Definizioni e termini

Base o Span: insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori indicati

Combinazione lineare: $V = K_1 v_1 + \dots + K_n v_n$ con $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ vettori e $\{K_1, K_2 \dots K_n\}$ scalari (coefficienti)

Vettori **generatori**: insieme di vettori per cui $V = \text{Span}(v_1 \dots v_t)$

Vettori **linearmente indipendenti**: l'unico modo di scrivere il vettore 0 come comb. lineare di questi vettori è con tutti i coefficienti nulli

Si dice che $\{v_1 \dots v_n\}$ sono una **base** di V se:

① Sono generatori ② Sono lin. indipendenti

$f: V \to W$

Ker o Nucleo: insieme di vettori V che vanno a finire in 0 (vett. nulli)

Immagine: l'insieme di vettori in W che sono f di qualcosa ($f(v) = w$)

$$\dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Im}) = \dim V$$ ~~grassman~~

Determinante: funzione che restituisce 0 se i vettori sono lin. dip.

- det (matrice 2x2): $ad - bc$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ det(m.3x3) $\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$ $= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

  Il determinante non cambia per $r_j = r_j + \beta r_i$ → matrice a scala concesse

  Ps scambiare due righe → det cambia segno
- calcolo per mat. a scala: moltiplicare diagonale
- molti zeri? Sviluppi di Laplace ($\text{Det}(Id) = 1$)

$\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B) \Rightarrow \text{Det}(A^{-1}) = 1/\text{Det}(A)$ (BINET)

Rango: Il numero di righe (colonne) lin. indipendenti o il massimo K per cui esiste una sottomatrice con $\det \neq 0$

le Tre definizioni sono equivalenti

Prodotto scalare: dati $u\{a_1, a_2 .. a_n\}$ e $v\{b_1, b_2 .. b_n\}$, il prod. scalare è
$\langle u, v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Base ortogonale: $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ per ogni $i \neq j$

Base ortonormale se, oltre ad essere ortogonale, la norma $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$ es. base canonica

Norma: lunghezza del vettore $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (pitagorone a n variabili)
oss. $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}$

Matrice ortogonale: ① Matrice $n \times n$ (quadrata) ② Righe e colonne ortonorm. ③ $A^{-1} = A^t$. Proprietà: ① $\mathrm{Det}(A) = \pm 1$ ② A^{-1} e A^t sono ortogonali ③ AB è ortogonale

Autovalore: λ tale che $Av = \lambda v$

Autovettore: Tutti i v che verificano e $\neq 0$

Autospazio: insieme di tutti gli autovettori $+ v = 0$
L'autospazio è un s.sp. vettoriale (chiuso rispetto a somma e prodotto

Matrici simili: A è simile a B se $\exists$ una matrice $n \times n$ invertibile tale che $B = M^{-1}AM$. cioè se rappresentano la stessa appl. lin in due basi diverse (M = matrice cambiobase)

Diagonalizzazione: Trovare una matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ simile ad A.

in appl. lineari: Trovare una base di V costituita da autovettori di f

Polinomio caratteristico: $p(\lambda) = \mathrm{Det}(A - I_d)$, le cui radici sono gli autovalori di A

Molteplicità algebrica: quante volte l'autovalore λ_0 annulla il polinomio caratteristico (cioè è radice)

Molteplicità geometrica: la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0, cioè $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda Id))$

Per ogni autovalore λ di A, si ha $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$

Una matrice è diagonalizzabile sse: ① ha n autovalori reali

② $mg(\lambda) = ma(\lambda)$ per ogni autovalore

Traccia: la somma degli elementi sulla diagonale.

Nota: Se $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono gli autovalori, allora $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = Tr(A)$

$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = Det(A)$

Sottospazio vettoriale: chiuso rispetto a somma e prodotto per scalare

Applicazione lineare: V e W spazi vettoriali. Un'applicazione $L: V \to W$ è detta lineare se: ① $\forall v_1, v_2 \in V \; L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad L(\lambda v) = \lambda L(v)$

cioè è chiusa rispetto a somma e prodotto per scalare.

