《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第五章　矩阵的相抵与相似

习题 5.1　矩阵的相抵

1. 求下列矩阵的相抵标准形：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

解： 矩阵的相抵标准形由其秩决定，形式为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。我们需要通过初等变换求出矩阵的秩。

(1) 对矩阵进行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然矩阵的秩 $r=2$，且为 3 级方阵。故其相抵标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 对矩阵进行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵是一个上梯形矩阵，非零行数为 3，故秩 $r=3$。矩阵大小为 3×4。故其相抵标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 观察矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

第 2 行是第 1 行的 -3 倍，第 3 行是第 1 行的 2 倍。所有行向量线性相关，且第 1 行非零，故秩 $r=1$。矩阵大小为 3×2。故其相抵标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2. 设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r\,(r\neq 0)$。证明：存在 $s\times r$ 列满秩矩阵 P_1 与 $r\times n$ 行满秩矩阵 Q_1，使得 $A=P_1Q_1$。（此即矩阵的满秩分解）

证： 因为 $\operatorname{rank}(A)=r$，所以 A 相抵于标准形 $D=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{s\times n}$。即存在 s 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。于是 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$。令 $S=P^{-1}$，$T=Q^{-1}$，则 S 为 s 阶可逆矩阵，T 为 n 阶可逆矩阵。将 S 分块为 $S=(S_1,S_2)$，其中 S_1 为 $s\times r$ 矩阵；将 T 分块为 $T=\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$，其中 T_1 为 $r\times n$ 矩阵。则：

$$A=(S_1,S_2)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}=(S_1,S_2)\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \end{pmatrix}=S_1T_1$$

令 $P_1=S_1$，$Q_1=T_1$。由于 S 可逆，其列向量线性无关，故其前 r 列组成的子矩阵 S_1 的列向量线性无关，即 P_1 列满秩（秩为 r）。由于 T 可逆，其行向量线性无关，故其前

r 行组成的子矩阵 T_1 的行向量线性无关，即 Q_1 行满秩（秩为 r）。综上，存在满足条件的 P_1, Q_1 使得 $A = P_1 Q_1$。

---

3. 证明：任意一个秩为 $r\,(r \neq 0)$ 的矩阵都可以表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证：设矩阵 A 的秩为 r。根据矩阵相抵的理论，存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 A 具有如下标准形：

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

其中 I_r 是 r 阶单位矩阵。我们可以将中间的对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 分解为 r 个矩阵之和：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + E_2 + \cdots + E_r$$

其中 E_i 是一个除 (i,i) 元为 1 外，其余元素全为 0 的矩阵。显然 $\mathrm{rank}(E_i) = 1$。根据矩阵乘法的分配律：

$$A = P(E_1 + E_2 + \cdots + E_r)Q = PE_1Q + PE_2Q + \cdots + PE_rQ$$

令 $A_i = PE_iQ$。由于 P 和 Q 是可逆矩阵，乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩，因此：

$$\mathrm{rank}(A_i) = \mathrm{rank}(PE_iQ) = \mathrm{rank}(E_i) = 1$$

所以，

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$

即 A 被表示成了 r 个秩为 1 的矩阵之和。

***4. 设 A, B 分别是 $s \times n, n \times m$ 矩阵，证明：$\mathbf{rank}(AB) \geq \mathbf{rank}(A) + \mathbf{rank}(B) - n$。**

证：设 $\mathrm{rank}(A) = r$。根据提示，存在 s 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得 A 化为标准形：

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

因此

$$AB = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB$$

令 $H=QB$。因为 Q 是 n 阶可逆矩阵，所以 $\operatorname{rank}(H)=\operatorname{rank}(QB)=\operatorname{rank}(B)$。我们将 $n\times m$ 矩阵 H 进行分块。由于前一个矩阵中有 I_r（占 r 行）和 0（占 $n-r$ 行），我们将 H 分块为：

$$H=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}$$

其中 H_1 是 $r\times m$ 矩阵，H_2 是 $(n-r)\times m$ 矩阵。将 H 代回 AB 的表达式：

$$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}H_1\\0\end{bmatrix}$$

由于 P 是可逆矩阵，不改变秩，故：

$$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}\left(P\begin{bmatrix}H_1\\0\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}H_1\\0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(H_1)$$

