简明线性代数

丘维声 编著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书是高等学校数学基础课“线性代数”课程的教材. 全书共分九章. 内容包括：线性方程组、行列式、n 元有序数组的向量空间，矩阵的运算，矩阵的相抵与相似、二次型与矩阵的合同、线性空间、线性映射，欧几里得空间和酉空间. 本书按节配置适量习题、书末附有习题答案与提示，供教师和学生参考.

本书既科学地阐述了线性代数的基本内容，又深入浅出、简明易懂. 本书精选了线性代数的内容，由具体到抽象地安排讲授体系，这使综合大学和师范院校的理科学生能由浅入深地学完全书；同时又使工科大学，经济类高校，以及大专院校学生只要学习本书前六章或前四章就可了解线性代数的概貌，掌握其最基本的内容.

本书在讲授知识的同时、注重培养学生数学的思维方式. 本书内容按照数学的思维方式组织和编写、既使学生容易学到知识、又使学生从中受到数学思维方式的熏陶，把今后肩负的工作做好、使学生终身受益.

本书可作为综合大学、师范院校、工科大学、经济类高校、大专院校以及自学考试的线性代数课程的教材. 教师可根据周学时数选用：周学时 4 可讲授全书各章；周学时 3 可讲授前六章；周学时 2 可讲授前四章.

作 者 简 介

丘维声　北京大学数学系教授、博士生导师，1966 年毕业于北京大学数学力学系，长期从事高等代数、线性代数、抽象代数与群表示论的教学工作，科研方向：代数组合论、编码和密码、群表示论，出版著作 12 部。1997 年获宝钢教育基金会全国优秀教师特等奖，1997 年、2001 年分别获北京市高等教育教学成果一等奖、二等奖，1999 年、2001 年获北京大学最受学生爱戴的“十佳教师”，1986 年获全国广播电视大学优秀主讲教师。

高等学校数学基础课教材

简明线性代数

丘维声　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

简明线性代数/丘维声编著. 一北京:北京大学出版社,2002.2
ISBN 7-301-05397-5

Ⅰ.简… Ⅱ.丘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 002317 号

书　　名:简明线性代数
著作责任者:丘维声　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05397-5/O·0528
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
排　版　者:高新特激光照排中心　62637627
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
890×1240　A5 开本　10.5 印张　290 千字
2002 年 2 月第 1 版　2002 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:0001—5000 册
定　　价:16.00 元

前　言

随着时代的发展，计算机的普及，线性代数这一数学分支显得越来越重要. 现在几乎所有大专院校的大多数专业都在开设线性代数课程. 如何教好、学好这门课程，关键是要有科学地阐述线性代数的基本内容、简明易懂的教材. 这就是本书的编写目的.

线性代数是研究线性空间和线性映射的理论，它的初等部分是研究线性方程组和矩阵. 本书精选了线性代数的内容，着重阐述其最基本的，应用广泛的那些内容；对于不那么基本，或者应用不那么广泛的内容则略为提及，不展开讲，或者不讲.

由于线性空间和线性映射比较抽象，因此本书先讲线性代数的初等部分：线性方程组和矩阵，以及具体的向量空间 K^n（数域 K 上 n 元有序数组形成的向量空间）和具体的欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$；然后再讲抽象的线性空间和线性映射，以及抽象的欧几里得空间和酉空间. 这样安排教学内容体系，既可以使读者能由浅入深，由具体到抽象地学好线性代数，又可以使课时较少的读者只要学习线性方程组和矩阵，以及具体的向量空间 K^n 和具体的欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 就能了解线性代数的基本面貌，掌握其最基本的内容.

学好线性代数的关键是理解和掌握它的基本理论，在理论的指导下，通过分析去做习题或解决实际问题. 如果没有理解基本理论，只是死记解题步骤，或者套题型做题，那么不仅容易忘记，连计算题也做不好，更不用说做证明题了. 那么如何让广大读者在不感到困难的情况下掌握线性代数的基本理论呢？作者积 20 多年在北京大学、中央电视大学等高校讲授高等代数和线性代数课的经验，从学生熟悉的例子引出概念，以线性代数研究对象的内在联系为主线，简明易懂、深入浅出地阐述基本理论，广大学生感到道理讲得清楚，线性代数不难学.

本书还有一个鲜明的特色是，在讲授知识的同时，培养学生具有数学的思维方式. 只有按照数学的思维方式去学习数学，才能学好数学.

而且学会数学的思维方式，有助于他们把今后肩负的工作做好，从而使学生终身受益. 什么是数学的思维方式？观察客观世界的现象，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；进行探索，通过直觉判断或者归纳推理、类比推理作出猜测；然后进行深入分析和逻辑推理，揭示事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序. 这就是数学的思维方式. 本书按照数学的思维方式编写每一节的内容，设立了“观察”、“抽象”、“探索”、“分析”、“论证”等小标题，使学生在学习线性代数知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，日积月累地培养学生具有数学的思维方式，提高学生的素质.

学好线性代数必须做适量的、好的习题. 本书的每一节都配备了经过精心挑选的习题. 这些习题有助于学生加深理解和掌握线性代数的基本理论，有益于培养学生分析问题和解决问题的能力. 为了使学生能判断自己所做的习题是否做对了，本书书末附有习题答案与提示. 为了帮助学生掌握线性代数的基本理论和基本解题方法，提高解题能力；学会如何在理论的指导下分析问题和解决问题，学会用线性代数的知识去解决实际问题，我们还编写了《线性代数解题指南》一书，与本教材配套出版.

本书可作为综合大学、理工科大学、师范院校和其他大专院校以及自学考试的线性代数课程的教材. 如果周学时为 4，可讲授全书各章；如果周学时为 3，可讲授第一章至第六章；如果周学时为 2，可讲授第一章至第四章. 书中打“ * ”号的内容和习题不作为教学要求.

各章的参考教学时数为：第一章 5 学时，第二章 9 学时，第三章 12 学时，第四章 11 学时，第五章 7 学时，第六章 6 学时，第七章 6 学时，第八章 6 学时，第九章 6 学时.

作者感谢本书的责任编辑刘勇同志，他为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动.

作者热忱欢迎广大读者对本教材提出宝贵意见.

丘维声
于北京大学数学科学学院
2001 年 12 月

目　录

第一章　线性方程组 …… (1)

§1　解线性方程组的算法 …… (3)

习题 1.1 …… (11)

§2　线性方程组的解的情况及其判别准则 …… (12)

习题 1.2 …… (18)

§3　数域 …… (19)

习题 1.3 …… (21)

第二章　行列式 …… (22)

§1　n 元排列 …… (24)

习题 2.1 …… (26)

§2　n 阶行列式的定义 …… (27)

习题 2.2 …… (31)

§3　行列式的性质 …… (32)

习题 2.3 …… (41)

§4　行列式按一行(列)展开 …… (42)

习题 2.4 …… (50)

§5　克莱姆(Cramer)法则 …… (52)

习题 2.5 …… (58)

§6　行列式按 k 行(列)展开 …… (59)

习题 2.6 …… (63)

第三章　线性方程组的进一步理论 …… (65)

§1　n 维向量空间 K^n …… (66)

习题 3.1 …… (71)

§2　线性相关与线性无关的向量组 …… (72)

习题 3.2 …… (80)

§3 向量组的秩 …… (82)
习题 3.3 …… (88)
§4 矩阵的秩 …… (89)
习题 3.4 …… (95)
§5 线性方程组有解的充分必要条件 …… (96)
习题 3.5 …… (99)
§6 齐次线性方程组的解集的结构 …… (100)
习题 3.6 …… (106)
§7 非齐次线性方程组的解集的结构 …… (107)
习题 3.7 …… (111)
§8 基·维数 …… (112)
习题 3.8 …… (116)
第四章 矩阵的运算 …… (117)
§1 矩阵的运算 …… (119)
习题 4.1 …… (129)
§2 特殊矩阵 …… (132)
习题 4.2 …… (137)
§3 矩阵乘积的秩与行列式 …… (138)
习题 4.3 …… (141)
§4 可逆矩阵 …… (142)
习题 4.4 …… (150)
§5 矩阵的分块 …… (151)
习题 4.5 …… (156)
§6 正交矩阵 …… (158)
习题 4.6 …… (165)
第五章 矩阵的相抵与相似 …… (168)
§1 矩阵的相抵 …… (168)
习题 5.1 …… (170)
§2 矩阵的相似 …… (171)
习题 5.2 …… (173)

§3 矩阵的特征值和特征向量 …… (174)
习题 5.3 …… (181)
§4 矩阵可对角化的条件 …… (182)
习题 5.4 …… (185)
§5 实对称矩阵的对角化 …… (186)
习题 5.5 …… (192)
第六章 二次型·矩阵的合同 …… (193)
§1 二次型和它的标准形 …… (194)
习题 6.1 …… (205)
§2 实二次型的规范形 …… (206)
习题 6.2 …… (210)
§3 正定二次型与正定矩阵 …… (210)
习题 6.3 …… (216)
第七章 线性空间 …… (217)
§1 线性空间的结构 …… (217)
习题 7.1 …… (228)
§2 子空间的交与和·子空间的直和 …… (229)
习题 7.2 …… (238)
§3 线性空间的同构 …… (239)
习题 7.3 …… (242)
第八章 线性映射 …… (244)
§1 线性映射及其运算 …… (247)
习题 8.1 …… (251)
§2 线性映射的矩阵表示 …… (252)
习题 8.2 …… (262)
*§3 约当(Jordan)标准形 …… (263)
习题 8.3 …… (266)
第九章 欧几里得空间和酉空间 …… (267)
§1 欧几里得空间的结构 …… (267)

