

# PLAN D'EXPERIENCES

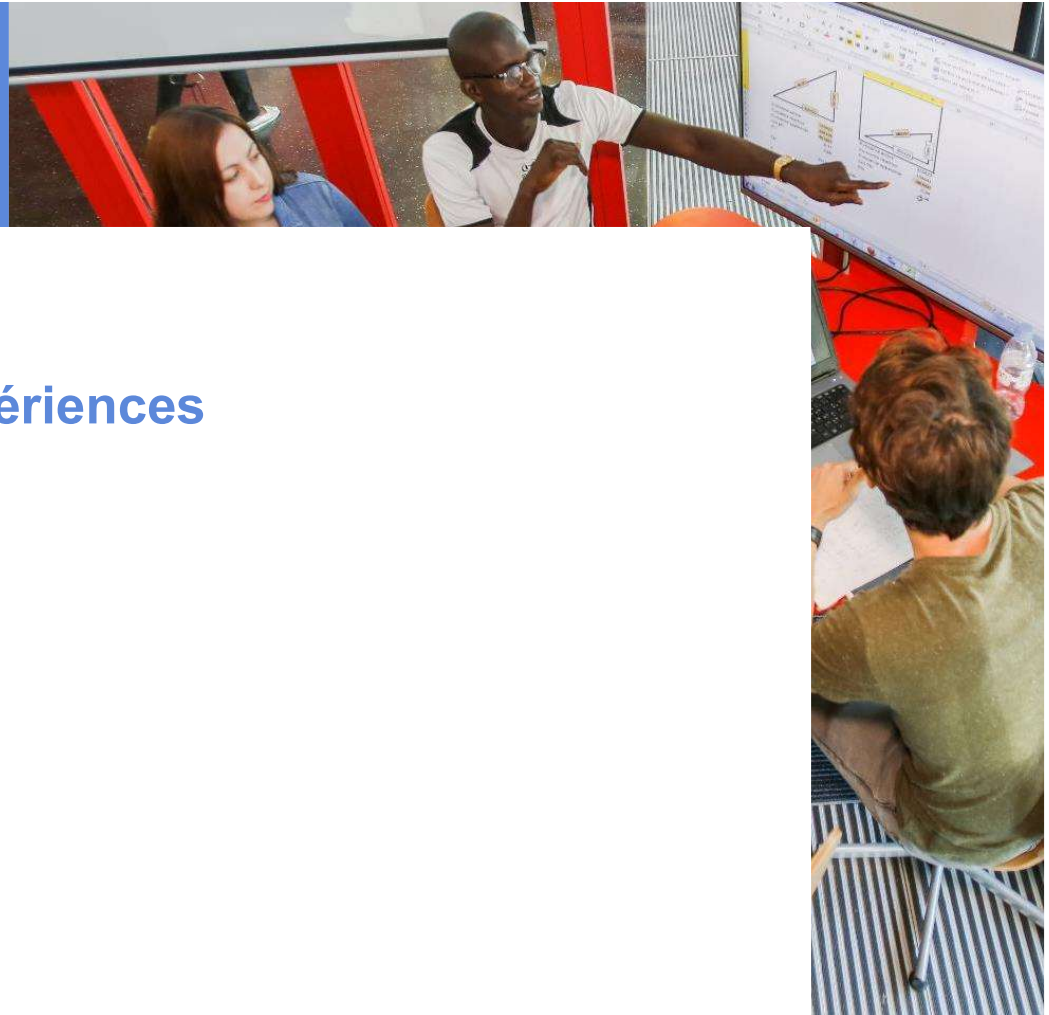
## MÉTHODOLOGIE

# Contenu

## 1. La méthode scientifique

## 2. La méthode des plans d'expériences

- Le QQOQCP de la méthode
- Les outils
- Les finalités
