科学计算

Charles

2023 年 秋

目录

1 引论 **5**

1.1 科学计算的研究对象 5

1.2 数值计算中的误差 6

1.2.1 误差的来源与分类 6

1.2.2 绝对误差, 相对误差与有效数字 7

1.2.3 数值运算的误差估计 12

1.3 数值计算中的一些原则 14

Chapter 1

引论

1.1 科学计算的研究对象

许多实际问题, 在一定的假设下, 可以用数学语言来描述或分析, 即所谓的数学模型问题, 例如简单的代数方程问题, 复杂的非线性偏微分方程问题. 这些模型问题建立以后, 就需要求解这些模型问题的解. 然而, 人部分模型问题的解析解很难求到.

例 1.1.1 求解线性方程组 $Ax = b$, 其中系数矩阵 A 是 $n \times n$ 的非奇异方阵.

解 按照 Cramer 法则, 此方程的解为:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

如解 n 阶方程组, 要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式的值, 每个行列式按 Laplace 展开计算, 至少需要做 $(n+1)n! = (n+1)\,!$ 次乘法运算. 设 $n = 20$, 需要进行 $21! \approx 5.109094217170944 \times 10^{19}$ 次的乘法运算. 设用每秒可做一亿次乘法的计算机, 一年可以做 $365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 10^8 \approx 3.15 \times 10^{15}$ 次乘法. 所以在此计算机上用 Cramer 法则解 20 阶的线性方程组, 需要的时间大约为

$$\left(5.109094217170944 \times 10^{19}\right) \div \left(3.15 \times 10^{15}\right) \approx 1.6219 \times 10^4 = 1.6219 \text{ (万年)}.$$

这显然是不可行的.

例 1.1.2 求超越方程 $\tan x + \sin x + x^2 = 0$ 和 $1 + \cos x - 5\sin^2 x = 0$ 的根.

例 1.1.3 不用计算器, 求 $\sqrt{11}$ 的近似值.

例 1.1.4 计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

科学计算的目的就是通过建立数值方法将数学模型问题离散化, 然后设计算法, 通过上机计算, 求解离散问题, 将得到的数值解作为原模型问题的近似解. 基本过程如下图描述:

$$\begin{tikzcd}
\text{实际问题} \arrow[r, "\text{用数学语言描述}"] & \text{数学模型问题} \arrow[d, "\text{数值方法}"] \\
\text{数值解} \arrow[u, "\text{近似}"] & \text{数学模型的离散化} \arrow[l, "\text{设计算法}"', "\text{上机计算}"]
\end{tikzcd}$$

科学计算的主要研究内容:

- 数值方法的建立;
- 数值方法的分析, 包括方法的收敛性, 稳定性及误差分析;
- 有效算法的设计.

1.2 数值计算中的误差

数值方法的特点之一就是所求得的解是近似解, 通常总是存在一定的误差 (error). 误差分析是数值分析中一个很重要的课题.

1.2.1 误差的来源与分类

误差是人们用来描述数值计算中近似解的精确程度, 是科学计算中的一个十分重要的概念. 科学计算中误差的来源主要有以下几个方面:

1. **模型误差**: 从实际问题中抽象出数学模型, 往往是抓住主要因素, 忽略次要因素, 因此, 数学模型与实际问题之间总会存在一定的误差.

2. **观测误差**: 模型中往往包含各种数据或参量, 这些数据一般都是通过测量和实验得到的, 也会存在一定的误差.

3. **截断误差** (truncation error): 也称方法误差, 是指对数学模型进行数值求解时产生的误差.

例如, 函数 $f(x)$ 用泰勒 (Taylor) 多项式

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

近似代替, 则数值方法的截断误差为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

4. **舍入误差** (round-off error): 由于计算机的机器字长有限, 做算术运算时存在一定的精度限制, 也会产生误差.

在科学计算中, 我们总假定数学模型是准确的, 因而不考虑模型误差和观测误差, 主要研究截断误差和舍人误差对计算结果的影响.

1.2.2 绝对误差, 相对误差与有效数字

精度是数值计算中的一个非常重要的概念, 衡量精度通常依靠两个指标, 一个是绝对误差, 一个是相对误差.

绝对误差与绝对误差限

定义 1.2.1 (绝对误差) 设 x 为准确值 (真值), x^* 为 x 的近似值, 称

$$e^* = x^* - x$$

为近似值的**绝对误差**, 简称**误差**.

