Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes HMM λ_1 mit den gültigen Endzuständen $\boldsymbol{q_T} = \{2, 3\}$ und den möglichen Beobachtungen $\boldsymbol{v} = \{A, B, C\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Zeichnen Sie das Zustandsübergangsdiagramm und die allgemein möglichen Übergänge zwischen einem Zeitpunkt t und dem folgenden Zeitpunkt $t + 1$.
- Handelt es sich um ein ergodisches HMM?
- Handelt es sich um ein Rechts-Links HMM?

Nehmen wir nun an, die Sequenz A→B→C→A→B wurde beobachtet. Es gelte also $\boldsymbol{o_1} = (A, B, C, A, B)$.

- Zeichnen Sie das Trellisdiagramm der möglichen Übergänge für diese Beobachtungssequenz
- Berechnen Sie die Vorwärtswahrscheinlichkeit $p(o_1|\lambda_1)$
- Berechnen Sie die wahrscheinlichste Zustandsabfolge für λ_1 gegeben o_1 unter Verwendung des Viterbi-Algorithmus

Wir nehmen nun ein zweites HMM λ_2 an, dass mit Ausnahme der Einsprungwahrscheinlichkeiten e identisch zu HMM λ_1 sei.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Unterscheidet sich das Zustandsübergangsdiagramm von dem des vorherigen HMM? Wenn ja, wie?
- Berechnen Sie die Vorwärtswahrscheinlichkeit $p(o_1|\lambda_2)$
- Berechnen Sie die wahrscheinlichste Zustandsfolge für λ_2 gegeben o_1 unter Verwendung des Viterbi-Algorithmus

Musterlösung Aufgabe 1

Wir betrachten das gegebene HMM λ_1:

…nach Zustand 2

Von Zustand 1…

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

nach

von	1	2	3	4
1	0.1	0.9	0	0
2	0.5	0.2	0.3	0
3	0	0	0.5	0.5
4	0	0	1.0	0

$$B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Zustand

$p(o\|Z)$		1	2	3	4
1	„A“	0.6	0.4	0.5	0
2	„B“	0.4	0.5	0.3	0.1
3	„C“	0	0.1	0.2	0.9

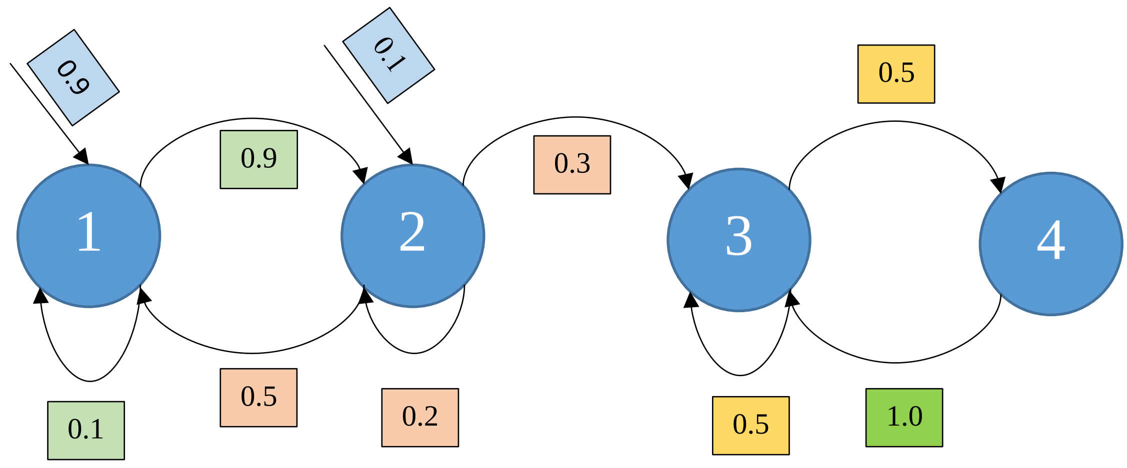
$$e = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Einsprungswahrscheinlichkeit
Für jeden der vier Zustände:

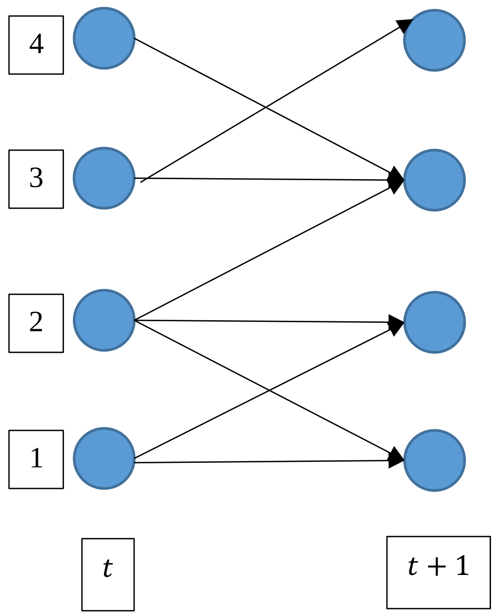
1	0.9
2	0.1
3	0
4	0

Wir haben also ein nicht ergodisches HMM vorliegen, da nicht jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus erreicht werden kann (Nulleinträge in A). Weiterhin liegt auch kein Rechts-Links-HMM vor, da die A Matrix nicht die obere Dreiecksform hat.

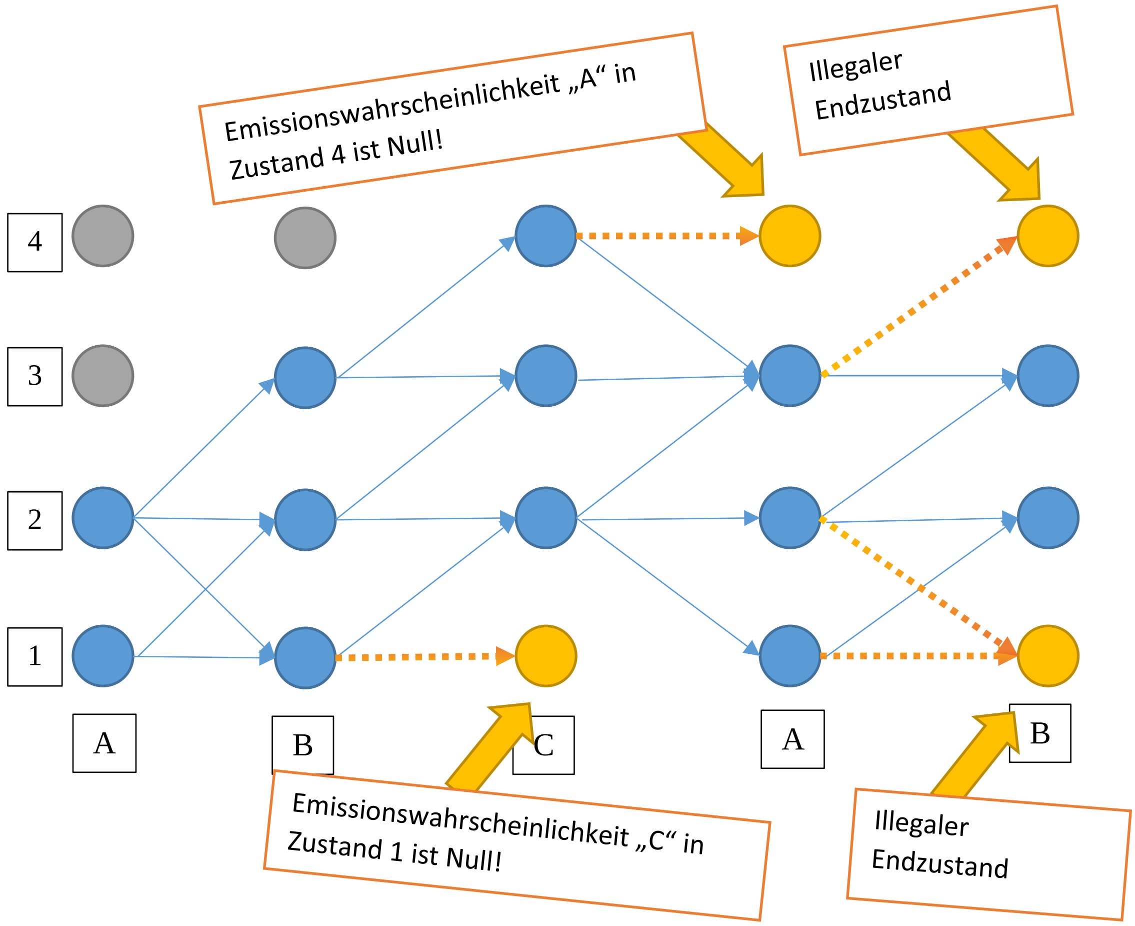
Für das gegebene HMM erhalten wir folgendes Zustandsübergangsdiagramm (Farben zeige Zuordnung zu obigen Matrizen):