- Les limites





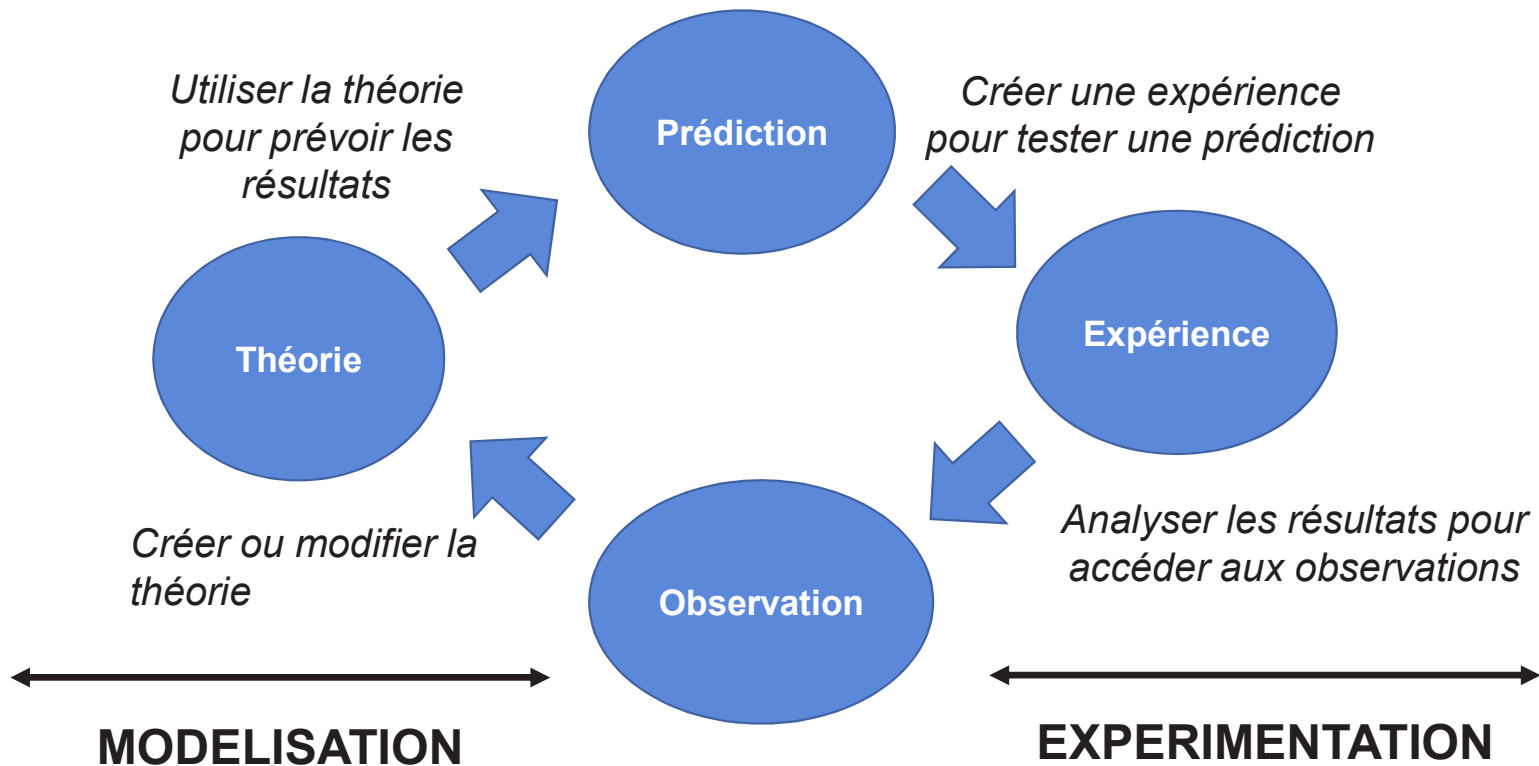
# 1

## La méthode scientifique

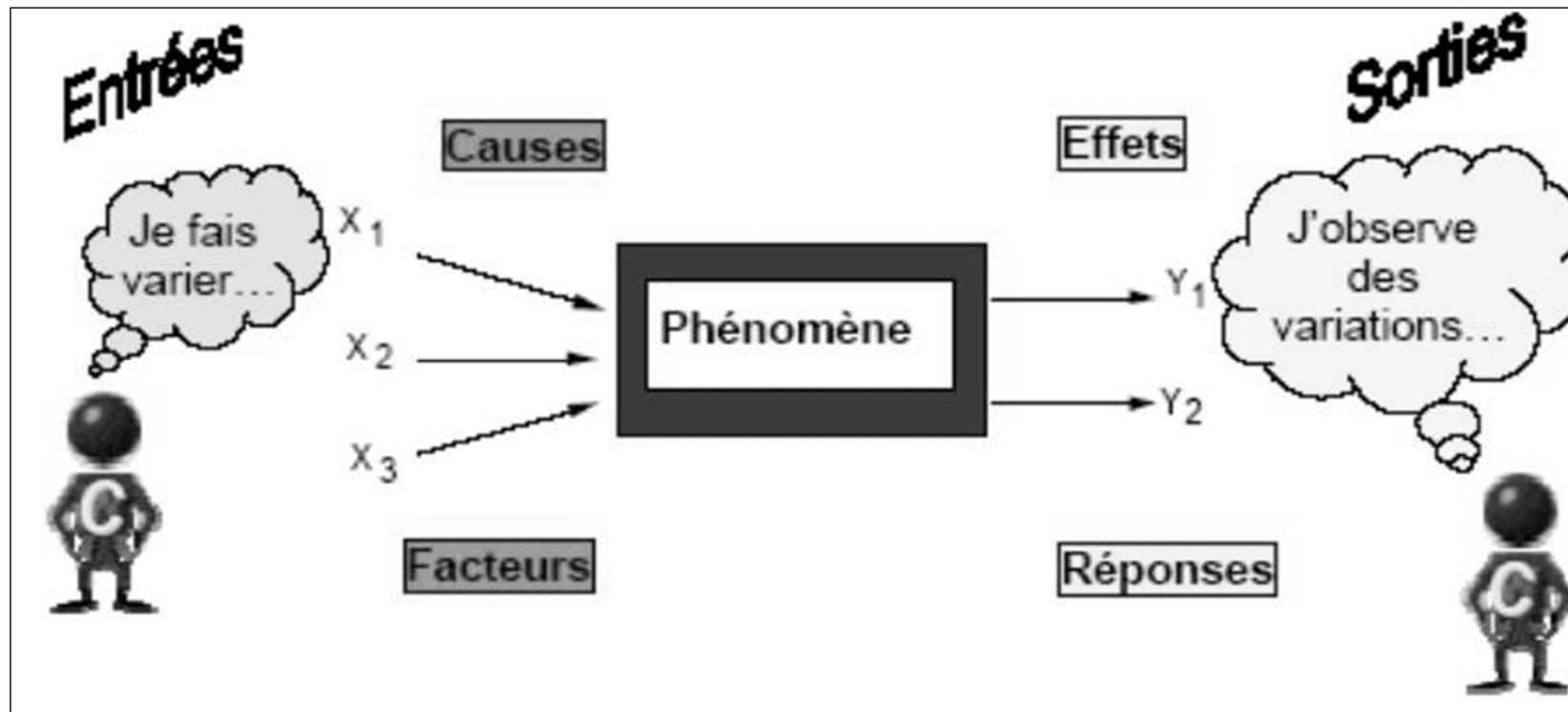
---

Novembre 2019

# La méthode scientifique

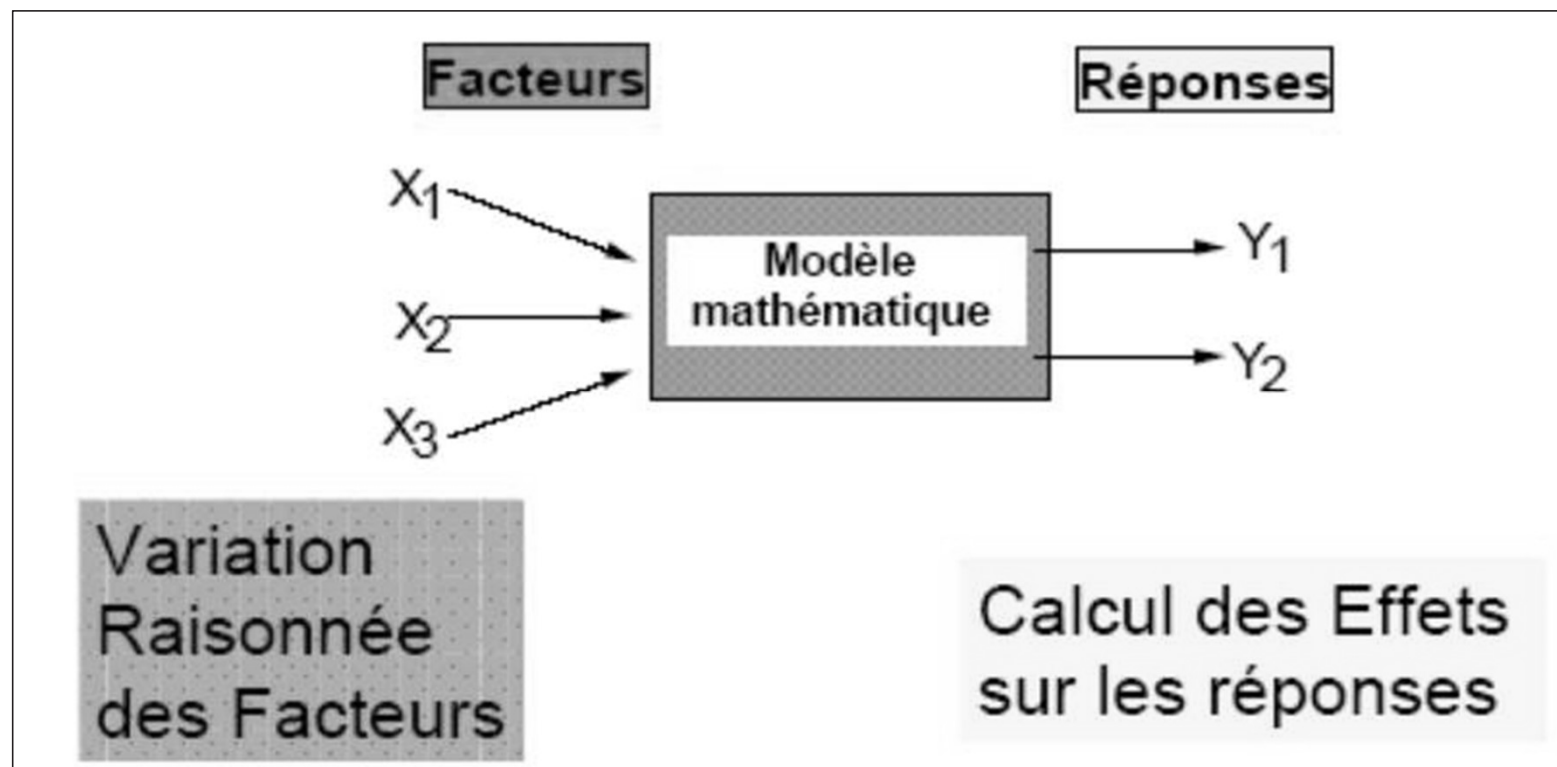


