

# Méthodes numériques avancées : TP1

Charlène Paviot

February 26, 2017

## 1 Introduction

Ce TP comprend trois exercices. L'objectif du premier exercice est de simuler un processus de Poisson composé afin de l'utiliser dans le deuxième exercice pour simuler un processus de Lévy de type diffusion à sauts. Ce processus de Lévy sera simulé selon deux modèles : le modèle de Merton et celui de Kou. Enfin, dans le troisième exercice, il s'agit de calculer le prix d'un Call européen dans le modèle de Merton. On se servira ensuite de ce prix pour calculer la volatilité implicite de Black Scholes.

L'archive fournie avec ce rapport comprend trois fichiers, chacun répondant à une question.

## 2 Premier exercice : simulation d'un processus de Poisson composé

### 2.1 Simulation d'un processus de Poisson

Le code correspondant se situe dans le fichier Q1.R. Afin de simuler un processus de Poisson, des variables  $\tau_i$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ont été tirées, puis sommées. Les  $\tau_i$  sont des variables i.i.d. Nous obtenons alors les variables représentant la somme cumulée :

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

Nous effectuons les tirages des variables de loi exponentielle  $\tau_i$  tant que la somme cumulée ne dépasse pas la maturité fixée  $T$ . On récupère alors un vecteur composé des  $(T_n)_n$  qui représentent les temps de sauts. Le processus de Poisson  $N_T$  est alors donné par :

$$N_T = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{T_k \leq T} \text{ n étant la taille du vecteur des } (T_n)_n.$$

On peut ensuite alors tracer ce processus sur un graphe. Voici ci-dessous plusieurs figures pour différentes valeurs de  $T$  et  $\lambda$  :

