การแผ่สเปกตรัม (Spread Spectrum)

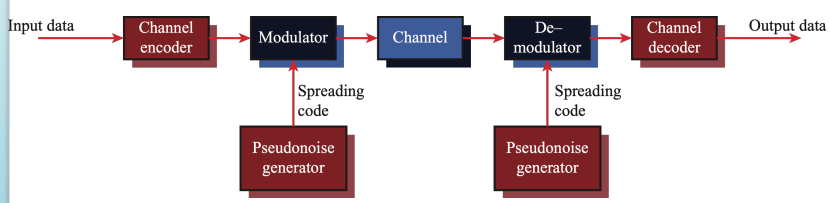
รศ.ดร.ธนภัทร์ อนุศาสน์อมรกุล

Week 6

การแผ่สเปกตรัม

- อินพุตถูกส่งเข้าไปในตัวเข้ารหัสสัญญาณ
  - จะสร้างสัญญาณแอนะล็อกที่มีแบนด์วิดท์แคบ
- จากนั้นสัญญาณถูกมอดูเลตโดยใช้ลำดับของเลขโดด (sequence of digits)
  - รหัสการแผ่ (spreading code) หรือ ลำดับของการแผ่ (spread sequence)
  - ถูกสร้างโดย สัญญาณรบกวนเทียม (pseudo noise) หรือ ตัวสร้างหมายเลขสุ่มเทียม (pseudo random number generator)
- ผลของการมอดูเลต เพื่อเพิ่มแบนด์วิดท์ของสัญญาณสำหรับส่ง

การแผ่สเปกตรัม



การแผ่สเปกตรัม

- ด้านฝั่งรับ ลำดับของเลขโดด (sequence of digits) ถูกใช้มอดูเลตสัญญาณการแผ่สเปกตรัม
- สัญญาณถูกส่งเข้าไปในตัวถอดรหัสช่องสัญญาณเพื่อที่จะนำข้อมูลกลับมา

การแผ่สเปกตรัม

- อะไรที่ได้เพิ่มมาจากการใช้สเปกตรัมอย่างไม่คุ้มค่า
  - มีภูมิคุ้มกันจากสัญญาณรบกวนหลาย ๆ ชนิดและการเพี้ยนจากหลายวิถี (Multi-path distortion)
  - สามารถใช้ซ่อนและเข้ารหัสลับสัญญาณ
  - ผู้ใช้หลาย ๆ คนสามารถใช้แบนด์วิดท์ที่มากขึ้นช่วงเดียวกันได้อย่างอิสระ โดยมีการแทรกสอดต่ำ

การแบ่งการแผ่สเปกตรัม

- แบ่งได้เป็น 2 ชนิด คือ
  - การแผ่สเปกตรัมการกระโดดเปลี่ยนความถี่ (Frequency hopping spread spectrum - FHSS)
  - การแผ่สเปกตรัมแบบลำดับตรง (Direct sequence spread spectrum - DSSS)

การแผ่สเปกตรัมการกระโดดเปลี่ยนความถี่

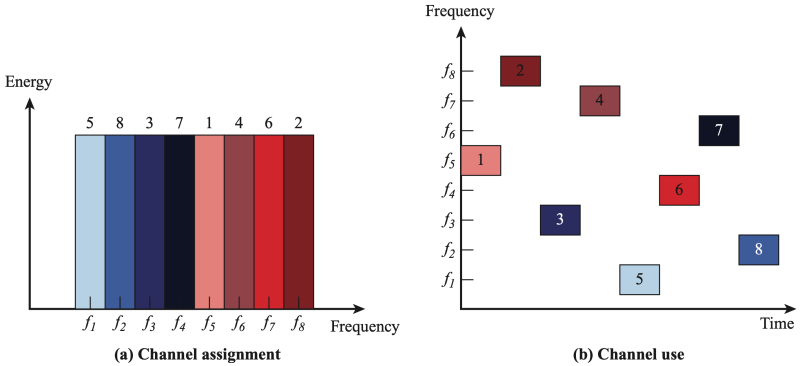
(Frequency hopping spread spectrum - FHSS)

- สัญญาณถูกกระจายออกไปเป็นลำดับที่สุ่มของความถี่วิทยุ
  - ช่องสัญญาณหลาย ๆ ช่องถูกจองไว้ให้สำหรับสัญญาณ FH
  - ความกว้างของแต่ละช่องสัญญาณขึ้นอยู่กับแบนด์วิดท์ของสัญญาณขาเข้า
- สัญญาณกระโดดจากความถี่หนึ่งไปอีกความถี่หนึ่งโดยมีช่วงเวลาที่คงที่
  - ตัวส่งทำงานใน 1 ช่องสัญญาณในแต่ละครั้ง
  - บิตถูกส่งโดยใช้แบบแผนการเข้ารหัส (encoding scheme)
  - ในแต่ละช่วงเวลาที่สำเร็จ ความถี่พาห์อันใหม่จะถูกเลือกมา

การแผ่สเปกตรัมการกระโดดเปลี่ยนความถี่

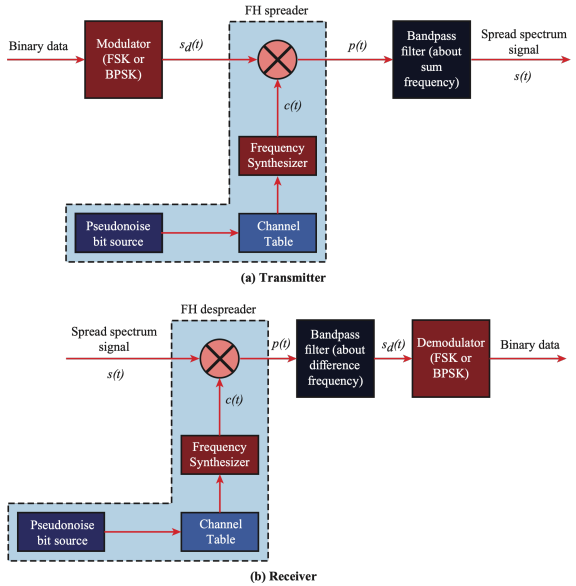
- รหัสการแผ่เป็นตัวกำหนดลำดับของช่องสัญญาณ
- ตัวรับที่กระโดดระหว่างความถี่ในการกำหนดจังหวะกับตัวส่ง จะเก็บข้อความขึ้นมา
- ข้อดี
  - คนแอบดักฟังได้ยินเพียงแค่ช่วงเวลาไม่นาน
  - การพยายามแจมช่องสัญญาน ทำได้แค่ใน 1 ช่องความถี่ ทำให้ไม่ได้รับเพียงไม่กี่บิต