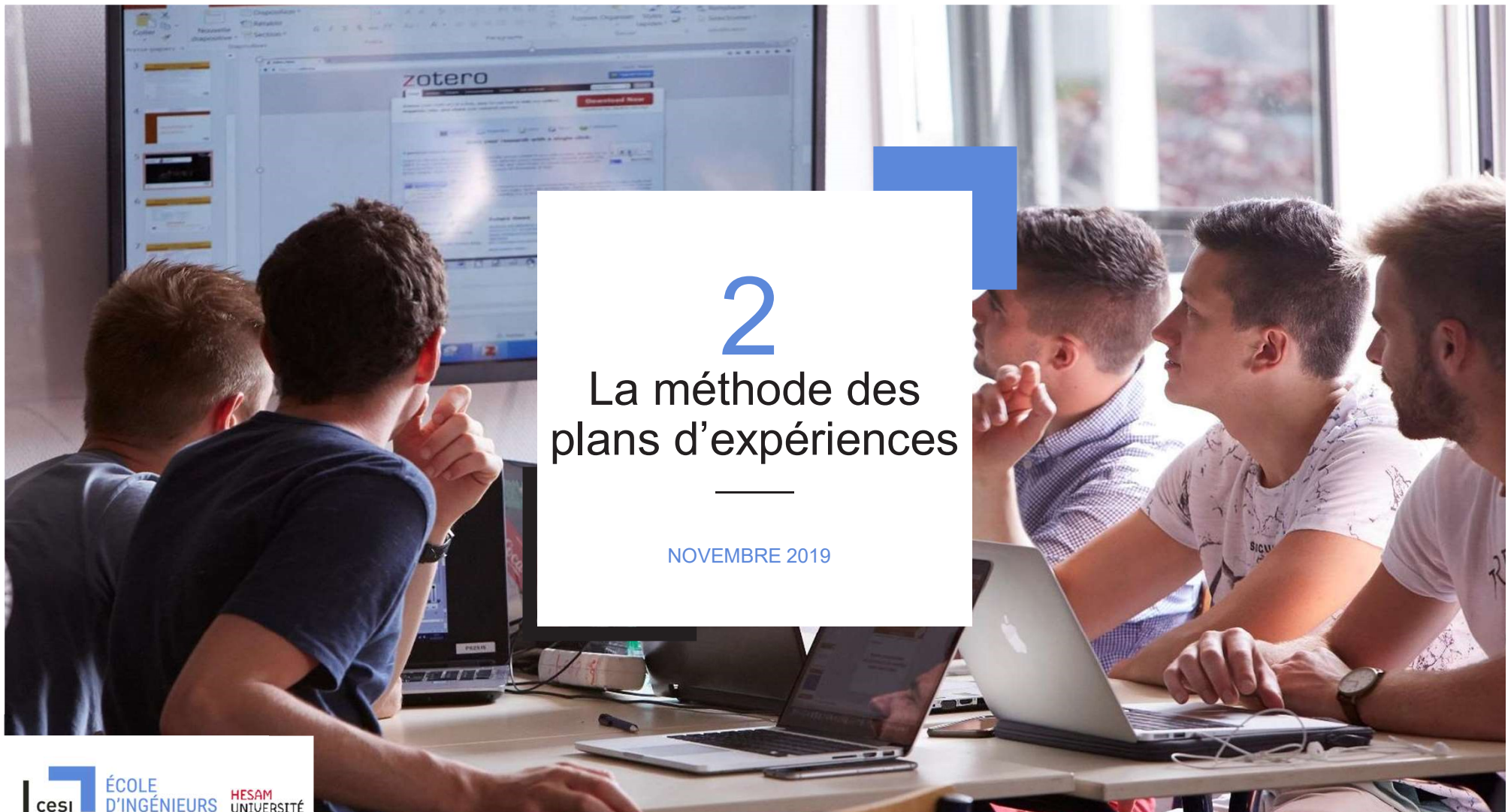
# La méthode scientifique





# La méthode scientifique





# 2

## La méthode des plans d'expériences

NOVEMBRE 2019

# Domaines d'application

---



Etc.

