点集拓扑学

Charles

2023 年 2 月

目录

Chapter 1

拓扑空间与连续映射

1.1 度量空间: 作为拓扑空间例子

1.1.1 度量空间的基本概念

度量空间的定义

定义 1.1.1 (度量空间) 若 X 是一个集合, 映射

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

满足如下条件：对于任意 $x, y, z \in X$, 均有:

(a) (正定性) $d(x,y) \geqslant 0$, 而且 $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(b) (对称性) $d(x,y) = d(y,x)$;

(c) (三角不等式) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$,

则我们称 (X,d) 为一个**度量空间**, 且称 d 为 X 上的一个**度量**.

度量空间的例子

例 1.1.2 (离散度量) 在任意集合 X 上, 均可定义如下的离散度量:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

例 1.1.3 ($\mathbb{R}^n$ 上的度量) 欧氏度量: $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$; [1]

l^1 度量: $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$;

l^∞ 度量: $d_\infty(x,y) = \sup\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$.

[1] 一般说的度量空间 $\mathbb{R}^n$ 都是指欧氏度量.

事实上, 这些度量都是如下 l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 度量的特例:

$$d_p(x,y) \coloneqq (|x_1-y_1|^p+\cdots+|x_n-y_n|^p)^{1/p}.$$

子空间度量

定理 1.1.4 (子空间度量) 设 (X,d) 是度量空间, $Y \subset X$ 为子集, 则

$$d_Y \coloneqq d|_Y$$

是 Y 上的一个度量.

证 对于任意 $y_1,y_2,y_3 \in Y \subset X$, 有

(1) $d_Y(y_1,y_2)=0 \Longleftrightarrow y_1=y_2$;

(2) $d_Y(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)=d(y_2,y_1)=d_Y(y_2,y_1)$;

(3) $d_Y(y_1,y_3)=d(y_1,y_3)\leqslant d(y_1,y_2)+d(y_2,y_3)=d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3)$. □

更一般地, 任意给定一个单射 $f: Y \to X$, 那么我们可以将 Y 等同于子集 $f(Y) \subset X$, 从而可以通过 X 上的度量 d_X 诱导在 Y 上的度量

$$d(y_1,y_2) \coloneqq d_X(f(y_1),f(y_2)).$$

度量空间中的开集

定义 1.1.5 (球与球面) 度量空间 (X,d) 中以点 x_0 为球心, 半径为 r 的**开球**、**闭球**和**球面**分别定义为

$$B_r(x_0)=\{x \in X \mid d(x,x_0)<r\},$$
$$\overline{B}_r(x_0)=\{x \in X \mid d(x,x_0)\leqslant r\},$$
$$S_r(x_0)=\{x \in X \mid d(x,x_0)=r\}.$$

定义 1.1.6 (开集与闭集) 设 (X,d) 是一个度量空间, $U \subset X$. 如果对于任意 $x \in U$, 均存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$B_\varepsilon(x) \subset U,$$

则称子集 $U \subset X$ 是一个**开集**. 如果子集 $F \subset X$ 的补集 $F^c = X \setminus F$ 是开集, 则称 F 为一个**闭集**.

不难验证度量空间 X 中的开球都是开集, 而闭球都是闭集; $\varnothing$, X 既是开集又是闭集.

命题 1.1.7 度量空间中:

(a) 任意一组开集 $\{G_\alpha\}$ 的并 $\bigcup G_\alpha$ 是开集;

(b) 任意一组闭集 $\{F_\alpha\}$ 的交 $\bigcap F_\alpha$ 是闭集;

(c) 任意一组有限个开集 $G_1, \cdots, G_n$ 的交 $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ 是开集;

(d) 任意一组有限个闭集 $F_1, \cdots, F_n$ 的并 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 是闭集.

证 令 $G = \bigcup_{a} G_\alpha$. 如果 $x \in G$, 就有某个 α, 使得 $x \in G_\alpha$. 因为 G_α 是开集, 所以存在 $B_\varepsilon(x) \subset G_\alpha \subset G$, 从而 G 是开集. 再者

$$\left(\bigcap_{\alpha} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} (F_\alpha^c)$$

而 F_α^c 是开集, 因此 $\left(\bigcap_{\alpha} F_\alpha\right)^c$ 是开集, 从而 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$ 是闭集.

其次, 设 $H = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, 对于任意 $x \in H$, 存在 r_i, 使得 $B_i(x) \subset G_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 令

$$r = \min\left(r_1, \cdots, r_n\right),$$

于是对于 $i = 1, \cdots, n$, $B_r(x) \subset G_i \subset H$, 所以 H 是开集. 类似地通过取余集, 有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (F_i^c)$$

是开集, 从而 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 是闭集. □

1.1.2 度量空间中的极限与连续

度量空间中的极限

定义 1.1.8 (极限) 设 (X, d) 是一个度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的一个点列. 如果存在 $x_0 \in X$, 满足: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 均存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n > N$, 均有

$$d\left(x_n, x_0\right) < \varepsilon,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 以 x_0 为**极限** (或称 $\{x_n\}$ **收敛**到 x_0), 记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ (或 $x_n \xrightarrow{d} x_0$ $(n \to \infty)$).

定义 1.1.9 (Cauchy 列) 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的一个点列, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $m, n \geqslant N$, 有

$$d\left(x_m, x_n\right) < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 **Cauchy 列**.

命题 1.1.10 度量空间 X 中, 若 $\{p_n\}$ 有极限, 则必为 Cauchy 列, 反之不一定成立.

证 若 $p_n \to p$ 且 $\varepsilon > 0$, 便有正整数 N, 只要 $n \geqslant N$, 便有 $d(p, p_n) < \varepsilon$. 因此, 只要 $n \geqslant N$ 和 $m \geqslant N$, 则

$$d(p_n, p_m) \leqslant d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon.$$

于是 $\{p_n\}$ 是 Cauchy 列.

反之, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 中, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是 Cauchy 列, 但在 X 中没有极限. □

命题 1.1.11 设 X 是度量空间, 则 $F \subset X$ 为闭集当且仅当任意点列 $\{x_n\} \subset F$, 若 $\{x_n\}$ 在 X 中有极限 x_0, 则 $x_0 \in F$.

证 (充分性) 设 $F \subset X$ 为闭集, 即 F^c 为开集, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 用反证法. 如果 $x \notin F$, 即 $x \in F^c$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_\varepsilon(x) \subset F^c$, 即 $B_\varepsilon(x) \cap F = \varnothing$. 而由于 $x_n \to x$, 则存在 $x_m \in F$ 使得 $d(x, x_m) < \varepsilon$, 即 $x_m \in B_\varepsilon(x) \cap F$, 矛盾.

(必要性) 设任意 $\{x_n\} \subset F$, 若 $\{x_n\}$ 在 X 中有极限 x_0, 则 $x_0 \in F$ 成立. 取 $x \notin F$, 即 $x \in F^c$. 则任意 $\{x_n\}$, x 不能是 $\{x_n\}$ 的极限. 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $F \cap B_\varepsilon(x) = \varnothing$ (否则若任意 $\varepsilon > 0$, $F \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, 则存在 $x_n \in F \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$, 这时 $\{x_n\} \subset F$ 以 x 为极限, 矛盾), 即 $B_\varepsilon(x) \subset F^c$. 所以 F^c 是开的, 从而 F 是闭的. □

度量空间中的连续映射

定义 1.1.12 (连续映射) 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个度量空间, 称映射 $f : X \to Y$ 为一个**连续映射**, 如果 $\forall p \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in X$, 只要 $d_X(x, p) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

定理 1.1.13 (连续映射的等价刻画) 一个映射 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续映射, 当且仅当对于 Y 中的任何开集 U, 其原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

证 (充分性) 若 f 是连续的, 设 $U \subset Y$ 是开集. 若 $p \in f^{-1}(U)$, 即 $f(p) \in U$, 由于 U 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset U$. 由 f 的连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 x, $d_X(p, x) < \delta$, 有 $f(x) \in B_\varepsilon(f(p)) \subset U$. 所以 $B_\delta(p) \subset f^{-1}(U)$, 所以 $f^{-1}(U)$ 是开集.

(必要性) 若对任意开集 $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ 是开集. 设 $p \in X$, 则任意 $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ 是开集, 且 $p \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$, 从而存在 $\delta > 0$, 使得 $B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$, 故 $f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p))$. 也即 $\forall x$, $d_X(p, x) < \delta$, 有 $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$, 所以 f 为连续映射. □

1.2 拓扑空间和基

1.2.1 拓扑空间

拓扑空间的概念

定义 1.2.1 (拓扑空间) 集合 X 上的一个**拓扑** (topology) 是指 X 的一个子集族 $\mathcal{T}$, 满足:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(2) $\mathcal{T}$ 的任意元素的并在 $\mathcal{T}$ 中;

(3) $\mathcal{T}$ 的任意有限元素的交在 $\mathcal{T}$ 中 (或 $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, 有 $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$).

$(X, \mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间** (topological space).

定义 1.2.2 (开集与闭集) 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $U \subset X$, 称 U 是一个**开集**, 如果 $U \in \mathcal{T}$; $V \subset X$, 称 V 是一个**闭集**, 如果 $X \setminus V$ 是开集.

拓扑空间也可以用闭集定义, 这是平凡的, 即:

$(1)'$ $\varnothing$ 和 X 都是闭集;

$(2)'$ 如果对任意 $\alpha \in \Lambda$, V_α 都是闭集, 那么 $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ 也是闭集;

$(3)'$ 如果 V_1, V_2 是闭集, 那么 $V_1 \cup V_2$ 也是闭集.

定义 1.2.3 (邻域) 设 X 是一个拓扑空间, 称 $U \subset X$ 是 $x \in X$ 的一个**邻域** (neighborhood), 如果 U 是包含 x 的一个开集.

拓扑空间的例子

例 1.2.4 (度量拓扑) 度量空间 (X, d) 是拓扑空间, $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset U\}$. [1]

例 1.2.5 (离散拓扑) 设 X 是任意集合, 令

$$\mathcal{T}_{\text{discrete}} = \mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}.$$

显然它是 X 上的一个拓扑, 且不难发现它是关于 X 上的离散度量的度量拓扑.

例 1.2.6 (平凡拓扑) 设 X 是任意集合, 令

$$\mathcal{T}_{\text{trivial}} = \{\varnothing, X\}.$$

易见它是 X 上的一个拓扑.

例 1.2.7 (余有限拓扑) 设 X 是任意集合, 令

$$\mathcal{T}_{\text{cofinite}} = \left\{A \subset X \mid \text{要么} A = \varnothing,\ \text{要么} A^c = X \setminus A \text{ 是一个有限集}\right\}.$$

它是 X 上的一个拓扑.

证 (1) $\varnothing \in \mathcal{T}$; $X \in \mathcal{T}$ 因为 $X^c = \varnothing$ 是有限的;

(2) 如果 $A, B \in \mathcal{T}$, $A, B \neq \varnothing$. 那么 A^c, B^c 是有限的, 所以 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 是有限的;

(3) 如果 $A_\alpha \in \mathcal{T}$ 而且至少有一个 $A_{\alpha_1} \neq \varnothing$, 那么 $\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c \subset A_{\alpha_1}^c$ 是有限的. □

[1] $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量拓扑又称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑或通常拓扑, 一般说的拓扑空间 $\mathbb{R}^n$ 都是指这一拓扑.

例 1.2.8 (余可数拓扑) 设 X 是任意集合. 令

$$\mathcal{T}_{\text{cocountable}} = \left\{ A \subset X \mid \text{要么} A = \varnothing,\ \text{要么} A^c \text{ 是至多可数的} \right\}.$$

可以验证它是 X 上的一个拓扑.

例 1.2.9 (Zariski 拓扑) 设 $X = \mathbb{C}^n$, $R = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$, 即复系数 n 元多项式环. 定义

$$\mathcal{T}_{\text{Zariski}} = \left\{ U \subset \mathbb{C}^n \mid \exists f_1, \cdots, f_m \in R \text{ 使得} U^c \text{ 为} f_1, \cdots, f_m \text{ 的公共零点集} \right\}.$$

可以证明这是一个拓扑. 更一般地, 可以在任意交换环上定义 Zariski 拓扑.

1.2.2 拓扑的基

基与基生成的拓扑

定义 1.2.10 (拓扑的基) X 的子集族 $\mathcal{B}$, 如果满足

(1) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$ (即 $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$);

(2) 任意 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 且任意 $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$,

则称 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个**基** (basis), $\mathcal{B}$ 的元素称为**基元素** (basis element).

一般 $\mathcal{B}$ 不是 X 上的一个拓扑, 但可以由 $\mathcal{B}$ 生成 X 的一个拓扑.

定义 1.2.11 (基生成的拓扑) 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基, 定义由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset U\}.$$

根据定义, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 即 $\mathcal{B}$ 中的每个元素都是拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 中的一个开集. 反之通常不成立.

证 下面验证由基 $\mathcal{B}$ 生成的 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 的确是 X 的一个拓扑.

(1) 显然 $\varnothing \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. 因为对于每一个 $x \in X$, 存在包含 x 的某一个基元素 B 且 $B \subset X$, 所以 $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(2) 取 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 记 $U = \bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha$, 对于 $x \in U$, 存在 α, 使得 $x \in U_\alpha$. 因为 $U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 所以存在一个基元素 B, 使得 $x \in B \subset U_\alpha \subset U$, 所以 $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(3) 任意 $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 对 $x \in U_1 \cap U_2$, 选取一个包含 x 的基元素 B_1, 使得 $B_1 \subset U_1$. 再选取包含 x 的基元素 B_2, 使得 $B_2 \subset U_2$. 根据基所满足的第二个条件, 存在一个包含 x 的基元素 B_3, 使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. 于是 $x \in B_3 \subset U_1 \cap U_2$, 从而 $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. □

注 不同的基可以生成相同的拓扑. 例如, $\mathbb{R}^2$ 的以下三个拓扑基所生成的拓扑都是欧氏拓扑:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \left\{ B_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0 \right\}, \\
\mathcal{B}_2 &= \left\{ B_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}^+ \right\}, \\
\mathcal{B}_3 &= \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

容易看出, 设 (X,d) 是度量空间, 则 $\{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ 是 X 的度量拓扑的一个基.

命题 1.2.12 如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基, 那么它所生成的拓扑为

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

证 由 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 可知, 对于任何子集族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, 都有

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}.$$

反之, 对于任意 $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 和任意 $x \in U$, 根据定义存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 因此 $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$, 即 U 具有给定的形式. □

注 给定一个开集通常不能唯一地表成基元素的并.

例 1.2.13 (下限拓扑 (Sorgenfrey 拓扑)) 设 $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. 由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 的**下限拓扑** (lower limit topology), 记为 $\mathcal{T}_\ell$, 具有下限拓扑的 $\mathbb{R}$ 记为 $\mathbb{R}_\ell$ (Sorgenfrey 直线).

定理 1.2.14 设 X 是一个拓扑空间. $\mathcal{C}$ 是 X 的一个开集族, 它满足对于 X 的每一个开集 U 及每一个 $x \in U$, 存在 $\mathcal{C}$ 的一个元繁 C, 使得 $x \in C \subset U$. 那么 $\mathcal{C}$ 就是 X 上这个拓扑的一个基.

证 先验证 $\mathcal{C}$ 是一个基. 基的第一个条件是显然满足的: 对于 $x \in X$, 因为 X 本身是开集, 根据假设存在 $C \in \mathcal{C}$, 使得 $x \in C \subset X$. 对第二个条件, 设 $x \in C_1 \cap C_2$, 其中 C_1 和 C_2 是 $\mathcal{C}$ 的两个元素. 因为 C_1 和 C_2 是开集, 所以 $C_1 \cap C_2$ 也是开集. 于是根据假设, 存在 $C_3 \in \mathcal{C}$, 使得 $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

再证明 $\mathcal{C}$ 生成的拓扑就是 X 的拓扑. 设 $\mathcal{T}'$ 表示 X 的由 $\mathcal{C}$ 所生成的拓扑, $\mathcal{T}$ 为 X 的拓扑. 首先, 注意到如果 $U \in \mathcal{T}$, 且 $x \in U$, 那么根据假设, 存在 $\mathcal{C}$ 的一个元素 C 使得 $x \in C \subset U$. 由此可见, 根据定义, $U \in \mathcal{T}'$, 所以 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. 反之, 因为 $\mathcal{C}$ 的每一个元素都是 $\mathcal{T}$ 的一个元素, 所以 $\mathcal{C}$ 的元素的任意并也在 $\mathcal{T}$ 中, 于是 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. 这就证明了 $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. □

拓扑的比较

定义 1.2.15 (拓扑的比较) 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是给定集合 X 上的两个拓扑, 如果 $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{T}'$ **细于** (finer) $\mathcal{T}$. 若 $\mathcal{T}' \supsetneqq \mathcal{T}$ 是真包含关系, 则称 $\mathcal{T}'$ **严格细于** (strictly finer) $\mathcal{T}$. 这两种情形有时也分别称之为 $\mathcal{T}$ **粗于** (coarser) $\mathcal{T}'$, 和 $\mathcal{T}$ **严格粗于** (strictly coarser) $\mathcal{T}'$. 我们说 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 是**可比较的**, 如果或者 $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ 或者 $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

注 X 上最粗的拓扑为平凡拓扑 ($\{X, \varnothing\}$), 最细的拓扑为离散拓扑 ($\mathcal{P}(X)$).

命题 1.2.16 由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑是包含 $\mathcal{B}$ 的最粗的拓扑, 即若拓扑 $\mathcal{T}'$ 满足 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}'$, 则 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\subset\mathcal{T}'$.

定理 1.2.17 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 分别是 X 的拓扑 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 的基. 则 $\mathcal{T}'$ 细于 $\mathcal{T}$ 的充要条件是对于每一个 $x\in X$ 及包含 x 的每一个基元素 $B\in\mathcal{B}$, 存在一个基元素 $B'\in\mathcal{B}'$, 使得 $x\in B'\subset B$.

