Cuarenta ejercicios sobre derivadas nivel prepa

Chisu / Charles

21 de junio de 2025

1. Derivadas de funciones algebráicas

1. $f(x) = x + \sqrt{2}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + \sqrt{2}) = 3 + 0 = 3$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 3}$$

2. $f(x) = \frac{1}{3}x - x^2$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x - x^2) = \frac{1}{3} - 2x$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3} - 2x}$$

3. $f(x) = (x^2 + 3x)(x–1)$

Solution:

$$(x^2 + 3x)(x–1) = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x = x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x)(x–1) = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 3x) = 3x^2 + 4x - 3$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 4x - 3}$$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 4}) = \frac{d}{dx}(x^2 + 4)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}$$

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{5x+1}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{5x+1}\right) = 2x \cdot \left(\frac{1}{5x+1}\right) + x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5x+1}\right)$$

$$= \frac{2x}{5x+1} + x^2\left(-(5x+1)^{-2} \cdot 5\right)$$

$$= \frac{2x}{5x+1} - \frac{5x^2}{(5x+1)^2} = \frac{(10x^2+2x) - 5x^2}{(5x+1)^2} = \frac{5x^2+2x}{(5x+1)^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{(10x^2+2x) - 5x^2}{(5x+1)^2} = \frac{5x^2+2x}{(5x+1)^2}}$$

6. $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-3}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2}{2x-3}\right) = \frac{(3)\cdot(2x-3) - (3x-2)\cdot(2)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x+4}{(2x-3)^2} = -\frac{5}{(2x-3)^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = -\frac{5}{(2x-3)^2}}$$

7. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{x^2}}$$

8. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{x^2}}$$

9. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+1}$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2+1}{x+1}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(4x)(x+1)-(2x^2+1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4x(x+1)-(2x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+4x-2x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}}$$

10. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+4}\right) = \frac{d}{dx}\left((x^2+4)^{1/2}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$$

11. $f(x) = \log(2x+1)$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\log(2x+1)\right) = \frac{1}{2x+1}\cdot\frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{1}{2x+1}\cdot 2$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{2}{2x+1}}$$

2. Derivadas de Funciones Trigonométricas

1. $f(x) = x^2\sin(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2\sin(x)) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$

2. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)\cos(x)) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

3. $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \sec^2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \tan(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{\sec^2(x)}{x} - \frac{\tan(x)}{x^2} = \frac{x\sec^2(x) - \tan(x)}{x^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{x\sec^2(x) - \tan(x)}{x^2}}$$

4. $f(x) = \cos(\sqrt{x} + 3)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos(\sqrt{x} + 3)) = -\sin(\sqrt{x} + 3) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{\sin(\sqrt{x} + 3)}{2\sqrt{x}}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\sin(\sqrt{x} + 3)}{2\sqrt{x}}}$$

5. $f(x) = \cot^2(6x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot^2(6x)) = 2\cot(6x) \cdot (-\csc^2(6x)) \cdot 6$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = -12\cot(6x) \cdot \csc^2(6x)}$$

3. Derivadas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

1. $f(x) = \ln(x^2 + x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x^2+x)) = \frac{1}{x^2+x} \cdot (2x+1)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{2x+1}{x^2+2}}$$

2. $f(x) = x^2 \ln(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \ln(x)) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \left(\frac{1}{x}\right)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 2x \ln(x) + x}$$

3. $f(x) = 3x^2 + e^x$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 + e^x) = 6x + e^x$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 6x + e^x}$$

4. $f(x) = e^{-x^2}$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = -2xe^{-x^2}}$$

5. $f(x) = e^x \sin(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin(x)) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + cos(x))$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = e^x(\sin(x) + cos(x))}$$

4. Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

1. $f(x) = \arcsin(x^2)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\arcsin(x^2)) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$$

2. $f(x) = \arctan(2x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctan(2x)) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{2}{1+4x^2}}$$

3. $f(x) = x \arccos(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x \arccos(x)) = 1 \cdot \arccos(x) + x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \arccos(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4. $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\arctan(\sqrt{x})) = 2\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}}$$

