

# Demostración de la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann

Ailema Matos C121, Raúl R. Espinosa C122

March 14, 2025

En este documento se demuestra rigurosamente mediante un análisis detallado de las definiciones y propiedades fundamentales de la integración de Riemann un teorema que nos permite asegurar que una función sea integrable según Riemann.

**Teorema 1** (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann en funciones reales).  
*Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces se cumple que*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \iff \underline{I} = \bar{I}$$

## Definiciones:

1. **def de Riemann integrable:**  $f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \exists \lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\}))$
2. **def de Sumas de Darboux:**
  - (a) **Suma superior:**  $S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i$
  - (b) **Suma inferior:**  $s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$
3. **def de Integral superior**  $\bar{I} = \inf\{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$
4. **def de Integral inferior**  $\underline{I} = \sup\{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$

**Afirmación 1:**  $s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$

*Proof.* Demostremos la afirmación 1:

Sean  $\{m_i\}$  el conjunto de los mínimos de cada intervalo de  $P$  y  $\{M_i\}$  el conjunto de los máximos de cada intervalo de  $P$ . Note que

$$\begin{aligned} m_i &\leq f(\xi_i) \leq M_i \\ m_i \Delta x_i &\leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \end{aligned}$$

---


$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

□

**Afirmación 2:**  $s(f, P) = \inf\{\sigma(f, P, \{\xi_i\})\} \wedge S(f, P) = \sup\{\sigma(f, P, \{\xi_i\})\}$

*Proof.* Demostremos la afirmación 2:

Tenemos por la **Afirmación 1** que  $s(f, P)$  y  $S(f, P)$  son cotas inferior y superior de  $\{\sigma(f, P, \{\xi_i\})\}$  respectivamente.

Demostremos que son la mayor de las cotas inferiores y la menor de las cotas superiores respectivamente.

Dado  $\epsilon > 0$ , por definición de ínfimo, para cada  $i$  existe  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}.$$

de donde

$$\sigma(f, P, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \left( m_i + \frac{\epsilon}{b-a} \right) \Delta x_i.$$

$$\sigma(f, P, \{\xi_i\}) < \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = s(f, P) + \epsilon.$$

Queda demostrado que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \{\xi_i\}$  con  $\sigma(f, P, \{\xi_i\}) < s(f, P) + \epsilon$ , que es lo mismo que  $s(f, P)$  es la mayor de las cotas inferiores por lo que es ínfimo.

Dado  $\epsilon > 0$ , por definición de supremo, para cada  $i$  existe  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\epsilon}{b-a}.$$

de donde

$$\sigma(f, P, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i > \sum_{i=1}^n \left( M_i - \frac{\epsilon}{b-a} \right) \Delta x_i.$$

$$\sigma(f, P, \{\xi_i\}) > \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = S(f, P) - \epsilon.$$

Queda demostrado que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \{\xi_i\}$  con  $\sigma(f, P, \{\xi_i\}) > S(f, P) - \epsilon$ , que es lo mismo que  $S(f, P)$  es la menor de las cotas superiores por lo que es supremo.

□

*Proof.* **Demostración del teorema**

Para demostrar el teorema, procedemos en tres partes:

- 
1.  $[f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$
  2.  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \implies \underline{I} = \bar{I}$
  3.  $\underline{I} = \bar{I} \implies [f \in \mathcal{R}[a, b]$
  1.  $[f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : (P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon)$

*Proof.* Supongamos que  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Entonces, por la **def de Riemann integrable**

$$\lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

existe un único número  $I$  tal que  $\forall \epsilon > 0$ , existe una partición  $P_{\frac{\epsilon}{2}} \in P[a, b]$  donde  $\forall P : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_{\frac{\epsilon}{2}}$  se cumple que:

$$|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \frac{\epsilon}{2}$$

por la **Afirmación 2** se tiene  $s(f, P) = \inf\{\sigma(f, P, \{\xi_i\})\}$ , de donde por definición de ínfimo  $\forall \epsilon > 0 \exists \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}$  :

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) < s(f, P) + \frac{\epsilon}{2}$$

multiplicando por (-1)

$$-s(f, P) \geq -\sigma(f, P, \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) > -s(f, P) - \frac{\epsilon}{2}$$

por la **Afirmación 2** se tiene  $S(f, P) = \sup\{\sigma(f, P, \{\xi_i\})\}$ , de donde por definición de supremo  $\forall \epsilon > 0 \exists \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}$  :

$$S(f, P) \geq \sigma(f, P, \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) > S(f, P) - \frac{\epsilon}{2}$$

sumando esta con la desigualdad anterior se obtiene que

$$S(f, P) - s(f, P) > 0 > S(f, P) - s(f, P) - \epsilon$$

de la desigualdad de la derecha se tiene

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

Queda demostrada la primera parte. □

2.  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \implies \underline{I} = \bar{I}$

*Proof.* Supongamos que  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$

Por **def de Integral superior** y **def de Integral inferior** se tiene que

$$\bar{I} \leq S(f, P)$$

---

y

$$\underline{I} \geq s(f, P)$$

de donde

$$\bar{I} - \underline{I} \leq S(f, P) - s(f, P)$$

usando la premisa de la que partimos tenemos que  $\forall \epsilon > 0$

$$\bar{I} - \underline{I} \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

como  $\bar{I} - \underline{I} \geq 0$  y es constante, entonces  $\bar{I} = \underline{I}$

□

3.  $\underline{I} = \bar{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$

*Proof.* Supongamos que  $\underline{I} = \bar{I}$  y sea  $I$ :  $I = \underline{I} = \bar{I}$ .

Por definición de  $\bar{I}$  (ínfimo) y de  $\underline{I}$  (supremo) se tiene que

$$S(f, P) - \bar{I} \geq 0 \wedge \lim(S(f, P) - \bar{I}) = 0$$

$$\underline{I} - s(f, P) \geq 0 \wedge \lim(s(f, P) - \underline{I}) = 0$$

Por definición de límite para todo  $x > 0, y > 0$ , tomando  $\epsilon = \max(x, y)$  se tienen las desigualdades

$$0 < |S(f, P) - \bar{I}| < x \leq \epsilon$$

$$0 < |s(f, P) - \underline{I}| < y \leq \epsilon$$

que son equivalentes a

$$0 < S(f, P) - \bar{I} < \epsilon$$

$$0 < \underline{I} - s(f, P) < \epsilon$$

Por la **Afirmación 1** tenemos que

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

restando  $I$

$$s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \bar{I}$$

usando las desigualdades anteriores llegamos a

$$-\epsilon < s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \bar{I} < \epsilon$$

que se puede escribir como

$$0 < |\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Como la desigualdad se cumple para todo  $\epsilon > 0$ , por definición de límite se tiene que

$$\lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

donde por la **def de Riemann integrable** se tiene que  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Por tanto, queda demostrado que  $\bar{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$  □

---

Hemos probado que:

$$[f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \implies \underline{I} = \bar{I}$$

$$\underline{I} = \bar{I} \implies [f \in \mathcal{R}[a, b]$$

Por lo que queda demostrado que:

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in P[a, b] : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \iff \underline{I} = \bar{I}$$

□