Igualdad de las integrales inferior y superior como criterio de integrabilidad de Riemann

Ailema Matos C121, Raúl R. Espinosa C122

March 16, 2025

En este documento se demuestra rigurosamente mediante un análisis detallado de las definiciones y propiedades fundamentales de la integración de Riemann un teorema que nos permite asegurar que una funcion sea integrable según Riemann.

Teorema 1 (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann en funciones reales)**.** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *entonces se cumple que*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}$$

Propiedades y definiciones:

1. **def 1:** $\overline{I} = inf\{S(f,P) : P \in P[a,b]\}$
2. **def 2:** $\underline{I} = sup\{s(f,P) : P \in P[a,b]\}$
3. **Propiedad 1:** Sean $P_1, P_2 : P1 \in P[a,b] \wedge P_2 \in P[a,b]$, se cumple que:

$$P_2 \supseteq P_1 \iff S(f,P_2) <= S(f,P_1)$$

$$P_2 \supseteq P_1 \iff s(f,P_2) >= s(f,P_1)$$

Proof. Para demostrar este teorema, procedemos en dos partes:

1. **Necesidad:** Demostremos que $f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \underline{I} = \overline{I}$
   Afirmacion 1: $\overline{I} = s(f,P_{sup}) \implies \forall P_i : P_i \in P[a,b]$ se tiene que $P_{sup} \supseteq P_i$.
   Afirmacion 2: $\underline{I} = S(f,P_{inf}) \implies \forall P_i : P_i \in P[a,b]$ se tiene que $P_{inf} \supseteq P_i$.

Proof. Demostremos la afirmacion 1:
Sea $\overline{I} = s(f, P_{sup})$ por la **def 2** se tiene que $s(f, P_{sup}) = sup\{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$ de donde por definicion de supremo se tiene para todo $s(f, P_i) : s(f, P_i) \in \{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$ se cumple que $s(f, P_{sup}) >= s(f, P_i)$ note que para todo $P_i \in P[a, b]$ se tiene que $s(f, P_{sup}) >= s(f, P_i)$ y usando la **Propiedad 1** se tiene que para todo $P_i \in P[a, b]$ se cumple que $P_{sup} \supseteq P_i$. □

Proof. Demostremos la afirmacion 2:
Sea $\underline{I} = S(f, P_{inf})$ por la **def 1** se tiene que $S(f, P_{inf}) = inf\{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$ de donde por definicion de infimo se tiene para todo $S(f, P_{inf}) : S(f, P_i) \in \{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$ se cumple que $S(f, P_{inf}) <= S(f, P_i)$ note que para todo $P_i \in P[a, b]$se tiene que $S(f, P_{inf}) <= S(f, P_i)$ y usando la **Propiedad 1** se tiene que para todo $P_i \in P[a, b]$ se cumple que $P_{inf} \supseteq P_i$. □

Supongamos que f es integrable según Riemann. Entonces, por definición

$$lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

existe un único número I tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P_\epsilon \in P[a, b]$ donde para todo $P : P \in P[a, b] \wedge P \supseteq P_\epsilon$ se cumple que:

$$|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Por la **Afirmacion 1** se tiene que $P_{sup} \supseteq P_\epsilon$ de donde

$$|\sigma(f, P_{sup}, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

tomando $\{\xi_i\}$ como $\{m_i\}$ el conjunto de los minimos de cada intervalo de la particion P_{sup} entonces se cumple que

$$|\sigma(f, P_{sup}, \{m_i\}) - I| < \epsilon$$

Note que $\sigma(f, P_{sup}, \{m_i\}) = \Sigma m_i \Delta x_i = s(f, P_{sup})$ de donde

$$|s(f, P_{sup}) - I| < \epsilon$$

$$|\overline{I} - I| < \epsilon$$

por definicion de limite se tiene que $lim\overline{I} = I$.

Por la **Afirmacion 2** se tiene que $P_{inf} \supseteq P_\epsilon$ de donde

$$|\sigma(f, P_{inf}, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

tomando $\{\xi_i\}$ como $\{M_i\}$ el conjunto de los maximos de cada intervalo de la particion P_{inf} entonces se cumple que

$$|\sigma(f, P_{inf}, \{M_i\}) - I| < \epsilon$$

Note que $\sigma(f, P_{inf}, \{M_i\}) = \Sigma M_i \Delta x_i = S(f, P_{inf})$ de donde

$$|S(f, P_{inf}) - I| < \epsilon$$

$$|\underline{I} - I| < \epsilon$$

por definicion de limite se tiene que $lim\underline{I} = I$.

Note que de $lim\overline{I} = I$ y $lim\underline{I} = I$ se tiene que $lim(\overline{I} - \underline{I}) = 0$ y como $\overline{I} - \underline{I}$ es una constante, entonces $\overline{I} - \underline{I} = 0$.

Por tanto, concluimos que $\overline{I} = \underline{I}$, y queda demostrado que

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \underline{I} = \overline{I}$$

2. **Suficiencia:** Demostremos que $\underline{I} = \overline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a,b]$ **Afirmacion 3:** $s(f,P) <= \sigma(f,P,\{\xi_i\}) <= S(f,P)$

   Proof. Demostremos la afirmacion 3:
   Sean $\{m_i\}$ el conjunto de los minimos de cada intervalo de P y $\{M_i\}$ el conjunto de los maximos de cada intervalo de P. Note que

   $$m_i <= f(\xi_i) <= M_i$$

   $$m_i \Delta x_i <= f(\xi_i)\Delta x_i <= M_i \Delta x_i$$

   $$\Sigma m_i \Delta x_i <= \Sigma f(\xi_i)\Delta x_i <= \Sigma M_i \Delta x_i$$

   $$s(f,P) <= \sigma(f,P,\{\xi_i\}) <= S(f,P)$$

   □

   Supongamos que $\underline{I} = \overline{I}$ y sea I: $I = \underline{I} = \overline{I}$.

   Por definicion de $\overline{I}$ (infimo) y de $\underline{I}$ (supremo) se tiene que

   $$S(f,P) - \overline{I} >= 0 \wedge lim(S(f,P) - \overline{I}) = 0$$

   $$\underline{I} - s(f,P) >= 0 \wedge lim(s(f,P) - \underline{I}) = 0$$

   Por definicion de limite para todo $x > 0, y > 0$, tomando $\epsilon = max(x,y)$ se tienen las desigualdades

   $$0 < |S(f,P) - \overline{I}| < x <= \epsilon$$

   $$0 < |s(f,P) - \underline{I}| < y <= \epsilon$$

   que son equivalentes a

   $$0 < S(f,P) - \overline{I} < \epsilon$$

   $$0 < \underline{I} - s(f,P) < \epsilon$$

   Por la **Afirmacion 3** tenemos que

   $$s(f,P) <= \sigma(f,P,\{\xi_i\}) <= S(f,P)$$

restando I

$$s(f,P) - \underline{I} <= \sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I <= S(f,P) - \overline{I}$$

usando las desigualdades anteriores llegamos a

$$-\epsilon < s(f,P) - \underline{I} <= \sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I <= S(f,P) - \overline{I} <= \epsilon$$

que se puede escribir como

$$0 < |\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Como la desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, por definicion de limite se tiene que

$$lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\})) = I$$

donde por definicion de Riemann integrable se tiene que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Por tanto, queda demostrado que $\overline{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a,b]$

□