ตัวอย่าง การคูณเมตริกซ์ A*B ด้วยวิธี recursive divide and conquer

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A11 & A12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A21 & A22 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B11 & B12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B21 & B22 \end{array} \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}$$

ให้เมตริกซ์ C เป็นเมตริกซ์ผลลัพธ์ของ A*B ซึ่งประกอบไปด้วยเทอม C11 C12 C21 C22

แบ่ง A B ออกเป็นเมตริกซ์ย่อย 8 เทอม A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22

รวม 8 เทอม

C11 = A11*B11 + A12*B21

C12 = A11*B12 + A12*B22

C21 = A21*B11 + A22*B21

C22 = A21*B12 + A22*B22

เพื่อที่จะคำนวณเทอม C11 = A11*B11 + A21*B21

$$C11 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก A11 B11 A21 B21 มีขนาดมากกว่า 1 (n>1) จึงต้องนำไปแบ่งย่อยโดยการเรียก recursive

สำหรับเทอม **A11*B11**

$$\text{A11*B11} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A11} & \text{A12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{A21} & \text{A22} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{B11} & \text{B12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{B21} & \text{B22} \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}$$

เมื่อ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 มีขนาดเท่ากับ 1 (n=1) จึงสามารถนำไปคูณกันได้เลย

C11 = A11*B11 + A12*B21 = 1*-1 + 0*1 = -1

C12 = A11*B12 + A12*B22 = 1*1 + 0*1 = 1

C21 = A21*B11 + A22*B21 = 2*-1 + 0*1 = -2

C22 = A21*B12 + A22*B22 = 2*1 +0*1 = 2

นำ C11 C12 C21 C22 มารวมกันจะได้เป็นผลลัพธ์ของ A11*B11

$$A11*B11 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

สำหรับเทอม **A21*B21**

$$A21*B21 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A11 & A12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} A21 & A22 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B11 & B12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} B21 & B22 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}$$

เมื่อ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 มีขนาดเท่ากับ 1 (n=1) จึงสามารถนำไปคูณกันได้เลย

C11 = A11*B11 + A12*B21 = 1*0 + 0*1 = 0

C12 = A11*B12 + A12*B22 = 1*0 + 0*1 = 0

C21 = A21*B11 + A22*B21 = 2*0 + 0*1 = 0

C22 = A21*B12 + A22*B22 = 2*1 +0*1 = 0

นำ C11 C12 C21 C22 มารวมกันจะได้เป็นผลลัพธ์ของ A21*B21

$$A21*B21 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นำเมตริกซ์ผลลัพธ์ของ A11*B11 และ A12*B21 มาบวกกัน ก็จะได้เมตริกซ์ย่อย C11

$$C11 = A11*B11 + A21*B21 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ทำซ้ำเพื่อหาเทอม C12 C21 และ C22 ด้วยวิธีการ recursive โดยจะเห็นได้ว่าจำนวนครั้งในการคูณสำหรับเทอม C11 ทั้งหมดจะเท่ากับ 16 ครั้ง เกิดจาก A11*B11 8 ครั้ง และ A12*B21 8 ครั้ง ดังนั้นหากรวมกับที่ต้องคำนวณ C12 C21 และ C22 จะเท่ากับ 64 ครั้ง ซึ่งไม่แตกต่างจากการคูณเมตริกซ์ทั่วไปคือ $O(n^3)$ เมื่อ n เป็นขนาดของเมตริกซ์

ตัวอย่าง การคูณเมตริกซ์ A*B ด้วยวิธี Strassen Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A11 & A12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A21 & A22 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B11 & B12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B21 & B22 \end{array} \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}$$

M1 = (A11 + A22)(B11+B22)

M2 = (A21 + A22)B11

M3 = A11(B12 – B22)

M4 = A22(B21 – B11)

M5 = (A11 + A12)B22

M6 = (A21 – A11)(B11+B12)

M7 = (A12 – A22)(B21+B22)

C11 = M1 + M4 – M5 + M7

C12 = M3 + M5

C21 = M2 + M4

C22 = M1 – M2 + M3 + M6

เพื่อที่จะคำนวณเทอม C11 ด้วยวิธี Strasen จะต้องคำนวณ M1 M4 M5 M7

$$C11 = M1 + M4 - M5 + M7$$

M1 = (A11 + A22)(B11+B22)

$$M1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) . \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