现在考察矩阵 $H=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}$。根据分块矩阵秩的性质，我们有：

$$\operatorname{rank}(H)\leq\operatorname{rank}(H_1)+\operatorname{rank}(H_2)$$

所以

$$\operatorname{rank}(H_1)\geq\operatorname{rank}(H)-\operatorname{rank}(H_2)$$

已知 $\operatorname{rank}(H)=\operatorname{rank}(B)$。对于 H_2，它只有 $n-r$ 行，故其秩不可能超过其行数，即 $\operatorname{rank}(H_2)\leq n-r$。从而：

$$\operatorname{rank}(H_1)\geq\operatorname{rank}(B)-(n-r)$$

将 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(H_1)$ 和 $r=\operatorname{rank}(A)$ 代入上式，得：

$$\operatorname{rank}(AB)\geq\operatorname{rank}(B)-(n-\operatorname{rank}(A))$$

即

$$\operatorname{rank}(AB)\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$$

***5. 设 C 是 $s\times r$ 列满秩矩阵，D 是 $r\times m$ 行满秩矩阵。证明：rank$(CD)=r$。**

证： 已知 C 为列满秩，故 $\operatorname{rank}(C)=r$（列数）。已知 D 为行满秩，故 $\operatorname{rank}(D)=r$（行数）。矩阵 CD 的中间维度（即 C 的列数和 D 的行数）为 r。

1. **由秩的乘法性质（上界）：**

$$\operatorname{rank}(CD)\leq\min(\operatorname{rank}(C),\operatorname{rank}(D))=r$$

2. **由第 4 题结论（下界）：**根据 Sylvester 不等式（第 4 题结论），应用于 C 和 D：

$$\operatorname{rank}(CD) \geq \operatorname{rank}(C) + \operatorname{rank}(D) - \text{中间维度}$$

此处中间维度为 r，代入得：

$$\operatorname{rank}(CD) \geq r + r - r = r$$

综合 (1) 和 (2)，即 $\operatorname{rank}(CD) \leq r$ 且 $\operatorname{rank}(CD) \geq r$，故：

$$\operatorname{rank}(CD) = r$$

习题 5.2　矩阵的相似

1. 证明：如果 $A \sim B$，则 $kA \sim kB, A' \sim B'$。

证：因为 $A \sim B$，根据相似的定义，存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$。(1) 对于 kA 与 kB：

$$kB = k(P^{-1}AP) = P^{-1}(kA)P$$

根据相似的定义，这意味着 $kA \sim kB$。

(2) 对于 A' 与 B'：对 $B = P^{-1}AP$ 两边取转置：

$$B' = (P^{-1}AP)' = P'A'(P^{-1})'$$

由于 $(P^{-1})' = (P')^{-1}$，故：

$$B' = P'A'(P')^{-1}$$

令 $Q = (P')^{-1}$，则 $Q^{-1} = P'$。上式变形为：

$$B' = Q^{-1}A'Q$$

这说明存在可逆矩阵 Q 使得 A' 与 B' 相似，即 $A' \sim B'$。

---

2. 证明：如果 A 可逆，则 $AB \sim BA$。

证：根据提示，我们要构造相似变换。计算 $A^{-1}(AB)A$：

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = I(BA) = BA$$

即

$$BA = A^{-1}(AB)A$$

这表明存在可逆矩阵 $P = A$，使得 $BA = P^{-1}(AB)P$。根据矩阵相似的定义，$AB \sim BA$。

---

3. 证明：如果 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$，则 $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$。

证：因为 $A_1 \sim B_1$，存在可逆矩阵 P_1 使得 $B_1 = P_1^{-1}A_1P_1$。因为 $A_2 \sim B_2$，存在可逆矩阵 P_2 使得 $B_2 = P_2^{-1}A_2P_2$。构造分块对角矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$。显然 P 可逆，且

$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}$。计算相似变换：

$$P^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}A_2P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

得证。

***4. 证明：如果 A 与 B 可交换，则 $U^{-1}AU$ 与 $U^{-1}BU$ 也可交换。**

证： 已知 $AB = BA$。设 $\tilde{A} = U^{-1}AU$，$\tilde{B} = U^{-1}BU$。计算它们的乘积：

$$\tilde{A}\tilde{B} = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU) = U^{-1}A(UU^{-1})BU = U^{-1}(AB)U$$

$$\tilde{B}\tilde{A} = (U^{-1}BU)(U^{-1}AU) = U^{-1}B(UU^{-1})AU = U^{-1}(BA)U$$

由于 $AB = BA$，所以 $U^{-1}(AB)U = U^{-1}(BA)U$，即 $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$。故 $U^{-1}AU$ 与 $U^{-1}BU$ 可交换。

---

5. 设 $f(x)$ 是数域 K 上的一元多项式，A 是 n 级矩阵。证明：如果 $A \sim B$，则 $f(A) \sim f(B)$。

证： 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$。因为 $A \sim B$，存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$。对于任意非负整数 k，有 $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$。则

$$f(B) = a_0I + a_1B + \cdots + a_mB^m = a_0P^{-1}IP + a_1P^{-1}AP + \cdots + a_mP^{-1}A^mP$$

$$= P^{-1}(a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m)P = P^{-1}f(A)P$$