การแผ่สเปกตรัมการกระโดดเปลี่ยนความถี่



(a) Channel assignment (b) Channel use

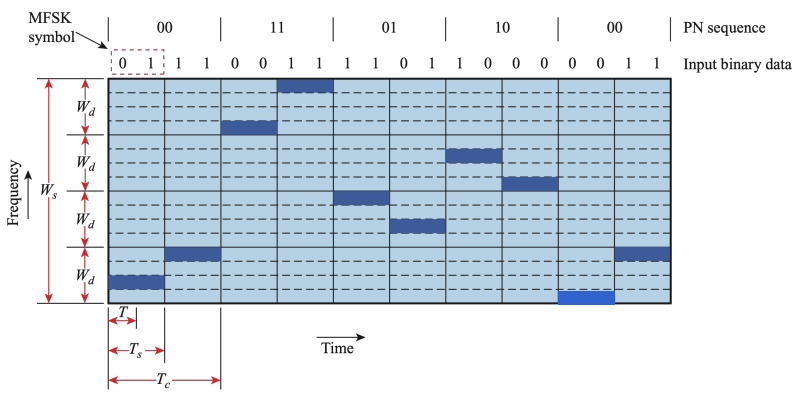
Frequency Hopping Spread Spectrum System



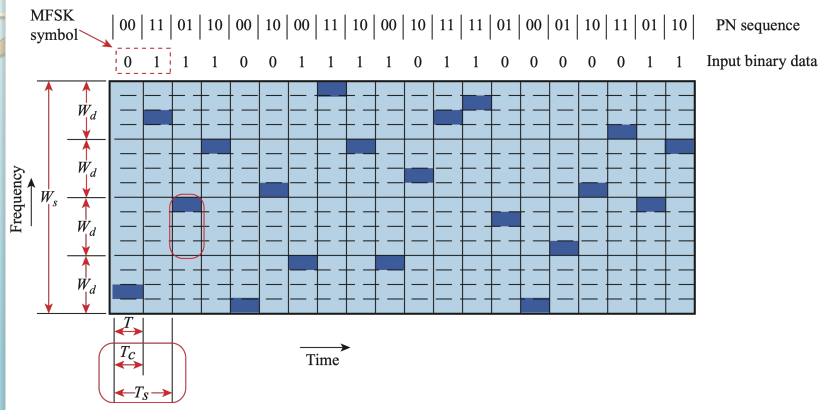
FHSS โดยใช้ MFSK

- สัญญาณ MFSK จะถูกแปลงไปเป็นความถี่ใหม่ทุก ๆ T_c วินาที โดยการมอดูเลตสัญญาณ MFSK กับสัญญาณพาห์ของ FHSS
- สำหรับอัตราการส่งข้อมูล R
  - คาบของบิต $T = 1 / R$ วินาที
  - คาบของสัญลักษณ์ $T_s = L\ T$ วินาที
- $T_c \geq T_s$ - FHSS แบบช้า
- $T_c < T_s$ - FHSS แบบเร็ว

Slow Frequency Hopping Spread Spectrum



Fast Frequency Hopping Spread Spectrum



การพิจารณาความสามารถของ FHSS

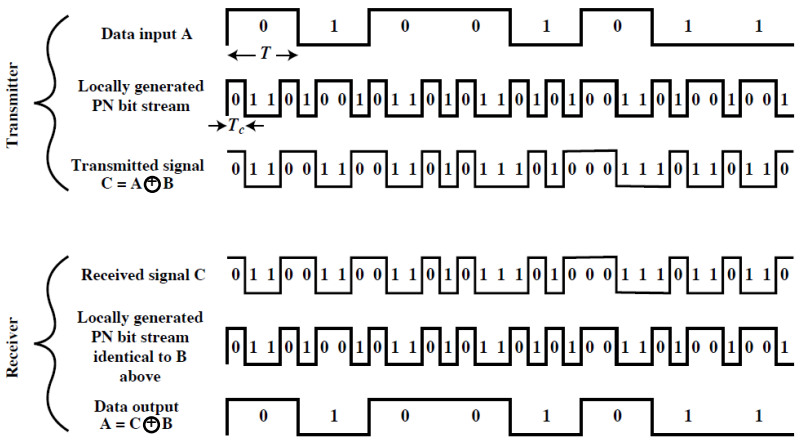
- ใช้ความถี่จำนวนมาก
- ทำให้ระบบมีความทนทานต่อสัญญาณกวน (Jamming)
  - การแจมต้องทำทุก ๆ ความถี่
  - ถ้ากำลังส่งคงที่ การแจมจะลดกำลังส่งในการแจมลงในทุก ๆ 1 แถบความถี่

การแผ่สเปกตรัมแบบลำดับตรง

(Direct sequence spread spectrum - DSSS)