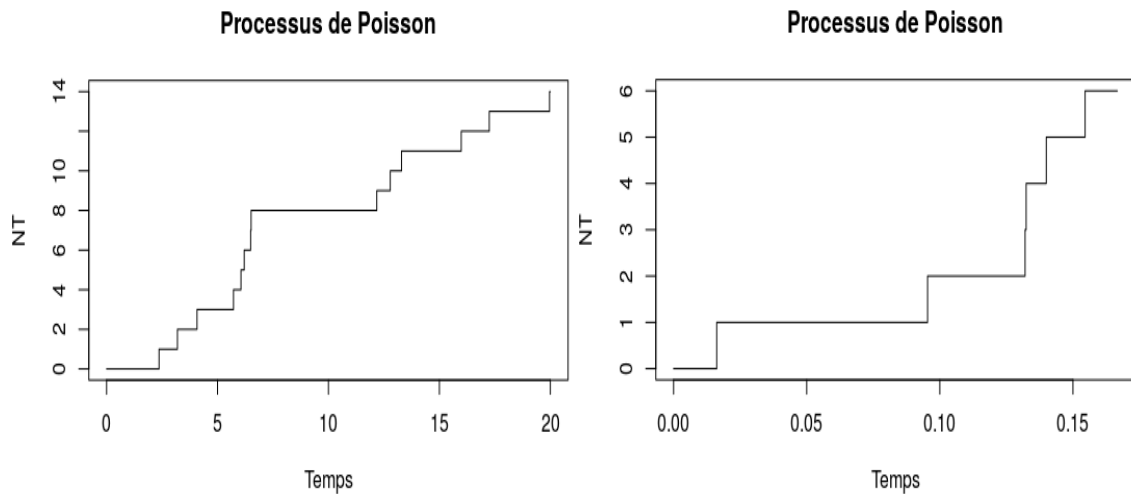


Figure 1:  $\lambda = 0.5$  et  $T = 20$

Figure 2:  $\lambda = 60$  et  $T = 2/12$

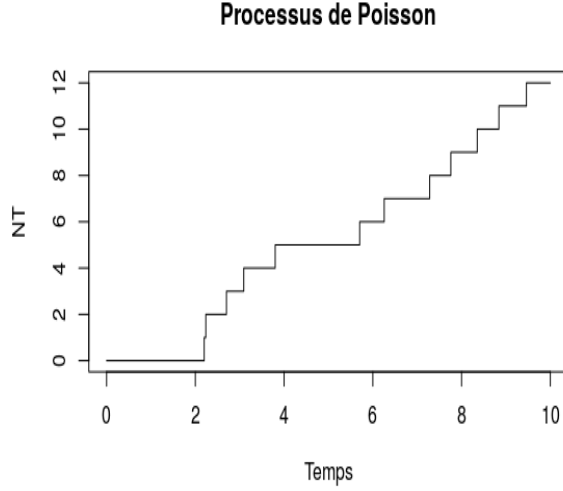


Figure 3:  $\lambda = 1$  et  $T = 10$

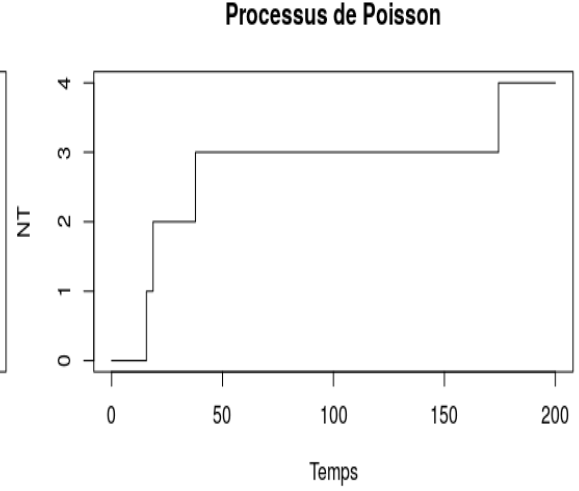


Figure 4:  $\lambda = 0.01$  et  $T = 200$

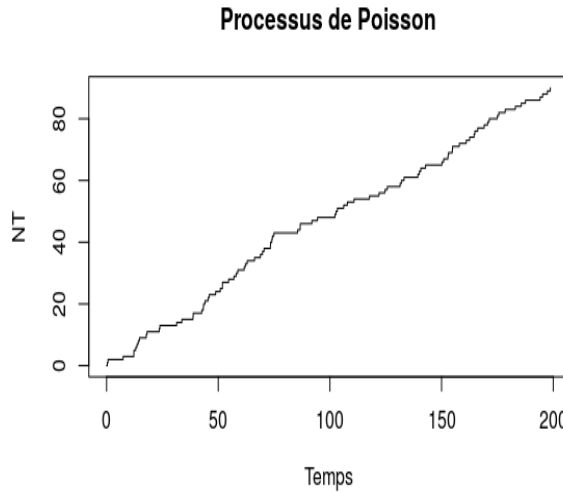


Figure 5:  $\lambda = 0.5$  et  $T = 200$

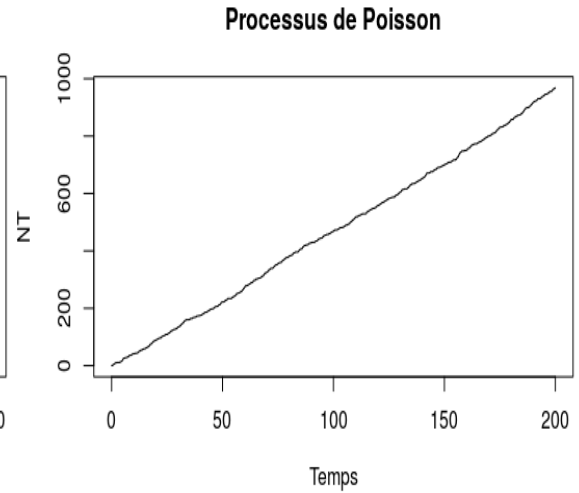


Figure 6:  $\lambda = 5$  et  $T = 200$

On constate que sur les figures 4 à 6, plus on augmente  $\lambda$ , plus le processus de Poisson tend vers une droite de pente  $\lambda$ , car lorsque l'intensité  $\lambda$  augmente, on trouvera plus de sauts pour une même maturité  $T$ , le nombre d'occurrences des sauts étant proportionnel à  $\lambda$ . Les trois premières figures ont été obtenues avec des  $\lambda$  et  $T$  tels que  $\lambda T = 10$ . On remarque qu'il s'agit d'un calibrage pour qu'il y ait un nombre ni trop important, ni trop faible de sauts.

## 2.2 Simulation d'un processus de Poisson composé

Dans un premier temps, il s'agit de simuler un processus de Poisson composé de paramètres  $(\lambda, \mathcal{N}(\mu, \delta^2))$ . Dans l'exercice suivant, il s'agira de rajouter un nouveau modèle (modèle de Kou) et donc de simuler les variables  $Y_i$  selon ce modèle. On suppose donc ici que : pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $Y_i$  est de loi  $\mathcal{N}(\mu, \delta^2)$ . Les  $Y_i$  sont i.i.d.

Le processus de Poisson composé  $X_T$  vaut :  $X_T = \sum_{k=1}^{N_T} Y_k$

On utilise donc la fonction précédente renvoyant  $N_T$ , puis on simule les variables  $Y_i$  selon la loi normale donnée. On réalise ensuite la somme cumulée afin de trouver  $X_T$ . Voici les trajectoires que l'on obtient pour différentes valeurs de  $\lambda, \mu, \delta$  et  $T$  :