故 $f(A) \sim f(B)$。

---

6. 证明：如果 A 可对角化，则 $A \sim A'$。

证： 若 A 可对角化，则存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $A = P\Lambda P^{-1}$（即 $A \sim \Lambda$）。对角矩阵 Λ 是对称矩阵，即 $\Lambda' = \Lambda$。由第 1 题结论知，若 $A \sim \Lambda$，则 $A' \sim \Lambda'$。所以 $A' \sim \Lambda' = \Lambda$。由相似关系的传递性：$A \sim \Lambda$ 且 $\Lambda \sim A'$，故 $A \sim A'$。

---

7. 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A, B 满足 $AB - BA = A$，则 A 不可逆。

证： 使用反证法。假设 A 可逆。由 $AB - BA = A$ 两边左乘 A^{-1}，得：

$$A^{-1}(AB - BA) = A^{-1}A$$

$$A^{-1}AB - A^{-1}BA = I$$

$$B - A^{-1}BA = I$$

对等式两边取迹：

$$\mathrm{tr}(B - A^{-1}BA) = \mathrm{tr}(I)$$

利用迹的线性性质 $\mathrm{tr}(X - Y) = \mathrm{tr}(X) - \mathrm{tr}(Y)$ 和循环性质 $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$：左边 $= \mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(A^{-1}BA) = \mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(B(A^{-1}A)) = \mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(B) = 0$。右边 $= \mathrm{tr}(I_n) = n$。于是得到 $0 = n$。因为 A 是 n 级矩阵，$n = 0$ 导致矛盾。所以假设不成立，A 不可逆。

---

8. 证明：与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵。

证： 设 A 是幂等矩阵，即 $A^2 = A$。设 B 与 A 相似，则存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$。计算 B^2：

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$$

因为 $A^2 = A$，所以：

$$B^2 = P^{-1}AP = B$$

根据幂等矩阵定义，B 也是幂等矩阵。

---

9. 证明：与对合矩阵相似的矩阵仍是对合矩阵。

证： 设 A 是对合矩阵，即 $A^2 = I$。设 B 与 A 相似，则 $B = P^{-1}AP$。计算 B^2：

$$B^2 = P^{-1}A^2P$$

因为 $A^2 = I$，所以：

$$B^2 = P^{-1}IP = I$$

根据对合矩阵定义，B 也是对合矩阵。

---

10. 证明：与幂零矩阵相似的矩阵仍是幂零矩阵，并且其幂零指数相同。

证： 设 A 是幂零矩阵，且幂零指数为 l。这意味着 $A^l = 0$ 且 $A^{l-1} \neq 0$。设 $B \sim A$，即 $B = P^{-1}AP$。对于任意正整数 k，有 $B^k = P^{-1}A^kP$。(1) 当 $k = l$ 时：

$$B^l = P^{-1}A^lP = P^{-1}0P = 0$$

(2) 当 $k = l - 1$ 时：

$$B^{l-1} = P^{-1}A^{l-1}P$$

由于 $A^{l-1} \neq 0$ 且 P 可逆，可知 $P^{-1}A^{l-1}P \neq 0$（秩相抵不为 0），即 $B^{l-1} \neq 0$。综上，存在最小正整数 l 使得 $B^l = 0$，故 B 也是幂零矩阵，且幂零指数为 l。

习题 5.3 矩阵的特征值和特征向量

1. 求数域 K 上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量：

(1) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

解： 计算特征多项式：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}$$

C_3+C_2：

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-2&\lambda-5&\lambda-1\\2&4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-2&\lambda-5&1\\2&4&1\end{vmatrix}$$

R_3-R_2：

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-2&\lambda-5&1\\4&9-\lambda&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot(-1)\cdot[(\lambda-2)(9-\lambda)-(-8)]$$

$=(1-\lambda)(9\lambda-\lambda^2-18+2\lambda+8)=(1-\lambda)(-\lambda^2+11\lambda-10)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)$

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$ (二重)，$\lambda_3=10$。

当 $\lambda=1$ 时，解 $(I-A)X=0$：

$$\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1+2x_2-2x_3=0$。基础解系为 $\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(2,0,1)^T$。全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ $(k_1,k_2$ 不全为 $0)$。

当 $\lambda=10$ 时，解 $(10I-A)X=0$：

$$\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2.5\\0&9&9\\0&-18&-18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0.5\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系 $\xi_3=(1,2,-2)^T$（取 $x_3=-2$）。全部特征向量为 $k_3\xi_3$ $(k_3\neq0)$。