定义 1.2.2 (绝对误差限) 若存在正数 ε^*, 使得

$$|x^* - x| \leqslant \varepsilon^*,$$

则称 ε^* 为近似值的**绝对误差限**, 简称**误差限**.

$$x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*,$$

在工程中, 通常用 $x = x^* \pm \varepsilon$ 表示 x^* 的误差限为 ε.

注

- 绝对误差不是误差的绝对值, 可能是正的, 也可能是负的.
- 由于精确值通常是不知道的, 因此绝对误差一般也是不可知的, 在做误差估计时, 我们所求的通常是误差限.
- 误差限不唯一, 越小越好, 一般是指所能找到的最小上界.

相对误差与相对误差限

绝对误差的大小, 不能完全刻画一个近似值的准确程度, 例如测量 1000 米和 1 米两个长度, 若它们的绝对误差都是 1 厘米, 显然前者的测量比较准确. 所以, 在决定一个近似值的精确度时, 除了考虑绝对误差的大小外, 还需考虑该精确值本身的大小, 为此引入相对误差的概念.

定义 1.2.3 (相对误差) 近似值的误差与准确值的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 x^* 的**相对误差**, 记作 e_r^*.

定义 1.2.4 (相对误差限) 若存在正数 ε_r^*, 使得

$$|e_r^*| = \left|\frac{x - x^*}{x}\right| \leqslant \varepsilon_r^*,$$

则称 ε_r^* 为**相对误差限**.

实际计算中, 由于精确值 x 通常是未知的, 因此一般取

$$\frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

作为 x^* 的相对误差, $\varepsilon_r^* = \varepsilon^* / |x^*|$.

注
- 近似值的精确程度通常取决于相对误差的大小;
- 实际计算中我们所能得到的通常是相对误差限 (所能找到的最小上界);
- 绝对误差有量纲, 但相对误差没有.

有效数字

定义 1.2.5 (有效数字) 设 x 为准确值, x^* 是 x 的近似值 ($x^* \neq 0$). 将 x^* 写成如下**规格化标准形式**:

$$x^* = \pm 10^m \times a_1.a_2a_3 \cdots a_n \cdots a_l,$$

其中 m, n, l 为整数 ($l \geqslant n \geqslant 1$), a_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) 为 0 到 9 中的某一个, $a_1 \neq 0$. 如果

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1} \text{ (i.e. } 0.5 \times 10^m \times 10^{-n+1}),$$

则称 x^* 至少有 n 位**有效数字** ($n \leqslant l$). 如果 $n = l$ 则称 x^* 为**有效数** (每位数字都是有效数字).

若

$$\frac{1}{2} \times 10^{m-n} < |x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$$

则 x^* 恰好有 n 位**有效数字**.

换而言之, 若 $0.5 \times 10^k < |x^* - x| \leqslant 0.5 \times 10^{k+1}$, 则 x^* 恰好有 $m - k$ 位有效数字.

例 1.2.6 已知 $x = \pi$, 取 x 的近似值 $x^* = 3.14$ 和 $y^* = 3.15$. 问 x^* 利 y^* 各有几位有效数字.

解 先求 x^* 的有效数字的位数. 分如下两步:

(1) x^* 的规格化标准形式

$$x^* = 10^0 \times 3.14 \quad (m = 0, l = 3).$$

(2)

$$\begin{aligned}|\pi - x^*| &= |3.1415926 \cdots - 3.14| = 0.0015 \cdots \\ &\leqslant 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{0-3+1}.\end{aligned}$$

所以 x^* 至少有 3 位有效数字. 因为至多有 3 位有效数字, 所以 x^* 是有效数.

同理, 对 y^*, 分如下两步: (1) y^* 的规格化标准形式

$$y^* = 10^0 \times 3.15 \quad (m=0, l=3)$$

(2)

$$\begin{aligned}|\pi - y^*| &= |3.1415926\cdots - 3.15| = 0.0084\cdots \\ &< 0.05 = \frac{1}{2}\times 10^{-1} = \frac{1}{2}\times 10^{0-2+1}\end{aligned}$$

所以 y^* 至少有 2 位有效数字. 但因为

$$\begin{aligned}|\pi - y^*| &= |3.1415926\cdots - 3.15| = 0.0084\cdots \\ &> 0.005 = \frac{1}{2}\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times 10^{6-3+1},\end{aligned}$$

所以, 不可能有 3 位有效数字, 所以 y^* 具有 2 位有效数字.