Der allgemeine Übergang zwischen zwei Zeitschritten sieht damit wie folgt aus:



Es ist zu beachten, dass dies der allgemeine Fall ist. Beim Zeichnen des Trellis-Diagramms ist besondere Sorgfalt bei den Endzuständen (nicht alle erlaubt) und den Emissionen von Zeichen notwendig: So kann z.B. das Zeichen „A“ in Zustand 4 nicht ausgesandt werden. Wie erhalten also folgendes Trellis, wobei erlaubte Übergänge blau und illegale Übergänge orange markiert sind:



Wir sehen also, dass beim Zeichnen des Trellis zulässige Emissionen und Endzustände beachtet werden müssen!

Bei der Berechnung der Vorwärtswahrscheinlichkeit kommen wir auf folgende Zwischenwerte:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.04 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0.0296 \\ 0.2470 \\ 0.0036 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0076 \\ 0.0152 \\ 0.0016 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0.0023 \\ 0.0006 \\ 0.0057 \\ 0 \end{pmatrix} a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0011 \\ 0.0009 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und kommen schließlich auf $p(o_1|\lambda_1) = 0.0020$

Tipp: Um die α_i Werte rasch zu berechnen, empfehle ich die entsprechende Spalte in der A Matrix zu betrachten, i.e. die dritte Spalte gibt die Inzidenzwahrscheinlichkeit zum Zustand „3“ von allen übrigen Zuständen. So lassen sich die $a_{ij} \cdot \alpha_i$ Terme rasch berechnen, abschließend braucht man nur noch die entsprechende Beobachtungswahrscheinlichkeit mit der Summe der Teilterme zu multiplizieren.

Der Viterbi Algorithmus kommt auf folgende Sequenz:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.04 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 0.0216 \\ 0.2430 \\ 0.0036 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0049 \\ 0.0146 \\ 0.0016 \end{pmatrix}, \delta_4 = \begin{pmatrix} 0.0015 \\ 0.0004 \\ 0.0036 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6561 \cdot 10^{-3} \\ 0.5468 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} S \\ S \\ X \\ X \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ X \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Psi_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ X \end{pmatrix}, \Psi_5 = \begin{pmatrix} X \\ 1 \\ 3 \\ X \end{pmatrix}$$

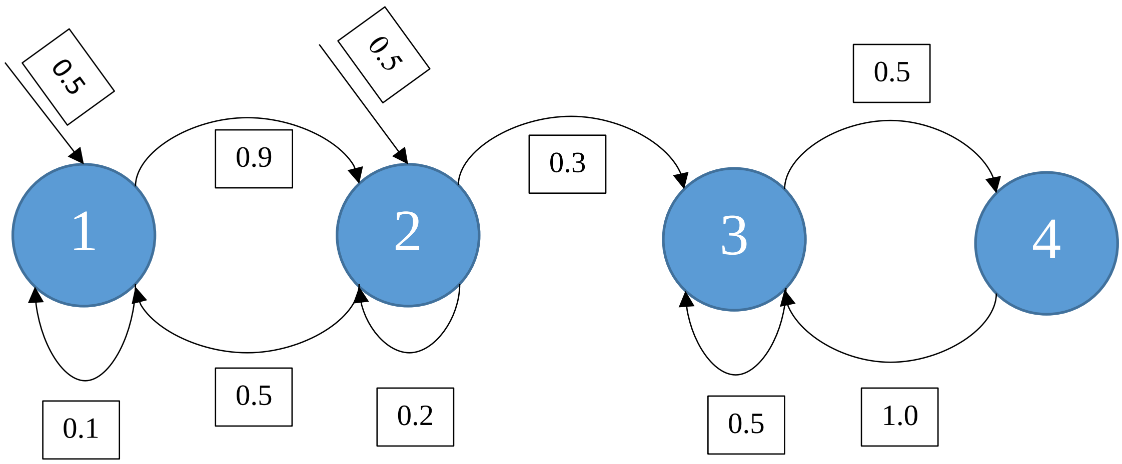
Wir finden also die höchste Wahrscheinlichkeit in δ_5 (bei Zustand 2) und verfolgen den Pfad mittels der Werte in Ψ_t zurück: Start → 1 → 2 → 2 → 1 → 2 (Ziel).