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$

解： $|\lambda I - A| = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$。特征值：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$。当 $\lambda = 1$ 时，特征向量为 $k(2,0,-1)^T$。当 $\lambda = 3$ 时，特征向量为 $k(1,-1,2)^T$。

(3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

解： $|\lambda I - A| = (\lambda-2)^2(\lambda-11)$。特征值：$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 11$。当 $\lambda = 2$ 时，特征向量为 $k_1(1,-2,0)^T + k_2(1,0,-1)^T$。当 $\lambda = 11$ 时，特征向量为 $k(2,1,2)^T$。

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

解： $|\lambda I - A| = (\lambda+1)^3$。特征值 $\lambda = -1$ (三重)。解 $(-I-A)X = 0 \implies \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。特征向量为 $k(-1,-1,1)^T$。

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

解： 特征值：$0, 1, -1$。$\lambda = 0$ 对应特征向量 $k(1,1,-1)^T$。$\lambda = 1$ 对应特征向量 $k(1,1,1)^T$。$\lambda = -1$ 对应特征向量 $k(1,-1,-1)^T$。

---

2. 求复数域上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量；如果把 A 看成实数域上的矩阵，它有没有特征值？有多少个特征值？

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

解： $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^2 + 3 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$。特征值 $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$。**复数域上：** 特征值为 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$。对应特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $k_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$。**实数域上：** 无

实根，故无特征值。

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

解： 特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$。**复数域上：** 特征值为 $1, i, -i$。$\lambda = 1 \implies k(2, -1, -1)^T$。$\lambda = i \implies k(1 - 2i, -1 + i, -2)^T$。$\lambda = -i \implies k(1 + 2i, -1 - i, -2)^T$。**实数域上：** 只有一个特征值 1。

---

3. 设 A 是实数域上的 n 级矩阵，把 A 看成复数域上的矩阵，如果 λ_0 是 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量，则 $\bar{\lambda}_0$ 也是 A 的一个特征值，$\bar{\alpha}$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}_0$ 的一个特征向量。

证： 由已知 $A\alpha = \lambda_0 \alpha$。两边取复数共轭：

$$\overline{A\alpha} = \overline{\lambda_0 \alpha}$$

因为 A 是实矩阵，故 $\bar{A} = A$。所以 $A\bar{\alpha} = \bar{\lambda}_0 \bar{\alpha}$。这表明 $\bar{\lambda}_0$ 是特征值，$\bar{\alpha}$ 是对应的特征向量。

---

4. 证明：数域 K 上的 n 级幂零矩阵的特征值都是 0。

证： 设 A 是幂零矩阵，即存在正整数 k 使得 $A^k = 0$。设 λ 是 A 的特征值，对应特征向量为 $x \neq 0$。则 $Ax = \lambda x$。两边左乘 A 得 $A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x$。递推可得 $A^k x = \lambda^k x$。因为 $A^k = 0$，所以 $0 = \lambda^k x$。因 $x \neq 0$，故 $\lambda^k = 0 \implies \lambda = 0$。

***5. 证明：数域 K 上的 n 级幂等矩阵一定有特征值，并且它的特征值是 1 或 0。**

证： 设 A 为幂等矩阵，即 $A^2 = A$。设 λ 是特征值，x 是对应特征向量。由 $Ax = \lambda x$ 得 $A^2 x = \lambda^2 x$。代入 $A^2 = A$ 得 $\lambda x = \lambda^2 x$，即 $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$。因 $x \neq 0$，故 $\lambda^2 - \lambda = 0$，解得 $\lambda = 0$ 或 1。因为在复数域（及任何代数闭域）上特征值一定存在，且 $0, 1 \in K$，所以特征值一定存在且为 0 或 1。

***6. 方阵 A 如果满足 $A^m = I$，则称 A 是周期矩阵。证明：复数域上周期为 m 的周期矩阵的特征值都是 m 次单位根。**

证： 设 $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$。则 $A^m x=\lambda^m x$。因为 $A^m=I$，所以 $Ix=\lambda^m x \implies x=\lambda^m x$。即 $(\lambda^m-1)x=0$。因为 $x\neq 0$，所以 $\lambda^m=1$。故 λ 是 m 次单位根。

---

7. 证明：方阵 A 与 A' 有相同的特征多项式，从而它们有相同的特征值。

证： 特征多项式 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$。$f_{A'}(\lambda)=|\lambda I-A'|=|(\lambda I-A)'|$。根据行列式的性质 $|M'|=|M|$，得 $|(\lambda I-A)'|=|\lambda I-A|=f_A(\lambda)$。故特征多项式相同，特征值也相同。

