Ρομποτική ΙΙ

Έτος 2023-2024

1η Σειρά Ασκήσεων

Χαρίλαος Κουκουλάρης
03118137

2023-2024

Άσκηση 1.1

Ερώτημα (α)

1η Υπό-εργασία

Η πρώτη υπό-εργασία απαιτεί το τελικό στοιχείο δράσης να παραμένει στο σημείο $p_A = (p_x, p_y)$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{p}_E(t) = \boldsymbol{p}_A \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 + lc_2 + (q_4 + l)c_{23} \\ h + ls_2 + (q_4 + l)s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

και

$$\dot{\boldsymbol{p}}_E(t) = \dot{\boldsymbol{p}}_A \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -ls_2 - (q_4 + l)s_{23} & -(q_4 + l)s_{23} & c_{23} \\ 0 & lc_2 + (q_4 + l)c_{23} & (q_4 + l)c_{23} & s_{23} \end{bmatrix}}_{J_1} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\dot{\boldsymbol{q}} = J_1^+ \dot{\boldsymbol{p}} + (I_n - J_1^+ J_1)\dot{\boldsymbol{q}}_r = (I_n - J_1^+ J_1)\dot{\boldsymbol{q}}_r$$

2η Υπό-εργασία

Επιπλέον, απαιτείται να διατηρείται μια κατακόρυφη απόσταση d_0 μεταξύ της άρθρωσης q_3 και του κινούμενου σφαιρικού αντικειμένου. Για την επίτευξη αυτής της υπό-εργασίας, επιλέγεται το ακόλουθο κριτήριο:

$$V(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} K_c (d(\boldsymbol{q}) - d_0)^2$$

όπου

$$d(\boldsymbol{q}) = y_{obj} - (h + ls_2) \Rightarrow \nabla_{\boldsymbol{q}} d(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -lc_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι ταχύτητες των αρθρώσεων επιλέγονται ώστε να οδηγήσουν το κριτήριο που επιλέχθηκε προς την κατεύθυνση μέγιστης μείωσής του.

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{(2)} = -\nabla_{\boldsymbol{q}} V(\boldsymbol{q}) = -K_c (d(\boldsymbol{q}) - d_0) \nabla_{\boldsymbol{q}} d(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_c (d(\boldsymbol{q}) - d_0) lc_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συνολική Εργασία

Η δεύτερη υπό-εργασία δεν πρέπει να αλλοιώνει την πρώτη, οπότε οι ταχύτητες των αρθρώσεων μεταφέρονται στο μηδενοχώρο του ιακωβιανού πίνακα της πρώτης υπό-εργασίας μέσω πολλαπλασιασμού με τον όρο $(I_n - J_1^+ J_1)$. Τελικά, οι ταχύτητες που απαιτούνται στις αρθρώσεις για τη συνολική εργασία του ρομποτικού μηχανισμού είναι:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = (I_n - J_1^+ J_1) \begin{bmatrix} 0 \\ K_c(d(\boldsymbol{q}) - d_0) l c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ερώτημα (β)

Στην περίπτωση των ακόλουθων τιμών για το μοντέλο του ρομποτικού μηχανισμού: $h = 2$, $l = 1$, $d_0 = 6$, $p_x = 15$ και $p_y = 2$ και θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή t_k ισχύει: $q_1(t_k) = 10$, $q_2(t_k) = q_3(t_k) = 0$, $q_4(t_k) = 3$, και $d(t_k) = (d_0 - 2) = 4$. Ψάχνουμε τις τιμές των στιγμιαίων ταχυτήτων των αρθρώσεων.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad J_1^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{41} \\ 0 & \frac{5}{41} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_n - J_1^+ J_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{16}{41} & -\frac{20}{41} & 0 \\ 0 & -\frac{20}{41} & \frac{25}{41} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), προκύπτουν οι στιγμιαίες ταχύτητες των αρθρώσεων του μηχανισμού συναρτήσει της παραμέτρου K_c.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{16}{41} & -\frac{20}{41} & 0 \\ 0 & -\frac{20}{41} & \frac{25}{41} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4K_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64}{41} K_c \\ -\frac{80}{41} K_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.2