Plasturgie, automobile



# Plan d'expériences: pourquoi?

---

Les études expérimentales sont généralement coûteuses... en temps et en argent.

Les industriels souhaitent donc les réaliser de manière :

- **Efficace**, c'est-à-dire en effectuant le moins d'essais possibles pour aboutir au résultat,
- **Robuste**, c'est-à-dire en minimisant l'impact des erreurs de mesure et de la modélisation sur les résultats.

# Plan d'expériences pour quoi?

---

Planifier des expériences c'est établir une démarche logique et astucieuse permettant de définir :

**Quelle observation on va pouvoir utiliser ?**

**Quelle expérience ? Combien de test(s) ?**

**Dans quelles conditions les résultats sont intéressants ?**

**Dans quelles conditions les estimateurs sont bons ?**

**Afin de choisir correctement les expériences et exploiter les résultats obtenus**

# Plan d'expériences: contexte

---

- Le comportement d'un produit ou d'un procédé industriel est généralement fonction de nombreux facteurs, souvent dépendants les uns des autres.
- Pour prévoir ce comportement, le produit et le phénomène à observer sont modélisés et des simulations sont effectuées. La pertinence des résultats de simulation dépend de la qualité des modèles.
- Dans le cadre de la conception d'un produit ou d'un procédé industriel, les modèles font généralement intervenir un certain nombre de grandeurs physiques que l'on s'autorise à modifier, appelées '*paramètres*'.
- Le problème du concepteur est donc de trouver les « *bonnes* » valeurs de ces paramètres, c'est-à-dire celles qui feront que le produit ou le procédé aura le comportement attendu (réponse).

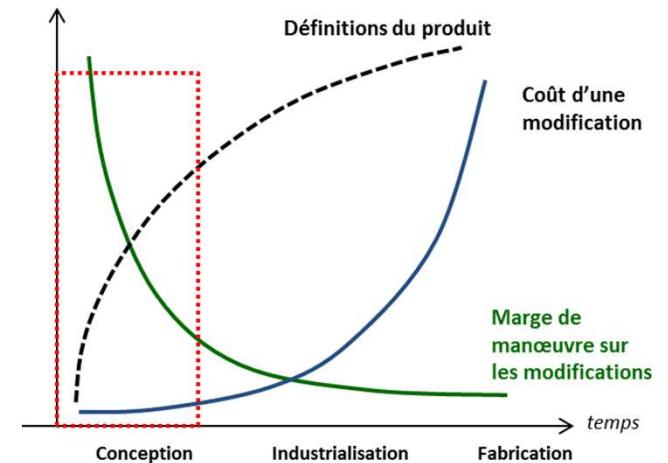
**Nécessité d'identifier l'influence des paramètres sur le comportement du produit ou du procédé**

# Plan d'expériences: enjeux

**Les plans d'expériences permettent aux entreprises de:**

- Optimiser leurs procédés de fabrication
- Optimiser leurs produits ou services
- Déterminer les meilleurs réglages d'un mécanisme
- Réduire les contrôles et les coûts de « non qualité »

**Avant la phase d'industrialisation d'un produit.**



**Zone d'efficacité des modifications sur le produit/processus**

**Des décisions importantes sont prises à partir des résultats d'essais:**

- Pour garantir les résultats obtenus
- Pour obtenir des résultats objectifs sur le procédé ou le produit étudié
- Pour obtenir un **maximum de résultats** avec un **minimum d'essais**.



# Plan d'expériences: enjeux

---

**Une démarche de plan d'expérience sert à :**

- ✓ Augmenter la rentabilité des expérimentations ;
- ✓ Savoir où l'on va, avoir une stratégie expérimentale ;
- ✓ Réduire (en général) le nombre d'expériences à faire => pas d'essais inutiles, gain en temps et en ressources ;
- ✓ Formaliser le problème à résoudre : langage commun

**Le coût d'une étude expérimentale dépend du nombre et de l'ordre des essais effectués**

# Plan d'expériences: c'est quoi?

---

- ✓ Le plan d'expériences consiste à sélectionner et ordonner les essais afin d'identifier à moindres coûts les effets des facteurs sur la réponse du produit.
- ✓ Il s'agit d'une méthode faisant appel à des notions de statistiques et de mathématiques simples, tout en offrant des précisions.
- ✓ Succinctement, la démarche vise à :
  - Définir un plan d'expériences, c'est-à-dire planifier une série d'essais permettant d'étudier les effets des facteurs ( $X_i$ ) sur un système ;
  - Postuler un modèle de comportement du système :  $y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$
  - Réaliser les essais et enregistrer les réponses ;
  - identifier les effets (coefficients des  $X_i$ ) et conclure l'étude.

# Plan d'expériences: c'est quoi?

Déterminer des objectifs précis et mettre en œuvre les moyens nécessaires pour les atteindre dans des délais prévus.

OBJECTIFS => Etudier un phénomène, identifier des résultats

MOYENS => Essais

MISE EN ŒUVRE => Combien et lesquels ?

Une série d'essais planifiés à l'avance pour déterminer l'influence des facteurs contrôlés sur les résultats

Essai N°	Facteurs contrôlés							Résultats de l'essai
	A	B	C	D	E	F	G	
1	1	1	1	1	1	1	1	R1
2	1	1	1	2	2	2	2	R2
3	1	2	2	1	1	2	2	R3
4	1	2	2	2	2	1	1	R4
5	2	1	2	1	2	1	2	R5
6	2	1	2	2	1	2	1	R6
7	2	2	1	1	2	2	1	R7
8	2	2	1	2	1	1	2	R8

Ordre des essais

réponses

Ordre des modalités (matrice d'expériences)

# Plan d'expériences: comment?

## Etape 1: Cadrage de l'étude

- ✓ Définir précisément le sujet, définir le périmètre, les conditions/contraintes et les objectifs, hypothèses, la réponse à observer...
- ✓ Pour ce faire, procéder par exemple par la méthode QQOQCP...