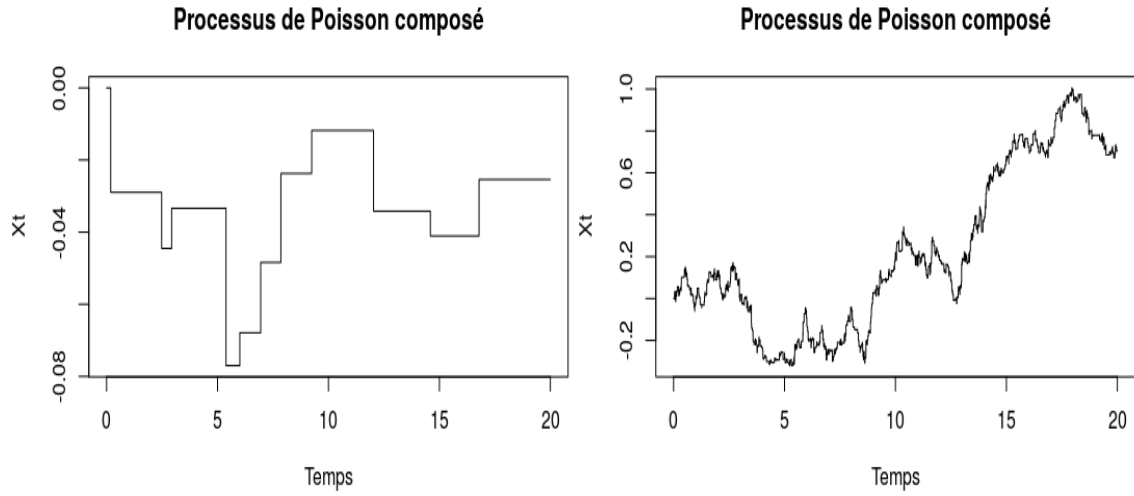


Figure 7:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0$  et  $T = 20$

Figure 8:  $\lambda = 50, \delta = 0.02, \mu = 0$  et  $T = 20$

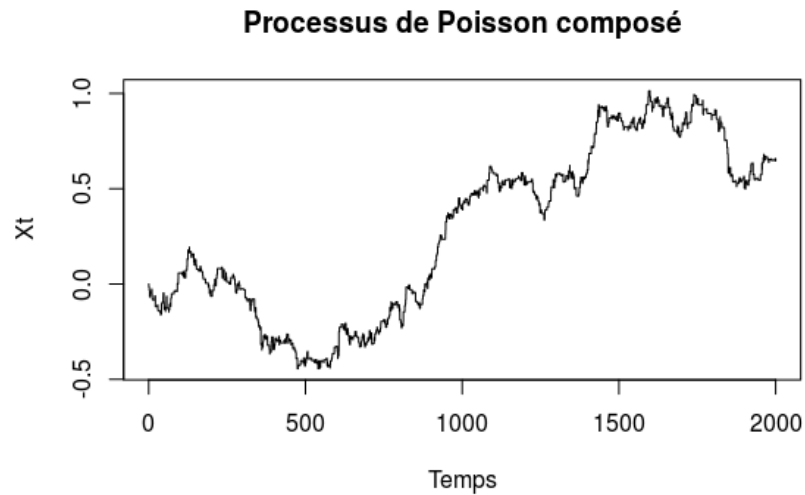


Figure 9:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 5$  et  $T = 2000$

Considérons la figure 7 comme étant celle de référence. Lorsque l'on augmente  $\lambda$  (ou la maturité  $T$ ), on constate que le processus de Poisson composé voit sa trajectoire se rapprocher de celle du brownien. Celui-ci converge en effet en loi vers un mouvement Brownien. C'est le phénomène que l'on observe sur les figures 8 et 9.

Lorsque que l'espérance des  $Y_i$  simulés est différente de 0, on s'aperçoit que le processus de Poisson composé augmente ou diminue en fonction de cette espérance. Par exemple, la figure 10 ci-dessous montre que le processus est en escalier ascendant quand  $\mu = 5$  et la figure 11 (ci-dessous) montre qu'il est en escalier descendant quand  $\mu = -5$ , ce qui est bien cohérent, car les  $Y_i$  auront des valeurs qui avoisineront 5 dans le cas où  $\mu = 5$  ou -5 dans le cas où  $\mu = -5$ . Cela se vérifie sur le graphique 10 par exemple : On remarque que la valeur de  $X_t$  augmente environ de 5 en 5 à chaque instant de saut.

Enfin, lorsque l'on joue avec la volatilité, on constate que les écarts entre les  $Y_i$  sont plus importants : en effet, alors que le processus  $X_t$  varie en valeur entre 0 et -0.08 sur la figure 7 pour un écart-type de 0.02, celui-ci varie entre 0 et -8 sur la figure 12 pour un écart-type de 2, et il varie entre 0 et 100 sur la figure 13 pour un écart-type de 10. Cela est également bien cohérent, car lorsque l'on augmente l'écart-type, la volatilité des  $Y_i$  est plus importante.