有效数字与四舍五入原则

四舍五入原则: 逝常指把小数点后面的数字 (尾数部分) 四舍五入, 即: 如果含去部分的第一位数字小于五, 则全去; 如果大于全于五, 则被保留部分的最后一位数字加 1.

则果 x^* 是由 x 经过四舍五入得到的, 则 x^* 的 (绝对) 误差限不超过最后一位的半个单位, 即:

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-m^*}, \tag{1.1}$$

斯中 m^* 为 x^* 的小数点后的位数.

例 1.2.7 $x = 0.052345$, $x^* = 0.0523$.

$$|x - x^*| = 0.000045 \leqslant 0.00005 = \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

例 1.2.8 $x = 0.052355$, $x^* = 0.0524$.

$$|x - x^*| = 0.000045 \leqslant 0.00005 = \frac{1}{2}\times 10^{-4}.$$

如下讨论有效数字与四舍五入原则之间的关系. 设 x^* 是由 x 经过四舍五入得到的, 它的规格化标准形式为:

$$\begin{aligned}x^* &= \pm 10^m \times a_1.a_2a_3\cdots a_l \quad (a_1 \neq 0)\ \ (l \geqslant m+1) \\ &= \begin{cases} \pm a_1a_2a_3\cdots a_{m+1}.a_{m+2}\cdots a_l & \text{if } m \geqslant 0, \\ \pm 0.\underbrace{00\cdots 0}_{-(m+1)}a_1a_2a_3\cdots a_l & \text{if } m < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

所以, x^* 小数点后的位数 $m^* = l-(m+1)$. 由估计 (1.1),

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{m-l+1},$$

所以, x^* 有 l 位有效数字, 即 x^* 为有效数. 于是, 有如下结论.

定理 1.2.9 如果近似数 x^* 是由四舍五入得到的, 则它的第一位不为零及以后的位数就是它的有效数字的位数 (为有效数).

例 1.2.10 已知 $x = 8.000033$, 取它的近似数 $x^* = 8$ 和 $y^* = 8.0000$. 则 x^* 有 1 位有效数字, y^* 有 5 位有效数字.

例 1.2.11 已知 $x = 0.00002345$, 取它似近似数 $x^* = 0.000023$. 则 x^* 有 2 位有效数字.

例 1.2.12 根据四舍五入原则写出下列各数具有 5 位有效数字的近似值:

$$23.7434, \quad 0.05634578, \quad 20.000012.$$

解 (有效数字的位数为第一位不为零及以后的位数) 分别是:

$$23.743, \quad 0.056346, \quad 20.000.$$

例 1.2.13 已知 $\pi = 3.14159265\cdots$, 取它的近似值

$$x_1^* = 3.1416, \quad x_2^* = 3.1414.$$

试问: x_1^*, x_2^* 分别有几位有效数字?

解 x_1^* 有 5 位有效数字 (根据四舍五入原则).

对于 x_2^*,

$$\begin{aligned} &x_2^* = 10^0 \times 3.1414 \ (m = 0, l = 5) \quad \text{(规格化标准形式)}, \\ &|\pi - x_2^*| = 0.00019265\cdots < 0.0005 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{0-4+1}, \end{aligned}$$

所以, x_2^* 至少有 4 位有效数字. 但因为

$$|\pi - x_2^*| > 0.00005 = \frac{1}{2} \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 10^{0-5+1},$$

所以, x_2^* 至多有 4 位有效数字. 所以, x_2^* 有 4 位有效数字.

注 定理 1.2.9 的结论不能用于四则算数运算, 因为四舍五入的近似数算术运算后得到的近似数不一定满足四舍五入原则.

例 1.2.14 已知

$$\begin{aligned} &x_1 = 1.03, \quad x_2 = 1.003, \\ &x_1^* = 1.0, \quad\ \ x_2^* = 1.0. \end{aligned}$$

则 x_1^* 有 2 位有效数字, x_2^* 存 2 位有效数字. 作如下乘法运算

$$\begin{aligned} &y_1 = 6 \times x_1 = 6.18, \quad y_2 = 6 \times x_2 = 6.018, \\ &y_1^* = 6 \times x_1^* = 6.0, \quad\ \ y_2^* = 6 \times x_2^* = 6.0. \end{aligned}$$

则 y_1^* 有 1 位有效数字, y_2^* 有 2 位有效数字.

