



ENSIMAG

MÉTHODES STATISTIQUES POUR LA FINANCE

---

# Étude des rentabilités de l'indice DOW JONES

---

Charlène PAVIOT  
Antoine GIRERD  
Lucas GONON

*Date : Mars 2017*

# Contents

<b>1</b>	<b>Distribution empirique des rentabilités</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Etude de la dépendance linéaire (modèle ARMA) des rentabilités journalières et hebdomadaires</b>	<b>6</b>
2.1	Cas des rentabilités journalières . . . . .	6
2.2	Cas des rentabilités hebdomadaires . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Chaînes de Markov cachées</b>	<b>8</b>
3.1	Deux états . . . . .	8
3.2	Trois états . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Comparaison de périodes temporelles différentes</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Corrélation sur des transformations non-linéaires des rentabilités</b>	<b>11</b>
5.1	Série des valeurs absolues . . . . .	11
5.2	Série des carrés . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Modèles de type ARCH</b>	<b>12</b>
6.1	Cas des rentabilités journalières . . . . .	12
6.2	Cas des rentabilités hebdomadaires . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Prédiction des rentabilités après 2014</b>	<b>16</b>
7.1	Sélection du meilleur modèle . . . . .	16
7.2	Calcul de la variance et de l'intervalle de confiance . . . . .	16
<b>8</b>	<b>Stabilité du modèle</b>	<b>17</b>

# Introduction

Nous étudions le comportement du cours du Dow Jones. Nous allons donc utiliser plusieurs méthodes statistiques pour représenter et modéliser les rentabilités journalières, hebdomadaires et mensuelles sur plusieurs périodes de cet indice boursier.

## 1 Distribution empirique des rentabilités

Nous avons dans un premier temps regardé la trajectoire des processus de rentabilités journalières, hebdomadaires et mensuelles du Dow Jones.

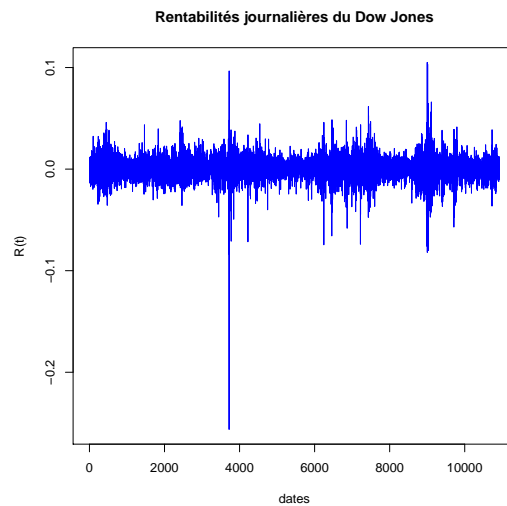


Figure 1: Distribution des rentabilités journalières

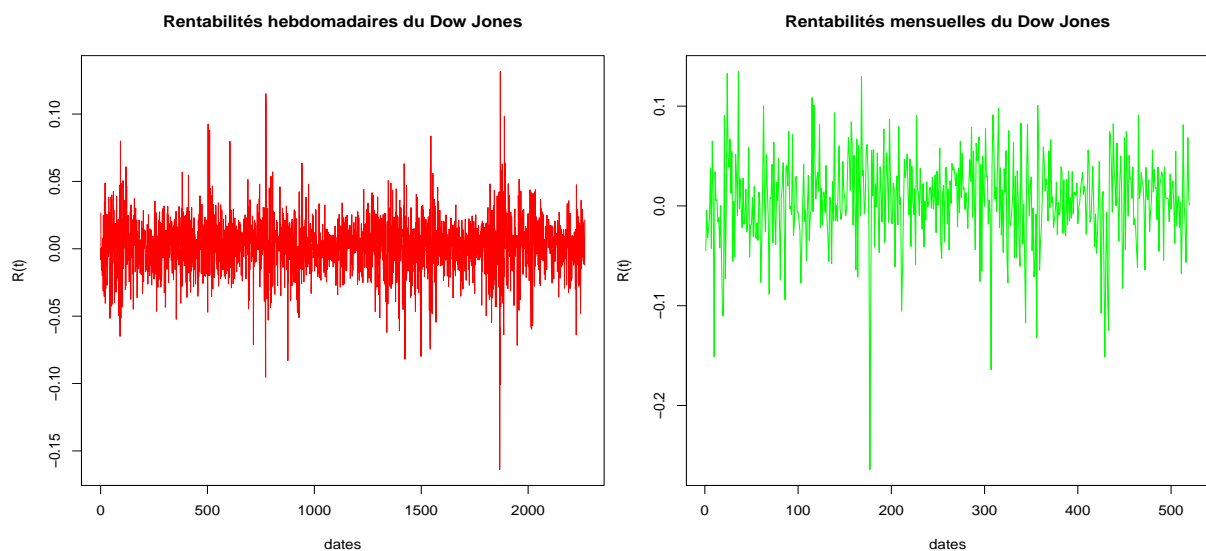


Figure 2: Distribution des rentabilités hebdomadaires

Figure 3: Distribution des rentabilités mensuelles

A première vue, supposer l'hypothèse statique nulle ne paraît pas irréaliste. L'hypothèse statique suppose que le vecteur des rentabilités calculées sur un même pas de temps sont des vecteurs i.i.d.

Afin d'approfondir notre étude, nous avons ensuite tracé les densités des rentabilités journalières, hebdomadaires et mensuelles. Voici les résultats obtenus pour les 3 échantillons de données :

