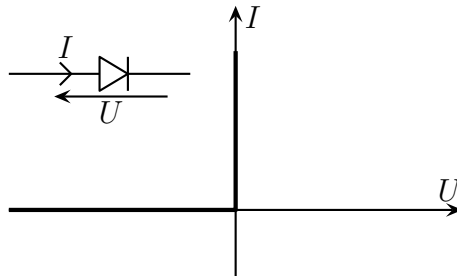


→ lorsque la diode est passante, elle se comporte comme

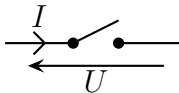


✧ Il s'agit du modèle le plus utilisé dans les exercices car la résistance dynamique de la diode est très souvent négligeable devant les autres résistances.

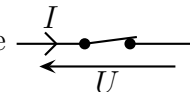
La diode idéale possède la caractéristique suivante :



→ lorsque la diode est bloquée, elle se comporte comme



→ lorsque la diode est passante, elle se comporte comme



✧ C'est le modèle le plus utilisé pour expliquer de manière qualitatif ce qui se passe dans un circuit. La diode agit alors comme un sens interdit : le courant passe comme il veut dans un sens et pas du tout dans l'autre.

I.2 – Comment étudier un circuit non linéaire ?

I.2.i – tout va bien !

- ◇ Le changement qualitatif avec ce qui est non linéaire c'est qu'il n'est plus possible d'utiliser le principe de superposition : il faut étudier chaque situation dans son ensemble.
- ◇ Il existe deux grandes sources de non linéarités :
 - des lois tout le temps non linéaires (ex : des lois du type $U = \pm \alpha I^2$)
 - des comportements fondamentalement différents suivant la valeur d'un paramètre (ex : l'AO qui est en régime de saturation haute ou basse suivant la valeur de ϵ).
- ◇ Le 2^e cas est plus facile à traiter que le premier car dans chaque plage de fonctionnement le composant non linéaire peut avoir un comportement linéaire. Sa non linéarité vient du fait qu'il peut changer de comportement linéaire.
- ◇ C'est pourquoi dans un certain nombre de cas, comme par exemple pour la diode, nous allons modéliser des comportements tout le temps non linéaires par des comportements **linéaires par domaine**.

I.2.ii – méthode analytique

★ principe de base

Pour un circuit comportant un composant non linéaire au fonctionnement *a priori* inconnu, il faut :

- faire une hypothèse sur son domaine de fonctionnement
- écrire l'égalité correspondante (et le remplacer par son modèle électrocinétique éventuellement)
- vérifier l'inégalité définissant le domaine de fonctionnement

Pour un circuit comportant un composant non linéaire au fonctionnement connu, il faut :

- écrire l'égalité correspondante (et le remplacer par son modèle électrocinétique éventuellement)
- vérifier l'inégalité définissant le domaine de fonctionnement

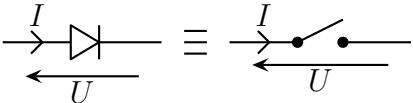
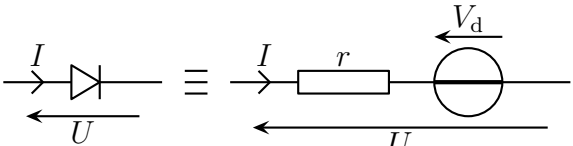
- ◇ Nous avons déjà rencontré cette méthode de raisonnement avec les forces de frottement solide sur un support immobile.

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
glissement	$R_T = f R_N$	$v \neq 0$
non glissement	$v = 0$	$R_T \leq f R_N$

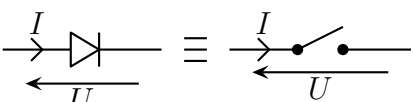
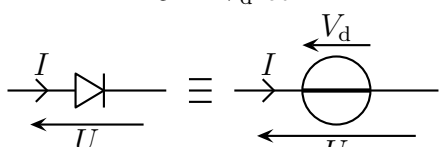
- ◇ Notons que dans le cas précédent, l'inégalité à vérifier était une « non égalité » au sens large avec un « différent de ».
- ◇ Bien sûr, il est recommandé de réfléchir avant de faire les hypothèses. Tomber sur la bonne hypothèse dès le début permet de gagner du temps. Pour cela il est possible :
 - d'exploiter des chronogrammes expérimentaux
 - de rechercher rapidement qualitativement le fonctionnement du circuit avec le modèle « sens interdit » de la diode.

★ application à la diode

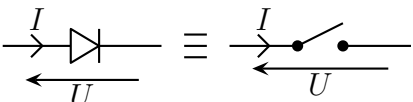
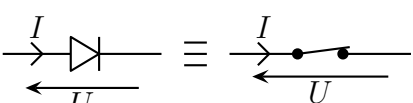
Pour le modèle linéaire de la diode réelle :

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
diode bloquée	$I = 0$ et 	$U \leq V_d$
diode passante	$U = r I + V_d$ et 	$I \geq 0$

Pour la diode idéale à tension de seuil non nul :

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
diode bloquée	$I = 0$ et 	$U \leq V_d$
diode passante	$U = V_d$ et 	$I \geq 0$

Pour la diode idéale :

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
diode bloquée	$I = 0$ et 	$U \leq V_d$
diode passante	$U = 0$ et 	$I \geq 0$

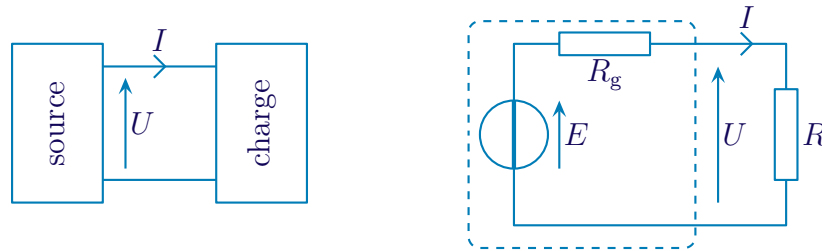
◇ Poser l'égalité ou le modèle électrocinétique revient au même, mais il vaut mieux, de toutes façons, refaire le circuit avec le modèle équivalent de la diode afin de mieux « voir » ce qui se passe (ou pas) dans le circuit.

I.2.iii – méthode graphique

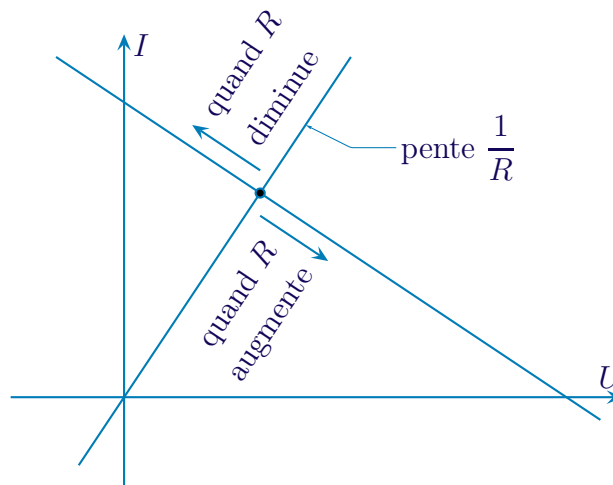
◇ Il est aussi possible de résoudre des problèmes électrocinétique uniquement graphiquement, lorsqu'il n'y a pas de condensateur ou de bobines, *ie.* lorsque le circuit est d'ordre 0 (que des résistors).

★ point de fonctionnement

- ◇ Considérons un circuit pouvant être assimilé à une association de deux dipôles. Par exemple le circuit représenté avec un générateur modèle de THÉVENIN et un résistor.

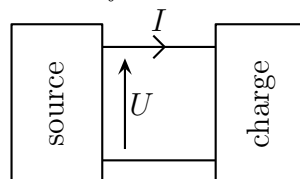


- ◇ Nous pouvons constater que les grandeurs U et I sont communes aux deux dipôles. Nous pouvons donc représenter les caractéristiques des deux dipôles dans le même plan (U, I) . La partie « source » est donc en convention générateur et la partie « charge » en convention récepteur.



- ◇ Comme les valeurs de U et I sont les mêmes pour les deux dipôles, cela correspond forcément au point d'intersection des deux caractéristiques.

Le point dans le plan (U, I) correspondant à la tension aux bornes des deux dipôles et à l'intensité parcourant le circuit tel que schématisé ci-dessous est appelé *point de fonctionnement*.



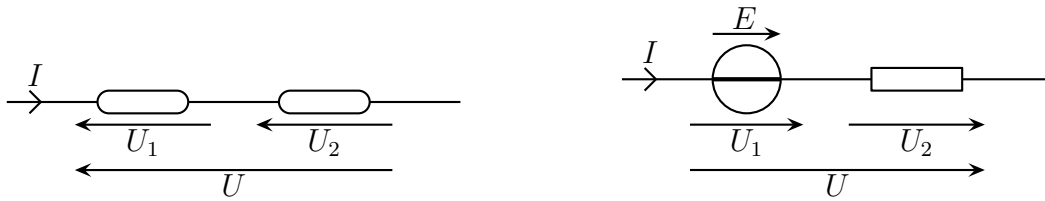
☛ *Remarque* : le « point de fonctionnement optique » vient directement de ce point de fonctionnement électrocinétique.

- ◇ Dans la caractéristique précédente, il est facile de faire varier qualitativement les paramètres.
 ◇ Par exemple, si R augmente, la pente de la droite diminue et le point de fonctionnement se déplace vers la droite et vers le bas : la tension aux bornes de R augmente et I diminue.
 ◇ De même, si R diminue, la pente de la droite augmente et le point de fonctionnement se déplace vers la gauche et vers le haut : la tension aux bornes de R diminue et I augmente.

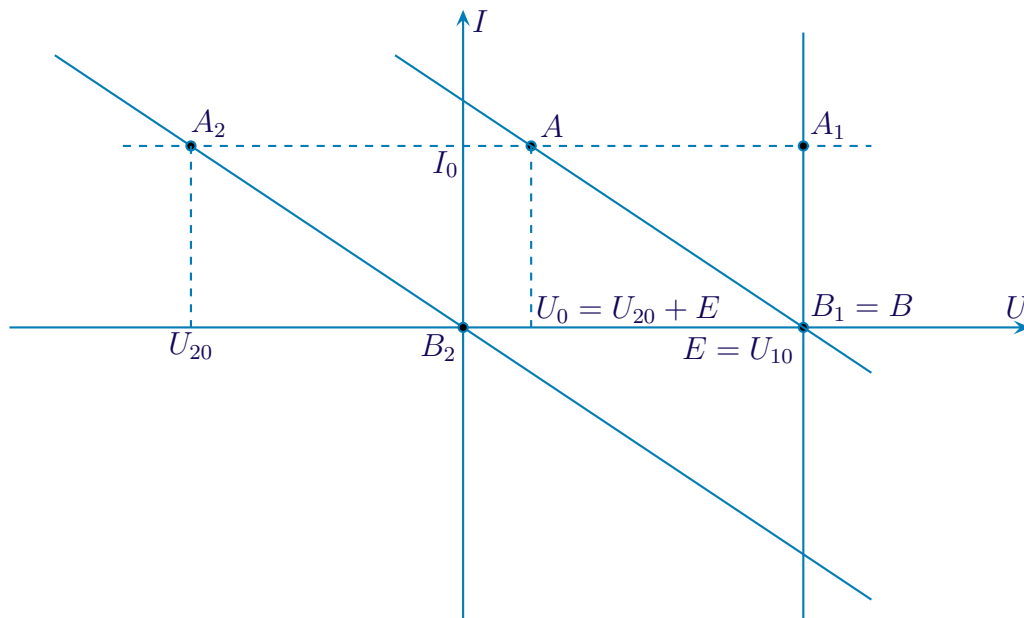
- ◇ C'est bien compatible avec $U = \frac{R}{R + R_g} E = \frac{E}{1 + \frac{R_g}{R}}$ et $I = \frac{E}{R + R_g}$.

★ association série de dipôles

- ◇ Pour une association de deux dipôles en série, telle celle ci-dessous, l'idée est de remarquer que lorsque I traverse les deux dipôles, la tension totale aux bornes de l'association vaut $U = U_1 + U_2$.



- ◇ Considérons l'association ci-dessus et représentons les deux caractéristiques $I = f(U_1)$ et $I = f(U_2)$. N'oublions pas de remarquer que l'ensemble est en convention générateur.



- ◇ Pour déterminer la caractéristique de l'association :

- choisissons une valeur particulière de l'intensité, ici I_0
- cherchons les tensions U_{10} et U_{20} aux bornes des dipôles (points A_1 et A_2)
- le point de la caractéristique de l'association est en $(U_{10} + U_{20}, I)$ (point A)

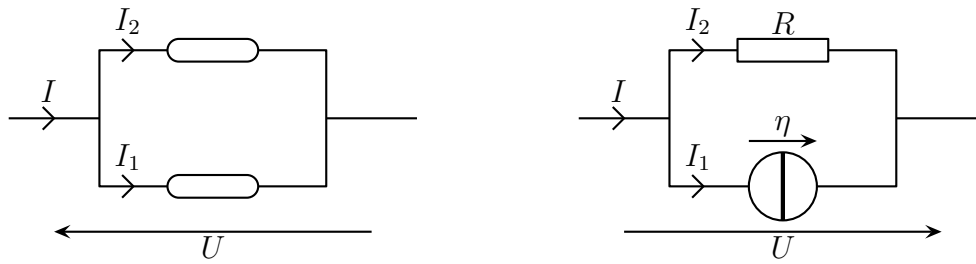
- ◇ Nous pouvons prendre une autre série de points B_1 et B_2 qui donnent B .

L'association graphique de deux portions de droite donne une portion de droite.