- แต่ละบิตของข้อมูลถูกแทนที่โดยใช้หลาย ๆ บิตในการส่งสัญญาณ
- รหัสการแผ่ ทำให้แผ่สัญญาณไปทั่วทั้งแถบความถี่กว้างขึ้น
  - การแผ่อยู่ในสัดส่วนตรงกับจำนวนบิตที่ใช้
- เทคนิคหนึ่งที่ใช้รวมกันระหว่างสายของข้อมูลดิจิทัลกับสายของบิตของรหัสการแผ่ คือ การใช้ exclusive-OR (⊕)

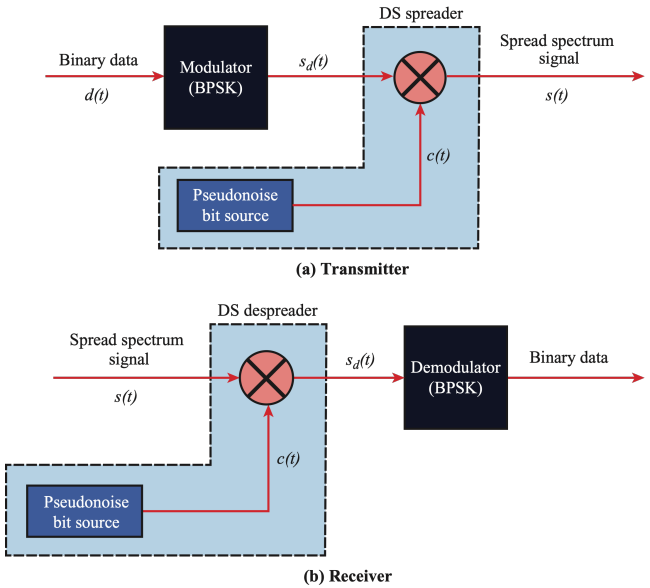
Direct Sequence Spread Spectrum

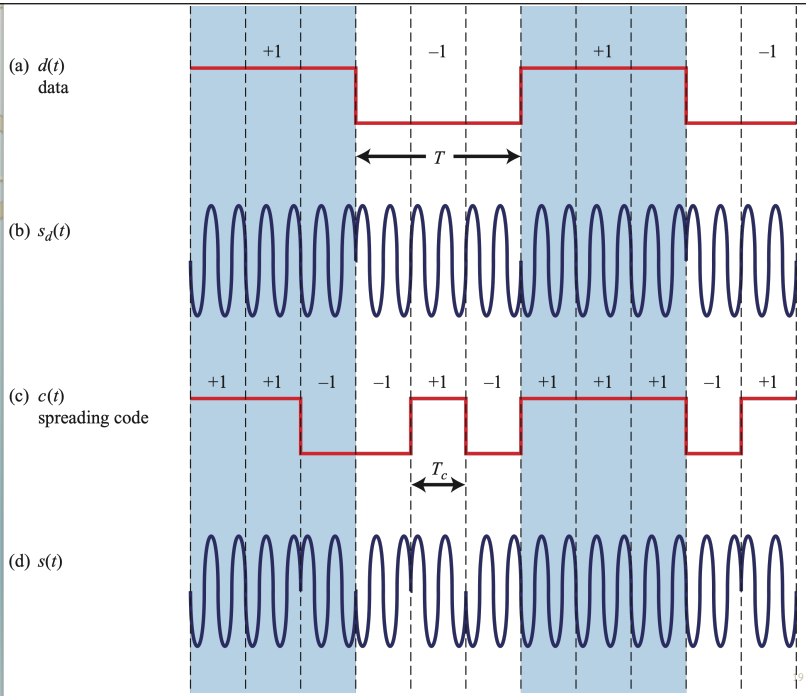


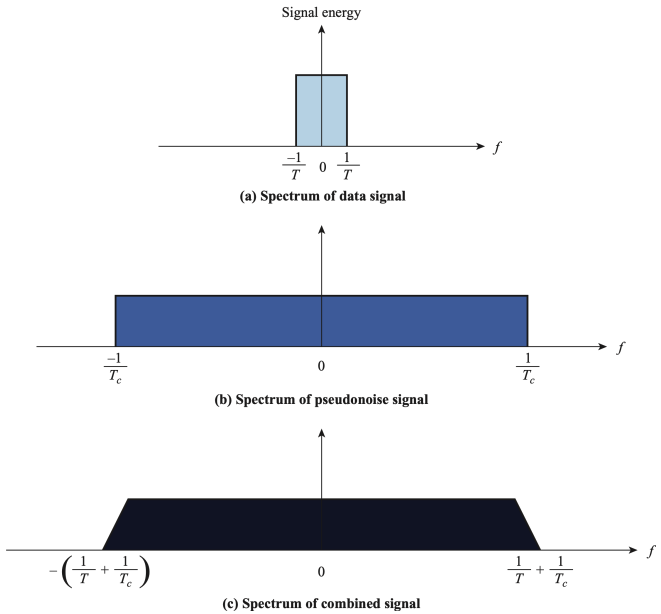
DSSS โดยใช้ BPSK

- โดยการคูณสัญญาณ BPSK
- $s_d(t) = A\, d(t) \cos(2\pi f_c t)$
- โดย $c(t)$ มีค่า [+1, -1]
- $s(t) = A\, d(t)\, c(t) \cos(2\pi f_c t)$
  - A = แอมพลิจูดของสัญญาณ
  - f_c = ความถี่คลื่นพาห์
  - $d(t)$ = discrete function [+1, -1]
- ที่ตัวรับ สัญญาณที่รับเข้ามาจะถูกคูณโดย c(t)
  - โดยที่ c(t) x c(t) = 1 สัญญาณที่รับเข้ามาสามารถเรียกกลับมาได้