**Graphique de distribution des rentabilités journalières**

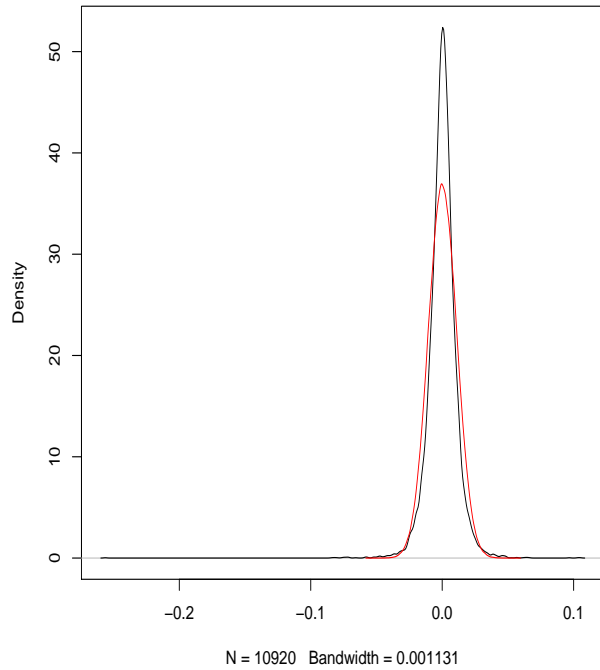


Figure 4: Rentabilités journalières

**Graphique de distribution des rentabilités hebdomadaires**

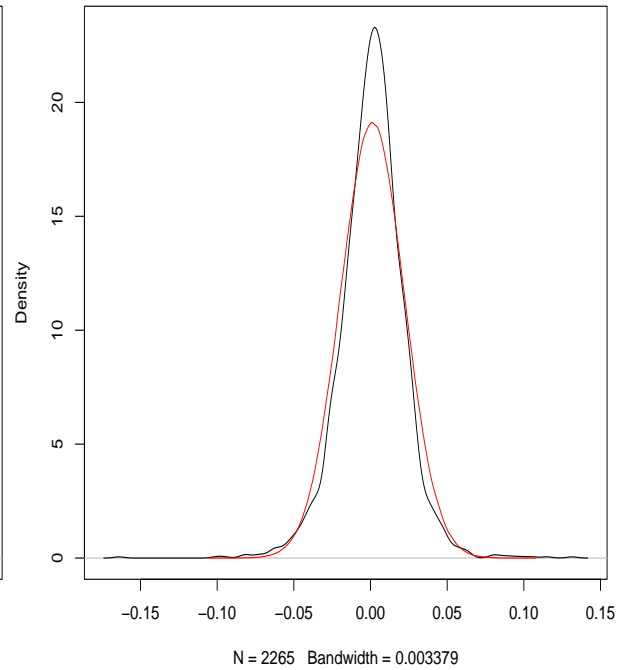


Figure 5: Rentabilités hebdomadaires

**Graphique de distribution des rentabilités mensuelles**

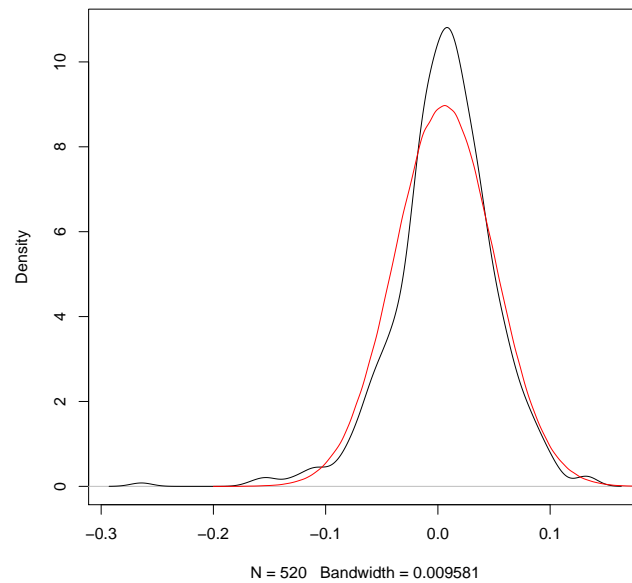


Figure 6: Distribution des rentabilités mensuelles

Les courbes rouges sont celles représentant la loi normale centrée sur la moyenne des rentabilités des échantillons et d'écart-type calculé sur ces échantillons. On remarque que les courbes que nous obtenons ne sont pas vraiment confondues avec les courbes représentant une loi de densité normale. L'hypothèse statistique forte pourrait alors être compromise.

Finalement, nous avons calculé les espérances, volatilités, coefficients d'aplatissement et d'asymétrie pour les rentabilités journalières. Nous récapitulons ces résultats dans le tableau suivant (les valeurs données entre parenthèses représentent les p-valeurs) :

Période	$R_t$	$R_t$ annualisé	$\sigma_t^2$	$\sigma_t$	$\sigma_t$ annualisé	$\gamma_{3t}$	$\gamma_{4t}$
1973 – 1979	-0.012%	-0.03	0.00979%	0.99%	15.64%	0.24(0.00006)	1.22(0)
1980 – 1986	0.048%	0.12	0.00855%	0.92%	14.62%	0.25(0.00002)	1.65(0)
1987 – 1993	0.038%	0.096	0.014%	1.2%	18.93%	-5.71(0)	124.52(0)
1994 – 2000	0.059%	0.15	0.01%	1%	15.95%	-0.51(0)	4.75(0)
2001 – 2007	0.01%	0.03	0.01%	1.04%	16.43%	-0.04(0.48)	4.3(0)
2008 – 2016	0.016%	0.04	0.016%	1.27%	20.08%	-0.05(0.32)	9.44(0)

Figure 7: Moments des rentabilités journalières du Dow Jones

Tout d'abord, on ne constate pas une grande stabilité des moments, par exemple sur la période 1973-1979 la rentabilité annualisée vaut -3%, alors que sur la période 1980-1986 elle vaut 12%.

Nous constatons que le coefficient d'asymétrie  $\gamma_3$  est significativement négatif (sauf sur les périodes 1973-1979 et 1980-1986), cela signifie que la queue de gauche est plus longue que celle de droite. C'est bel et bien ce que l'on constate sur la figure 4. En regardant les figures 5 et 6, on peut remarquer que cette asymétrie par rapport à la queue de gauche s'estompe pour les rentabilités hebdomadaires et mensuelles.

Les coefficients d'aplatissement sont supérieurs à 3 (sauf sur les périodes 1973-1979 et 1980-1986), ce qui caractérise les distributions à queues leptokurptiques.

Ces diverses observations sur les rentabilités journalières rendent peu probable l'hypothèse statique forte.

Sur les figures 5 et 6, on constate que de même que pour les rentabilités journalières, les courbes des rentabilités sont leptokurptiques et par les résultats que nous obtenons, il est alors difficile de croire que les rentabilités sont indépendantes normalement distribuées.

Voici les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement que l'on trouve pour les rentabilités hebdomadaires et mensuelles sur les mêmes périodes :

Période	$\gamma_{3t}$	$\gamma_{4t}$
1973 – 1979	-0.048	3.70
1980 – 1986	0.57	5.69
1987 – 1993	0.24	8.59
1994 – 2000	-0.34	3.87
2001 – 2007	-0.27	5.04
2008 – 2016	-0.54	10.31

Figure 8: Moments 3 et 4 des rentabilités hebdomadaires du Dow Jones

Période	$\gamma_{3t}$	$\gamma_{4t}$
1973 – 1979	0.049	4.14
1980 – 1986	0.12	3.09
1987 – 1993	-2.04	13.35
1994 – 2000	-0.91	4.9
2001 – 2007	-0.55	4.68
2008 – 2016	-0.76	4.15

Figure 9: Moments 3 et 4 des rentabilités mensuelles du Dow Jones

On observe les mêmes phénomènes sur les moments d'ordre 3 et 4 pour les rentabilités hebdomadaires et mensuelles :  $\gamma_3$  est généralement négatif au lieu de valoir 0 et  $\gamma_4$  est supérieur à 3.

## 2 Etude de la dépendance linéaire (modèle ARMA) des rentabilités journalières et hebdomadaires

### 2.1 Cas des rentabilités journalières

Nous souhaitons estimer le meilleur modèle ARMA pour modéliser les données. Pour ce faire, nous avons utilisé les fonctions `acf` et `pacf` de corrélation et d'auto-corrélation.

