Analisi matematica

LIMITI

Equivalenze asintotiche

$f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti sse $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Limiti notevoli e equivalenze

$\sin x \sim x$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $\quad \tan x \sim x$ $\quad \ln(1+x) \sim x$

$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$

O piccolo

$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

f infinitamente piccolo rispetto a g per $x \to 0$

$o(x) \pm o(x) = o(x)$

$o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

$x^n \cdot o(x^m) = o(x^{m+n})$

$x^n = o(x^m)$ se $n > m$

$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^n)$ se $n < m$ | Sopravvive exp +piccolo

asintot. eq. se differiscono per un o piccolo

Equivalenze come sviluppi con o-piccolo

$\sin x = x + o(x)$

$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\tan x = x + o(x)$

$e^x - 1 = x + o(x)$

$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$

$\ln(1+x) = x + o(x)$

Le costanti sono irrilevanti

Ex $\sin(x^3) + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = x^3 + o(x^3) + \underbrace{3x^4}_{o(x^3)} + \underbrace{2x^5}_{o(x^3)} + \underbrace{o(x^5)}_{\text{TR-TX}}$
$= x^3 + o(x^3)$

Sviluppi di Taylor

$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \quad x \to 0$

T_n polinomio di grado $\leq n$

Peano

$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n =$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}x^k$

$f(0) \to$ calcolato in 0

Sviluppi di funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n$$

Scansionato con CamScanner

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = 1/\ln(a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^c - 1}{x} = c$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

·DERIVATE·

Regole di derivazione

SOMMA $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$

PRODOTTO $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$

INVERSA $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$

RAPPORTO $\frac{d}{dx}[f(x)/g(x)] = [f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)]/g^2(x)$

COMPOSTA $\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

POTENZA $\frac{d}{dx}\, f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

Derivate fondamentali

$f(x) = x^k$ $f'(x) = kx^{k-1}$

$f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \ln a$

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = 1/x$

$f(x) = |x|$ $f'(x) = \frac{|x|}{x}$

$f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x$ $f'(x) = 1/\cos^2 x$

$f(x) = \arctan x$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = e^{-x}$ $f'(x) = -e^{-x}$

Proprietà degli integrali

• INTEGRALI •

SOMMA $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

PRODOTTO PER COSTANTE $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

VALORE ASSOLUTO $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

COMPOSTA $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$

Generalizzazione primitive elementari: le primitive elementari in x restano tali in $f(x)$ a patto che ci sia ANCHE la derivata di x ($f'(x)$) sotto l'integrale

Integrazione per parti

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Conviene se è più semplice da risolvere

TIP! Aggiungere la molt $\times 1$ ($g'(x)$) consente di integrare per parti

Ex. $\int \ln(x)$

Integrali ciclici

$\int x\, dx = x^2 - \int x\, dx \to 2\int x\, dx = x^2 \to \frac{x^2}{2}$

Si porta l'integrale ripetuto a dx e si divide per 2

Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

è la derivata di y

Ex. $\int \sin(e^x)\, e^x dx = \int \sin y\, dy$ $y = e^x$

$dy = \boxed{e^x}\, dx$

1 - $y = g(x)$

2 - $dy = g'(x)\, dx$

3 - $a \to g(a)$ $b \to g(b)$

*può succedere al contrario (raro)

TIP! Se ci sono RADICI, conviene invertire (ricavare dx = ...) oppure vedere se c'è una somma x differente (come $x-1 \to (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$) nascosta

Funzioni razionali

1- Numeratore derivata del denominatore $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$

2 - Numeratore costante denominatore I grado come 1 ma tiro fuori la costante e moltiplico e divido per la K di x

$$\int \frac{K}{ax+b}\, dx = \frac{K}{a} \ln|ax+b| + c$$

3- numeratore costante denominatore quadrato $\int \frac{1}{[f(x)]^2} = [f(x)]^{-2} \cdot \int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$

4- ~~numeratore~~ forma $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ ~~con~~ ~~~~ con $b^2-4ac<0$