有效数字与误差限

定理 1.2.15 设 x^* 是 x 的近似, 它的规格化标准形式为

$$x^* = \pm 10^m \times a_1 \cdot a_2 a_3 \cdots a_l, \quad a_1 \neq 0.$$

若 x^* 有 n 位有效数字 $(n \leqslant l)$, 则

$$\varepsilon^* \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

反之, 若

$$\varepsilon^* \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1},$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字.

证 由有效数字的定义直接可得. □

定理 1.2.16 设 x^* 是 x 的近似, 它的规格化标准形式为

$$x^* = \pm 10^m \times a_1.a_2 a_3 \cdots a_l, \quad a_1 \neq 0.$$

若 x^* 有 n 位有效数字 $(n \leqslant l)$, 则

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}.$$

反之, 若

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2\,(a_1+1)} \times 10^{-n+1}, \quad n \leqslant l,$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字.

证 显然

$$10^m \times a_1 \leqslant |x^*| \leqslant (a_1+1) \times 10^m,$$

若 x^* 具有 n 位有效数字, 则

$$|\varepsilon_r| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}.$$

反之, 若 $|\varepsilon_r| \leqslant \dfrac{1}{2\,(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$, 则

$$|x^* - x| = |x^*| \cdot |\varepsilon_r| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

故 x^* 至少有 n 位有效数字. □

从这个定理可以看出, 有效数字越多, 相对误差越小. 同样, 如果相对误差越小, 则有效数字越多.

例 1.2.17 要使 $\sqrt{20}$ 的近似数相对误差限小于 0.001, 则要取几位有效数字?

解

$$\sqrt{20}=4.4\cdots, \quad x^*\approx\sqrt{20},$$
$$x^*=10^0\times 4\cdots(m=0,a_1=4) \quad \text{(规格化标准形式)}.$$

设要取 n 位有效数字, 由定理 1.2.16,

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}=\frac{1}{8}\times 10^{-n+1}<0.001 \quad\Longrightarrow\quad n\geqslant 4.$$

所以至少要取 4 位有效数字.

1.2.3 数值运算的误差估计

设 $x_1^*\approx x_1$, $x_2^*\approx x_2$. 再设 x_1^* 和 x_2^* 的一个误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 和 $\varepsilon(x_2^*)$, 即:

$$|x_1^*-x_1|\leqslant\varepsilon(x_1^*), \quad |x_2^*-x_2|\leqslant\varepsilon(x_2^*).$$

算术运算的误差估计

算术运算: $x_1^*\pm x_2^*\approx x_1\pm x_2$, $\quad x_1^*x_2^*\approx x_1x_2$, $\quad \dfrac{x_1^*}{x_2^*}\approx\dfrac{x_1}{x_2}$ $(x_2\neq 0, x_2^*\neq 0)$.

性质 1.2.18

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)\leqslant\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*),\\
&\varepsilon(x_1^*x_2^*)\leqslant|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1|\,\varepsilon(x_2^*)\approx|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*),\\
&\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\leqslant\frac{|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_i|\,\varepsilon(x_2^*)}{|x_2|\,|x_2^*|}\approx\frac{|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_i|=(x_2^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2\neq 0, x_2^*\neq 0).
\end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned}
|x_1^*\pm x_2^*-(x_1\pm x_2)|&\leqslant|x_1^*-x_1|+|x_2^*-x_2|\\
&\leqslant\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_1^*x_2^*-x_1x_2|&=|x_1^*x_2^*-x_1x_2^*+x_1x_2^*-x_1x_2|\\
&=|x_2^*(x_1^*-x_1)+x_1(x_2^*-x_2)|\\
&\leqslant|x_2^*|\,|x_1^*-x_1|+|x_1|\,|x_2^*-x_2|\\
&\leqslant|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1|\,\varepsilon(x_2^*)\\
&\approx|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*),
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{x_1^*}{x_2^*}-\frac{x_1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_2^*x_1-x_1^*x_2}{x_2x_2^*}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{|x_2^*|\,|x_1-x_1^*|+|x_1^*|\,|x_2^*-x_2|}{|x_2x_2^*|}\\
&\leqslant \frac{|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*)}{|x_2|\,|x_2^*|}\\
&\approx \frac{|x_2^*|\,\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*|\,\varepsilon(x_2^*)}{|x_2^*|^2}\ \ (x_2\neq 0, x_2^*\neq 0). \qquad \square
\end{aligned}
$$