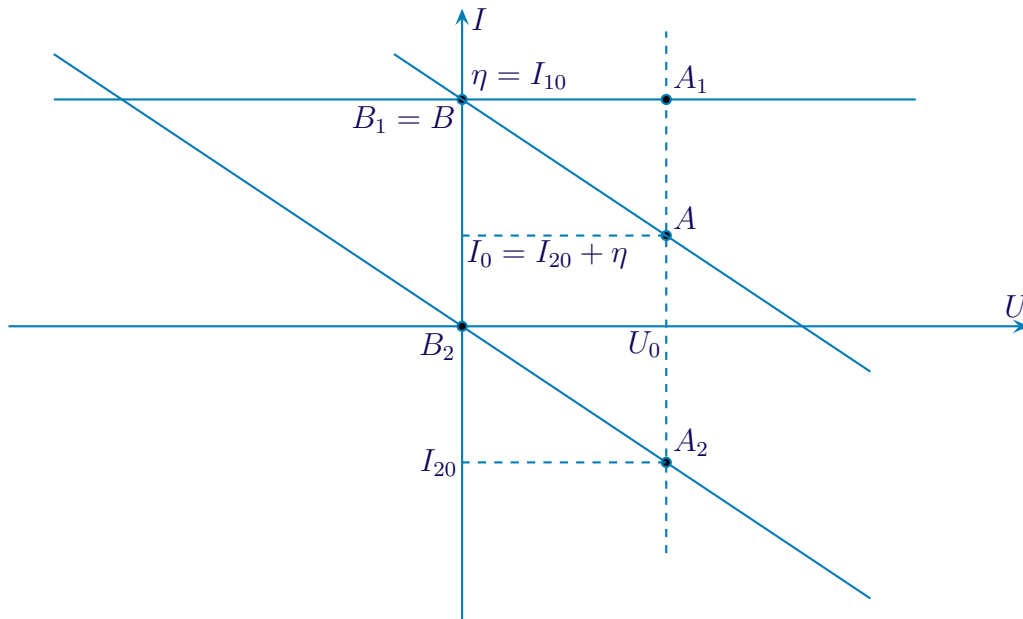
- ◇ Ici tout se passe comme si nous avions translaté de E vers la droite la caractéristique du résistor.
- ◇ Nous retrouvons bien la caractéristique d'un générateur réel en convention générateur.

★ association parallèle de dipôles

- ◇ Pour une association de deux dipôles en parallèle, telle celle ci-dessous, l'idée est de remarquer que lorsque U est aux bornes des deux dipôles, l'intensité totale traversant l'association vaut $I = I_1 + I_2$.



◇ Considérons l'association ci-dessus et représentons les deux caractéristiques $I = f(U_1)$ et $I = f(U_2)$. N'oublions pas de remarquer que l'ensemble est en convention générateur.



◇ Pour déterminer la caractéristique de l'association :

- choisissons une valeur particulière de la tension, ici U_0
- cherchons les intensités I_{10} et I_{20} traversant les dipôles (points A_1 et A_2)
- le point de la caractéristique de l'association est en $(U_0, I_{10} + I_{20})$ (point A)

◇ Nous pouvons prendre une autre série de points B_1 et B_2 qui donnent B .

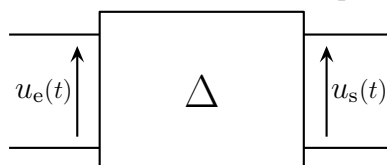
◇ Ici tout se passe comme si nous avions translaté de η vers le haut la caractéristique du résistor.

◇ Nous retrouvons bien la caractéristique d'un générateur réel en convention générateur.

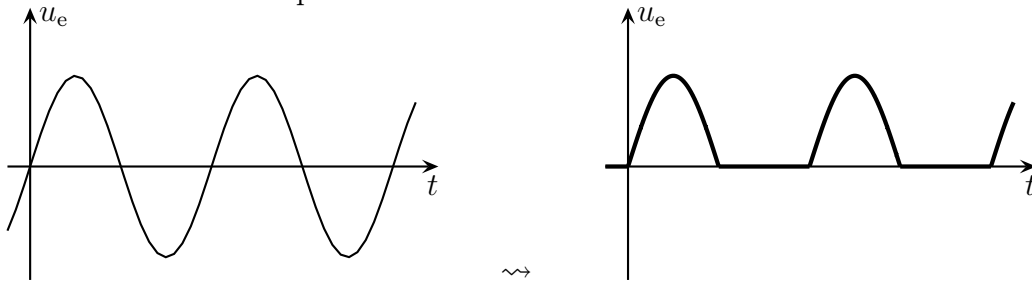
I.3 – Redressement

I.3.i – intérêt du redressement

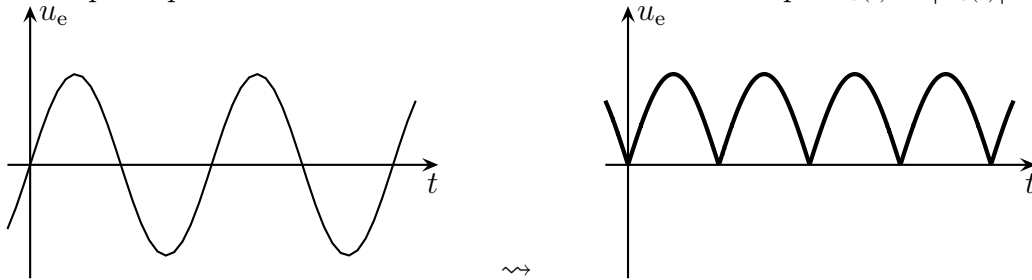
Un quadripôle est dit *redresseur* s'il transmet la tension d'entrée en sortie mais uniquement avec des valeurs positives.



Un quadripôle redresseur est dit *simple alternance* lorsqu'il ne conserve que la partie positive de la la tension d'entrée.



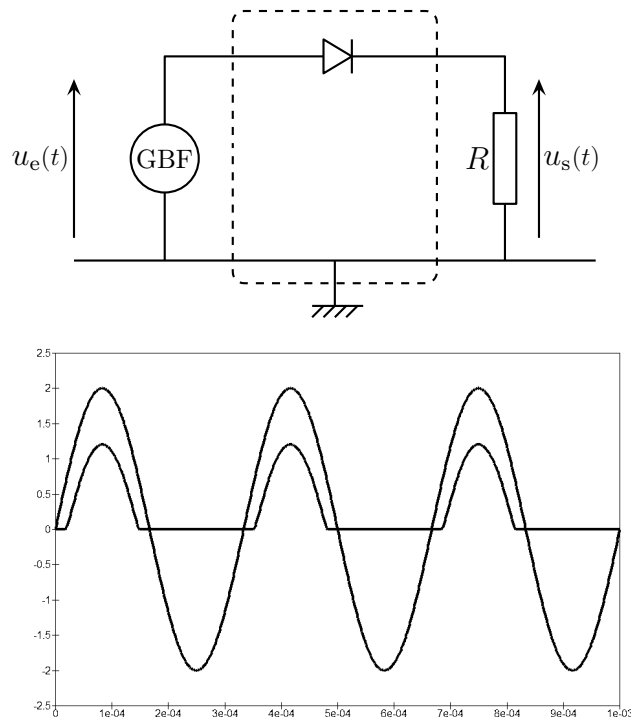
Un quadripôle redresseur est dit *double alternance* lorsque $u_s(t) = |u_e(t)|$.



I.3.ii – simple alternance

★ montage et simulation

◇ Considérons le montage ci-dessous et visualisons la simulation de son fonctionnement.



◇ Nous pouvons constater que la tension de sortie est toujours positive : le quadripôle encadré est bien un redresseur simple alternance.

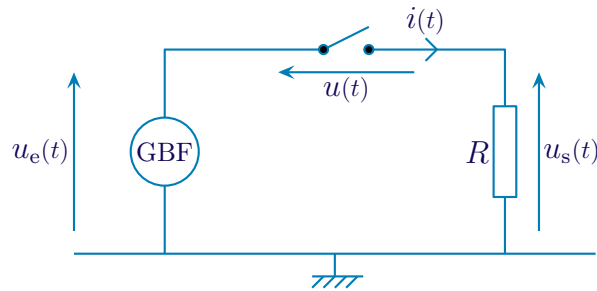
◇ Toutefois, nous pouvons voir un léger décalage lorsque la tension est positive.

★ interprétation

- ◇ La tension de sortie est prise aux bornes d'une résistance :
 - lorsque la tension est nulle, le courant qui la traverse aussi et donc la diode est bloquée
 - lorsque la tension est positive, du courant circule donc la diode est passante.

🕒 diode bloquée

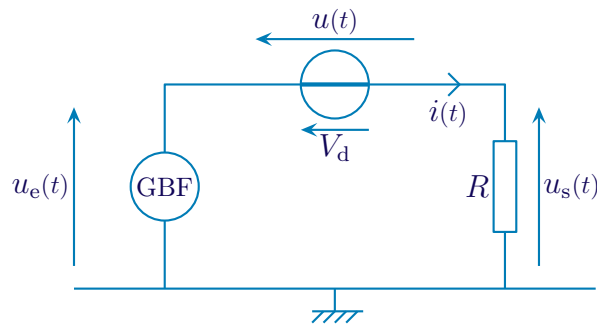
- ◇ Supposons la diode bloquée.
- ◇ Notons $i(t)$ l'intensité du courant traversant la diode et $u(t)$ la tension entre ses bornes, les deux grandeurs étant choisies dans le sens naturel.



- ◇ Nous pouvons alors écrire $i(t) = 0$ ce qui donne $u_s(t) = 0$.
- ◇ De plus ce sera vrai tant que $u(t) \leq V_d$. Or $u(t) = -u_s(t) + u_e(t)$ ce qui donne la condition $u_e(t) \leq V_d$.

🕒 diode passante

- ◇ Supposons la diode passante.
- ◇ Notons de même $i(t)$ l'intensité du courant traversant la diode et $u(t)$ la tension entre ses bornes.



- ◇ Nous avons alors, par simple additivité des tensions $u_s(t) = u_e(t) - V_d$.
- ◇ De plus ce sera vrai tant que $i(t) \geq 0$. Or $i(t) = \frac{u_s(t)}{R}$ ce qui conduit à la condition :

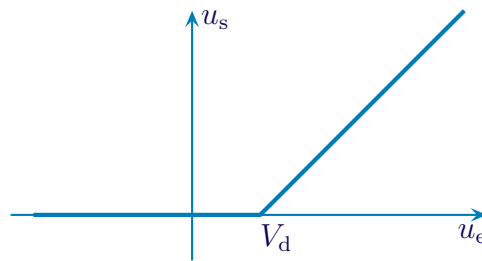
$$\frac{u_e(t) - V_d}{R} \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) \geq V_d$$

🕒 représentation graphique

- ◇ Nous pouvons constater que les deux conditions recouvrent tous les cas possibles :

$$u_s(t) = 0 \quad \text{pour} \quad u_e(t) \leq V_d \quad \text{et} \quad u_s(t) = u_e(t) - V_d \quad \text{pour} \quad u_e(t) \geq V_d$$

- ◇ Graphiquement cela correspond à :

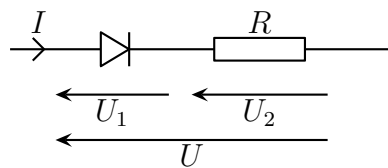


✧ Ici le redressement se fait avec un seuil (qui vaut ici V_d) puisque c'est la tension minimale à partir de laquelle la tension d'entrée est redressée.

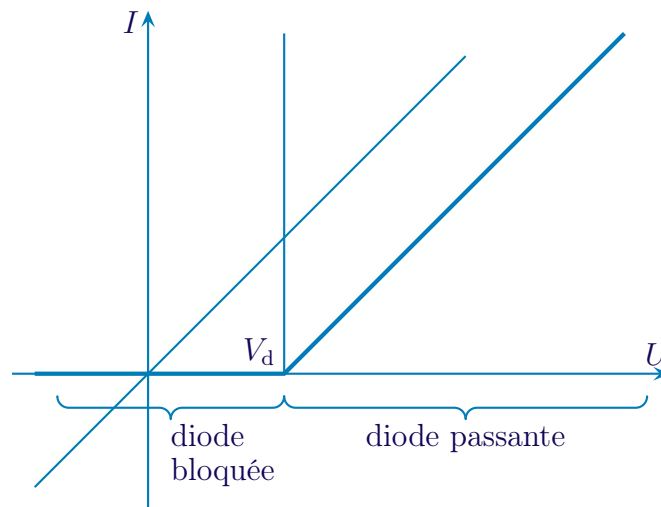
★ interprétation graphique

🔗 association série de la diode et du résistor

✧ Cherchons la caractéristique de l'association série de la diode et du résistor.



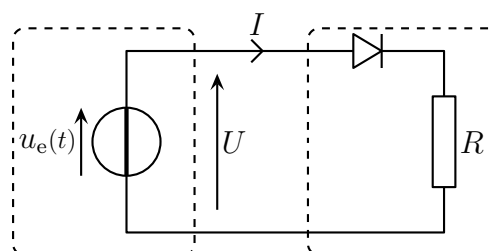
✧ Commençons par représenter les deux caractéristiques en convention récepteur et cherchons la caractéristique de l'association comme nous l'avons vu précédemment.



✧ Nous pouvons voir dans la caractéristique précédentes deux zones : une pour laquelle la diode est bloquée, l'autre pour laquelle la diode est passante.

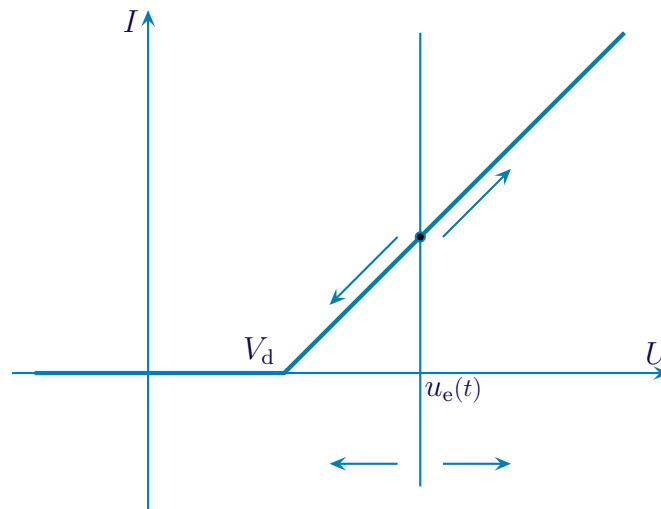
🔗 fonctionnement

✧ Considérons le montage redresseur comme l'association d'un générateur idéal de tension $u_e(t)$ et de la charge constituée de la diode en série avec le résistor.