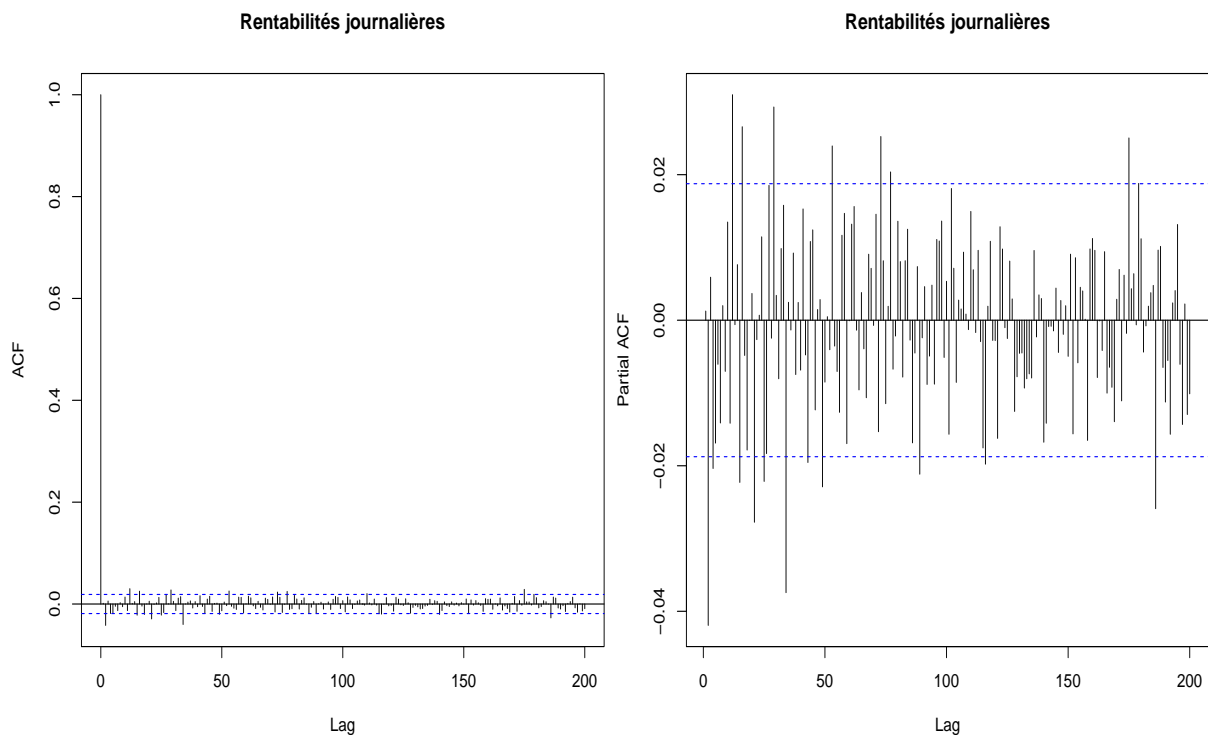


Figure 10: ACF sur les rentabilités journalières Figure 11: PACF sur les rentabilités journalières

Le graphique ACF donne l'ordre pour un modèle MA. On peut considérer qu'environ 2 lags dépassent de l'intervalle de confiance à 5%, on peut donc prendre  $q=2$  (voir figure 10). Sur le graphique PACF on peut observer l'ordre pour le modèle AR, on peut également considérer  $p = 2$  (voir figure 11). On estime ensuite les modèles ARMA en essayant toutes les combinaisons possibles telles que  $p + q \leq \max(p, q)$ . On regarde alors le modèle qui offre un AIC le plus petit

possible, il s'agit du modèle ARMA(0,2). La fonction `auto.arima` du package `forecast` renvoie le meilleur modèle en comparant les AIC. Elle trouve également un modèle ARMA(0,2).

Lorsque l'on fait un `summary` de ce modèle, on remarque que le paramètre MA2 est très significativement non nul. On trouve  $R^2 = 0.0019$  pour ce modèle,  $R^2$  est bien plus petit que 1, ce qui signifie que ce modèle est inutile pour la prévision.

## 2.2 Cas des rentabilités hebdomadaires

On réalise le même travail que précédemment pour les rentabilités hebdomadaires. En observant le graphique ACF pour les rentabilités hebdomadaires, on peut estimer  $q = 2$  et en observant la graphique PACF, on peut estimer  $p = 3$  (voir les figures 12 et 13). On trouve que le modèle qui a un AIC le plus faible est ARMA(1,0). On trouve alors  $R^2 = 0.0074$ , ce qui est un peu mieux que précédemment, mais toujours pas satisfaisant.

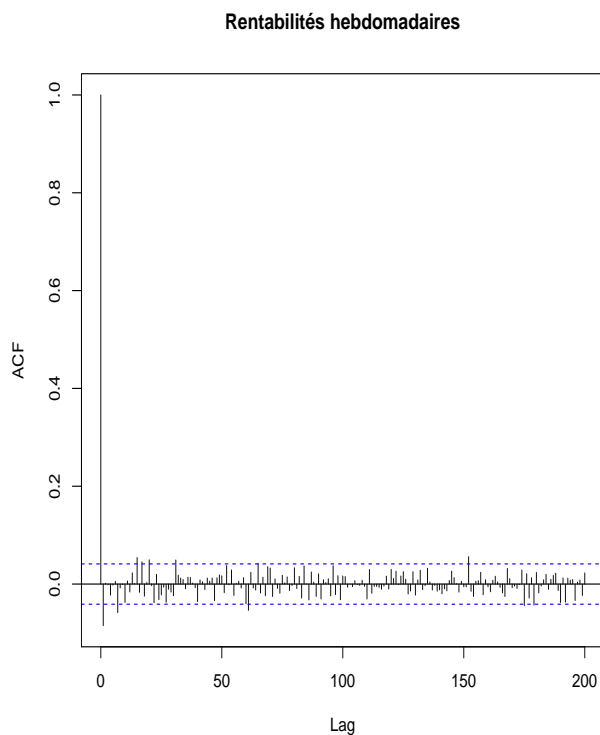


Figure 12: ACF sur les rentabilités hebdomadaires

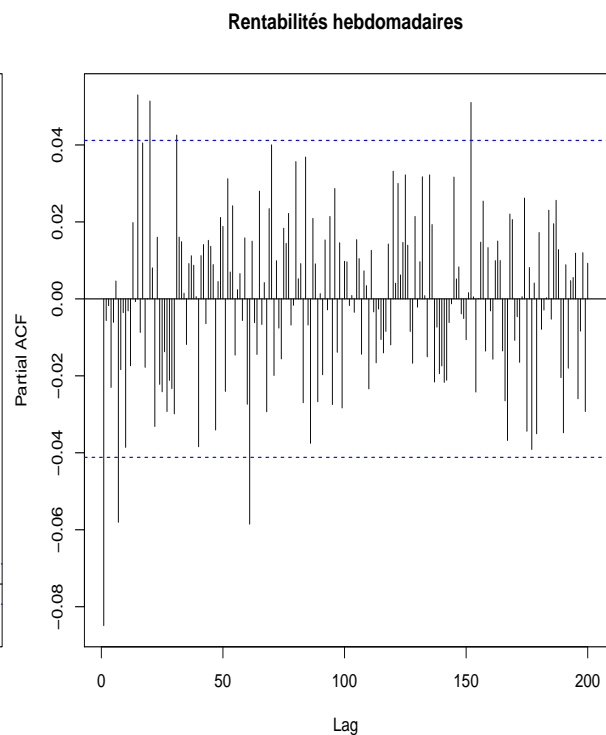


Figure 13: PACF sur les rentabilités hebdomadaires

Dans les deux cas, que ce soit pour les rentabilités journalières ou hebdomadaires, on remarque d'après les graphes ACF qu'il n'y a pas d'auto-corrélation sur les rentabilités. Si c'était le cas, on pourrait alors observer des stratégies gagnantes et cela contredirait l'efficiency des marchés, selon laquelle il ne doit pas être possible de faire des profits d'arbitrage purs, ni même de construire des stratégies basées sur les données du passé durablement gagnantes. Dans ce cas là, on respecte donc l'hypothèse d'efficiency des marchés, et aucune stratégie gagnante n'est possible, il est alors impossible de battre le marché sur le long terme.

### 3 Chaînes de Markov cachées

#### 3.1 Deux états

On étudie le modèle de chaînes de Markov cachées pour les rentabilités journalières. On choisit de mener l'étude sur 2 états pour avoir une loi normale contaminée.

$$R_t = \epsilon_t X_t^1 + (1 - \epsilon_t) X_t^2$$

où  $X_t^i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) est de loi  $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$  et  $\epsilon_t \sim \mathcal{B}(1, p)$ .