单变量可微函数的误差估计

对一元可微函数 $f(x)$, x 的近似值为 x^*, 以 $f(x^*)$ 近似 $f(x)$

$$
f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,\quad \xi\in(x,x^*),
$$

则

$$
|f(x)-f(x^*)|\leqslant|f'(x^*)|\,\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}\varepsilon^2(x^*)
$$

由于 $|x-x^*|$ 相对较小, 所以当 $|f''(x)|$ 与 $|f'(x)|$ 的比值不是很大时, 我们可以忽略二次项, 即

$$
|f(x)-f(x^*)|\lessapprox|f'(x^*)|\,\varepsilon(x^*),
$$

所以误差限

$$
\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\,\varepsilon(x^*),
$$

相对误差

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(x)-f(x^*)|}{|f(x^*)|}&\lessapprox\frac{|f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\varepsilon(x^*)\\
&=\frac{|x^*f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\frac{\varepsilon(x^*)}{|x^*|}\leqslant\frac{|x^*f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\varepsilon_r(x^*),
\end{aligned}
$$

所以相对误差限

$$
\varepsilon_r(f(x^*))=\frac{|f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\varepsilon(x^*)\ \text{ or }\ \frac{|x^*f'(x^*)|}{|f(x^*)|}\varepsilon_r(x^*).
$$

多变量可微函数的误差估计

计算 $A=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的近似值为 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, A 的近似值 $A^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$, 则由泰勒展开得到

$$
\begin{aligned}
e(A^*)&\coloneqq A^*-A=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\lessapprox\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)(x_k^*-x_k)\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*e_k(x^*).
\end{aligned}
$$

则

$$
\varepsilon(A^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*),
$$

且

$$\varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|} \text{ or } \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \frac{\varepsilon_r(x_k^*)}{|A^*|}.$$

例 1.2.19 通过测量得到某场地的长 l 和宽 d 分别为: $l^* = 110$ m, $d^* = 80$ m, 其测量误差限分别为 0.2 m 和 0.1 m. 试求面积 $S = l \times d$ 的绝对误差限和相对误差限.

解 $S^* = l^* \times d^* = 110 \times 80 = 8800 \text{ m}^2$. 已知 $\varepsilon(l^*) = 0.2$ m, $\varepsilon(d^*) = 0.1$ m. 求绝对误差限 $\varepsilon(S^*)$ 和相对误差限 $\varepsilon_r(S^*)$.

法 1: 乘法运算的误差估计: $S = l \times d$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(S^*) &= \varepsilon(l^* \times d^*) \approx |d^*|\,\varepsilon(l^*) + |l^*|\,\varepsilon(d^*) \\ &= 80 \times 0.2 + 110 \times 0.1 = 27 \text{ m}^2, \\ \varepsilon_r(S^*) &= \frac{\varepsilon(S^*)}{S^*} \approx \frac{27}{8800} \approx 0.0031 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

法 2: 函数运算的误差估计: $S = S(l, d) = l \times d$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(S^*) = \varepsilon(S(l^*, d^*)) &\approx \left| \frac{\partial S(l^*, d^*)}{\partial l} \right| \varepsilon(l^*) + \left| \frac{\partial S(l^*, d^*)}{\partial d} \right| \varepsilon(d^*) \\ &= |d^*|\,\varepsilon(l^*) + |l^*|\,\varepsilon(d^*) = 80 \times 0.2 + 110 \times 0.1 = 27 \text{ m}^2, \\ \varepsilon_r(S^*) = \frac{\varepsilon(S^*)}{S^*} &\approx \frac{27}{8800} \approx 0.0031 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

习题

1.* 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数, 试分别指出其有效数字的位数:

$$x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 56.430, \quad x_4^* = 7 \times 1.0.$$

2.* 计算球体积要使相对误差限为 1% ，问度量半径时允许的相对误差限是多少?

3.* 设 $x > 0, x^*$ 的相对误差为 δ, 求 $\ln x$ 的误差.

4. 设 x 的相对误差为 2%, 求 x^n 的相对误差.

5. 正方形的边长大约为 100 cm, 应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm^2.

1.3 数值计算中的一些原则

索引

观测误差, 6
规格化标准形式, 8

截断误差, 6
绝对误差, 7
绝对误差限, 7

模型误差, 6

舍入误差, 6

误差, 7
误差限, 7

相对误差, 7
相对误差限, 8

有效数, 8
有效数字, 8