《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第四章　矩阵的运算

习题 4.1　矩阵的运算

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $A + B$。

解：

$$A + B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

---

2. 设

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $(r - \lambda)I + \lambda J$。

解： $(r - \lambda)I$ 是对角线元素为 $r - \lambda$ 的对角矩阵。λJ 是所有元素均为 λ 的矩阵。相加后，主对角线元素为 $(r - \lambda) + \lambda = r$，非对角线元素为 $0 + \lambda = \lambda$。

$$(r - \lambda)I + \lambda J = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{pmatrix}$$

---

3. 设 I 是 n 级单位矩阵，J 是元素全为 1 的 n 级矩阵。设

$$M = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{pmatrix}_{n\times n},$$

把 M 表示成 $xI + yJ$ 的形式，其中 x, y 是待定系数。

解： 设 $M = xI + yJ$。对角线元素满足：$x \cdot 1 + y \cdot 1 = k$。非对角线元素满足：$x \cdot 0 + y \cdot 1 = \lambda$。解得：$y = \lambda, \quad x = k - \lambda$。故：

$$M = (k - \lambda)I + \lambda J$$

---

4. 计算

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} 7(1) + (-1)(-5) & 7(4) + (-1)(2) \\ -2(1) + 5(-5) & -2(4) + 5(2) \\ 3(1) + (-4)(-5) & 3(4) + (-4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $(4, 7, 9) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **解：** $= 4 \times 1 + 7 \times 1 + 9 \times 1 = 20$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (4, 7, 9)$ **解：** $= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$

(7) $(1,1,1) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ **解：** $= (a_1+b_1+c_1,\ a_2+b_2+c_2,\ a_3+b_3+c_3)$

(8) $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} d_1a_1 & d_1a_2 & d_1a_3 \\ d_2b_1 & d_2b_2 & d_2b_3 \\ d_3c_1 & d_3c_2 & d_3c_3 \end{pmatrix}$ （左乘对角阵等于倍乘行）

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} d_1a_1 & d_2a_2 & d_3a_3 \\ d_1b_1 & d_2b_2 & d_3b_3 \\ d_1c_1 & d_2c_2 & d_3c_3 \end{pmatrix}$ （右乘对角阵等于倍乘列）

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ **解：** $= \begin{pmatrix} 7 & 8+20 & 9+22+36 \\ 0 & 40 & 44+60 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 28 & 67 \\ 0 & 40 & 104 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ **解：** 左乘初等矩阵 $E_{21}(k)$，相当于将第 1 行的 k 倍加到第 2 行上。

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 & b_4+ka_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

(12) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **解：** 右乘初等矩阵 $E_{21}(k)$，相当于将第 2 列的 k 倍加

到第 1 列上。

$$=\begin{pmatrix} a_1+ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ **解：** 左乘初等矩阵 E_{12}，相当于交换第 1 行和第 2 行。

$$=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

(14) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **解：** 右乘初等矩阵 E_{12}，相当于交换第 1 列和第 2 列。

$$=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}$$

(15) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **解：** $=\begin{pmatrix} 3-4 & -3+8 \\ 4-5 & -4+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

---

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$**，求** $AB, BA, AB-BA$。

解：

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

6. 计算

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

解： 设中间矩阵为 A。先计算左乘：

$$(x, y, 1)A = (a_{11}x + a_{12}y + a_1, \quad a_{12}x + a_{22}y + a_2, \quad a_1x + a_2y + a_0)$$

再右乘列向量：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a_{11}x + a_{12}y + a_1)x + (a_{12}x + a_{22}y + a_2)y + (a_1x + a_2y + a_0)1 \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_1x + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_2y + a_1x + a_2y + a_0 \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \end{aligned}$$

---

7. 计算

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ **解：** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2$ **解：** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ **解：** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (幂等矩阵)

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ **解：** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。
归纳可得：$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ **解：** 设矩阵为 A。$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$。
故当 $n = 1$ 时为 A；当 $n = 2$ 时为 A^2；当 $n \geq 3$ 时为 O。

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ **解：** 设 $A = \lambda I + B$，其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。由于 I 与 B 可交换，

利用二项式定理：$A^n = (\lambda I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} B^k$。由上一小题知 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$B^k = O$ $(k \geq 3)$。故 $A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} B^2$。

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2$ **解：**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$ **解：**设矩阵为 A。$a_{11} = 1+1+1+1 = 4$。$a_{12} = 1+1-1-1 = 0$。

同理 $a_{13} = 0, a_{14} = 0$。实际上，计算可得对角线元素均为 4，非对角线元素均为 0。故

结果为 $4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。

---

8. 如果 n 级矩阵 B 满足 $B^3 = 0$，求 $(I - B)(I + B + B^2)$。

解： 展开表达式：

$(I-B)(I+B+B^2) = I(I+B+B^2) - B(I+B+B^2) = I + B + B^2 - B - B^2 - B^3 = I - B^3$

已知 $B^3 = 0$，故原式 $= I - 0 = I$。

---

9. 证明：若 B_1, B_2 都与 A 可交换，则 $B_1 + B_2, B_1B_2$ 也都与 A 可交换。

证： 已知 $B_1A = AB_1$，$B_2A = AB_2$。(1) 考察 $B_1 + B_2$：

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_2 = A(B_1 + B_2)$$

故 $B_1 + B_2$ 与 A 可交换。

(2) 考察 B_1B_2：

$$(B_1B_2)A = B_1(B_2A) = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = (AB_1)B_2 = A(B_1B_2)$$

故 B_1B_2 与 A 可交换。

---

10. 证明：如果 $A = \frac{1}{2}(B + I)$，则 $A^2 = A$ 当且仅当 $B^2 = I$。

证： 由 $A = \frac{1}{2}(B + I)$ 可得 $2A = B + I$，即 $B = 2A - I$。我们先计算 B^2：

$$B^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2AI - 2IA + I^2 = 4A^2 - 4A + I$$

必要性 ($\Rightarrow$)：若 $A^2 = A$，则

$$B^2 = 4A - 4A + I = I$$

充分性 ($\Leftarrow$)：若 $B^2 = I$，则

$$4A^2 - 4A + I = I \implies 4A^2 - 4A = 0 \implies 4(A^2 - A) = 0 \implies A^2 = A$$