## Etape 2: Etablissement de la stratégie expérimentale

- ✓ Recenser les paramètres pouvant agir sur la réponse
- ✓ Choisir les facteurs et leurs niveaux de variation
- ✓ Définir l'espace expérimental
- ✓ Définir le nombre d'essais à conduire et choisir la matrice d'expérience.





# Plan d'expériences: comment?

---

## Etape 3: Conduite des essais

- ✓ Construire la matrice d'expérience
- ✓ Réaliser les essais et enregistrer les résultats dans un '*cahier d'essais*'
- ✓ Constater les éventuelles dispersions

## Etape 4: Interprétation des résultats

- ✓ Analyser les résultats obtenus
- ✓ Réaliser une synthèse provisoire

# Plan d'expériences: comment?

---

## Etape 5: Exploitation des résultats et validation de l'étude

- ✓ Etablir une forme littérale du modèle de comportement du système;
- ✓ Poursuivre l'analyse des résultats expérimentaux: définir les éventuelles hypothèses simplificatrices et calculer les coefficients du modèle.
- ✓ Définir le modèle du comportement de la réponse et réaliser des simulations *dans l'espace expérimental défini.*
- ✓ Evaluer l'écart entre les prédictions et les points expérimentaux

# Plan d'expériences: comment?

---

## Etape 6: Retour d'expérience...

- ✓ Synthèse finale des résultats expérimentaux
- ✓ Identifier des axes d'amélioration possible du système testé
- ✓ Faciliter la démarche pour de nouvelles applications...

# Plan d'expériences: historique

## Quelques dates marquantes...

1925 : Mr R. Fisher introduit en Angleterre un premier concept de plan d'expériences pour améliorer le rendement de la production dans l'agriculture.

1953 : Mr G. Taguchi simplifie la méthode de Fisher et a permis la première utilisation industrielle des plans d'expériences. Cas de la tuilerie Ina Seito au Japon.

1970 : Les plans d'expériences selon Taguchi arrivent en occident.

1980 : Taguchi introduit la notion de la « Perte Qualité » <sup>1</sup>

1990 : Création de logiciels permettant de faire des plans d'expériences. Ce sont des logiciels de statistiques intégrant des fonctionnalités de PE.

*1. Fonction de perte – mesure des coûts de non-qualité*



# Plan d'expériences: les outils

---

## Choix d'une table d'expérience

Si on a qu'un **seul facteur**, quelque soit la modalité → **plan mono factoriel**;

**2 facteurs** → **plan factoriel complet** ou **fractionnaire** (selon le nombre de niveaux);

**3 ou 4 facteurs** → **plan complet** ou **fractionnaire** (selon le nombre de niveaux);

**5 facteurs et plus** → **plan fractionnaire**;

**Etude précise des interactions** → **plan complet**.

# Plan d'expériences: les outils

## Le plan complet

- on y étudie toutes les combinaisons possibles des niveaux des facteurs. C'est favorable pour étudier des interactions.
- Les plans complets sont théoriquement parfaits mais les délais et les coûts d'expérimentation deviennent prohibitifs dès que l'on dépasse 3 ou 4 facteurs et 2 niveaux.
- nombre de tests = multiplication des nombres de modalités des facteurs;
- Si tous les facteurs ont les mêmes modalités, le plan complet comportant ces **k** facteurs pour lesquels on veut tester les **n** niveaux sera de taille  **$n^k$**

# Plan d'expériences: les outils

## Le plan complet

Si on utilise par exemple un plan complet avec 7 facteurs à 2 niveaux chacun, on devra donc effectuer  $2^7 = 128$  essais. **Impossible de faire autant de tests en industrie !**

N° essai	Facteurs testés							Résultats de l'essai
	A	B	C	D	E	F	G	
1	1	1	1	1	1	1	1	R1
2	1	1	1	1	1	1	2	R2
3	1	1	1	1	1	2	1	R3
4	1	1	1	1	1	2	2	R4
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
127	2	2	2	2	2	2	1	R127
128	2	2	2	2	2	2	2	R128

**Les plans factoriels complets ne sont utilisables que sur des systèmes avec peu de facteurs, ou lorsque chaque essai ne prend pas trop de temps.**

# Plan d'expériences: les outils

---

## Les plans fractionnaires

Dans un plan factoriel complet, certains essais apportent plus d'informations que d'autres. C'est à partir de cette observation qu'ont été mis au point des **plans factoriels fractionnaires** ou **réduits**.

Chaque niveau de chaque facteur est confronté à tous les niveaux des autres facteurs et dans des proportions égales. On traduit cette particularité en disant que le plan est **orthogonal**.

**Toutefois, la mise au point d'une table fractionnaire spécialement adaptée à la réalisation d'une expérimentation donnée, n'est pas à la portée de tous....**



# Plan d'expériences: les outils

---

## La contribution majeure du Dr. Taguchi

- Mise à notre disposition d'une liste de matrices d'expériences fractionnaires standards, qui s'avèrent suffisantes pour résoudre la quasi-totalité des problèmes d'expériences industrielles.
- L'ordre des combinaisons de Taguchi :
  - chacun des essais est élaboré avec une combinaison différente des niveaux des facteurs;
  - Chaque niveau d'un facteur est combiné à chaque niveau des autres facteurs, et ce, en un nombre égal de fois (l'orthogonalité);
- Les combinaisons établies sont à tester selon les niveaux affectés aux différents facteurs.

**Actuellement, il est possible de se procurer des tables universelles de Taguchi dans des ouvrages traitant les problèmes de PE et sur de nombreux sites internet.**

# Plan d'expériences: les outils

## Désignation des tables de Taguchi

L8 ( $2^7$ ) : signifie que dans cette table, on étudie 7 facteurs à 2 niveaux et qu'il faut réaliser 8 essais. Cette table est extraite du plan complet  $2^7$  qui comporte 128 essais.

L18 ( $2^1 \times 3^7$ ) : signifie que l'on étudie 1 facteur à 2 niveaux et 7 facteurs à 3 niveaux et qu'il faut réaliser 18 essais. Cette table est donc extraite du plan complet  $2 \times 3^7 = 4374$  essais.

Ci-contre, un modèle de la table L9 pour étudier les variations de 4 facteurs à 3 niveaux, en réalisant 9 essais au lieu de 81 en plan complet.