✧ Nous pouvons alors représenter graphiquement le point de fonctionnement de l'association :

- la caractéristique de la source est une droite verticale d'abscisse $u_e(t)$
- la caractéristique de la charge a été déterminée ci-dessus.

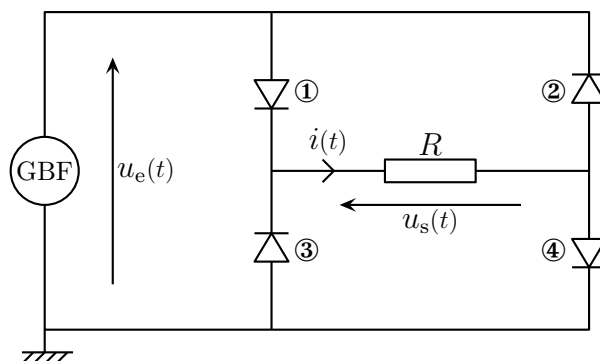


- ✧ Lorsque $u_e(t)$ évolue, nous pouvons constater que le point de fonctionnement peut passer d'une zone où la diode est bloquée à une zone où la diode est passante. Nous voyons tout de suite que la valeur limite, c'est $u_e = V_d$.
- ✧ Si, avec cette approche, il est inutile de faire des hypothèses sur le fonctionnement de la diode, l'inconvénient c'est que l'étude ne se fait que pour un U et un I bien précis et, en l'occurrence, obligatoirement pas totalement intéressant pour nous puisque nous cherchions une relation entre deux tensions.

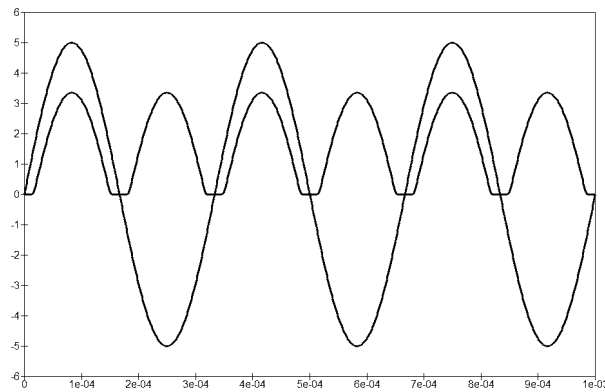
I.3.iii – double alternance

★ montage et simulation

✧ Considérons le montage suivant.



✧ La simulation de ce circuit est la suivante.



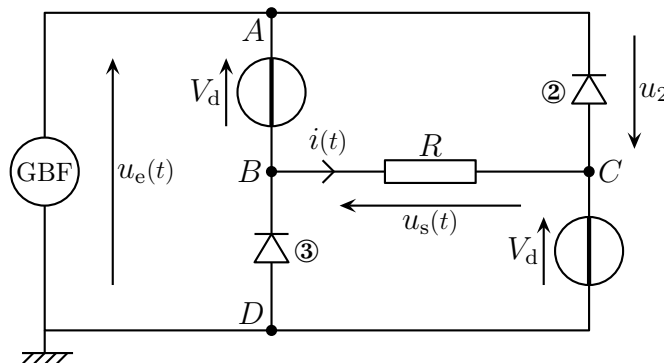
- ✧ Nous pouvons constater qu'il s'agit là d'un montage redresseur double alternance. Toutefois celui ne semble pas parfait étant donné que lorsqu'elle passe, la tension de sortie ne vaut pas exactement celle d'entrée.

★ interprétation

- ✧ Étant donné que la tension aux bornes du résistor est toujours positive, cela signifie que l'intensité du courant $i(t)$ qui le traverse est elle aussi toujours positive.
- ✧ Étant donné le rôle de « sens interdit » que possèdent les diodes, cela signifie que le courant passe soit par les diodes ① et ④, soit pas les diodes ② et ③.
- ✧ Si, de manière brutale, nous aurions pu / du étudier 8 cas possibles (4 diodes, 2 états pour chacune), ici avec un peu de raisonnement, nous pouvons nous limiter à deux cas *a priori*.

🔗 diodes ① et ④ passantes

- ✧ Le circuit est alors équivalent au schéma suivant. Cherchons l'état des diodes ② et ③.



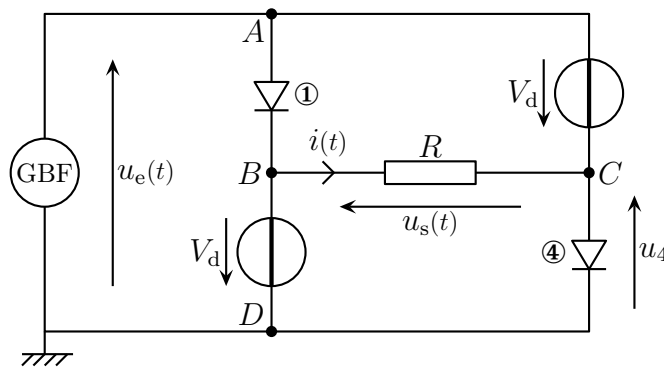
- ✧ Il semblerait logique qu'elles soient bloquées car nous savons que nous étudierons le cas où elles sont passantes juste après. Cherchons donc à montrer qu'elles le sont bel et bien.
- ✧ Qualitativement. Le courant a plus d'énergie en A qu'en B et, à cause du résistor, il en a plus en B qu'en C. Au total le courant a plus d'énergie en A la « sortie » de la diode ② qu'en C « l'entrée » de la diode ②. Le courant ne peut donc pas passer dans la diode ②, elle est donc bloquée.
- ✧ Formellement c'est identique. Calculons la tension u_2 , tension naturelle de la diode ②. Par additivité des tensions, nous trouvons $u_2 = -V_d - u_s(t) < 0$ car $u_s(t) \geq 0$. La diode est donc bloquée.
- ✧ Un raisonnement identique nous permet de montrer que la diode ③ est aussi bloquée.
- ✧ Cherchons maintenant quelle condition cela implique sur la tension d'entrée.
- ✧ Il faut $i(t) \geq 0$ or, à partir d'une loi des mailles :

$$u_e(t) - V_d - R i(t) - V_d = 0 \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = \frac{u_e(t) - 2V_d}{R} \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) \geq 2V_d$$

- ✧ Cet état correspond aux arches où la tension est redressée et $u_e(t) \leq 0$.

🔗 diodes ② et ③ passantes

✧ Le circuit est alors équivalent au schéma suivant. Cherchons l'état des diodes ② et ③.



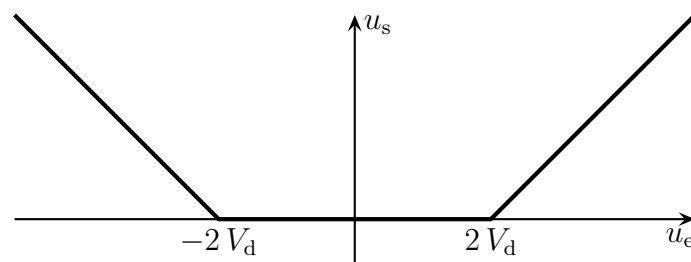
- ✧ De la même manière que pour le cas précédent, il y a plus d'énergie en D qu'en B puisque ③ est passante et plus d'énergie en B qu'en C puisqu'il s'agit d'un résistor et que $i(t) \geq 0$. Il y a donc plus d'énergie en D qu'en C ce qui empêche la diode ④ d'être passante.
- ✧ Calculons la tension u_4 , tension naturelle de la diode ②. Par additivité des tensions, nous trouvons $u_4 = -V_d - u_s(t) < 0$ car $u_s(t) \geq 0$. La diode ④ est donc bloquée.
- ✧ Cherchons maintenant quelle condition cela implique sur la tension d'entrée.
- ✧ Il faut $i(t) \geq 0$ or, à partir d'une loi des mailles :

$$u_e(t) + V_d + R i(t) + V_d = 0 \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = -\frac{u_e(t) + 2V_d}{R} \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) \leq -2V_d$$

- ✧ Cet état correspond aux arches où la tension est redressée et $u_e(t) \leq 0$.

🔗 rassemblement et représentation graphique

- ✧ Nous pouvons constater que les deux cas étudiés ne permettent pas d'envisager tous les cas possibles pour $u_e(t)$. Toutefois en remarquant qu'une diode *seule* ne peut pas être passante, nous pouvons être sûr que nous avons étudié tous les cas où le courant passe. Dans tous les autres cas le courant ne passe pas et donc la tension $u_s(t)$ est nulle.

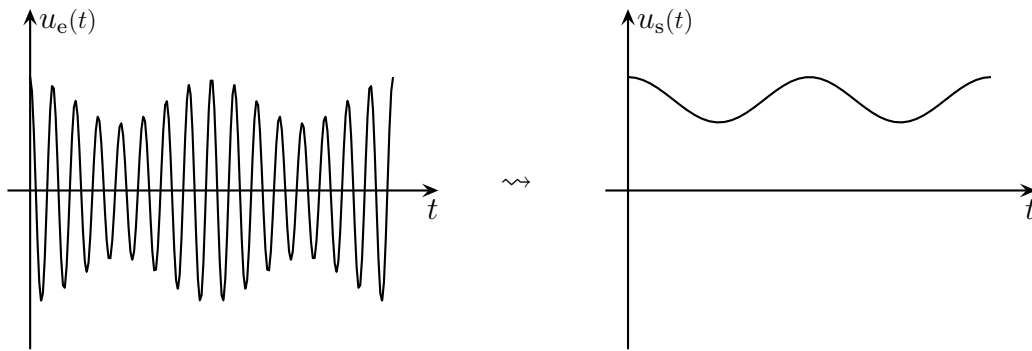


- ✧ Ici le redressement se fait avec un seuil (qui vaut ici $2V_d$) puisque c'est la tension minimale à partir de laquelle la tension d'entrée est redressée.

I.4 – Détecteur de crêtes, version simple

I.4.i – rôle du détecteur

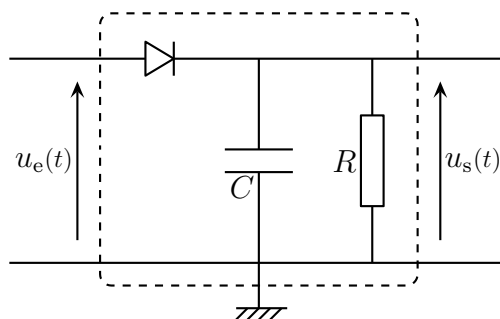
Un *détecteur de crêtes* a pour rôle d'envoyer, en sortie, l'enveloppe du signal d'entrée.



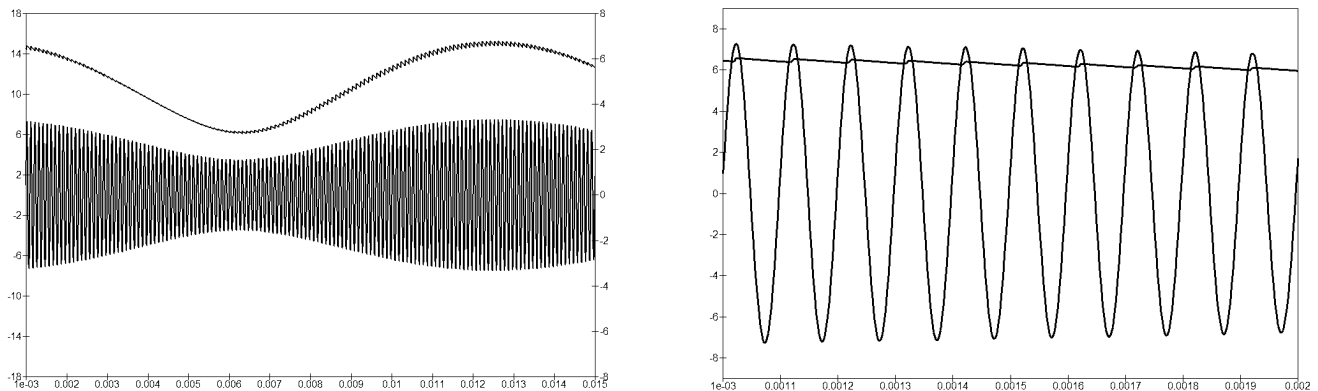
◇ Le détecteur de crêtes nous sera utile en TP lorsqu'il s'agira de démoduler un signal.

I.4.ii – montage et visualiation

◇ Considérons le circuit ci-dessous.



◇ Regardons ce que donne la simulation de fonctionnement pour ce circuit.



◇ De loin le montage semble effectivement remplir son rôle de détecteur de crêtes. Regardons de plus près ce qu'il se passe.

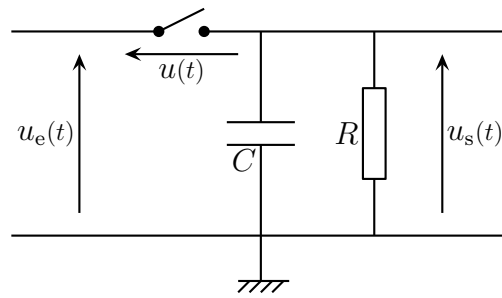
◇ Nous voyons de près que la tension de sortie semble suivre la tension d'entrée quand elle monte et évoluer en décroissant lorsque la tension d'entrée diminue trop vite.

I.4.iii – fonctionnement détaillé

★ deux états possibles pour la diode

🕒 diode bloquée

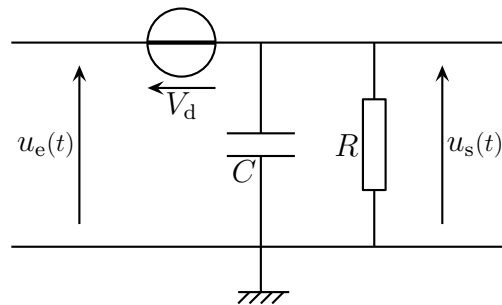
◇ Refaisons le schéma équivalent lorsque la diode est bloquée.