证 (充分性) 设 $U\in\mathcal{T}$, 取 $x\in U$. 因为 $\mathcal{B}$ 生成 $\mathcal{T}$, 则存在一个元素 $B\in\mathcal{B}$, 使得 $x\in B\subset U$. 由于存在一个元素 $B'\in\mathcal{B}'$, 使得 $x\in B'\subset B\subset U$. 所以 $U\in\mathcal{T}'$.

(必要性) 给定 $x\in X$ 和 $B\in\mathcal{B}$, 其中 $x\in B$, 则 $B\in\mathcal{T}$. 再根据 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$, 因此 $B\in\mathcal{T}'$. 因为 $\mathcal{B}'$ 生成 $\mathcal{T}'$, 所以存在一个元素 $B'\in\mathcal{B}'$, 使得 $x\in B'\subset B$. □

命题 1.2.18 $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑 $\mathcal{T}_\ell$ 严格细于标准拓扑 $\mathcal{T}$.

证 取 $\mathcal{T}$ 的基 $\{(a,b)\mid a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$, 任意给定一个基元素 (a,b) 以及一个点 $x\in(a,b)$, $\mathcal{T}_\ell$ 中的元素 $[x,b)$ 包含着 x 并且包含于 (a,b). 另一方面, 任意给定 $\mathcal{T}_\ell$ 中的一个基元素 $[x,d)$, 却不存在 $\mathcal{T}$ 中的元素 (a,b), 使得它包含于 $[x,d)$ 同时又包含着 x. 因此 $\mathcal{T}_\ell$ 严格细于 $\mathcal{T}$. □

例 1.2.19 (French train 度量) $\mathbb{R}^2$ 上赋予如下度量

$$d_T(p,q)=\begin{cases} d(p,q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}, & p,\ q \text{ 与原点共线;}\\ d(p,0)+d(q,0)=\sqrt{p_1^2+p_2^2}+\sqrt{q_1^2+q_2^2}, & p,\ q \text{ 不与原点共线.}\end{cases}$$

可以证明 $(\mathbb{R}^2,d_T)$ 是一个度量空间.

$(\mathbb{R}^2,d_T)$ 中的开球

$$B_r^T(p)=\begin{cases}\{x\mid x \text{ 在直线 } Op \text{ 上, } d(x,p)<r\}, & r\leqslant d(p,O);\\ \{x\mid x \text{ 在直线 } Op \text{ 上, } d(x,p)<r\}\cup\{x\mid d(x,O)<r-d(p,O)\}, & r>d(p,O).\end{cases}$$

图 1.1, 图 1.2 分别是 $(\mathbb{R}^2,d_T)$ 中的 $B_{\frac{1}{2}}^T(1)$ 和 $B_{\frac{3}{2}}^T(1)$.

命题 1.2.20 由 $(\mathbb{R}^2,d_T)$ 生成的拓扑严格细于 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑.

证 易知 $d_T(p,q)\geqslant d(p,q)$, 所以 $B_r^T(p)\subset B_r(p)$. 对每个 $p\in\mathbb{R}^2$ 和包含 p 的每个 $B_r(q)$, $p\in B^T_{r-d(p,q)}(p)\subset B_{r-d(p,q)}(p)\subset B_r(q)$, 故 $(\mathbb{R}^2,d_T)$ 生成的拓扑细于 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑. 而 $B_{\frac{1}{2}}^T(1)$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 标准拓扑里的开集, 故这还是严格细于. □

子基

定义 1.2.21 (子基) X 的一个**子基** (subbasis) $\mathcal{S}$ 是 X 的一个子集族, 满足 $\bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}}S=X$. 由子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑 (topology generated by the subbasis $\mathcal{S}$) $\mathcal{T}$ 定义为

$$\mathcal{T}=\left\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'}B\mid B'\subset\mathcal{B}\right\},$$

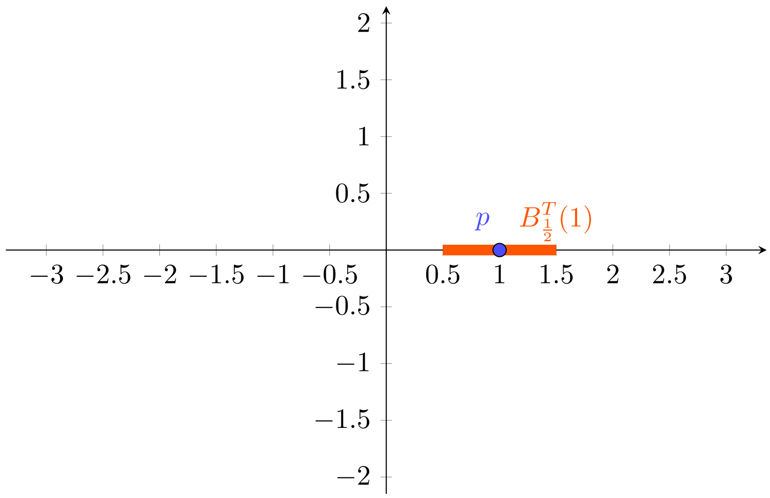

图 1.1: $B^T_{\frac{1}{2}}(1)$

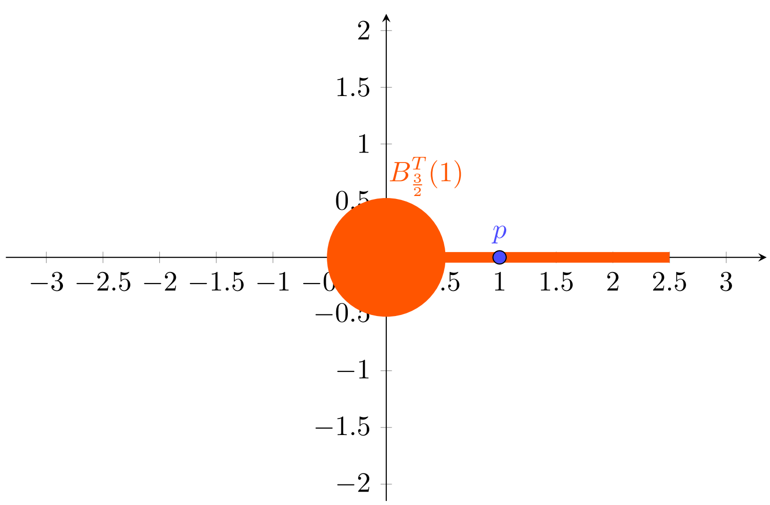

图 1.2: $B^T_{\frac{3}{2}}(1)$

其中 $\mathcal{B} = \{B \mid \exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S} \text{ s.t. } B = S_1 \cap \cdots \cap S_m\}$.

容易验证 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基, 称为 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑基. 进而 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑.

一般地, 如果 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S \neq X$, 记 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X' \subset X$, 那么 $\mathcal{B} = \{B \mid \exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S} \text{ s.t. } B = S_1 \cap \cdots \cap S_m\}$ 是 X' 上的一个拓扑基.

1.3 子空间拓扑、序拓扑与积拓扑

1.3.1 子空间拓扑

定义

定义 1.3.1 (子空间拓扑) 设 X 是一个拓扑空间, 其拓扑为 $\mathcal{T}$. 若 Y 是 X 的一个子集, 则

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

是 Y 的一个拓扑, 称为**子空间拓扑** (subspace topology). 具有这种拓扑的 Y 称为 X 的一个子空间 (subspace), 其开集由 X 中的开集与 Y 的交组成.

证 下面验证 $\mathcal{T}_Y$ 是一个拓扑. 因为

$$\varnothing = Y \cap \varnothing, \quad Y = Y \cap X,$$

所以 $\varnothing, Y \in \mathcal{T}_Y$. 由等式

$$(U_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y,$$
$$\bigcup_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\right) \cap Y,$$

可以得到 $\mathcal{T}_Y$ 对于有限交、任意并的运算是封闭的. □

性质与例子

命题 1.3.2 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑的一个基, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

是 Y 上子空间拓扑的一个基.

证 给定 X 的一个开集 U 及 $y \in U \cap Y$, 总能在 $\mathcal{B}$ 中选取一个元素 B, 使得 $y \in B \subset U$. 因此, $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. 所以 $\mathcal{B}_Y$ 是 Y 的子空间拓扑的一个基. □

命题 1.3.3 设 Y 是 X 的一个子空间, 若 U 是 Y 的一个开集并且 Y 是 X 的一个开集, 则 U 是 X 的一个开集.

证 因为 U 是 Y 的一个开集, 则存在 X 的某一个开集 V, 使得 $U = Y \cap V$. 又因为 Y 与 V 都是 X 的开集, 所以 $Y \cap V$ 也是 X 的开集. □

例 1.3.4 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间的拓扑就是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.

子空间拓扑中的闭集

定理 1.3.5 设 Y 是 X 的一个子空间. 集合 A 是 Y 的一个闭集当且仅当 A 是 X 中的一个闭集与 Y 的交.

证 假定 $A = C \cap Y$, 其中 C 为 X 的一个闭集, 那么 $X \setminus C$ 是 X 的一个开集. 根据子空间拓扑的定义可见 $(X \setminus C) \cap Y$ 是 Y 的一个开集. 而 $(X \setminus C) \cap Y = Y \setminus A$, 因此 $Y \setminus A$ 是 Y 的一个开集, 于是 A 是 Y 的一个闭集.

反之, 假定 A 是 Y 的一个闭集, 那么 $Y \setminus A$ 是 Y 的一个开集. 根据定义, $Y \setminus A$ 等于 X 的一个开集 U 与 Y 的交. $X \setminus U$ 是 X 的一个闭集并且 $A = Y \cap (X \setminus U)$, 因此 A 等于 X 的一个闭集与 Y 的交. □

命题 1.3.6 设 Y 是 X 的一个子空间. 若 A 是 Y 的一个闭集并且 Y 是 X 的一个闭集, 则 A 是 X 的一个闭集.

1.3.2 序拓扑

全序关系

定义 1.3.7 (全序关系) 称 X 上有 (严格) **全序关系** $<$, 如果满足:

(1) 任意 $a, b \in X$, 则 $a < b$, $b < a$ 和 $a = b$ 中有且仅有一个成立;

(2) 任意 $a, b, c \in X$, 若 $a < b$ 且 $b < c$, 则 $a < c$.

序拓扑的概念

定义 1.3.8 (序拓扑) 设 $(X, <)$ 是具有全序关系的一个集合, 其元素多于一个. 设 $\mathcal{B}$ 为下述类型所有集合的族:

(1) X 的所有开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

(2) 所有形如 $[a_0, b) = \{x \mid a_0 \leqslant x < b\}$ 的区间, 其中 a_0 是 X 的最小元 (如果存在的话);

(3) 所有形如 $(a, b_0] = \{x \mid a < x \leqslant b_0\}$ 的区间, 其中 b_0 是 X 的最大元 (如果存在的话).

则 $\mathcal{B}$ 是 X 的某一个拓扑的基, 称为**序拓扑** (order topology).

注 如果 X 没有最小元, 那就没有第 (2) 种类型的集合, 如果 X 没有最大元, 那就没有第 (3) 种类型的集合.

注意到, 对于 X 的任意一个元素 x, 它至少在 $\mathcal{B}$ 的一个元素中: 最小元 (如果存在) 在所有类型 (2) 的集合中, 最大元 (如果存在) 在所有类型 (3) 的集合中, 其他的元素则在类型 (1) 的

集合中; 其次, 上述各类型中任意两集合之交, 仍然是属于上述类型的一种, 或者是一个空集. 依定义容易验证 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基.

例子

例 1.3.9 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑就是 $\mathbb{R}$ 关于通常序关系的序拓扑.

例 1.3.10 正整数集 Z^+ 关于通常序关系 (这是具有最小元的全序集) 的序拓扑是离散拓扑, 因为它的每一个单点集是开集: 若 $n>1$, 则单点集 $\{n\}=(n-1,n+1)$ 是一个基元素; 若 $n=1$, 则单点集 $\{1\}=[1,2)$ 也是一个基元素.

例 1.3.11 (字典序拓扑) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的字典序定义为: $a\times b<a'\times b'$ 当且仅当 $a<a'$ 或 $a=a'$ 且 $b<b'$. [1]

于是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的序拓扑有一个以形如 $(a\times b,c\times d)$ (其中 $a<c$ 或者 $a=c,b<d$) 的所有开区间的族组成的基. 可以验证仅由第二种类型的区间组成的子族也是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上序拓扑的一个基.

记 $I=[0,1]$. 由 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上字典序的限制得到 $I\times I$ 上的字典序. 但需要注意的是 $I\times I$ 上的序拓扑与它从 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上继承的子空间拓扑是不同的拓扑. 例如, $\{1/2\}\times(1/2,1]$ 是 $I\times I$ 的子空间拓扑的开集, 但不是序拓扑中的开集. 具有字典序拓扑的拓扑空间 $I\times I$ 称为**有序矩形** (ordered square).

1.3.3 积拓扑

$X\times Y$ 上的积拓补

定义 1.3.12 (积拓扑) 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $X\times Y$ 上的**积拓扑** (product topology) 是指以族 $\mathcal{B}=\{U\times V\mid U,V$ 分别是 X 和 Y 的开子集$\}$ 为基的拓扑.

证 下面来验证 $\mathcal{B}$ 是一个基. 第一个条件是显然的, 这是由于 $X\times Y$ 本身就是一个基元素. 第二个条件也是易于验证的. 事实上, 任意两个基元素 $U_1\times V_1$ 与 $U_2\times V_2$ 的交是

$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)\,,$$

由于 $U_1\cap U_2$ 和 $V_1\cap V_2$ 分别是 X 和 Y 的开集, 所以上述集合是一个基元素. □

注 $\mathcal{B}$ 本身不是 $X\times Y$ 的一个拓扑.

定理 1.3.13 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑的一个基, $\mathcal{C}$ 是 Y 的拓扑的一个基, 则族

$$\mathcal{D}=\{B\times C\mid B\in\mathcal{B}\text{ 且}C\in\mathcal{C}\}$$

是 $X\times Y$ 的积拓扑的一个基.

[1] 这里把 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中的元素记为 $a\times b$, 这是为了避免与开区间的符号混淆.

证 给定 $X \times Y$ 的一个开集 W 以及一个点 $x \times y \in W$. 根据积拓扑的定义, 存在一个基元素 $U \times V$, 使得 $x \times y \in U \times V \subset W$. 因为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是 X 和 Y 的基, 所以我们可以在 $\mathcal{B}$ 中选取一个元素 B, 使得 $x \in B \subset U$, 也可以在 $\mathcal{C}$ 中选取一个元素 C, 使得 $y \in C \subset V$. 于是 $x \times y \in B \times C \subset W$. 因此由定理 1.2.14, $\mathcal{D}$ 是 $X \times Y$ 的一个基. □

例 1.3.14 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑就是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的积拓扑.

箱拓扑

任给一族拓扑空间 $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, 考虑在笛卡尔积

$$\prod_\alpha X_\alpha = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha\}$$

上定义一个拓扑. 我们可以和定义两个拓扑空间的积拓扑一样, 考虑集族

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_\alpha U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}.$$

很容易验证 $\mathcal{B}$ 是 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 的一个拓扑基. 它所生成的拓扑

$$\mathcal{T}_{\text{box}} = \left\{U \subset \prod_\alpha X_\alpha \mid \forall\,(x_\alpha) \in U, \exists U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \text{ s.t. } (x_\alpha) \in \prod_\alpha U_\alpha \subset U\right\}$$

被称为是 $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$ 上的**箱拓扑** (box topology).

但如果使用箱拓扑, 那么关于有限积空间的一些重要定理对于任意积空间则不一定成立, 因此我们需要找一个 “更好的” 拓扑.

积拓扑

定义 1.3.15 (投影映射) 一般地, 对于任意多个空间的笛卡尔积, 记

$$\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta, \quad (x_\alpha) \mapsto x_\beta$$

为向 β 分量的**投影映射** (projection mapping).

定义 1.3.16 (积拓扑) 设 $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间. 称 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 上由子基

$$\mathcal{S} = \bigcup_\beta \left\{\pi_\beta^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \mathcal{T}_\beta\right\}$$

生成的拓扑 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 为 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 的**积拓扑** (product topology), 给定了这个拓扑的 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 称为**积空间** (product space).

命题 1.3.17 从定义中容易看出, 积拓扑 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 的一个基为

$$\left\{\prod_\alpha U_\alpha \mid U_\alpha \in X_\alpha \text{ 为开集, 且除有限项外} U_\alpha = X_\alpha\right\}.$$

注 对于有限积 $\prod_{i=1}^n X_n$, 箱拓扑与积拓扑是一样的, 一般来说, 箱拓扑细于积拓扑.

定理 1.3.18 设每一个空间 X_α 的拓扑由基 $\mathcal{B}_\alpha$ 给出. 则形如

$$\prod_\alpha B_\alpha$$

的集族是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的箱拓扑的一个基, 其中对于每一个 α, $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$.

对于如上形式的集族, 如果仅对有限多个指标 α 要求 $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, 而对余下的指标有 $B_\alpha = X_\alpha$, 则这个集族便是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的积拓扑的一个基.

证 对于每一个空间 X_α 的中的基元素 B_α 都是开集, 它们的笛卡尔积 $\prod_\alpha B_\alpha$ 是箱拓扑的基元素, 则箱拓扑细于 $\prod_\alpha B_\alpha$ 生成的拓扑. 另一方面, 箱拓扑的基元素为 $\prod_\alpha U_\alpha$, 其中 U_α 是 X_α 中的开集. 对于每一个空间 X_α, 因为 $\mathcal{B}_\alpha$ 是 X_α 的基, U_α 上的每一点都存在 B_α 使得 $x_\alpha \in B_\alpha \subset U_\alpha$. 所以对于每一个 $(x_\alpha) \in \prod_\alpha U_\alpha$, 都存在 $\prod_\alpha B_\alpha$ 使得 $(x_\alpha) \in \prod_\alpha B_\alpha \subset \prod_\alpha U_\alpha$. 故 $\prod_\alpha B_\alpha$ 生成的拓扑细于箱拓扑.

综上所述, $\prod_\alpha B_\alpha$ 生成的拓扑等于箱拓扑. 积拓扑的证明类似. □

定理 1.3.19 设对于每一个 α, A_α 是 X_α 的一个子空间, 则当两者[1]都用箱拓扑或者都用积拓扑时, $\prod A_\alpha$ 是 $\prod X_\alpha$ 的一个子空间.