Direct Sequence Spread Spectrum System

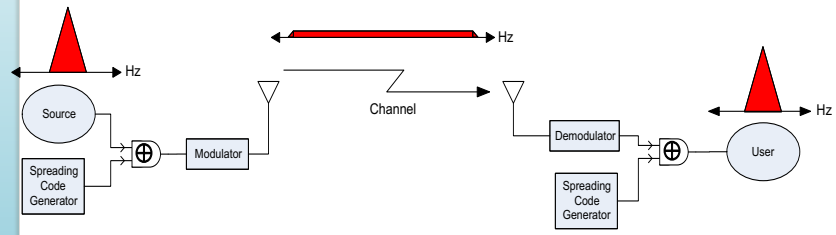






Approximate Spectrum of Direct Sequence Spread Spectrum Signal

สเปกตรัมของสัญญาณ เมื่อส่งผ่านระบบการแผ่สเปกตรัม



การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส

Code Division Multiple Access (CDMA)

- หลักการพื้นฐานของ CDMA
  - D = อัตราของสัญญาณข้อมูล
  - แตกแต่ละบิตให้อยู่ใน k ชิป (chip)
    - ชิป คือ รูปแบบที่คงที่ที่กำหนดให้ผู้ใช้
  - อัตราส่งชิปของช่องสัญญาณใหม่ = $k \times D$

ตัวอย่างของ CDMA

- ถ้า k=6 และโค้ดคือ ลำดับของ 1 และ 0
  - สำหรับ บิต 1 โดย A ส่งโค้ดเป็นแบบรูปชิป (chip pattern)
    - <c1, c2, c3, c4, c5, c6>
  - สำหรับ บิต 0 โดย A ส่งโค้ดที่เป็นส่วนกลับของแบบรูปชิป
    - <-c1, -c2, -c3, -c4, -c5, -c6>
- ตัวรับรู้โค้ดของตัวส่ง และใช้ฟังก์ชันในการถอดรหัส

$$S_u(d) = d1 \times c1 + d2 \times c2 + d3 \times c3 + d4 \times c4 + d5 \times c5 + d6 \times c6$$

  - <d1, d2, d3, d4, d5, d6> = แบบรูปชิปที่ได้รับ
  - <c1, c2, c3, c4, c5, c6> = โค้ดของตัวส่ง

ตัวอย่างของ CDMA

- โค้ดของผู้ใช้ A = <+1, –1, –1, +1, –1, +1>
  - ส่งบิต 1 = <+1, –1, –1, +1, –1, +1>
  - ส่งบิต 0 = <–1, +1, +1, –1, +1, –1>
- โค้ดของผู้ใช้ B = <+1, +1, –1, –1, +1, +1>
  - ส่งบิต 1 = <+1, +1, –1, –1, +1, +1>
- ตัวรับ รับ โค้ดของผู้ใช้ A
  - Σ (A's code) x (received chip pattern)
    - ผู้ใช้ A '1' bit: **6** -> 1
    - ผู้ใช้ A '0' bit: **-6** -> 0
    - ผู้ใช้ B '1' bit: **0** -> สัญญาณที่ไม่ต้องการ ไม่ต้องสนใจ

CDMA Example

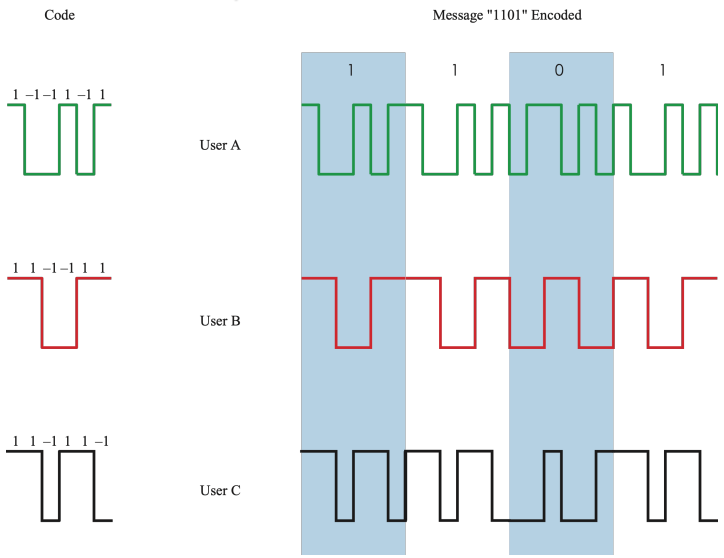


Table 7.1 CDMA Example

(a) User's codes

User A	1	−1	−1	1	−1	1
User B	1	1	−1	−1	1	1
User C	1	1	−1	1	1	−1

(b) Transmission from A

Transmit (data bit = 1)	1	−1	−1	1	−1	1	
Receiver codeword	1	−1	−1	1	−1	1	
Multiplication	1	1	1	1	1	1	= 6

Transmit (data bit = 0)	−1	1	1	−1	1	−1	
Receiver codeword	1	−1	−1	1	−1	1	
Multiplication	−1	−1	−1	−1	−1	−1	= −6

(c) Transmission from B, receiver attempts to recover A's transmission

Transmit (data bit = 1)	1	1	−1	−1	1	1	
Receiver codeword	1	−1	−1	1	−1	1	
Multiplication	1	−1	1	−1	−1	1	= 0

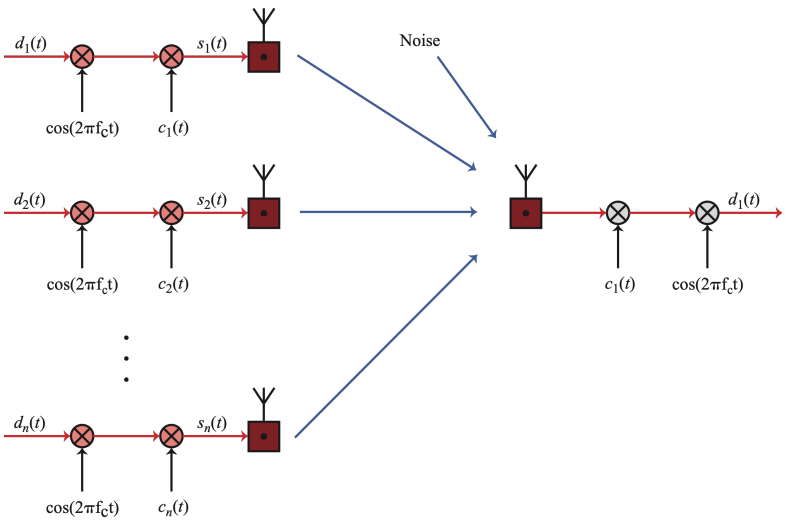
(d) Transmission from C, receiver attempts to recover B's transmission