习题 9.1 …… (273)
§2 正交补·正交投影 …… (275)
习题 9.2 …… (278)
§3 正交变换 …… (279)
习题 9.3 …… (281)
§4 酉空间 …… (282)
习题 9.4 …… (286)
*§5 双线性函数 …… (287)
习题 9.5 …… (292)
习题答案与提示 …… (294)

第一章　线性方程组

思考

某食品厂收到了某种食品 2000 kg 的订单，要求这种食品含脂肪 5%，碳水化合物 12%，蛋白质 15%. 该厂准备用 5 种原料配制这种食品，其中每一种原料含脂肪、碳水化合物、蛋白质的百分比如下表所示（省写了“%”）.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
脂肪	8	6	3	2	4
碳水化合物	5	25	10	15	5
蛋白质	15	5	20	10	10

用上述 5 种原料能不能配制出 2000 kg 的这种食品？如果可以，那么有多少种配方？

分析

设所需要的原料 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 分别为（单位：kg）x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，则根据题意得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2000, \\ 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2000 \times 5, \\ 5x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 5x_5 = 2000 \times 12, \\ 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 2000 \times 15. \end{cases} \tag{1}$$

如果这个方程组有解，并且 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取的值都是正数，那么用这 5 种原料可以配制出 2000 kg 的这种食品. 此时，方程组(1)的满足 $x_i > 0$ $(i=1,2,3,4,5)$ 的解的个数就是配方的个数.

抽象

上述方程组(1)的每个方程中，左端都是未知量 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的

一次齐次式，右端是常数，像这样的方程组称为**线性方程组**. 每个未知量前面的数称为**系数**，右端的项称为**常数项**.

日常生活或生产实际中经常需要求一些量，用未知数 $x_1, x_2, \cdots$ 表示这些量，根据问题的实际情况列出方程组，有许多是线性方程组. 数学的各个分支以及自然科学、工程技术中，有不少问题可以归结为线性方程组的问题. 因此我们抽象出线性方程组这一数学模型，深入地研究它.

含 n 个未知量的线性方程组称为 n **元线性方程组**，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{sn}$ 是系数，$b_1, b_2, \cdots, b_s$ 是常数项. 常数项一般写在等号的右边. 方程的个数 s 与未知量的个数 n 可以相等，也可以 $s<n$ 或 $s>n$.

对于线性方程组(2)，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组(2)的**一个解**. 方程组(2)的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**.

从上述配制食品的问题看出，需要研究线性方程组的下列几个问题：

1. 线性方程组是否一定有解？有解时，有多少个解？

2. 如何求线性方程组的解？

3. 线性方程组有解时，它的每一个解是否都符合实际问题的需要？（符合实际问题需要的解称为**可行解**.）

4. 线性方程组的解不止一个时，这些解之间有什么关系？

这一章和第二、三章都是围绕这些问题展开讨论.

§1 解线性方程组的算法

思考

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

分析

如果我们能设法消去未知量 x_1, x_2，剩下一个含 x_3 的一元一次方程，那么就能求出 x_3 的值. 进而得到含 x_1, x_2 的方程组. 类似地，可以求出 x_2, x_1 的值. 所谓消去未知量 x_1，就是使 x_1 的系数变成 0. 为了使线性方程组的求解方法能适用于未知量很多的方程组，用计算机编程序去计算，我们应当使解法有规律可循. 今后我们用记号②+①·(−3) 表示把方程组的第 1 个方程的(−3)倍加到第 2 个方程上；用记号(②,④)表示把方程组的第 2、第 4 个方程互换位置；用记号③·$\frac{1}{3}$表示用$\frac{1}{3}$乘第③个方程.

示范

例 2 求线性方程组(1)的解.

解

$$\begin{array}{l} \\ ②+①\cdot(-3) \\ ③+①\cdot 1 \\ ④+①\cdot(-2) \end{array} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ \quad -5x_2 - x_3 = 3, \\ \quad -2x_2 + 5x_3 = 12, \\ \quad x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$(②,④) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_2 - x_3 = -3, \\ \quad -2x_2 + 5x_3 = 12, \\ \quad -5x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_3 = 6, \\ -6x_3 = -12. \end{cases} \\
③ + ② \cdot 2 & \\
④ + ② \cdot 5 & \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_3 = 6, \\ 0 = 0. \end{cases} \\
④ + ③ \cdot 2 & \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ x_3 = 2, \\ 0 = 0. \end{cases} \\
③ \cdot \frac{1}{3} & \\
① + ③ \cdot (-1) & \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2, \\ 0 = 0. \end{cases} \\
② + ③ \cdot 1 & \\
① + ② \cdot (-3) & \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2, \\ 0 = 0. \end{cases}
\end{array}
\tag{2}
\tag{3}
$$

因此,(3,−1,2)是线性方程组(1)的惟一的一个解.

评注

[1] 从例 2 的求解过程看出,我们对线性方程组作了三种变换:

Ⅰ. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;

Ⅱ. 互换两个方程的位置;

Ⅲ. 用一个非零数乘某一个方程.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**.

[2] 在例 2 中,施行初等变换把线性方程组(1)先变成了方程组(2),像(2)这样的方程组称为**阶梯形方程组**.对于阶梯形方程组(2)进

一步施行初等变换，变成了方程组(3). 像(3)这样的方程组称为**简化阶梯形方程组**，从它立即看出解是(3，−1，2).

[3] 不难看出，线性方程组经过初等变换Ⅰ，得到的方程组的解集与原方程组的解集相等，此时称这两个方程组**同解**. 同样容易看出，初等变换Ⅱ（或Ⅲ）把线性方程组变成与它同解的方程组. 因此，**经过一系列初等变换变成的简化阶梯形方程组与原线性方程组同解**. 从而，例1中线性方程组(1)有惟一的一个解：(3，−1，2).

观察

例2的求解过程中，所有的计算都是对方程组的哪些对象做的？

分析

例2的求解过程中，只是对线性方程组的系数和常数项进行了运算. 因此，为了书写简便，对于一个线性方程组可以只写出它的系数和常数项，并且把它们按照原来的次序排成一张表，这张表称为线性方程组的**增广矩阵**. 而只列出系数的表称为方程组的**系数矩阵**. 例如，线性方程组(1)的增广矩阵和系数矩阵依次是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

抽象

线性方程组可以用由它的系数和常数项排成的一张表来表示. 本章开头讲的配制食品的例子，5种原料所含的脂肪、碳水化合物、蛋白质的百分比也可以用一张表来直观清晰地显示. 许许多多的实际问题，各种各样的数学研究对象都常常可以用一张表来表示. 因此我们有必要建立一个数学模型来统一深入地研究这种表.

定义1 由 $s \cdot m$ 个数排成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s \times m$ **矩阵**，其中的每一个数称为这个矩阵的**一个元素**，第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为矩阵的 (i, j) **元**.

例如，线性方程组(1)的增广矩阵的(2,4)元是 9，(4,2)元是 7.

矩阵通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$表示. 一个 $s\times m$ 矩阵可以简单地记作 $A_{s\times m}$，它的(i,j)元记作 $A(i;j)$. 如果矩阵 A 的(i,j)元是 a_{ij}，那么可以记作 $A=(a_{ij})$.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，简记作 0. s 行 m 列的零矩阵可以记成 $0_{s\times m}$.

如果一个矩阵 A 的行数与列数相等，则称它为**方阵**. m 行 m 列的方阵也称为 m **级矩阵**.

本章和第二、三章只围绕线性方程组来研究矩阵，第四、五、六章再深入地研究矩阵的运算和其他性质.

利用线性方程组的增广矩阵，我们可以把例 2 中的求解过程按照下述格式来写.

示范

例 3 求线性方程组(1)的解.

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+\text{①}\cdot(-2)]{\substack{\text{②}+\text{①}\cdot(-3)\\ \text{③}+\text{①}\cdot 1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{②},\text{④})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+\text{②}\cdot 5]{\text{③}+\text{②}\cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④}+\text{③}\cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}\cdot\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①}+\text{③}\cdot(-1)]{\text{②}+\text{③}\cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{②}\cdot(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

以最后一个矩阵为增广矩阵的方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = 3, \\ \qquad x_2 \qquad\quad = -1, \\ \qquad\qquad x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

因此，原线性方程组有惟一解：(3，—1，2).

评注

[1] 从上述求解过程看出，我们对线性方程组的增广矩阵施行了三种变换：

Ⅰ. 把一行的倍数加到另一行上；

Ⅱ. 互换两行的位置；

Ⅲ. 用一个非零数乘某一行.

这三种变换称为矩阵的**初等行变换**.

[2] 在例 3 的求解过程中，先把增广矩阵经过初等行变换化成了下述矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

像这种矩阵称为**阶梯形矩阵**. 它的特点是：

(1) 元素全为 0 的行(称为**零行**)在下方(如果有零行的话)；

(2) 元素不全为 0 的行(称为**非零行**)，从左边数起第一个不为 0 的元素(称为**主元**)，它们的列指标随着行指标的递增而严格增大.

在例 3 的求解过程中，我们对阶梯形矩阵继续施行初等行变换，直至化成下述矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

像这种矩阵称为**简化行阶梯形矩阵**，它的特点是：

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 每个非零行的主元都是 1；

(3) 每个主元所在的列的其余元素都是 0.