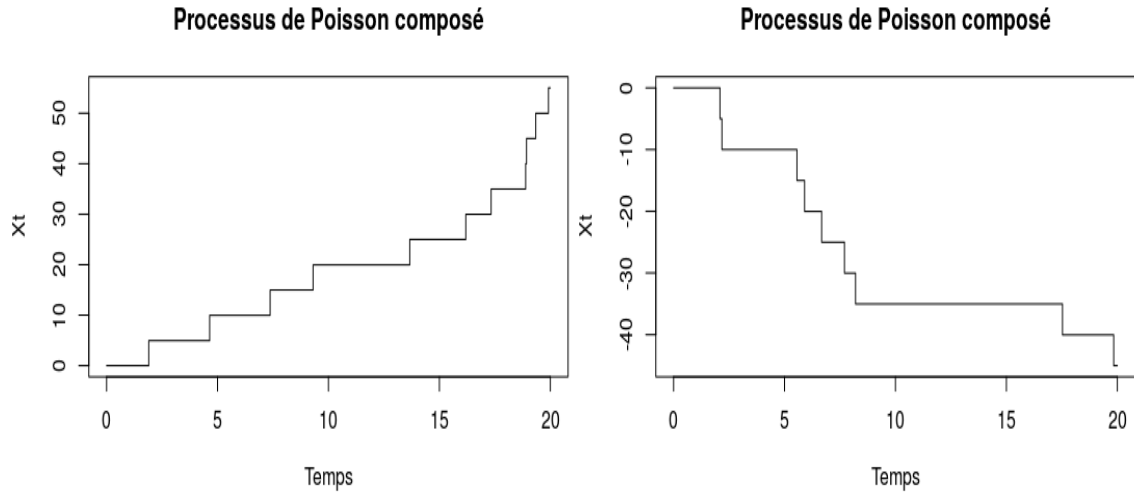


Figure 10:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 5$  et  $T = 20$       Figure 11:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = -5$  et  $T = 20$

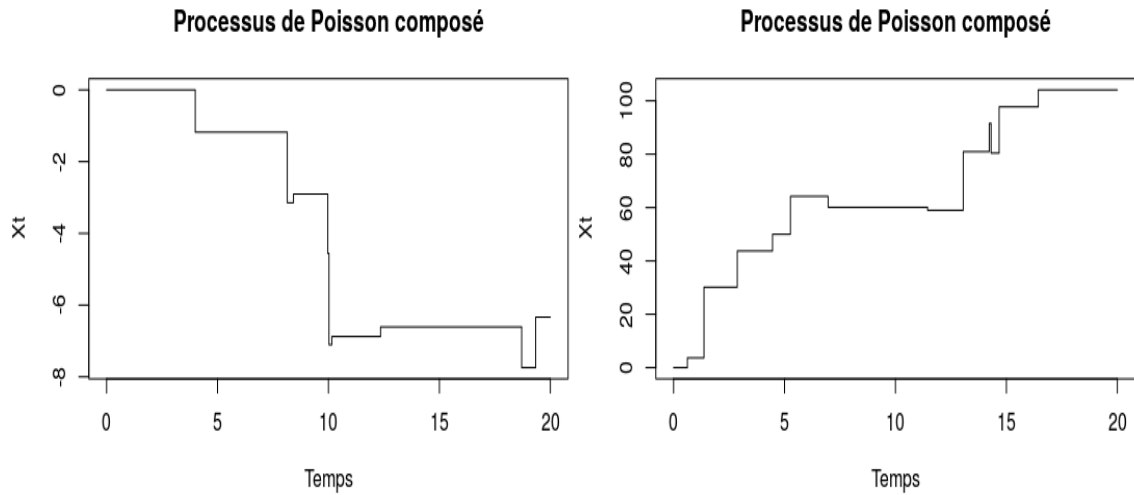


Figure 12:  $\lambda = 0.5, \delta = 2, \mu = 0$  et  $T = 20$       Figure 13:  $\lambda = 0.5, \delta = 10, \mu = 0$  et  $T = 20$

### 3 Deuxième exercice : Simulation d'un processus de Lévy de type diffusion à sauts

On considère désormais le processus  $X_t$  de la forme :

$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ , avec  $W$  un mouvement Brownien,  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $Y$  toujours une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement réparties. On souhaite visualiser les trajectoires du processus  $S_t = S_0 e^{X_t}$ .

Le script R pour répondre à cette question est donné dans le fichier Q2.R de l'archive. Pour simuler  $X_t$ , il a été choisi de choisir un pas de discrétisation entre les temps de sauts. Le paramètre pas pris par la fonction R `SimulModele` est donc le pas de discrétisation entre deux instants de sauts (et non le pas global de 0 à la maturité). Le processus de Poisson composé reste le même entre deux temps de sauts, il suffit alors de recalculer la partie  $\gamma t + \sigma W_t$ . Le mouvement Brownien est simulé de la façon suivante :

$$W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}} * G_i \text{ où } G_i \text{ est une variable aléatoire de loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

### 3.1 Modèle de Merton

Le modèle de Merton est celui évoqué jusqu'à présent : les variables  $Y_i$  suivent une loi normale de paramètres  $(\mu, \delta^2)$ . Voici les trajectoires obtenues pour ce modèle :