L'étude de ce modèle retourne les paramètres suivants :

Paramètre	Journalier	Annualisé
$m_1$	-0.088%	-22%
$\sigma_1$	1.96%	31%
$m_2$	0.050%	12.6%
$\sigma_2$	0.78%	12.4%
$p$	0.1737	

Figure 14: Modèle à chaînes de Markov cachées pour les rentabilités journalières du Dow Jones

On a donc un état (état 1) pour lequel la rentabilité moyenne est négative et avec une volatilité plus élevée que dans l'état 2. Nous l'assimilons donc à un état de crise, et constatons que les dates associées à l'état 1 correspondent effectivement à des dates de crise financière (cf Fig 15). De plus,  $p$  correspond à la probabilité d'être dans l'état 1, on a effectivement une probabilité plus faible d'être en état de crise (empiriquement, le ratio entre le nombre de jours en état 1 et le nombre de jours total est environ de **0.167** en moyenne, donc proche de  $p$ ).

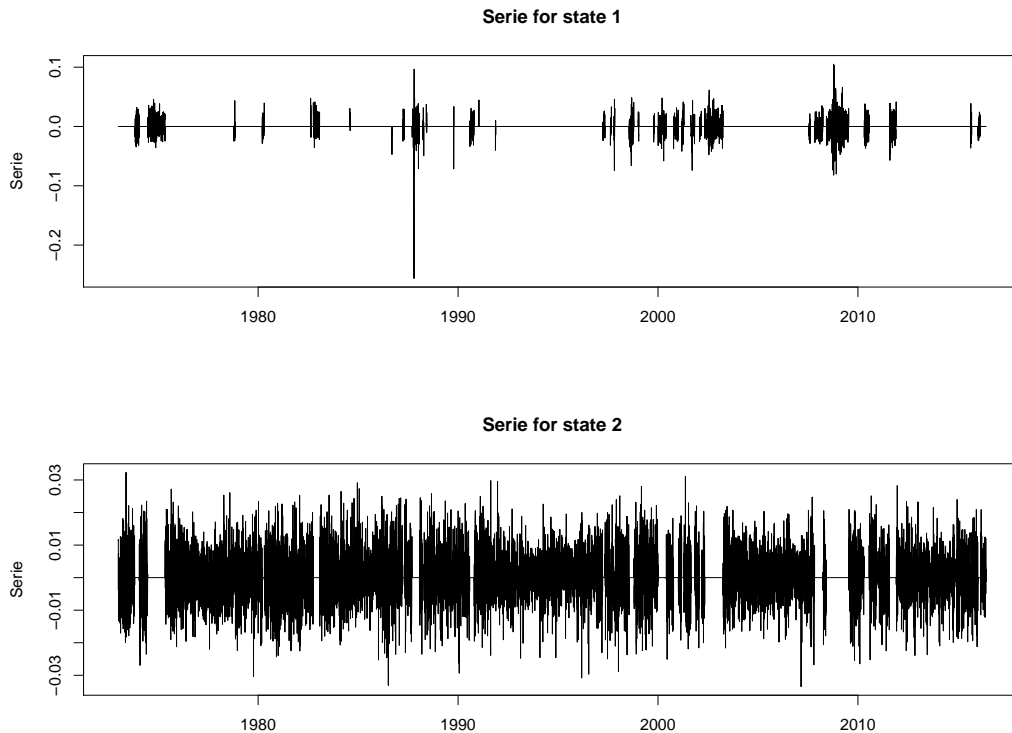


Figure 15: Répartition temporelle des états pour les rentabilités journalières



Enfin, on remarque que les états ont tendance à perdurer, ce qui nous pousse à étudier les corrélations entre les valeurs successives des rentabilités.

### 3.2 Trois états

On peut également réaliser l'étude sur 3 états, les résultats restent cohérents, cf figure 3.2. On a ainsi un état très mauvais (état 1), un état normal voire bon (état 2) et un état calme (état 3).

Paramètre	Annualisé
$m_1$	-41%
$\sigma_1$	42%
$m_2$	15%
$\sigma_2$	10%
$m_3$	4%
$\sigma_3$	16%