[3] 在解线性方程组时，把它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，写出相应的阶梯形方程组，进行求解；或者一直化成简化行阶梯形矩阵，写出它表示的简化阶梯形方程组，从而立即得出解.

[4] 可以证明：任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵，并且能进一步用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵. 证明的思路从例 3 的增广矩阵化成简化行阶梯形矩阵的过程可以看出，然后用数学归纳法写出证明.

示范

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

写出最后这个阶梯形矩阵表示的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = -1, \\ 0 = -2. \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 无论取什么值都不能满足第 3 个方程：$0=-2$，因此，原线性方程组无解.

例 5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

最后这个简化行阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

从第 1 个方程看出，对于 x_2 每取一个值 c_2，可以求得 $x_1=c_2+2$，从而得到原方程组的一个解：$(c_2+2, c_2, -1)$. 由于 c_2 可以取任意一个数，因此原方程组有无穷多个解. 我们可以用下述表达式来表示这无穷多个解：

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

这个表达式称为原线性方程组的**一般解**，其中以主元为系数的未知量 x_1、x_3 称为**主变量**，而其余未知量 x_2 称为**自由未知量**. 一般解就是用含自由未知量的式子表示主变量.

观察

从例 3、例 4、例 5 的求解过程，你能找出判别线性方程组有没有解的方法吗？方程组有解时，例 3 的方程组有惟一解，例 5 的方程组有无穷多个解，你能从它们的增广矩阵化成的阶梯形矩阵找出它们的不同之处吗？

评注

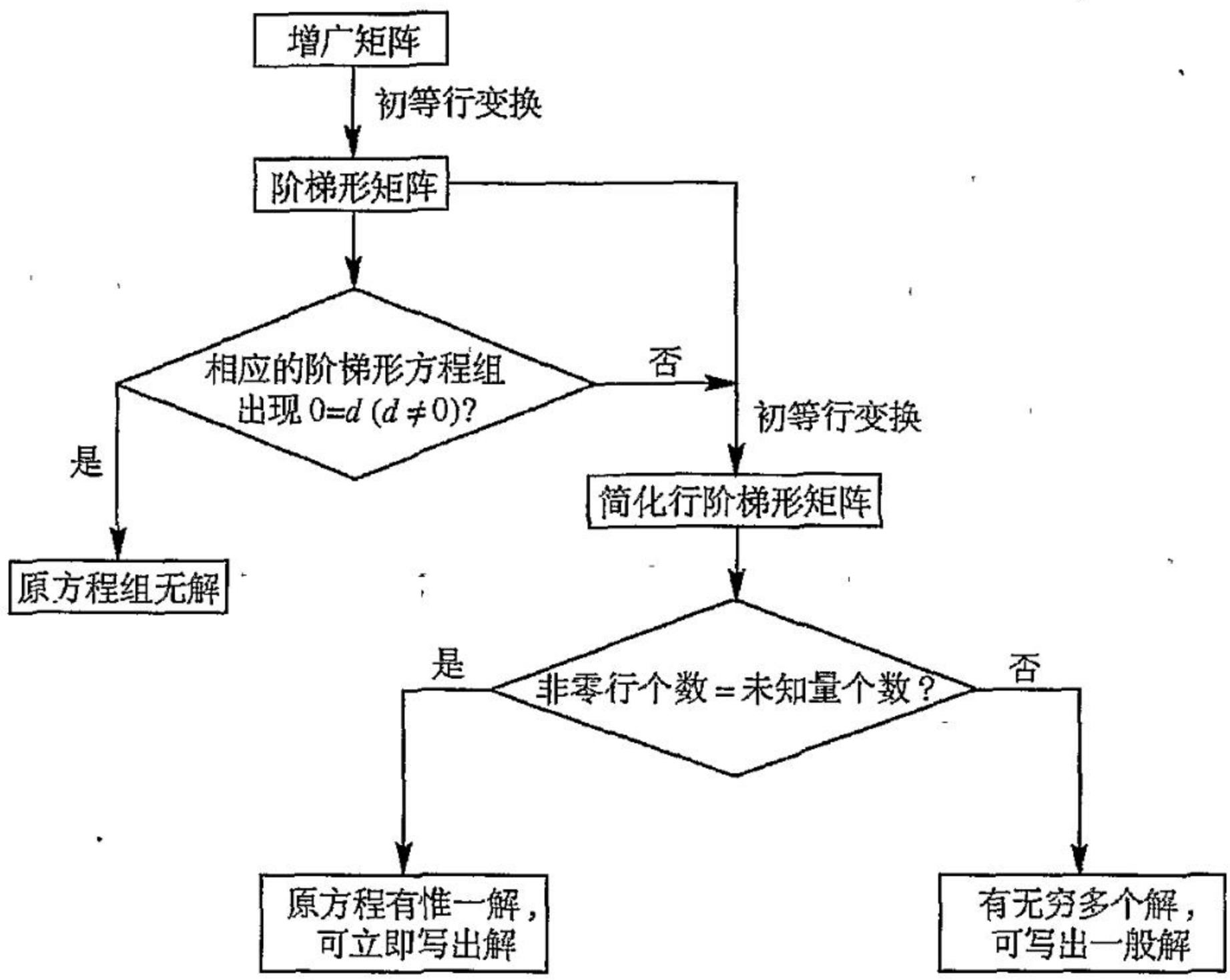
[1] 从例 4 看出，把线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，如果相应的阶梯形方程组出现"$0=d$(其中 d 是非零数)"这样的方程，则原方程组无解. 从例 3 和例 5，我们猜想：如果相应的阶梯形方程组不出现"$0=d$(其中 $d\neq 0$)"这种方程，则原方程组有解. 下一节将证明这个猜想是正确的.

[2] 例 3 的阶梯形矩阵的非零行个数为 3，与未知量个数相等. 例 5 的阶梯形矩阵的非零行个数为 2，小于未知量的个数. 由此猜想：在线性方程组有解的情况下，它的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中，如果非零行的个数等于方程组的未知量个数，则原方程组有惟一解；如果非零行的个数小于未知量的个数，则原方程组有无穷多个解.

[3] 线性方程组有解时，把阶梯形矩阵经过初等行变换进一步化成简化行阶梯形矩阵，则可以立即写出原方程组的惟一解或者无穷多个解.

小结

解线性方程组的方法如下：



上述解线性方程组的方法称为**高斯(Gauss)-约当(Jordan)算法**.

习 题 1.1

1. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=3, \\ -2x_1+x_2-4x_3=-9, \\ -x_1+4x_2-x_3=-7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+5x_2+5x_3=7, \\ 3x_1+7x_2+x_3=-8, \\ -x_1-4x_2+x_3=10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3-x_4=6, \\ 3x_1-8x_2+x_3+5x_4=0, \\ -2x_1+x_2-4x_3+x_4=-12, \\ -x_1+4x_2-x_3-3x_4=2; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=-8, \\ 2x_1+5x_2+4x_3=4, \\ -3x_1-7x_2-2x_3=-3, \\ x_1+4x_2-12x_3=-15; \end{cases}$

$$(5)\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\x_1+x_2-x_3+x_4=-11,\\x_1+3x_2+x_4=1,\\-7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}$$

2. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业 A_1,A_2,A_3，所得的利润率分别是 12%，15%，22%. 他想得到 2000 元的利润.

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍，那么应当分别给 A_1，A_2，A_3 投资多少？

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和？

3. 解线性方程组：

$$(1)\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+5x_4=6,\\-3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5,\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4=-2;\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+5x_4=6,\\-3x_1+x_2+2x_3-4x_4=5,\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4=11;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x_1-5x_2-2x_3=4,\\2x_1-3x_2+x_3=7,\\-x_1+12x_2+7x_3=-5,\\x_1+16x_2+13x_3=-1;\end{cases}\qquad(4)\begin{cases}x_1-5x_2-2x_3=4,\\2x_1-3x_2+x_3=7,\\-x_1+12x_2+7x_3=-5,\\x_1+16x_2+13x_3=1.\end{cases}$$

§2 线性方程组的解的情况及其判别准则

回顾

上一节的例 3，例 4，例 5 的线性方程组分别有惟一解，无解，有无穷多个解. 例 4 的阶梯形方程组出现 $0=-2$ 这个方程，从而无解. 例 3 和例 5 的阶梯形方程组没有出现“$0=d$(其中 d 是非零数)”这种方程，

它们分别有惟一解和无穷多个解. 这启发我们猜想线性方程组的解只有三种可能：无解，有惟一解，有无穷多个解，而且猜想阶梯形方程组是否出现“$0=d$(其中 $d\neq 0$)”这种方程，是线性方程组无解还是有解的判别准则.

上一节的例 3 和例 5 的线性方程组都有解，但前者有惟一解，后者有无穷多个解. 从它们的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵的不同之处，我们猜想：在有解的情况下，当阶梯形矩阵的非零行个数 r 等于未知量个数 n 时，有惟一解；而当 $r<n$ 时，有无穷多个解.

上述猜想正确吗？

论证

由于线性方程组与对它进行初等变换得到的阶梯形方程组同解，因此我们只要讨论阶梯形方程组的解有几种可能及其判别准则. 设阶梯形方程组有 n 个未知量.

情形 1 阶梯形方程组中出现“$0=d$(其中 $d\neq 0$)”这种方程. 由于这种方程无解，从而阶梯形方程组无解.

情形 2 阶梯形方程组中不出现“$0=d$(其中 $d\neq 0$)”这种方程. 我们设阶梯形方程组的增广矩阵中，非零行的个数为 r，则主元个数为 r.