Ερώτημα (α)

Οι δυναμικές εξισώσεις του ρομποτικού μοντέλου είναι:

$$\begin{gathered}\tau_1 = (I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + (2m_2 q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + (m_1 l_1 + m_2 q_2) g c_1 \\ \tau_2 = m_2\ddot{q}_2 - (m_2 q_2)\dot{q}_1^2 + m_2 g s_1\end{gathered}$$

και γραμμένες σε ισοδύναμη μορφή

$$\tau_1 = m_2(\ddot{q}_1 q_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 q_2 + q_2 g c_1) + (I_1 + m_1 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_1 l_1 g c_1$$

$$\tau_2 = m_2(\ddot{q}_2 \text{-} \dot{q}_1^2 q_2 + g s_1)$$

$$\begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 q_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 q_2 + q_2 g c_1 & \ddot{q}_1 & g c_1 \\ \ddot{q}_2 \text{-} \dot{q}_1^2 q_2 + g s_1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})} \underbrace{\begin{bmatrix} m_2 \\ I_1 + m_1 l_1^2 \\ m_1 l_1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\phi}}$$

Δηλαδή

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix}\ddot{q}_1 q_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 q_2 + q_2 g c_1 & \ddot{q}_1 & g c_1 \\ \ddot{q}_2 \text{-} \dot{q}_1^2 q_2 + g s_1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

για το ακόλουθο διάνυσμα παραμέτρων

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} m_2 \\ I_1 + m_1 l_1^2 \\ m_1 l_1\end{bmatrix}$$

Ερώτημα (β)

Το δυναμικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή είναι γνωστό.

$$\tau_1 = (I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + (2m_2 q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + (m_1 l_1 + m_2 q_2) g c_1$$
$$\tau_2 = m_2\ddot{q}_2 - (m_2 q_2)\dot{q}_1^2 + m_2 g s_1$$

Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{M(\boldsymbol{q})} \begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 l_1 + m_2 q_2) g c_1 \\ \text{-}m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g s_1 \end{bmatrix}}_{h(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}$$

Επιθυμητή Μηχανική Εμπέδηση Ρομποτικού Χειριστή στο Χώρο Εργασίας

$$M_d(\ddot{p}_d\text{-}\ddot{p}) + B_d(\dot{p}_d\text{-}\dot{p}) + K_d(p_d - p) = F_d - F_e$$

όπου

$$M_d = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, η επιθυμητή τροχιά εκφρασμένη στο τοπικό πλαίσιο αναφοράς της εργασίας θα δίνεται ως:

$$\boldsymbol{p}_d^{(C)}(t) = \begin{bmatrix} f_d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι μετασχηματισμοί που οδηγούν μεταξύ του τοπικού πλαισίου αναφοράς της εργασίας και του γενικού πλαισίου αναφοράς δίνονται παρακάτω.

$$R_C^O = \begin{bmatrix} \text{-}c_{\varphi_e} & s_{\varphi_e} & 0 \\ \text{-}s_{\varphi_e} & \text{-}c_{\varphi_e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_O^C = \begin{bmatrix} \text{-}c_{\varphi_e} & \text{-}s_{\varphi_e} & 0 \\ s_{\varphi_e} & \text{-}c_{\varphi_e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά η επιθυμητή τροχιά μπορεί να γραφτεί ως:

$$\boldsymbol{p}_d(t) = R_C^O \cdot \boldsymbol{p}_d^{(C)}(t) \begin{bmatrix} \text{-}c_{\varphi_e} & s_{\varphi_e} & 0 \\ \text{-}s_{\varphi_e} & \text{-}c_{\varphi_e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}f_d(t)c_{\varphi_e} \\ \text{-}f_d(t)s_{\varphi_e} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ακόμη, υπολογίζεται το ο ιακωβιανός πίνακας του βραχίονα.