综上，$A^2 = A \iff B^2 = I$。

***11. 设 A 是数域 K 上 $s \times n$ 矩阵。证明：如果对于 K^n 中任一列向量 η，都有 $A\eta = 0$，则 $A = 0$。**

证： 根据题设条件，对于 K^n 中任一列向量 η，都有 $A\eta = 0$。这意味着 K^n 中的每一个向量都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解。因此，齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 W 就是整个 n 维向量空间 K^n，即 $W = K^n$。从而解空间的维数为：

$$\dim W = \dim(K^n) = n$$

另一方面，根据齐次线性方程组解空间的维数公式（基础解系所含向量个数公式）：

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(A)$$

将 $\dim W = n$ 代入上式，得：

$$n = n - \operatorname{rank}(A) \implies \operatorname{rank}(A) = 0$$

因为只有零矩阵的秩才为 0，所以 $A = 0$。

习题 4.2　特殊矩阵

1. 证明：与主对角元两两不同的对角矩阵可交换的矩阵也是对角矩阵。

证： 设 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是对角矩阵，且 $d_i \neq d_j$ (当 $i \neq j$)。设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 D 可交换，即 $AD = DA$。考察 AD 与 DA 的元素：$(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}d_j = a_{ij}d_j$；$(DA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}d_i a_{kj} = d_i a_{ij}$。由 $AD = DA$ 得：

$$a_{ij}d_j = d_i a_{ij} \implies a_{ij}(d_i - d_j) = 0$$

当 $i \neq j$ 时，由于 $d_i \neq d_j$，则 $d_i - d_j \neq 0$，故必有 $a_{ij} = 0$。这意味着 A 的所有非对角元素均为 0，即 A 是对角矩阵。

***2. 证明：两个 n 级上三角矩阵的乘积仍是 n 级上三角矩阵，并且乘积矩阵的主对角元等于因子矩阵的相应主对角元的乘积。**

证： 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 均为 n 级上三角矩阵，即当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$。设乘积 $C = AB = (c_{ij})$，其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$。

(1) 证明 C 是上三角矩阵： 当 $i > j$ 时，考察求和项 $a_{ik}b_{kj}$：

- 若 $k < i$，则 $a_{ik} = 0$；
- 若 $k \geq i$，因 $i > j$，故 $k > j$，此时 $b_{kj} = 0$。

综上，对任意 k，都有 $a_{ik}b_{kj} = 0$。所以当 $i > j$ 时，$c_{ij} = 0$。即 C 也是上三角矩阵。

(2) 证明对角元性质： 当 $i = j$ 时，

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

同理，当 $k < i$ 时，$a_{ik} = 0$；当 $k > i$ 时，$b_{ki} = 0$。求和式中仅剩 $k = i$ 这一项非零。故 $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$。

***3. 证明：与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵。**

证： 设矩阵 A 与所有 n 级矩阵可交换。取基本单位矩阵 E_{ij}（第 i 行第 j 列元素为 1，其余为 0）。由 $AE_{ij} = E_{ij}A$ 对所有 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。计算乘积元素的通式：$(AE_{ij})_{sk} = \sum_p a_{sp}(\delta_{pi}\delta_{jk}) = a_{si}\delta_{jk}$。$(E_{ij}A)_{sk} = \sum_p(\delta_{si}\delta_{pj})a_{pk} = \delta_{si}a_{jk}$。令 $s = i, k = j$,

得 $a_{ii}\cdot 1 = 1\cdot a_{jj} \implies a_{ii} = a_{jj}$。即 A 的主对角线元素全部相等，设为 λ。令 $s\neq i, k=j$，得 $a_{si}\cdot 1 = 0\cdot a_{jj} \implies a_{si}=0$。即 A 的所有非对角线元素均为 0。综上，$A=\mathrm{diag}(\lambda,\lambda,\cdots,\lambda)=\lambda I$，即 A 为数量矩阵。

---

4. 证明：对于任一 $s\times n$ 矩阵 A，都有 $AA', A'A$ 是对称矩阵。

证： 利用转置运算的性质 $(XY)'=Y'X'$ 和 $(X')'=X$。

1. 对于 AA'：
$$(AA')'=(A')'A'=AA'$$
故 AA' 是对称矩阵。

2. 对于 $A'A$：
$$(A'A)'=A'(A')'=A'A$$
故 $A'A$ 是对称矩阵。

---

5. 证明：两个 n 级对称矩阵的和仍是对称矩阵；一个对称矩阵的 k 倍仍是对称矩阵。

证： 设 A,B 为 n 级对称矩阵，即 $A'=A, B'=B$。

1. $(A+B)'=A'+B'=A+B$，所以 $A+B$ 是对称矩阵。
2. $(kA)'=kA'=kA$，所以 kA 是对称矩阵。

---

6. 证明：两个 n 级对称矩阵的乘积仍为对称矩阵当且仅当它们可交换。

证： 设 A,B 为对称矩阵，即 $A'=A, B'=B$。乘积 AB 为对称矩阵的充要条件是 $(AB)'=AB$。又因为 $(AB)'=B'A'=BA$。所以充要条件变为 $BA=AB$，即 A,B 可交换。

---

7. 证明：对于任一 n 级矩阵 A，都有 $A+A'$ 是对称矩阵，$A-A'$ 是斜对称矩阵。

证：

1. $(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$。满足 $X'=X$，故 $A+A'$ 是对称矩阵。

2. $(A-A')' = A' - (A')' = A' - A = -(A-A')$。满足 $X' = -X$，故 $A - A'$ 是斜对称矩阵。

---

8. 证明：数域 K 上任一 n 级矩阵都可以表示成一个对称矩阵与一个斜对称矩阵之和，并且表法惟一。

证：(1) 存在性： 对任一矩阵 A，可恒等变形为:

$$A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$$

由第 7 题可知，$\frac{1}{2}(A+A')$ 是对称矩阵，$\frac{1}{2}(A-A')$ 是斜对称矩阵。令 $S = \frac{1}{2}(A+A'), K = \frac{1}{2}(A-A')$，则 $A = S + K$ 符合要求。

(2) 惟一性： 设 $A = S_1 + K_1$，其中 S_1 对称，K_1 斜对称。则 $A' = (S_1+K_1)' = S_1' + K_1' = S_1 - K_1$。联立求解:

$$\begin{cases} A = S_1 + K_1 \\ A' = S_1 - K_1 \end{cases} \implies S_1 = \frac{1}{2}(A+A'), \quad K_1 = \frac{1}{2}(A-A')$$