---

8. 设 A 是数域 K 上一个可逆矩阵，证明：(1) 如果 A 有特征值，则 A 的特征值不等于 0； (2) 如果 λ_0 是 A 的一个特征值，则 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征值。

证： (1) 若 $\lambda=0$ 是特征值，则 $|0\cdot I-A|=|-A|=(-1)^n|A|=0$，这与 A 可逆 $(|A|\neq 0)$ 矛盾。故 $\lambda\neq 0$。(2) 设 $Ax=\lambda_0 x$ $(x\neq 0)$。两边左乘 A^{-1}：$A^{-1}Ax=A^{-1}(\lambda_0 x)$。$x=\lambda_0 A^{-1}x$。因 $\lambda_0\neq 0$，两边除以 λ_0 得：$A^{-1}x=\lambda_0^{-1}x$。故 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。

---

9. 证明：方阵 A 的行列式等于零当且仅当 A 有特征值 0。

证： A 有特征值 0 $\iff$ 特征多项式 $|\lambda I-A|$ 有根 0 $\iff$ $|0\cdot I-A|=0$ $\iff$ $|-A|=0$ $\iff$ $(-1)^n|A|=0$ $\iff$ $|A|=0$。

***10. 设 A 是一个 n 级正交矩阵 $(AA'=I)$，证明：(1) 如果 A 有特征值，则 A 的特征值是 1 或 -1； (2) 如果 n 是奇数，且 $|A|=1$，则 1 是 A 的一个特征值； (3) 如果 $|A|=-1$，则 -1 是 A 的一个特征值。**

证：(1) 设 $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$。两边取转置：$x^TA^T=\lambda x^T$。将两式相乘：$(x^TA^T)(Ax)=(\lambda x^T)(\lambda x)$。$x^T(A^TA)x=\lambda^2x^Tx$。因 $A^TA=I$，故 $x^Tx=\lambda^2x^Tx$。因 $x\neq 0 \implies x^Tx>0$，故 $\lambda^2=1 \implies \lambda=\pm 1$。

(2) $|I-A|=|AA^T-A|=|A(A^T-I)|=|A||A^T-I|=1\cdot|(A-I)^T|=|A-I|=(-1)^n|I-A|$。因 n 为奇数，故 $|I-A|=-|I-A| \implies |I-A|=0$。故 1 是特征值。

(3) ：$|I+A|=|AA^T+A|=|A(A^T+I)|=|A||A^T+I|=-1|(A+I)^T|=-|A+I|$。$\implies 2|I+A|=0 \implies |(-1)I-A|=0$。故 -1 是特征值。

---

11. 设 λ_0 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的一个特征值，证明：(1) 对任意 $k \in K$，有 $k\lambda_0$ 是矩阵 kA 的一个特征值；(2) 对任意正整数 m，有 λ_0^m 是矩阵 A^m 的一个特征值；(3) 对于系数属于 K 的一元多项式 $f(x)$，有 $f(\lambda_0)$ 是矩阵 $f(A)$ 的一个特征值。

证： 设 $Ax = \lambda_0 x$ $(x \neq 0)$。(1) $(kA)x = k(Ax) = k(\lambda_0 x) = (k\lambda_0)x$。(2) $A^2x = A(\lambda_0 x) = \lambda_0(Ax) = \lambda_0^2 x$。归纳可得 $A^m x = \lambda_0^m x$。(3) 设 $f(x) = \sum a_i x^i$。$f(A)x = (\sum a_i A^i)x = \sum a_i(A^i x) = \sum a_i(\lambda_0^i x) = (\sum a_i \lambda_0^i)x = f(\lambda_0)x$。

***12. 设 A, B 分别是数域 K 上 $s \times n, n \times s$ 矩阵，证明：AB 与 BA 有相同的非零特征值。**

证： 设 $\lambda_0 \neq 0$ 是 AB 的特征值，即存在 $x \neq 0$ 使得 $(AB)x = \lambda_0 x$。两边左乘 B：

$$B(AB)x = B(\lambda_0 x)$$

$$(BA)(Bx) = \lambda_0(Bx)$$

令 $y = Bx$。若 $y \neq 0$，则 y 是 BA 对应于 λ_0 的特征向量，即 λ_0 是 BA 的特征值。若 $y = Bx = 0$，则 $(AB)x = A(Bx) = A0 = 0$。但 $(AB)x = \lambda_0 x$，故 $\lambda_0 x = 0$。因 $x \neq 0$，得 $\lambda_0 = 0$，这与假设 $\lambda_0 \neq 0$ 矛盾。所以 $y \neq 0$ 必然成立。故 AB 的非零特征值也是 BA 的特征值。同理可证反之亦然。