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} q_2 s_1 \\ \text{-}q_2 c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_2 c_1 & s_1 \\ q_2 s_1 & \text{-}c_1 \end{bmatrix}}_{J(\boldsymbol{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Δεδομένων όλων αυτών, το δυναμικό μοντέλο του συστήματος στο χώρο εργασίας είναι το ακόλουθο

$$M^*(\boldsymbol{q})\ddot{p} + h^*(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = F_a + F_e$$

όπου,

$$M^* = (JM^{-1}J^T)^{-1}, \quad h^* = M^*JM^{-1}h$$

και

$$F_a = M^*(\boldsymbol{q})u + h^*(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - F_e$$

με σήμα ελέγχου

$$u = \ddot{p} = \ddot{p}_d + M_d^{-1}B_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + M_d^{-1}K_d(p_d - p) - M_d^{-1}(F_d - F_e)$$

Τελικά στο χώρο εργασίας ισχύει

$$F_a = M^*\ddot{p}_d + h^* - F_e + \underbrace{M^*M_d^{-1}B_d}_{K_v}\underbrace{(\dot{q}_d - \dot{q})}_{\dot{e}_q} + \underbrace{M^*M_d^{-1}K_d}_{K_p}\underbrace{(p_d - p)}_{e_q} - \underbrace{M^*M_d^{-1}}_{K_f}\underbrace{(F_d - F_e)}_{e_f}$$

Και στο χώρο των αρθρώσεων

$$\tau = J^T F_a = J^T(M^*\ddot{p}_d + h^* - F_e + K_v\dot{e}_q + K_p e_q - K_f e_f)$$

Άσκηση 1.3

Ερώτημα (α)

Οι επαφές C_1 και C_2 είναι επαφές σημείου χωρίς τριβή ενώ η επαφή C_3 είναι επαφή σημείου με τριβή. Οπότε, προκύπτουν οι διανυσματικές βάσεις δυνάμεων/ροπών επαφής:

$$B_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι αποστάσεις των επαφών από το γενικό πλαίσιο αναφοράς του αντικειμένου δίνονται παρακάτω μαζί με τους πίνακες των εξωτερικών γινομένων που τους αντιστοιχούν:

$$\vec{r}_{C_1}^{\,(O)} = \begin{bmatrix} r_2 \\ \frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\vec{r}_{C_1}^{\,(O)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -r_2 \\ -\frac{d}{2} & r_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{r}_{C_2}^{\,(O)} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ \frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\vec{r}_{C_2}^{\,(O)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & r_1 \\ -\frac{d}{2} & -r_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{r}_{C_3}^{\,(O)} = \begin{bmatrix} h \\ -\frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\vec{r}_{C_3}^{\,(O)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -h \\ \frac{d}{2} & h & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Επιπλέον, τα τοπικά πλαίσια αναφοράς των επαφών, εκφρασμένα στο γενικό πλαίσιο αναφοράς του αντικειμένου, είναι τα ακόλουθα:

$$R_{C_1}^{O} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{C_2}^{O} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{C_3}^{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$G_i = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{C_i}^O & 0_{3\times 3} \\ [\vec{r}_{C_i}^{\,(O)}\times]R_{C_i}^O & R_{C_i}^O \end{bmatrix}}_{W_{C_i}} \cdot B_{C_i}$$

Υπολογίζονται οι στήλες του πίνακα της ρομποτικής λαβής.

$$G_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_2 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & r_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & 1 & 0 \\ \frac{d}{2} & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -h \\ \frac{d}{2} & h & 0 \end{bmatrix}$$

Τελικά ο πίνακας της ρομποτικής λαβής είναι:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ -r_2 & r_1 & \frac{d}{2} & h & 0 \end{bmatrix}$$