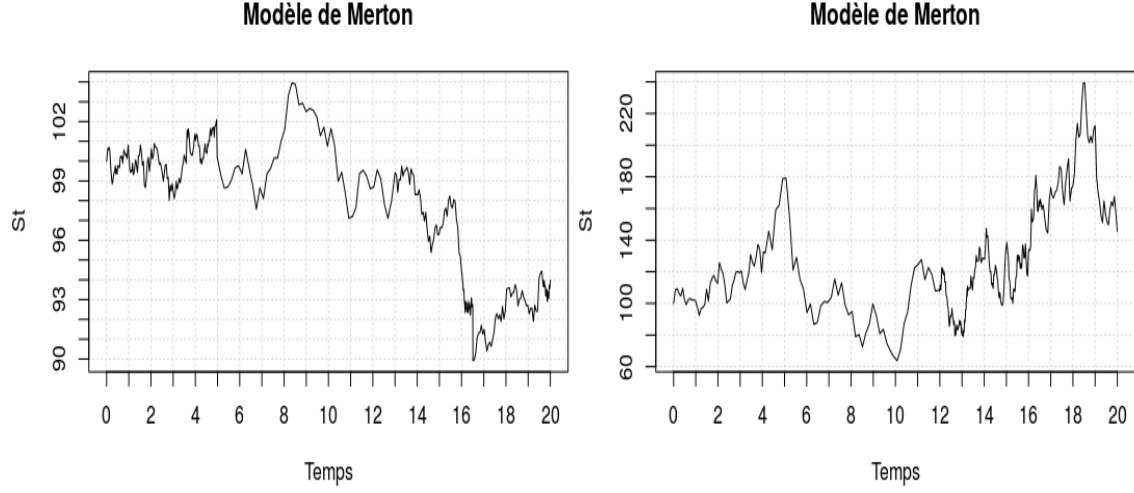


Figure 14:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 0$  et  $T = 20$  Figure 15:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.25, \gamma = 0$  et  $T = 20$

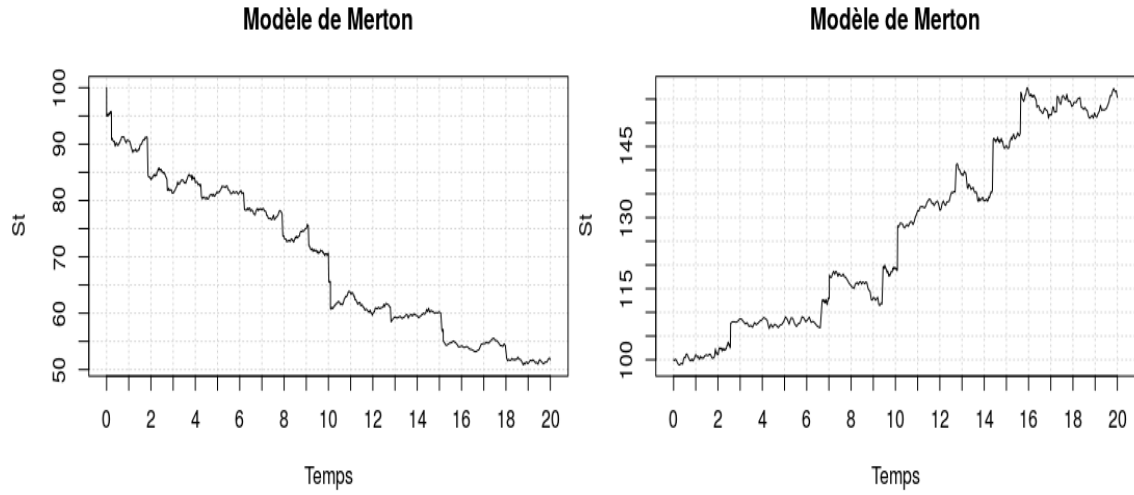


Figure 16:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = -0.05, \sigma = 0.02, \gamma = 0$  et  $T = 20$  Figure 17:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0.05, \sigma = 0.02, \gamma = 0$  et  $T = 20$