情形 2.1 $r=n$. 此时 n 个未知量都是主变量. 由于 n 个主元应分布在不同的列，因此阶梯形方程组一定是下述形式：

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n, \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0=\ 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0=\ 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $c_{11},c_{22},\cdots,c_{nn}$都不为零. 对于(1)的增广矩阵施行初等行变换化成的简化行阶梯矩阵一定形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n' \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

从而阶梯形方程组有惟一解：$(d_1', d_2', \cdots, d_n')$.

情形 2.2　$r<n$. 此时阶梯形方程组形如

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{2j_2}x_{j_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $c_{11}, c_{2j_2}, \cdots, c_{rj_r}$ 都不为 0. 这时 $x_1, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 是主变量. 其余 $n-r$ 个未知量是自由未知量. 方程组(3)中，至少有一个自由未知量的系数不全为 0，否则这个未知量在方程组中没有出现，可以去掉. 任意给 $n-r$ 个自由未知量一组值，则方程组(3)的第 r 个方程变成 x_{j_r} 的一元一次方程，可解出 x_{j_r}；将 x_{j_r} 的值代入前 $r-1$ 个方程中，从第 $r-1$ 个方程可解出 $x_{j_{r-1}}$；依次往上代入，可解出 $x_{j_{r-2}}, \cdots, x_{j_2}, x_1$. 从而得到方程组的一个解. 由于这 $n-r$ 个自由未知量可以取无穷多组值，因此方程组(3)有无穷多个解. 这无穷多个解可以用一般解表示：

$$\begin{cases} x_1 = c_{1k}'x_k + \cdots + c_{1l}'x_l + d_1', \\ x_{j_2} = c_{2k}'x_k + \cdots + c_{2l}'x_l + d_2', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r} = c_{rk}'x_k + \cdots + c_{rl}'x_l + d_r', \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x_k, \cdots, x_l$ 是自由未知量.

情形 2.3　$r>n$. n 元阶梯形方程组的增广矩阵共有 $n+1$ 列，由于 r 个主元应当分布在不同的列，因此 $r\leqslant n+1$. 于是 $r=n+1$. 这时有 $n+1$ 个主元，分别位于第 $1,2,\cdots,n+1$ 列. 于是第 $n+1$ 行的主元 c_{n+1} 位于第 $n+1$ 列. 从而第 $n+1$ 个方程为 $0=c_{n+1}$，这与情形 2 的已知条件矛盾. 因此 $r>n$ 是不可能的.

综上述，我们得到下面的结论：

定理 1　n 元线性方程组的解的情况只有三种可能：无解，有惟一解；有无穷多个解. 把 n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，如果相应的阶梯形方程组出现“$0=d$（其中 d 是非零数）”这样的方程，则原方程组无解；否则，有解. 当有解时，如果阶梯形矩阵的非零行个数 r 等于未知量个数 n，则原方程组有惟一解；如果非零行个数 $r<n$，则原方程组有无穷多个解.　▌

如果一个线性方程组有解，则称它是**相容的**；否则，称它是**不相容的**.

示范

例 1　a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=2, \\ x_1-5x_2+2x_3+x_4=-1, \\ 2x_1+6x_2-3x_3-3x_4=a+1, \\ -x_1-11x_2+5x_3+4x_4=-4 \end{cases} \tag{5}$$

有解？当有解时，求出它的所有解.

解

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 & a+1 \\ -1 & -11 & 5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(①,②)} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -3 & a+1 \\ -1 & -11 & 5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{②+①\cdot(-3)\\③+①\cdot(-2)\\④+①}}\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 16 & -7 & -5 & a+3\\0 & -16 & 7 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③+②\cdot(-1)\\④+②}}\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & a-2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

原线性方程组有解当且仅当 $a-2=0$,即 $a=2$. 此时再施行初等行变换化成简化行阶梯形:

$$\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -7 & -5 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{9}{16}\\0 & 1 & -\frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{5}{16}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因此原方程组的一般解是

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{16}x_3+\frac{9}{16}x_4+\frac{9}{16},\\x_2=\frac{7}{16}x_3+\frac{5}{16}x_4+\frac{5}{16},\end{cases}$$

其中 x_3,x_4 是自由未知量.

观察

线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0,\\3x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\-2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0,\\3x_1+9x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}\tag{6}$$

有什么特点? 它是否一定有解?

评注

[1] 线性方程组(6)的每个方程的常数项都为 0. 常数项全为 0 的线性方程组称为**齐次线性方程组**. 显然,(0,0,0,0)是齐次线性方程组(6)的一个解,这个解称为**零解**. 任何一个齐次线性方程组都有零解. 如果一个齐次线性方程组除了零解外,还有其他的解,则称其他的解为**非零解**. 根据定理 1 的前半部分得出,如果一个齐次线性方程组有非零解,那么它就有无穷多个解.

[2] 如何判断一个齐次线性方程组有没有非零解? 运用定理 1 便得出

推论 2 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是: 它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵中,非零行的个数 $r<n$. ▌

从推论 2 又可得到

推论 3 n 元齐次线性方程组如果方程的个数 $s<n$,那么它一定有非零解.

证明 把齐次线性方程组的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵,它的非零行的个数 $r\leqslant s<n$,因此齐次线性方程组有非零解. ▌

示范

例 2 判断齐次线性方程组(6)有无非零解. 如果有非零解,求出它的一般解.

解 齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素全为 0,在对它作初等行变换时,所得到的矩阵的最后一列元素也总是全为 0. 因此我们只要对系数矩阵进行初等行变换化成阶梯形矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & -7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

阶梯形矩阵的非零行个数为 3,它小于未知量个数 4,因此原齐次线性

方程组有非零解. 由于经过初等行变换有

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此原齐次线性方程组的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}x_4, \\ x_2 = -\frac{7}{10}x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量.

习 题 1.2

1. a 为何值时,下述线性方程组有解? 当有解时,求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

2. a 为何值时,下述线性方程组有惟一解? a 为何值时,此方程组无解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

3. (1) 下述线性方程组有无解? 有多少个解?

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 3y = -1, \\ 10x - 4y = 3; \end{cases}$$

(2) 改变第(1)小题中方程组的一个方程的某一个系数,使得新的方程组没有解;

(3) 在平面直角坐标系 Oxy 里，画出第(1)小题中各个方程表示的图形.

4. a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7, \\ x_1+3x_3-x_4=8, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=2a. \end{cases}$$

*5. 当 c 与 d 取什么值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d. \end{cases}$$

*6. 是否存在 2 次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 其图像经过下述 4 个点：$P(1,2)$，$Q(-1,3)$，$M(-4,5)$，$N(0,2)$？

7. 下列齐次线性方程组有无非零解？若有非零解，求出它的一般解.

(1) $$\begin{cases} 3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0, \\ -x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+15x_2-7x_3+9x_4=0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 5x_1-2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ -3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$$

§3 数　域

思考

下述线性方程组在有理数集范围内有解吗？在整数集范围内呢？

$$\begin{cases}2x+y=2,\\4x-3y=-1.\end{cases}\tag{1}$$

分析

在有理数集范围内解线性方程组(1)：

$$\begin{bmatrix}2&1&2\\4&-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&-5&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{①\cdot\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{bmatrix},$$

于是方程组的解为(1/2,1).

如果在整数集范围内解方程组(1).那么上述求解过程中最后一步是行不通的(因为 1/2 不是整数,所以不能用 1/2 乘第①个方程.或者说,由于整数集对除法不封闭,即任意两个整数的商有可能不是整数,因此不能用 2 去除第①个方程).这样在整数集范围内,方程组(1)没有解.

从上述例子看出,由于矩阵的初等行变换Ⅲ需要用一个非零数乘某一个方程,以便使阶梯形矩阵的主元变成 1,因此为了使初等行变换能畅通无阻地施行,就应当要求所考虑的数集对于加法、减法、乘法、除法(除数不为 0)都封闭.即,该数集内任意两个数的和、差、积、商(除数不为 0)仍在这个数集.我们在前面两节讨论线性方程组的解法和解的情况的判定时,已经假定了所取的数集具有这个性质.现在我们把它明确地说出来.

抽象

定义 1 设 K 是复数集的一个子集,如果 K 满足：

(1) $0,1\in K$;

(2) 对于任意的 $a,b\in K$,都有 $a\pm b,ab\in K$;并且当 $b\neq 0$ 时,有 $\frac{a}{b}\in K$,

那么称 K 是一个**数域**.

数域 K 满足的第(2)个条件可以说成：K 对于加、减、乘、除四种

运算封闭.

显然,有理数集 $\boldsymbol{Q}$,实数集 $\boldsymbol{R}$,复数集 $\boldsymbol{C}$ 都是数域,分别称 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ 为有**理数域,实数域,复数域**. 但是整数集 $\boldsymbol{Z}$ 不是数域.

除了 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ 外,还有很多数域. 例如,令

$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\},$$

显然,$0=0+0\sqrt{2}\in\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $1=1+0\sqrt{2}\in\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$;并且容易验证 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$对于加、减、乘、除四种运算封闭,因此,$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$是一个数域.

观察

上面列举的数域 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ 哪个最小?(即,哪个数域是所有数域的子集?)

命题 1 任一数域都包含有理数域.

