

March 15, 2025

Teorema 1 (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann en funciones reales).
Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces se cumple que

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \underline{I} = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \bar{I}$$

Propiedades y definiciones:

1. **def 1:** $\bar{I} = \inf\{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$
2. **def 2:** $\underline{I} = \sup\{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$
3. **Propiedad 1:** Sean $P_1, P_2 : P_1 \in P[a, b] \wedge P_2 \in P[a, b]$, se cumple que:

$$P_2 \supseteq P_1 \iff S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

$$P_2 \supseteq P_1 \iff s(f, P_2) \geq s(f, P_1)$$

Proof. Para demostrar este teorema, procedemos en dos partes:

1. **Necesidad:** Demostremos que $f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \underline{I} = \bar{I}$

Afirmación 1: $\bar{I} = s(f, P_{sup}) \implies \forall P_i : P_i \in P[a, b]$ se tiene que $P_{sup} \supseteq P_i$.

Afirmación 2: $\underline{I} = S(f, P_{inf}) \implies \forall P_i : P_i \in P[a, b]$ se tiene que $P_{inf} \supseteq P_i$.

Proof. Demostremos la afirmación 1:

Sea $\bar{I} = s(f, P_{sup})$ por la **def 2** se tiene que $s(f, P_{sup}) = \sup\{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$ de donde por definición de supremo se tiene para todo $s(f, P_i) : s(f, P_i) \in \{s(f, P) : P \in P[a, b]\}$ se cumple que $s(f, P_{sup}) \geq s(f, P_i)$ note que para todo $P_i \in P[a, b]$ se tiene que $s(f, P_{sup}) \geq s(f, P_i)$ y usando la **Propiedad 1** se tiene que para todo $P_i \in P[a, b]$ se cumple que $P_{sup} \supseteq P_i$. \square

Proof. Demostremos la afirmación 2:

Sea $\underline{I} = S(f, P_{inf})$ por la **def 1** se tiene que $S(f, P_{inf}) = \inf\{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$ de donde por definición de infimo se tiene para todo $S(f, P_i) : S(f, P_i) \in \{S(f, P) : P \in P[a, b]\}$ se cumple que $S(f, P_{inf}) \leq S(f, P_i)$ note que para todo $P_i \in P[a, b]$ se tiene que $S(f, P_{inf}) \leq S(f, P_i)$ y usando la **Propiedad 1** se tiene que para todo $P_i \in P[a, b]$ se cumple que $P_{inf} \supseteq P_i$. \square

Supongamos que f es integrable según Riemann. Entonces, por definición

$$\lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

existe un único número I tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P_\epsilon \in P[a, b]$ donde para todo $P : P \in P[a, b] \wedge P \supseteq P_\epsilon$ se cumple que:

$$|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Por la **Afirmación 1** se tiene que $P_{sup} \supseteq P_\epsilon$ de donde

$$|\sigma(f, P_{sup}, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

tomando $\{\xi_i\}$ como $\{m_i\}$ el conjunto de los mínimos de cada intervalo de la partición P_{sup} entonces se cumple que

$$|\sigma(f, P_{sup}, \{m_i\}) - I| < \epsilon$$

Note que $\sigma(f, P_{sup}, \{m_i\}) = \Sigma m_i \Delta x_i = s(f, P_{sup})$ de donde

$$|s(f, P_{sup}) - I| < \epsilon$$

$$|\bar{I} - I| < \epsilon$$

por definición de límite se tiene que $\lim \bar{I} = I$.

Por la **Afirmación 2** se tiene que $P_{inf} \supseteq P_\epsilon$ de donde

$$|\sigma(f, P_{inf}, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

tomando $\{\xi_i\}$ como $\{M_i\}$ el conjunto de los máximos de cada intervalo de la partición P_{inf} entonces se cumple que

$$|\sigma(f, P_{inf}, \{M_i\}) - I| < \epsilon$$

Note que $\sigma(f, P_{inf}, \{M_i\}) = \Sigma M_i \Delta x_i = S(f, P_{inf})$ de donde

$$|S(f, P_{inf}) - I| < \epsilon$$

$$|\underline{I} - I| < \epsilon$$

por definición de límite se tiene que $\lim \underline{I} = I$.

Note que de $\lim \bar{I} = I$ y $\lim \underline{I} = I$ se tiene que $\lim(\bar{I} - \underline{I}) = 0$ y como $\bar{I} - \underline{I}$ es una constante, entonces $\bar{I} - \underline{I} = 0$.

Por tanto, concluimos que $\bar{I} = \underline{I}$, y queda demostrado que

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \underline{I} = \bar{I}$$

2. **Suficiencia:** Demostremos que $\underline{I} = \bar{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$ **Afirmación 3:** $s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$

Proof. Demostremos la afirmacion 3:

Sean $\{m_i\}$ el conjunto de los minimos de cada intervalo de P y $\{M_i\}$ el conjunto de los maximos de cada intervalo de P . Note que

$$\begin{aligned} m_i &\leq f(\xi_i) \leq M_i \\ m_i \Delta x_i &\leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \\ \Sigma m_i \Delta x_i &\leq \Sigma f(\xi_i) \Delta x_i \leq \Sigma M_i \Delta x_i \\ s(f, P) &\leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P) \end{aligned}$$

□

Supongamos que $\underline{I} = \bar{I}$ y sea I : $I = \underline{I} = \bar{I}$.

Por definicion de \bar{I} (infimo) y de \underline{I} (supremo) se tiene que

$$S(f, P) - \bar{I} \geq 0 \wedge \lim(S(f, P) - \bar{I}) = 0$$

$$\underline{I} - s(f, P) \geq 0 \wedge \lim(s(f, P) - \underline{I}) = 0$$

Por definicion de limite para todo $x > 0, y > 0$, tomando $\epsilon = \max(x, y)$ se tienen las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &< |S(f, P) - \bar{I}| < x \leq \epsilon \\ 0 &< |s(f, P) - \underline{I}| < y \leq \epsilon \end{aligned}$$

que son equivalentes a

$$\begin{aligned} 0 &< S(f, P) - \bar{I} < \epsilon \\ 0 &< \underline{I} - s(f, P) < \epsilon \end{aligned}$$

Por la **Afirmacion 3** tenemos que

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

restando I

$$s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \bar{I}$$

usando las desigualdades anteriores llegamos a

$$-\epsilon < s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \bar{I} < \epsilon$$

que se puede escribir como

$$0 < |\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Como la desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, por definicion de limite se tiene que

$$\lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

donde por definicion de Riemann integrable se tiene que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Por tanto, queda demostrado que $\bar{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$

□