Figure 16: Modèle à chaînes de Markov à 3 états

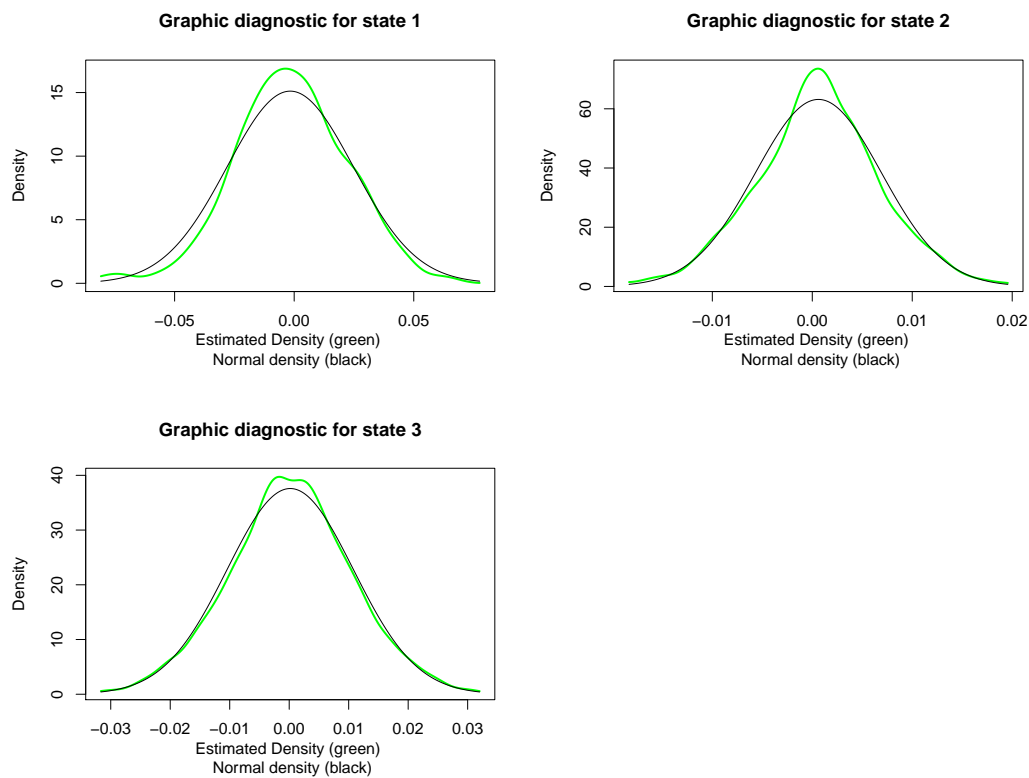


Figure 17: Densité dans les 3 états

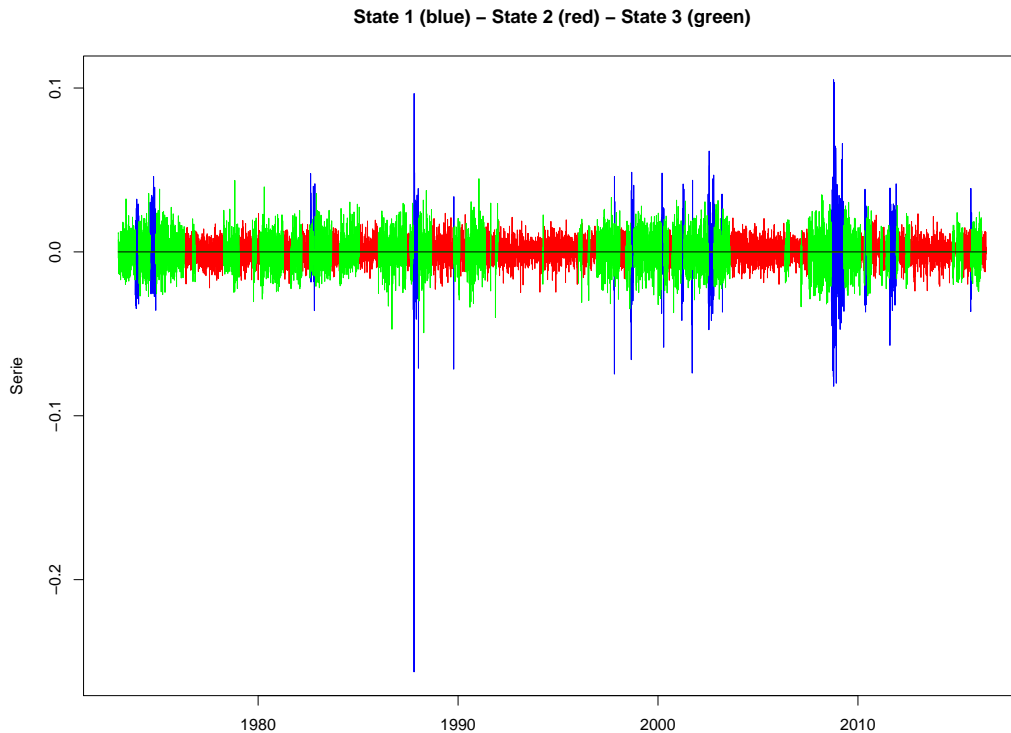


Figure 18: Répartition temporelle des 3 états

## 4 Comparaison de périodes temporelles différentes

On compare ici les rentabilités sur les périodes [1990 - 2002] et [2003 - 2016] de respectivement 12 et 13 ans. On estime les espérances et les variances annualisées suivantes :

	[1990 - 2002]	[2003 - 2016]	Ecart relatif
<b>Espérance annualisée</b>	8.55%	5.65%	-51%
<b>Variance annualisée</b>	0.171%	0.198%	13%

Figure 19: Espérances et variances annualisées sur des périodes différentes

Ces constatations remettent en cause la validité de l'hypothèse statique forte selon laquelle le processus des rentabilités des titres calculées sur un même intervalle de temps sont i.i.d. de loi normale multivariée. Notamment l'écart relatif sur les espérances qui est important.

A première vue, on pourrait alors penser que sur les deux périodes sélectionnées, les moyennes sont différentes. Afin de vérifier ce postulat, nous avons réalisé un test de Student `t.test()` sur les deux échantillons pour voir si leurs moyennes sont significativement différentes. On trouve une p-valeur de 0.6651, ce qui est supérieur à 0.05. On peut donc se permettre de ne pas rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les moyennes des deux échantillons sont égales, ces deux moyennes ne sont donc pas significativement différentes. L'intervalle de confiance de la différence des moyennes à 95% est [-0.0004;0.0006], cet intervalle est très petit et montre que la différence des moyennes est proche de zéro.

Nous avons ensuite réalisé un test de Fisher `var.test` afin de voir si les volatilités trouvées sont significativement différentes. Ce test renvoie une p-valeur de  $4 * 10^{-5}$ , ce qui est bien inférieur à 0.05. On peut donc en conclure que les deux volatilités sont significativement différentes.

## 5 Corrélation sur des transformations non-linéaires des rentabilités

L'observation des rentabilités nous montre qu'une rentabilité de grande amplitude est souvent suivie par une rentabilité de grande amplitude, ce qui nous motive à étudier les valeurs absolues ou les carrés des rentabilités. Les figures 20 et 21 montrent respectivement les résultats des auto-corrélations partielles des carrés et des valeurs absolues des rentabilités journalières.

### 5.1 Série des valeurs absolues

On s'intéresse désormais à la série des  $|Y_t|$ . On observe que les 12 premiers coefficients sur le graphique PACF sont significativement non-nuls. On utilise alors un AR(12) pour modéliser cette série. La signification des coefficients nous permet d'interpréter les résultats. Ainsi, le pourcentage de variance expliquée par ce modèle est de  $R^2 = 16.7\%$  contre 0.19% pour le premier modèle. Les graphes d'autocorrélation montrent en effet la caractéristique de mémoire longue de ce processus par la lente décroissance des coefficients.

### 5.2 Série des carrés

On considère ensuite la série des  $Y_t^2$ . Les 5 premiers coefficients sont significativement non-nuls (exception pour le 4e), on remarque que les amplitudes sont plus grandes que celles de la série initiale. On utilise un AR(5) qui retourne  $R^2 = 5.39\%$  (contre des  $R^2$  inférieurs à 4% pour des AR(3) et AR(4)) contre 0.19 % pour le premier modèle. Ce résultat nous pousse à étudier un modèle sur les variances des rentabilités, ce qui sera fait dans les prochaines questions en étudiant des modèles de type de GARCH.