证明 设 K 是一个数域,则 $0,1\in K$. 从而

$$2 = 1 + 1 \in K,\ 3 = 2 + 1 \in K,\ \cdots,\ n = (n-1) + 1 \in K.$$

即,任一正整数 $n\in K$. 又由于

$$-n = 0 - n \in K,$$

因此任一负整数 $-n\in K$. 从而 $\boldsymbol{Z}\subseteq K$,于是任一分数

$$\frac{a}{b} \in K \quad (\text{其中 } b \neq 0),$$

因此,$\boldsymbol{Q} \subseteq K$. ▌

从现在起,我们取定一个数域 K,所讨论的线性方程组都是数域 K 上的,即它的全部系数和常数项都属于 K,并且在数域 K 里求它的解,从而它的每一个解都是数域 K 里的数组成的有序数组. 所讨论的矩阵,它的全部元素都属于 K,称它为数域 K 上的矩阵. 做矩阵的初等行变换时,"倍数"、"非零数"都属于 K.

习 题 1.3

1. 令 $\boldsymbol{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i} \mid a,b\in\boldsymbol{Q}\}$,证明 $\boldsymbol{Q}(\mathrm{i})$是一个数域.
2. 最大的数域是哪一个?(即,哪一个数域包含了所有的数域?)

第二章　行　列　式

思考

第一章 §1 定理 1 给出了线性方程组有没有解，有多少解的判别准则，它需要首先把方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵. 能不能直接用原来的线性方程组的系数和常数项判断它有没有解，有多少解呢？

探索

先研究两个方程的二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 a_{11}, a_{21} 不全为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$. 将它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{② + ① \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix}.$$

情形 1　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时原方程组有惟一解：

$$\left[\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right]. \tag{2}$$

情形 2　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. 此时原方程组无解或者有无穷多个解.

综上述得出

命题 1　两个方程的二元一次方程组(1)有惟一解的充分必要条件是：$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时，惟一解如(2)式所示. ▌

为了便于记忆表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，我们把它记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

于是表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 就是(3)中主对角线(从左上至右下的对角线)上两个元素的乘积减去反对角线(从右上至左下的对角线)上两个元素的乘积.

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为 **2 阶行列式**,它可以用记号(3)来简洁地表示.

令
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{4}$$
则 2 阶行列式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 也可称为 **2 级矩阵 A 的行列式**,简洁地记作 $|A|$ 或者 $\det(A)$.

利用 2 阶行列式的概念,(2)式中的两个分数的分子可以分别简洁地记成
$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

有了 2 阶行列式的概念,我们可以把命题 1 叙述成:

命题 1′ 两个方程的二元一次方程组(1)有惟一解的充分必要条件是:它的系数行列式(即系数矩阵 A 的行列式)$|A|\neq 0$,此时它的惟一解是
$$\left[\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\right]. \quad \blacksquare \tag{6}$$

公式(6)中的第一个分数的分子是将系数行列式的第 1 列换成方程组的常数项得到的 2 阶行列式,而第二个分数的分子是将系数行列式的第 2 列换成常数项得到的 2 阶行列式.

命题 1′告诉我们,两个方程的二元一次方程组有没有惟一解可以用它的系数行列式来判断;有惟一解时,解可以用系数行列式以及用常数项替换其相应的列得到的行列式来表示.

对于 n 个方程的 n 元线性方程组有没有类似的结论?这需要有 n 阶行列式概念.这一章我们就来介绍 n 阶行列式的概念和性质,并且回答上述问题.

§1 n 元排列

观察

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

表达式的第 1 项前面带正号，第 2 项前面带负号，这是由什么决定的？第 1 项中两个数乘积 $a_{11}a_{22}$其行指标依次是 1，2，列指标依次是 1，2；而第 2 项中 $a_{12}a_{21}$的行指标依次是 1，2，列指标却依次是 2，1. 由此看出，当每一项的两个数按照行指标由小到大排好后，它的列指标形成的排列决定了该项前面所带的符号. 这启发我们，为了得到 n 阶行列式的概念，需要首先讨论 n 个自然数组成的全排列的性质.

抽象

定义 1 n 个不同的自然数的一个全排列称为一个 **n 元排列**.

例如，自然数 1，2，3 形成的 3 元排列有

123， 132， 213， 231， 312， 321.

给定 n 个不同的自然数，它们形成的全排列有 $n!$ 个. 因此对于给定的 n 个不同的自然数，n 元排列的总数是 $n!$.

我们在大多数情形下，考虑的是自然数 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列，在某些情形下也需要考虑某 n 个不同的自然数形成的 n 元排列. 下面讨论的 n 元排列的性质，如果没有特别声明，考虑的是 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列，但对任意 n 个不同的自然数形成的 n 元排列也成立.

4 元排列 2341 中，2 与 3 形成的数对 23，小的数在前，大的数在后，此时称这一对数构成一个**顺序**；而 2 与 1 形成的数对 21，大的数在前，小的数在后，此时称这一对数构成一个**逆序**. 排列 2341 中，构成逆序的数对有 21，31，41，共 3 对，此时我们称排列 2341 的**逆序数**是 3，记作 $\tau(2341)=3$.

上述顺序、逆序、逆序数的概念也适用于任一 n 元排列.

4 元排列 2143 中，构成逆序的数对有 21，43，共 2 对. 于是

$$\tau(2143) = 2.$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

上述例子中，2341 是奇排列，2143 是偶排列.

把排列 2341 的 3 和 1 互换位置，其余数不动，便得到排列 2143. 像这样的变换称为一个**对换**，记作(3，1). 对换的概念也适用于 n 元排列.

奇排列 2341 经过对换(3，1)变成的排列 2143 是偶排列. 由此猜想有下述结论：

定理 1 对换改变 n 元排列的奇偶性.

证明 先看对换的两个数在 n 元排列中相邻的情形：

$$\cdots\cdots \quad i \quad j \quad \cdots\cdots \qquad \text{(I)}$$

$$\downarrow (i,j)$$

$$\cdots\cdots \quad j \quad i \quad \cdots\cdots \qquad \text{(II)}$$

i 和 j 以外的数构成的数对是顺序还是逆序，在(I)与(II)中是一样的；i 和 j 以外的数与 i(或 j)构成的数对是顺序还是逆序，在(I)与(II)中也是一样的. 只有数对 ij，如果它在(I)中是顺序，那么它在(II)中是逆序；如果它在(I)中是逆序，那么它在(II)中是顺序. 前一情形，(II)比(I)多一个逆序；后一情形，(II)比(I)少一个逆序. 因此(I)与(II)的奇偶性相反.

再看一般情形：

$$\cdots\cdots \quad i \quad k_1 \quad \cdots \quad k_s \quad j \quad \cdots\cdots \qquad \text{(III)}$$

$$\downarrow (i,j)$$

$$\cdots\cdots \quad j \quad k_1 \quad \cdots \quad k_s \quad i \quad \cdots\cdots \qquad \text{(IV)}$$

从(III)变成(IV)可以经过下列相邻两数的对换来实现：

$$(i,k_1),\cdots,(i,k_s),(i,j),(k_s,j),\cdots,(k_1,j).$$

这一共作了 $s+1+s=2s+1$ 次相邻两数的对换. 由于奇数次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性，因此(III)与(IV)的奇偶性相反. ▌

有时需要把一个 n 元排列经过若干次对换变成自然序排列 $123\cdots n$. 这是否总能办到？先看一个 5 元排列的例子：

$$34521 \xrightarrow{(5,1)} 34125 \xrightarrow{(4,2)} 32145 \xrightarrow{(3,1)} 12345.$$

上述过程的第一步是作一个对换，把 5 换到最后的位置，第二步作一个对换，把 4 放到倒数第二个位置，依次类推. 显然这一方法对于任何一个 n 元排列也适用. 这就肯定地回答了上述问题.

进一步我们看到把排列 34521 变成 12345 共作了 3 次对换，而 $\tau(34521)=7$. 这表明在这个例子中；所作对换的次数与原来的排列有相同的奇偶性. 这个结论对于任意 n 元排列也成立，理由如下：

设 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 s 次对换变成 $123\cdots n$. 显然 $123\cdots n$ 是偶排列. 因此如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列，则 s 必为奇数，才能把奇排列变成偶排列；如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，则 s 必为偶数，才能保持排列的奇偶性不变.

显然，如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 s 次对换变成自然序排列 $123\cdots n$，那么 $123\cdots n$ 经过上述 s 次对换（次序相反）就变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

综上所述得

定理 2 任一 n 元排列与排列 $123\cdots n$ 可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性. ▌

习 题 2.1

1. 求下列各个排列的逆序数，并且指出它们的奇偶性：

(1) 315462； (2) 365412； (3) 654321；

(2) 7654321； (5) 87654321； (6) 987654321；

(7) 123456789； (8) 518394267； (9) 518694237.

2. 求下列 n 元排列的逆序数：

(1) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$； (2) $23\cdots(n-1)n1$.

3. 写出把排列 315462 变成排列 123456 的那些对换.

4. 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并且讨论它的奇偶性.

*5. 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 r，求 n 元排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数.

6. 计算下列 2 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$.

7. 利用 2 阶行列式，判断下述二元一次方程组是否有惟一解？并且当有惟一解时，求出这个解.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

§2 n 阶行列式的定义

思考

2 阶行列式是一个表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

如何定义 3 阶行列式？它应该是什么样的表达式？

分析

从(1)式看到，2 阶行列式的每一项是位于不同行、不同列的两个元素的乘积；第 1 项 $a_{11}a_{22}$ 前面带正号，此时这两个元素按行指标成自然序排好，其列指标所成排列是偶排列；第 2 项 $-a_{12}a_{21}$ 带负号，其行指标成自然序排列，列指标的排列 21 是奇排列. 由于 2 元排列共 2! 个，因此 2 阶行列式共有 2! 项，即 2 项.