故表法惟一。

***9. 证明：如果 A 是实数域上的对称矩阵，并且 $A^2 = 0$，则 $A = 0$。**

证： A 是实对称矩阵，即 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $A^T = A$。已知 $A^2 = AA = 0$。考察 A^2 的主对角元:

$$(A^2)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}$$

因为 A 对称，所以 $a_{ki} = a_{ik}$。

$$(A^2)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

由 $A^2 = 0$ 可知 $(A^2)_{ii} = 0$，即 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$。因为 a_{ik} 都是实数，实数的平方和为 0 蕴含每个实数都为 0。即对于任意 i, k，都有 $a_{ik} = 0$。故 $A = 0$。

---

10. 证明：数域 K 上奇数级斜对称矩阵的行列式等于零。

证： 设 A 为 n 级斜对称矩阵，即 $A' = -A$，且 n 为奇数。利用行列式的性质:

$$|A| = |A'| = |-A| = |(-1)A| = (-1)^n|A|$$

因为 n 是奇数，所以 $(-1)^n = -1$。

$$|A| = -|A| \implies 2|A| = 0$$

在特征不为 2 的数域 K 上，可得 $|A| = 0$。

习题 4.3 矩阵乘积的秩与行列式

1. 证明：rank$(A+B) \le$ rank(A) + rank(B).

证： 设 A, B 为 $s \times n$ 矩阵。分别取 A 和 B 的列向量组的一个极大线性无关组：A 的列向量组的极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ $(r = \text{rank}(A))$；B 的列向量组的极大无关组为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ $(k = \text{rank}(B))$。对于矩阵 $A+B$ 的任意一个列向量 γ，它是 A 的对应列向量与 B 的对应列向量之和。因为 A 的列向量可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，B 的列向量可由 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 线性表出，所以 γ 可以由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_k$ 线性表出。这意味着 $A+B$ 的列向量组的秩不超过向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 的秩。而 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 含 $r+k$ 个向量，其秩不超过 $r+k$。故：

$$\text{rank}(A+B) \le r + k = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

***2. 一个矩阵称为行（列）满秩矩阵，如果它的行（列）向量组是线性无关的。证明：如果一个 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则有 $s \times r$ 的列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 的行满秩矩阵 C，使得 $A = BC$.**

证： 设 A 的秩为 r。取 A 的行向量组的一个极大线性无关组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$。令 C 为由这 r 个行向量组成的 $r \times n$ 矩阵：

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix}$$

由于 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 线性无关，故 C 的行秩为 r，即 C 是行满秩矩阵。因为 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 是极大线性无关组，A 的每一个行向量都可以由它们线性表出。设 A 的第 i 行向量 $\alpha_i = k_{i1}\gamma_1 + k_{i2}\gamma_2 + \cdots + k_{ir}\gamma_r \quad (i = 1, \cdots, s)$。写成矩阵形式即为：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}\gamma_1 + \cdots + k_{1r}\gamma_r \\ k_{21}\gamma_1 + \cdots + k_{2r}\gamma_r \\ \vdots \\ k_{s1}\gamma_1 + \cdots + k_{sr}\gamma_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix}$$

令 $B = (k_{ij})_{s \times r}$，则 $A = BC$。下面证明 B 是列满秩矩阵。根据矩阵秩的性质，$\text{rank}(A) \le \min(\text{rank}(B), \text{rank}(C))$。即 $r \le \text{rank}(B)$。又因为 B 只有 r 列，所以 $\text{rank}(B) \le r$。故 $\text{rank}(B) = r$，即 B 是列满秩矩阵。

---

3. 证明：设 A 是 n 级矩阵，则 $|AA'| = |A|^2$.

证： 根据本节定理 3（乘积矩阵的行列式等于行列式的乘积）：

$$|AA'| = |A| \cdot |A'|$$

又因为矩阵转置不改变行列式的值，即 $|A'| = |A|$。所以：

$$|AA'| = |A| \cdot |A| = |A|^2$$

---

4. 证明：设 A 是 n 级矩阵，如果 $AA' = I$，则 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$.

证： 由 $AA' = I$，两边取行列式。根据本节定理 3：

$$|AA'| = |I| \implies |A| \cdot |A'| = 1$$

因为 $|A'| = |A|$，所以：

$$|A|^2 = 1$$

解得 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$。

---

5. 证明：如果 A 是数域 K 上 n 级矩阵，且满足 $AA' = I$, $|A| = -1$，则 $|I + A| = 0$.

证： 利用恒等变形和转置性质：

$$\begin{aligned}
|I + A| &= |AA' + A| \quad (\text{因为} I = AA') \\
&= |A(A' + I)| \\
&= |A| \cdot |A' + I| \\
&= (-1) \cdot |(A + I)'| \quad (\text{因为}|A| = -1, \text{且}(A + I)' = A' + I' = A' + I) \\
&= -|A + I| \\
&= -|I + A|
\end{aligned}$$

即 $|I + A| = -|I + A|$，移项得 $2|I + A| = 0$。在特征不为 2 的数域上，得 $|I + A| = 0$。

---

6. 证明：如果 A 是数域 K 上 n 级矩阵，n 是奇数，且满足 $AA' = I$, $|A| = 1$，则 $|I - A| = 0$.

证：类似地进行恒等变形：

$$\begin{aligned}|I-A| &= |AA'-A| \\ &= |A(A'-I)| \\ &= |A|\cdot|A'-I| \\ &= 1\cdot|(A-I)'| \quad (\text{因为}|A|=1) \\ &= |A-I| \\ &= |-(I-A)| \quad (\text{提取公因子}-1) \\ &= (-1)^n|I-A|\end{aligned}$$

已知 n 是奇数，故 $(-1)^n=-1$。所以 $|I-A|=-|I-A|$，从而推得 $|I-A|=0$。

---

7. 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k,\ k=0,1,2,\cdots$**；设**

$$A=\begin{pmatrix}s_0 & s_1 & s_2\\ s_1 & s_2 & s_3\\ s_2 & s_3 & s_4\end{pmatrix},$$

证明：$|A|=\prod_{1\le j<i\le 3}(x_i-x_j)^2$**.**

证：根据提示，将矩阵 A 进行分解。注意到 s_k 是幂和的形式，构造范德蒙矩阵：

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}3 & x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 & x_1^4+x_2^4+x_3^4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

令 $V=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{pmatrix}$，则 $A=V\cdot V'$（V' 为 V 的转置）。取行列式：

$$|A|=|V\cdot V'|=|V|\cdot|V'|=|V|\cdot|V|=|V|^2$$

V 是 3 阶范德蒙行列式，其值为 $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$。所以：

$$|A|=[(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)]^2=\prod_{1\le j<i\le 3}(x_i-x_j)^2$$