5. $f(x) = 3\text{arccot}(x)$

Solution:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3\text{arccot}(x)) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = -\frac{3}{1+x^2}}$$

6. $f(x) = x \cdot \arcsin(x)$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x \cdot \arcsin(x)\right) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \arcsin(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\arcsin(x))$$

$$= 1 \cdot \arcsin(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

5. Regla de la Cadena

1. $f(x) = (x^2+1)^3$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left((x^2+1)^3\right) = 3(x^2+1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 6x(x^2+1)^2}$$

2. $f(x) = \sqrt{5x^2+3x}$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left((5x^2+3x)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}(5x^2+3x)^{-1/2} \cdot (10x+3)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{10x+3}{2\sqrt{5x^2+3x}}}$$

3. $f(x) = \sin(3x^2+2)$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \cos(3x^2+2) \cdot \frac{d}{dx}(3x^2+2) = \cos(3x^2+2) \cdot 6x$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 6x\cos(3x^2+2)}$$

6. Derivación Implícita

1. Ecuación: $x^2 + y^2 = 25$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$

2. Ecuación: $x \cdot y = 1$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = \frac{d}{dx}(1) \quad \Rightarrow \quad y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}}$$

3. Ecuación: $x^2 - xy + y^2 = 7$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}}$$

4. Ecuación: $\sin(xy) = x$

Solución:

$$\cos(xy)(x\frac{dy}{dx} + y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{\cos(xy)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1/\cos(xy) - y}{x}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y + \frac{1}{\cos(xy)}}{x}}$$

5. Ecuación: $\log(x+y) = xy$

Solución:

$$\frac{1}{x+y}(1+\frac{dy}{dx}) = y + x\frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos ambos lados por $(x+y)$:

$$1+\frac{dy}{dx} = (x+y)(y+x\frac{dy}{dx})$$

Luego se despeja $\frac{dy}{dx}$ y simplifica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy-y^2+1}{x^2+xy-1}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-xy-y^2+1}{x^2+xy-1}}$$

7. Derivadas de Orden Superior

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Resultado:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x, \quad f''(x) = 12x^2 - 6, \quad f'''(x) = 24x$$

2. $f(x) = \sin(x)$

Resultado:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x)$$

3. $f(x) = \cos(2x)$

Resultado:

$$f'(x) = -2\sin(2x), \quad f''(x) = -4\cos(2x), \quad f'''(x) = 8\sin(2x)$$

4. $f(x) = \log(x)$

Resultado:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

5. $f(x) = e^{-x}$

Resultado:

$$f'(x) = -e^{-x}, \quad f''(x) = e^{-x}, \quad f'''(x) = -e^{-x}$$

8. Aplicaciones de la Derivada

1. Encuentra la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 1$ en el punto $x = 3$.

Solución:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 4$$

Como la pendiente de la recta tangente se obtiene evaluando la derivada en el punto dado:

$$f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$$

Resultado:

$$\boxed{\text{La pendiente es } 2}$$

2. Determina los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Igualamos a cero para hallar los puntos críticos:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0$$

Resultado:

$$\boxed{\text{Puntos críticos en } x = 1 \text{ y } x = 3}$$

3. Calcula la rapidez de cambio de $y = \ln(x^2 + 1)$ en $x = 1$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{2(1)}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Resultado:

$$\boxed{\text{La rapidez de cambio es } 1}$$

4. Determina el valor de x donde la función $f(x) = -x^2 + 4x$ tiene un máximo.

Solución:

$$f'(x) = -2x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Resultado:

$$\boxed{\text{Máximo en } x = 2}$$

5. Si $s(t) = t^3 - 3t^2$ representa la posición de una partícula, encuentra su velocidad en $t = 2$.

Solución:

$$s'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \quad \Rightarrow \quad s'(2) = 3(2)(2-2) = 0$$

Resultado:

$$\boxed{\text{La velocidad en } t = 2 \text{ es } 0}$$