Igualdad de las integrales inferior y superior como criterio de integrabilidad de Riemann

Ailema Matos C121, Raúl R. Espinosa C122

March 14, 2025

En este documento se demuestra rigurosamente mediante un análisis detallado de las definiciones y propiedades fundamentales de la integración de Riemann un teorema que nos permite asegurar que una funcion sea integrable según Riemann.

Teorema 1 (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann en funciones reales)**.** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *entonces se cumple que*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow \underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}$$

Definiciones:

1. **def 0:** $f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow \exists lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\}))$
2. **def 1:** $\overline{I} = inf\{S(f,P) : P \in P[a,b]\}$
3. **def 2:** $\underline{I} = sup\{s(f,P) : P \in P[a,b]\}$

Proof. Para demostrar este teorema, procedemos en dos partes:

1. **Necesidad:** Demostremos que $f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \underline{I} = \overline{I}$
   Afirmacion 1: $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$

   Proof. Demostremos la afirmacion 1:

   Sean $\{m_i\}$ el conjunto de los minimos de cada intervalo de P y $\{M_i\}$ el conjunto de los maximos de cada intervalo de P. Note que

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

$$m_i\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$
$$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$$

□

Supongamos que f es integrable según Riemann. Entonces, por la **def 0**

$$lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\})) = I$$

existe un único número I tal que $\forall\epsilon > 0$, existe una partición $P_\epsilon \in P[a,b]$ donde $\forall P : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon$ se cumple que:

$$|\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Por la **Afirmacion 1** se tiene que $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$ usando la desigualdad de la derecha

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$$

restando $\overline{I}$ en ambos miembros

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - \overline{I} \leq S(f,P) - \overline{I}$$

por la **def 1** tenemos que $lim(S(f,P)) = \overline{I}$ donde por definicion
$\forall\epsilon > 0 \exists P_\epsilon : \forall P : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon$ se cumple que

$$|S(f,P) - \overline{I}| < \epsilon$$

usando ademas la desigualdad anterior llegamos a que

$$|\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - \overline{I}| \leq |S(f,P) - \overline{I}| < \epsilon$$

donde tenemos que $\forall\epsilon > 0 \exists P_\epsilon : \forall P : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon$

$$|\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - \overline{I}| < \epsilon$$

entonces por definicion de limite $lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\})) = \overline{I}$ y como el limite es unico, llegamos a que $\overline{I} = I$.

Por la **Afirmacion 1** se tiene que $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$ usando la desigualdad de la izquierda

$$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\})$$

restando I en ambos miembros

$$s(f,P) - I \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I$$

usando que $\forall \epsilon > 0$, existe una partición $P_\epsilon \in P[a, b]$: $\forall P : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon$ se cumple

$$|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

tenemos que

$$|s(f, P) - I| \leq |\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

de donde se obtiene que $\forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon : \forall P : P \in P[a, b] \wedge P \supset P_\epsilon$

$$|s(f, P) - I| < \epsilon$$

entonces por definicion de limite $lim(s(f, P)) = I$ pero por la **def 2** tenemos que $lim(s(f, P)) = \underline{I}$ y como el limite es unico, llegamos a que $I = \underline{I}$.

Usando los resultados $\overline{I} = I$ y $I = \underline{I}$ tenemos que $\overline{I} = I = \underline{I}$.

Por tanto, concluimos que $\overline{I} = \underline{I}$, y queda demostrado que

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \underline{I} = \overline{I}$$

2. **Suficiencia:** Demostremos que $\underline{I} = \overline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$

   Supongamos que $\underline{I} = \overline{I}$ y sea I: $I = \underline{I} = \overline{I}$.

   Por definicion de $\overline{I}$ (infimo) y de $\underline{I}$ (supremo) se tiene que

$$S(f, P) - \overline{I} \geq 0 \wedge lim(S(f, P) - \overline{I}) = 0$$

$$\underline{I} - s(f, P) \geq 0 \wedge lim(s(f, P) - \underline{I}) = 0$$

   Por definicion de limite para todo $x > 0, y > 0$, tomando $\epsilon = max(x, y)$ se tienen las desigualdades

$$0 < |S(f, P) - \overline{I}| < x \leq \epsilon$$
$$0 < |s(f, P) - \underline{I}| < y \leq \epsilon$$

   que son equivalentes a

$$0 < S(f, P) - \overline{I} < \epsilon$$
$$0 < \underline{I} - s(f, P) < \epsilon$$

   Por la **Afirmacion 1** tenemos que

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

   restando I

$$s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \overline{I}$$

usando las desigualdades anteriores llegamos a

$$-\epsilon < s(f,P) - \underline{I} \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I \leq S(f,P) - \overline{I} < \epsilon$$

que se puede escribir como

$$0 < |\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Como la desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, por definicion de limite se tiene que

$$lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\})) = I$$

donde por la **def 0** se tiene que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Por tanto, queda demostrado que $\overline{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a,b]$

$\square$