从 2 阶行列式的上述特点受到启发，我们定义 3 阶行列式是如下的表达式：

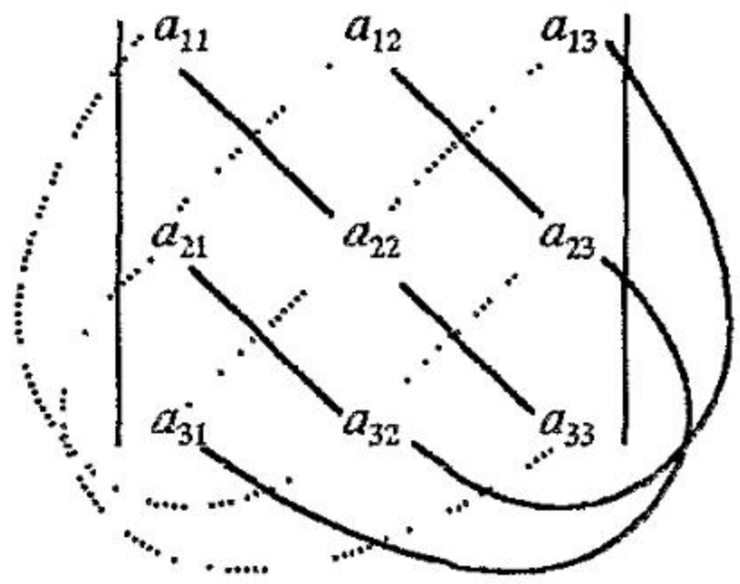
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{2}$$

即 3 阶行列式是 3! 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积，把每一项的 3 个元素按行指标成自然序排好位置，当列指标形成的排列是偶排列时，该项带正号；奇排列时，该项带负号

(注意：123,231,312 都是偶排列；而 321,213,132 都是奇排列).

3 阶行列式的 6 项及其所带符号可以采用下图来记忆：



3 阶行列式的每一项的 3 个元素的乘积都是形如

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是一个 3 元排列. 这一项前面所带的符号由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定：奇排列时，带负号；偶排列时，带正号. 于是可以用

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$$

来确定该项前面所带的符号. 从而 3 阶行列式的每一项都是形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{3}$$

由于 $j_1j_2j_3$ 可以取遍 3!个 3 元排列，因此 3 阶行列式是形如(3)的 3!项的和. 我们用 $\sum$ 表示求和，称 $\sum$ 是连加号. 于是 3 阶行列式的定义可以简洁地写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{4}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对于所有 3 元排列求和.

类似地，我们可以给出 n 阶行列式的定义.

抽象

定义 1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，把这 n 个元素按照行指标成自然序排好位置，当列指标所成排列是偶排列时，该项带正号；奇排列时，该项带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{5}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 元排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. (5)式称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

则 n 阶行列式(5)也称为 n 级**矩阵 A 的行列式**，简记作 $|A|$ 或者 $\det(A)$.

注意 n 级矩阵 A 是指形如(6)的一张表，而 n 阶行列式 $|A|$ 是指形如(5)的一个表达式，不要混淆它们.

按照定义 1，1 阶行列式 $|a|=a$.

思考

如何运用行列式的定义计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \tag{7}$$

的值？

分析

上述 4 阶行列式的主对角线下方的元素全为 0，像这样的行列式

称为**上三角形行列式**.

按照行列式的定义,行列式(7)的每一项是取自不同行、不同列的4个元素的乘积.由于第4行有3个0,因此第4行只有取a_{44}才有可能使乘积项不为0.此时第3行只有取a_{33}才有可能使乘积项不为0(注意第4行已经取了第4列的元素a_{44},因此第3行不能取第4列元素a_{34}).类似地,第2行只能取a_{22},第1行只能取a_{11}才有可能使乘积项不为0,这一项$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$前面带正号.因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \tag{8}$$

类似的方法可以得出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \tag{9}$$

即**n阶上三角形行列式的值等于它的主对角线上n个元素的乘积.**

评注

在3阶行列式的定义中,我们把每一项的3个元素的乘积按照行指标成自然序排好位置,但是数的乘法有交换律,因此我们可以按任一次序排它们的位置,这时该项所带的符号怎么表达呢?例如,(2)式中的第2项为$a_{12}a_{23}a_{31}$,它前面带正号.我们把这3个元素相乘的次序改变成$a_{23}a_{12}a_{31}$,这时如何用行指标所成排列与列指标所成排列的奇偶性来表达该项前面所带的正号呢?它的行指标所成排列213的逆序数是1,列指标所成排列321的逆序数是3,$(-1)^{1+3}=1$,这正好表达了该项前面所带的正号.因此这一项也可以写成

$$(-1)^{\tau(213)+\tau(321)}a_{23}a_{12}a_{31}.$$

3阶行列式的其他各项也有类似的表达方式.由此我们猜想:n阶行列式的每一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{10}$$

也可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}. \tag{11}$$

证明可以参看《高等代数(上册)》(丘维声编著,高等教育出版社出版)第 35 页至第 36 页. 从而 n 阶行列式也可以把它的每一项中 n 个元素按列指标成自然序排好位置. 这时用行指标所成排列的奇偶性来决定该项前面所带的符号. 即 n 阶行列式(5)又可以写成下述表达式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{12}$$

(12)式与(5)式表明:行列式中行与列的地位是对称的.

习 题 2.2

1. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 3 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

*3. 用行列式定义计算：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. n 阶行列式的反对角线上 n 个元素的乘积一定带负号吗？

§3　行列式的性质

观察

从行列式的定义知道，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，其中每一项是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 当 n 增大时，$n!$ 极其迅速地增大. 例如

$$5! = 120, \quad 10! = 3\ 628\ 800.$$

如果直接用行列式的定义计算一个 n 阶行列式，其计算量是相当大的. 因此我们必须研究行列式的性质，利用行列式的性质来简化行列式的计算，并且利用行列式的性质来研究线性方程组有惟一解的条件.

探索与论证

行列式有哪些性质呢？先看 2 阶行列式有哪些性质.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

由此看出，2 阶行列式的行与列互换（即第 1 行变成第 1 列，第 2 行变成第 2 列，得到一个新的行列式），其行列式的值不变. n 阶行列式也有此性质：

性质 1 行列互换，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

证明 把(1)式右边的行列式按照本章 § 2 的公式(12)展开（注意元素的第 1 个下标是列指标，第 2 个下标是行指标）：

$$\text{右边} = \sum_{t_1t_2\cdots t_n} (-1)^{\tau(t_1t_2\cdots t_n)} a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}.$$

把(1)式左边的行列式按照定义展开（注意第 1 个下标是行指标）：

$$\text{左边} = \sum_{t_1t_2\cdots t_n} (-1)^{\tau(t_1t_2\cdots t_n)} a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}.$$

因此(1)式成立. ▌

性质 1 进一步表明了行列式的行与列的**地位是对称的**. 因此，行列式有关行的性质，对于列也同样成立. 今后我们只研究行列式有关行的性质，读者可以把它们“翻译”成有关列的性质.

对于 2 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} = a_1(kb_2) - a_2(kb_1) = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式也有此性质：

性质 2 行列式一行的公因子可以提出去. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

证明 $\text{左边} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\text{右边}. \quad \blacksquare$$

在性质 2 中，当 $k=0$ 时，得出：如果行列式中有一行为零(即有一行的元素全为 0)，则行列式的值为 0.

对于 2 阶行列式，有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} &= a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1) \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

n 阶行列式也有此性质：

性质 3 行列式中若有某一行是两组数的和，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行分别是第一组数和第二组数，而其余各行与原来行列式的相应各行相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{(第 } i \text{ 行)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

证明

$$\text{左边}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\text{右边}. \quad \blacksquare$$

对于 2 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=b_1a_2-b_2a_1=-(a_1b_2-a_2b_1),$$

因此

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式也有此性质：

性质 4 两行互换，行列式反号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}. \tag{4}$$

证明 注意(4)式右边的行列式的第 i 行元素的第 1 个下标是 k，而第 k 行元素的第 1 个下标是 i，据行列式的定义，我们有

$$\text{右边}=-\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n}(-1)\cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\text{左边}. \quad \blacksquare$$

性质 5 两行相同，行列式的值为 0. 即

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\text{第 } i \text{ 行} \\
\\
\text{第 } k \text{ 行} \\
\\
\\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}
$$

证明 把(5)式左边的行列式的第 i 行与第 k 行互换，据性质 4 得

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

从而(5)式左边行列式的 2 倍等于 0，因此(5)式左边行列式的值为 0. ▌

性质 6 两行成比例，行列式的值为 0. 即

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\text{第 } i \text{ 行} \\
\\
\text{第 } k \text{ 行} \\
\\
\\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
la_{i1} & la_{i2} & \cdots & la_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}
$$

证明 把(6)式左边行列式的第 k 行的公因子 l 提出去，所得行列式有两行相同，从而它的值为 0. ▌

性质 7 把一行的倍数加到另一行上，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+la_{i1} & a_{k2}+la_{i2} & \cdots & a_{kn}+la_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

证明

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ la_{i1} & la_{i2} & \cdots & la_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{右边}. \quad \blacksquare$$

评注

[1] 设 n 级矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

把 A 的行与列互换得到的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

称为 A 的**转置**，记作 A'（或 A^{T}，或 A^{t}）.