证 设 U_α 是 X_α 上的开集. 若 $\prod A_\alpha$ 的拓扑为箱拓扑, 则 $\prod(U_\alpha \cap A_\alpha)$ 是 $\prod A_\alpha$ 上的基元素; 若 $\prod A_\alpha$ 的拓扑为积拓扑, 则在 $\prod(U_\alpha \cap A_\alpha)$ 中, 除有限多个外, $U_\alpha = X_\alpha$. 注意到:

$$\prod(U_\alpha \cap A_\alpha) = \prod U_\alpha \cap \prod A_\alpha,$$

其中 U_α 为 $\prod X_\alpha$ 中的基元素 (若 $\prod X_\alpha$ 的拓扑为箱拓扑, 则 U_α 是 X_α 的开集; 若 $\prod X_\alpha$ 的拓扑为积拓扑, 除有限多个外, α, $U_\alpha = X_\alpha$), 根据子空间拓扑基的定义, 等式的右边为 $\prod A_\alpha$ 上子空间拓扑的基元素. 所以, $\prod A_\alpha$ 的箱拓扑 (或积拓扑) 与 $\prod A_\alpha$ 从 X_α 的箱拓扑 (或积拓扑) 继承而来的子空间拓扑是同一个拓扑 (这是因为这两个拓扑的每一个基元素都相同), 即 $\prod A_\alpha$ 是 $\prod X_\alpha$ 的一个子空间. □

[1] "两者" 是指 ΠA_α 和 ΠX_α.

1.4 连续映射与同胚

1.4.1 连续映射

映射的连续性

定义 1.4.1 (连续映射) 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 称映射 $f: X \to Y$ 是**连续的** (continuous) 或称 f 是一个**连续映射** (continuous mapping), 如果对于 Y 中的每一个开子集 V, $f^{-1}(V)$ 是 X 中的一个开子集.

根据定理 1.1.13, 上述定义与度量空间连续性的定义一致.

注 如果 Y 的拓扑是由基 $\mathcal{B}$ 给出的, 那么证明 f 连续, 就只要证明每一个基元素的原像是开的就行了. 这是因为 Y 的任意开集 V, 可以写成基元素的并, 即

$$V=\bigcup_{\alpha} B_{\alpha},$$

因此

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha} f^{-1}\left(B_{\alpha}\right),$$

如果每一个 $f^{-1}\left(B_{\alpha}\right)$ 是开的, 那么 $f^{-1}(V)$ 就是开的.

如果 Y 的拓扑是由子基 $\mathcal{S}$ 给出的, 那么为了证明 f 的连续性, 只要证明每一个子基元素的原像是开的就可以了. 这是因为 Y 的任意基元素 B 可以写成子基元素的有限交 $S_1 \cap \cdots \cap S_n$. 由于

$$f^{-1}(B)=f^{-1}\left(S_1\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(S_n\right),$$

因此每一个基元素的原像是开的.

连续映射的等价刻画

定理 1.4.2 (连续映射的等价刻画) 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$. 下列条件是等价的:

(1) f 连续;

(2) 对于 Y 的任意一个闭集 F, $f^{-1}(F)$ 是 X 中的一个闭集;

(3) 对于每一个 $x \in X$ 和 $f(x)$ 的每一个邻域 V, 存在 x 的一个邻域 U 使得 $f(U) \subset V$.

证 (2) 是连续性定义的直接推论, 只需注意到 $f^{-1}(F)$ 是闭集当且仅当 $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ 是开集, 由此即得 (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

(1) $\Longrightarrow$ (4) 设 $x \in X$, V 是 $f(x)$ 的一个邻域. 则 $U=f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域, 满足 $f(U) \subset V$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 的一个开集, $x \in f^{-1}(V)$. 则 $f(x) \in V$, 根据假设可见, 存在 x 的一个邻域 U_x 使得 $f(U_x) \subset V$. 从而 $U_x \subset f^{-1}(V)$. 由此得到 $f^{-1}(V)$ 可以表示成所有这些开集 U_x 之并, 从而它是开的. □

注 如果对某个 $x \in X$ 条件 (4) 成立, 则称 f 在点 x 连续.

连续映射的例子

例 1.4.3 记 $\mathbb{R}$ 为具有通常拓扑的实数集. $\mathbb{R}_\ell$ 为具有下限拓扑的实数集. 令

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell, \quad x \mapsto x$$

为恒同映射. 但是 f 不是一个连续映射. 因为 R_ℓ 的开集 $[a, b)$ 的原像还是 $[a, b)$, 它不是 $\mathbb{R}$ 的开集.

而另一方面, 恒同映射

$$g : \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

却是连续的. 因为 (a, b) 的原像是 (a, b), 它也是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

例 1.4.4 (常值映射) $f : X \to Y, \forall x \in X, f(x) = y_0$, 则 f 连续.

证 设 V 是 Y 中的一个开集. 若 V 包含点 y_0, 则 $f^{-1}(V) = X$. 若 V 不包含 y_0, 则 $f^{-1}(V) = \varnothing$. 无论哪一种情形都得到 $f^{-1}(V)$ 是开的. □

例 1.4.5 (嵌入映射) 设 A 为 X 的一个子空间, $j : A \to X, x \mapsto x$, 则 j 连续.

证 若 U 是 X 的一个开集, 则根据子空间拓扑的定义, $j^{-1}(U) = U \cap A$ 是 A 的一个开集. □

例 1.4.6 (复合映射) 若 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 连续, 则复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 连续.

证 若 U 是 Z 的一个开集, 则 $g^{-1}(U)$ 是 Y 的开集, $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ 是 X 的开集, 故

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$$

是 X 的一个开集. □

例 1.4.7 (限制定义域) 设 $f : X \to Y$ 连续, A 为 X 的一个子空间, 则限制映射 $f|_A : A \to Y$ 连续.

证 $f|_A$ 是嵌入映射 $j : A \to X$ 与映射 $f : X \to Y$ 的复合, 而这两者都是连续的. □

例 1.4.8 (限制或扩大陪域) 设 $f : X \to Y$ 迪续, Z 为 Y 中包含像集 $f(X)$ 的一个子空间, 则 $g : X \to Z, x \mapsto f(x)$ 也连续. 若 Z 以 Y 为子空间, 则 $h : X \to Z, x \mapsto f(x)$ 也连续. [1]

[1] 在映射 $f : X \to Y$ 中, Y 称为 f 的陪域或到达域 (Codomain), 陪域不一定等于值域 $f(X)$.

证 设 $f: X \to Y$ 连续. 若 $f(X) \subset Z \subset Y$, 我们来证明由 f 得到的映射 $g: X \to Z$ 连续. 设 B 是 Z 的一个开集, 则存在 Y 的某一个开集 U, 使得 $B = Z \cap U$. 因为 Z 包含整个 $f(X)$, 则

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B).$$

因为 $f^{-1}(U)$ 是开的, 所以 $g^{-1}(B)$ 也是开的.

如果 Z 以 Y 为子空间, 我们证明 $h: X \to Z$ 连续. 只需注意到 h 是映射 $f: X \to Y$ 与嵌入映射 $j: Y \to Z$ 的复合即可. □

例 1.4.9 (连续性的局部表示) 如果 X 可以写成开集 U_α 的并, 使得对于每一个 α, $f|_{U_\alpha}$ 连续. 则映射 $f: X \to Y$ 连续.

证 设 V 是 Y 的一个开集, 则

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|_{U_\alpha})^{-1}(V).$$

这是因为上式两边表示的都是 U_α 中满足 $f(x) \in V$ 的点 x 的集合. 因为 $f|_{U_\alpha}$ 连续, 所以上述集合是 U_α 中的开集, 因此是 X 中的开集. 而

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \left(f^{-1}(V) \cap U_\alpha\right).$$

于是, $f^{-1}(V)$ 也是 X 的一个开集. □

定理 1.4.10 (粘结引理 (pasting lemma)) 设 $X = A \cup B$ 并且 A 和 B 都是 X 中闭集. $f: A \to Y$ 与 $g: B \to Y$ 都是连续映射. 若对于任意 $x \in A \cap B$ 有 $f(x) = g(x)$, 则 f 和 g 可以组成一个连续映射 $h: X \to Y$, 它定义为: 当 $x \in A$ 时, $h(x) = f(x)$; 当 $x \in B$ 时, $h(x) = g(x)$.

证 设 C 为 Y 的一个闭集, 则

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

因为 f 连续, 所以 $f^{-1}(C)$ 是 A 的一个闭集. 类似地, $g^{-1}(C)$ 是 B 的一个闭集, 从而也是 X 的一个闭集. 于是它们的并 $h^{-1}(C)$ 是 X 的一个闭集. □

注 若 A 和 B 都是 X 的开集, 这个定理仍然成立. 这正是“连续性的局部表示”的一个特例.

开映射与闭映射

在连续映射下, 开集的原像是开集, 闭集的原像都是闭集. 但一般来说, 开集在连续映射下的像不一定是开集, 闭集在连续映射下的像不一定是闭集.

定义 1.4.11 (开映射与闭映射) 对于映射 $f: X \to Y$,

(1) 如果 X 中的任意开集 U 的像 $f(U)$ 在 Y 中是开集, 则称映射 f 为**开映射**;

(2) 如果 X 中的任意闭集 F 的像 $f(F)$ 在 Y 中是闭集, 则称映射 f 为**闭映射**.

注 虽然开/闭映射看起来 "更自然", 但它们在拓扑中不如连续映射重要和方便. 一个原因是相比于 "求映射的像", "取映射的原像" 这一操作可以更好地保持集合的交、并、补运算. 具体来说, 我们总是有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha), \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

但是一般来说, 我们只有

$$f\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_\alpha), \quad f\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_\alpha), \quad f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A).$$

积空间与连续映射

例 1.4.12 (有限积空间的投影映射) 设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为拓扑空间, $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ 为其积拓扑空间. 则投影映射

$$\pi_X : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x;$$

$$\pi_Y : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto y,$$

都是连续映射, 也都是开映射.

证 只证明关于 π_X 的结论, 关于 π_Y 的证明是相似的. π_X 连续是因为

$$\forall U \in \mathcal{T}_X,\ \pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X\times Y}.$$

π_X 是开映射是因为对任意开集 $W \in X \times Y$ 和任意 $x \in \pi_X(W)$, 存在点 $(x, y) \in W$. 根据积拓扑的定义, 存在 X 中开集 $U \ni x$ 和 Y 中开集 $V \ni y$ 使得 $(x, y) \in U \times V \subset W$. 于是 $x \in U \subset \pi_X(W)$. 所以 $\pi_X(W)$ 在 X 中是开集, 即 π_X 是一个开映射. □

注 投影映射不一定是闭映射. 例如, 平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 里的闭集 $\{(x, 1/x) \mid x > 0\}$ 到分量 $\mathbb{R}$ 上的投影是 $(0, +\infty)$, 并不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

这一结论还可以推广到任意积, 无论是积拓扑还是箱拓扑.

命题 1.4.13 (任意积空间的投影映射) 设 $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间. 则无论赋予 $\prod_\alpha X_\alpha$ 积拓扑还是箱拓扑, 对任意 β, 投影映射 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ 都是连续的开映射.

证 因为积拓扑粗于箱拓扑, 因此只需在 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 下证明 π_β 是连续映射, 在 $\mathcal{T}_{\text{box}}$ 下证明 π_β 是开映射.

在 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 下, π_β 是连续映射, 因为 $(X_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ 中的任意开集 V_β 的原像 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 是 $\left(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{product}}\right)$ 中的开集.

在 $\mathcal{T}_{\text{box}}$ 下, π_β 是开映射, 因为对任意开集 $W \subset \mathcal{T}_{\text{box}}$ 和任意 $x \in W$, 存在 $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ 使得 $x \in \prod_\alpha U_\alpha$. 因此, $\pi_\beta(x) \in U_\beta \subset \pi_\beta(W)$. □

事实上, 积拓扑是使得投影映射连续的最粗的拓扑.

命题 1.4.14 积拓扑 $\mathcal{T}_{\text{prodduct}}$ 是在 $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 上使所有投影映射 π_β 都连续的拓扑中最粗的拓扑.

证 我们已经知道所有 π_β 关于 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 都是连续的. 反之, 如果所有 π_β 关于 $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 上的某个拓扑 $\mathcal{T}$ 都连续, 那么每个 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 在 $\mathcal{T}$ 中是开集, 所以 $\mathcal{T}_{\text{product}}$ 比 $\mathcal{T}$ 粗. □

定理 1.4.15 (到积空间的连续映射) 映射 $f : A \to \prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ 定义为

$$f(a) = (f_\alpha(a))$$

其中对每一个 α, $f_\alpha : A \to X_\alpha$. 设 $\prod X_\alpha$ 具有积拓扑, 则 f 连续当且仅当每一个 f_α 连续.

证 设 π_β 是积空间到 X_β 上的投影映射. 假定 $f : A \to \prod X_\alpha$ 连续, 则 f_β 是两个连续映射的复合, 即 $f_\beta = \pi_\beta \circ f$, 所以 f_β 连续.

反之, 设每一个 f_α 都连续. 要证明 f 连续, 只要证明每一个子基元素在 f 下的原像是 A 的开集. 对于 $\prod X_\alpha$ 的积拓扑, 其子基元素是 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, U_β 是 X_β 的开集. 因为 $f_\beta = \pi_\beta \circ f$, 所以 $f^{-1}\left(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\right) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$. 又因为 f_β 连续, 因此这个集合是 A 的一个开集. □

但这一结论对箱拓扑不成立, 如下面的反例.

例 1.4.16 (对角线映射) 考虑 $\mathbb{R}$ 的可数无限积 $\mathbb{R}^\omega$.

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n$$

对于每一个 $n \in \mathbb{Z}^+$, $X_n = \mathbb{R}$. 对角线映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ 定义为

$$f(t) = (t, t, \cdots),$$

对每一个 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t$ 都是恒同映射故都连续, 所以当赋予积拓扑时, f 是连续的. 而当 $\mathbb{R}^w$ 给的是箱拓扑时, f 不连续. 例如, 取箱拓扑的基元素

$$B = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \cdots ,$$

如果 $f^{-1}(B)$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集, 它必定包含 0 的某一个邻域 $(-\delta, \delta)$, 也就是说 $f((-\delta, \delta)) \subset B$. 将 π_n 作用于这个包含关系的两边, 可见对于所有 n,

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),$$

矛盾.

对于定义域是积空间的映射 $f : A \times B \to X$, 类似到积空间的映射, 猜想 f 连续当且仅当 f "分别关于每一个变量" 连续, 但这是不对的. 事实上这里只有充分性成立.

首先明确分别关于每一个变量连续的定义.

定义 1.4.17 设 $F : X \times Y \to Z$. 把 F **分别关于每一个变量连续** (continuous in each variable separately) 定义为: 对于 Y 中每一个 y_0, 用 $h(x) = F(x \times y_0)$ 定义的映射 $h : X \to Z$ 连续, 并且对于 X 中每一个 x_0, 用 $k(y) = F(x_0 \times y)$ 所定义的映射 $k : Y \to Z$ 连续.

命题 1.4.18 若 F 连续, 则 F 分别关于每一个变量连续.

证 由于 F 连续, 对于每一个 $x \times y_0$ 和 $F(x \times y_0) = h(x)$ 的每一个邻域 V, 都存在一个包含 $x \times y_0$ 的基元素 $U \times W$ 使得 $F(U \times W) \subset V$, 从而有 $h(U) \subset V$. 我们进一步可以得到 $x \in U \subset h^{-1}(V)$. 因此 $h^{-1}(V)$ 是一个开集, 映射 h 连续. 类似可证明 k 连续. □

但反之不成立, 如下面的反例.

例 1.4.19 设 $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$F(x \times y) = \begin{cases} xy/\left(x^2 + y^2\right), & x \times y \neq 0 \times 0; \\ 0, & x \times y = 0 \times 0. \end{cases}$$

则 F 分别关于每一个变量连续, 但 F 不连续.

证 若 $y_0 = 0$, $h(x) = F(x \times y_0) = 0$ 定义的映射是一个常值映射, 故连续. 若 $y_0 \neq 0$, $h(x) = xy_0/\left(x^2 + y_0^2\right)$, 这也是一个连续映射. 同样可证 $g(y) = F(x_0 \times y)$ 是一个连续映射.

令 $F(x \times y) = \dfrac{1}{2}$ 可以得到 $x \times y \neq 0 \times 0$ 并且 $x = y$. 因此, 闭集 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ 的原像为 $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right) = \{x \times x \mid x \neq 0\}$. 注意到它不是一个闭集, 因此 f 不连续. □

1.4.2 同胚

同胚的概念

定义 1.4.20 (同胚) 设 X 和 Y 是拓扑空间. 如果存在一一对应 (双射) $f : X \to Y$ 使得 f 和 f^{-1} 都是连续映射, 则称拓扑空间 X 和 Y 是**同胚**的 (homeomorphic), 记为 $X \simeq Y$; 而映射 f 则被称为是 X 和 Y 之间的一个**同胚** (homeomorphism).

除了连续和双射, 从定义中可以看出同胚必须既是开映射又是闭映射. 反之, 根据定义, 如果 f 是可逆的, 那么 f^{-1} 是连续的当且仅当 f 是开映射 (也当且仅当 f 是闭映射). 于是我们有

定理 1.4.21 设 $f : X \to Y$ 是一个连续双射. 如果 f 是开映射或是闭映射, 那么 f 是同胚.

从定义中还容易看出同胚等价于: 一一对应 $f: X \to Y$, 使得 $f(U)$ 是一个开集当且仅当 U 是一个开集.

定义 1.4.22 (拓扑嵌入) 设 X, Y 是拓扑空间, $f : X \to Y$ 是一个连续单射. 如果 f 是从 X 到 $f(X) \subset Y$ (赋有子空间拓扑) 的同胚, 则称 f 是从 X 到 Y 的**拓扑嵌入** (topological imbedding), 或称为从 X 到 Y 中的一个嵌入 (imbedding).