习题 5.4 矩阵可对角化的条件

1. 习题 5.3 的第 1, 2 题中，哪些矩阵可对角化？哪些矩阵不能对角化？对于可对角化的矩阵 A，求可逆矩阵 U，使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。

解：关于习题 5.3 第 1 题的矩阵：

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$。特征值为 1 (二重), 10。$\lambda = 1$ 时，特征向量 $\xi_1 = (-2,1,0)^T, \xi_2 = (2,0,1)^T$，线性无关特征向量个数为 2，等于代数重数。$\lambda = 10$ 时，特征向量 $\xi_3 = (1,2,-2)^T$。总共有 3 个线性无关的特征向量，故 A 可对角化。令 $U = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，则 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(1,1,10)$。

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$。特征值为 1, 3 (二重)。$\lambda = 3$ 时，特征向量仅有 $k(1,-1,2)^T$，线性无关特征向量个数为 1，小于代数重数 2。故 A 不可对角化。

(3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$。特征值为 2 (二重), 11。$\lambda = 2$ 时，特征向量 $\xi_1 = (1,-2,0)^T, \xi_2 = (1,0,-1)^T$，个数为 2，等于代数重数。$\lambda = 11$ 时，特征向量 $\xi_3 = (2,1,2)^T$。故 A 可对角化。令 $U = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(2,2,11)$。

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$。特征值为 -1 (三重)。线性无关特征向量只有 1 个，小于代数重数 3。故 A 不可对角化。

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$。特征值为 0, 1, -1。三个互异特征值，必可对角化。对应特征向量 $\xi_1 = (1,1,-1)^T\ (\lambda = 0), \xi_2 = (1,1,1)^T\ (\lambda = 1), \xi_3 = (0,1,-1)^T\ (\lambda = -1)$。故 A

可对角化。令 $U=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$（按 $\xi_{\lambda=0},\xi_{\lambda=1},\xi_{\lambda=-1}$ 排列）。则 $U^{-1}AU=\mathrm{diag}(0,1,-1)$。

关于习题 5.3 第 2 题的矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$。

复数域上：特征值为 $1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i$。互异，可对角化。特征向量 $\xi_1=(i,1)^T,\xi_2=(-i,1)^T$。令 $U=\begin{pmatrix}i&-i\\1&1\end{pmatrix}$，则 $U^{-1}AU=\mathrm{diag}(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i)$。

实数域上：无特征值，不可对角化。

(2) $A=\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$。

复数域上：特征值为 $1,i,-i$。互异，可对角化。特征向量 $\xi_1=(1,-1,-1)^T$ $(\lambda=1)$，$\xi_2=(1-2i,-1+i,-2)^T$ $(\lambda=i)$，$\xi_3=(1+2i,-1-i,-2)^T$ $(\lambda=-i)$。令 $U=\begin{pmatrix}2&1-2i&1+2i\\-1&-1+i&-1-i\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$. 则 $U^{-1}AU=\mathrm{diag}(1,i,-i)$。

实数域上：只有一个特征值，特征向量不足，不可对角化。

---

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ **两两不同，判断** A **是否可对角化**。

解： A 是上三角矩阵，其特征值即为主对角线元素 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$。已知这四个数两两不同，即矩阵 A 有 4 个互异的特征值。根据定理：如果 n 级矩阵有 n 个互异的特征值，则该矩阵可对角化。**故** A **可对角化**。

---

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$**，求** A^m **(**m **是任一正整数)**。

解： 1. **求特征值：**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$。

2. **求特征向量：**

- 当 $\lambda_1 = 2$ 时，解 $(2I - A)X = 0$：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies x_1 - 2x_2 = 0 \implies x_1 = 2x_2$$

取特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

- 当 $\lambda_2 = 3$ 时，解 $(3I - A)X = 0$：

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$$

取特征向量 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

3. **对角化计算** A^m**：** 令 $P = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。求 P^{-1}：

$$|P| = 2 - 1 = 1, \quad P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 $A^m = P\Lambda^m P^{-1}$：

$$
\begin{aligned}
A^m &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^m & 3^m \\ 1 \cdot 2^m & 3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{m+1} & 3^m \\ 2^m & 3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{m+1} \cdot 1 + 3^m(-1) & 2^{m+1}(-1) + 3^m \cdot 2 \\ 2^m \cdot 1 + 3^m(-1) & 2^m(-1) + 3^m \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{m+1} - 3^m & 2(3^m - 2^m) \\ 2^m - 3^m & 2(3^m - 2^{m-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

---

4. 证明：如果 α 与 β 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量，则 $\alpha + \beta$ 不是 A 的特征向量。