Transmit (data bit = 1)	1	1	−1	1	1	−1	
Receiver codeword	1	1	−1	−1	1	1	
Multiplication	1	1	1	−1	1	−1	= 2

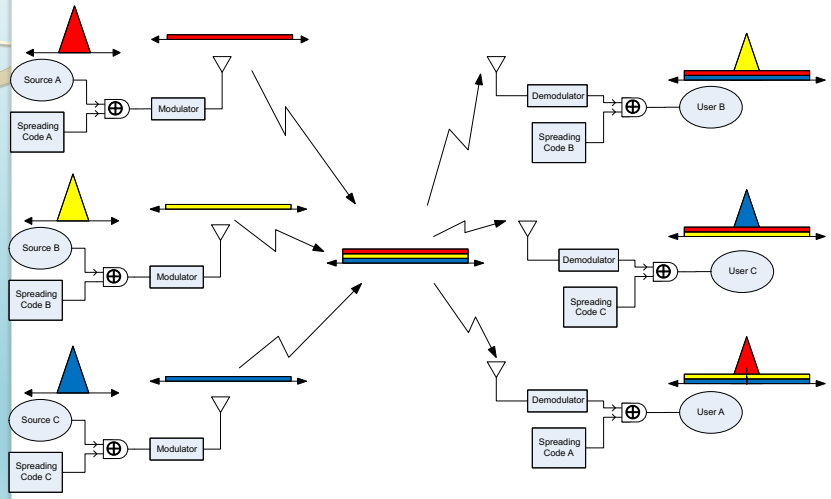
(e) Transmission from B and C, receiver attempts to recover B's transmission

B (data bit = 1)	1	1	−1	−1	1	1	
C (data bit = 1)	1	1	−1	1	1	−1	
Combined signal	2	2	−2	0	2	0	
Receiver codeword	1	1	−1	−1	1	1	
Multiplication	2	2	2	0	2	0	= 8

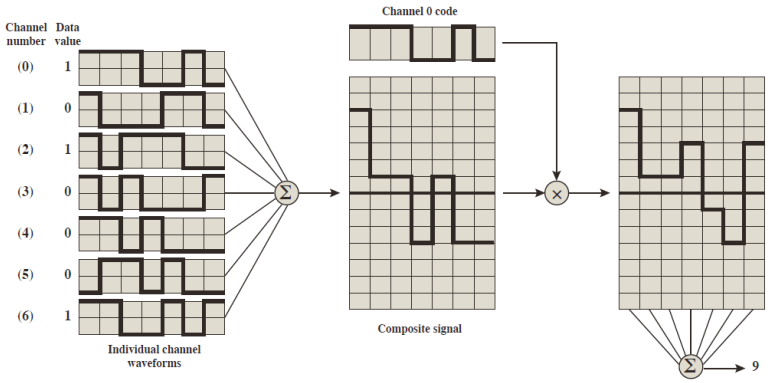
CDMA in a DSSS Environment



ตัวอย่างระบบสื่อสารที่ใช้ CDMA



ตัวอย่างการเข้ารหัสและถอดรหัส 7 ช่องสัญญาณของ CDMA



โจทย์

- ในระบบ CDMA ถ้าผู้ใช้ A มีรหัส 0011 ส่งบิต 0 และผู้ใช้ B มีรหัส 0101 ส่งบิต 1 ออกไปในอากาศ จงหาสัญญาณที่รวมกันในอากาศ และเครื่องรับสามารถเอาข้อมูลที่ผู้ใช้ A ออกมาได้อย่างไร

ชนิดของลำดับการแผ่ (spreading sequences)

- ลำดับการแผ่ แบ่งได้เป็น
  - PN sequence
  - Orthogonal codes
- สำหรับระบบ FHSS
  - PN sequence ถูกใช้มากสุด
- สำหรับระบบ DSSS แต่ไม่ใช่ CDMA
  - PN sequence ถูกใช้มากสุด
- สำหรับระบบ DSSS ที่ใช้ CDMA
  - PN sequence
  - Orthogonal codes

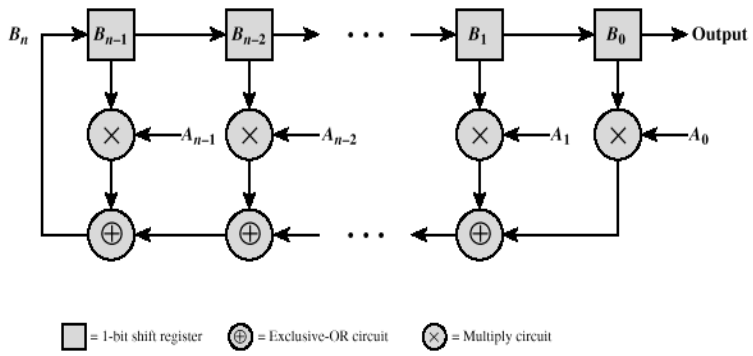
Pseudonoise sequences (PN sequences)