***8. 形如**

$$A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_0&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&a_0\end{pmatrix}$$

的方阵 A 称为循环矩阵，求复数域上 4 级循环矩阵 A 的行列式。

解： 设 $i=\sqrt{-1}$。构造辅助矩阵 B（4 阶傅里叶矩阵的变体）：

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&i^2&i^3\\1&i^2&i^4&i^6\\1&i^3&i^6&i^9\end{pmatrix}$$

设多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$。计算乘积 AB。我们考察 A 乘以 B 的第 2 列 $\xi=(1,i,i^2,i^3)^T$：

$$A\xi=\begin{pmatrix}a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3\\a_3+a_0i+a_1i^2+a_2i^3\\a_2+a_3i+a_0i^2+a_1i^3\\a_1+a_2i+a_3i^2+a_0i^3\end{pmatrix}$$

利用 $i^4=1$，提取公因子：第 1 分量：$f(i)$；第 2 分量：$i(a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3)=if(i)$；第 3 分量：$i^2f(i)$；第 4 分量：$i^3f(i)$。故 $A\xi=f(i)\xi$。同理，对于 B 的第 k 列（对应 $1,i,i^2,i^3$ 中的第 $k-1$ 个幂次，记为 ϵ），有 $A\cdot\mathrm{Col}_k(B)=f(\epsilon)\cdot\mathrm{Col}_k(B)$。因此：

$$AB=B\begin{pmatrix}f(1)&0&0&0\\0&f(i)&0&0\\0&0&f(i^2)&0\\0&0&0&f(i^3)\end{pmatrix}$$

两边取行列式：

$$|A|\cdot|B|=|B|\cdot[f(1)f(i)f(-1)f(-i)]$$

B 是范德蒙矩阵（参数为互不相同的 $1,i,-1,-i$），故 $|B|\neq 0$。消去 $|B|$ 得：

$$|A|=f(1)f(i)f(-1)f(-i)$$

其中：$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3$；$f(-1)=(a_0+a_2)-(a_1+a_3)$；$f(i)f(-i)=[(a_0-a_2)+i(a_1-a_3)]\cdot[(a_0-a_2)-i(a_1-a_3)]=(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2$。故：

$$|A|=[(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2]\cdot[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]$$

习题 4.4 可逆矩阵

1. 数量矩阵 kI 何时可逆？何时不可逆？当 kI 可逆时，求它的逆矩阵。

解： 矩阵 A 可逆的充分必要条件是其行列式 $|A| \neq 0$。对于数量矩阵 kI（n 阶），其行列式 $|kI| = k^n$。

- 当 $k \neq 0$ 时，$|kI| \neq 0$，此时 kI 可逆。
- 当 $k = 0$ 时，$|kI| = 0$，此时 kI 不可逆。

当 $k \neq 0$ 时，$(kI)^{-1} = \frac{1}{k}I$。

---

2. 下列矩阵可逆吗？(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

解： (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 0 \times 0 = 0$，故不可逆。

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$，故不可逆。

---

3. 判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求它的逆矩阵：

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

解： $|A| = 5 \times 11 - 7 \times 8 = 55 - 56 = -1 \neq 0$，故可逆。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解： $|B| = 0 - 1 = -1 \neq 0$，故可逆。

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

4. 证明：如果矩阵 A 可逆，则 A^* 也可逆；并且求 $(A^*)^{-1}$。

证： 因为 A 可逆，所以 $|A| \neq 0$。根据伴随矩阵的性质，我们有公式 $AA^* = |A|I$。由此可得 $A^* = |A|A^{-1}$。因为 $|A| \neq 0$ 且 A^{-1} 可逆，所以 A^* 是可逆矩阵 A^{-1} 的非零常数倍，故 A^* 可逆。求逆：

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

---

5. 证明：如果 $A^3 = 0$，则 $I - A$ 可逆；并且求 $(I - A)^{-1}$。

证： 利用代数恒等式 $(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$ 的矩阵形式。计算：

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3$$

已知 $A^3 = 0$，故：

$$(I - A)(I + A + A^2) = I$$

根据逆矩阵的定义，$(I - A)$ 可逆，且其逆矩阵为：

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2$$

---

6. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $A^3 - 2A^2 + 3A - I = 0$，则 A 可逆；并且求 A^{-1}。

证： 由已知等式移项得：

$$A^3 - 2A^2 + 3A = I$$

提取公因子 A：

$$A(A^2 - 2A + 3I) = I$$

令 $B = A^2 - 2A + 3I$，则有 $AB = I$。由逆矩阵定义可知 A 可逆，且

$$A^{-1} = A^2 - 2A + 3I$$

---

7. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $2A^4 - 5A^2 + 4A + 2I = 0$，则 A 可逆；并且求 A^{-1}。

证： 将含有 I 的项移到等式一边，其余项移到另一边：

$$2A^4 - 5A^2 + 4A = -2I$$

$$A(2A^3 - 5A + 4I) = -2I$$

两边同时除以 -2：

$$A\left(-A^3 + \frac{5}{2}A - 2I\right) = I$$

因此 A 可逆，且

$$A^{-1} = -A^3 + \frac{5}{2}A - 2I$$

---

8. 证明：可逆的对称（斜对称）矩阵的逆矩阵仍是对称（斜对称）矩阵。

证： **(1) 对称矩阵：** 设 A 可逆且对称，即 $A^T = A$。我们要证明 $(A^{-1})^T = A^{-1}$。

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A)^{-1} = A^{-1}$$

故 A^{-1} 是对称矩阵。

(2) 斜对称矩阵： 设 A 可逆且斜对称，即 $A^T = -A$。我们要证明 $(A^{-1})^T = -(A^{-1})$。

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

故 A^{-1} 是斜对称矩阵。

---

9. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

解： 使用初等行变换 $(A, I) \to (I, A^{-1})$。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_1, R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \div 6} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+R_3, R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 13/6 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

故 $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 13 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

解： 经计算（过程略，方法同上），$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$。

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解： $|A| = -3$。$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 10 & -17 & -1 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -1/3 \\ -10/3 & 17/3 & 1/3 \\ 4/3 & -8/3 & -1/3 \end{pmatrix}$。

