PROJET 7 FIA
SAM MATHEMATIQUES

TRANSFORMEE DE LAPLACE

SOMMAIRE

Transformée de Laplace

- Définition

Soit $f(t)$ une fonction réelle définie $\forall\, t > 0$ (fonction causale) et soit $p \in \mathbb{C}$.
La **transformée de Laplace** de f, notée $\mathcal{L}[f(t)]$ est définie par :

$$\boldsymbol{F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}\,dt}$$

(à condition que l'intégrale soit définie)

L'ensemble des p tels que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}\,dt$ converge est le **domaine de définition** de la transformée de Laplace de f.

On peut définir **la transformée de Laplace inverse** : $\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t)$

Remarque : *F(p) est appelée **image** de f(t) et f(t) est appelé **original** de F(p).*

Transformée de Laplace

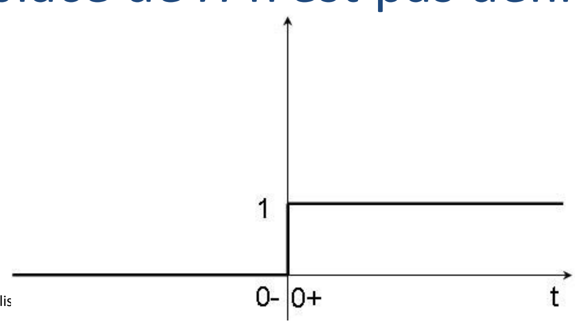
- Exemples

❑ Soit $H(t)$ la fonction d'Heaviside définie par $\begin{cases} H(t) = 0 \; si \; t < 0 \\ H(t) = 1 \; si \; t \geq 0 \end{cases}$

La **transformée de Laplace** de H est définie par :

$$\boldsymbol{H(p)} = \int_0^{+\infty} H(t)e^{-tp}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tp}\,dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-tp}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}(0-1) = \boldsymbol{\frac{1}{p}}$$

La transformée de Laplace de H n'est pas définie pour $p = 0$



Transformée de Laplace

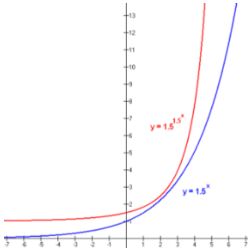
- Exemples

❑ Soit f(t) la fonction définie par $f(t) = H(t)e^{at}, a \in \mathbb{C}$.

La **transformée de Laplace** de f est définie par :

$$\boldsymbol{F(p)} = \int_0^{+\infty} H(t)e^{(a-p)t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt = \left[\frac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-p}(0-1) = \boldsymbol{\frac{1}{p-a}}$$



La transformée de Laplace de f n'est pas définie si $p = a$

Transformée de Laplace

- Propriétés

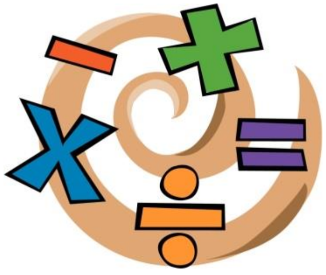
❑ Opérations algébriques

Soit *f*(*t*) et *g(t)* deux fonctions réelles transformables au sens de Laplace. On note *F(p*) et *G(p)* les transformées de Laplace respectives de *f* et *g*.

Linéarité : $\forall\, a, b\ \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$

Changement d'échelle : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}\left[\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = F(ap)$

Translation : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p-a)$



Transformée de Laplace

- Propriétés

Opérations analytiques

Soit $f(t)$ une fonction réelle transformable au sens de Laplace. On note $F(p)$ sa transformée.

Transformée de la dérivée : $\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$

Transformée de l'intégrale : $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{p}F(p)$

Dérivée de la transformée : $F'(p) = -\mathcal{L}[tf(t)]$

Intégrale de la transformée : $\int_p^{+\infty} F(u)du = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$

Transformée de Laplace

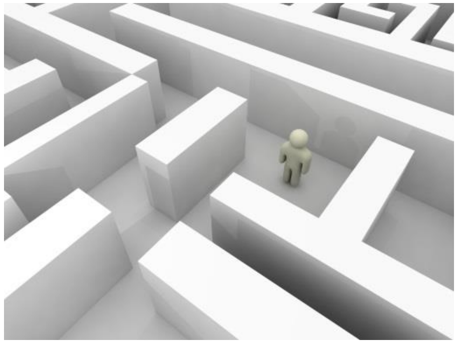
- Théorèmes

Soit $f(t)$ une fonction réelle transformable au sens de Laplace.

On note $F(p)$ sa transformée.

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$$



Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to +0} pF(p)$$

Transformée de Laplace

- Transformées usuelles

f(t)	F(p)
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^n}$

Transformée de Laplace

- Transformées usuelles

f(t)	F(p)
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}\ , \quad a \neq b$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}\ , \quad a \neq b$
$\frac{1}{a}\sin(at)$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\frac{1}{a}\mathrm{sh}(at)$	$\frac{1}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}\ (at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^n}$

cesi

Transformée de Laplace

- Calcul des originaux

Soit $f(t)$ une fonction réelle transformable au sens de Laplace.