同胚是等价关系

命题 1.4.23 (同胚是等价关系) 同胚是拓扑空间之间的等价关系.

证 (1) $X \simeq X$: 因为 $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ 是同胚;

(2) $X \simeq Y \Longrightarrow Y \simeq X$: 如果 $f : X \to Y$ 是同胚, 那么 $f^{-1} : Y \to X$ 也是同胚;

(3) $X \simeq Y, Y \simeq Z \Longrightarrow X \simeq Z$: 如果 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是同胚, 那么 $g \circ f : X \to Z$ 是双射, 且 $g \circ f$ 和 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 都连续. $\square$

因此我们可以将同胚的拓扑空间视为同一空间. 如果一个性质在同胚下被保持, 则称它是一个**拓扑性质** (topological property).

同胚的例子

例 1.4.24 用

$$F(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

定义的函数 $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ 是一个同胚.

例 1.4.25 设映射

$$f : [0, 1) \longrightarrow S^1$$

定义为 $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. 则 f 是一个连续的双射. 但是 f^{-1} 不连续. 例如, 定义域中的开集 $U = \left[0, \frac{1}{4}\right)$ 在 f 下的像不是 S^1 中的开集.

例 1.4.26 $\mathbb{R}^n$ 中

(1) $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$;

(2) $S^n \setminus \{$ 北极点 $\} \simeq \mathbb{R}^n$;

(3) $[0, 1] \not\simeq (0, 1) \not\simeq [0, 1) \not\simeq S^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$.

1.5 拓扑空间中的点和集

1.5.1 极限点

序列的极限

定义 1.5.1 (序列的极限) 设 $\{x_n\}$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 中的一个点列. 如果存在 $x_0 \in X$, 满足: 对于 x_0 的任意邻域 A, 均存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n \in A$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为**极限** (或称 $\{x_n\}$ **收敛**到 x_0), 并记为 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

在度量空间中, 一个序列最多以一个点为极限, 但在一般拓扑空间中, 一个序列可能以多个点为极限. 比如, 在 $(X,\mathcal{T}) = (\{a,b,c\}, \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\})$ 中, 序列 $x_n = b$ 不仅以点 b 为极限, 还以点 a 和点 c 为极限!

例 1.5.2 (度量拓扑中的极限) 对虑度量空间 (X,d), 这里定义的拓扑空间的极限与度量空间中的极限是一致的.

例 1.5.3 (离散拓扑中的极限) 考虑离散拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_{\text{discrete}})$. 因为开球 $B_1(x) = \{x\}$, 容易看出: $x_n \to x_0$ 当且仅当存在 k 使得对所有 $n \geqslant k$, 均有 $x_n = x_0$ 成立.

例 1.5.4 (平凡拓扑中的极限) 考虑平凡拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_{\text{trivial}})$. 因为唯一的非空开集是集合 X, 所以任何序列 $\{x_n\} \subset X$ 都以任何点 $x_0 \in X$ 为其极限!

例 1.5.5 (余有限拓扑中的极限) 考虑余有限拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_{\text{cofinite}})$. 设 $x_n \to x_0$. 根据定义, 对于 x_0 的任何开邻域 U, 存在 N 使得对任意 $n > N$, 均有 $x_n \in U$, 即对于任意 $x \neq x_0$. 至多有有限多个 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $x_i = x$ 成立. 例如:

- 如果 x_n 都是不同的, 那么序列 $x_1, x_2, \cdots$ 以任意点 x_0 为极限;
- 形如 $x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, \cdots$ (其中 x_n 都是不同的点) 的序列有唯一的极限 x_0;
- 形如 $x_1, x_2, x_1, x_2, \cdots$ 的序列没有极限.

例 1.5.6 (余可数拓扑中的极限) 考虑余可数拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_{\text{cocountable}})$. 不妨设 X 为不可数集. 由完全相同的论证可得 $x_n \to x_0$ 当且仅当在在 $k > 0$ 使得对所有 $n > k$ 都有 $x_n = x_0$ 成立. 这与离散拓扑空间一样.

序列极限点

定义 1.5.7 (序列极限点) 设 A 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 中的子集, x 为 X 中的一个点. 如果存在序列 $a_n \in A$ 使得 $a_n \to x$, 则我们称点 x 为 A 的一个**序列极限点**.

根据命题 1.1.11, 度量空间 (X,d) 中的子集 F 是闭集当且仅当 F 包含其所有序列极限点, 即 F 满足: 若 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$, 则 $x_0 \in F$. 但在一般的拓扑空间中, “如果 $x_n \in A$ 且 $x_n \to x_0$, 则 $x_0 \in A$” 不再意味着集合 A 是闭集. 例如下面的反例.

定义 1.5.8 (逐点收敛拓扑) 考虑 $[0,1]\to\mathbb{R}$ 的所有函数 (不一定连续) 构成的空间

$$X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})=\mathbb{R}^{[0,1]}.$$

在 X 上定义拓扑

$$\mathcal{T}_{\text{p.c.}}=\left\{U\subset X \mid \forall f_0\in U,\exists x_1,\cdots,x_m\in[0,1]\ \text{和}\varepsilon>0,\ \text{使得}U\supset\omega\left(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon\right)\right\},$$

其中

$$\omega\left(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon\right)\coloneqq\left\{g\in X \| g\left(x_i\right)-f\left(x_i\right)\mid<\varepsilon,\forall 1\leqslant i\leqslant m\right\}$$

是 f 的一个 "邻域".

可以证明, $\mathcal{T}_{\text{p.c.}}$ 是集合 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 上的一个拓扑, 且 X 中的函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f 当且仅当 $\{f_n\}$ 作为拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_{\text{p.c.}})$ 中的点列以 f 为极限.

$$\mathcal{B}=\left\{\omega\left(f;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon\right) \mid f\in\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}),n\in\mathbb{N},x_1,\cdots,x_n\in[0,1],\varepsilon>0\right\}$$

是它的一个基,

$$\mathcal{S}=\{\omega(f;x;\varepsilon)\mid f\in\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}),x\in[0,1],\varepsilon>0\}$$

是一个子基. 且 $(\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}),\mathcal{T}_{\text{p.c.}})$ 与积拓扑空间 $\left(\prod\limits_{x\in[0,1]}\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{product}}\right)$ 是同胚的.

例 1.5.9 考虑赋有逐点收敛拓扑的空间 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$. 令

$$A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid \text{仅对可数多的 } x\in[0,1] \text{ 有 } f(x)\neq 0\},$$

那么如果 $f_n\in A$ 且 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f_0, 则一定有 $f_0\in A$, 因为

$$\{x\mid f_0(x)\neq 0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid f_n(x)\neq 0\}$$

是可数集.

但是, A 不是 X 中的闭集, 即 $A^c=X\setminus A$ 不是开集. 事实上, 任取 $g\in A^c$. 令 U 是 g 的任意开邻域. 根据定义, $\exists x_1,\cdots,x_n,\varepsilon>0$, 使得 $\omega\left(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon\right)\subset U$. 现在我们定义

$$\widetilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x\in\left\{x_1,\cdots,x_n\right\}, \\ 0, & x\notin\left\{x_1,\cdots,x_n\right\}.\end{cases}$$

则 $\widetilde{g}\in A\cap\omega\left(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon\right)\subset A\cap U$. 换言之, $g\in A^c$ 的任意开邻域 U 都包含 A 中的一个元素. 所以 A^c 不是开集, 即 A 不是闭集.

但反之是成立的, 即闭集总包含其序列极限点.

命题 1.5.10 设 F 是拓扑空间 X 中的闭子集. 如果 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$, 则极限 $x_0 \in F$.

证 用反证法. 设 $x_0 \notin F$, 即 $x_0 \in F^c$. 由于 F^c 是开集, 可以找到 x_0 的开邻域 U, 使得 $U \subset F^c$. 根据极限的定义, 存在 k 使得对所有 $n > N$ 都有 $x_n \in U$, 即对于所有 $n > k$ 有 $x_n \in F^c$, 和命题的条件 $x_n \in F$ 矛盾. □

极限点

从例 1.5.9 可以看到, 任意函数 $g \in A^c$ 都不是包含在子集 A 中的任何函数序列的极限. 然而, 在另一种意义下我们仍然可以认为 g 在 X 中 "与子集 A 无比接近", 这是因为对 g 的任何邻域 U, 都存在元素 $\widetilde{g} \neq g$ 使得 $\widetilde{g} \in U \cap A$. 我们有如下定义.

定义 1.5.11 (极限点) 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$ 为子集. 如果对于 $x \in X$ 的任意邻域 U 都有

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing,$$

则称 x 是 A 的**极限点** (或**聚点**). 我们把 A 的所有极限点的集合称为 A 的导集, 记为 A', 即

$$A' = \{x \mid x \text{ 是} A \text{ 的一个极限点}\}.$$

集合 A 的序列极限点和其极限点之间的关系是微妙的: 序列极限点不必是极限点, 极限点也不必是序列极限点.

例 1.5.12 (1) 对于 $\mathbb{R}$ 的子集 $A = (0,1) \cup (1,3) \cup \{5\}$, 我们有 $A' = [0,3]$, 5 是 A 的序列极限点, 但不是 A 的极限点.

(2) 考虑余可数拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_{\text{cocountable}})$, 其中 X 是不可数集. 则根据定义, 对于任意不可数子集 $A \subset X$, 我们有 $A' = X$. 特别地, 对于任何 $x_0 \in X$, 我们有 $x_0 \in (X \setminus \{x_0\})'$. 然而我们知道, X 中仅有那些有限项后是常值的序列有极限 (且极限是该常值). 因此 x_0 是 $A \setminus \{x_0\}$ 的 (也是 A 的) 极限点, 但不是 $A \setminus \{x_0\}$ 的序列极限点.

但如果 x 是 $A \setminus \{x\}$ 的序列极限点, 则 x 是 A 的极限点.

命题 1.5.13 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X, x \in X$. 如果 x 是 $A \setminus \{x\}$ 的序列极限点, 则 x 是集合 A 的一个极限点.

证 设序列 $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$, 并且 $x_n \to x$. 如果 U 是 x 的一个邻域, 则存在 $M > 0$ 使得 $\{x_{M+1}, x_{M+2}, \cdots\} \subset U$, 因此 $\{x_{M+1}, x_{M+2}, \cdots |\subset U \cap (A \setminus \{x\})$, 从而 $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. 这说明 x 是 A 的一个极限点. □

注 由例 1.5.12 (2), 这一命题的逆命题不成立.

命题 1.5.14 (导集的性质) 设 X 为拓扑空间, $A, B \subset X$, 则

(1) $\varnothing' = \varnothing$;

(2) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$;

(3) $a \in A' \Longleftrightarrow a \in (A \setminus \{a\})'$;

(4) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(5) $(A')' \subset A \cup A'$.

证 (1) 由于对于任何一点 $x \in X$ 和点 x 的任何一个邻域 U 有 $U \cap (\varnothing \setminus \{x\}) = \varnothing$, 所以 $x \notin \varnothing'$. 因此 $\varnothing' = \varnothing$.

(2) 设 $A \subset B$. 如果 $x \in A'$, U 是 x 的一个邻域, 由于 $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 故有 $U \cap (B \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 因此 $x \in B'$. 这证明了 $A' \subset B'$.

(3) ($\Longrightarrow$) 因为 $a \in A'$, 所以任意 a 的邻域 U, $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$, 又因为 $(A \setminus \{a\}) \setminus \{a\} = A \setminus \{a\}$, 所以 $a \in (A \setminus \{a\})'$.

($\Longleftarrow$) 因为 $A \setminus \{a\} \subset A$, 由 (2), $(A \setminus \{a\})' \subset A'$, 所以 $a \in (A \setminus \{a\})' \Longrightarrow a \in A'$.

(4) 由 (2), $A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$. 从而 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

另一方面, 设 $x \in (A \cup B)'$. 如果 $x \notin A' \cup B'$, 则存在 x 的邻域 U_x, V_x 使得 $U_x \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$, $V_x \cap (B \setminus \{x\}) = \varnothing$. 因此

$$\begin{aligned}
&(U_x \cap V_x) \cap [(A \cup B) - \{x\}] \\
=&(U_x \cap V_x) \cap [(A - \{x\}) \cup (B - \{x\})] \\
=&[U_x \cap V_x \cap (A - \{x\})] \cup [U_x \cap V_x \cap (B - \{x\})] \\
=&\varnothing.
\end{aligned}$$

而 $U_x \cap V_x$ 是 x 的一个邻域, 这与 $x \in (A \cup B)'$ 相矛盾.

上述的命题对无限并不成立, 比如在 $\mathbb{R}$ 中,

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}' = \varnothing \neq \mathbb{R} = \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \right)'.$$

一般地, 对于无限并, 我们只能有: $\bigcup\limits_{\alpha} A'_\alpha \subset \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \right)'$.

(5) 设 $x \notin A \cup A'$, 即既有 $x \notin A$ 又有 $x \notin A'$, 则 x 有一个邻域 U 使得 $U \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$. 由于 $x \notin A$, 由此可见 $U \cap A = \varnothing$. 这也就是说 U 中的任何一个点都不是 A 中的点, 因此对于任何 $y \in U$ 有 $U \cap (A \setminus \{y\}) = \varnothing$; 由于 U 是 y 的一个邻域, 因此 y 不是 A 的聚点, 即 $y \notin A'$. 这说明 U 中没有 A 的任何一个聚点. 于是 x 有一个邻域 U 与 A 的导集 A' 无交, 所以 $x \notin (A')'$. 将以上的论证概括起来便是: 只要 $x \notin A \cup A'$, 便有 $x \notin (A')'$, 这也就是说 $(A')' \subset A \cup A'$. $\square$

借助极限点的概念, 我们可以给出一般拓扑空间中闭集的刻画: 一个集合是闭集当且仅当它包含其所有极限点.

定理 1.5.15 拓扑空间 X 的子集 A 是闭集当且仅当 $A' \subset A$.

证 如果 A 是闭集, 且 $x \in A^{\mathrm{c}}$, 则存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset A^{\mathrm{c}}$ 即 $U \cap A = \varnothing$. 所以根据定义, $x \notin A'$. 因此 $A' \subset A$.

反之, 假设 $A' \subset A$, 且 $x \in A^{\mathrm{c}}$. 则 $x \in (A')^{\mathrm{c}}$, 即存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing.$$

所以 $U \subset A^{\mathrm{c}}$. 于是由定义, A^{c} 是开集, 即 A 是闭集. □

这就是我们用定义 1.5.11 来定义极限点, 而不是把序列极限点叫做极限点的原因. 对于度量空间而言, 序列是一个比较好的刻画度量的工具, 但对于一般拓扑空间, 序列则往往并不那么有效.

与极限点的概念相反, 我们也可以定义孤立点.

定义 1.5.16 (孤立点) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 对于点 $x \in A$, 如果存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \cap A = \{x\}$, 则我们称 x 是 A 的孤立点.

由定义, 点 x 是 A 的孤立点当且仅当 $x \in A$ 但 $x \notin A'$.

1.5.2 闭包与内部

闭包

定义 1.5.17 (闭包) 对于拓扑空间 X 的子集 A, 称

$$\overline{A} := A \cup A'$$

为 A 的**闭包**.

定理 1.5.18 (闭包是闭集) 对于拓扑空间 X 的任意子集 A, $\overline{A} = A \cup A'$ 都是闭集.

证 对任意 $x \in (A \cup A')^c = A^c \cap (A')^c$, 存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing.$$

这意味着

(1) $U \subset A^c$.

(2) $U \subset (A')^c$: 对任意 $y \in U$, 必有 $y \notin A'$, 这是因为

$$U \cap (A \setminus \{y\}) \subset U \cap A = \varnothing.$$

所以 $U \subset A^c \cap (A')^c = (A \cup A')^c$, 即 $(A \cup A')^c$ 是开集. 所以 $A \cup A' = \overline{A}$ 是闭集. □

定理 1.5.19 (闭包的最小性) $A \cup A'$ 是包含 A 的**最小的闭集**, 即

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ 是闭集} \\ F \supset A}} F.$$

证 如果 F 是一个闭集并且 $F \supset A$, 那么

$$F \supset A \cup F' \supset A \cup A'.$$

所以

$$\overline{A} \subset \bigcap_{\substack{F \text{ 是闭集} \\ F \supset A}} F.$$

另一方面, 因为 $\overline{A}$ 自身也是包含 A 的闭集, 所以

$$\overline{A} \supset \bigcap_{\substack{F \text{ 是闭集} \\ F \supset A}} F.$$

命题 1.5.20 (闭包的刻画) (1) $x \in \overline{A}$ 当且仅当对任意 x 的邻域 U, 有 $U \cap A \neq \varnothing$.

(2) 如果 X 的拓扑由一个基给出, 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当含有 x 的每一个基元素 B 与 A 相交.

证 (1) ($\Longleftarrow$) 用反证法. 设 $x \notin \overline{A}$, 即 $x \in (\overline{A})^c$. 因为 $\overline{A}$ 是闭集, 故存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset (\overline{A})^c$, 即 $U \cap \overline{A} = \varnothing$. 特别地, $U \cap A = \varnothing$, 矛盾.

($\Longrightarrow$) 反之, 设存在开集 $U \ni x$, 使得 $U \cap A = \varnothing$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin A'$. 所以 $x \notin \overline{A}$.

(2) 如果 x 的每一个邻域都与 A 相交, 那么每一个包含 x 的基元素 B 也与 A 相交, 这是因为 B 是开集. 反之, 如果每一个包含 x 的基元素都与 A 相交, 那么每一个包含 x 的开集 U 也与 A 相交, 这是因为 U 包含一个含有 x 的基元素. □

命题 1.5.21 (闭包的性质) 设 X 为拓扑空间, $A, B \subset X$. 则

(1) $A \subset \overline{A}$;

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(4) A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$;

(5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

(6) 如果 $A \subset B$, 则 $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(7) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; (反包含关系通常不成立)

(8) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. (该性质对 $A \subset X, B \subset Y$ 也成立; 且对任意积也成立, 无论取积拓扑还是箱拓扑.)

证 (1) 由闭包的定义显然.