- ◇ Nous pouvons alors voir que le condensateur et le résistor forment un circuit R, C . Le condensateur va alors se décharger à travers le résistor et la tension de sortie évoluera en $u_s(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
- ◇ La diode sera bloquée tant que $u < V_d$. Or par additivité des tensions nous avons $u(t) = -u_s(t) + u_e(t)$ ce qui amène à la condition $u_e(t) < u_s(t) + V_d$.

🕒 diode passante

- ◇ Refaisons le schéma équivalent pour une diode passante.



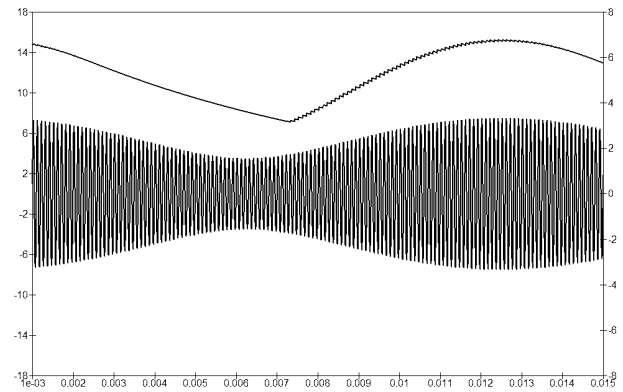
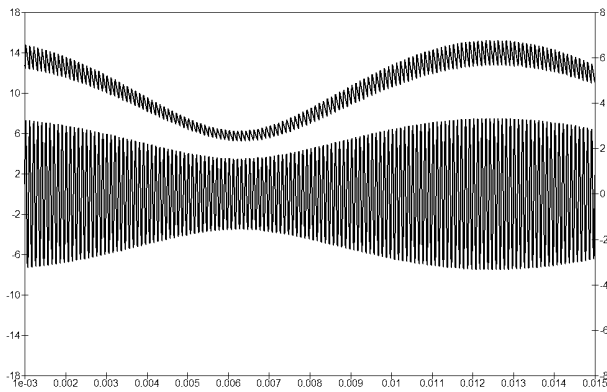
- ◇ Ici l'additivité des tensions donne tout de suite $u_s(t) = u_e(t) - V_d$.
- ◇ Trouver la condition sur u_e à partir d'une condition sur $i(t)$ ne va pas être facile ici notamment à cause du condensateur.
- ◇ Toutefois, nous pouvons dire que la diode est soit bloquée soit passante. Et quand elle est bloquée nous avons $u_e(t) < u_s + V_d$. Ainsi la diode est passante lorsque $u_e(t) \geq u_s(t) + V_d$, ie. quand $u_e(t) = u_s(t) + V_d$.

🕒 phénoménologie

- ◇ Finalement nous pouvons voir que la diode :
 - ➔ quand elle est passante, elle permet au condensateur de se charger lorsque la tension d'entrée est suffisante
 - ➔ quand elle est bloquée, elle oblige le condo à se décharger uniquement dans R
- ◇ Ici le condensateur est un réservoir d'énergie qui se vide naturellement dans R et que $u_e(t)$ ne peut que remplir.

★ bien ajuster la constante de temps

- ◇ Remarquons que l'effet de décharge du condensateur est fondamental dans le détecteur de crêtes puisque c'est lui qui permet de si la tension d'entrée diminue. Il faut donc qu'elle soit bien ajustée.
- ◇ Avec une constante de temps mal ajustée, nous pourrions avoir des phénomènes tels que :
 - ➔ lorsque la décharge est trop rapide, elle peut être trop significative entre deux oscillations et provoquer un effet « dents de scie » non souhaitable
 - ➔ lorsque la décharge est trop lente, il est possible que le détecteur rate quelques diminutions « trop rapides » de la tension d'entrée.



★ inconvénients

- ✧ Ce montage est loin d'être parfait, voyons deux de ses défauts.
- ✧ Tout d'abord celui qui est le plus visible c'est l'effet de seuil. Il faut que la tension soit au moins de V_d pour que le détecteur puisse détecter quelque chose. En dessous de cette tension, toute évolution est totalement invisible pour le détecteur.
- ✧ Ensuite, lorsque la diode est passante, du courant passe dans le résistor et le condensateur se charge. De l'énergie est prélevée à la source. *A priori* étant donné l'aspect systémique de l'électrocinétique, cela va influencer le montage en amont ce qui signifie que la tension d'entrée n'évolue pas de la même manière avec et sans le détecteur. C'est comme pour les filtres : le détecteur de crêtes a une certaine impédance d'entrée.
- ✧ Pour corriger ces défauts, il existe un composant formidable : l'AO. C'est lui que nous allons étudier dans la partie suivante.

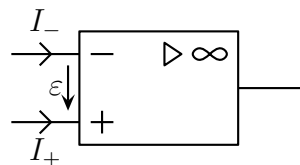
II – Avec un amplificateur opérationnel

II.1 – Régime de saturation

II.1.i – description

★ rappels

- ✧ Rappelons ce qu'il en est pour l'AO idéal ci-dessous.



- ✧ L'AO idéal est tel que :
 - les courants de polarisation I_- et I_+ sont nuls
 - la tension de décalage est nulle
 - le coefficient d'amplification est infini
- ✧ Lorsqu'il fonctionne en régime non linéaire (ou « de saturation »), l'AO est tel que :
 - $\varepsilon \neq 0$, ie. $V_+ \neq V_-$ et $V_s = \pm V_{\text{sat}}$
 - $\varepsilon > 0$ si et seulement si $V_s = +V_{\text{sat}}$
 - $\varepsilon < 0$ si et seulement si $V_s = -V_{\text{sat}}$

★ phénoménologie

- ◇ L'AO est un amplificateur de tension.
- ◇ Si V_+ légèrement supérieur à V_- (de 0,03 mV) alors V_s va tendre très rapidement vers $+V_{\text{sat}}$. Sans rétroaction négative, l'effet sera immédiat.
- ◇ Si V_- légèrement inférieur à V_+ (de 0,03 mV), c'est le contraire V_s va tendre très rapidement vers $-V_{\text{sat}}$.
- ◇ Rappelons qu'il est extrêmement difficile d'avoir deux grandeurs d'origines physiques distinctes (par exemple deux tensions de deux générateurs) être égales par hasard ou par choix à mieux que 0,03 mV, ne serait-ce qu'à cause du bruit électrique. C'est pourquoi nous n'étudierons jamais le cas extrêmement improbable de $\varepsilon = 0$ sans rétroaction.

Lorsqu'un AO idéal fonctionne en régime non linéaire, sa tension d'entrée ε est obligatoirement non nulle.

II.1.ii – étudier un AO en régime de saturation

- ◇ C'est comme pour les diodes :
 - soit nous savons dans lequel des deux domaines fonctionne l'AO et il ne reste plus qu'à en chercher les conditions sur la grandeur d'entrée
 - soit nous faisons une hypothèse sur le régime (saturation haute ou basse) qui nous amène alors à vérifier quand elle est valable.

Pour un AO idéal en régime non linéaire :

hypothèse	« à poser »	« à vérifier »
saturation haute	$V_s = +V_{\text{sat}}$	$\varepsilon > 0$ ou $V_+ > V_-$
saturation basse	$V_s = -V_{\text{sat}}$	$\varepsilon < 0$ ou $V_+ < V_-$

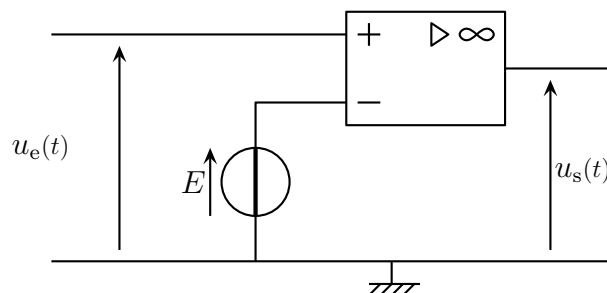
- ◇ Ici, la loi de fonctionnement de l'AO c'est soit $V_s = +V_{\text{sat}}$ soit $V_s = -V_{\text{sat}}$.
- ◇ Comme les deux cas se ressemblent fortement (condition à poser sur V_s et condition à vérifier sur ε), il sera parfois possible d'étudier les deux cas en même temps.

II.2 – Comparateurs

II.2.i – comparateur simple

★ montage et analyse

- ◇ Considérons le montage ci-dessous pour lequel nous cherchons $u_s(t)$ en fonction de $u_e(t)$.



◇ Analyse physique :

- c'est un AO non rétroactionné donc en régime non linéaire
- le lien entre la sortie et l'entrée va certainement dépendre de E

◇ Analyse technique il y a un seul point de potentiel inconnu (la sortie), une seule loi, la loi de fonctionnement de l'AO suffira.

★ fonctionnement

◇ Supposons que la saturation soit haute, alors $V_s = +V_{\text{sat}}$. Ceci est vrai tant que $\varepsilon > 0$, *ie.* tant que :

$$V_+ - V_- > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e - E > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) > E \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_s = +V_{\text{sat}} \text{ lorsque } u_e > E}$$

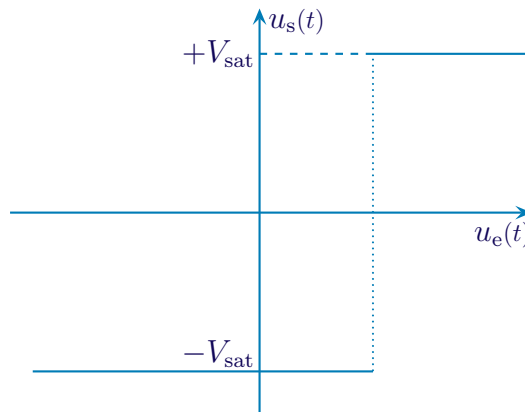
◇ Supposons que la saturation soit basse, alors $V_s = -V_{\text{sat}}$. Ceci est vrai tant que $\varepsilon < 0$, *ie.* tant que :

$$V_+ - V_- < 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e - E < 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) < E \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_s = -V_{\text{sat}} \text{ lorsque } u_e < E}$$

★ graphiquement

🕒 caractéristique

◇ Traçons simplement u_s en fonction de u_e .

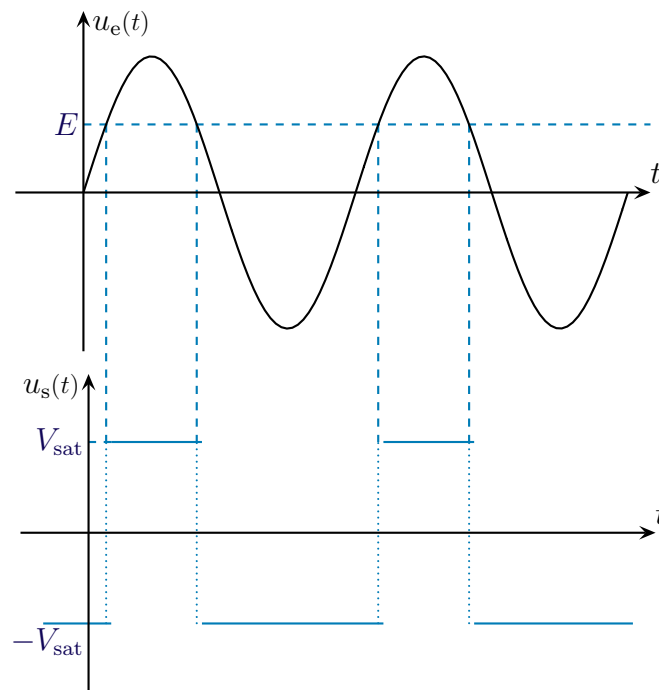


◇ La ligne verticale est tracée en pointillés car il n'est pas possible qu'un point de fonctionnement soit dessus.

☛ *Remarque* : dans la caractéristique statique de l'AO, le trait vertical n'était pas en pointillés parce que, justement, avec des rétroaction, il est possible d'avoir un point de fonctionnement dessus.

🕒 représentation temporelle

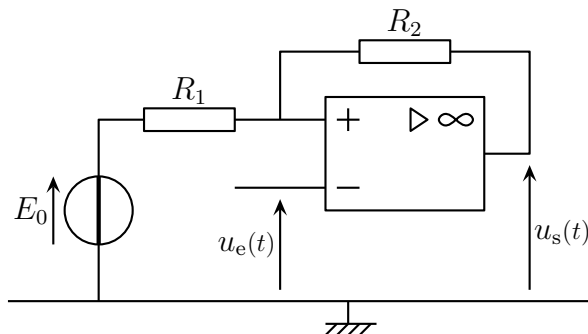
◇ Représentons ce qui se passe pour $u_e(t)$ et $u_s(t)$.



II.2.ii – comparateur à hystérésis

★ montage et analyse

◇ Considérons le montage ci-dessous pour lequel nous cherchons $u_s(t)$ en fonction de $u_e(t)$.



◇ Analyse physique :

- le circuit est en régime quelconque
- c'est un AO non rétroactionné sur l'entrée inverseuse donc en régime non linéaire
- GP : R_1 , R_2 , E_0 en tant que composant et $u_e(t)$ en tant que contrainte

◇ Analyse technique : il y a un deux points de potentiels inconnus, nous allons donc utiliser deux lois.