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解： 观察发现 $A^2 = 4I$（见习题 4.1 第 7 题 (8)）。故 $A \cdot (\frac{1}{4}A) = I$，即 $A^{-1} = \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

---

10. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

解: 设方程为 $AX = B$, 则 $X = A^{-1}B$。$|A| = 1(-4+1)-(-2)(8-3)+0 = -3+10 = 7$。计算 A^{-1} 得：$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$。

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+8+2 & -12+20-6 \\ 5+4+1 & -20+10-3 \\ 2+10+6 & -8+25-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{13}{7} \\ \frac{18}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

(2) $X\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

解： 设方程为 $XA = B$，则 $X = BA^{-1}$。$|A| = 1(2-1)-(-1)(4-2) = 1+2 = 3+2+2 = 7$。计算 A^{-1} 得：$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3-2 & 18+2 & 3-2 \\ -1-8+1 & -6+64-1 & -1+20+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{20}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{57}{7} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

解： 设方程为 $AXC = B$，其中 A 与第 (1) 题矩阵相同，C 与第 (2) 题矩阵相同。$X = A^{-1}BC^{-1}$。

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -15 & -10 & 9 \\ -25 & -5 & 8 \\ -17 & -9 & 20 \end{pmatrix}$$

$$X = YC^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -15 & -10 & 9 \\ -25 & -5 & 8 \\ -17 & -9 & 20 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -15+20+9 & -90-160-9 & -15-50+9 \\ -25+10+8 & -150-80-8 & -25-25+8 \\ -17+18+20 & -102-144-20 & -17-45+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & -259 & -56 \\ -7 & -238 & -42 \\ 21 & -266 & -42 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{37}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{34}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

---

11. 证明：可逆的上（下）三角矩阵的逆矩阵仍是上（下）三角矩阵。

证：以**上三角矩阵**为例进行证明（下三角矩阵同理）。

设 A 是一个 n 阶可逆上三角矩阵。由于 A 可逆，其行列式 $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$，故主对角线上的元素 $a_{ii} \neq 0$。

我们通过初等行变换将 A 化为单位矩阵 I，这一过程等价于用一系列初等矩阵左乘 A。具体步骤如下：

1. **步骤一：将主对角线元素化为 1**。对 A 的第 i 行乘以 $1/a_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$。对应的初等矩阵 D_i 是对角矩阵（对角线上第 i 个元素为 $1/a_{ii}$，其余为 1）。显然，对角矩阵也是上三角矩阵。

2. **步骤二：将主对角线上方的元素化为 0**。从最后一行开始往上进行消元。要消去第 i 行第 j 列的元素（其中 $i < j$），需要执行行变换：$R_i - kR_j$。对应的初等矩阵 $E_{ij}(-k)$ 的特点是：主对角线元素为 1，第 i 行第 j 列元素为 $-k$，其余元素为 0。因为 $i < j$，非零元素 $-k$ 位于主对角线上方，所以 $E_{ij}(-k)$ 是上三角矩阵。

经过上述有限次变换，我们将 A 变成了 I。设这些初等矩阵依次为 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，则有：

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I$$

根据逆矩阵的定义：

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1$$

由：**有限个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵**。因为 $P_1, \ldots, P_s$ 均为上三角矩阵，所以它们的乘积 A^{-1} 必定也是上三角矩阵。

同理可证，可逆下三角矩阵的逆矩阵仍是下三角矩阵。

***12. 证明：如果 $A^k=0$，则 $I-A$ 可逆；并且求 $(I-A)^{-1}$。**

证： $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I-A^k$。因 $A^k=0$，故乘积为 I。所以 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

习题 4.5 矩阵的分块

1. 证明：设 A, B 分别是 $s\times n, n\times m$ 矩阵。如果 $AB=0$，则 $\mathbf{rank}(A)+\mathbf{rank}(B)\le n$。

证：若 $A=0$，则 $\text{rank}(A)=0$。此时 $\text{rank}(B)\le n$（B 有 n 行），不等式 $0+\text{rank}(B)\le n$ 显然成立。下设 $A\neq 0$，令 $\text{rank}(A)=r$。由 $AB=0$ 知，若记 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，则有

$$A\beta_j=0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

这说明 B 的每一个列向量 β_j 都是 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解。即 B 的列向量组可以由 $AX=0$ 的一个基础解系线性表出。已知 $AX=0$ 的基础解系包含 $n-\text{rank}(A)=n-r$ 个解向量，记为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$。由于 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 均可由 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出，故 B 的列秩（即 $\text{rank}(B)$）不超过基础解系中向量的个数。即

$$\text{rank}(B)\le n-r=n-\text{rank}(A)$$

移项即得 $\text{rank}(A)+\text{rank}(B)\le n$。

---

2. 设 A 是 n 级矩阵，且 $A\neq 0$。证明：存在一个 $n\times m$ 非零矩阵 B 使得 $AB=0$ 的充分必要条件是 $|A|=0$。

证： $AB=0$ 等价于齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解。

必要性：若存在非零矩阵 B 使得 $AB=0$，则 B 至少有一列 $\beta_j\neq 0$ 满足 $A\beta_j=0$。这意味着方程组 $AX=0$ 存在非零解。由 Cramer 法则推论，系数行列式必为 0，即 $|A|=0$。

充分性：若 $|A|=0$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 必有非零解，设其为一个非零列向量 ξ。取 $n\times m$ 矩阵 $B=(\xi,0,\cdots,0)$，显然 $B\neq 0$。此时 $AB=A(\xi,0,\cdots,0)=(A\xi,0,\cdots,0)=(0,0,\cdots,0)=0$。故存在满足条件的矩阵 B。

***3. (1) 设 B 为 n 级矩阵，C 为 $n\times m$ 行满秩矩阵。如果 $BC=0$，则 $B=0$；**
(2) 如果 $BC=C$，则 $B=I$。

证： (1) 对 $BC=0$ 两边取转置，得 $C'B'=0$。由于 C 是 $n\times m$ 矩阵且行满秩，即 $\text{rank}(C)=n$，故 C' 是 $m\times n$ 矩阵且列满秩（$\text{rank}(C')=n$）。这意味着 n 元齐次线性方程组 $C'X=0$ 只有零解。在式子 $C'B'=0$ 中，将 B' 视为 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，则 $C'\gamma_i=0$。由 $C'X=0$ 只有零解可知，$\gamma_i=0$ 对所有 i 成立。故 $B'=0$，从而 $B=0$。