证：设 $A\alpha = \lambda_1\alpha, A\beta = \lambda_2\beta$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。假设 $\alpha + \beta$ 是 A 的特征向量，则存在 $\lambda_3 \in K$，使得

$$A(\alpha + \beta) = \lambda_3(\alpha + \beta)$$

另一方面，利用线性性质：

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta$$

两式联立得：

$$\lambda_3\alpha + \lambda_3\beta = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta$$

移项整理得：

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\alpha + (\lambda_3 - \lambda_2)\beta = 0$$

因为 α, β 是属于不同特征值的特征向量，根据定理，它们线性无关。所以系数必须全为 0：

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2$$

这与已知条件 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾。故假设不成立，$\alpha + \beta$ 不是 A 的特征向量。

---

5. 设 A 是数域 K 上 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，则 A 一定是数量矩阵。

证：据已知条件，A 可对角化（因为存在 n 个线性无关的特征向量）。设 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 是标准基。由题设，$A\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_i$。这意味着 A 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$。考虑向量 $\alpha = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = (1, 1, \ldots, 1)^T$。由题设，$\alpha$ 也是特征向量，即存在 λ 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$。代入 A 的对角形式：

$$A\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T$$

而 $\lambda\alpha = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)^T$。比较分量得：$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda, \ldots, \lambda_n = \lambda$。即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$。所以 $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \lambda I$。即 A 是数量矩阵。

---

6. 证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化。

证：设 A 是 n 级幂零矩阵，且 $A \neq 0$。已知幂零矩阵的特征值全为 0（习题 5.3 第 4 题结论）。假设 A 可对角化，则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。其中 Λ 是对角矩阵，其对角元为 A 的特征值。因为 A 的特征值全为 0，所以 $\Lambda = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0) = 0$（零矩阵）。于是 $P^{-1}AP = 0 \implies A = P0P^{-1} = 0$。这与题设 $A \neq 0$ 矛盾。故 A 不能对角化。

习题 5.5 实对称矩阵的对角化

1. 对于下述实对称矩阵 A，求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵：

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

解： 1. **求特征值：**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$C_3 + C_2$:

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda+3 & \lambda-1 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda+3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$R_2 - R_3$:

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 4 & \lambda+7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[\lambda(\lambda+7)-8] = (\lambda-1)(\lambda^2+7\lambda-8)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+8) = (\lambda-1)^2(\lambda+8)$$

特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (二重)，$\lambda_3 = -8$。

2. **求特征向量：**

- 当 $\lambda = 1$ 时，解 $(I-A)X = 0$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  基础解系为 $\alpha_1 = (-2,1,0)^T, \alpha_2 = (2,0,1)^T$。将 α_1, α_2 正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = (-2,1,0)^T$。$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (2,0,1)^T - \frac{-4}{5}(-2,1,0)^T = (2,0,1)^T + (-1.6,0.8,0)^T = (0.4,0.8,1)^T$。为计算方便，取 $\beta_2 = 5\beta_2' = (2,4,5)^T$。单位化：$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T$，$\eta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$。

- 当 $\lambda=-8$ 时，解 $(-8I-A)X=0$：

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2.5\\0&-9&-9\\0&-8&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0.5\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$。单位化：$\eta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$。

3. **构造正交矩阵：** $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$。$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(1,1,-8)$。

(2)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$$

解： 1. **求特征值：** $|\lambda I-A|=(\lambda+3)^2(\lambda-6)$。特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-3$，$\lambda_3=6$。

2. **求特征向量并正交化：**

- $\lambda=-3$ 时，$(-3I-A)X=0\Rightarrow 2x_1+x_2+2x_3=0$。基础解系 $\alpha_1=(1,-2,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$。正交化：$\beta_1=(1,-2,0)^T$；$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-1)^T-\frac{1}{5}(1,-2,0)^T=(4/5,2/5,-1)^T$。取 $\beta_2=(4,2,-5)^T$。单位化：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^T,\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,-5)^T$。
- $\lambda=6$ 时，特征向量 $\alpha_3=(2,1,2)^T$。单位化：$\eta_3=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$。

3. **构造正交矩阵：** $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$。$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(-3,-3,6)$。

(3)

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

解： 1. **求特征值：**

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1)$$

特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=-1$。

2. **求特征向量并单位化：**

- $\lambda=2$：解 $(2I-A)X=0 \implies \begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}X=0$。基础解系 $\alpha_1=(2,1,-2)^T$。

  单位化：$\eta_1=\frac{1}{3}(2,1,-2)^T$。

- $\lambda=5$：解 $(5I-A)X=0 \implies \begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}X=0$。基础解系 $\alpha_2=(2,-2,1)^T$。单位化：$\eta_2=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$。

- $\lambda=-1$：解 $(-I-A)X=0 \implies \begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}X=0$。基础解系 $\alpha_3=(1,2,2)^T$。