★ fonctionnement

🌀 résultats communs

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée non inverseuse de l'AO :

$$\frac{E_0 - V_+}{R_1} + \frac{u_s(t) - V_+}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{R_2 E_0 + R_1 u_s(t)}{R_1 + R_2}$$

☞ saturation haute

- ◇ Nous avons alors, par hypothèse, $u_s(t) = +V_{\text{sat}}$.
- ◇ Cette situation sera vérifiée tant que $\varepsilon > 0$. Avec $V_- = u_e(t)$, cela donne :

$$V_+ - V_- > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) < \frac{R_2 E_0 + R_1 u_s(t)}{R_1 + R_2} \quad \rightsquigarrow \quad u_e < \frac{R_2 E_0 + R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2}$$

☞ saturation basse

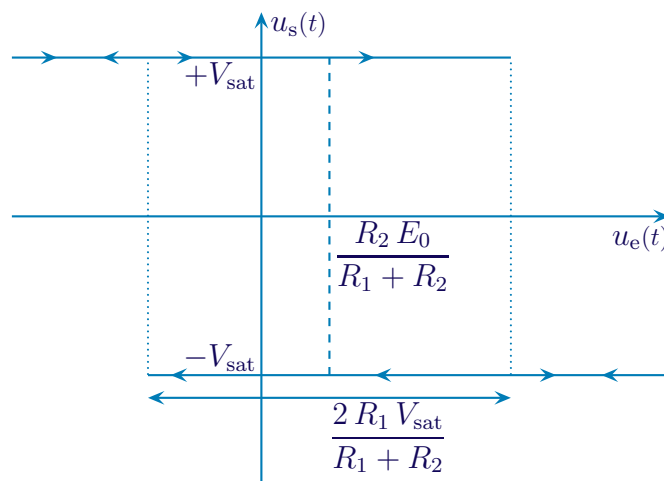
- ◇ Nous avons cette fois, par hypothèse, $u_s(t) = -V_{\text{sat}}$.
- ◇ Cette situation sera vérifiée tant que $\varepsilon < 0$. Avec $V_- = u_e(t)$, cela donne :

$$V_+ - V_- < 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e(t) > \frac{R_2 E_0 + R_1 u_s(t)}{R_1 + R_2} \quad \rightsquigarrow \quad u_e > \frac{R_2 E_0 - R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2}$$

★ graphiquement

☞ caractéristique

- ◇ Traçons les deux portions de droites $u_s(t) = \pm V_{\text{sat}}$ pour les valeurs limites.



- ◇ Nous constatons la présence d'un cycle de largeur $\frac{2 R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$ et centré sur la valeur $\frac{R_2}{R_2 + R_1} E_0$.

Il y a un phénomène *d'hystérésis* lorsqu'un dispositif possède une réponse qui peut prendre deux valeurs différentes suivant le passé de la grandeur d'entrée.

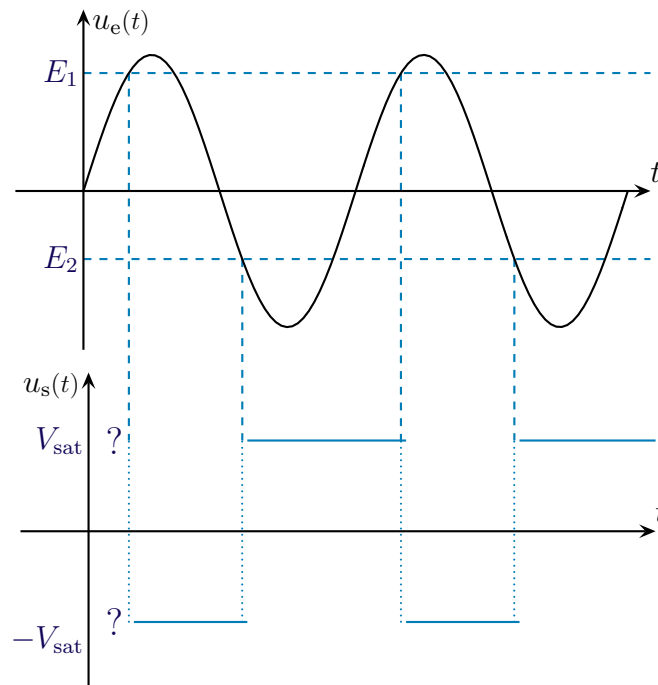
La représentation de la sortie en fonction de l'entrée dans le cas d'un hystérésis fait apparaître un cycle.

- ◇ Cela implique que, pour certaines valeurs de $u_e(t)$, il peut y avoir deux valeurs possibles de la grandeur de sortie $u_s(t)$. Pour connaître cette valeur, il est impératif de connaître le *passé* de $u_e(t)$: la valeur à l'instant t ne suffisant plus.

Seuls les dispositifs non linéaires peuvent créer des cycles d'hystérésis.

🕒 représentation temporelle

- ✧ Les changements de valeurs de $u_s(t)$ se font lorsque $u_e(t)$ passe **au-dessus** de E_1 et **en-dessous** de E_2 .

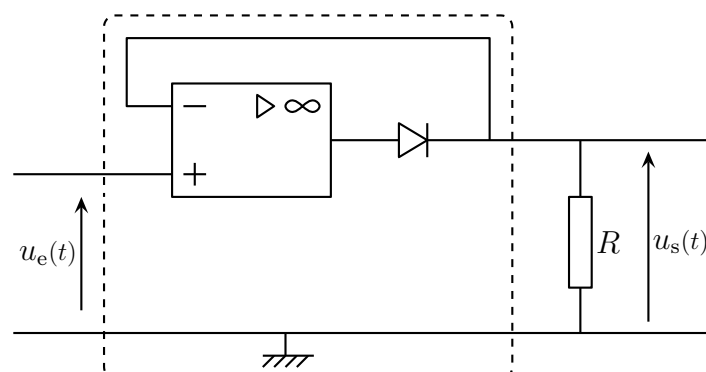


II.3 – Les versions améliorées

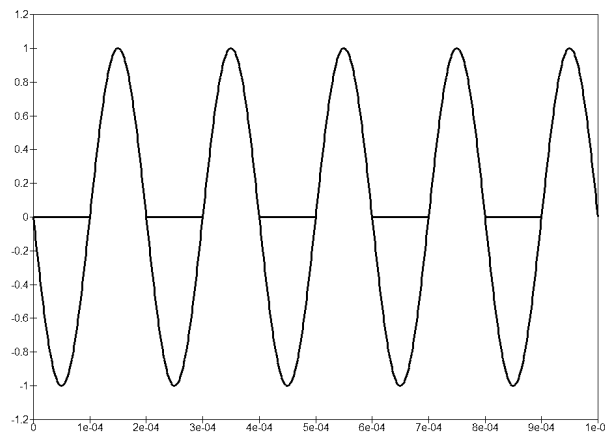
II.3.i – redresseur simple alternance

★ montage et simulation

- ✧ Considérons le montage ci-dessous.



- ✧ Regardons son fonctionnement simulé.



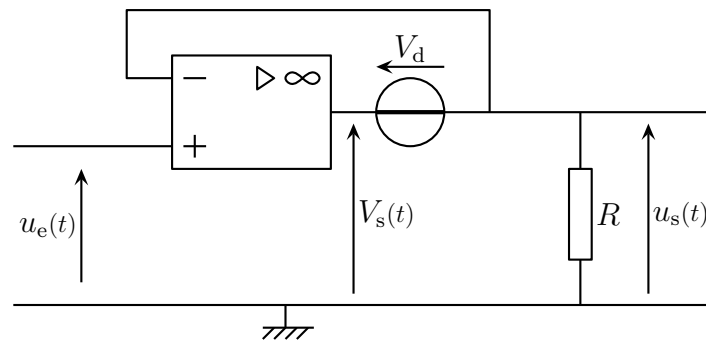
- ◇ Nous pouvons constater qu'il s'agit bien d'un montage redresseur simple alternance.
- ◇ De plus nous pouvons voir que la sortie suit exactement l'entrée : il n'y a plus d'effet de seuil.

★ interprétation

- ◇ Nous pouvons constater que lorsque du courant passe à travers le résistor, la diode est obligatoirement passante.
- ◇ Pour la diode, nous prendrons le modèle de la diode idéale à tension de seuil non nul.

🕒 diode passante

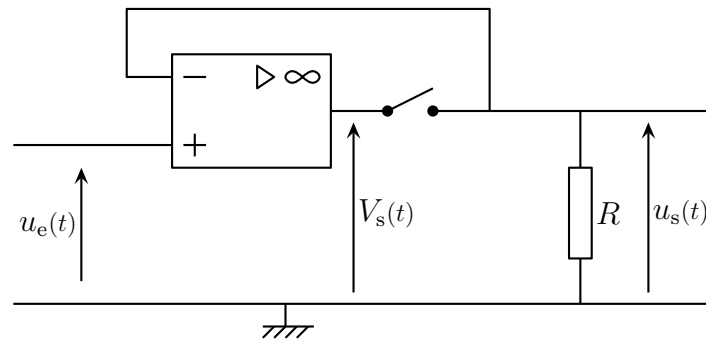
- ◇ Supposons la diode passante. Dans ces conditions, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



- ◇ Analyse physique : l'AO est rétroaction sur son entrée inverseuse, il est donc en régime linéaire.
- ◇ Analyse technique : il y a deux potentiels inconnus. Nous écrirons donc deux lois : la loi de fonctionnement de l'AO et la loi constitutive de V_d .
- ◇ La loi constitutive de l'AO donne directement $u_s(t) = u_e(t)$: c'est un suiveur.
- ◇ C'est vrai tant que $i(t) < 0$, ie. tant que $u_s(t) > 0$ ou encore tant que $u_e(t) > 0$.
- ◇ Finalement, nous avons $u_s(t) = u_e(t)$ tant que $u_e(t) > 0$.
- ◇ Avec la loi constitutive de $V_d(t)$ nous obtenons $V_s(t) = u_s(t) + V_d$.
- ☕ *Remarque* : pour que l'AO ne sature pas, il faut aussi s'assurer que $u_s(t) + V_d = u_e(t) + V_d \leq V_{\text{sat}}$. Cela dit avec des tensions d'entrée usuelles (jusqu'à 10 V) il n'y a pas de problèmes.

🕒 diode bloquée

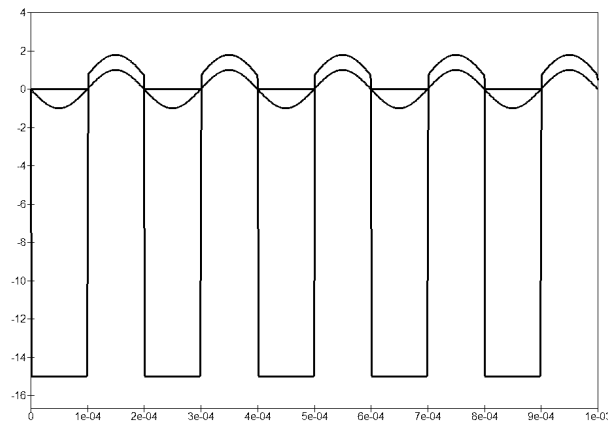
- ◇ Supposons la diode bloquée. Dans ces conditions, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



- ✧ Analyse physique : l'AO n'a pas de rétroaction sur son entrée inverseuse, il est donc en régime de saturation linéaire.
- ✧ Analyse technique : il y a deux potentiels inconnus. Nous écrirons donc deux lois : la loi de fonctionnement de l'AO et la loi constitutive de R .
- ✧ La loi constitutive de R donne directement $u_s(t) = 0$.
- ✧ C'est vrai tant que $u_d(t) < 0$. Or l'AO est en régime de saturation, donc $V_s = \pm V_{\text{sat}}$. Étant donné qu'il faut $u_d < 0$ cela implique $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$.
- ✧ La condition recherchée se transforme donc en « la diode est bloquée tant que l'AO est en saturation basse. »
- ✧ Cette condition devient $V_+ < V_-$ soit $u_e(t) < 0$.
- ✧ Finalement, nous avons $u_s(t) = 0$ tant que $u_e(t) < 0$.

🕒 représentation temporelle

- ✧ Ajoutons sur la simulation précédente la tension de sortie de l'AO.



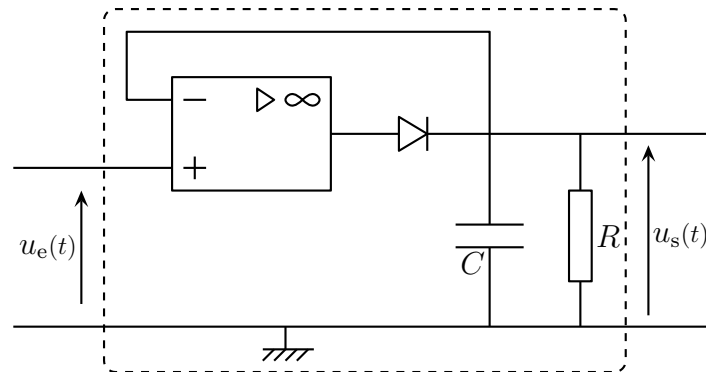
- ✧ Qualitativement, cela s'explique de la manière suivante :
 - ➔ lorsque $u_e(t)$ devient positif, le potentiel de sortie de l'AO va chercher à augmenter jusqu'à l'infini. Or en augmentant, il va permettre à la diode de passer et dès qu'elle passe la tension de sortie est renvoyée à l'entrée par la rétroaction : la sortie ne peut plus devenir infinie
 - ➔ lorsque $u_e(t)$ devient négatif, le potentiel de sortie de l'AO va chercher à diminuer jusqu'à l'infini. Or en diminuant le potentiel à l'entrée de la diode, celle-ci va se bloquer. Le potentiel de sortie va alors diminuer jusqu'à son extrême limite : $-V_{\text{sat}}$.

II.3.ii – détecteur de crêtes

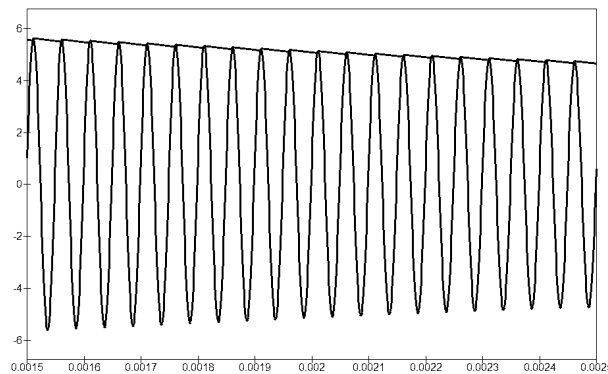
- ✧ Les raisonnements vont être très similaires au montage précédent.

★ montage et simulation

◇ Considérons le montage ci-dessous.



◇ Regardons son fonctionnement simulé.