(2) 由 $BC=C$ 移项得 $BC-C=0$，即 $(B-I)C=0$。利用第 (1) 小题的结论，因为 C 是行满秩矩阵，故 $B-I=0$，即 $B=I$。

***4. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $A^2=I$，则 $\mathbf{rank}(I+A)+\mathbf{rank}(I-A)=n$。**

证： 由 $A^2=I$ 可得 $I-A^2=0$，即 $(I+A)(I-A)=0$。根据第 1 题的结论，有：

$$\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)\leq n \quad (*)$$

又因为 $(I+A)+(I-A)=2I$。根据秩的性质 $\operatorname{rank}(X+Y)\leq\operatorname{rank}(X)+\operatorname{rank}(Y)$，有：

$$\operatorname{rank}(2I)\leq\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)$$

即 $n\leq\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)\quad (**)$。结合 (*) 和 (**)，即得 $\operatorname{rank}(I+A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$。

***5. 证明：如果 n 级矩阵 A 满足 $A^2=A$，则 $\mathbf{rank}(A)+\mathbf{rank}(I-A)=n$。**

证： 证法与第 4 题类似。由 $A^2=A$ 可得 $A-A^2=0$，即 $A(I-A)=0$。根据第 1 题的结论，有：

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)\leq n$$

另一方面，考查恒等式 $A+(I-A)=I$。根据秩的性质，有：

$$\operatorname{rank}(I)\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)$$

即 $n\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)$。综上，$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$。

---

6. 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，β 是 $\mathbb{R}^s$ 的任意一个列向量。证明：n 元线性方程组 $A'AX=A'\beta$ 一定有解。

证： 根据线性方程组有解的判别定理，只需证明系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即证明：

$$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A'A,A'\beta)$$

利用矩阵乘法的秩性质，考察增广矩阵 $(A'A,A'\beta)=A'(A,\beta)$。显然有：

$$\operatorname{rank}[A'(A,\beta)]\leq\operatorname{rank}(A')$$

对于实矩阵，我们由 $\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')$。因此：

$$\operatorname{rank}(A'A,A'\beta)\leq\operatorname{rank}(A')=\operatorname{rank}(A'A)$$

另一方面，增广矩阵的秩显然不小于系数矩阵的秩，即 $\mathrm{rank}(A'A, A'\beta) \geq \mathrm{rank}(A'A)$。故 $\mathrm{rank}(A'A) = \mathrm{rank}(A'A, A'\beta)$，方程组一定有解。

---

7. 设 A 的行向量组的极大线性无关组含 1 个向量。证明：(1) A 可表示为列向量与行向量之积；(2) $A^2 = kA$。

证： (1) 题设条件即 $\mathrm{rank}(A) = 1$。因此 A 的列向量组中只有一个线性无关，其他列均与其成比例。设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，不妨设 $\alpha_1 \neq 0$。则存在常数 k_j 使得 $\alpha_j = k_j\alpha_1$。于是

$$A = (\alpha_1, k_2\alpha_1, \cdots, k_n\alpha_1) = \alpha_1(1, k_2, \cdots, k_n)$$

令 $\alpha = \alpha_1$（列向量），$\beta = (1, k_2, \cdots, k_n)'$（列向量），则 $A = \alpha\beta'$。

(2) 利用分块矩阵乘法：

$$A^2 = (\alpha\beta')(\alpha\beta') = \alpha(\beta'\alpha)\beta'$$

注意 $\beta'\alpha$ 是一个 1×1 的矩阵，即一个数，设为 $k = \beta'\alpha$。所以 $A^2 = \alpha k\beta' = k(\alpha\beta') = kA$。

---

8. 设 A 是 n 级矩阵，证明：$|A^*| = |A|^{n-1}$。

证： 利用公式 $AA^* = |A|I$。两边取行列式：

$$|A||A^*| = ||A|I| = |A|^n$$

(1) 若 $|A| \neq 0$，两边消去 $|A|$ 即得 $|A^*| = |A|^{n-1}$。(2) 若 $|A| = 0$，则 $AA^* = 0$。由第 1 题结论，$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A^*) \leq n$。因为 $|A| = 0$，所以 $\mathrm{rank}(A) < n$。

- 若 $A = 0$，则 $A^* = 0$，结论 $0 = 0$ 成立。
- 若 $A \neq 0$ 且 $|A| = 0$，则 $1 \leq \mathrm{rank}(A) < n$。此时 $\mathrm{rank}(A^*) \leq n - \mathrm{rank}(A) \leq n - 1$。因为 $n \geq 2$，所以 $\mathrm{rank}(A^*) < n$，这意味着 A^* 不可逆，即 $|A^*| = 0$。此时等式左边为 0，右边 $0^{n-1} = 0$，结论成立。

---

9. 设 $\mathrm{rank}(A) = n$，则 A 可逆，A^* 也可逆。若 $\mathrm{rank}(A) = n-1$，证明 $\mathrm{rank}(A^*) = 1$；若 $\mathrm{rank}(A) < n-1$，证明 $\mathrm{rank}(A^*) = 0$。

证： (1) 若 $\mathrm{rank}(A) = n$，则 $|A| \neq 0$，由题 8 知 $|A^*| \neq 0$，故 $\mathrm{rank}(A^*) = n$。(2) 若 $\mathrm{rank}(A) = n-1$，则 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，即 A^* 中至少有一个元素不为 0，

故 $\text{rank}(A^*) \geq 1$。又因 $|A| = 0$, 有 $AA^* = 0$。由第 1 题结论: $\text{rank}(A)+\text{rank}(A^*) \leq n$。代入得 $n-1+\text{rank}(A^*) \leq n \implies \text{rank}(A^*) \leq 1$。综上, $\text{rank}(A^*) = 1$。(3) 若 $\text{rank}(A) < n-1$, 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式全为 0。A^* 的元素由这些子式（代数余子式）组成，故 A^* 为零矩阵。即 $\text{rank}(A^*) = 0$。

---

10. 证明：分块对角矩阵 $A = \textbf{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$ 可逆的充分必要条件是它的主对角线上每个子矩阵 A_i 可逆，并且当 A 可逆时，有 $A^{-1} = \textbf{diag}\{A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_s^{-1}\}$。

证: 对于分块对角矩阵, 其行列式 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$。$A$ 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff |A_i| \neq 0\ (\forall i) \iff A_i$ 全部可逆。当 A_i 可逆时，直接验证:

$$\text{diag}\{A_1, \ldots, A_s\} \cdot \text{diag}\{A_1^{-1}, \ldots, A_s^{-1}\} = \text{diag}\{A_1A_1^{-1}, \ldots, A_sA_s^{-1}\} = \text{diag}\{I, \ldots, I\} = I$$