N° test	Facteurs				Réponses
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y$
1	1	1	1	1	$y_1$
2	1	2	2	2	$y_2$
3	1	3	3	3	$y_3$
4	2	1	2	3	$y_4$
5	2	2	3	1	$y_5$
6	2	3	1	2	$y_6$
7	3	1	3	2	$y_7$
8	3	2	1	3	$y_8$
9	3	3	2	1	$y_9$

# Plan d'expériences: les outils

---

## Notations des niveaux dans les tables

- **Notations réelles ou entières** : correspondent aux grandeurs physiques des variables via une échelle ou une normalisation préétablie.
- **Notations à niveaux croissants**: représentation des niveaux respectivement par des valeurs croissantes 1,2,3... Très prisées dans les plans fractionnaires mais difficile à mettre en œuvre pour étudier les interactions car souvent, en plans fractionnaires, les facteurs sont multimodaux et leur nombre est  $> 3$ .
- **Notations de Yates (niveaux codés)**: Les niveaux sont représentés par des signes  $+(1)$  et  $-(1)$  symbolisant respectivement le niveau le plus élevé et le plus bas d'un facteur. Très pratiques pour étudier les facteurs continus, mais aussi pour étudier des interactions car la modalité des facteurs est limitée à 2.

# Plan d'expériences: les outils

## Notations des niveaux dans les tables

### Niveaux codés – variables centrées réduites

La formule permettant le passage des variables réelles en variables codées est:

$$a = \frac{A - A_0}{Pas}$$

**a: la valeur centrée réduite**

A: la valeur réelle

$A_0$ : la valeur centrale

Pas: la variation entre la position moyenne et une extrémité du domaine (niveau haut ou niveau bas)

$$A_0 = \frac{A_{+1} + A_{-1}}{2}$$

est la **valeur centrale** entre le niveau haut et le niveau bas, c'est-à-dire la moitié de la somme du niveau haut  $A_{+1}$  et du niveau bas  $A_{-1}$

$$Pas = \frac{A_{+1} - A_{-1}}{2}$$

est la **variation entre la valeur centrale et une extrémité** du domaine (niveau haut ou niveau bas), c'est-à-dire la moitié de la différence entre les 2 extrémités

# Plan d'expériences: les outils

---

## Plans à variables codées: les atouts

- Pouvoir comparer les effets des grandeurs totalement différentes, car toutes les variables se transforment en 'variables centrées réduites'.
- Les variables codées résultent du rapport de deux grandeurs de même unité physique: elles sont donc sans dimension. La disparition des unités naturelles associée au fait que tous les facteurs ont le même domaine de variation (deux unités codées) permet la comparaison directe des effets des facteurs entre eux.
- L'intérêt des unités codées est de pouvoir présenter les plans d'expériences de la même manière, quels que soient les domaines d'étude retenus et quels que soient les facteurs.

**=> La théorie des plans d'expériences présente ainsi une grande généralité.**

# Plan d'expériences: les outils

## Modèle de comportement (fonction objective): extraction

- Calcul des effets moyens individuels sans interaction:

N° essai	$X_1$	$X_2$	Réponse
1	-1	-1	$Y_1$
2	+1	-1	$Y_2$
3	-1	+1	$Y_3$
4	+1	+1	$Y_4$



$$\begin{aligned}y_1 &= a_0 + a_1 X_{1,-1} + a_2 X_{2,-1} \\y_2 &= a_0 + a_1 X_{1,+1} + a_2 X_{2,-1} \\y_3 &= a_0 + a_1 X_{1,-1} + a_2 X_{2,+1} \\y_4 &= a_0 + a_1 X_{1,+1} + a_2 X_{2,+1}\end{aligned}$$



$$a_0 = \frac{1}{4}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \bar{Y}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4) : \text{effet moyen de } X_1$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4) : \text{effet moyen de } X_2$$

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \quad (X_1 \text{ et } X_2 \in [-1; +1])$$

# Plan d'expériences: les outils

## Modèle de comportement (fonction objective): extraction

- Calcul des effets moyens individuels avec interaction:

N° essai	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	Réponse
1	-1	-1	+1	Y <sub>1</sub>
2	+1	-1	-1	Y <sub>2</sub>
3	-1	+1	-1	Y <sub>3</sub>
4	+1	+1	+1	Y <sub>4</sub>



$$y_1 = a_0 + a_1 X_{1,-1} + a_2 X_{2,-1} + a_{12} X_{1,-1} X_{2,-1}$$

$$y_2 = a_0 + a_1 X_{1,+1} + a_2 X_{2,-1} + a_{12} X_{1,+1} X_{2,-1}$$

$$y_3 = a_0 + a_1 X_{1,-1} + a_2 X_{2,+1} + a_{12} X_{1,-1} X_{2,+1}$$

$$y_4 = a_0 + a_1 X_{1,+1} + a_2 X_{2,+1} + a_{12} X_{1,+1} X_{2,+1}$$



$$a_0 = \frac{1}{4}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \bar{Y}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4) : \text{effet moyen de } X_1$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4) : \text{effet moyen de } X_2$$

$$a_{12} = \frac{1}{4}(Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4) : \text{effet moyen de l'interaction entre } X_1 \text{ et } X_2$$

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1 X_2 \quad (X_1 \text{ et } X_2 \in [-1; +1])$$

# Plan d'expériences: les outils

## Modèle de comportement (fonction objective): généralisation

- **Formulation** (limitée aux interactions doubles entre  $n$  facteurs ):

$$y \cong a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, (j \neq i)}^n a_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

(Avec  $\varepsilon$  : résidu = manque d'ajustement du modèle + erreur expérimentale)

- **Calcul de la moyenne générale :**

Soit  $y_k$  une réponse de la  $k^{\text{ième}}$  expérience,  $\bar{Y} = a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k$ , où  $N$  correspond au nombre d'expériences

- **Calcul d'un demi - effet :** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux facteurs à 2 niveaux  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha = \text{niveau haut}$  et  $\beta = \text{niveau bas}$ )
  - Effet de  $X_1$  au niveau  $\alpha$  :  $a_{x1,\alpha} = (\text{moyenne des réponses pour } X_1 = \alpha) - \bar{Y}$
  - Effet d'interaction entre  $X_1$  et  $X_2$  au niveau  $\alpha$  :  $a_{x1,\alpha x2,\alpha} = (\text{moyenne des réponses pour } X_1 = \alpha \text{ et } X_2 = \alpha) - a_{x1,\alpha} - a_{x2,\alpha} - \bar{Y}$



