Mécanique quantique : spin

I. Moment magnétique en mécanique classique

1. D'une part, on obtient l'expression du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}} = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v} = R\overrightarrow{u_r} \times mv\overrightarrow{u_\theta} = mRv\overrightarrow{u_z}$$

D'autre part, le moment magnétique est donné par :

$$\overrightarrow{\mu} = IS\overrightarrow{u_z} = -\frac{e}{T}\pi R_2\overrightarrow{u_z}$$

Sachant que $v = \dfrac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi R}{v}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mu} = -\frac{ev}{2\pi R}\pi R^2\overrightarrow{u_z} = -\frac{evR}{2}\overrightarrow{u_z} = -\frac{e}{2m}\overrightarrow{\mathcal{L}}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{\mu} = \gamma\overrightarrow{\mathcal{L}} \text{ avec } \gamma = -\frac{e}{2m}$$

On appelle γ le *facteur de Landé.*

2. D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}}{dt} = \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{\mu}}{dt} = \gamma\overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B}$$

On peut donc écrire le système suivant (avec $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$) :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \gamma\mu_y B \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\gamma\mu_x B \\ \frac{d\mu_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

On effectue le changement de variable $Z = \mu_x + i\mu_y$, ainsi,

$$\frac{dZ}{dt} = \gamma B(\mu_y - i\mu_x) = -i\gamma BZ \Rightarrow Z = Z_0 e^{-(i\gamma Bt+\varphi)}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \mu_x = \mu\cos(\gamma Bt) \\ \mu_y = -\mu\sin(\gamma Bt) \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un vecteur tournant à la fréquence $\dfrac{\gamma B}{2\pi}$.

3. Dans le cas d'un champ non uniforme, on ajoute une force en $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$.

II. Moment cinétique propre ou spin $\frac{1}{2}$

4. Le magnétisme a deux origines :
   - orbital (courants) : origines classique ou quantique
   - intrinsèque (des moments existent dans la nature) : origine quantique

   Le théorème de Bohr- van Leeuwen stipule qu'il n'existe pas de description classique du magnétisme.
5. On montre que :

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. On considère le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

7. Ainsi,

$$\langle S_u \rangle = \frac{\hbar}{2}\left[S_x \sin\theta\cos\varphi + S_y\sin\theta\sin\varphi + S_z\cos\theta\right] = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

8. X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si on peut écrire l'équation suivante $MX = \lambda X \Leftrightarrow (M - \lambda I_3)X = 0$.

   Ainsi, on cherche à annuler le déterminant de $M - \lambda I_3$:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - \cos^2\theta) - \sin^2\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

   Ainsi, les valeurs propres associées au moment cinétiques sont :

$$\lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

   Ainsi,

$$S_u\,|+u\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+u\rangle \text{ et } S_u\,|-u\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|-u\rangle$$

9.

$$\mathcal{P}_+ = |\,\langle + | + u\rangle\,|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\mathcal{P}_- = |\,\langle - | + u\rangle\,|^2 = 1 - \mathcal{P}_+ = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On remarque que si $\theta = 0$, alors, $|+u\rangle$ est sur $|+\rangle$ donc on trouve $\mathcal{P}_+ = 1$.
Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors l'état est dans le plan $x0y$ ce qui entraine $\mathcal{P}_+ = \dfrac{1}{2}$.
Enfin, si $\theta = \pi$ alors l'état est sur $-u_z$ donc dans l'état $|-\rangle$, ce qui entraine la nullité de $\mathcal{P}_+$.

III. Moment dans un champ magnétique

10. Pour un dipôle magnétique fixe, on a classiquement $E_p = -\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{B}$.
Pour un dipôle magnétique induit, on a classiquement $E_p = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{B}$ et on a alors $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$.

Ainsi, en mécanique quantique, on peut écrire l'hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = -\hat{\overrightarrow{\mu}}.\overrightarrow{B}$$

Contrairement à la version classique (démontrée précédemment) pour laquelle $\overrightarrow{\mu} = \gamma\overrightarrow{\mathcal{L}}$, on a en mécanique quantique $\overrightarrow{\mu} = g\gamma\overrightarrow{S}$ où g est appelé *facteur de Landé*.
Dans le cas des électrons, le facteur de Landé est d'environ -2.
Ainsi,

$$H = -2 \times \left(-\frac{e}{2m}\right)\overrightarrow{S}.\overrightarrow{B}$$

11. On considère :

$$|\Psi(0)\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle = |+u\rangle \ \text{ et } \ |\Psi(t)\rangle = a(t)\,|+\rangle + b(t)\,|-\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} Jen$$

Ainsi, d'après l'équation de Schrödinger dépendante du temps, on a :

$$i\hbar\frac{d\,|\Psi\rangle}{dt} = H\,|\Psi\rangle$$
$$\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{a} = -i\frac{\omega_0}{2}a \\ \dot{b} = i\frac{\omega_0}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a(t=0)e^{-\frac{i\omega_0}{2}t} \\ b(t) = b(t=0)e^{\frac{i\omega_0}{2}t} \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales $|\Psi(t=0)\rangle = |+u\rangle$, on montre que :

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\omega_0 t)}\,|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi+\omega_0 t)}\,|-\rangle = |+u(t)\rangle$$

12.

$$\langle S_z \rangle_{|\Psi\rangle} = \langle \Psi(t)|S_z|\Psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$
$$\langle S_x \rangle_{|\Psi\rangle} = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\varphi + \omega t)$$

La probabilité d'être dans $|+\rangle$ est donnée par $|\langle +|\Psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$
La probabilité d'être dans $|+x\rangle$ est donnée par :

$$|\langle +x|\Psi(t)\rangle|^2 = \left|\left(\frac{\langle +| + \langle -|}{\sqrt{2}}\right)|\Psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\theta\cos(\omega_0 t + \frac{\varphi}{2}\right)$$