On note $F(p)$ sa transformée.

f(t) est appelé original de F(p) et, si l'on suppose f(t) continue sur $[0;\ +\infty[$, cet original est unique.

De très nombreuses transformées de Laplace sont des fractions rationnelles.

La décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est donc une méthode très importante pour calculer l'original d'une transformée de Laplace.

Transformée de Laplace

- Décomposition en éléments simples

Théorème : Toute fraction rationnelle irréductible $R(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ admet une unique décomposition en éléments simples.

Si $D(p)$ admet la factorisation :

$$D(p) = (p - a_1)^{n_1} \ldots (p - a_r)^{n_r}\, (p^2 + b_1 p + c_1)^{m_1} \ldots (p^2 + b_s p + c_s)^{m_s},$$

où les polynômes $(p^2 + b_i p + c_i)^{m_i}$ n'ont pas de racines réelles (Δ<0)

alors la décomposition de R(p) est de la forme :

$$R(p) = \sum_{k=0}^{n_1} \frac{A_{1k}}{(p - a_1)^k} + \cdots + \sum_{k=0}^{n_r} \frac{A_{rk}}{(p - a_r)^k} + \sum_{k=0}^{m_1} \frac{B_{1k} p + C_{1k}}{(p^2 + b_1 p + c_1)^k} + \cdots + \sum_{k=0}^{m_s} \frac{B_{sk} p + C_{sk}}{(p^2 + b_1 p + c_1)^k}$$

Les éléments simples de cette décomposition sont des transformées usuelles , ou des transformées obtenues à partir des transformées usuelles à l'aide des propriétés des transformées de Laplace .

Transformée de Laplace

- Décomposition en éléments simples

Exemple 1 : Décomposition en éléments simples de première espèce

$$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)} = \frac{A}{(p-a)^2} + \frac{B}{p-a} + \frac{C}{p-b}$$

Pour calculer *A* , on multiplie l'équation par *(p-a)²* puis on pose *p = a* . On trouve :

$$\left[\frac{1}{p-b}\right]_{p=a} = A = \frac{1}{a-b}$$

Pour calculer *C* , on multiplie l'équation par *(p-b)* puis on pose *p = b* . On trouve :

$$\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right]_{p=b} = C = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Pour calculer *B* , on multiplie l'équation par *p* puis on fait tendre *p* vers l'infini. On trouve *B = - C*.

Les originaux des éléments simples peuvent alors être trouvés directement à partir des tables de Transformées de Laplace usuelles.

Transformée de Laplace

- Décomposition en éléments simples

Exemple : Décomposition en éléments simples de première et deuxième espèces

Décomposer en éléments simples la fraction $F(p) = \frac{3p^2-5p+3}{(p-2)(p^2-2p+5)}$ puis calculer l'original de F(p).

Le polynôme $(p^2 - 2p + 5)$ n'admet pas de racines réelles (*Δ = -16 < 0*).

La décomposition en éléments simples de *F(p)* est donc de la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2-2p+5}$$

Pour calculer *A* , on multiplie l'équation par *(p-2)* puis on pose *p = 2* . On trouve :

$$\left[\frac{3p^2-5p+3}{p^2-2p+5}\right]_{p=2} = A = 1$$

Transformée de Laplace

- Décomposition en éléments simples

Pour calculer *B* et *C* , on multiplie l'équation par *(p^2-2p+5) (p-2)* puis on identifie terme à terme selon les degrés de *p.* On trouve :

$$3p^2 - 5p + 3 = A(p^2 - 2p + 5) + (Bp + C)(p - 2)$$
$$2p^2 - 3p - 2 = Bp^2 + (C - 2B)p - 2C$$

Soit $\begin{cases} B = 2 \\ C - 2B = -3 \\ -2C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$

Finalement , $F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2p+1}{p^2-2p+5}$

L'original de F(p) est la somme des originaux de chaque élément simple.

Transformée de Laplace

- Décomposition en éléments simples

L'original de $\frac{1}{p-2}$ est e^{2t}

Puis, on peut écrire $\frac{2p+1}{p^2-2p+5} = \frac{2p+1}{(p-1)^2+4} = \frac{2p+1}{(p-1)^2+2^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + 3\frac{1}{(p-1)^2+2^2}$.

L'original de $\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}$ est $e^t cos(2t)$.

L'original de $\frac{1}{(p-1)^2+2^2}$ est $\frac{1}{2}e^t sin\,(2t)$.

L'original de F(p) est donc $\boldsymbol{f(t) = e^{2t} + e^t[2cos(2t) + \frac{3}{2}sin\,(2t)]}$

QUESTIONS