# Plan d'expériences: les outils

## Modèle de comportement : Quelques propriétés importantes

1. La réponse est non nulle lorsque tous les facteurs sont tous nuls (c'est le premier coefficient  $a_0$  = la *moyenne générale*  $\bar{Y}$ )
2. La réponse dépend de la *somme des effets moyens des facteurs, de manière indépendante* (coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ).
3. On peut retrouver par les calculs que l'effet moyen d'un facteur est égal à :
  - *son demi-effet au niveau haut*
  - *la valeur absolue de son demi-effet au niveau bas*
4. La réponse dépend aussi *des interactions entre les facteurs* (coefficients  $a_{ij}$ ). On retrouve aussi la propriété n°3 sur les effets des interactions.
5. Les facteurs sont codés, donc à valeurs dans  $[-1; +1]$

# Plan d'expériences: les outils -Illustration

## Exemple d'un plan complet $2^3$ avec étude des interactions

Essai	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$	$X_1X_2X_3$	Y
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	10
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	20
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	200
4	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	140
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	60
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	100
7	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	205
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	172
	$a_1=-5,3$	$a_2=65,9$	$a_3=20,8$	$a_{12}=-17,8$	$a_{13}=7,1$	$a_{23}=-11,7$	$a_{123}=-0,375$	$a_0 = \bar{Y} = 113,3$

### Niveaux des interactions:

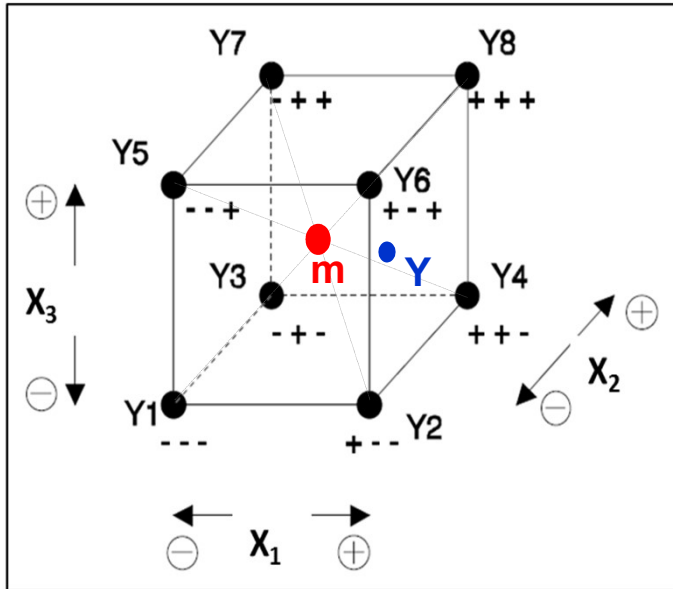
- On reporte d'abord les signes des niveaux des facteurs dans la matrice d'expériences.
- Les signes des interactions obéissent à la règle des signes du produit des niveaux de facteurs.

L'effet moyen  $a_1$  du facteur  $X_1$ , par exemple, est obtenu par:

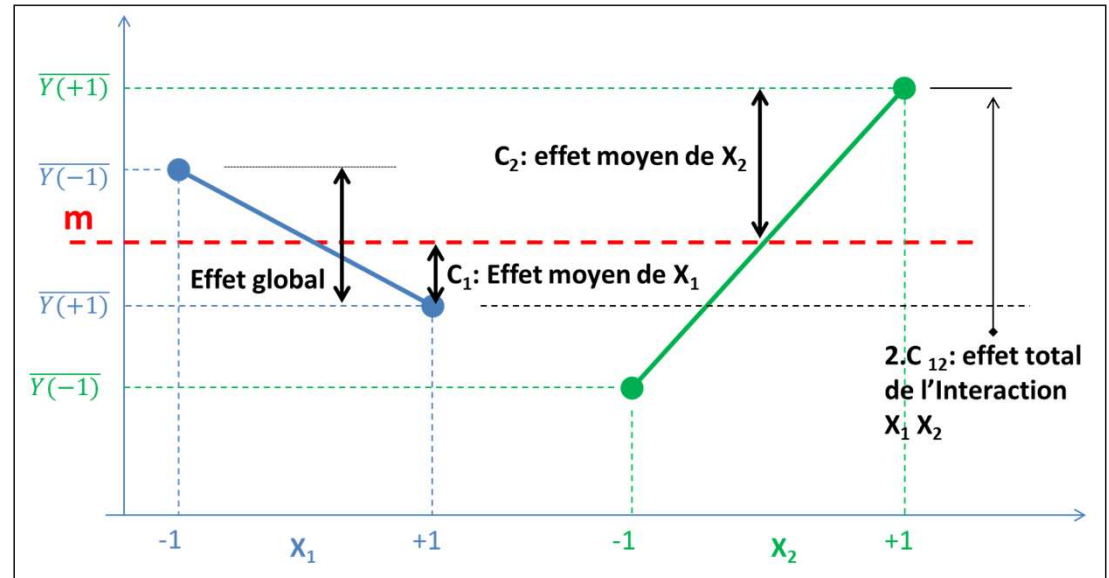
- $A_1 = \frac{1}{8}(-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 + Y_6 - Y_7 + Y_8) = -5,3$
- $A_1 = \frac{1}{4}(Y_2 + Y_4 + Y_6 + Y_8) - a_0 = -5,3$  (qui est aussi le demi-effet de  $X_1$  au niveau haut)