Κώνοι Τριβής Επαφών

Ο κώνος τριβής της επαφής αποτελεί το σύνολο των δυνάμεων/ροπών οι οποίες μπορούν να ασκηθούν στο αντικείμενο μέσω της επαφής. Από αυτό συνεπάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$FC_{C_i} = \left\{ \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} \in R^3 : f_y \geq 0 \ and \ f_x = 0 \ and \ n_z = 0 \right\}, \quad i \in \{1, 2\}$$

$$FC_{C_3} = \left\{ \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} \in R^3 : f_y \geq 0 \ and \ |f_x| \leq \mu f_y \ and \ n_z = 0 \right\}$$

Ο συνολικός κώνος τριβής του διανύσματος δυνάμεων/ροπών επαφής είναι:

$$FC = \left\{ f_C \in R^4 : f_1 \geq 0 \ and \ f_2 \geq 0 \ and \ f_4 \geq 0 \ and \ |f_3| \leq \mu f_4 \right\}$$

Ερώτημα (β)

Η σημειακή επαφή με τριβή C_3 μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο σημειακών επαφών χωρίς τριβή (C_3^- και C_3^+) και με τοπικά πλαίσια αναφοράς που σχηματίζουν γωνίες ϑ και -ϑ με το πλαίσιο αναφοράς της επαφής C_3.

$$R_{C_1}^O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{C_2}^O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{C_3^-}^O = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{C_3^+}^O = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι επαφές είναι σημειακές χωρίς τριβή.

$$B_{C_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3^-, 3^+$$

Επιπλέον, καθώς οι αποστάσεις των σημείων επαφής δεν μεταβάλλονται, συνεχίζουν να ισχύουν οι σχέσεις (1-3) που βρέθηκαν στο ερώτημα (α). Έτσι, υπολογίζονται εκ νέου οι στήλες του πίνακα ρομποτικής λαβής G και στη συνέχεια ο ίδιος ο πίνακας.

$$G_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_2 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & r_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

$$G_3^- = \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & -h & s_\theta & c_\theta & 0 \\ \frac{d}{2}c_\theta + hs_\theta & hc_\theta - \frac{d}{2}s_\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_3^-}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_3^-}} = \begin{bmatrix} -s_\theta \\ c_\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hc_\theta - \frac{d}{2}s_\theta \end{bmatrix}$$

$$G_3^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{2} & c_\theta & s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & -h & -s_\theta & c_\theta & 0 \\ \frac{d}{2}c_\theta - hs_\theta & hc_\theta + \frac{d}{2}s_\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{W_{C_3^+}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_3^+}} = \begin{bmatrix} s_\theta \\ c_\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ hc_\theta + \frac{d}{2}s_\theta \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_\theta & s_\theta \\ -1 & -1 & c_\theta & c_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & r_1 & hc_\theta - \frac{d}{2}s_\theta & hc_\theta + \frac{d}{2}s_\theta \end{bmatrix}$$

Δεδομένου του οτι το πρόβλημα που εξετάζουμε βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο επίπεδο x-y, μπορεί να αγνοηθεί η τελευταία στήλη του πίνακα ρομποτικής λαβής, η οποία αντιστοιχεί σε δύναμη κατά τον άξονα z στην επαφή C_3, όπως και οι γραμμές 3 και 4, οι οποίες εκφράζουν την περιστροφική κίνηση του αντικειμένου περί τους άξονες x και y αντίστοιχα.