### Modèle de Merton

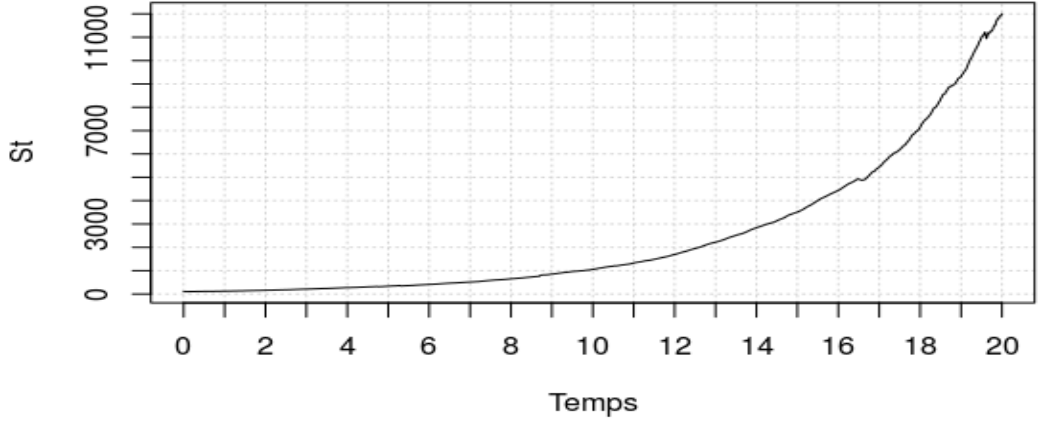


Figure 18:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 5$  et  $T = 20$

Ces figures ont été tracées en prenant  $S_0 = 100$ . La valeur qui diffère entre les figures 14 et 15 est celle de  $\sigma$ , on remarque que plus elle est élevée, plus le Brownien crée de fortes variations : lorsque  $\sigma = 0.02$  sur la figure 14, le cours  $S_t$  varie entre 90 et 104 alors qu'il varie de 60 à 240 sur la figure 15 où  $\sigma = 0.25$ . On constate que, comme pour le processus de Poisson composé, lorsque  $\mu = -0.05$  (figure 16) le cours  $S_t$  a tendance à chuter alors que quand  $\mu = 0.05$  (figure 17) celui-ci a tendance à augmenter. Lorsque l'on prend un grand  $\gamma$  (figure 18), on remarque que la trajectoire se rapproche de la trajectoire de l'exponentielle déterministe. En effet, si  $\gamma$  est très grand, les variables aléatoires  $W_t$  et de Poisson composé rajoutent des fluctuations de valeurs négligeables à côté du terme  $\gamma t$ .

### 3.2 Modèle de Kou

Cette fois-ci, les  $Y_i$  suivent une loi de Kou donnée par  $\nu_0(dx) = (p\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} \mathbf{1}_A + (1-p)\lambda_- e^{\lambda_- x} \mathbf{1}_{\bar{A}})dx$ , avec  $A = \{x > 0\}$ . Afin de simuler ce modèle, on tire deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  de loi uniforme sur  $[0,1]$ , et on pose :

$$X = \begin{cases} \ln(U_2) & \text{si } U_1 \leq p \\ -\ln(U_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un booléen est alors ajouté en paramètre de la fonction `SimulTrajPoissonCompose` qui simule le processus de Poisson composé : s'il vaut 1, cela signifie qu'on utilise le modèle de Merton, sinon on utilise celui de Kou.

En fonction du signe obtenu pour  $X$ , on applique alors la formule donnée en tout début de cette section. On obtient alors les figures suivantes. Les figures 19 à 22 ont été tracées en faisant varier  $p$ . Lorsque  $p = 0.5$ , les sauts sont visibles (graphique 19), mais plus on fait varier  $p$  vers les extrêmes 0 et 1, et moins les étages sont visibles, les trajectoires ressemblent davantage à celles de Merton.

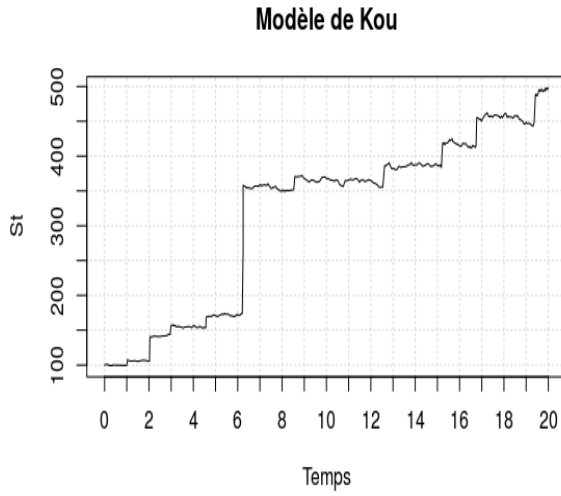


Figure 19:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 0.0097, \lambda_+ = 0.2, \lambda_- = 1, p = 0.5$  et  $T = 20$

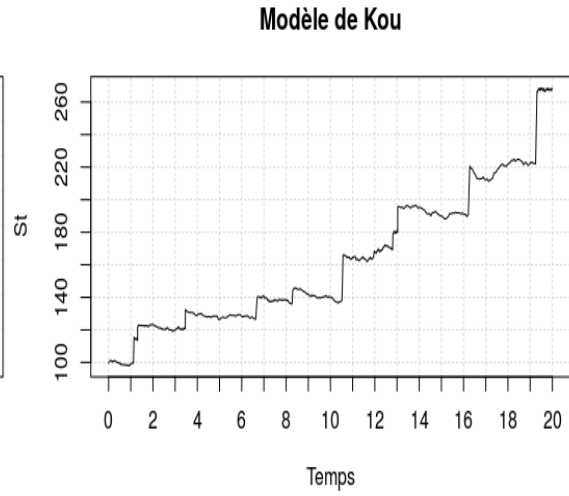


Figure 20:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 0.0097, \lambda_+ = 0.2, \lambda_- = 1, p = 0.75$  et  $T = 20$