(2) 是因为

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= (A \cup B) \cup (A \cup B)' \\
&= A \cup B \cup A' \cup B' \\
&= (A \cup A') \cup (B \cup B') \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

(3) 是因为

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}} &= \overline{A \cup A'} \\ &= \overline{A} \cup \overline{A'} \\ &= A \cup A' \cup (A')' \\ &= A \cup A' = \overline{A}.\end{aligned}$$

(4) A 是闭集 $\iff A' \subset A \iff A = \overline{A}$.

(5) 因为 $\varnothing$ 是闭集.

(6) $\overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A}$.

(7) 由 (6), $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, 所以 $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

严格包含的例子: $\mathbb{R}$ 中, $\overline{(0,1) \cap (1,2)} = \varnothing \subsetneqq \{1\} = \overline{(0,1)} \cap \overline{(1,2)}$.

(8) 直接证任意积的情形. 设 $x = (x_\alpha)$ 为 $\prod \overline{A_\alpha}$ 的一个点. 我们来证明 $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. 设 $U = \prod U_\alpha$ 为箱拓扑或是积拓扑空间中含有 x 的一个基元素. 由于 $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$, 对于每一个 α, 可以选取点 $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$. 于是 $y = (y_\alpha)$ 既属于 U 又属于 $\prod A_\alpha$. 由于 U 的任意性, $x \in \overline{\prod A_\alpha}$.

反之, 设对于两个拓扑中的任何一个, $x = (x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$. 我们来证明对于任何一个指标 β, 有 $x_\beta \in \overline{A_\alpha}$. 设 V_β 为包含 x_β 的 X_β 中的开集. 由于对于两个拓扑中的无论哪一个, $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 是 $\prod X_\alpha$ 中的开集, 所以它含有 $\prod A_\alpha$ 中的点 $y = (y_\alpha)$. 于是 $y_\beta \in V_\beta \cap A_\beta$. 从而 $x_\beta \in \overline{A_\beta}$. □

定理 1.5.22 (用闭包刻画连续性) 设 X, Y 为拓扑空间. 那么映射 $f : X \to Y$ 是连续的当且仅当对于任意 $A \subset X$,

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

证 假设 $f : X \to Y$ 是连续的, $A \subset X$. 则由连续性, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是一个包含 A 的闭集. 所以 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

反之, 假设 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 对任何 $A \subset X$ 成立. 取任意闭集 $B \subset Y$. 则

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B} = B.$$

所以 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$, 即 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ 是闭集. □

内部

定义 1.5.23 (内部) 拓扑空间 X 中的集合 A 的**内部**定义为

$$\operatorname{int} A \coloneqq \{x \in A \mid 存在x \text{ 的邻域}U \text{ s.t.} U \subset A\}.$$

定理 1.5.24 (内部是开集) 对于拓扑空间 X 的任意子集 A, $\operatorname{int} A$ 都是开集.

证 如果 $x \in \operatorname{int} A$, 那么我们可以找到一个开集 $U \ni x$ 使得 $U \subset A$. 根据定义, 对于任意 $y \in U$, 我们也有 $y \in \operatorname{int} A$. 所以 $U \subset \operatorname{int} A$, 即 $\operatorname{int} A$ 是开集. □

内部的概念与闭包的概念是对偶的. 首先我们有

命题 1.5.25 (内部的最大性) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 则 A 的内部 $\operatorname{int} A$ 是包含在 A 中的最大开集:

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{U \text{ 是开集} \\ U \subset A}} U.$$

证 根据定义, $\operatorname{int} A$ 是开集并且 $A \subset A$. 所以只需证明: 如果 $U \subset A$ 是开集, 那么 $U \subset \operatorname{int} A$. 这是显然的: 对于任意 $x \in U$ 且 $U \subset A$, 根据定义我们有 $x \in \operatorname{int} A$. 所以 $U \subset \operatorname{int} A$. □

利用开集与闭集的 "对偶", 可以得到内部的另一种描述.

命题 1.5.26 对于拓扑空间 X 中的任意子集 A, 都有

$$\operatorname{int} A = \overline{A^c}^c.$$

证 作为闭集的补集, $\overline{A^c}^c$ 是开集. 另一方面, 对 $A^c \subset \overline{A^c}$ 取补集, 我们得到 $\overline{A}^c \subset A$. 所以 $\overline{A}^c \subset \operatorname{int} A$.

反之, 如果 $x \in \operatorname{int} A$, 则存在开隹 $U \ni x$ 使得 $U \subset A \subset A$. 所以 $U \cap A^c = \varnothing$, 由此推出 $x \notin \overline{A^c}$, 即 $x \in \overline{A^c}^c$. □

在等式 $\operatorname{int} A = \overline{A}^{c^c}$ 两边的取补集, 可以得到

$$(\operatorname{int} A)^c = \overline{A^c}.$$

命题 1.5.27 (内部的性质) 设 A, B 是拓扑空间 X 的子集. 则

(1) $\operatorname{int} A \subset A$;

(2) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

(3) A 是开集 $\iff A = \operatorname{int} A$;

(4) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$;

(5) $\operatorname{int} X = X$;

(6) $A \subset B \implies \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;

(7) $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$;

(8) $(\operatorname{int} A) \times (\operatorname{int} B) = \operatorname{int}(A \times B)$. (对 $A \subset X, B \subset Y$ 也成立.)

证 (1) 由内部的定义显然.

(2) 由 (1), $\operatorname{int}(A \cap B) \subset A \cap B \subset A$, 因为 $\operatorname{int}(A \cap B)$ 是开集, 所以 $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A)$. 同理 $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(B)$. 所以 $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

反之, $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A) \subset A$; $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(B) \subset B$. 所以 $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset A \cap B$. 由于 $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ 是开集, 所以 $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cap B)$.

(3) 集合 A 是一个开集, 即 A 的补集 A^c 是闭集. 这当且仅当 $A^c = \overline{A^c}$ 成立. 两边取补集, 可见, 这又当且仅当 $A = \overline{A^c}^c$ 成立, 即 $A = \operatorname{int} A$ 成立.

(4) 因为 $\operatorname{int} A$ 是开集.

(5) 因为 X 是开集.

(6) $\operatorname{int} A = \operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset \operatorname{int} B$.

(7) $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int}(A \cup B)$, $\operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$, 所以 $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.

严格包含的例子: $\mathbb{R}$ 中, $\operatorname{int}[0,1] \cup \operatorname{int}[1,2] = (0,1) \cup (1,2) \subsetneqq (0,2) \operatorname{int}([0,1] \cup [1,2])$. □

边界

定义 1.5.28 (边界) 拓扑空间 X 中集合 A 的边界 ∂A 定义为

$$\partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

根据定义, 我们可以将全空间 X 分解为不交并

$$X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \overline{A}^c.$$

命题 1.5.29 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$, 则 $x \in \partial A$ 当且仅当对任意 x 的邻域 U, 有

$$U \cap A \neq \varnothing \text{ 且} U \cap A^c \neq \varnothing.$$

证 根据定义易得

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A = \overline{A} \cap (\operatorname{int} A)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

命题 1.5.30 (边界的性质) 对于拓扑空间 X 中的子集 A, B, 有

(1) ∂A 总是闭集;

(2) $\partial A = \partial(A^c)$;

(3) $\partial \operatorname{int} A \subset \partial A, \partial \overline{A} \subset \partial A$;

(4) $\partial(\partial A) \subset \partial A$;

(5) 如果 A 是开集或者闭集, 则 $\partial(\partial A) = \partial A$;

(6) 如果 A 是开集或者闭集, 则 $\operatorname{int}(\partial A) = \varnothing$;

(7) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

1.6 Hausdorff 空间, 分离公理

1.6.1 Hausdorff 空间

Hausdorff 空间的定义

使得一个序列可能有多个极限的拓扑, 不符合几何直观, 且较少用到. 因此常常需要对拓扑空间附加一些条件, 使得这样的情况不会出现. 这个条件是数学家 Felix Hausdorff 给出的.

定义 1.6.1 (Hausdorff 空间) 如果对于拓扑空间 X 中任意两个不同的点 x_1 和 x_2, 分别存在 x_1 和 x_2 的邻域 U_1 和 U_2 使得这两个邻域无交, 则称 X 为一个 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space).

Hausdorff 空间中序列的极限是唯一的.

定理 1.6.2 若 X 是一个 Hausdorff 空间, 则 X 中的序列的极限至多.

证 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 有不止一个极限, 设 $x_n \to a$ 且 $x_n \to b$, $a \neq b$. 由于 X 是一个 Hausdorff 空间, 故存在 a 的邻域 U_1 和 b 的邻域 U_2, 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 由极限的定义, n 充分大后, $x_n \in U_1$, $x_n \in U_2$, 矛盾. □

Hausdorff 空间的性质

命题 1.6.3 任何序拓扑都是 Hausdorff 的.

证 给定具有序拓扑的全序集 X 上的任意两个元素 x 和 y (不妨设 $x < y$). 如果存在某个元素 c 使得 $x < c < y$, 则 x 的邻域 $(-\infty, c)$ 与 y 的邻域 $(c, +\infty)$ 无交. 若在 x 和 y 之间不存在这样的元素 c, 则 x 的邻域 $(-\infty, y)$ 与 y 的邻域 $(x, +\infty)$ 无交. □

命题 1.6.4 Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 的.

证 设 X 是一个 Hausdorff 空间, Y 是 X 的子空间, x 和 y 是 Y 上两个不同的点. 由于 X 是 Hausdorff 的, 故 X 中存在 x 和 y 的无交的邻域 U 和 V. 在 Y 中, 存在 x 和 y 的两个邻域 $Y \cap U$ 和 $Y \cap V$, 且这两个邻域无交. □

命题 1.6.5 两个 Hausdorff 空间的积是 Hausdorff 的.

证 设 X, Y 为 Hausdorff 空间. $x \times y$ 和 $x' \times y'$ 为 $X \times Y$ 上不同的两点. 若 $x \neq x'$, 则分别存在 x 和 x' 的邻域 U 和 U', 使得二者无交, 若 $x = x'$, 我们取 $U = U'$. 同样的, 若 $y \neq y'$, 则分别存在 y 和 y' 的邻域 V 和 V', 使得二者无交, 若 $y = y'$, 我们取 $V = V'$. 这样一来, 对于 $X \times Y$ 上不同的两点 $x \times y$ 和 $x' \times y'$, 它们的邻域 $U \times V$ 和 $U' \times V'$ 是无交的[1]. □

这一结论还可以推广到任意积, 无论取积拓扑还是箱拓扑.

命题 1.6.6 若每一个空间 X_α 都是 Hausdorff 的, 则无论是箱拓扑还是积拓扑, $\prod X_\alpha$ 都是 Hausdorff 的.

证 设 x, x' 是 $\prod X_\alpha$ 上两个不同的点. 则一定存在至少一个 α, 使得 $x_\alpha \neq x'_\alpha$. 因为 X_α 是 Hausdorff 的, 我们能够找到 X_α 上两个无交的开集 U 和 U', 并且它们分别包含 x_α 和 x'_α. 取 $\prod\limits_\beta U_\beta$ 和 $\prod\limits_\beta U'_\beta$, 其中, 当 $\beta \neq \alpha$ 时, $U_\beta = U'_\beta = X_\beta$; 当 $\beta = \alpha$ 时, $U_\beta = U$, $U'_\beta = U'$. 无论是

[1] $x \times y \neq x' \times y'$ 的情形包括: 1. $x \neq x'$, $y \neq y'$, 此时 $U \cap U' = \varnothing$, $V \cap V' = \varnothing$; 2. $x = x'$, $y \neq y'$, 此时 $V \cap V' = \varnothing$; 3. $x \neq x'$, $y = y'$, 此时 $U \cap U' = \varnothing$. 以上三种情况中, $U \times V$ 和 $U' \times V'$ 都是无交的.

箱拓扑或是积拓扑, $\prod_\beta U_\beta$ 和 $\prod_\beta U'_\beta$ 都分别是 x 和 x' 的邻域, 并且这两个邻域无交. 因此无论是哪种拓扑, $\prod X_\alpha$ 都是 Hausdorff 的. □

1.6.2 分离公理

几个分离公理

Hausdorff 条件只是分离公理的其中之一, 分离性公理有很多, 这里列举四种常用的分离性.

定义 1.6.7 (分离公理) 设 X 是拓扑空间.

(**T1 公理**) 若对于任意 $x \neq y$, 存在 x 的邻域 U, y 的邻域 V 使得

$$y \notin U, x \notin V,$$

则称 X 为 **Frechét 空间**, 简称为 **T1 空间**.

(**T2 公理**) 若对于任意 $x \neq y$, 存在 x 的邻域 U, y 的邻域 V 使得

$$U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 为 **Hausdorff 空间**, 简称为 **T2 空间**.

(**T3 公理**) 满足 T1 公理且若对于任意闭集 A 以及任意点 $x \notin A$, 存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \subset U,\ x \in V,\ \text{且} U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 为**正则空间** (regular space), 简称为 **T3 空间**.

(**T4 公理**) 满足 T1 公理且若对于任意不交闭集 $A \cap B = \varnothing$, 存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \subset U,\ B \in V,\ \text{且} U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 为**正规空间** (normal space), 简称为 **T4 空间**.

分离公理的等价刻画

定理 1.6.8 (T1 公理的等价刻画) $(X, \mathcal{T})$ 满足 T1 公理当且仅当任意单点集 $\{x\}$ 是闭集.

证 ($\Longrightarrow$) 对 $\forall y \neq x$, $\exists U_y \in \mathcal{T}$ 使得 $x \notin U_y$. 所以

$$\{x\}^c = \bigcup_{y \neq x} U_y$$

是开集, 即 $\{x\}$ 是闭集.

($\Longleftarrow$) 对于 $\forall x \neq y$, 取

$$U = \{y\}^c, V = \{x\}^c.$$

则 $x \notin V$, $y \notin U$ 且 $x \in U$, $y \in V$. □

定理 1.6.9 (T2 公理的等价刻画) $(X, \mathcal{T})$ 满足 T2 公理当且仅当对角线集合 $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 在 $X \times X$ 中是闭集.

证 ($\Longrightarrow$) 对 $\forall x \neq y$, 因为 X 是 T2 的, $\exists X \times X$ 中的开集 $U_x \times V_y$ 使得

$$(x,y) \in U_x \times V_y \text{ 且} \Delta \cap (U_x \times V_y) = \varnothing.$$

所以 Δ^c 是开集, 即 Δ 是闭集.

($\Longleftarrow$) 对于 $\forall x \neq y$, 即 $(x,y) \in \Delta^c$, $\exists$ 开集 $U \ni x, V \ni y$ 使得

$$(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c.$$

由此 $U \cap V = \varnothing$, 因为如果 $z \in U \cap V$, 则

$$(z,z) \in (U \times V) \cap \Delta = \varnothing.$$

定理 1.6.10 (T3 公理的等价刻画) 设 X 是 T1 的, 则 X 是正则 (T3) 的当且仅当对 X 中任意给定的一个点 x 和 x 的任何一个邻域 U, 存在 x 的一个邻域 V, 使得 $\overline{V} \subset U$.

证 设 X 是正则的, 给定点 x 和 x 的邻域 U. 令 $B = X \setminus U$, 则 B 是一个闭集. 根据假设, 存在分别包含 x 和 B 的无交开集 V 和 W. 因为若 $y \in B$, 则集合 W 就是 y 的一个邻域, 它与 V 无交, 所以集合 $\overline{V}$ 与 B 无交. 因此 $\overline{V} \subset U$.

设给定点 x 和不包含 x 的闭集 B. 令 $U = X \setminus B$. 根据假设, 存在 x 的邻域 V, 使得 $\overline{V} \subset U$. 于是, 开集 V 和 $X \setminus \overline{V}$ 就是分别包含 x 和 B 的无交开集. 从而 X 是正则的. □

定理 1.6.11 (T4 公理的等价刻画) 设 X 是 T1 的, 则 X 是正规 (T4) 的当且仅当对于任意闭集 A 和包含 A 的任何一个开集 U, 存在一个包含 A 的开集 V, 使得 $\overline{V} \subset U$.

证 这个证明完全与上面的证明相同, 只需在整个证明中用集合 A 代替点 x 就可以了. □

分离公理之间的关系

由定义容易看出, T4 $\Longrightarrow$ T3 $\Longrightarrow$ T2 $\Longrightarrow$ T1. 反之的蕴含关系都不成立.

例 1.6.12 (T1 $\not\Rightarrow$ T2) 余有限拓扑 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cofinite}})$ 是 T1 的, 因为其有限点集都是闭集. 但不是 $T2$ 的: 设 $x \neq y$, 则 x 的邻域 U 形如 $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$, y 的邻域 V 形如 $V = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \cdots, y_m\}$, 则 $U \cap V = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m\} \neq \varnothing$, 所以 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cofinite}})$ 不是 T2 的.

例 1.6.13 (T2 $\not\Rightarrow$ T3) 空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 是 T2 的 $\bullet$, 其中 $\mathcal{T}$ 是由子基

$$\mathcal{S} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$$

生成的. 但在该拓扑中, $\mathbb{Q}^c$ 是闭集但不能与 0 分离, 从而不是 T3 的.

例 1.6.14 (T3 $\not\Rightarrow$ T4) Sorgenfrey 平面 $\mathbb{R}_\ell^2$ 是正则的但不是正规的.

分离性的性质

我们知道, Hausdorff 空间 (T2) 的子空间是 Hausdorff 的. Hausdorff 空间的积空间也是 Hausdorff 的. 对 T3 空间也有类似的定理.

定理 1.6.15 正则空间的子空间是正则的. 正则空间的积空间也是正则的.

证 设 Y 是一个正则空间 (进而是 Hausdorff 的) X 的子空间, 则 Y 是 T1 的. 设 x 是 Y 的一个点, B 是 Y 中不包含 x 的一个闭子集. 于是 $\overline{B} \cap Y = B$, 其中 $\overline{B}$ 表示 B 在 X 中的闭包. 因此, $x \notin \overline{B}$. 再应用 X 的正则性, 我们可以选取 X 中分别包含 x 和 $\overline{B}$ 的无交开集 U 和 V. 因此 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 分别是 Y 中包含 x 和 B 的无交开集.