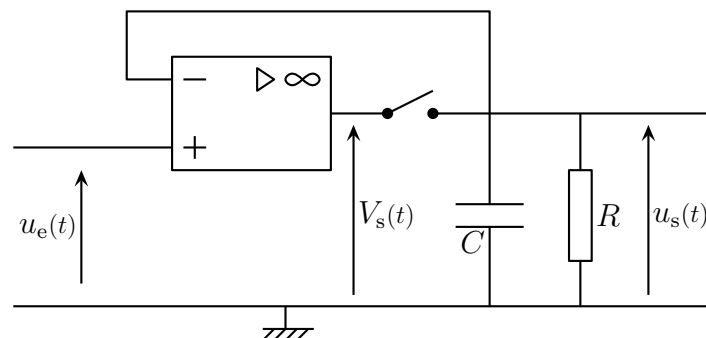
◇ Nous pouvons constater qu'il s'agit bien d'un montage détecteur de crêtes mais sans effet de seuil.

★ interprétation

◇ Pour la diode, nous prendrons le modèle de la diode idéale à tension de seuil non nul.

🔗 diode bloquée

◇ Supposons la diode bloquée. Dans ces conditions, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



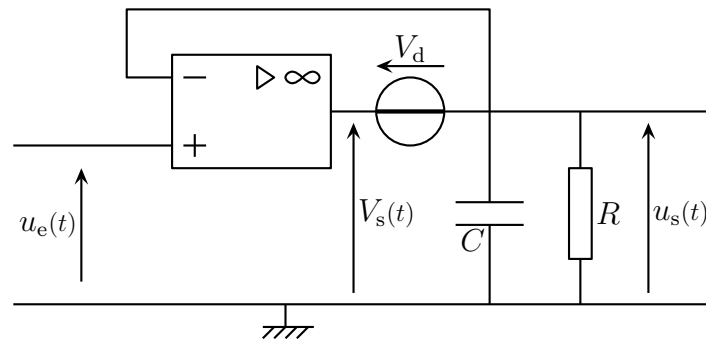
◇ Analyse physique : l'AO n'a pas de rétroaction sur son entrée inverseuse, il est donc en régime de saturation linéaire.

◇ Analyse technique : il y a deux potentiels inconnus. Nous écrirons donc deux lois : la loi de fonctionnement de l'AO et la loi constitutive de R .

- ✧ À la sortie de l'AO nous pouvons constater qu'il y a un circuit R, C dont la tension évolue en $u_s(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
- ✧ C'est vrai tant que $u_d(t) < 0$. Or l'AO est en régime de saturation, donc $V_s = \pm V_{\text{sat}}$. Étant donné qu'il faut $u_d < 0$ cela implique $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$ car la tension $u_s(t)$ ne peut pas être supérieure à V_{sat} .
- ✧ La condition recherchée se transforme donc en « la diode est bloquée tant que l'AO est en saturation basse. »
- ✧ Cette condition devient $V_+ < V_-$ soit $u_e(t) < u_s(t)$.
- ✧ Finalement, nous pouvons dire que $u_s(t)$ décroît exponentiellement tant que $u_e(t) < u_s(t)$.

🔗 diode passante

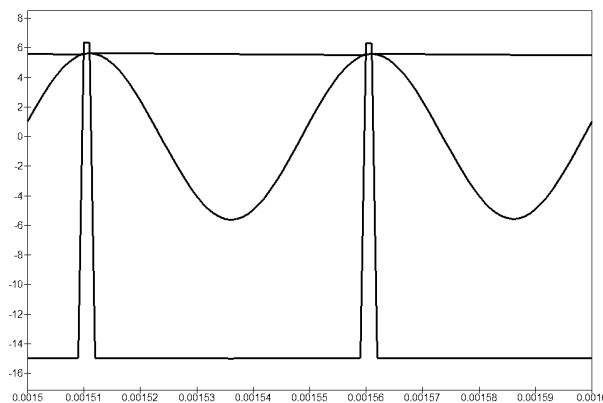
- ✧ Supposons la diode passante. Dans ces conditions, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



- ✧ Analyse physique : l'AO est rétroaction sur son entrée inverseuse, il est donc en régime linéaire.
- ✧ Analyse technique : il y a deux potentiels inconnus. Nous écrirons donc deux lois : la loi de fonctionnement de l'AO et la loi constitutive de V_d .
- ✧ La loi constitutive de l'AO donne directement $u_s(t) = u_e(t)$: c'est un suiveur.
- ✧ Tout comme pour le montage détecteur de crête, la condition pour laquelle la diode est bien passante est assez difficile à trouver du fait de la présence du condensateur qui n'établit pas de lien direct entre valeur de tension et valeur d'intensité.
- ✧ Nous dirons donc, en nous appuyant sur les simulations, que la diode est passante quand elle n'est pas bloquée, *ie.* pour $u_e(t) \geq u_s(t)$
- ✧ Avec la loi constitutive de $V_d(t)$ nous obtenons $V_s(t) = u_s(t) + V_d$.

🔗 représentation temporelle

- ✧ Ajoutons sur la simulation précédente la tension de sortie de l'AO.



- ✧ Qualitativement, cela s'explique de la même manière que pour le redresseur simple alternance :

- lorsque $u_e(t)$ cherche à devenir plus grand que $u_s(t)$, le potentiel de sortie de l'AO va chercher à augmenter jusqu'à l'infini. Or en augmentant, il va permettre à la diode de passer car à la sortie de la diode le potentiel est en train de décroître à partir d'une valeur déjà inférieure à $V_{\text{sat}} - V_d$. Ainsi, dès que la diode est passante la tension de sortie est renvoyée à l'entrée par la rétroaction : la sortie ne peut plus devenir infinie mais suit les évolutions de $u_e(t)$ chargeant ainsi le condensateur.
- lorsque $u_e(t)$ devient inférieur à $u_s(t)$, le potentiel de sortie de l'AO va chercher à diminuer jusqu'à l'infini. Or en diminuant le potentiel à l'entrée de la diode, celle-ci va se bloquer. Le circuit R,C en sortie est donc laissé à lui-même et évolue en décroissant exponentiellement.

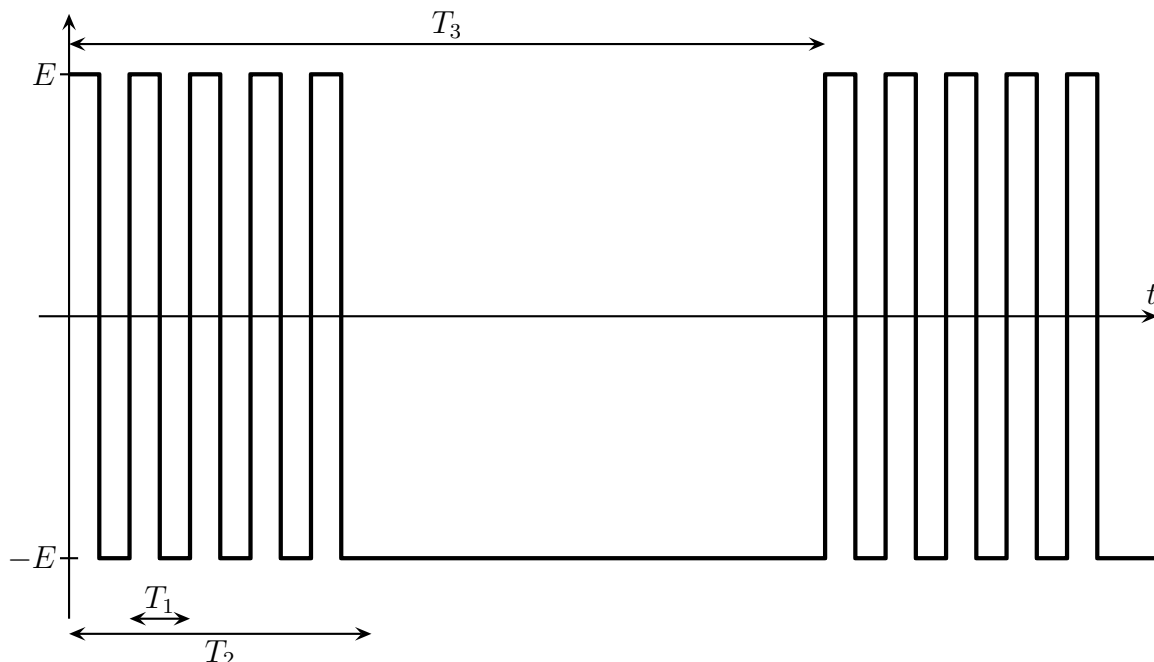
III – Générateur d'impulsions

- ◇ Dans cette partie, nous allons étudier un montage complexe avec des AO en régime non linéaire.
- ◇ C'est une sorte de TD-cours, *ie.* aucun montage n'est à connaître, encore moins les résultats. Tout est dans la démarche.

III.1 – Présentation

III.1.i – objectif

- ◇ Le but est de réaliser un montage délivrant des impulsions par salves et ce de manière périodique.
- ◇ Cela revient à dire que la tension de sortie évolue de la manière suivante.



- ◇ Nous pouvons voir trois durées caractéristiques dans cette évolution :
 - T_1 : la durée d'une impulsion
 - T_2 : la durée d'une salve
 - T_3 : la période des salves
- ◇ Étant donné qu'il y a trois durées caractéristiques, nous allons associer trois montages différents.

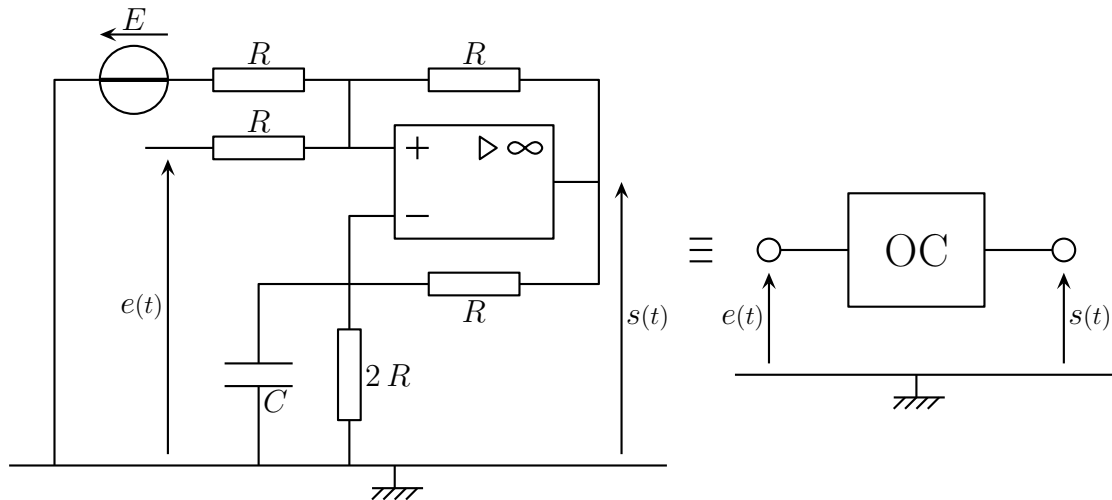
III.1.ii – hypothèses et notations

- ◇ Dans tous les montages qui suivent, nous supposons que les AO sont en régime non linéaires.
- ◇ De plus, afin d'alléger les notations, nous noterons E la tension de saturation.

III.2 – Oscillateur commandé

III.2.i – montage et principe

- ◇ Considérons le montage ci-dessous.



- ◇ Nous allons montrer que ce montage est tel que :
 - lorsque $e(t) = -E$ alors $s(t) = -E$
 - lorsque $e(t) = +E$ alors $s(t)$ oscille entre $+E$ et $-E$ avec une certaine période T à déterminer.
- ◇ En d'autres termes, le montage est bien un oscillateur commandé par une tension qui, telle un interrupteur, ne peut prendre que deux valeurs : il oscille pour l'une de ces deux valeurs et n'oscille pas pour l'autre.

III.2.ii – premier régime $e(t) = -E$

- ◇ Posons $e(t) = -E$ et cherchons le régime permanent.
- ◇ Analyse physique : l'entrée $e(t)$ étant constante, nous allons chercher une sortie constante.
- ◇ Analyse technique :
 - c'est un AO et nous cherchons une tension donc approche nodale
 - le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime permanent continu
 - il reste trois potentiels inconnus, nous écrirons donc trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiel et la loi de fonctionnement de l'AO

★ lois communes

- ◇ La loi des nœuds en V_+ donne, compte-tenu du fait que $e(t) = -E$:

$$\frac{-E - V_+}{R} + \frac{-E - V_+}{R} + \frac{s(t) - V_+}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -2E - 3V_+ + s(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = -\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}s(t)$$

- ◇ La loi des nœuds en V_- donne, compte-tenu du fait qu'aucun courant ne traverse le condensateur :

$$0 + \frac{0 - V_-}{2R} + \frac{s(t) - V_-}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -3V_- + 2s(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_- = \frac{2}{3}s(t)$$

◇ Comme nous savons que ε va jouer un rôle important, cherchons son expression :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = -\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}s(t) - \frac{2}{3}s(t) \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon = -\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}s(t)$$

★ saturation haute

◇ Supposons que $s(t) = +E$. Cela reste vrai tant que $\varepsilon > 0$, *ie.* tant que :

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}s(t) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}E > 0 \quad \rightsquigarrow \quad -E > 0$$

◇ Nous tombons sur une contradiction. Nous pouvons donc dire que les hypothèses faites sont fausses ce qui revient à dire que l'AO ne peut pas être continuellement en saturation haute quand $e(t) = -E$.

★ saturation basse

◇ Supposons que $s(t) = -E$. Cela reste vrai tant que $\varepsilon < 0$, *ie.* tant que :

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}s(t) > 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}E < 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{3}E < 0$$

◇ Cette dernière relation est toujours vraie. Cela signifie que si l'AO à un moment est en saturation basse lorsque $e(t) = -E$, alors il y restera définitivement.