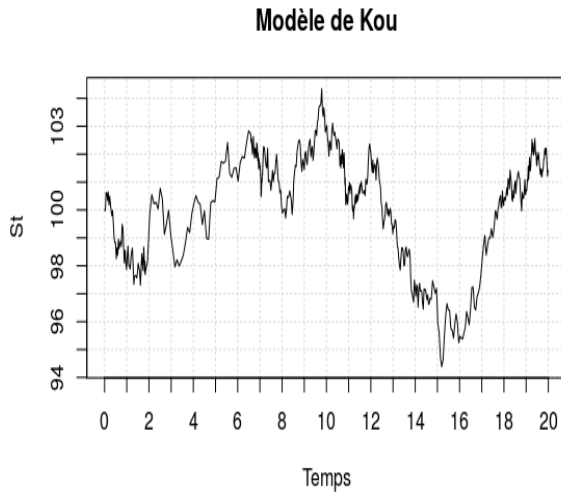


Figure 21:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 0.0097, \lambda_+ = 0.2, \lambda_- = 1, p = 0.001$  et  $T = 20$

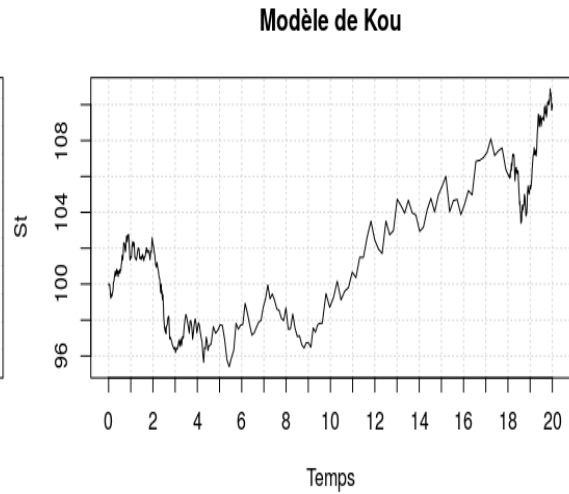


Figure 22:  $\lambda = 0.5, \delta = 0.02, \mu = 0, \sigma = 0.02, \gamma = 0.0097, \lambda_+ = 0.2, \lambda_- = 1, p = 0.99$  et  $T = 20$

## 4 Troisième exercice : Pricing d'une option européenne dans le modèle de Merton

On souhaite calculer le prix d'un Call européen dans le modèle de Merton. Pour cela, on utilise la formule du Call suivante :

$$C_0^N = e^{-T(r+\lambda)} \sum_{k=0}^N \frac{(\lambda T)^k}{k!} g_{call}(S_0 e^{\gamma T + k\mu}, \sqrt{\sigma^2 T + k\delta^2}, K)$$

avec  $g_{call}(x, \sigma, K) = x e^{\frac{\sigma^2}{2}} \phi(d_1) - K \phi(d_2)$

avec  $d_1 = d_2 + \sigma$  et  $d_2 = \frac{\ln(\frac{x}{K})}{\sigma}$

Pour savoir où tronquer la série afin d'estimer le prix du Call, on utilise la relation de parité

Call-Put donnée par  $C_0 = P_0 + S_0 - Ke^{-rT}$ . On fait donc varier l'indice de somme  $k$  pour que  $C_0^N - P_0^N \simeq S_0 - Ke^{-rT}$ . Le fichier Q3.R répond à cette question, et la fonction `comparaisonErreur` calcule le prix du Call. Elle prend le paramètre tolérance en argument, qui donne le seuil à partir duquel on considère que  $C_0^N - P_0^N = S_0 - Ke^{-rT}$ , et renvoie le  $k$  optimal. On choisira tolérance = 0.00001. Ainsi on choisira  $k_{optimal}$  tel que  $k_{optimal} = \inf\{N, C_0^N - P_0^N - (S_0 - Ke^{-rT}) \leq tolerance\}$ .

Pour  $\lambda = 0.05, T = 200, S_0 = 100, \mu = 0, \delta = 0.02, \sigma = 0.02, K = 80, r = 0.01$ , on trouve  $k_{optimal} = 31$ , et le Call vaut alors 89.17 euros. Si on garde les mêmes paramètres mais que l'on prend  $T = \frac{2}{12}$  (durée de 2 mois comme conseillé dans l'énoncé), on trouve alors  $k_{optimal} = 30$ , le Call vaut alors 20.13 euros.