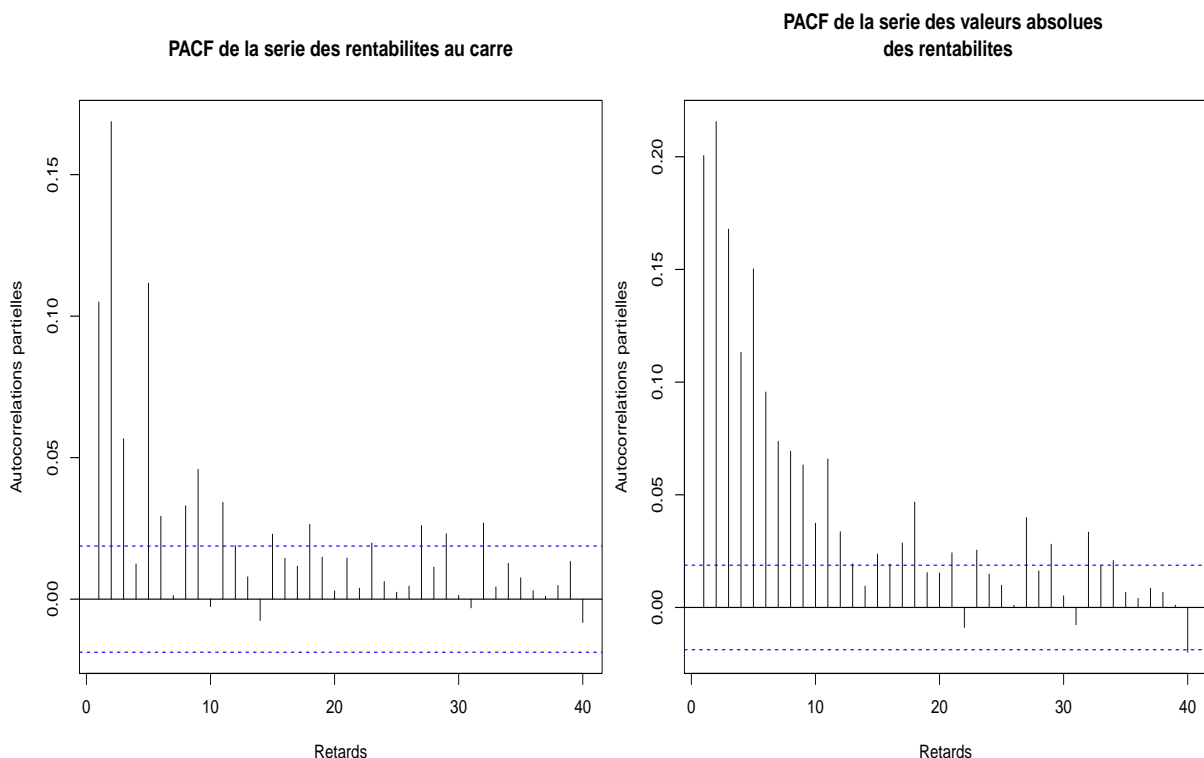


Figure 20: Rentabilités journalières

Figure 21: Rentabilités journalières

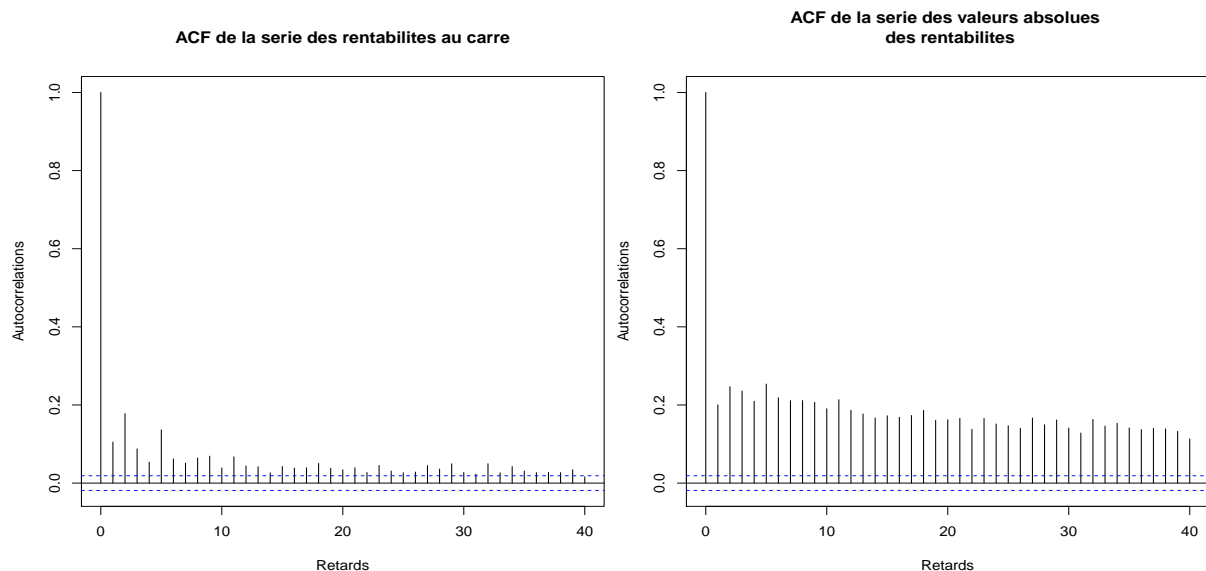


Figure 22: ACF sur les carrés des rentabilités journalières

Figure 23: ACF sur les valeurs absolues des rentabilités journalières

Ces modèles sont meilleurs que les précédents mais ne permettent toujours pas d'expliquer entièrement la variance et l'évolution des rentabilités.

Sur les figures 22 et 23 on remarque que les rentabilités sont corrélées positivement, et qu'après une rentabilité de forte amplitude, on a plus de chance d'en réobtenir une de forte amplitude. Les amplitudes semblent en effet proches en valeurs sur ces deux figures. Il semblerait donc qu'on puisse profiter des dépendances de ces modèles. Cependant, il faut tout de même penser que prendre les valeurs absolues et carrés fait perdre leur signe aux rentabilités, on peut donc estimer l'amplitude de la rentabilité suivante, mais pas son signe.

## 6 Modèles de type ARCH

Dans cette question, il s'agit de tester plusieurs modèles de type ARCH sur les rentabilités journalières et hebdomadaires. Afin de comparer les différents modèles, nous avons tenu compte de la signification des paramètres, de AIC, de la loi suivie par les résidus, de leur indépendance et de  $R^2$ .

### 6.1 Cas des rentabilités journalières

Nous avons ainsi fait une double boucle afin de tester les modèles GARCH et APARCH en faisant varier  $p$  de 1 à 4 et  $q$  de 0 à 4. En comparant les AIC obtenus pour ces modèles, nous obtenons que le meilleur modèle pour représenter les rentabilités journalières est un modèle APARCH(1,1), avec  $AIC = -6.52$ , même si les résultats obtenus dans tous les cas ne sont pas très différents et les AIC sont plutôt proches. L'avantage du modèle APARCH est qu'il autorise l'asymétrie sur la variance conditionnelle. Nous avons ensuite testé la signification des paramètres, ceux-ci sont tous très significativement non nuls.

Nous avons ensuite étudié la nature du bruit obtenu avec un tel modèle. Nous avons récupéré les résidus et réalisé un test de Ljung-Box afin de tester leur indépendance. Si la  $p$ -valeur renvoyée par ce test est supérieure à 0.05, on peut considérer nos résidus comme étant indépendants. C'est ici le cas, car le test nous renvoie une  $p$ -valeur valant 0.896. On souhaite enfin se renseigner sur la loi suivie par les résidus. Nous avons testé leur normalité en traçant un graphique à l'aide de

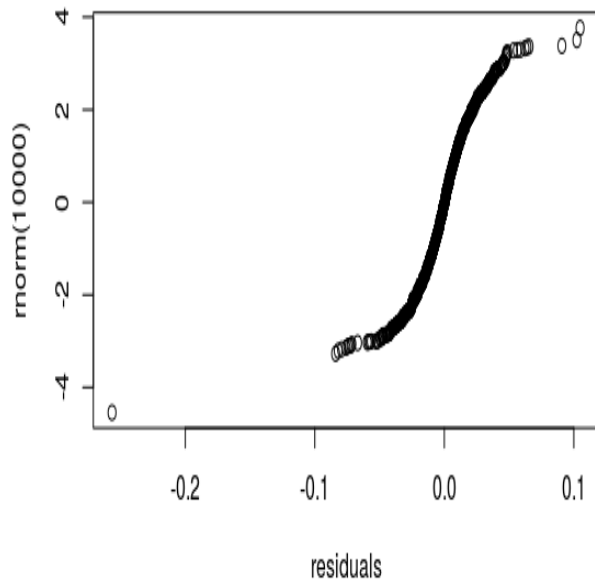


Figure 24: qqplot pour une loi normale

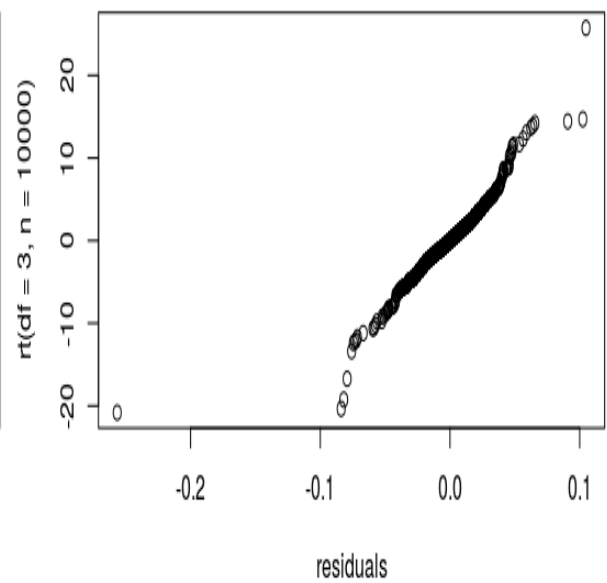


Figure 25: qqplot pour une loi de Student

la commande `qqplot` en comparant l'échantillon des résidus avec un vecteur de loi normale et un vecteur de loi du Student. On obtient alors les graphiques figure 24 et figure 25 ci-dessus.

On remarque alors qu'on n'obtient pas une droite pour la représentation du `qqplot` avec loi normale, cependant pour la loi de Student, la courbe obtenue se rapproche plus d'une droite.

Nous avons tracé la densité des résidus (en noir sur la graphe 26) et nous l'avons comparée avec la densité d'une loi normale ayant pour moyenne celle des résidus et pour écart-type celui des résidus (en rouge). Ce graphique nous permet de confirmer que les résidus ne suivent pas une loi normale, on remarque que les queues de distributions sont leptokurptiques, et lorsque l'on calcule le moment d'ordre 3 des résidus, on trouve  $\gamma_3 = 34.8$ , ce qui est bien largement supérieur à 3.