# Plan d'expériences: les outils - Illustration

## Signification des termes et coefficients du modèle



Domaine expérimental du plan 2<sup>3</sup>

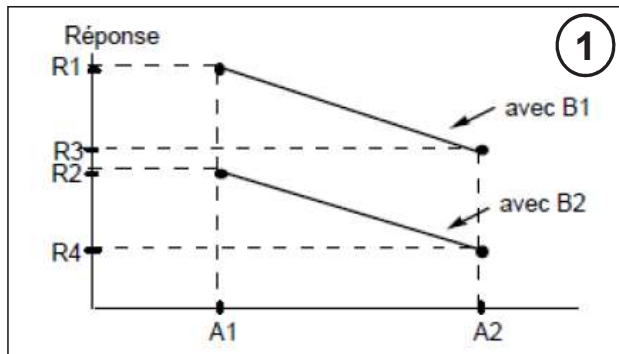


Graphique des effets et des interactions

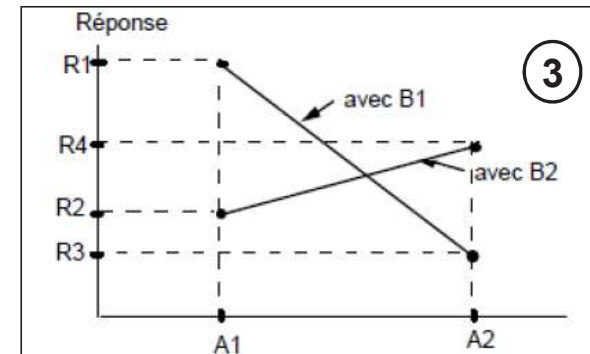
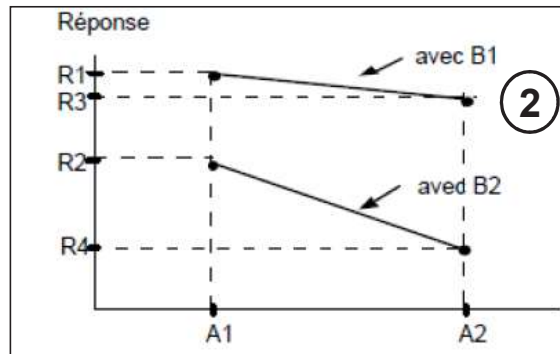
# Plan d'expériences: les outils

## Graphe des effets – Interprétation

Les graphiques ci-dessous montrent des effets de 2 facteurs B1 et B2, ayant chacun deux niveaux:



**Graphique 1:** On peut observer que l'effet du facteur B1 ne dépend pas des niveaux de B2 et vice-versa. Cela signifie qu'il n'y a aucune interaction entre les facteurs B1 et B2, aux niveaux testés. On dit alors que **les facteurs B1 et B2 sont indépendants**.

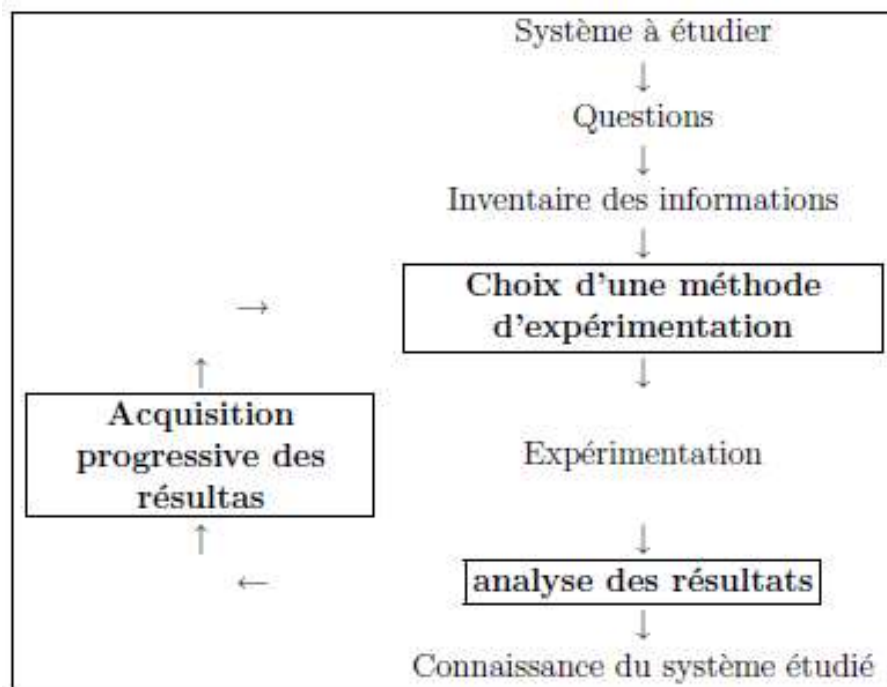


En observant **les graphiques 2 et 3**, on remarque immédiatement que les droites traduisant l'effet des facteurs ne sont pas parallèles. L'effet de B1 change suivant que le facteur B2 est au niveau A1 ou A2. Cela signifie qu'une interaction entre les facteurs B1 et B2 s'est manifestée. On dit alors que les facteurs **B1 et B2 ne sont pas indépendants**.

On peut noter dans le **graphique 3** que l'effet de B1 s'inverse suivant le niveau de B2, cela signifie que **l'interaction est particulièrement forte**.

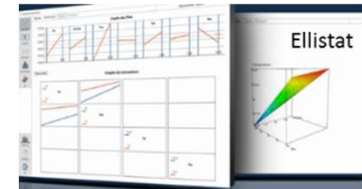
# Plan d'expériences: finalités

## En résumé...



- ❑ Résoudre des problèmes de qualité.
- ❑ Optimiser des processus.
- ❑ Concevoir des nouveaux produits ou innover (Design For X)

# Plan d'expériences: quelques outils informatiques



## Fonctionnalités DOE (design of experiment):

- Assistent l'expérimentateur dans le dépouillement des plans volumineux.
- Permettent d'introduire la notion du *ratio signal/bruit*: un des apports de Taguchi dans la qualité des plans d'expériences. Les facteurs incontrôlables (environnement ext.,...) sont classés parmi les facteurs de bruits, au regard des facteurs à étudier pour atteindre l'objectif recherché: le signal.
- Utilisation et interprétation délicates car combinées à plusieurs fonctionnalités de statistiques pures.

# Plan d'expériences: limites

---

- Le choix des facteurs peut être très délicat dans certains cas. Le résultat final d'un PE peut avoir des conséquences catastrophiques pour le système étudié si jamais un facteur oublié se trouve être un facteur d'influence.
- Domaine d'étude fini et précis. Des variations accidentelles des facteurs dans un domaine réel d'utilisation du système peuvent compromettre les connaissances obtenues du système étudié.
- La démarche n'apporte pas d'informations pertinentes si on connaît d'avance que les réponses seront trop dispersées (système instable).

*Pour aller plus loin, cf. tutoriel des PE (ressources PDCA3)*

HESAM  
UNIVERSITÉ



CAMPUS  
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE FORMATION PROFESSIONNELLE