On sait maintenant calculer le prix du Call avec le modèle de Merton, cela va servir à calculer la volatilité implicite de Black-Scholes sur 1 et 2 mois, pour cela on cherche la volatilité qui permet d'égaliser le prix du Call de Merton et celui du Call de Black-Scholes (fonction `seekRoot`). La fonction `traceCourbeVolatilite` affiche la volatilité implicite permettant d'égaliser les prix des deux Calls et affiche leur valeur. Par exemple, pour  $T=2/12$  et les paramètres étant les mêmes que ceux pris dans le paragraphe ci-dessus, on obtient les prix suivants :

Strike	Prix des Calls
80	20.26
90	11.30
100	4.86
110	1.56
120	0.38

Figure 23: Prix des Calls en fonction du strike

Voici les graphiques représentant l'évolution de la valeur de la volatilité implicite en fonction du strike, en prenant les mêmes paramètres que ci-dessus (et en prenant  $S_0 = 100$ ) :

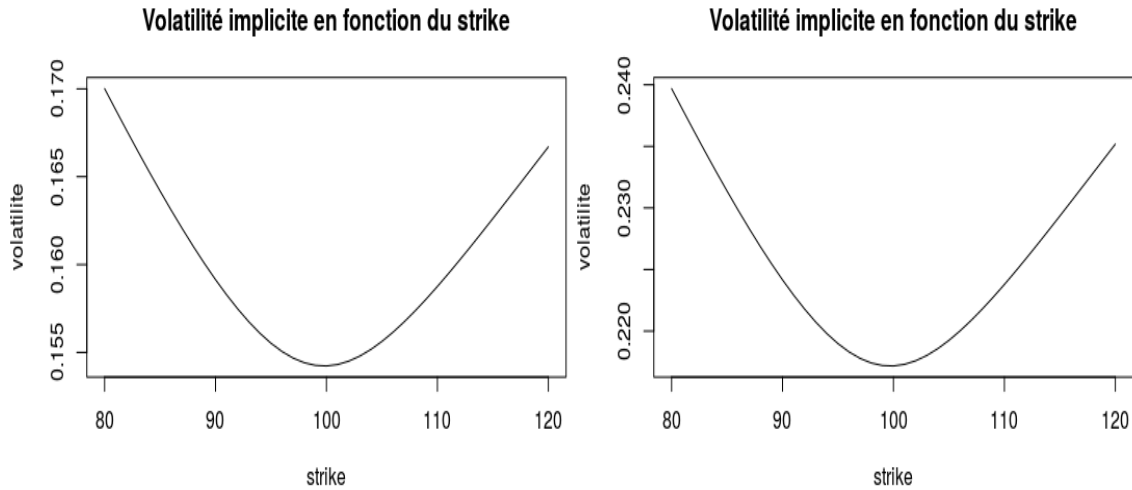


Figure 24: Evolution de la volatilité implicite sur 2 mois

Figure 25: Evolution de la volatilité implicite sur 1 mois



Voici les graphiques obtenus en gardant les mêmes paramètres, mais en changeant  $\sigma = 0.25$  ( $\sigma$  valait 0.02 auparavant):

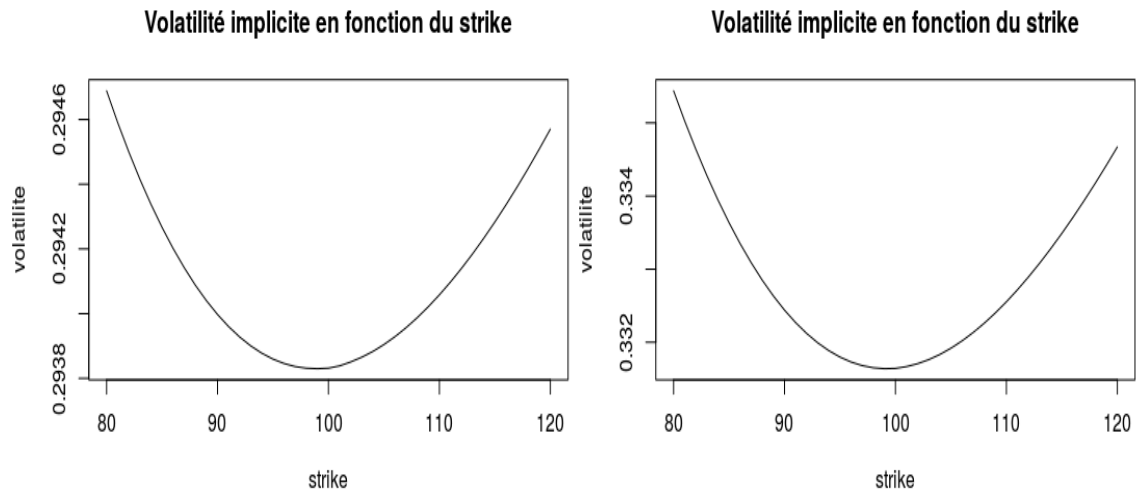


Figure 26: Evolution de la volatilité implicite sur 2 mois

Figure 27: Evolution de la volatilité implicite sur 1 mois