C11 = 4*0 + 0*1 = 0 , C12 = 4*2 + 0*1 = 8, C21 = 2*0 + 0*1 =0, C22 = 2*2 + 0*1 =4

M4 = A22(B21 – B11)

$$M4=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M4=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\2 & -2\end{bmatrix}$$

C11 = 3*1 + 0*0 = 3 , C12 = 3*-1 + 0*0 = -3, C21 = 2*1 + 0*0 = 2, C22 = 2*-1 + 0*0 = -2

M5 = (A11 + A12)B22

$$M5 = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M5 = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{bmatrix}$$

C11 = 2*1 + 0*0 = 2 , C12 = 2*1 + 0*0 = 2, C21 = 4*1 + 0*0 = 4, C22 = 4*1 + 0*0 = 4

M7 = (A12 – A22)(B21+B22)

$$M7 = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M7 = \begin{bmatrix}-2 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

C11 = -2*1 + 0*1 = -2 , C12 = -2*1 + 0*1 = -2, C21 = 2*1 + 1*0 = 2, C22 = 2*1 + 1*0 = 2

C11 = M1 + M4 – M5 + M7

$$C11 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3-2-2 & 8-3-2-2 \\ 0+2-4+2 & 4-2-4+2 \end{bmatrix}$$

$$C11 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ทำซ้ำสำหรับการหา C12 C21 และ C22 โดยแต่ละเทอมจะมีจำนวนการคูณเมตริกซ์ทั้งสิ้น 7 ครั้ง ในแต่ละเทอม ดังนั้น 4*7 = 28 ครั้ง

ตัวอย่าง การคูณเมตริกซ์ A*B ด้วยวิธี Strassen Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A11 & A12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A21 & A22 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B11 & B12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B21 & B22 \end{array} \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}$$

M1 = (A11 + A22)(B11+B22)

M2 = (A21 + A22)B11

M3 = A11(B12 – B22)

M4 = A22(B21 – B11)

M5 = (A11 + A12)B22

M6 = (A21 – A11)(B11+B12)

M7 = (A12 – A22)(B21+B22)

C11 = M1 + M4 – M5 + M7

C12 = M3 + M5

C21 = M2 + M4

C22 = M1 – M2 + M3 + M6

เพื่อที่จะคำนวณเทอม C11 ด้วยวิธี Strasen จะต้องคำนวณ M1 M4 M5 M7

$$C11 = M1 + M4 - M5 + M7$$

M1 = (A11 + A22)(B11+B22)

$$M1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) . \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

C11 = 4*0 + 0*1 = 0 , C12 = 4*2 + 0*1 = 8, C21 = 2*0 + 0*1 =0, C22 = 2*2 + 0*1 =4

M4 = A22(B21 – B11)

$$M4=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M4=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\2 & -2\end{bmatrix}$$

C11 = 3*1 + 0*0 = 3 , C12 = 3*-1 + 0*0 = -3, C21 = 2*1 + 0*0 = 2, C22 = 2*-1 + 0*0 = -2

M5 = (A11 + A12)B22

$$M5 = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M5 = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{bmatrix}$$

C11 = 2*1 + 0*0 = 2 , C12 = 2*1 + 0*0 = 2, C21 = 4*1 + 0*0 = 4, C22 = 4*1 + 0*0 = 4

M7 = (A12 – A22)(B21+B22)

$$M7 = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ย่อยจะทำให้ขนาดของ A11 A12 A21 A22 B11 B12 B21 B22 เท่ากับ n=1 จึงสามารถคูณกันได้โดยตรง

$$M7 = \begin{bmatrix}-2 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

C11 = -2*1 + 0*1 = -2 , C12 = -2*1 + 0*1 = -2, C21 = 2*1 + 1*0 = 2, C22 = 2*1 + 1*0 = 2

C11 = M1 + M4 – M5 + M7

$$C11 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3-2-2 & 8-3-2-2 \\ 0+2-4+2 & 4-2-4+2 \end{bmatrix}$$

$$C11 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ทำซ้ำสำหรับการหา C12 C21 และ C22 โดยแต่ละเทอมจะมีจำนวนการคูณเมตริกซ์ทั้งสิ้น 7 ครั้ง ในแต่ละเทอม ดังนั้น 4*7 = 28 ครั้ง