  单位化：$\eta_3=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$。

3. **构造正交矩阵：** $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{pmatrix}$。$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(2,5,-1)$。

(4)

$$A=\begin{pmatrix}4&1&0&-1\\1&4&-1&0\\0&-1&4&1\\-1&0&1&4\end{pmatrix}$$

解： 1. **求特征值：**

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&0&1\\-1&\lambda-4&1&0\\0&1&\lambda-4&-1\\1&0&-1&\lambda-4\end{vmatrix}$$

利用行变换化简，最终得到特征多项式为 $(\lambda-4)^2(\lambda-2)(\lambda-6)$。特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4$ (二重)，$\lambda_3=2$，$\lambda_4=6$。

2. **求特征向量并正交化单位化：**

- 当 $\lambda = 4$ 时，解 $(4I - A)X = 0$：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{化简}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $x_1 = x_3, x_2 = x_4$。基础解系为 $\alpha_1 = (1,0,1,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0,1)^T$。这两个向量已经正交，只需单位化：

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda = 2$ 时，解 $(2I - A)X = 0$：解得基础解系 $\alpha_3 = (1,-1,-1,1)^T$。单位化：

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda = 6$ 时，解 $(6I - A)X = 0$：解得基础解系 $\alpha_4 = (1,1,-1,-1)^T$。单位化：

$$\eta_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. **构造正交矩阵：** 令 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$，即：

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

此时 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(4,4,2,6)$。

---

2. 证明：如果 n 级实对称矩阵 A, B 有相同的特征多项式，则 A 与 B 相似。

证： 根据实对称矩阵的基本定理，任何实对称矩阵都正交相似于一个对角矩阵。设 A, B 的特征多项式相同，记为 $f(\lambda)$。则 A 与 B 有完全相同的特征值（包括重数）。设这些特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。因为 A 是实对称矩阵，存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。因为 B 是实对称矩阵，存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}BQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。于是 $A \sim \Lambda$ 且 $B \sim \Lambda$。根据相似关系的传递性，有 $A \sim B$。

---

3. 证明：如果实矩阵 A 正交相似于对角矩阵，则 A 一定是对称矩阵。

证： 设 A 正交相似于对角矩阵 D，即存在正交矩阵 T（满足 $T^{-1} = T^T$）使得

$$T^{-1}AT = D \implies A = TDT^{-1} = TDT^T$$

我们计算 A 的转置：

$$A^T = (TDT^T)^T = (T^T)^T D^T T^T = TD^T T^T$$

因为 D 是对角矩阵，所以 $D^T = D$。故

$$A^T = TDT^T = A$$

所以 A 是对称矩阵。

***4. 证明：如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，则 A 一定正交相似于上三角矩阵。**

证： 我们使用数学归纳法证明。当 $n = 1$ 时，显然成立。假设对 $n-1$ 级矩阵结论成立。设 A 是 n 级实矩阵，其特征值全为实数。设 λ_1 是 A 的一个实特征值，ξ_1 是对应的单位实特征向量。将 ξ_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$。令正交矩阵 $T_1 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$。则 $T_1^{-1}AT_1 = T_1^T AT_1$。考察第一列：$T_1^T A\xi_1 = T_1^T(\lambda_1\xi_1) = \lambda_1 T_1^T \xi_1 = \lambda_1 e_1 = (\lambda_1, 0, \cdots, 0)^T$。故

$$T_1^T AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 $n-1$ 级实矩阵。由于 A 的特征多项式分解为实一次因式，且特征多项式具有分块性质 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) f_{A_1}(\lambda)$，所以 A_1 的特征值也全是实数。根据归纳假设，存在 $n-1$ 级正交矩阵 Q_1 使得 $Q_1^T A_1 Q_1$ 为上三角矩阵。令 $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$，$T_2$ 也是正交矩阵。令 $T = T_1 T_2$，则 T 为正交矩阵，且

$$T^T AT = T_2^T (T_1^T AT_1) T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q_1^T A_1 Q_1 \end{pmatrix}$$

结果为上三角矩阵。

***5. 证明：如果 A 是实对称矩阵，并且 A 是幂零矩阵，则 $A=0$。**

证： 因为 A 是幂零矩阵，根据习题 5.3 第 4 题结论，A 的特征值全为 0。因为 A 是实对称矩阵，根据实对称矩阵基本定理，它可对角化。即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 为对角矩阵，对角元为 A 的特征值。因为特征值全为 0，所以 $\Lambda=\mathrm{diag}(0,\cdots,0)=0$。于是

$$P^{-1}AP=0 \implies A=P\cdot 0\cdot P^{-1}=0$$

得证。