NB: Im Buch werden diese Werte direkt an das Trellis geschrieben. Bei komplexeren Verläufen kann dies schnell unübersichtlich werden, daher hier die separate Notation nach δ_i und Ψ_i.

Wir betrachten nun den Fall mit des HMM λ_2 mit

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Struktur ist nahezu unverändert, lediglich die Einsprungwahrscheinlichkeiten e sind verändert.



An den Übergängen zwischen den Zeitschritten ändert sich sonst nichts weiter. Das Trellis an sich bleibt somit unverändert. Die Berechnung der Vorwärtswahrscheinlichkeiten führt zu folgenden Ergebnissen:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0.0520 \\ 0.1550 \\ 0.0180 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0078 \\ 0.0111 \\ 0.0081 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0.0023 \\ 0.0006 \\ 0.0080 \\ 0 \end{pmatrix} a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0011 \\ 0.0013 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vorwärtswahrscheinlichkeit ergibt sich damit zu $p(\boldsymbol{o_1}|\lambda_2) = 0.0024$ – also noch kein großer Unterschied zu λ_1. Wenn wir den Viterbi-Algorithmus anwenden, erkennen wir aber einen deutlich anderen Zustandsverlauf:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 0.0400 \\ 0.1350 \\ 0.0180 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0036 \\ 0.0081 \\ 0.0081 \end{pmatrix}, \delta_4 = \begin{pmatrix} 0.0011 \\ 0.0003 \\ 0.0040 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4860 \cdot 10^{-3} \\ 0.6075 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} S \\ S \\ X \\ X \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ X \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Psi_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ X \end{pmatrix}, \Psi_5 = \begin{pmatrix} X \\ 1 \\ 3 \\ X \end{pmatrix}$$

Somit ist der wahrscheinlichste Pfad durch λ_2: Start→2→3→4→3→3

Wir sehen damit, wie selbst relativ kleine Änderungen zu völlig anderen Verläufen führen können.

Aufgabe 2

Frau Sneakwell hat eine Führungsposition bei der NSA. Ihr Ehemann, Kongressabgeordneter Sneakwell, will wissen, an welchen Tagen ihn seine Ehefrau heimlich abhört. Er weiß, dass Sie ihn an solchen Tagen mit höherer Wahrscheinlichkeit abends mit „Honey“ ansprechen wird. Aufgrund seiner jahrelangen Erfahrung mit Frau Sneakwell erstellt er folgendes HMM, bei dem Zustand 1 mit „Abhören“ korrespondiert:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} "Honey" \\ "Tiger" \end{bmatrix}, q_T = \{1,2\}$$

Er hat für eine Woche (beginnend Montags) folgende Beobachtungen gemacht:

$$\boldsymbol{o} = (Honey, Honey, Tiger, Tiger, Tiger, Honey, Honey)$$

Am Samstag hat er in einer geheimen Ausschusssitzung seiner Frau das Budget gestrichen. Hat seine Frau ihn an diesem Tag abgehört und sollte er daher Rosen mitbringen?

Lösung Aufgabe 2

Es gibt keine Einschränkung der Endzustände, daher $q_T = \{1,2\}$.

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.15 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0640 \\ 0.0960 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.096 \\ 0.0358 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0036 \\ 0.0125 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0013 \\ 0.0044 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.0018 \\ 0.0007 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.2810 \cdot 10^{-3} \\ 0.4215 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Der wahrscheinlichste Pfad ist somit:

(Sonntag)→Horch→Horch→Ruhe→Ruhe→Ruhe→Horch→Ruhe

Am Samstag wurde er somit wahrscheinlich abgehört. Er sollte Rosen kaufen.