设 $\{X_\alpha\}$ 是正则空间的一个族. 令 $X = \prod X_\alpha$. 则 X 是一个 Hausdorff 空间, 因此 X 是 T1 的. 设 $x = (x_\alpha) \in X$, U 为 x 在 X 中的一个邻域. 取基中的元素 $\prod U_\alpha$ 使得它包含于 U 中, 且包含着点 x. 对于每一个 α, 选取 x_α 在 X_α 中的一个邻域 V_α, 使得 $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. 如果恰好有 $U_\alpha = X_\alpha$, 那就选取 $V_\alpha = X_\alpha$. 于是 $V = \prod V_\alpha$ 便是点 x 在 X 中的一个邻域. 又因为 $\overline{V} = \prod \overline{V}_\alpha$, 所以 $\overline{V} \subset \prod U_\alpha \subset U$. 因此, X 是正则的. □

对于正规 (T4) 空间却没有相似的定理.

定理 1.6.16 度量空间都是正规的.

证 易知度量空间中单点集都是闭集, 所以度量空间是 T1 的.

设 (X, d) 是一个度量空间, A 和 B 是 X 中的两个无交闭集. 对于 A 中的任意一个点 a, 选取 ε_a 使得球 $B_{\varepsilon_a}(a)$ 与 B 无交. 类似地, 对于 B 中的任意一个点 b, 取 ε_b 使得球 $B_{\varepsilon_b}(b)$ 与 A 无交. 定义

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a/2}(a), \quad V = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b/2}(b),$$

于是 U 和 V 就是分别包含集合 A 和 B 的开集. 若 $z \in U \cap V$, 则存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得

$$z \in \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b/2}(b)$$

根据三角不等式可见 $d(a,b) < (\varepsilon_a + \varepsilon_b)/2$. 若 $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$, 则 $d(a,b) < \varepsilon_b$, 从而球 $B_{\varepsilon_b}(b)$ 包含点 a. 若 $\varepsilon_a > \varepsilon_b$, 则 $d(a,b) < \varepsilon_a$, 从而球 $B_{\varepsilon_a}(a)$ 包含点 b. 但这两种情形都是不可能的. 所以 U 和 V 是无交的. □

Chapter 2

连通性

2.1 连通性

2.1.1 连通空间

连通性的定义

定义 2.1.1 (分割) 设 X 是一个拓扑空间. 所谓 X 的一个**分割** (separation), 是指 X 的一对无交的非空开子集 U 和 V, 它们的并等于 X.

定义 2.1.2 (连通空间) 如果拓扑空间 X 的分割不存在, 则称空间 X 是**连通的** (connected). 否则称 X 是**不连通的**.

类似地, 如果 X 中的子集 A 关于关于子空间拓扑是连通的或不连通的, 则我们称 A 是 X 的**连通子集**或**不连通子集**.

根据定义, 空集和单点集都是连通的.

定义 2.1.3 (完全不连通空间) 如果拓扑空间 X 中仅有单点集和空集是连通子集, 则我们称 X 是**完全不连通的**.

连通性的等价刻画

定理 2.1.4 (连通性的等价刻画) 对于拓扑空间 X, 以下条件等价:

(1) X 是连通的.

(2) 不存在非空子集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$, 且 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$.

(3) 不存在不交的非空开集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(4) 不存在不交的非空开集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(5) X 中既开又闭的子集只有 $\varnothing$ 和 X 自身.

用 “不连通性” 描述连通性会更直接.

定理 2.1.5 对于拓扑空间 X, 以下条件等价:

(1) X 是不连通的.

(2) 存在非空子集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$, 且 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. (事实上这里的 A, B 就是 X 的分割)

(3) 存在不交的非空开集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(4) 存在不交的非空闭集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(5) 存在 $A \neq \varnothing, A \neq X$ 使得 A 在 X 中是既开又闭的.

(6) 存在连续满射 $f : X \to \{0, 1\}$.

证 由定义, (1)$\Longleftrightarrow$(3). 再由 $X = A \cup B$ 且 $A \cap B = \varnothing$ 当且仅当 $A^c = B$ 且 $A = B^c$, 有 (1)$\Longleftrightarrow$(3)$\Longleftrightarrow$(4).

(1)$\Longleftrightarrow$(5): 若 A 是 X 中一个既开又闭的非空真子集, 那么, $U = A$ 和 $V = X - A$ 是 X 中的非空无交开集使得其并等于 X, 从而它们构成了 X 的一个分割. 反之, 如果 U 和 V 构成 X 的一个分割, 则 U 便是 X 的既开又闭的非空真子集.

(1)$\Longleftrightarrow$(2): 若 X 不连通, 设 A 和 B 是 X 的一个分割, 则 A 在 X 中既开又闭. 由 A 是闭的有 $A = \overline{A}$, 因此 $\overline{A} \cap B = \varnothing$. 同理, $A \cap \overline{B} = \varnothing$. 反之, 若 $X = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \varnothing$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$. 则 $\overline{A} \subset X - B = A$, 所以 $\overline{A} = A$, 于是 A 是 X 中的闭集. 同理 B 是 X 中的闭集. 再根据 $A = X - B$ 和 $B = X - A$, 便可见它们也都是 Y 中的开集.

(1)$\Longleftrightarrow$(6): ($\Longleftarrow$) 是平凡的. ($\Longrightarrow$) 是因为我们可以定义 $f(A) = 0$ 且 $f(B) = 1$, 根据定义 f 是连续的. □

连通空间的例子

例 2.1.6 平凡拓扑空间 (开集是 X 和 $\varnothing$) 是连通的.

例 2.1.7 不少于两个点的离散拓扑空间是不连通的.

例 2.1.8 离散拓扑空间是完全不连通的. 如果 $V \subset X$ 和 $x \in V$, 则 $\{x\}$ 和 $V - \{x\}$ 形成 V 的分割, 除非 $V = \{x\}$.

例 2.1.9 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 是不连通的. 事实上, 因为任意两个有理数之间都存在无理数, 所以如果 Y 是 $\mathbb{Q}$ 中包含点 p 和 q 的一个子空间, 则在 p 和 q 之间可以选择一个无理数 a, 并且

$$Y = ((-\infty, a) \cap Y) \cup ((a, +\infty) \cap Y),$$

因此 $\mathbb{Q}$ 是完全不连通的. ($\mathbb{Q}$ 上的子空间拓扑不是离散拓扑!)

例 2.1.10 Sorgenfrey 直线 $\mathbb{R}_\ell$ (下限拓扑) 是完全不连通的: 设 $A \subset \mathbb{R}_\ell$ 且 $a, b \in A$. 不妨设 $a < b$. 取 $c \in (a, b)$. 根据定义, $(-\infty, c)$ 和 $[c, +\infty)$ 在 $\mathbb{R}_\ell$ 中都是开集. 因此 $A = A_1 \cup A_2$, 其中 $A_1 = A \cap (-\infty, c)$ 和 $A_2 = A \cap [c, \infty)$ 都是 A 中的非空开集, 于是 A 是不连通的.

例 2.1.11 $A_1 = (0,1) \subset \mathbb{R}$ 连通, $\operatorname{int} A_1$ 连通, ∂A_1 不连通.

$A_2 = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1 \text{或} (x-2)^2+y^2 \leqslant 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ 连通 (两个有公共点的连通集的并集), ∂A_2 连通, $\operatorname{int} A_2$ 不连通.

$A_3 = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$, $\partial A_3 = [0, +\infty)$ 和 $\operatorname{int} A_3 = (-\infty, 0)$ 都连通, 但 A_3 不连通.

2.1.2 连通性的性质

引理 2.1.12 如果集合 C 与 D 构成 X 的一个分割, 并且 Y 是 X 的一个连通子空间, 那么, Y 或者包含于 C, 或者包含于 D.

证 由于 C 和 D 都是 X 中的开集, 从而 $C \cap Y$ 和 $D \cap Y$ 都是 Y 中的开集. 这两个集合无交且它们的并等于 Y. 倘若它们中每一个都不是空集, 则它们便构成了 Y 的一个分割. 因此, 它们之中必有一个为空集. 于是, 或者 Y 包含于 C, 或者 Y 包含于 D. □

命题 2.1.13 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是 X 的两个拓扑, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. 如果 $(X, \mathcal{T})$ 是连通的, 那么 $(X, \mathcal{T}')$ 也是连通的.

并集的连通性

定理 2.1.14 含一个公共点的 X 的连通子空间族的并是连通的.

证 设 $\{A_\alpha\}$ 是空间 X 中连通子空间的一个族. p 是 $\bigcap A_\alpha$ 的一个点. 我们证明空间 $Y = \bigcup A_\alpha$ 是连通的. 设 $Y = C \cup D$ 是 Y 的一个分割. 那么点 p 将属于 C 或 D. 不妨设 $p \in C$. 因为 A_α 是连通的, 它必然整个地包含于 C 或 D, 而由于它包含 C 中的点 p, 所以 A_α 不可能包含在 D 中. 因此对于每一个 α, 有 $A_\alpha \subset C$, 于是 $\bigcup A_\alpha \subset C$, 这与 D 非空矛盾. □

推论 2.1.15 设 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ $(N \leqslant +\infty)$ 是连通的, 且对任意 $n < N$ 都有 $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ 是连通的.

证 根据归纳法和上述定理, 对于每个 n, 集合

$$B_n \coloneqq A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

是连通的. 又因为 $\bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n \neq \varnothing$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n$ 是连通的. □

命题 2.1.16 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的连通子空间的一个族. A 是 X 的一个连通子空间. 则若对于每一个 α 有 $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$, 则 $A \cup \left(\bigcup A_\alpha\right)$ 是连通的.

证 如果并集存在分割 U, V, 则 A 和所有 A_α 位于 U 或 V 之内. 假设 $A \subset U$, 则每个 $A_\alpha \subset U$, V 为空. 矛盾. □

命题 2.1.17 设 $Y \subset X$, X 和 Y 都是连通的. 若 A 和 B 构成 $X-Y$ 的一个分割, 则 $Y \cup A$ 和 $Y \cup B$ 都是连通的.

证 只需证明 $Y \cup A$ 是连通的. 若不然, 则令 $Y \cup A = C \cup D$ 其中 C 和 D 是 $Y \cup A$ 的非空不相交开子集. 由于 Y 是 $Y \cup A$ 的连通子集, 它必须位于 C 或 D 之内, 因此假设 $Y \subset C$, 使得 $D \subset A$. 我们有 $X = C \cup D \cup B$, 则 C 的极限点不在 D 中, B 的极限点也不在 $D \subset A$ 中, 因此 $B \cup C$ 是闭的, D 在 X 中是开的. 但 $D \subset A$ 的极限点不能位于 C 或 B 中. 所以 D 在 X 中是封闭的. 因此, D 在 X 中既开又闭. 矛盾. □

连续映射像的连通性

定理 2.1.18 设 $f: X \to Y$ 是连续映射, 且 $A \subset X$ 是连通子集, 则像集 $f(A)$ 是 Y 的连通子集.

证 使用反证法. 我们假设 $f(A)$ 是不连通的. 则存在 Y 中满足 $V_i \cap f(A) \neq \varnothing (i=1,2)$ 且 $V_1 \cap V_2 \cap f(A) = \varnothing$ 的开集 V_1, V_2, 使得

$$f(A) = (V_1 \cap f(A)) \cup (V_2 \cap f(A)).$$

令 $A_i = f^{-1}(V_i) \cap A$. 则 $A_1, A_2 \neq \varnothing, A_1 \cap A_2 = \varnothing$, 且 $A = A_1 \cup A_2$, 跟 A 连通矛盾. □

推论 2.1.19 如果 $f: X \to Y$ 是同胚, 则 X 是连通的当且仅当 Y 是连通的.

闭包的连通性

定理 2.1.20 设 A 是 X 的一个连通子空间. 若 $A \subset B \subset \overline{A}$, 则 B 也是连通的. 换句话说, 如果 B 等于连通子空间 A 加上它的部分或全部极限点, 那么 B 是连通的.

证 (证法一) 设 A 连通且 $A \subset B \subset \overline{A}$. 如果 $B = C \cup D$ 是 B 的一个分割. 则 A 必定整个地包含于 C 或者包含于 D, 不妨设 $A \subset C$. 于是 $\overline{A} \subset \overline{C}$. 由于 $C \cup D$ 是一个分割, 故 $\overline{C}$ 与 D 无交, 所以 B 与 D 无交, 这与 D 是 B 的非空子集矛盾.

(证法二) 任取连续映射 $f: B \to \{0,1\}$. 则 $f_1 = f|_A: A \to \{0,1\}$ 是连续的, 从而 f_1 不是满射. 不妨设 $f_1(A) = \{0\}$. 因为 A 在 B 中的闭包是 B, 所以

$$f(B) \subset \overline{f(A)} = \{0\},$$

即 f 不是满射. 故 B 是连通的. □

推论 2.1.21 (拓扑学家的正弦曲线) 对任意子集 $C \subset \{0\} \times [-1,1]$, 集合

$$S = \left\{(x,y) \mid 0 < x < 1, y = \sin\frac{1}{x}\right\} \cup C \subset \mathbb{R}^2$$

是连通的. 这是因为 $\mathbb{R}^2$ 的下列子集:

$$S_0=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\mid 0<x\leqslant 1\right\}$$

是连通集 $(0,1]$ 的连续像, 所以 S 是连通的. 因此它在 $\mathbb{R}^2$ 中的闭包 $\overline{S_0}$ 也是连通的. 所以 $S_0\subset S\subset\overline{S_0}$ 是连通的.

积空间的连通性

定理 2.1.22 (有限积的连通性) 有限多个连通空间的积空间是连通的.

证 首先证明两个连通空间 $X\times Y$ 的情形. 不妨设 X,Y 非空. 固定 $b\in Y$. 则集合 $X\times\{b\}$ 作为连通集 X 在连续映射

$$j_b: X\to X\times Y,\quad x\mapsto(x,b)$$

下的像集是连通的. 因此对于任意 $x\in X$, 集合 $(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{b\})$ 是连通的. 而且, 因为

$$\bigcap_x(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{b\})\neq\varnothing,$$

所以

$$X\times Y=\bigcup_x((\{x\}\times Y)\cup(X\times\{b\}))$$

是连通的.

对于有限多个连通空间的积 $X_1\times\cdots\times X_n=(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$, 我们可以用归纳法给出证明. □

定理 2.1.23 (任意积的连通性) 积空间 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 关于积拓扑是连通的当且仅当每个 X_α 是连通的.

证 如果 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 是连通的, 则每个 X_α (作为 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 在投影映射下的像集) 是连通的.

反之, 设每个 X_α 是连通的. 对任意 α, 取定元素 $a_\alpha\in X_\alpha$. 对任意有限指标集 $K\subset\Lambda$, 由归纳法, 积空间 $\prod\limits_{\alpha\in K}X_\alpha$ 是连通的. 若指标集 Λ 是无限集. 令

$$X_K=\{(x_\alpha)\mid x_\alpha=a_\alpha,\forall\alpha\notin K\}.$$

则 X_K 是典范嵌入映射

$$j_K:\prod_{\alpha\in K}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\simeq\prod_{\alpha\in K}X_\alpha\times\prod_{\alpha\notin K}X_\alpha,\quad (x_\alpha)_{\alpha\in K}\mapsto\left((x_\alpha)_{\alpha\in K},(a_\alpha)_{\alpha\notin K}\right)$$

下的像集. 因为映射 j_K 是连续的, 所以 X_K 是连通的. 注意到根据构造, $(a_\alpha)\in\bigcap\limits_K X_K$. 所以集合

$$X\coloneqq\bigcup_{\text{有限的}K\subset\Lambda}X_K$$

是连通的. 下证 $\overline{X} = \prod_{\alpha} X_\alpha$. 事实上, 由积拓扑定义, 若 U 是 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 中的非空开集, 则存在有限指标集 K' 以及非空开集 $U_\alpha \subset X_\alpha (\alpha \in K)$ 使得

$$U \supset \prod_{\alpha \in K'} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K'} X_\alpha.$$

特别地, 若取有限指标集 K 使得 $K' \cap K = \varnothing$, 则 $X_K \cap U \neq \varnothing$, 从而 $X \cap U \neq \varnothing$. 这就证明了 $\overline{X} = \prod_{\alpha} X_\alpha$. 于是 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 是连通的. □

注 该结论对箱拓扑不成立. $\mathbb{R}^\omega$ 关于箱拓扑是不连通的.

命题 2.1.24 设 A 是 X 的一个真子集, B 是 Y 的一个真子集. 若 X 和 Y 都是连通的, 则

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

是连通的.

证 设 $M = X \times Y - A \times B$. 对于任意 $x \notin A$, $V_x = \{x\} \times Y \subset M$ 是连通的 (与 Y 同胚). 对于所有 $y \notin B$, $H_y = X \times \{y\} \subset M$ 也是连通的. 设 $a \notin A$, $b \notin B$. 则 $C = V_a \cup H_b \subset M$ 是连通的 (这两个集合有共同点 (a, b)). 此外, 对于每个 $x \notin A$ 和 $y \notin B$, V_x 和 H_y 与 C 相交, 且 $M = \bigcup_{x \notin A} V_x \cup \bigcup_{y \notin B} H_y$. 因此 M 是连通的. □

2.1.3 $\mathbb{R}$ 上的连通子空间

定理 2.1.25 $\mathbb{R}$ 的子集是连通的当且仅当它是一个区间.

证 若 S 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 且 S 不是一个区间, 则存在 $x < z < y$ 使得 $x, y \in S$ 但 $z \notin S$. S 可以写成两个开集的并

$$S = (S \cap (-\infty, z)) \cup (S \cap (z, +\infty)),$$

从而 S 不连通.