$$G_{2\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{-}s_\theta & s_\theta \\ \text{-}1 & \text{-}1 & c_\theta & c_\theta \\ \text{-}r_2 & r_1 & hc_\theta\text{-}\frac{d}{2}s_\theta & hc_\theta + \frac{d}{2}s_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{2} & h & \text{-}1 \end{bmatrix} G_{2\Delta} = \begin{bmatrix} r_2\text{-}h & \text{-}r_1\text{-}h & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη κυρτότητας θα πρέπει να μην υπάρχει $v^T \in R^4$ με $v \neq 0 \Rightarrow v \cdot G_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, 3, 4$. Επομένως,

$$(r_2 - h)(-r_1 - h) < 0$$

Δεδομένου οτι

$$r_2 = r_1 = r$$

θα πρέπει

$$\text{-}(r - h)(r + h) < 0 \Rightarrow \text{-}(r^2 - h^2) < 0 \Rightarrow h^2 < r^2 \Rightarrow h < r$$

Δηλαδή μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η λαβή κλειστή ως προς δύναμη είναι να ισχύει $h < r$

Ερώτημα (γ)

Το πλαίσιο αναφοράς της ρομποτικής λαβής σε σχέση με το γενικό πλαίσιο αναφοράς του αντικειμένου δίνεται από τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$R_E^O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_O^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ακολουθούν οι μετασχηματισμοί οι οποίοι εκφράζουν το πλαίσιο της ρομποτικής λαβής στα τοπικά πλαίσια αναφοράς των επαφών των τριών δακτύλων.

$$R_E^{C_1} = \begin{bmatrix} \text{-}1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_E^{C_2} = \begin{bmatrix} \text{-}1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_E^{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση των ιακωβιανών πινάκων των ρομποτικών μηχανισμών των δακτύλων, πρώτα εκφράζεται η θέση του τελικού στοιχείου δράσης του κάθε δακτύλου ως προς το πλαίσιο αναφοράς της λαβής, ώστε στη συνέχεια να μπορεί να βρεθεί η έκφραση της ταχύτητάς του.

$$\boldsymbol{p}_{C_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ y_{c_1} - q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{C_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \text{-}\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_{C_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_3 \\ y_{c_2} - q_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{C_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \text{-}\dot{q}_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_{C_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_5 \\ y_{c_3} + q_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{C_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, προκύπτουν οι ακόλουθοι ιακωβιανοί πίνακες για καθένα από τα τρία δάκτυλα της λαβής:

$$J_{L_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-}1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{L_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-}1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{L_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{A_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{A_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{A_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ωστόσο, για να εκφραστεί η δράση των ταχυτήτων των αρθρώσεων στην ταχύτητα που δίνεται, μέσω των επαφών, στο αντικείμενο χρειάζεται επιπλέον μετασχηματισμός του ιακωβιανού πίνακα.
Ο ιακωβιανός πίνακας του ρομποτικού χεριού στον οποίο καταλήγουμε είναι:

$$J_h(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{J_{h_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{J_{h_2}} & 0 & 0 \\ \cline{3-6} 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{J_{h_3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στην παρακάτω εξίσωση φαίνονται οι ταχύτητες των σημείων επαφής του αντικειμένου με τα δάκτυλα του ρομποτικού μηχανισμού.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_{c_1} \\ \dot{y}_{c_2} \\ \dot{x}_{c_3} \\ \dot{y}_{c_3} \\ \dot{z}_{c_3} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}_C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_h(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{h_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_E^{C_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_1^{(E)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{h_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_2}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_E^{C_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_2^{(E)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{h_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{C_3}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_E^{C_3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_3^{(E)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, οι αρθρώσεις q_1 και q_3 δε συνεισφέρουν ως προς την ταχύτητα των σημείων C_1 και C_2 αντίστοιχα. Αυτό οφείλεται στο οτι οι δύο αυτές αρθρώσεις κινούνται κατά τον άξονα x σε συνδυασμό με το γεγονός οτι οι επαφές είναι σημειακές δίχως τριβή. Επιπλέον, το σημείο C_3 δεν μπορεί να κινηθεί κατά τον άξονα z καθώς καμία από τις αρθρώσεις q_5 και q_6 δεν κινείται κατά αυτόν τον άξονα.