Riconduzione $\int \frac{f'x}{1+fx^2} dx = \arctan fx + c$ senza radici reali

oppure $\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln|fx|+c$

TIP! - Step by step -

1- Provare calcolo derivata del denominatore

- Metodo standard

1- DIVISIONE se grado $d(x) >$ grado $n(x)$ SALTO

2- FATTORIZZARE

scomporre il denominatore in prodotti di fattori di I e/o II grado non ulteriormente scomponibili

3- DECOMPORRE

in una somma di frazioni più semplici (fratti semplici)

4- INTEGRARE!

$$\frac{1}{(4-1)(4+1)} = \frac{A}{4-1} + \frac{B}{4+1} = \frac{(4-1)A + (4+1)B}{(4-1)(4+1)}$$

risolvere ass $= 0$

$$\underbrace{(A+B)}_{0}\boxed{4} + \underbrace{(A+B)}_{} = \frac{1}{0}$$

Integrali fondamentali

TIP! Per generalizzare deve essere presente $f'(x)$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln|f(x)|$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{tan}x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int \frac{f'x}{1+[fx]^2} = \arctan(fx)$$

$$\int \ln x = x\ln x - x \quad \text{(parti)}$$

Successioni particolari

$\lim_{n \to \infty} n! = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

$\lim_{n \to \infty} n!/n^k = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} n!/b^n = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} n^n/n! = +\infty$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Le considerazioni sul fattoriale nascono dal criterio del rapporto $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

criterio del rapporto $> 1 \to \infty \quad < 1 \to 0$

criterio della radice $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$

Limiti fondamentali per successioni

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n! = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

Differenziali elementari

(1) $y' = f(x)$ $\qquad y = \int f(x)\,dx + c$

(2) $y'' = f(x)$ $\qquad y = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2$

A variabili separabili (anche omogenee del I ordine)

$y' = f(x) \cdot g(y)$

(1) Separare le variabili

(2) Integrare ciascun membro

(3) Ricavare $y(x)$

Ex $y' = y^2 \ln x$

$\hookrightarrow \frac{dy}{dx}$

(1) $\frac{dy}{y^2} = \ln x\, dx$

(2) $\int \frac{dy}{y^2} = \int \ln x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x\ln x - x + c$

(3) $y = -1/x\ln x - x + c$ ~~(+ y(x) = 0)~~

va bene anche $y(x) = 0$, quindi aggiungo

IMPORTANTE!

Osservare se ci sono ~~costanti tali che~~ costanti $\bar{y}$

Tali che $g(\bar{y}) = 0 \rightarrow y(x) = \bar{y}$ è soluzione

Lineari del I ordine

$y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$

$a(x) = 0$ ELEMENTARE
$f(x) = 0$ VAR. SEPARABILI

Metodo del fattore integrante

1- Trovo una primitiva di $a(x)$

2- Moltiplico entrambi i membri per $e^{A(x)}$

$$\underbrace{y'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)}\, y(x)}_{[y(x)\, e^{A(x)}]'} = f(x)\, e^{A(x)}$$

3- Integro entrambi i membri $y(x)\, e^{A(x)} = \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx + c$

4- Ricavo $y(x)$ moltiplicando entrambi i membri per $e^{-A(x)}$

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx + c}$$

Omogenee del II ordine

$a y'' + b y' + c y = 0$

La soluzione sarà della forma $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

1) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $a z^2 + b z + c = 0$

a - Soluzioni reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

b - Soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2\, x\, e^{\lambda x}$$

c - Soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Lineari del II ordine

$y'' + by' + cy = f(x)$

Variazione delle costanti

1 - Determinare la soluzione generale dell'omogenea associata: $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$

2 - Trovare una soluzione particolare della forma

$y_p = \underline{c_1(x)}\, y_1(x) + \underline{c_2(x)}\, y_2(x)$ sono funzioni e non costanti

- Per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ devo risolvere:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

3 - Calcolare la soluz. generale $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha) \\ 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \end{cases}$$

$$\tan(2\alpha) = 2\tan(\alpha) / 1 - \tan^2(\alpha)$$

Integrali particolari

• GONIOMETRIA •

$$\int \sin^2 x = \frac{-\sin x \cos x + x}{2}$$

$$\int \cos^2 x = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

$$\int \cos^n x = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x + \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n}$$