- ตัวสร้าง PN จะสร้างลำดับเป็นคาบที่ดูเหมือนจะเป็นลำดับสุ่ม
- PN sequences
  - ใช้อัลกอริทึมสร้าง โดยใช้ seed เริ่มต้น
  - ลำดับนี้ ไม่ใช่ว่าจะ เป็นการสุ่มในทางสถิติ แต่ ผ่านการทดสอบว่าเป็นความไม่มีแบบแผน (randomness)
  - ลำดับนี้อ้างอิงถึง ตัวเลขสุ่มเทียม (pseudorandom number) หรือลำดับของสัญญาณรบกวนเทียม
  - ถ้าไม่รู้อัลกอริทึมและ seed ลำดับนี้ไม่มีทางคาดเดาได้เลย

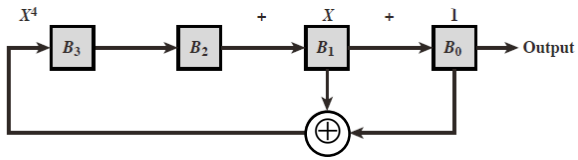
คุณสมบัติของ PN ที่สำคัญ

- ความไม่มีแบบแผน (randomness)
  - การแจกแจงแบบเอกรูปหรือสม่ำเสมอ (uniform distribution)
    - มีคุณสมบัติสมดุล – สัดส่วนของไบนารี 1 มีค่าใกล้เคียง 1/2
    - มีคุณสมบัติ รัน (run property) รัน คือ ลำดับของ 0 ทั้งหมด หรือ 1 ทั้งหมด
      - 1/2 ของรันของบิตในแต่ละคาบ จะมีความยาว 1
      - 1/4 ของรันของบิตในแต่ละคาบ จะมีความยาว 2
      - 1/8 ของรันของบิตในแต่ละคาบ จะมีความยาว 3 และต่อไป
  - มีความเป็นอิสระ (independence)
    - ไม่มีลำดับใด ที่สามารถจะอ้างอิงไปสร้างลำดับอื่นได้
  - คุณสมบัติสหสัมพันธ์ (Correlation)
- ไม่สามารถคาดเดาได้ (unpredictability)

PN Generator



วงจรตัวสร้างลำดับ PN โดยใช้ Shift Register



(a) Shift-register implementation

State	B_3	B_2	B_1	B_0	$B_0 \oplus B_1$	output
Initial = 0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	1
4	1	1	0	0	0	0
5	0	1	1	0	1	0
6	1	0	1	1	0	1
7	0	1	0	1	1	1
8	1	0	1	0	1	0
9	1	1	0	1	1	1
10	1	1	1	0	1	0
11	1	1	1	1	0	1
12	0	1	1	1	0	1
13	0	0	1	1	0	1
14	0	0	0	1	1	1
15 = 0	1	0	0	0	0	0

(b) Example with initial state of 1000

ตัวอย่างการสร้างลำดับ PN

Initial State	Output Sequence
1000	000100110101111
0100	001001101011110
0010	010011010111100
1001	100110101111000
1100	001101011110001
0110	011010111100010
1011	110101111000100
0101	101011110001001
1010	010111100010011
1101	101111000100110
1110	011110001001101
1111	111100010011010
0111	111000100110101
0011	110001001101011
0001	100010011010111

คุณสมบัติของ Maximal-length sequences (M-sequences)

- คุณสมบัติที่ 1
  - จะมี 2^{n-1} ของ 1 และ $2^{n-1}-1$ ของ 0
- คุณสมบัติที่ 2
  - สำหรับวินโดว์ที่มีขนาด n ถูกเลื่อนไปตามเอาท์พุต สำหรับ N (= 2^{n-1}) ครั้ง ในแต่ละ n ค่า จะปรากฏขึ้นเพียงครั้งเดียว ยกเว้นสำหรับลำดับ (sequence) ที่มีศูนย์ทั้งหมด
- คุณสมบัติที่ 3
  - Sequence จะมี 1 รอบของ หนึ่งทั้งหมด ความยาว n
  - 1 รอบ ของ ศูนย์ทั้งหมด ความยาว n-1
  - 1 รอบ ของ หนึ่งทั้งหมด และ ศูนย์ทั้งหมด ความยาว n-2
  - 2 รอบ ของ หนึ่งทั้งหมด และ 2 รอบของ ศูนย์ทั้งหมด ความยาว n-3
  - 2^{n-3} รอบ ของ หนึ่งทั้งหมด และ 2^{n-3} รอบของ ศูนย์ทั้งหมด ความยาว 1

คุณสมบัติของ M-sequences

- คุณสมบัติที่ 4
  - ค่าของ periodic autocorrelation ของลำดับ a ± 1 คือ

$$R(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0,\mathrm{N},2\mathrm{N},\ldots\\ -\dfrac{1}{N} & \text{otherwise}\end{cases}$$

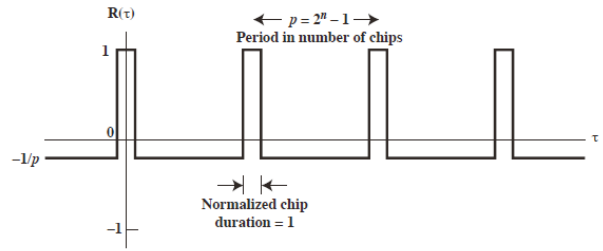
  - สูตรในการคำนวณ Autocorrelation แบบคาบ