故公式成立。

---

11. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 A_{11}, A_{22} 分别是 r 级、s 级方阵。证明：A 可逆当且仅当 A_{11} 与 A_{22} 都可逆，并且当 A 可逆时，有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

证: $|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}|$。$A$ 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff |A_{11}| \neq 0$ 且 $|A_{22}| \neq 0 \iff A_{11}, A_{22}$ 都可逆。验证给出的逆矩阵公式:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} + 0 & A_{11}(-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}) + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

得证。

---

12. 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}$，其中 B_1, B_2 分别是 r 级、s 级方阵，证明：B 可逆当且仅当 B_1, B_2 都可逆，并且当 B 可逆时，有

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

证： 利用行列式（需交换行或列，涉及到符号）：$|B| = (-1)^{rs}|B_1||B_2|$。故 B 可逆 $\iff B_1, B_2$ 可逆。验证逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2B_2^{-1} \end{pmatrix} = I$$

得证。

***13. 设 A, B 分别是 $s \times n, n \times s$ 矩阵。证明：** $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_n - BA|$。

证： 构造分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix}$。对 M 进行分块行变换：将第 2 行块左乘 $-B$ 加到第 1 行块上。

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - BA & 0 \\ A & I_s \end{pmatrix}$$

取行列式，左边为 $1 \cdot |M|$，右边为 $|I_n - BA| \cdot |I_s| = |I_n - BA|$。故 $|M| = |I_n - BA|$。(注：若对列进行变换，可得 $|M| = |I_s - AB|$，从而证明第 14 题结论)。

***14. 利用本节例 3 的结论和第 13 题的结论，证明：** $|I_s - AB| = |I_n - BA|$。

证： 由第 13 题知 $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_n - BA|$。另一方面，对矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix}$ 进行分块高斯消元，将第 1 行块左乘 $-A$ 加到第 2 行块：

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s - AB \end{pmatrix}$$

两边取行列式：左边 $= 1 \cdot \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix}$；右边 $= |I_n| \cdot |I_s - AB| = |I_s - AB|$。综上所述，

$$|I_n - BA| = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_s - AB|$$

命题得证。

习题 4.6 正交矩阵

1. 判断下列矩阵是否是正交矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

解： 正交矩阵的定义是 $A^TA = I$。

(1)-(7) 均为正交矩阵。可以通过验证列向量的模是否为 1 且两两正交来判断。例如对于 (1)：$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$，$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$，且点积 $\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$。(1), (2), (5) 为旋转矩阵；(3), (4), (6), (7) 为反射矩阵。

(8) 不是正交矩阵。虽然列向量正交（$1\times 1 + 1\times(-1) = 0$），但列向量没有单位化（模长为 $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \neq 1$）。

---

2. 求第 1 题中各个矩阵的行列式。

解：

(1) $|A| = \frac{3}{4} - (-\frac{1}{4}) = 1.$

(2) $|A| = \frac{2}{4} - (-\frac{2}{4}) = 1.$

(3) $|A| = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$

(4) $|A| = -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} = -1.$

(5) $|A| = \frac{1}{4} - (-\frac{3}{4}) = 1.$

(6) $|A| = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$

(7) $|A| = -1 - 0 = -1.$

(8) $|A| = -1 - 1 = -2.$

(注：正交矩阵的行列式必为 1 或 -1)。

---

3. 证明：如果 A 是实数域上 n 级对称矩阵，T 是 n 级正交矩阵，则 $T^{-1}AT$ 是对称矩阵。

证：设 $B = T^{-1}AT$。因为 T 是正交矩阵，所以 $T^{-1} = T^T$。故 $B = T^TAT$。取转置：

$$B^T = (T^TAT)^T = T^TA^T(T^T)^T = T^TA^TT$$

因为 A 是对称矩阵，所以 $A^T = A$。代入得 $B^T = T^TAT = B$。所以 $B = T^{-1}AT$ 是对称矩阵。

***4. 证明：实数域上的 n 级矩阵 A 如果具有下列三个性质中的任意两个性质，则必有第三个性质：正交矩阵，对称矩阵，对合矩阵（即 $A^2 = I$）。**

证：

1. **已知正交 ($A^TA = I$) 且对称 ($A^T = A$) $\implies$ 对合**：

$$A^2 = A \cdot A = A^TA = I$$

2. **已知正交 ($A^TA = I$) 且对合 ($A^2 = I$) $\implies$ 对称**：由 $A^2 = I$ 得 $A = A^{-1}$。由 A 正交得 $A^{-1} = A^T$。所以 $A = A^T$，即 A 是对称矩阵。

3. **已知对称** ($A^T = A$) **且对合** ($A^2 = I$) $\implies$ **正交**:

$$A^T A = A \cdot A = A^2 = I$$

所以 A 是正交矩阵。

***5. 证明：如果正交矩阵 A 是上三角矩阵，则 A 一定是对角矩阵，并且其主对角元是 1 或 -1。**

证： 设 $A = (a_{ij})$ 为上三角矩阵，即当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$。因为 A 是正交矩阵，所以 $A^T A = I$。考察 A 的第一列 $\alpha_1 = (a_{11}, 0, \cdots, 0)^T$。由于列向量单位化，有 $\|\alpha_1\|^2 = a_{11}^2 = 1$，故 $a_{11} = \pm 1$。再利用 A 的行向量也是标准正交组。考察第一行 $\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$。$\|\beta_1\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 1$。因为已证 $a_{11}^2 = 1$，所以必须有 $a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 0$。对于实矩阵，这意味着 $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$。以此类推，考察第二列，利用列模长为 1 可得 $a_{22}^2 = 1$，再利用第二行模长为 1 可得该行非对角元为 0。归纳可知，非对角元全为 0，且对角元平方为 1。故 A 是对角矩阵，且对角元为 1 或 -1。

---

6. 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中，计算 (α, β)：(1) $\alpha = (-1, 0, 3, -5), \beta = (4, -2.0, 1)$；**(2)** $\alpha = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -1), \beta = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2, \sqrt{3}, \frac{2}{3})$。

解：(1) $(\alpha, \beta) = (-1) \times 4 + 0 \times (-2) + 3 \times 0 + (-5) \times 1 = -4 + 0 + 0 - 5 = -9$。

(2)