下证区间 $I \subset \mathbb{R}$ 都是连通的. 假设 I 是不连通的. 则存在开集 $U, V \subset \mathbb{R}$ 使得

$$U \cap I \neq \varnothing, V \cap I \neq \varnothing \quad \text{且} \quad I \subset U \cup V.$$

不失一般性, 假设存在 $a < b$ 使得 $a \in U \cap I$ 且 $b \in V \cap I$. 令

$$A = \{x \in U \cap I \mid x < b\},$$

记 $c = \sup A$. 则由 U 是开集可知 $c \neq a$, 于是 $a < c \leqslant b$. 特别地, $c \in I$. 但是,

(1) $c \notin U$: 如果 $c \in U$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $b > c + \varepsilon \in U$. 注意因为 I 是区间, 且 $c < c + \varepsilon < b$, 故 $c + \varepsilon \in I \cap U$. 这与 $c = \sup A$ 矛盾.

(2) $c \notin V$: 如果 $c \in V$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $(c-\varepsilon, c] \subset V$. 因为 $c > a$, 所以可取 ε 充分小使得 $(c-\varepsilon, c] \subset I$, 从而与 $c = \sup A$ 矛盾.

所以 $c \notin U \cup V$, 从而 $c \notin I$, 矛盾! □

进一步, 上面的证明可以推广到如下情形.

定义 2.1.26 (线性连续统) 若 $(X, <)$ 是多于一个元素的全序集, 并且满足条件:
(1) X 有上确界性质 (任意有上界的子集都有一个最小上界), (Dedekind 完备性)
(2) 若 $x < y$, 则存在 z 使得 $x < z < y$, (稠密性)
则称 X 是一个**线性连续统** (linear continuum).

例 2.1.27 (1) 有序矩形 $I \times I$ 是线性连续统.

(2) 如果 X 是一个良序集 (任意非空子集都有极小元), 则 $X \times [0,1)$ 关于字典序是一个线性连续统.

定理 2.1.28 赋有序拓扑的线性连续统 $(X, <)$ 的子集是连通集当且仅当它是区间.

注 上述的区间是指满足 "若 $x, y \in I$ 且 $x < y$, 则对于任意 $x < z < y$, 均有 $z \in I$" 的集合. 包括开区间、闭区间、半开半闭区间以及单点集:

$$(a,b), [a,b], \{a\}, (a,b], [a,b), (a,+\infty), [a,+\infty), (-\infty,b], (-\infty,b), (-\infty,+\infty).$$

定理 2.1.29 (介值定理 (intermediate value theorem)) 设 $f : X \to Y$ 是从连通空间 X 到具有序拓扑的全序集 Y 的一个连续映射. 若 a 和 b 是 X 的两个点并且 r 是 Y 中满足 $f(a) < r < f(b)$ (或 $f(b) < r < f(a)$) 的一个点, 则 X 中存在一个点 c 使得 $f(c) = r$.

证 假定定理所设条件成立. 那么

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \text{ 和} B = f(X) \cap (r, +\infty)$$

是无交的, 由于 A 和 B 中一个包含 $f(a)$, 另一个包含 $f(b)$, 所以它们都是非空的. 由于它们是 Y 的开集与 $f(X)$ 的交, 所以都是 $f(X)$ 的开集. 若 X 中不存在使得 $f(c) = r$ 的点 c, 那么 $f(X)$ 就等于是集合 A 与 B 的并. 于是 A 和 B 便组成 $f(X)$ 的一个分割, 这与连通空间的连续像是连通的这一事实矛盾. □

2.2 道路连通性

2.2.1 道路与道路连通空间

定义

定义 2.2.1 (道路) 设 x 与 y 为空间 X 的两点, X 中从 x 到 y 的一条**道路** (path) 是指从 $\mathbb{R}$ 的某一个闭区间 $[a,b]$ 到 X 的一个连续映射 $f : [a,b] \to X$, 使得 $f(a) = x$ 和 $f(b) = y$.

定义 2.2.2 (道路连通空间) 若拓扑空间 X 中的任意两点都可用一条道路相连接, 则称 X 是**道路连通的**.

道路连通空间的例子

例 2.2.3 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球 $B^n = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$, 单位球面 $S^{n-1} = \{x \mid \|x\| = 1\}$ 都是道路连通的.

例 2.2.4 穿孔欧氏空间 (punctured Euclidean space) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 对于 $n > 1$ 是道路连通的.

例 2.2.5 有序矩形 I^2 是连通的, 但不是道路连通的.

设 $p = 0 \times 0$, $q = 1 \times 1$, 如果存在一个连接 p 和 q 的道路 $f : [a,b] \to I_o^2$, 根据介值定理, 像集 $f([a,b])$ 必定包含 I_o^2 的每一个点 $x \times y$. 因此, 对于每一个点 $x \in I$, 集合

$$U_x = f^{-1}(x \times (0,1))$$

是 $[a,b]$ 中一个非空子集. 并且根据连续性, 它是 $[a,b]$ 中的一个开集. 对于每一个 $x \in I$, 在 U_x 中选取一个有理数 q_x. 因为这些集合 U_x 无交, 映射 $x \to q_x$ 是一个从 I 到 Q 中的 a 咪 a 单射, 这与区间 I 不可数矛盾.

例 2.2.6 拓扑学家的正弦曲线不是道路连通的.

假设 $f : [a,c] \to \overline{S}$ 是一个连接原点与 S 中一点的道路. 则所有满足 $f(t) \in 0 \times [-1,1]$ 的 t 构成一个闭集, 从而有最大元 b. 那么 $f : [b,c] \to \overline{S}$ 是一个将 b 映到 $0 \times [-1,1]$ 中, 将 $[b,c]$ 中所有异于 b 的点映到 S 中的道路.

为讨论方便, 以 $[0,1]$ 代替 $[b,c]$, 并且记 $f(t) = (x(t), y(t))$. 则 $x(0) = 0$, 且当 $t > 0$ 时, $x(t) > 0, y(t) = \sin(1/x(t))$. 我们来证明存在点的一个序列 $t_n \to 0$ 使得 $y(t_n) = (-1)^n$. 由于序列 $y(t_n)$ 不收玫, 从而与 f 的连续性矛盾.

我们可按照以下方式选取 t_n: 对于给定的 n, 选取满足 $0 < u < x(1/n)$ 的 u 使得 $\sin(1/u) = (-1)^n$. 那么由介值定理知, 存在满足 $0 < t_n < 1/n$ 的 t_n 使得 $x(t_n) = u$.

例 2.2.7 欧氏空间的凸子集都是道路连通的, 因为根据定义, 凸子集中的任意两点都可以由直线段连接.

2.2.2 道路连通性的性质

连通性与道路连通性的关系

定理 2.2.8 如果 X 是道路连通的, 则 X 是连通的.

证 用反证法. 假设存在非空的不相交开集 A 和 B, 使得 $X = A \cup B$. 取 $x \in A$, $y \in B$ 以及从 x 到 y 的路径 γ, 则

$$[0,1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$$

是非空的不相交开集的并集, 这与 $[0,1]$ 的连通性矛盾. □

连续映射像的道路连通性

定理 2.2.9 设 $f: X \to Y$ 是连续映射, 且 $A \subset X$ 是道路连通的, 则 $f(A)$ 是道路连通的.

证 对任意 $f(x_1), f(x_2) \in f(A)$, 取从 x_1 到 x_2 的道路 $\gamma: [0,1] \to A$. 则

$$f \circ \gamma: [0,1] \to f(A)$$

是从 $f(x_1)$ 到 $f(x_2)$ 的道路. □

并集的道路连通性

定理 2.2.10 设 X_α 是道路连通的, 且 $\bigcap\limits_\alpha X_\alpha \neq \varnothing$. 则 $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ 是道路连通的.

证 取 $x_0 \in \bigcap\limits_\alpha X_\alpha$. 对于任意 $x_1 \in X_{\alpha_1}$ 和 $x_2 \in X_{\alpha_2}$, 存在 X_{α_1} 中从 x_1 到 x_0 的道路 γ_1 和 X_{α_2} 中从 x_0 到 x_2 的道路 γ_2. 因此 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是 x_1 到 x_2 的道路. □

积空间的道路连通性

定理 2.2.11 积空间 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 取积拓扑是道路连通的当且仅当每个 X_α 都是道路连通的.

证 若积空间 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 是道路连通的, 则每个 X_α, 作为道路连通空间在连续映射 π_α 下的像, 是道路连通的.

反之设每个 X_α 是道路连通的. 对任意 $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod\limits_\alpha X_\alpha$, 选取 x_α 到 y_α 的道路 $\gamma_\alpha: [0,1] \to X_\alpha$. 则

$$\gamma: [0,1] \to \prod_\alpha X_\alpha, \quad \gamma(t) = (\gamma_\alpha(t))$$

是从 $\gamma(0) = (x_\alpha)$ 到 $\gamma(1) = (y_\alpha)$ 的道路. 故 $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ 是道路连通的. □

闭包的道路连通性

命题 2.2.12 道路连通子集的闭包不一定是道路连通的.

反例: 拓扑学家的正弦曲线.

2.3 分支与局部连通性

To do.

Chapter 3

紧致性

3.1 紧致空间

3.1.1 定义与例子

定义

定义 3.1.1 (覆盖) 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, $A \subset X$ 为子集.

(1) 若子集族 $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}$ 满足 $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 A 的一个**覆盖**.

(2) 若覆盖 $\mathcal{A}$ 中的元素 U_α 都是开集, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个**开覆盖**.

(3) 若覆盖 $\mathcal{A}$ 是有限族, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个**有限覆盖**.

(4) 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是覆盖, 且 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, 则称为覆盖 $\mathcal{B}$ 是覆盖 $\mathcal{A}$ 的**子覆盖**.

定义 3.1.2 (紧) 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间. 如果 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 都有有限子覆盖, 即存在 $\mathcal{U}$ 中有限个集合 $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_k}\}$ 使得 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$, 则我们称 X 是**紧的**.

拓扑空间 X 中的子集 A 是紧子集当且仅当: 对 X 中的任意满足 $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ 的开集族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, 都存在有限子族 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k} \in \mathcal{U}$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_{\alpha_j}$.

紧集的例子

例 3.1.3 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 有界闭 $\Longleftrightarrow$ 紧.

例 3.1.4 若 X 是有限集, 则 X 是紧致的, 因为此时 X 的每一个开覆盖都是有限的.

例 3.1.5 赋以余有限拓扑的拓扑空间 X 是紧的.

设 $X \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. 任取 α_1. 根据定义, U_{α_1} 是开集, 因此它的补集 $X - U_{\alpha_1}$ 是有限集, 于是可以在 $\{U_\alpha\}$ 中选取有限多个集合来覆盖它.

例 3.1.6 $\mathbb{R}$ 不是紧致的, 因为由开区间

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

所组成的 $\mathbb{R}$ 的覆盖并不包含覆盖 $\mathbb{R}$ 的任何有限子族.

例 3.1.7 $\mathbb{R}$ 的子空间

$$X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

是紧致的. 任意给定 X 的一个开覆盖 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 中总有一个成员 U 包含 0, 那么集合 U 除了有限多个点 $\frac{1}{n}$ 外, 包含着 X 的所有其余点. 对于 X 中每一个 U 以外的点, 选取 A 中包含它的一个成员. 于是 $\mathcal{A}$ 中这些成员连同成员 U 便组成了 A 的一个覆盖 X 的有限子族.

例 3.1.8 区间 $(0,1]$ 不是紧致的. 开覆盖

$$\mathcal{A} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

就不包含覆盖 $(0,1]$ 的有限子族. 同理, 区间 $(0,1)$ 也不是紧致的. 另一方面, 区间 $[0,1]$ 是紧致的.

3.1.2 紧性的其它刻画

用闭集刻画紧性

定理 3.1.9 一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当它满足以下性质: 如果 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ 是任意一满足有限交性质的族闭集族, 即任意有限交集

$$F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \varnothing,$$

则 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \varnothing$.

推论 3.1.10 (闭集套定理) 设 X 是紧的, 且

$$X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

是非空闭集的降链, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

用基和子基刻画紧性

定理 3.1.11 设 $\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的一个拓扑基, 则 X 是紧的当且仅当 X 的任意基覆盖 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ 都存在有限子覆盖.

证 设 X 是紧的, 且 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ 是 X 的一个基覆盖, 则 $\mathcal{U}$ 也是 X 的一个开覆盖, 从而存在有限子覆盖.

反之, 设 X 的任意基覆盖都存在有限子覆盖, 而 $\mathcal{U}$ 是 X 的任意开覆盖. 由拓扑基的定义, 对于任何 $x \in X$, 都存在 $U^x \in \mathcal{U}$ 和 $U_x \in \mathcal{B}$ 使得

$$x \in U_x \subset U^x.$$

由于 $\{U_x\}$ 是 X 的基覆盖, 所以存在 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. 因此对于 $U^{x_1}, \cdots, U^{x_n} \in \mathcal{U}$, 我们有 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i}$, 即 X 是紧的. □

定理 3.1.12 (Alexander 子基定理) 设 $\mathcal{S}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子基. 则 X 是紧的当且仅当 X 的任意子基覆盖 $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ 都存在有限子覆盖.

3.1.3 紧集的性质

连续映射像的紧性

定理 3.1.13 设 $f : X \to Y$ 是连续映射. 如果 $A \subset X$ 是紧集, 则 $f(A)$ 在 Y 中也是紧集.

证 设 A 是紧集. 给定 $f(A)$ 的任意开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$, 其原像 $\mathcal{U} = \left\{f^{-1}(V_\alpha)\right\}$ 是 A 的一个开覆盖. 根据 A 的紧性, 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. 因此 $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}$, 即 $f(A)$ 也是紧集. □

定理 3.1.14 设 $f : X \to Y$ 是连续的, 其中 Y 是具有序拓扑的全序集. 若 X 是紧致的, 则在 X 中存在点 c 和 d, 使得对于所有的 $x \in X$ 有 $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

证 由于 f 连续并且 X 是紧致的, 所以集合 $A = f(X)$ 是紧致的. 我们证明 A 有一个最大元 M 和一个最小元 m. 因而, 由于 m 和 M 属于 A, 必存在 X 中点 c 和 d 使 $m = f(c)$ 和 $M = f(d)$.

若 A 没有最大元, 那么集合族

$$\{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

就是 A 的一个开覆盖. 由于 A 是紧致的, 就有有限的子族

$$\{(-\infty, a_1), \cdots, (-\infty, a_n)\}$$

覆盖 A. 设 a_i 是 $a_1, \cdots, a_n$ 中的最大者, 则 a_i 不属于这些集合中的任何一个, 这与它们覆盖 A 矛盾.

类似地可以证明 A 有最小元. □

子空间的紧性

定理 3.1.15 设 A 是紧致空间 X 的闭子集, 则 A 也是紧集.

证 设 Y 是紧致空间 X 的一个闭子集. 任意给定由 X 的开集组成的 Y 的一个覆盖 $\mathcal{A}$, 将 $\mathcal{A}$ 添加一个开集 $X-Y$ 便构成 X 的一个开覆盖 $\mathcal{B}$, 即

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X-Y\}.$$

$\mathcal{B}$ 的一个有限子族便覆盖了 X. 如果这个有限子族含有集合 $X-Y$, 那么就去掉 $X-Y$. 如果没有 $X-Y$, 则不再变动. 由此得到的族就是 $\mathcal{A}$ 的覆盖 Y 的一个子覆盖. □

积空间的紧性

引理 3.1.16 (管状引理) 设 $x_0 \in X, B$ 是 Y 的紧子集. 则 $\{x_0\} \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N 都包含 $\{x_0\} \times B$ 的一个 "管状邻域", 即存在 $\{x_0\}$ 的开邻域 U 以及 B 的开邻域 V, 使得

$$\{x_0\} \times B \subset U \times V \subset N.$$

推论 3.1.17 设 A 是 X 的紧子集, B 是 Y 的紧子集, 则对 $A \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N, 都存在 A 在 X 中的开邻域 U 以及 B 在 Y 中的开邻域 V, 使得

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

定理 3.1.18 有限多个紧致空间的积是紧致的.

证 先证两个空间积的情形, 即设 A 是 X 的紧子集, B 是 Y 的紧子集, 下证 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 的紧子集.

设 $\mathcal{W}$ 是 $A \times B$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x \in A$, 由定义易知 $\{x\} \times B$ 是紧集, 故存在 $W_1^x, \cdots, W_k^x \in \mathcal{W}$ 使得

$$\{x\} \times B \subset W_1^x \cup \cdots \cup W_k^x.$$

根据管状引理, 在 X 中存在包含 x 的开集 U_x 使得

$$U_x \times B \subset W_1^x \cup \cdots \cup W_k^x.$$

因为 $\{U_x \mid x \in A\}$ 是 A 的开覆盖, 由紧性, 存在 $x_1, \cdots, x_m$ 使得 $A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. 根据上面的讨论, 对于 $1 \leqslant i \leqslant m$, 我们已经找到 $W_1^{x_i}, \cdots, W_{k(i)}^{x_i} \in \mathcal{W}$ 使得

$$U_{x_i} \times B \subset W_1^{x_i} \cup \cdots \cup W_{k(i)}^{x_i}.$$

因此

$$A \times B \subset (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}) \times B \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k(i)} W_j^{x_i},$$

即 $\left\{W_j^{x_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k(i)\right\}$ 是 $\mathcal{W}$ 的有限子覆盖.

由归纳法, 我们立刻得到定理结论. □

定理 3.1.19 (Tychonoff 定理) 在积拓扑下, 紧致空间的任意积还是紧致的.

并与交的紧性

命题 3.1.20 (紧集的有限并仍紧) 紧集的有限并为紧集. 对任意紧集有限并的开覆盖, 只需选取出有限组有限开覆盖后并起来组成的新集合即为紧集有限并的有限开覆盖.

例 3.1.21 (存在两个紧集其交不紧) 设 Y 是实数集并取通常拓扑, Z 是点集 $\{0,1\}$ 并取平凡拓扑, $X = Y \times Z$ 并取积拓扑. 令

$$\begin{aligned}
A &= \{[a,b] \times \{0\}\} \cup \{(a,b) \times \{1\}\}, \\
B &= \{(a,b) \times \{0\}\} \cup \{[a,b] \times \{1\}\}.
\end{aligned}$$

我们注意, X 的开集具有形式 $(c,d) \times \varnothing$ 或 $(c,d) \times \{0,1\}$. 因此, 假若 X 的开集 G 含有点 $x = (y,0)$, 那么 G 也一定含有点 $(y,1)$.

(i) A 与 B 都是 X 的紧子集.