$$R(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}B_kB_{k-\tau}$$

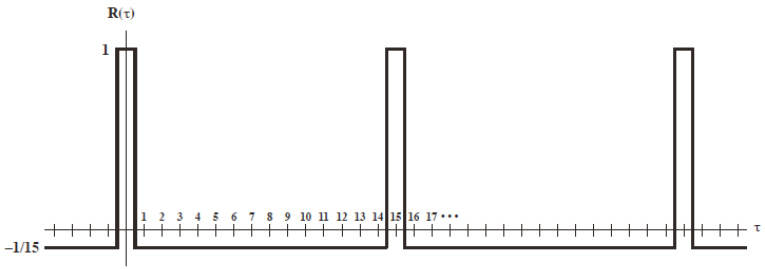
ความหมาย

- Correlation
  - เป็นหลักการของการหาค่าความเหมือนกันของกลุ่มของข้อมูลกับตัวเปรียบเทียบตัวอื่น
  - ค่ามีค่าระหว่าง -1 กับ 1
    - 1 ลำดับที่สอง เหมือนกับ ลำดับที่ 1
    - 0 ไม่มีความสัมพันธ์กันของทั้ง 2 ลำดับเลย
    - -1 ลำดับทั้งสอง เหมือนกัน แต่ว่าเป็นภาพสะท้อนของกันและกัน
- Cross correlation
  - เป็นการเปรียบเทียบระหว่าง 2 ลำดับจาก ต้นทางต่างกัน ไม่ใช่มาจากตัวก็อปปี้โดยการเลื่อนของลำดับกับตัวมันเอง

ฟังก์ชันของอัตสหสัมพันธ์ของ PN



(a) General case



(b) Sequence length = 15

ข้อดีของ cross correlation

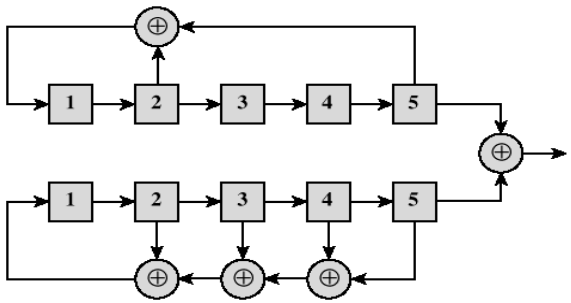
- ค่าของ cross correlation ระหว่าง m-sequence กับ สัญญาณรบกวน มีค่าต่ำ
  - คุณสมบัติข้อนี้มีประโยชน์สำหรับตัวรับที่จะกรองเอาสัญญาณรบกวนออกไป
- ค่าของ cross correlation ระหว่าง m-sequence สองตัว มีค่าต่ำ
  - คุณสมบัติข้อนี้มีประโยชน์สำหรับ CDMA แอปพลิเคชัน
  - ทำให้ตัวรับแยกความแตกต่างระหว่างสัญญาณการแผ่สเปกตรัม ที่โดนสร้างจาก m-sequence ที่ต่างกัน

Gold sequences

- Gold sequences สร้างโดยการนำ สอง m-sequences มาทำการ XOR กันโดยมี clocking เวลาเดียวกัน
- โค้ดมีคุณสมบัติ cross correlation ที่เหมาะสม
- เพียงวงจรง่าย ๆ ที่ต้องการใช้สร้างโค้ดที่แตกต่างกันได้มากมาย

Example of Generating Gold sequences

- 2 shift register สร้าง 2 m-sequence และ ทั้งสองก็ทำการ XOR กันในระดับบิต



รหัสตั้งฉาก

Orthogonal codes

- Orthogonal codes
  - Cross correlation คู่ใด ๆ มีค่าเป็น 0
    - ถ้าเอาโค้ด 2 ชุดมาคูณกันในแต่ละตำแหน่งแล้วบวกกัน จะมีค่าเป็น 0
  - ความยาวโค้ดคงที่ และ แปรผันได้ ถูกใช้ในระบบ CDMA
  - สำหรับ CDMA แอปพลิเคชัน ผู้ใช้เคลื่อนที่แต่ละคน ใช้ 1 ลำดับใน ชุดเป็นโค้ด spreading
    - ทำให้เกิด ค่า cross correlation มีค่าเป็น 0 ท่ามกลางผู้ใช้ทั้งหมด
- ชนิดของโค้ด
  - Walsh codes
  - Variable-length orthogonal codes

Walsh codes

- ชุดของ Walsh code ที่มีความยาว n ประกอบด้วย n แถว ของเมตริกซ์ n x n :
- $W_1 = (0)$

$$W_{2n} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & \overline{W}_n \end{pmatrix}$$

  - n = ขนาดของเมตริกซ์
- แต่ละแถว เป็น orthogonal กับทุก ๆ แถว และ orthogonal กับการใส่ค่า not เข้าไปกับทุก ๆ แถว
- ต้องการการเข้าจังหวะที่แน่นอน
  - มิเช่นนั้น Cross correlation ระหว่าง Walsh sequence ที่แตกต่างกันไม่ได้มีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง Walsh Matrices

$W_1 = (0)$

(a) 1 × 1

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) 2 × 2

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) 4 × 4

$$W_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) 8 × 8

$0 \rightarrow -1$

$1 \rightarrow +1$

ตัวอย่าง

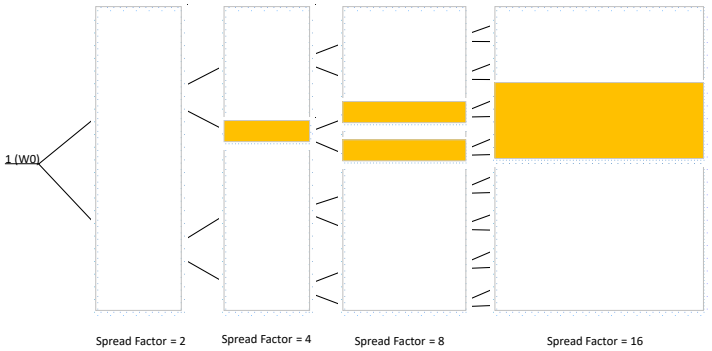
-1	-1	-1	-1
-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	-1