★ conclusion

◇ Nous savons que :

- l'AO est en saturation haute ou basse
- lorsque $e(t) = -E$, l'AO ne peut pas rester indéfiniment en saturation haute
- lorsque $e(t) = -E$, si l'AO est en saturation basse, il y a reste

◇ Conclusion : lorsque $e(t) = -E$, au bout d'une certaine durée que nous pouvons évaluer à RC , la tension de sortie vaut tout le temps $-E$. La sortie n'oscille pas, l'oscillateur est bloqué.

III.2.iii – deuxième régime $e(t) = +E$

◇ Pour ce régime nous allons :

- montrer qu'il ne peut pas y avoir de régime permanent continu
- chercher l'équation différentielle vérifiée par $V_-(t)$, tension contrôlant la sortie $s(t)$
- chercher la solution de cette équation différentielle en régime permanent variable

★ il n'y a pas d'états stables

◇ Comme pour ci-dessus, supposons que le montage est en régime permanent et, en particulier, que le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

◇ Cherchons l'expression de ε à partir de loi des nœuds en terme de potentiels :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E - V_+}{R} + \frac{-E - V_+}{R} + \frac{s(t) - V_+}{R} = 0 \\ 0 + \frac{0 - V_-}{2R} + \frac{s(t) - V_-}{R} = 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} V_+ = \frac{s(t)}{3} \\ V_- = \frac{2}{3}s(t) = 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \varepsilon = -\frac{1}{3}s(t)$$

- ◇ Nous constatons alors que ε et $s(t)$ sont de signes opposés, ce qui est contradictoire avec les deux conditions connues :
 - $\varepsilon > 0$ si et seulement si $s(t) = +E > 0$
 - $\varepsilon < 0$ si et seulement si $s(t) = -E < 0$
- ◇ Conclusion : lorsque $e(t) = +E$, la sortie ne peut pas valoir constamment $-E$ ou $+E$.
- ◇ Or nous savons que la sortie vaut $-E$ ou $+E$. La seule possibilité c'est que la sortie *oscille* entre ces deux valeurs.

★ équation différentielle vérifiée par $V_-(t)$

- ◇ $s(t)$ oscille, mais pourquoi ? $s(t)$ est la sortie d'un AO c'est donc une tension *commandée* par l'entrée ε . Si $s(t)$ change c'est que $\varepsilon(t)$ change. Or, comme nous pouvons aisément le voir, $V_+ = C^{\text{te}}$ tant que $s(t) = C^{\text{te}}$.
- ◇ L'origine des oscillations de $s(t)$ ne peut donc être que les variations de V_- . C'est pourquoi nous allons chercher à quelle équation différentielle obéit $V_-(t)$. Pour ce faire, nous allons utiliser la notation complexe.
- ◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels en V_- en complexe :

$$\frac{0 - \underline{V_-(t)}}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - \underline{V_-(t)}}{2R} + \frac{\underline{s(t)} - \underline{V_-(t)}}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2RCj\omega \underline{V_-(t)} + 3 \underline{V_-(t)} = 2 \underline{s(t)}$$

- ◇ En repassant en notation réelle et en mettant sous la forme canonique, cela donne :

$$2RC \frac{dV_-(t)}{dt} + 3V_-(t) = 2s(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dV_-(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} V_-(t) = \frac{s(t)}{RC} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2}{3} RC$$

★ solution quand l'AO est en saturation haute

🕒 équation différentielle et début de solution

- ◇ Comme l'AO est en saturation haute, $s(t) = +E$ donc, en réécrivant l'équation différentielle, nous pouvons trouver la forme générale des solutions

$$\frac{dV_-(t)}{dt} + \frac{3}{2RC} V_-(t) = \frac{E}{RC} \quad \rightsquigarrow \quad V_-(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{2}{3} E$$

🕒 conditions initiales et fin de solution

- ◇ Étant donné que l'AO est en saturation haute et que nous savons qu'il ne cesse de basculer de saturation haute en saturation basse, il paraît naturel de choisir l'instant initial tel que $s(0^-) = -E$ et $s(0^+) = +E$.
- ◇ Pourquoi l'AO a-t-il basculé de $-E$ à $+E$? La seule possibilité c'est que juste avant le basculement ε était négatif et qu'il a cherché à être positif, il était donc nul à $t = 0^-$.

Juste avant de basculer d'une saturation à une autre, la tension d'entrée ε d'un AO est nulle.

- ◇ Or à $t = 0^-$, $s(0^-) = -E$ et comme $V_+(t) = \frac{s(t)}{3}$ cela donne $V_+(0^-) = -\frac{E}{3}$.
- ◇ Ainsi, à $t = 0^-$, nous avons $V_+(0^-) = -\frac{E}{3}$, $\varepsilon(0^-) = 0$ et donc $V_-(0^-) = -\frac{E}{3}$.

- ✧ Enfin, comme $V_-(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur, c'est une fonction mathématiquement continue du temps, donc nous avons $V_-(0^+) = -\frac{E}{3}$.
- ✧ Avec cela, nous pouvons déterminer la constante d'intégration λ de la solution et cela donne :

$$V_-(t) = -E e^{-t/\tau} + \frac{2}{3} E$$

★ solution quand l'AO est en saturation basse

- ✧ Étudions le cas où l'AO est en saturation basse et redéfinissons l'instant initial comme l'instant où l'AO bascule de $+E$ à $-E$.

🔗 équation différentielle et début de solution

- ✧ Comme l'AO est en saturation haute, $s(t) = +E$ donc, en réécrivant l'équation différentielle, nous pouvons trouver la forme générale des solutions

$$\frac{dV_-(t)}{dt} + \frac{3}{2RC} V_-(t) = -\frac{E}{RC} \quad \rightsquigarrow \quad V_-(t) = \mu e^{-t/\tau} - \frac{2}{3} E$$

🔗 conditions initiales et fin de solution

- ✧ Pour les mêmes raisons que précédemment, à savoir que juste avant le basculement ε doit être nul, nous pouvons regrouper les différentes valeurs de tensions dans le tableau suivant (rempli dans l'ordre des numéros) :

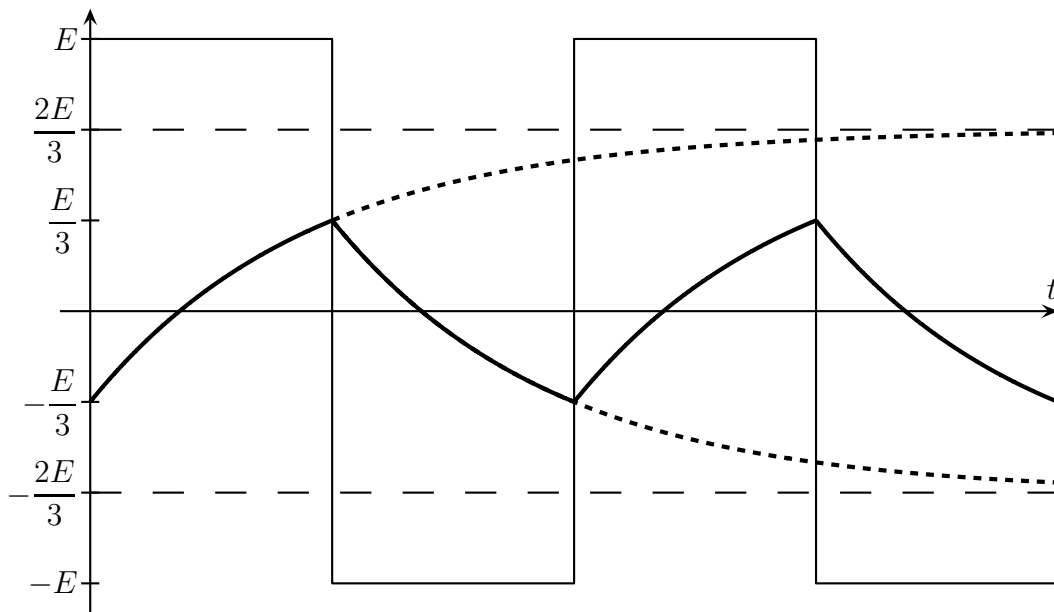
instant	$V_+(t) = \frac{s(t)}{3}$	$\varepsilon(t)$	$V_-(t)$
$t = 0^-$	$\frac{E}{3}$ (①)	0 (③)	$\frac{E}{3}$ (④)
$t = 0^+$	$-\frac{E}{3}$ (②)	$-\frac{2E}{3}$ (⑥)	$\frac{E}{3}$ (⑤)

- ✧ Grâce à cette condition initiale, nous pouvons déterminer la constante d'intégration μ , ce qui donne :

$$V_-(t) = E e^{-t/\tau} - \frac{2}{3} E$$

III.2.iv – tracés

- ✧ Traçons l'évolution de $V_-(t)$ et $s(t)$ sur un même graphique.



- ✧ Sur ce graphique, nous avons fait apparaître les asymptotes pour les évolutions de $V_-(t)$ ainsi que les valeurs limites qui déclenchent le basculement.

III.2.v – période

- ✧ D'après le graphique, nous voyons que la période n'est autre que la somme de la durée t_1 pendant laquelle l'AO est en saturation haute et de la durée t_2 pendant laquelle l'AO est en saturation basse.
- ✧ Pour déterminer l'instant t_1 , nous devons reprendre l'expression de $V_-(t)$ trouvée pour la saturation haute et trouver l'instant tel que $V_-(t_1) = \frac{E}{3}$. Cela donne :

$$-E e^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3} E = \frac{E}{3} \quad \rightsquigarrow \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{3} \quad \rightsquigarrow \quad t_1 = \tau \ln 3$$

- ✧ De même pour déterminer l'instant t_2 , nous devons reprendre l'expression de $V_-(t)$ trouvée pour la saturation basse et trouver l'instant tel que $V_-(t_2) = -\frac{E}{3}$. Cela donne :

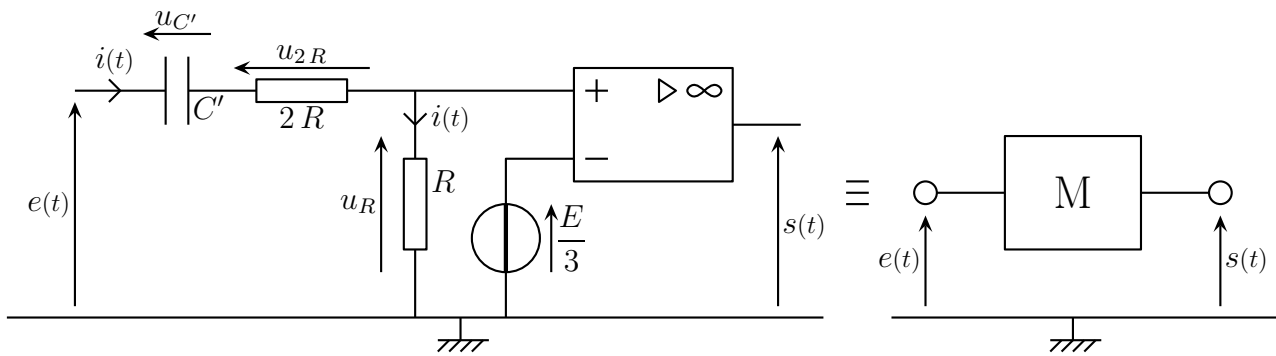
$$E e^{-t_2/\tau} - \frac{2}{3} E = -\frac{E}{3} \quad \rightsquigarrow \quad e^{-t_2/\tau} = \frac{1}{3} \quad \rightsquigarrow \quad t_2 = \tau \ln 3$$

- ✧ Finalement, la période recherchée vaut $T = 2 t_1 = 2 \tau \ln 3 = \frac{4}{3} R C \ln 3$.

III.3 – Monostable

III.3.i – montage et principe

- ✧ Considérons le montage ci-dessous.



✧ Nous allons montrer que ce montage est un monostable, *ie.* est tel que :

- $s(t) = -E$ est un état stable : l'AO reste naturellement en saturation basse
- $s(t) = +E$ est un état instable : l'AO, au bout d'une certaine durée de latence, repasse en saturation basse
- il est possible de provoquer le passage de saturation basse (stable) en saturation haute (instable) en faisant passer $e(t)$ de $-E$ à $+E$.

III.3.ii – état stable

- ✧ Cherchons s'il existe une solution permanente continu.
- ✧ Supposons le régime permanent continu atteint. Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- ✧ Dans ces conditions $i(t) = 0$, donc $u_R(t) = 0$ puis $V_+ = 0$.
- ✧ Sachant que $V_- = \frac{E}{3}$, cela implique $\varepsilon < 0$ et donc $s(t) = -E$.
- ✧ Conclusion : il existe bien un état permanent continu qui est la saturation basse.

III.3.iii – régime variable

- ✧ Cherchons maintenant ce qu'il se passe en régime variable, *ie.* lorsque $e(t)$ varie en basculant périodiquement entre $-E$ et $+E$ en supposant qu'avant chaque basculement, le régime permanent soit atteint.
- ✧ Comme $V_- = \frac{E}{3} = C^{\text{te}}$, cherchons comment évolue $V_+(t)$.