任取 A 的一个个开覆盖 $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, 其中每个开集 G_α 都具有形式 $(c_\alpha, d_\alpha) \times \{0,1\}$. 因 $[a,b]$ 是闭区间, 故可选出有限多个开集 $(c_i, d_i) \times \{0,1\} (i = 1, 2, \cdots, n)$, 它们已经覆盖了 $[a,b] \times \{0\}$. 又据前面的注意, $(c_i, d_i) \times \{0,1\} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 也嗯盖了 $(a,b) \times \{1\}$, 从而它们就覆盖了 A, 即 A 是紧的. 同理可证 B 也是紧的.

(ii) $A \cap B$ 不是紧的.

因 $A \cap B = (a,b) \times \{0,1\}$, 而 (a,b) 不是 Y 的紧子集, 故 $A \cap B$ 也不是 X 的紧子集.

注 可以证明, 若 A, B 皆为 Hausdorff 空间中的紧集, 则 $A \cap B$ 必为紧集. 因此, 在 Hausdorff 空间中作不出上述那种例子. 还可以证明, 抔扑空间中一族闭的紧子集之交仍为闭的紧子集. 上述反例也说明了在这个命题中, 闭集的条件不可去掉.

3.1.4 紧性和 Hausdorff 性质

定理 3.1.22 (紧性与 Hausdorff 性的 "对偶") (1) 如果 $(X, \mathcal{T})$ 是紧空间, 则

(a) X 中的闭子集都是紧集;

(b) 如果 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, 则 $(X, \mathcal{T}')$ 是紧空间;

(c) 平凡拓扑空间总是紧空间.

(2) 如果 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 空间, 则

(a) X 中的每个紧子集都是闭集;

(b) 如果 $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, 则 $(X, \mathcal{T}')$ 是 Hausdorff 空间;

(c) 离散拓扑空间总是 Hausdorff 空间.

证 (1)(a): 定理 3.1.15 已证.

(1)(b): $(X, \mathcal{T}')$ 的任意开覆盖也是 $(X, \mathcal{T})$ 的开覆盖, 故有有限子覆盖.

(1)(c): 平凡拓扑空间只有有限个 (至多两个) 开集.

(2)(a): 设 $A \subset X$ 是紧集, $x_0 \in X - A$. 由 Hausdorff 性质, 对任意 $y \in A$, 存在开集 $U_y \ni x_0$ 和 $V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \varnothing$. 因为 $A \subset \bigcup\limits_{y \in A} V_y$, 所以由紧性, 存在 $y_1, \cdots, y_m$ 使得 $A \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. 于是

$$U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m} \subset X \setminus (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}) \subset X \setminus A,$$

从而 $X \setminus A$ 是开集, 即 A 是闭集.

(2)(b): $(X, \mathcal{T})$ 中任意 $x_1 \neq x_2 \in X$, 都存在开集 $U_1 \ni x_1$ 和 $U_2 \ni x_2$ 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, U_1 和 U_2, 也是 $(X, \mathcal{T}')$ 中的开集.

(2)(c): 离散拓扑空间中每个单点集都是开集. □

命题 3.1.23 设 Y 是 Hausdorff 空间 X 的一个紧致子空间, x_0 不属于 Y, 则存在 X 中的两个无交的开集 U 和 V, 它们分别包含 x_0 和 Y.

证 设 $Y \subset X$ 紧, $x_0 \in X - Y$. 由 Hausdorff 性质, 对任意 $y \in Y$, 存在开集 $U_y \ni x_0$ 和 $V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \varnothing$. 因为 $A \subset \bigcup\limits_{y \in A} V_y$, 所以由紧性, 存在 $y_1, \cdots, y_m$ 使得 $Y \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. 于是所求的 $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m}$, $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. □

命题 3.1.24 设 A 和 B 是一个 Hausdorff 空间中的两个无交的紧致子空间, 则存在分别包含 A 和 B 的无交的开集 U 和 V.

证 我们知道对于每个 $a \in A$ 都有开集 $U_a \ni a$ 和 $V_a \supseteq B$ 使得 $U_a \cap V_a = \varnothing$. $\bigcup\limits_a U_a$ 覆盖 A 并且有一个有限子覆盖 $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \ldots \supseteq A$. 对应集合 $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \ldots$ 的有限交集是开集, 包含 B 且不与 U 相交. □

定理 3.1.25 每一个紧致的 Hausdorff 空间都是正规的 (单点集都是闭集 (T1) 且对于任意不交闭集 A, B, 存在 X 中的开集 U, V 使得 $A \subset U, B \in V$, 且 $U \cap V = \varnothing$).

证 设 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, X 是 T1 的.

先证 X 是正则的. 若 x 是 X 的一个点, B 是 X 中不包含 x 的一个闭集, 则 B 是紧致的. 于是由命题 3.1.23, 存在无交的开集分别包含 x 和 B.

给定 X 中无交的闭集 A 和 B, 对于 A 中的每一点 a, 分别选取包含 a 和 B 的无交开集 U_a 和 V_a (这里用到了 X 的正则性). 于是集簇 $\{U_a\}$ 覆盖 A. 再根据 A 的紧致性可见, 可以从

中选出有限个集合 $U_{a_1},\cdots,U_{a_m}$ 覆盖 A. 从而

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m} \text{ 和} V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$$

就是分别包含 A 和 B 的无交的开集. □

定理 3.1.26 设 $f : X \to Y$ 是一个连续的一一映射. 若 X 是紧致的, 并且 Y 是 Hausdorff 的, 则 f 是一个同胚.

证 我们证明在映射 f 下, X 中闭集的像是 Y 中的闭集. 由此便得到映射 f^{-1} 的连续性. 设 A 为 X 中闭集, 那么 A 是紧致的. 因此 $f(A)$ 是紧致的. 因为 Y 是一个 Hausdorff 空间, 所以 $f(A)$ 在 Y 中是闭的. □

定理 3.1.27 如果 $\mathcal{T}$ 是 X 上的紧 Hausdorff 拓扑, 且 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑, 满足 $\mathcal{T}_1 \subsetneqq \mathcal{T} \subsetneqq \mathcal{T}_2$, 则 $(X, \mathcal{T}_1)$ 不是 Hausdorff 的, 而 $(X, \mathcal{T}_2)$ 不是紧的. (注意同一个集合上可能有很多不同的, 两两不可比较的紧 Hausdorff 拓扑)

3.2 极限点紧与列紧

3.2.1 定义与例子

几种紧性的定义

定义 3.2.1 (极限点紧致) 如果 X 中的任意无限子集 S 都有极限点, 则我们称 X 是**极限点紧的**.

定义 3.2.2 (列紧) 如果拓扑空间 X 中任意点列 $x_1, x_2 \cdots \in X$ 都有收敛子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \to x_0 \in X$, 则称 X 是**列紧的**.

例子

例 3.2.3 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 有界闭 $\Longleftrightarrow$ 紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧 $\Longleftrightarrow$ 极限点紧.

例 3.2.4 考虑赋以余有限拓扑的拓扑空间 X, 则:

X 是紧的:

设 $X \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$. 任取 α_1. 根据定义, U_{α_1} 是开集, 因此它的补集 $X - A_{\alpha_1}$ 是有限集, 于是可以在 $\{U_\alpha\}$ 中选取有限多个集合来覆盖它.

X 也是列紧的:

若序列 $x_1, x_2, \cdots$ 中没有点出现无限次, 那么整个序列会收敛到任意一点; 若该序列中至少有一个点出现无限次, 那么我们就得到一个由该点组成的 “常值” 子序列.

X 也是极限点紧的:

若 $S \subset X$ 是无限集, 则对 X 中任意开集 U 都有 $U \cap S \neq \varnothing$, 故 $S' = X$.

注 余有限拓扑空间中 $x_n \to x_0$ 当且仅当对于任意 $x \neq x_0$, 至多有有限多个 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $x_i = x$ 成立.

例 3.2.5 考虑积拓扑空间 $X = (\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{离散拓扑}}) \times (\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\text{平凡拓扑}})$.

X 不是紧的:

取 $U_n = \{n\} \times \mathbb{N}$. 则 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖, 但没有有限子覆盖.

X 也不是列紧的:

令 $x_n = (n, 1)$, 则序列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列.

但是, X 是极限点紧的:

事实上, 对于任意 $S \neq \varnothing$, 我们都有 $S' \neq \varnothing$, 因为只要 $(m_0, n_0) \in S$ 且 $n_1 \neq n_0$, 就有 $(m_0, n_1) \in \{(m_0, n_0)\}' \subset S'$.

紧的闭遗传性

定理 3.2.6 设 A 是拓扑空间 X 的团于集.

(1) 如果 X 是紧集, 则 A 也是紧集.

(2) 如果 X 是列紧集, 则 A 也是列紧集.

(3) 如果 X 是极限点紧集, 则 A 也是极限点紧集.

证 (1) 定理 3.1.15 已证.

(2) A 中的任意点列 $x_1, x_2, \cdots$ 也是 X 中的点列, 因此存在收玫子列 $x_{n_k} \to x_0 \in X$. 因为 A 是闭集所以 $x_0 \in A$.

(3) 设 S 是 A 的无限子集, 则在 X 中有 $S' \neq \varnothing$. 又 $S' \subset A' \subset A$, 所以在 A 同样有 $S' \neq \varnothing$. □

连续映射像的紧性

定理 3.2.7 (列紧空间的连续映射像仍列紧) 设 $f : X \to Y$ 是连续映射. 如果 $A \subset X$ 是列紧集, 则 $f(A)$ 在 Y 中也是列紧集.

证 对 $f(A)$ 中的任意点列 $y_1, y_2, \cdots$, 存在 A 中的点列 $x_1, x_2, \cdots$ 使得 $f(x_i) = y_i$. 因 A 是列紧的, 所以存在收敛子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \to x_0 \in A$. 又因为 f 是连续映射, 所以 $y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots \to f(x_0) \in f(A)$. 所以 $f(A)$ 是列紧集. □

例 3.2.8 (存在极限点紧空间的连续像不是极限点紧的) 设 X 为自然数集. 对每一自然数 n, 命 $U_n = \{2n-1, 2n\}$, 则 $\{U_n\}$ 是 X 的一个拓扑基. 因 X 的每个非空子集都有聚点, 故 X 是极限点紧的. 我们在集 X 上再取离散抔扑, 如此得到的拓扑空间记作 Y.

$$f(2n) = n, \quad f(2n-1) = n,$$

则 f 是 X 到 Y 上的连续映射, 但 $f(X) = Y$ 不是极限点紧的.

积空间的紧性

命题 3.2.9 (列紧空间的可数积仍列紧) 可数多个列紧空间的积 (赋积拓扑) 仍然是列紧的.

例 3.2.10 (存在两个极限点紧空间的积不极限点紧) To do.

3.2.2 几种紧性的关系

紧, 列紧 $\Longrightarrow$ 极限点紧

定理 3.2.11 设 X 为任意拓扑空间. 若 X 是紧的或是列紧的, 则 X 是极限点紧的. 反之不然 (例 3.2.5).

证 先设 X 是紧集. 若 $S \subset X$ 且 S 没有极限点, 则 S 是闭集, 因为 $S' = \varnothing \subset S$. 对于任意 $a \in S$, 因为 $a \notin S'$, 故存在开集 $U_a \subset X$ 使得 $S \cap U_a = \{a\}$. 于是 $\{S^c, U_a \mid a \in S\}$ 是 X 的一个开覆盖. 根据紧性, 存在 $a_1, \cdots, a_k \in S$ 使得

$$X = S^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i} \right).$$

由此可知

$$S = S \cap X = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i} \right) \cap S = \{a_1, \cdots, a_k\}$$

是一个有限子集.

再设 X 是列紧的且 $S \subset X$ 是任意无限集. 任取无限序列 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset S$ 使得对任意 $i \neq j$, 都有 $x_i \neq x_j$. 由列紧的定义, 存在子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \to x_0 \in X$. 于是

$$x_0 \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\}' \subset \{x_1, x_2, \cdots\}' \subset S'.$$

所以 $S' \neq \varnothing$. □

紧 $\not\Leftrightarrow$ 列紧

例 3.2.12 To do.

3.3 欧氏空间和度量空间中的紧性

3.3.1 欧氏空间中的紧性

$\mathbb{R}$ 上的紧集

定理 3.3.1 设 X 是具有上确界性质的一个全序集. 则关于序拓扑, X 中的每一个闭区间都是紧致的. 特别地, $\mathbb{R}$ 中任何一个闭区间都是紧致的.

$\mathbb{R}^n$ 上的紧集

定理 3.3.2 $\mathbb{R}^n$ 中一个子集 A 是紧致的, 当且仅当它是闭的并且就欧氏度量 d 或平方度量 ρ 而言是有界的.

注 上述定理依赖于 $\mathbb{R}^n$ 上度量的选取. 例如, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的一致度量, 它的拓扑与 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑相同, 但它的所有闭集都有界, 从而不一定是开集 (反例: $A=\mathbb{R}^n$).

3.3.2 度量空间中的紧性

度量空间中紧集的性质

引理 3.3.3 度量空间 X 中的任何列紧集都是闭集.

证 设 $F\subset X$ 是一个列紧集. 则对 F 中的任意收敛点列 x_n, 由 Hausdorff 性质知 X 中由唯一的 x_0 使得 $x_n\to x_0$. 由列紧性知 $x_0\in F$. 于是 F 包含其所有序列极限点. 故 F 是闭集.□

定理 3.3.4 度量空间 (X,d) 中的任何紧/列紧集都是有界闭的.

证 证明我们已经知道度量空间中紧集/列紧集是闭集.

另一方面, 如果 $A\subset X$ 是无界集, 则取定任意一点 $x_0\in X$, 我们有

(1) $\{B(x_0,n)\}_n$ 是 A 的一个开覆盖, 但没有有限子覆盖;

(2) A 中存在一列元素 x_n 满足 $d(x_n,x_0)\to\infty$, 于是该序列没有收敛子列.

故任何无界集既不是紧的, 也不是列紧的. □

例 3.3.5 (度量空间中非紧的有界闭子集) $\mathbb{N}$ 取离散度量, $\mathbb{N}$ 自身在其中是有界闭的, 但不是紧的.

度量空间中各种紧性的关系

定理 3.3.6 在度量空间 (X,d) 中, 以下 "紧性" 都是等价的:

(1) A 是紧的;

(2) A 是列紧的;

(3) A 是极限点紧的.

Lebesgue 数引理

定理 3.3.7 (Lebesgue 数引理 (Lebesgue number lemma)) 设 $\mathcal{A}$ 为度量空间 (X,d) 的一个开覆盖. 若 X 是紧致的, 则存在 $\delta>0$ 使得 X 的每一个直径小于 δ 的子集包含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素之中. 数 δ 称为开覆盖 $\mathcal{A}$ 的一个 Lebesgue 数 (Lebesgue number).

一致连续性定理

定义 3.3.8 (一致连续) 设 f 是从度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的一个函数. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对于 X 的任何两点 x_0, x_1, 有

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon,$$

则称函数 f 是**一致连续**的 (uniformly continuous).

定理 3.3.9 (一致连续性定理 (uniform continuity theorem)) 设 $f : X \to Y$ 是从紧致度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的连续映射. 则 f 是一致连续的.

3.4 局部紧致性与紧致化

3.4.1 局部紧致性

定义

定义 3.4.1 (局部紧致) 空间 X 是在 x 处**局部紧致**的 (locally compact at x), 若存在 X 的一个紧致子空间 C 包含着 x 的一个邻域. 如果 X 在它的每一点处都是局部紧致的, 则称 X 是**局部紧致**的 (locally compact).

Hausdorff 空间的局部紧致性

定理 3.4.2 设 X 是一个 Hausdorff 空间. 则 X 在 x 处局部紧致当且仅当对于 x 的任何一个邻域 U, 存在 x 的一个邻域 V, 使得 $\overline{V}$ 紧致并且 $\overline{V} \subset U$.

例子

例 3.4.3 紧致空间一定是局部紧致的.

例 3.4.4 实直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧致的. 因为点 x 属于某一个区间 (a, b), 而 (a, b) 又包含在紧致空间 $[a, b]$ 中. $\mathbb{R}$ 的有理数子空间 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致的.

例 3.4.5 空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧致的. 点 x 属于某一个基元素 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, 而这个基元素又包含在紧致空间 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 之中. 空间 $\mathbb{R}^\omega$ 不是局部紧致的. 因为它的任何基元素都不被紧致子空间所包含. 事实上, 若

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

被某一个紧致子空间所包含, 那么它的闭包

$$\overline{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots$$

就是紧致的, 但它并不紧致.

例 3.4.6 任何一个具有上确界性质的全序集 X 是局部紧致的：任意给定 X 的一个基元素, 它一定包含在 X 的一个闭区间中, 而闭区间是紧致的.

3.4.2 紧致化

紧致化的定义

定义 3.4.7 (紧致化) 若 Y 是一个紧致的 Hausdorff 空间, X 是 Y 的真子空间并且其闭包等于 Y, 则 Y 称为 X 的一个**紧致化** (compactification). 若 $Y - X$ 为单点集, 则 Y 称为 X 的**单点紧致化** (onepoint compactification).

单点紧致化

X 具有单点紧致化 Y 当且仅当 X 为非紧致的局部紧致的 Hausdorff 空间, 且在同胚的意义下 Y 是唯一的.

定理 3.4.8 空间 X 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间当且仅当存在一个空间 Y 使得以下条件成立:

(1) X 是 Y 的子空间;

(2) 集合 $Y - X$ 是单点集;

(3) Y 是紧致的 Hausdorff 空间;

若 Y 和 Y' 是汼足上述条件的两个空间, 则存在从 Y 到 Y' 的一个同胚使得它在 X 上的限制是恒等映射.

注 构造 Y 的思路: 用符号 ∞ 表示不属于 X 的某一个元素, 并且把它添加到 X 上构成集合 $Y = X \cup \{\infty\}$, 构成 Y 的拓扑的 Y 的开集族取为所有下列类型的集合: 类型一: X 的开子集 U; 类型二: $Y - C$, 其中 C 是 X 的一个紧致子空间.

索引