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)(-2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}) + (-1)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = 0\end{aligned}$$

---

7. 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中，把下列向量单位化：(1) $\alpha = (3, 0, -1, 4)$；**(2)** $\alpha = (5, 1, -2, 0)$。

解：(1) $|\alpha| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 1 + 16} = \sqrt{26}$。单位化向量 $\alpha^0 = \frac{1}{\sqrt{26}}(3, 0, -1, 4)$。

(2) $|\alpha| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 1 + 4 + 0} = \sqrt{30}$。单位化向量 $\alpha^0 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5, 1, -2, 0)$。

---

8. 证明：在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，如果 α 与 β 正交，则对任意实数 k, l，有 $k\alpha$ 与 $l\beta$ 也正交。

证： 已知 $(\alpha, \beta) = 0$。根据内积的齐次性：

$$(k\alpha, l\beta) = k(\alpha, l\beta) = kl(\alpha, \beta)$$

由于 $(\alpha, \beta) = 0$，故 $(k\alpha, l\beta) = kl \cdot 0 = 0$。所以 $k\alpha$ 与 $l\beta$ 正交。

---

9. 证明：在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，如果 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都正交，则 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任一线性组合也正交。

证： 设线性组合为 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$。计算内积：

$$(\beta, \gamma) = \left(\beta, \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right)$$

利用内积的线性性质：

$$= \sum_{i=1}^{s} k_i(\beta, \alpha_i)$$

已知 $(\beta, \alpha_i) = 0$ 对所有 i 成立，故

$$= \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot 0 = 0$$

即 β 与该线性组合正交。

---

10. 证明：在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，如果 α 与任意向量都正交，则 $\alpha = 0$。

证： 因为 α 与任意向量正交，故 α 与其自身正交。即 $(\alpha, \alpha) = 0$。根据内积的正定性，$(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$。证毕。

---

11. 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中，设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，求与 α_1, α_2 等价的正交单位向量组。

解： 利用施密特正交化过程。1. 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,-2,0)^T$。

2. $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。计算内积：$(\alpha_2,\beta_1)=1(1)+0(-2)+(-1)(0)=1$。$(\beta_1,\beta_1)=1^2+(-2)^2+0=5$。$\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/5\\2/5\\-1\end{bmatrix}$。为方便计算，取 $\beta_2'=5\beta_2=(4,2,-5)^T$（方向不变，仅改变长度）。

3. 单位化：$|\beta_1|=\sqrt{5}$，故 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^T$。$|\beta_2'|=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，故 $\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,-5)^T$。

所求正交单位向量组为：

$$\eta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

---

12. 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中，设向量组 $\alpha_1=[1,1,0,0]^T,\alpha_2=[1,0,1,0]^T,\alpha_3=[1,0,0,-1]^T$，求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交单位向量组。

解： 施密特正交化：1. $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)^T$。$(\beta_1,\beta_1)=2$。

2. $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。$(\alpha_2,\beta_1)=1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0+0=1$。$\beta_2=(1,0,1,0)^T-\frac{1}{2}(1,1,0,0)^T=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T$。取 $\beta_2'=(1,-1,2,0)^T$。$(\beta_2',\beta_2')=1+1+4+0=6$。

3. $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2')}{(\beta_2',\beta_2')}\beta_2'$。$(\alpha_3,\beta_1)=1$。$(\alpha_3,\beta_2')=1(1)+0(-1)+0(2)+(-1)(0)=1$。$\beta_3=(1,0,0,-1)^T-\frac{1}{2}(1,1,0,0)^T-\frac{1}{6}(1,-1,2,0)^T=(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6},0-\frac{1}{2}+\frac{1}{6},0-0-\frac{1}{3},-1-0-0)^T=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1)^T$。取 $\beta_3'=(1,-1,-1,-3)^T$。$(\beta_3',\beta_3')=1+1+1+9=12$。

4. 单位化：$|\beta_1|=\sqrt{2}$，$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T$。$|\beta_2'|=\sqrt{6}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)^T$。$|\beta_3'|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\eta_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,-1,-3)^T$。

---

13. 设 A 是 n 级正交矩阵，证明：对于欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中任一列向量 α，都有 $|A\alpha|=|\alpha|$。

证： 利用正交变换保持向量长度的性质（等距变换）。计算 $|A\alpha|^2$：

$$|A\alpha|^2=(A\alpha,A\alpha)=(A\alpha)^T(A\alpha)=\alpha^TA^TA\alpha$$

因为 A 是正交矩阵，所以 $A^TA=I$。

$$=\alpha^T I\alpha=\alpha^T\alpha=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2$$

开方即得 $|A\alpha|=|\alpha|$。

***14. 设 A 是实数域上的 n 级可逆矩阵，证明：A 可以分解成 $A=TB$，其中 T 是正交矩阵，B 是上三角矩阵，并且 B 的主对角元都为正数；证明这种分解是唯一的。（QR 分解）**

证： **存在性：**设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。由于 A 可逆，其列向量组线性无关。对 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 进行施密特正交化，得到正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，再单位化得到标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$。根据施密特公式：$\alpha_1=b_{11}\eta_1\ \alpha_2=b_{12}\eta_1+b_{22}\eta_2\ \cdots\ \alpha_k\in\mathrm{span}(\eta_1,\cdots,\eta_k)$。其中 $b_{kk}=(\alpha_k,\eta_k)>0$（由施密特过程的构造及 α_k 与 β_k 同向保证，若取标准正交化时 $b_{kk}=|\beta_k|$）。写成矩阵形式：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

即 $A=TB$，其中 T 是正交矩阵，B 是对角元为正的上三角矩阵。

唯一性：设 $A=T_1B_1=T_2B_2$。则 $T_2^{-1}T_1=B_2B_1^{-1}$。B_1,B_2 为上三角且对角元为正，其逆及乘积 $B_2B_1^{-1}$ 仍为上三角且对角元为正。T_1,T_2 为正交矩阵，其逆及乘积 $T_2^{-1}T_1$ 仍为正交矩阵。设 $M=T_2^{-1}T_1=B_2B_1^{-1}$。$M$ 既是正交矩阵又是上三角矩阵且对角元为正。由第 5 题结论，正交的上三角矩阵必为对角矩阵，且对角元为 ±1。因为 M 的对角元为正，故 $M=I$。即 $T_2^{-1}T_1=I\implies T_1=T_2$。$B_2B_1^{-1}=I\implies B_1=B_2$。分解唯一。