x

$\rightarrow \Sigma row = 0$

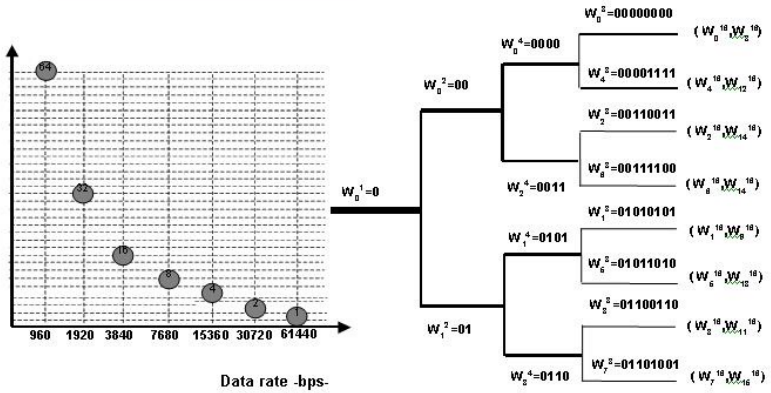
Variable-Length Orthogonal Codes

- ใช้สำหรับ มือถือ CDMA รุ่นที่ 3
- ถูกออกแบบมาเพื่อสนับสนุนผู้ใช้ที่ต้องการใช้อัตราการส่งข้อมูลที่ไม่เท่ากัน
- ใช้ความยาวของโค้ดแตกต่างกัน ซึ่งสามารถสร้างได้จาก Walsh เมตริกซ์ที่มีมิติต่างกันได้



Variable-Length Orthogonal Codes

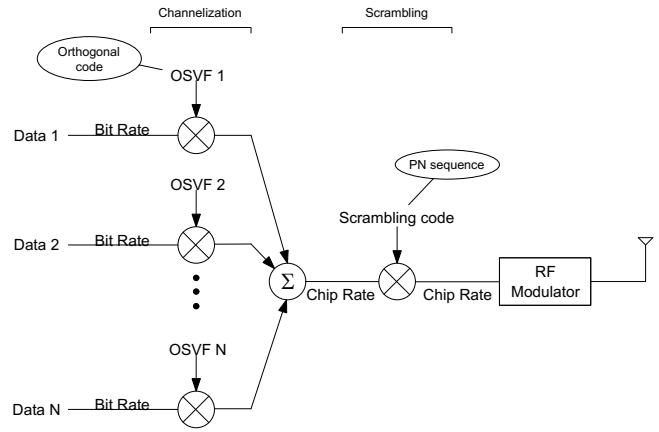
The different Walsh codes corresponding to different data rates



การแผ่ที่หลากหลาย (Multiple spreading)

- ขยายอัตราการส่งข้อมูลโดยใช้โค้ด orthogonal (channelization code)
- โดยมี mutual orthogonality ท่ามกลางผู้ใช้ในเซลเดียวกัน
- เพื่อให้ผลลัพท์การแผ่ออกไปโดยใช้ PN-sequence (scrambling code) ทำให้เกิด mutual randomness (low cross correlation) ระหว่างผู้ใช้ต่างเซลล์กัน

การแผ่ที่หลากหลาย



OSVF = Orthogonal Variable Spreading Factor

ตัวอย่างการประเมินรหัสสุ่มเทียม

- จงพิจารณารหัสการแผ่ 15 บิต "**100110101111000**" สำหรับคุณสมบัติสมดุล รันและสหสัมพันธ์
- 1. คุณสมบัติสมดุล (Balance) รหัสนี้มี "1" 8 ตัว และ "0" 7 ตัว ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติสมดุล
- 2. คุณสมบัติรัน (Run property) รหัสนี้มี
  - 2 ชุดของรัน 1 บิตของบิต 1 และ 2 ชุดของรัน 1 บิตของบิต 0 → 100110101111000
  - 1 ชุดของรัน 2 บิตของบิต 1 และ 1 ชุดของรัน 2 บิตของบิต 0 → 100110101111000
  - 0 ชุดของรัน 3 บิตของบิต 1 และ 1 ชุดของรัน 3 บิตของบิต 0 → 100110101111000
  - 1 ชุดของรัน 4 บิตของบิต 1 และ 0 ชุดของรัน 4 บิตของบิต 0 → 100110101111000
  - จากลำดับนี้ มีความใกล้เคียงกับคุณสมบัติรัน

ตัวอย่างการประเมินรหัสสุ่มเทียม

- 3. คุณสมบัติสหสัมพันธ์ พิจารณาผลลัพธ์ของ $[b] \oplus [b]^{(1)}$ และ $[b] \oplus [b]^{(2)}$ การประเมินค่าสหสัมพันธ์ค่อนข้างยุ่งยาก

$$[b] \oplus [b]^{(1)} = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0] \oplus [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$$

$$= [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]$$

เป็นลำดับที่สมดุล ("1" 8 ตัวและ "0" 7 ตัว)

ในทางคณิตศาสตร์คำนวณง่ายขึ้น ถ้าเอา 2 ลำดับนี้มาตั้ง 2 บรรทัด และทำการ Exclusive-OR กัน เหมือนกับบวกเลขที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้น สามารถคำนวณค่า $[b] \oplus [b]^{(1)}$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{rl} & [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0] \\ \oplus & \underline{[0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]} \\ & [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0] \end{array}$$

ตัวอย่างการประเมินรหัสสุ่มเทียม

ในแนวทางเดียวกัน, $[b] \oplus [b]^{(2)}$ =

$$
\begin{array}{ll}
 & [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0] \\
\oplus & \underline{[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]} \\
 & [1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]
\end{array}
$$

เป็นลำดับที่สมดุลเช่นกัน

จากผลลัพธ์ของ $[b] \oplus [b]^{(j)}$ มีคุณสมบัติสมดุล สำหรับ j = 3, 4, ... 14.

จากคุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ สามารถสรุปได้ว่า ลำดับ “100110101111000” เป็นไปตามคุณสมบัติสมดุล รัน และสหสัมพันธ์ ดังนั้นรหัสชุดนี้เป็นรหัสสุ่มเทียม