Igualdad de las integrales inferior y superior como criterio de integrabilidad de Riemann

Ailema Matos C121, Raúl R. Espinosa C122

March 14, 2025

En este documento se demuestra rigurosamente mediante un análisis detallado de las definiciones y propiedades fundamentales de la integración de Riemann un teorema que nos permite asegurar que una funcion sea integrable según Riemann.

Teorema 1 (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann en funciones reales)**.** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *entonces se cumple que*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \epsilon > 0 \ , \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \iff \underline{I} = \overline{I}$$

Definiciones:

1. **def de Riemann integrable:** $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \exists lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\}))$
2. **def de Sumas de Darboax:**
   (a) **Suma superior**: $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$
   (b) **Suma inferior**: $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$
3. **def de Integral superior** $\overline{I} = inf\{S(f,P) : P \in P[a,b]\}$
4. **def de Integral inferior** $\underline{I} = sup\{s(f,P) : P \in P[a,b]\}$

Afirmacion 1: $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$

Proof. Demostremos la afirmacion 1:

Sean $\{m_i\}$ el conjunto de los minimos de cada intervalo de P y $\{M_i\}$ el conjunto de los maximos de cada intervalo de P. Note que

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$
$$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P)$$

□

Afirmacion 2: $s(f,P) = inf\{\sigma(f,P,\{\xi_i\})\} \wedge S(f,P) = sup\{\sigma(f,P,\{\xi_i\})\}$

Proof. Demostremos la afirmacion 2:

Tenemos por la **Afirmacion 1** que $s(f,P)$ y $S(f,P)$ son cotas inferior y superior de $\{\sigma(f,P,\{\xi_i\}$ respectivamente.

Demostremos que son la mayor de las cotas inferiores y la menor de las cotas superiores respectivamente.

Dado $\epsilon > 0$, por definición de ínfimo, para cada i existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}.$$

de donde

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\epsilon}{b-a}\right) \Delta x_i.$$

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) < \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = s(f,P) + \epsilon.$$

Queda demostrado que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \{\xi_i\}$ con $\sigma(f,P,\{\xi_i\}) < s(f,P) + \epsilon$, que es lo mismo que $s(f,P)$ es la mayor de las cotas inferiores por lo que es infimo.

Dado $\epsilon > 0$, por definición de supremo, para cada i existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(\xi_i) > M_i + \frac{\epsilon}{b-a}.$$

de donde

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} \left(M_i + \frac{\epsilon}{b-a}\right) \Delta x_i.$$

$$\sigma(f,P,\{\xi_i\}) > \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = S(f,P) + \epsilon.$$

Queda demostrado que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \{\xi_i\}$ con $\sigma(f,P,\{\xi_i\}) > S(f,P) + \epsilon$, que es lo mismo que $S(f,P)$ es la menor de las cotas inferiores por lo que es infimo.

□

Proof. **Demostracion del teorema**

Para demostrar el teorema, procedemos en tres partes:

1. $[f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \forall \epsilon > 0 \;, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0 \;, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \implies \underline{I} = \overline{I}$
3. $\underline{I} = \overline{I} \implies [f \in \mathcal{R}[a,b]$

1. $[f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \forall \epsilon > 0 \;, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : (P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon)$

   Proof. Supongamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, por la **def de Riemann integrable**

   $$lim(\sigma(f,P,\{\xi_i\})) = I$$

   existe un único número I tal que $\forall \epsilon > 0$, existe una partición $P_{\frac{\epsilon}{2}} \in P[a,b]$ donde $\forall P : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_{\frac{\epsilon}{2}}$ se cumple que:

   $$|\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I| < \frac{\epsilon}{2}$$

   por la **Afirmacion 2** se tiene $s(f,P) = inf\{\sigma(f,P,\{\xi_i\})\}$, de donde por definicion de infimo $\forall \epsilon > 0 \exists \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}$:

   $$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) < s(f,P) + \frac{\epsilon}{2}$$

   multiplicvando por (-1)

   $$-s(f,P) \geq -\sigma(f,P,\{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) > -s(f,P) - \frac{\epsilon}{2}$$

   por la **Afirmacion 2** se tiene $S(f,P) = sup\{\sigma(f,P,\{\xi_i\})\}$, de donde por definicion de supremo $\forall \epsilon > 0 \exists \{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}$:

   $$S(f,P) \geq \sigma(f,P,\{\xi_i\}_{\frac{\epsilon}{2}}) > S(f,P) - \frac{\epsilon}{2}$$

   sumando esta con la desigualdad anterior se obtiene que

   $$S(f,P) - s(f,P) > 0 > S(f,P) - s(f,P) - \epsilon$$

   de la desigualdad de la derecha se tiene

   $$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

   Queda demostrada la primera parte.

   □

2. $\forall \epsilon > 0 \;, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \implies \underline{I} = \overline{I}$

   Proof. Supongamos que $\forall \epsilon > 0 \;, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$

   Por **def de Integral superior** y **def de Integral inferior** se tiene que

   $$\overline{I} \leq S(f,P)$$

y

$$\underline{I} \geq s(f, P)$$

de donde

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S(f, P) - s(f, P)$$

usando la premisa de la que partimos tenemos que$\forall \epsilon > 0$

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

como $\overline{I} - \underline{I} \geq 0$ y es constante, entonces $\overline{I} = \underline{I}$

□

3. $\underline{I} = \overline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$

Proof. Supongamos que $\underline{I} = \overline{I}$ y sea I: $I = \underline{I} = \overline{I}$.

Por definicion de $\overline{I}$ (infimo) y de $\underline{I}$ (supremo) se tiene que

$$S(f, P) - \overline{I} \geq 0 \wedge lim(S(f, P) - \overline{I}) = 0$$

$$\underline{I} - s(f, P) \geq 0 \wedge lim(s(f, P) - \underline{I}) = 0$$

Por definicion de limite para todo $x > 0, y > 0$, tomando $\epsilon = max(x, y)$ se tienen las desigualdades

$$0 < |S(f, P) - \overline{I}| < x \leq \epsilon$$
$$0 < |s(f, P) - \underline{I}| < y \leq \epsilon$$

que son equivalentes a

$$0 < S(f, P) - \overline{I} < \epsilon$$
$$0 < \underline{I} - s(f, P) < \epsilon$$

Por la **Afirmacion 1** tenemos que

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

restando I

$$s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \overline{I}$$

usando las desigualdades anteriores llegamos a

$$-\epsilon < s(f, P) - \underline{I} \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I \leq S(f, P) - \overline{I} < \epsilon$$

que se puede escribir como

$$0 < |\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \epsilon$$

Como la desigualdad se cumple para todo $\epsilon > 0$, por definicion de limite se tiene que

$$lim(\sigma(f, P, \{\xi_i\})) = I$$

donde por la **def de Riemann integrable** se tiene que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Por tanto, queda demostrado que $\overline{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a, b]$ □

Hemos probado que:

$$[f \in \mathcal{R}[a,b] \implies \forall \epsilon > 0\ , \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0\ , \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \implies \underline{I} = \overline{I}$$

$$\underline{I} = \overline{I} \implies [f \in \mathcal{R}[a,b]$$

Por lo que queda demostrado que:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \epsilon > 0\,, \exists P_\epsilon \in P[a,b] : P \in P[a,b] \wedge P \supset P_\epsilon \implies S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \iff \underline{I} = \overline{I}$$

$\square$