Base: sistema di generatori linearmente indipendenti

Il nr. di vettori linearmente indipendenti non può essere maggiore dello spazio stesso

UTILITY.

Calcolo matrice inversa

Definizione: Matrice A $n \times n$, vogliamo trovare B $(n \times n)$ t.c.

$$AB = BA = Id.$$

Le colonne devono essere linearmente indipendenti e, quando la matrice è ridotta a scala, i pivot sono in tutte le righe.

Tecnica #1: algoritmo di Gauss

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$ cerco di far venire l'identità a sx

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -13 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -13/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & -1/3 & 1/6 \end{array}\right)$$

Algoritmo:
- → voglio trovare l'inversa di A
- → parto con $(A \mid Id)$
- → lavoro alla Gauss fino a trovare $(Id \mid B)$
- → la B trovata è quella che cerchiamo

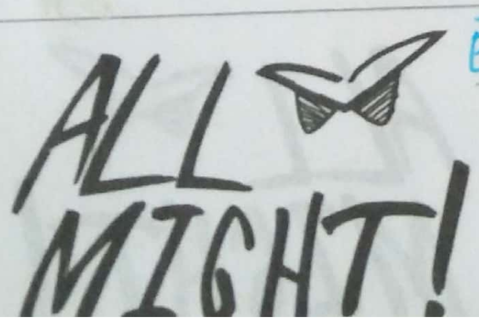
Tecnica #2: determinante

Ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad Det = -1 + 0 + 8 + 1 - 0 - 12 = -4$$

① Scrivo in ogni posizione $Det\,A_{i,j}^{*}$

$$\begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



È il det. della matrice tolte la riga i e la colonna j

Ex $\overset{Det}{a}(1,1) = \begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & -1 & 3 \\ \cancel{1} & 4 & 1 \end{matrix} = Det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

② Applico il pattern dei segni a scacchiera $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} -13 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

③ Trasposta $\begin{pmatrix} -13 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

④ Divido per det(A) $\begin{pmatrix} 13/4 & -1 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -9/4 & 1 & 1/4 \end{pmatrix} = A^{-1}$

Calcolo del determinante

1 Sarrus per mat 2×2 e 3×3

2 Laplace con righe/colonne astute se ci sono tanti 0

3 Gauss altrimenti

① $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ $\quad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$ $= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

③ Se la mat. é a scala (triangolare sup) $\mathrm{Det}(A) =$ prodotto diagonale

② Sviluppi di Laplace

Ex. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\mathrm{Det}(A) = a\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\,\mathrm{det}\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \mathrm{Det}\, A_{i,j}$ utile se ci sono tanti zeri

Es. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 11 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Det}(A) = -1\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Sarrus

Algoritmo di Gram-Schmidt

Produce basi ortogonali. Prende in INPUT una base qualunque $\{v_1 \dots v_n\}$ e restituisce in OUTPUT una base ortogonale $\{w_1 \dots w_n\}$

tale che $\text{Span}\{v_1 \dots v_k\} = \text{Span}\{w_1 \dots w_k\} \quad \forall k = 1, \dots, n$

Passo 1: $w_1 = v_1$ Passo 2: $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

Passo 3: $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

etc.

Per ottenere una base ortonormale basta dividere per la norma

Come trovo gli autovalori?

λ è autovalore di A solo se $\text{Det}(A - \lambda I d) = 0$

Basta sottrarre λ alla diagonale, poi calcolare il det e porlo $= 0$ $\rightarrow$ risolvere l'equazione

Es $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ calcolo det $(1-\lambda) \text{Det}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 7 & 0 \\ 8 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$\rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) \text{Det}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 8 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$(2-\lambda)(5-\lambda) - 56$

$\lambda^2 - 7\lambda + \underbrace{10 - 56}_{-46}$

$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ (ris.)