Aufgabe 3

Hier finden wir nun einige weitere HMMs zum Üben. Bestimmen Sie jeweils die Vorwärtswahrscheinlichkeit, den wahrscheinlichsten Pfad mittels Viterbi und bestimmen Sie, ob das HMM ergodisch ist oder eine links-rechts-Struktur besitzt. Die Musterlösungen dienen hier nur der Ergebniskontrolle und sind entsprechend einfach gehalten.

HMM1:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, q_T = \{5\}$$

Sequenz 1.1:

$o_1 =$ (X, Z, X)

Sequenz 1.2:

$o_2 = (X, Z, Y)$

Sequenz 1.3:

$o_3 = (Y, Y, X)$

HMM2:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} Up \\ Down \\ Left \\ Right \end{bmatrix}, q_T = \{1,2,3\}$$

Sequenz 2.1

$$o_1 = (Up, Down, Left, Up)$$

Sequenz 2.2

$$o_2 = (Left, Left, Down, Right)$$

Lösungen Aufgabe 3

HMM 1:

Links-Rechts-HMM

Sequenz 1:

Vorwärtswahrscheinlichkeit (man beachte q_T!):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.02 \\ 0.04 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0903 \\ 0.0544 \\ 0.0270 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0090 \\ 0.0130 \\ 0.0086 \\ 0.0081 \end{pmatrix}, p(o_1|\lambda) = 0.0081$$

Viterbi-Algorithmus:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.02 \\ 0.04 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \\ S \\ X \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0882 \\ 0.0504 \\ 0.0192 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0088 \\ 0.0106 \\ 0.0040 \\ 0.0050 \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pfad: Start → 1 →3→5

Sequenz 2:

Vorwärtswahrscheinlichkeit: $p(o_2|\lambda) = 0$

Der einzige erlaubte Endzustand ist $q_T = \{5\}$. Aus der Beobachtungsmatrix sehen wir aber, dass die Beobachtung „Y“ aus diesem Zustand heraus überhaupt nicht emittiert werden darf (Nulleintrag). Diese Beobachungssequenz ist also mit diesem HMM nicht realisierbar. Ebenso kann kein gültiger Pfad gefunden werden.

Sequenz 3:

Vorwärtswahrscheinlichkeit (wieder vereinfacht q_T die Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeit):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.06 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0474 \\ 0.0068 \\ 0.0165 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0.0048 \\ 0.0060 \\ 0.0030 \\ 0.0023 \end{pmatrix}, p(o_3|\lambda) = 0.0023$$

Viterbi-Algorithmus:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.06 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \\ S \\ X \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0294 \\ 0.0036 \\ 0.0081 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0.0029 \\ 0.0035 \\ 0.0007 \\ 0.0008 \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pfad: Start → 4 →4→5

HMM2

Ergodisches HMM

Sequenz 1:

Vorwärtswahrscheinlichkeit:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.0350 \\ 0.004 \\ 0.006 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ 0 \\ 0.0015 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0.1249 \cdot 10^{-3} \\ 0.6584 \cdot 10^{-3} \\ 0.5232 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Somit $p(o_1|\lambda) = 0.0013$

Viterbi-Algoritmus:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi_1 = \begin{bmatrix} S \\ X \\ X \end{bmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0.0350 \\ 0.0040 \\ 0.0060 \end{bmatrix}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0.0017 \\ 0 \\ 0.0010 \end{bmatrix}, \Psi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_4 = \begin{bmatrix} 0.0875 \cdot 10^{-3} \\ 0.2800 \cdot 10^{-3} \\ 0.2100 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \Psi_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Somit erhalten wir folgenden Pfad: Start→1→1→1→2

Sequenz 2:

Vorwärtswahrscheinlichkeit:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0 \\ 0.0030 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.0022 \\ 0.0004 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0.1243 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0.3195 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Somit $p(o_1|\lambda) = 4.4380 \cdot 10^{-4}$

Viterbi-Algoritmus:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi_1 = \begin{bmatrix} S \\ X \\ X \end{bmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0 \\ 0.0030 \end{bmatrix}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0.0018 \\ 0.0002 \\ 0.0003 \end{bmatrix}, \Psi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_4 = \begin{bmatrix} 0.0875 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0.1575 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \Psi_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Somit erhalten wir folgenden Pfad: Start→1→1→1→3