★ équation différentielle vérifiée par $V_+(t)$ et début de solution

- ✧ Utilisons la notation complexe et écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée non inverseuse.

$$\frac{0 - \underline{V_+}(t)}{R} + \frac{\underline{e}(t) - \underline{V_+}(t)}{2R + \frac{1}{jC'\omega}} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{jC'\omega}{1 + 2jRC'\omega} (\underline{e}(t) - \underline{V_+}(t)) - \frac{\underline{V_+}(t)}{R} = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad jRC'\omega \underline{e}(t) = \underline{V_+}(t) + 3jRC'\omega \underline{V_+}(t)$$

- ✧ En notation réelle et sous forme canonique, cela donne, en n'oubliant pas que, comme $e(t)$ est une tension crénau, sa dérivée est toujours nulle :

$$RC' \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = RC' \frac{dV_+(t)}{dt} + 3RC' V_+(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dV_+(t)}{dt} + \frac{1}{\tau'} V_+(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau' = 3RC'$$

- ✧ Nous savons alors que quel que soit $e(t)$ la solution s'écrit $V_+(t) = \lambda e^{-t/\tau'}$

★ condition initiale et fin de solution

- ◇ Nous savons que la condition initiale viendra, *in fine* de la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Toutefois nous pouvons remarquer que la tension intéressante $V_+(t)$ n'est **pas** la tension aux bornes du condensateur mais au bornes d'un résistor. Il va donc falloir chercher le courant et, donc, établir une relation entre courant et tension. Quoi de mieux qu'une bonne loi des mailles ?
- ◇ D'après la loi des mailles, nous avons toujours $R i(t) + 2 R i(t) + u_{C'}(t) = e(t)$ ce qui donne :

$$i(t) = \frac{e(t) - u_{C'}(t)}{3 R} \quad \rightsquigarrow \quad V_+(t) = R i(t) = \frac{e(t) - u_{C'}(t)}{3}$$

🕒 basculement de $-E$ à $+E$

- ◇ Regroupons les résultats dans un tableau rempli dans l'ordre indiqué.

instant	$e(t)$	$i(t)$	$u_{C'}(t)$	$V_+(t)$
$t = 0^-$	$-E$ (①)	0 (②)	$-E$ (④)	0 (③)
$t = 0^+$	$+E$ (⑤)	$\frac{2}{3} \frac{E}{R}$ (⑧)	$-E$ (⑥)	$\frac{2}{3} E$ (⑦)

- ◇ Nous avons ainsi, après le basculement de $e(t)$ de $-E$ à $+E$: $V_+(t) = \frac{2}{3} E e^{-t/\tau'}$.

🕒 basculement de $+E$ à $-E$

- ◇ Procédons de même lors du basculement de $+E$ à $-E$.

instant	$e(t)$	$i(t)$	$u_{C'}(t)$	$V_+(t)$
$t = 0^-$	$+E$ (①)	0 (②)	$+E$ (④)	0 (③)
$t = 0^+$	$-E$ (⑤)	$-\frac{2}{3} \frac{E}{R}$ (⑧)	$+E$ (⑥)	$-\frac{2}{3} E$ (⑦)

- ◇ Nous avons ainsi, après le basculement de $e(t)$ de $+E$ à $-E$: $V_+(t) = -\frac{2}{3} E e^{-t/\tau'}$.

★ et $s(t)$ dans tout ça ?

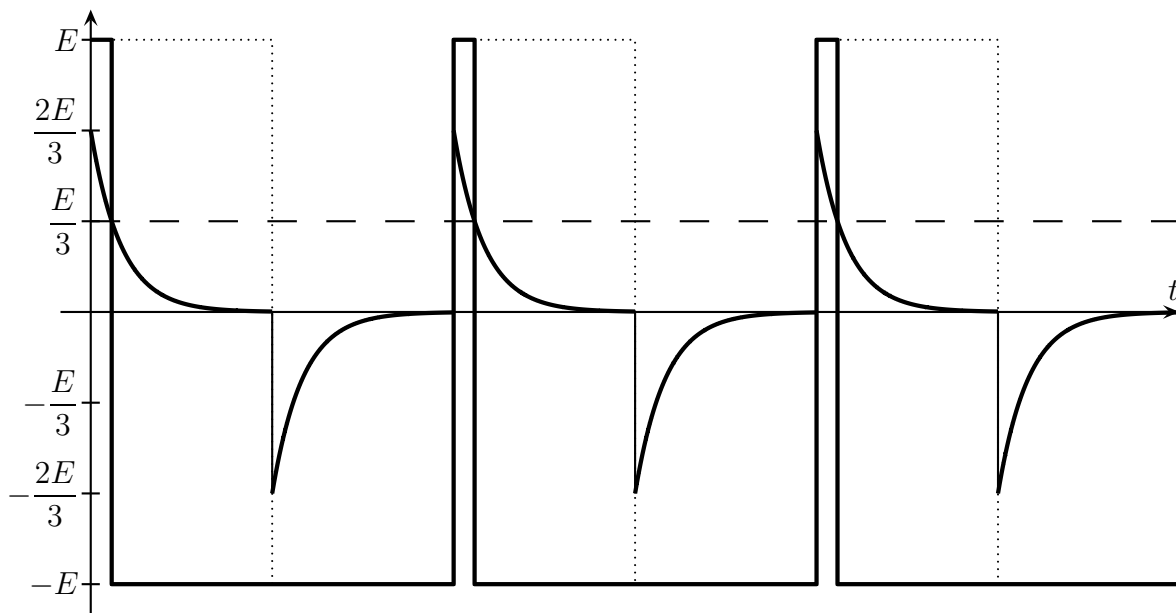
- ◇ Étant donné que $V_- = \frac{E}{3} = C^{te}$:

- l'AO est en saturation haute quand $V_+ > \frac{E}{3}$
- l'AO est en saturation basse quand $V_+ < \frac{E}{3}$

- ◇ Nous pouvons alors constater que l'AO est un peu en saturation haute lorsque $e(t) = +E$ mais est toujours en saturation basse lorsque $e(t) = -E$.

III.3.iv – tracé

✧ Sur le tracé ci-dessous, nous avons représenté la tension de sortie $s(t)$ ainsi que $V_+(t)$ en traits épais alors que $e(t)$ a été représenté en pointillés.



III.3.v – durée de latence

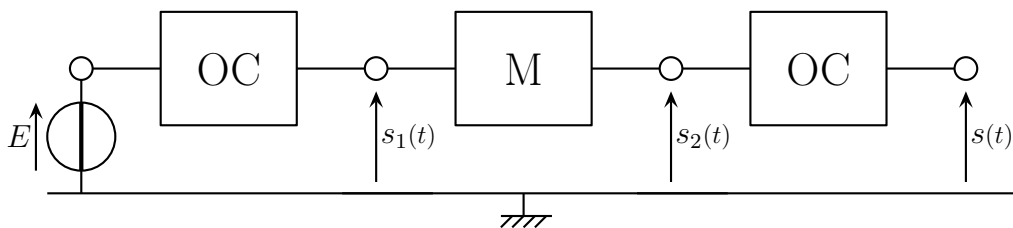
✧ La durée de latence T est telle que $V_+(T) = \frac{E}{3}$, ce qui conduit à :

$$\frac{2}{3} E e^{-T/\tau'} = \frac{E}{3} \quad \rightsquigarrow \quad e^{-T/\tau'} = \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad T = \tau' \ln 2$$

III.4 – Tous ensembles

III.4.i – association

✧ Associons maintenant trois montage de la manière suivante.

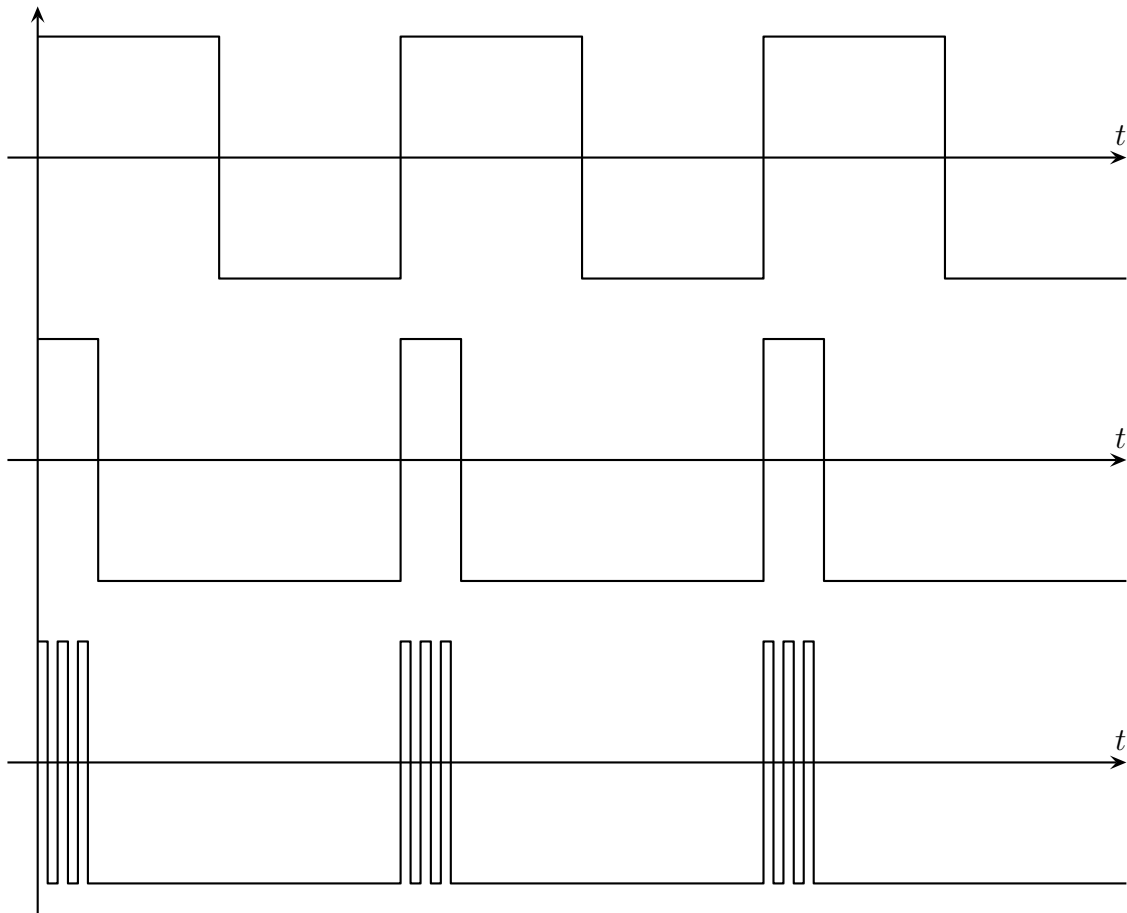


✧ Chaque module a son rôle :

- ➔ le premier oscillateur commandé oscille tout le temps avec la période T_3 de manière à fixer la période des salves
- ➔ le monostable est mis en route avec une période T_3 par l'oscillateur commandé précédent et dure pendant une certaine durée T_2 , la durée d'une salve, de manière à mettre en route les impulsions
- ➔ le deuxième oscillateur commandé est celui qui fixe la durée d'une impulsion et il fonctionne pendant la durée d'une salve.

III.4.ii – chronogrammes

◇ Il ne reste plus qu'à représenter les trois tensions sous forme d'un chronogramme.



Circuits non linéaires

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - composant non linéaire, diode, régime de saturation
 - tension de seuil
 - redresseur, détecteur de crête

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître la valeur typique de la tension de seuil d'une diode.

★ Les lois

- ◇ Connaître :
 - les différents modèles électrocinétique de la diode
 - la loi de fonctionnement de la diode modélisée
 - la loi de fonctionnement de l'AO en régime de saturation

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - le fonctionnement qualitatif d'une diode
 - les effets en terme de fréquence des filtres
 - les effets que peuvent avoir au niveau de la réponse en phase et du gain en dB chaque ordre de filtre
 - savoir interpréter les montage redresseurs et détecteurs de crête

★ les exemples fondamentaux

- ◇ Connaître :
 - les montages redresseurs simple et double alternance avec effet de seuil
 - le montage détecteur de crêtes avec effet de seuil

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir repérer si un circuit est non linéaire ou pas.

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

- ◇ Il faut savoir utiliser la méthode d'étude des circuits non linéaires (« Je suppose que, donc je sais que, et je vérifie que »).

★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire :

- les montages redressement simple alternance avec et sans seuil
- les montages détecteur de crêtes avec et sans seuil

Table des matières

I	Avec une diode	1
I-1	Diode de redressement	1
I-1.i	présentation	1
I-1.ii	phénoménologie	1
I-1.iii	plusieurs modélisations	2
I-2	Comment étudier un circuit non linéaire?	3
I-2.i	tout va bien!	4
I-2.ii	méthode analytique	4
	principe de base	4
	application à la diode	5
I-2.iii	méthode graphique	5
	point de fonctionnement	6
	association série de dipôles	7
	association parallèle de dipôles	7
I-3	Redressement	8
I-3.i	intérêt du redressement	8
I-3.ii	simple alternance	9
	montage et simulation	9
	interprétation	10
	interprétation graphique	11
I-3.iii	double alternance	12
	montage et simulation	12
	interprétation	13
I-4	Détecteur de crêtes, version simple	14
I-4.i	rôle du détecteur	14
I-4.ii	montage et visualiation	15
I-4.iii	fonctionnement détaillé	15
	deux états possibles pour la diode	15
	bien ajuster la constante de temps	16
	inconvenients	17
II	Avec un amplificateur opérationnel	17
II-1	Régime de saturation	17
II-1.i	description	17
	rappels	17
	phénoménologie	18
II-1.ii	étudier un AO en régime de saturation	18
II-2	Comparateurs	18
II-2.i	comparateur simple	18
	montage et analyse	18
	fonctionnement	19
	graphiquement	19
II-2.ii	comparateur à hystérésis	20
	montage et analyse	20
	fonctionnement	20
	graphiquement	21
II-3	Les versions améliorées	22
II-3.i	redresseur simple alternance	22

	montage et simulation	22
	interprétation	23
II.3.ii	détecteur de crêtes	24
	montage et simulation	25
	interprétation	25
III	Générateur d'impulsions	27
III.1	Présentation	27
III.1.i	objectif	27
III.1.ii	hypothèses et notations	28
III.2	Oscillateur commandé	28
III.2.i	montage et principe	28
III.2.ii	premier régime $e(t) = -E$	28
	lois communes	28
	saturation haute	29
	saturation basse	29
	conclusion	29
III.2.iii	deuxième régime $e(t) = +E$	29
	il n'y a pas d'états stables	29
	équation différentielle vérifiée par $V_-(t)$	30
	solution quand l'AO est en saturation haute	30
	solution quand l'AO est en saturation basse	31
III.2.iv	tracés	31
III.2.v	période	32
III.3	Monostable	32
III.3.i	montage et principe	32
III.3.ii	état stable	33
III.3.iii	régime variable	33
	équation différentielle vérifiée par $V_+(t)$ et début de solution	33
	condition initiale et fin de solution	34
	et $s(t)$ dans tout ça?	34
III.3.iv	tracé	35
III.3.v	durée de latence	35
III.4	Tous ensembles	35
III.4.i	association	35
III.4.ii	chronogrammes	36