由上述定义，立即得出

$$A'(i;j) = A(j;i), \tag{9}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n$，$1 \leqslant j \leqslant n$.

据行列式的性质 1 得

$$|A'| = |A|. \tag{10}$$

[2] 设 A 是 n 级矩阵. 根据行列式的性质 7，得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{ⓚ + ⓘ \cdot l} B, \quad \text{则 } |B| = |A|. \tag{11}$$

根据行列式的性质 4，得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{(ⓘ, ⓚ)} B, \quad \text{则 } |B| = -|A|. \tag{12}$$

根据行列式的性质 2，得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{ⓘ \cdot c} B, \quad \text{则 } |B| = c|A|, \tag{13}$$

其中 $c \neq 0$.

从(11)，(12)，(13)得

$$\text{如果 } A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B, \quad \text{则 } |B| = l|A|, \tag{14}$$

其中 l 是某个非零数.

[3] 行列式的性质 2 至性质 7 是对于行来叙述的，根据行列式的性质 1，容易推出它们对于列也成立. 例如，行列式一列的公因子可以提出去；两列互换，行列式反号；把一列的倍数加到另一列上，行列式的值不变；等等.

[4] 利用行列式的性质 7、性质 4、性质 2，可以把一个行列式化成上三角形行列式的非零数倍. 而上三角形行列式的值就等于它的主对角线上所有元素的乘积，这很容易计算. 因此把行列式化成上三角形行列式，是计算行列式的基本方法之一.

[5] 行列式的性质 3 在计算行列式中也起着重要作用.

示范

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -203 & 300 & 105 \end{vmatrix}.$$

解

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -200-3 & 300+0 & 100+5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -200 & 300 & 100 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-3)\cdot(-4)=12.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 这个 n 阶行列式的特点是：每一行的元素之和等于常数 $a+(n-1)b$. 因此，把第 2 列、第 3 列、…、第 n 列分别加到第 1 列上，就可以使第 1 列有公因子 $a+(n-1)b$，把它提出去，则第 1 列元素全为 1. 从而用行列式的性质 7 容易化成上三角形行列式. 今后我们约定对于行列式的行进行变换的记号写在等号上面，而对于列进行变换的记号写在等号下面.

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$
\text{原式}\xlongequal[\substack{①+② \\ ①+③ \\ \cdots\cdots \\ ①+ⓝ}]{}
\begin{vmatrix}
a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\
a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\
a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a+(n-1)b & b & b & \cdots & a
\end{vmatrix}
$$

$$
=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}
1 & b & b & \cdots & b \\
1 & a & b & \cdots & b \\
1 & b & a & \cdots & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & b & b & \cdots & a
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{②+①\cdot(-1) \\ ③+①\cdot(-1) \\ \cdots\cdots \\ ⓝ+①\cdot(-1)}]{}
[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}
1 & b & b & \cdots & b \\
0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a-b
\end{vmatrix}
$$

$$
=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
$$

当 $n=1$ 时，上述公式也成立.

例 3 证明：

$$
\begin{vmatrix}
a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\
a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\
a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
=2\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 \\
a_3 & b_3 & c_3
\end{vmatrix}.
$$

证明

$$
\text{左边}=\begin{vmatrix}
a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\
a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\
a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\
b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\
b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1+a_1 \\
a_2 & b_2 & c_2+a_2 \\
a_3 & b_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
a_1 & c_1 & c_1+a_1 \\
a_2 & c_2 & c_2+a_2 \\
a_3 & c_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
b_1 & b_1 & c_1+a_1 \\
b_2 & b_2 & c_2+a_2 \\
b_3 & b_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\
b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\
b_3 & c_3 & c_3+a_3
\end{vmatrix}
$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \text{右边}. \quad \blacksquare$$

习 题 2.3

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} -1 & 203 & 1/3 \\ 3 & 298 & 1/2 \\ 5 & 399 & 2/3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$.

3. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 0$.

*4. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$，

其中 $a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

§4 行列式按一行(列)展开

观察

研究 3 阶行列式与 2 阶行列式的关系：

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\
&\quad = 2\times 5\times 7+1\times 6\times 0+3\times 0\times 4 \\
&\qquad -3\times 5\times 0-1\times 0\times 7-2\times 6\times 4 \\
&\quad = 2\times(5\times 7-6\times 4)+1\times(6\times 0-0\times 7) \\
&\qquad +3\times(0\times 4-5\times 0) \\
&\quad = 2\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1)式中，$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$是划去 3 阶行列式的第 1 行和第 1 列，剩下的元素按原来次序组成的 2 阶行列式，称它为(1,1)元的余子式. 类似地，(1)式中第 2 个行列式是(1,2)元的余子式，第 3 个行列式是(1,3)元的余子式. 为了使(1)式中各项所带的符号都变成正号，我们把(1)式写成

$$2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & 7\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 6\\ 0 & 7\end{vmatrix}$$
$$+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}. \tag{2}$$

把(2)式中的

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & 7\end{vmatrix},\quad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 6\\ 0 & 7\end{vmatrix},\quad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}$$

分别称为(1,1)元的代数余子式,(1,2)元的代数余子式,(1,3)元的代数余子式.于是从上面的讨论得出:

3 阶行列式等于它的第 1 行元素与自己的代数余子式的乘积之和.

我们猜想这一结论对于 n 阶行列式的任意一行也成立.

论证

n 阶行列式中,划去第 i 行和第 j 列,剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为(i,j)元的**余子式**,记作 M_{ij}. 令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij}是(i,j)元的**代数余子式**.

定理 1 n 阶行列式$|A|$等于它的第 i 行元素与自己的代数余子式的乘积之和. 即

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}, \tag{3}$$

其中 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n}$ 表示对于 $j=1,2,3,\cdots,n$ 求和. (3)式称为 n 阶行列式按第 i 行的展开式.

我们来证明 4 阶行列式按第 2 行的展开式,其方法也适用于 n 阶行列式的一般情形.

把 4 阶行列式$|A|$的 4! 项按照第 2 行的 4 个元素分成 4 组:

$$|A|=\sum_{k_1jk_3k_4}(-1)^{\tau(k_1jk_3k_4)}a_{1k_1}a_{2j}a_{3k_3}a_{4k_4}$$
$$=\sum_{j=1}^{4}a_{2j}\left(\sum_{k_1k_3k_4}(-1)(-1)^{\tau(jk_1k_3k_4)}a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)\left(\sum_{k_1k_3k_4}(-1)^{(j-1)+\tau(k_1k_3k_4)}a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)(-1)^{j-1}\left(\sum_{k_1k_3k_4}(-1)^{\tau(k_1k_3k_4)}a_{1k_1}a_{3k_3}a_{4k_4}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j}.$$

这就证明了 4 阶行列式$|A|$等于它的第 2 行元素与自己的代数余子式的乘积之和. ▌

由于行列式中行与列的地位是对称的,因此从定理 1 和性质 1 可以得出

定理 2 n 阶行列式$|A|$等于它的第 j 列元素与自己的代数余子式的乘积之和. 即

$$\begin{aligned}|A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$. (4)式称为行列式按第 j 列的展开式. ▌

利用行列式的性质 7 等可以把行列式的某一行(或某一列)的许多元素变成 0,然后按这一行(或这一列)展开就可把 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式,减少计算量. 这是计算行列式的又一个基本方法.

示范

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -4 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 为了尽量避免分数运算,尽可能选择 1 或 -1 所在的行(或列),把该行(或列)的许多元素变成 0,然后按这一行(或列)展开. 现在选择 1 所在的第 2 行.

$$\text{原式} \xlongequal[\substack{①+②\cdot 4 \\ ③+②\cdot 2}]{} \begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\text{原式} \xlongequal{③+②\cdot 1} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-3 & -4 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+③\cdot(-1)]{} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14) = (\lambda-7)^2(\lambda+2).$$

例 3 计算 n 阶行列式($n>1$)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 先按第 1 列展开,得

$$\text{原式} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= aa^{n-1} + (-1)^{n+1}bb^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

观察

把下述 3 阶行列式$|A|$的第 1 行元素与第 2 行相应元素的代数余子式相乘，然后相加，结果如何呢？

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$a_1A_{21} + a_2A_{22} + a_3A_{23}$$

$$= a_1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

这表明 3 阶行列式的第 1 行元素与第 2 行相应元素的代数余子式的乘积之和等于 0. 我们猜想对于 n 阶行列式也有类似的结论.

论证

定理 3 n 阶行列式$|A|$的第 i 行元素与第 k 行$(k\neq i)$相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即当 $k\neq i$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \tag{5}$$

其中 $i,k\in\{1,2,\cdots,n\}$.