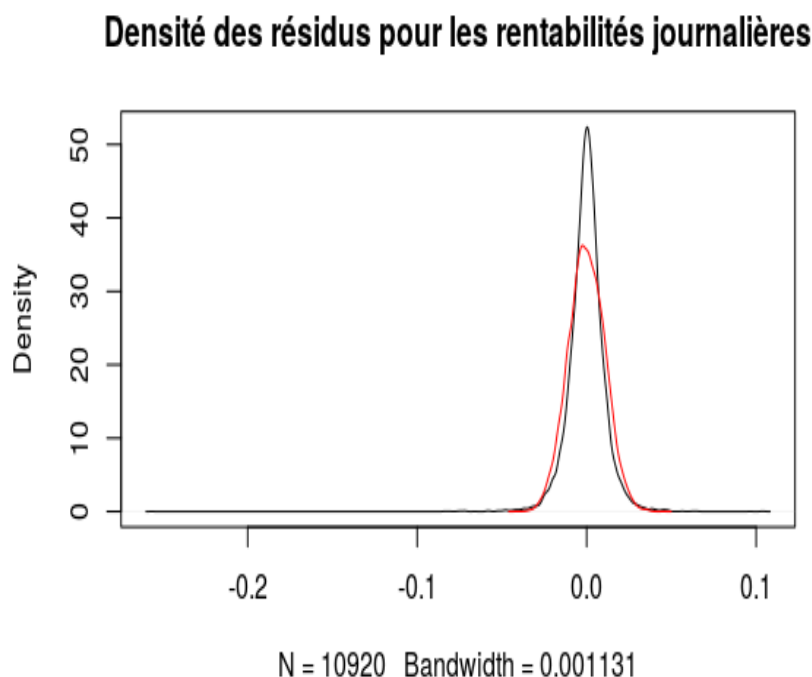


Figure 26: Comparaison de la densité des résidus avec celle de la loi normale

## 6.2 Cas des rentabilités hebdomadaires

Nous avons réitéré le raisonnement précédent avec les rentabilités hebdomadaires. Nous trouvons que le meilleur en terme de AIC est donné par APARCH(4,4), avec  $AIC = -5.061297$ . Encore une fois les modèles ont des AIC plutôt proches. Cependant, lorsque nous observons la signification des paramètres pour ce modèle APARCH(4,4), celle-ci est très mauvaise, seul un paramètre est significativement non nul. Nous avons donc décidé de choisir un modèle où les paramètres ont une signification plus intéressante. Les modèles APARCH(1,1) et GARCH(1,1) sont alors ceux qui ont le plus de paramètres significativement non nuls, et comme le AIC de GARCH(1,1) est inférieur à celui de APARCH(1,1), on peut choisir le modèle GARCH(1,1) pour modéliser ces données.

Lorsque l'on réalise le test de Ljung-Box sur ce modèle, la p-valeur obtenue est très faible ( $5.33 \times 10^{-5}$ ), les résidus ne semblent donc pas être indépendants.

Enfin, lorsque l'on teste la normalité des résidus, celle-ci semble encore une fois être compromise. Les résidus semblent encore une fois suivre une loi de Student. (voir les graphes 27, 28 et 29).

### Densité des résidus pour les rentabilités hebdomadaires

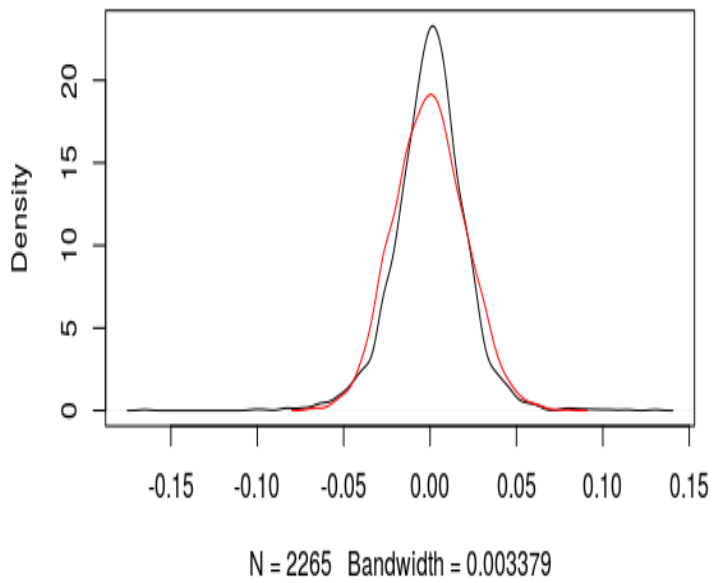


Figure 27: Comparaison de la densité des résidus avec celle de la loi normale

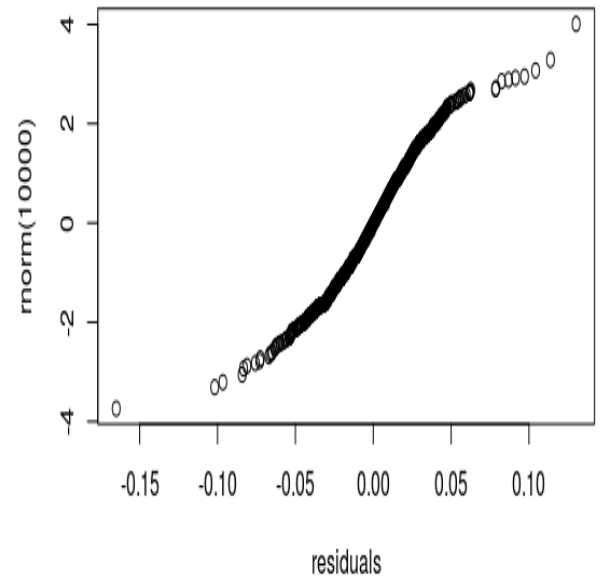


Figure 28: qqplot pour une loi normale

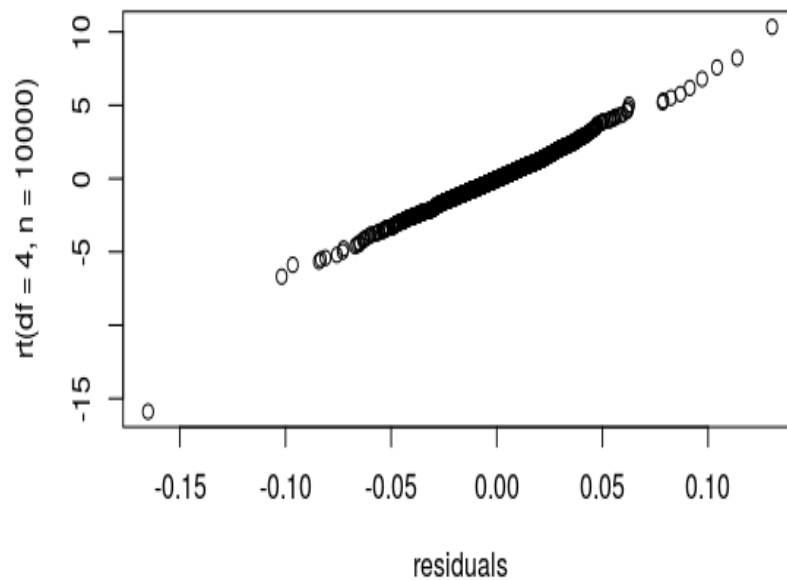


Figure 29: qqplot pour une loi de Student

Aussi bien pour les rentabilités journalières qu'hebdomadaires, le  $R^2$  que l'on trouve est très faible proche de 0. On constate alors que les modèles GARCH et APARCH trouvés ne sont pas très satisfaisants : les résidus obtenus ne suivent pas une loi normale, et le coefficient  $R^2$  est

très faible. De plus, lorsque nous avons fait nos boucles pour estimer le "meilleur modèle", nous avons constaté que dans certains cas l'algorithme pour estimer les modèles GARCH et APARCH ne convergeait pas.