$\Delta \quad 49 + 4(46)$

Calcolo base e dim di nucleo e immagine

Fase 1: nucleo e dimensioni

Ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. poniamo la matrice per un vettore $= 0$

b. det $\bar{e} = 0$ (calcolo), calcolo rango (ordine 2, eliminando 3 r e 3 c)

quindi si hanno $\infty^{3-2} = \infty^1$ sol $\rightarrow \text{Dim}(\text{Ker}(A)) = 1$

$\downarrow$

$\text{Dim}(\text{Im}(A)) = 2$

Fase 2. base del Ker

Siccome una sol é inf, poniamo un parametro

$$\begin{cases} -4\alpha + 2y + 2\alpha = 0 \rightarrow y = \alpha \\ 2x + 4\alpha = 0 \rightarrow x = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow B_{Ker} = \{(-2, 1, 1)\}$$

Fase 3. base di Im.

Prendiamo i vettori colonne. Siccome il rango si ottiene con gli elementi di 1 e 2, allora $B_{Im} = \{(2,2,2), (2,0,1)\}$

!! Ker e Im non si intersecano !!

Calcolo molteplicità geometrica

$mg(\lambda) = \dim(V) - \text{Rank}(A - \lambda I\lambda)$

Molteplicità algebrica: quante volte un autovalore si ripete / quante righe/colonne sono lin. indip.

Calcolo base e base ortogonale di un sottospazio definito da un'equazione

1 - Base

$x+y+z+t=0$ →

~~fissiamo x = -1~~

$x = -y - z - t$

Quindi una base … 1, 0] z, …]

COME FUNZIONA

x è scrivibile come $x = -\alpha - \beta - \gamma$

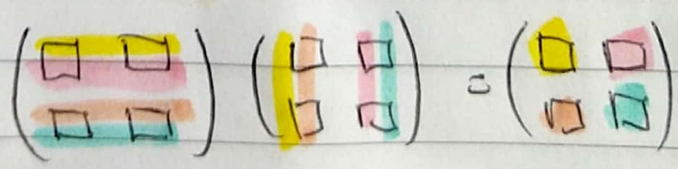
quindi abbiamo $\alpha(-1,1,0,0)$ $\beta(-1,0,1,0)$ $\gamma(-1,0,0,1)$.

Abbiamo quindi la base.

2 - Base ortogonale

→ Algoritmo di gram-schmidt

Prodotto tra matrici $\begin{pmatrix} 1r \cdot 1c & 1r \cdot 2c \\ 2r \cdot 1c & 2r \cdot 2c \end{pmatrix}$



Span - Sottospazio generato - copertura lineare

Definizione: insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori indicati

Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori, allora V coincide con lo span → $V = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

Uno span è un sottospazio vettoriale

Capire se una matrice é diagonalizzabile

① Calcolo degli autovalori somma ma = DimV
② Molteplicità geometrica coincide con quella algebrica

Ricavare base da span - elim. gaussiana

1. Scrivere i vettori come matrice
2. Eliminazione di Gauss
3. I vettori con pivot formano la base DONE!

Metodo degli scarti successivi

1. Si prendono i vettori $\neq 0$
2. Si confrontano 1 a 1 per vedere se si scrivono come combinazione lineare, in caso si scartano

Estrazione base da sistema di generatori

· metodo delle colonne

1. Mettere i vettori colonne come matrice
2. Se det $\neq 0$ → END. Tutti i vettori sono nella base. Altrimenti
3. Trovare matrice più piccola con det $\neq 0$. Prendere vettori colonne della mat. originale che la formano

Base del complemento ortogonale

① Se si parte da span, riferirsi a estrazione base da sistema di generatori

② Si prende $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e si pone il suo prodotto scalare con i vettori della base $= 0$ (uno ad uno: $\langle v, s_1 \rangle$ $\langle v, s_2 \rangle$ etc)

③ Si avranno equazioni e incognite da risolvere. A seconda del nr. di parametri, ci saranno tot vettori a formare la base

!! Attenzione al prodotto matrice · vettore! come verifica calcola l'appl. lineare della matrice.

Completamento a base

$$V = \text{span}\{v_1, v_2 \dots v_p\} \in \mathbb{R}^n \qquad p < n$$

si prende un vettore w lin. indipendente rispetto allo span. Se $p+1 = n \to$ END.
Altrimenti ripetere.

AL