## 7 Prédiction des rentabilités après 2014

### 7.1 Sélection du meilleur modèle

Nous allons étudier les données comprises entre 1990 et 2014 pour choisir notre modèle et ensuite vérifier sa capacité prédictive sur les données ultérieures à 2014. Cette étude sera réalisée sur deux types de rentabilités, les rentabilités journalières et hebdomadaires. Afin de sélectionner le meilleur modèle pour les deux types de rentabilités, nous avons comparé l'AIC de plusieurs modèles GARCH et APARCH, puis nous avons choisi le modèle ayant l'AIC le plus faible.

L'étude nous a retourné comme meilleur modèle un GARCH(2,2) pour les rentabilités journalières et un GARCH(3,3) pour les rentabilités hebdomadaires.

### 7.2 Calcul de la variance et de l'intervalle de confiance

Pour calculer la variance, nous avons utilisé la fonction `predict` du package `fGarch` en passant en paramètre le modèle trouvé grâce à la question précédente. Nous obtenons alors un tableau avec les prédictions ainsi qu'un graphe représentant l'intervalle de confiance à 95% (nous avons utilisé l'option `plot` de la fonction `predict`). Globalement, le modèle nous permet d'être sûr à 95% que la rentabilité est comprise entre -0.02 et 0.02 pour les rentabilités journalières, et entre -0.04 et 0.04 pour les rentabilités hebdomadaires. Cela ne nous permet cependant pas d'être certain du signe de la rentabilité, ce qui limite grandement la capacité prédictive du modèle sélectionné puisqu'il est impossible de savoir si l'indice est gagnant ou perdant (si l'intervalle de confiance était au dessus ou en dessous de 0, on aurait une certitude sur le signe de la rentabilité). En clair, notre modèle ne semble qu'être capable de représenter du bruit autour de 0, il est donc difficile d'en tirer quoi que ce soit.

Vous pouvez observer sur les figures 30 et 31 les graphes représentant les intervalles de confiance à 95 % ainsi que les rentabilités réalisées pour, respectivement, les données journalières et hebdomadaires.



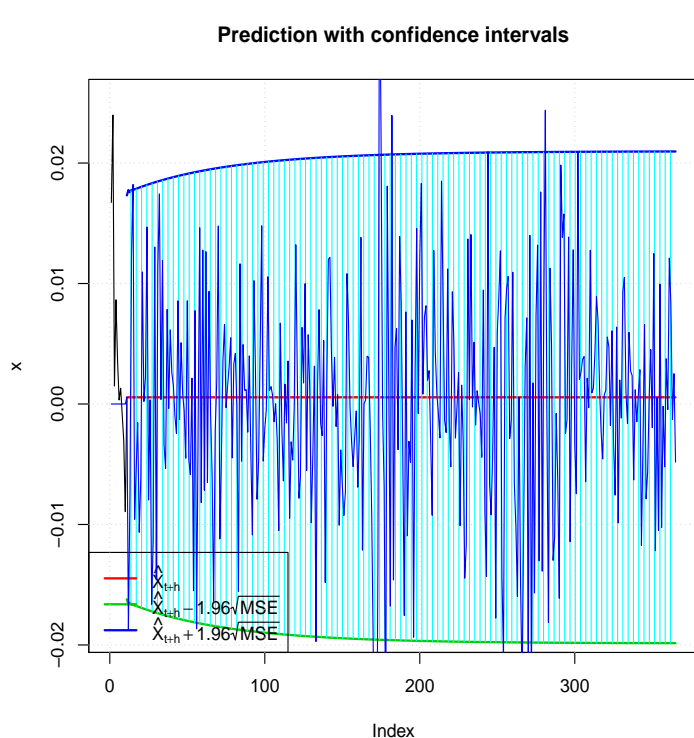


Figure 30: Intervalle de confiance et rentabilités réalisées pour les données journalières

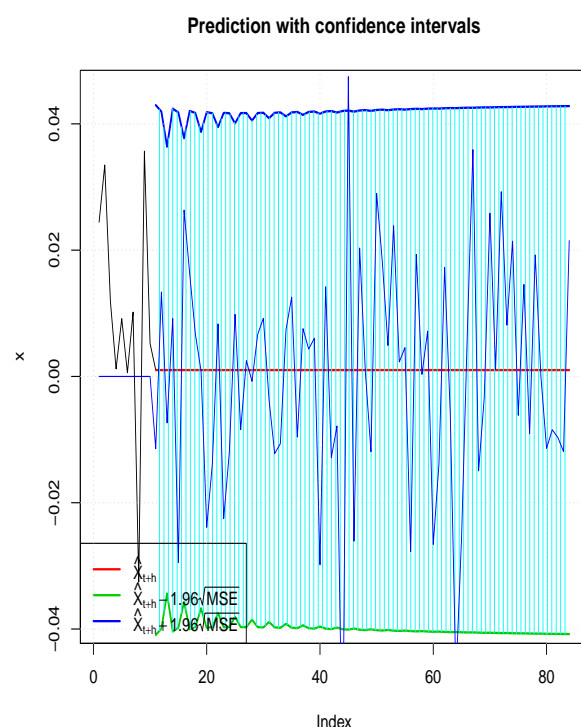


Figure 31: Intervalle de confiance et rentabilités réalisées pour les données journalières

## 8 Stabilité du modèle

On estime sur deux périodes différentes les paramètres du modèle sélectionné. Le modèle  $\sim\text{aparch}(2,1)$  semble offrir des paramètres significatifs pour les deux périodes étudiées. Nous allons donc comparer ces paramètres (dont les écarts relatifs sont donnés figure 32). On compare les variances obtenues en prédisant un échantillon avec chaque jeu de paramètres. On trouve que les variances obtenues n'ont pas la même évolution (avec un test de Kolmogorov Smirnov sur les deux échantillons obtenus). Les deux jeux de paramètres ne sont donc clairement pas les mêmes. Ce modèle n'est pas stable dans le temps, cela est prévisible si on regarde par exemple les résultats de la question 3 sur les modèles à chaîne de Markov cachées mettant en évidence deux régimes de fonctionnement pour les rentabilités, et d'après la Figure 15, les périodes considérées ne correspondent pas au même état. Il faudrait par exemple considérer les conditions économiques des périodes étudiées, ou alors prendre des intervalles de temps plus petits.

mu	omega	alpha1	alpha2	gamma1	gamma2	beta1	delta
44.402908	86.444943	15.472937	-81.765856	0.000000	172.019182	3.884775	-70.166117

Figure 32: Écarts relatifs (en %) des paramètres sur [1990-2002] et sur [2003-2016]

## Conclusion

Nous avons tout d'abord étudié des modèles concernant l'espérance des rentabilités, et nous nous sommes rendus compte que ces modèles ne suffisaient pour obtenir une précision suffisante dans le but de construire une stratégie gagnante. Afin d'observer plus en détails ces rentabilités, on a étudié la variance des rentabilités (ARCH, GARCH, APARCH). Même si certains modèles parviennent à prendre en compte certains aspects des distributions (asymétrie, aplatissement, ...), ces modèles n'ont finalement pas une assez grande capacité prédictive pour permettre de prédire les rentabilités grâce aux données du passé, les valeurs de  $R^2$  sont toujours faibles et les résidus obtenus n'évoluent jamais selon une loi normale.