证明 设

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

把$|A|$中的第 k 行的元素换成第 i 行的元素，得下述行列式，然后下述 n 阶行列式按第 k 行展开，并且注意它的(k,j)元的代数余子式与$|A|$的(k,j)元的代数余子式 A_{kj}一样，因此有

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 } k \text{ 行展开}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}. \quad \blacksquare$$

由于行列式的行与列的地位对称，因此也有

定理 4 n 阶行列式$|A|$的第 j 列元素与第 l 列$(l \neq j)$相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即当 $l \neq j$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = 0, \tag{6}$$

其中 $j,l \in \{1,2,\cdots,n\}$. $\blacksquare$

公式(3)，(5)与公式(4)，(6)可以分别写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } k = i, \\ 0, & \text{当 } k \neq i; \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } l = j, \\ 0, & \text{当 } l \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

观察

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{9}$$

有什么特点？

它的第 1 行元素全是 1，第 2 行元素是 n 个数，第 3 行元素是这 n 个数的平方，…，第 n 行元素是这 n 个数的 $(n-1)$ 次方. 这样的行列式称为**范德蒙(Vandermonde)行列式**. 它的值等于什么呢？

探索

当 $n=2$ 时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} &\xlongequal[\text{③}+\text{①}\cdot(-a_1^2)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-a_1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 + a_1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)[(a_3 + a_1) - (a_2 + a_1)] \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).
\end{aligned}$$

由上述受到启发，我们猜想 n 阶范德蒙列式 $(n \geqslant 2)$ 的值为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j), \tag{10}$$

其中$\prod$是连乘号，

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)\\ &\cdot(a_3-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_2)(a_n-a_2)\\ &\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdot(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\\ &\cdot(a_n-a_{n-1}).\end{aligned}$$

证明 对范德蒙行列式的阶数 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时，上面已证明结论成立.

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立. 我们来看 n 阶范德蒙行列式的情形. 把第 $n-1$ 行的$(-a_1)$倍加到第 n 行上，然后把第 $n-2$ 行的$(-a_1)$倍加到第 $n-1$ 行上，依次类推，最后把第 1 行的$(-a_1)$倍加到第 2 行上，得到

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}-a_1a_2^{n-3} & a_3^{n-2}-a_1a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2}-a_1a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{用归纳假设}} (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)$$

$$= \prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

据数学归纳法原理，对一切大于 1 的正整数，结论都成立. ▌

范德蒙行列式在许多实际问题中出现，我们可以用公式(10)立即写出它的值. 从(10)式看出，当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同时，范德蒙行列式的值不等于零.

习 题 2.4

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

3. 计算 n 阶行列式($n\geqslant 2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

4. 用数学归纳法证明：对一切 $n\geqslant 2$，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

5. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

*7. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$是两两不同的数.

*8. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & n \end{vmatrix}.$$

§5 克莱姆(Cramer)法则

回顾

在本章开头的命题 1′里,我们证明了:两个方程的二元一次方程组有惟一解的充分必要条件是它的系数行列式$|A|\neq 0$,此时它的惟一解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}\right),$$

其中$|B_1|$是把$|A|$中第 1 列换成常数项,第 2 列不动得到的行列式,$|B_2|$是把$|A|$中第 2 列换成常数项,第 1 列不动得到的行列式.

上述结论对于 n 个方程的 n 元线性方程组是否成立?本节就来探讨这个问题.

探索

数域 K 上 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵用 A 表示，增广矩阵用 $\widetilde{A}$ 表示，显然 $\widetilde{A}$ 是在 A 的右边添上由常数项组成的一列.

对增广矩阵 $\widetilde{A}$ 施行初等行变换化成阶梯形矩阵，记作 $\widetilde{J}$，则系数矩阵 A 经过这些初等行变换也被化成阶梯形矩阵，记作 J，显然 J 比 $\widetilde{J}$ 少了最后一列.

据本章 § 3 的评注[2]得，$|J|=l|A|$，其中 l 是 K 中某个非零数.

情形 1 设 $|A|\neq 0$，则 $|J|\neq 0$. 于是 J 没有零行，因此 J 的 n 行都是非零行. 从而 J 有 n 个主元. 由于 J 只有 n 列，因此 J 的 n 个主元分别位于第 $1,2,\cdots,n$ 列. 从而 J 必定形如

$$J = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 $c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}\neq 0$. 由于 $\widetilde{J}$ 比 J 多一列，因此 $\widetilde{J}$ 形如

$$\widetilde{J} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}.$$

由此看出原方程组(1)有解. 由于 $\widetilde{J}$ 的非零行个数等于未知量个数 n，从而原方程组(1)有惟一解.

情形 2 设 $|A|=0$，则 $|J|=0$. 我们断言 J 必有零行(否则，J 的 n 行全是非零行. 据情形 1 的讨论过程知道，此时 $|J|=c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}\neq 0$，矛盾). 因此 J 的非零行个数 $r<n$. 从而 J 必定形如

$$J=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $c_{11}c_{2j_2}\cdots c_{rj_r}\neq 0$. 于是 $\tilde{J}$ 形如

$$\tilde{J}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $d_{r+1}\neq 0$ 时，原方程组(1)无解；当 $d_{r+1}=0$ 时，原方程组有解；由于 $\tilde{J}$ 的非零行个数 $r<n$，因此原方程组(1)有无穷多个解.

综上所述，我们得到了下述结论：

定理 1 n 个方程的 n 元线性方程组，如果它的系数行列式 $|A|\neq 0$，则它有惟一解；如果它的系数行列式 $|A|=0$，则它无解或者有无穷多个解. 从而 n 个方程的 n 元线性方程组有惟一解的充分必要条件是它的系数行列式不等于 0. ▌

把定理 1 应用到齐次线性方程组上便得到下述结论.

推论 2 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是它的系数行列式不等于 0. 从而 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零. ▌

定理 1 使得我们对于 n 个方程的 n 元线性方程组不用对它的增广矩阵进行初等行变换，而只需计算它的系数行列式，就可以判断方程组

是否有惟一解.

推论 2 使得我们对于 n 个方程的 n 元齐次线性方程组不用对它的系数矩阵进行初等行变换，只需计算它的系数行列式，就可以判断齐次线性方程组有没有非零解.

示范

例 1 判断下述线性方程组是否有惟一解：

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \cdots + a_n^nx_n = b_n, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不同的非零数.

解 方程组(2)的方程个数等于未知量个数 n，考虑系数行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不同，而且它们都不等于 0，因此上述行列式不等于 0. 从而方程组(2)有惟一解.

例 2 当 λ 取什么值时，下述齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} (\lambda - 6)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (\lambda - 3)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + (\lambda - 3)x_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

解 先计算齐次线性方程组的系数行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda - 6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & \lambda - 7 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)\begin{vmatrix} \lambda - 6 & 4 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = (\lambda - 7)^2(\lambda + 2).$$

于是

$$\begin{aligned}&\text{齐次线性方程组(3)有非零解}\\&\Longleftrightarrow (\lambda-7)^2(\lambda+2)=0\\&\Longleftrightarrow \lambda=7\text{ 或 }\lambda=-2.\end{aligned}$$

观察

为了探讨 n 个方程的 n 元线性方程组有惟一解时，这个解是什么，我们需要了解连加号 $\sum$ 的性质.

设有 $m\cdot n$ 个数相加：

$$\begin{aligned}S=&c_{11}+c_{12}+\cdots+c_{1n}\\&+c_{21}+c_{22}+\cdots+c_{2n}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+c_{m1}+c_{m2}+\cdots+c_{mn}.\end{aligned}\tag{4}$$

我们可以按照(4)式的行分组，先分别把第 1 行，第 2 行，…，第 m 行的 n 个元素相加，然后再求所得数的和：

$$S=\left(\sum_{j=1}^{n}c_{1j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{2j}\right)+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{mj}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right).\tag{5}$$

我们也可以按照(4)式的列分组，先分别把第 1 列、第 2 列、…、第 n 列的 m 个元素相加，然后再求所得数的和：

$$S=\left(\sum_{i=1}^{m}c_{i1}\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}c_{i2}\right)+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{m}c_{in}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\right).\tag{6}$$

从(5)式和(6)式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\right).\tag{7}$$

公式(7)在下面将用到，以后也经常用到.

论证

定理 3 n 个方程的 n 元线性方程组(1)有惟一解时，这个解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|},\frac{|B_2|}{|A|},\cdots,\frac{|B_n|}{|A|}\right),\tag{8}$$

其中 $|A|$ 是方程组的系数行列式，并且

$$|B_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

证明 为了证有序数组(8)是方程组(1)的解,只要把它们代入(1)的每一个方程,看是否变成恒等式. 对于 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,把(8)式代入第 i 个方程,计算它的左边的值:

$$\begin{aligned} & a_{i1}\frac{|B_1|}{|A|} + a_{i2}\frac{|B_2|}{|A|} + \cdots + a_{in}\frac{|B_n|}{|A|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{|B_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|B_j|. \end{aligned} \tag{10}$$

把(9)式中的行列式按照第 j 列展开,注意它的(k, j)元的代数余子式与$|A|$的(k, j)元的代数余子式 A_{kj}一致,因此得到

$$|B_j| = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}. \tag{11}$$

把(11)式代入(10)式得,第 i 个方程的左边的值为

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|B_j| &= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_kA_{kj}\right) = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_kA_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{|A|}(b_1 \cdot 0 + \cdots + b_{i-1} \cdot 0 + b_i|A| \\ &\qquad + b_{i+1} \cdot 0 + \cdots + b_n \cdot 0) \\ &= b_i. \end{aligned}$$

b_i 是第 i 个方程的右边的值. 因此,有序数组 (8) 是方程组 (1) 的解. ▌

定理 1 的充分性和定理 3 合起来称为**克莱姆(Cramer)法则**. 定理 1 的必要性是本书作者给出的.

利用行列式的性质和按一行(列)展开的定理,我们解决了 n 个方程的 n 元线性方程组有惟一解的判定和解的公式表示. 行列式的应用远不止于线性方程组,它在几何、分析等各个数学分支以及实际问题中都有重要应用.

习 题 2.5

1. 判断下述线性方程组有无解? 有多少解?

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 = b_1, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 = b_2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 = b_3. \end{cases}$$

2. 判断下述线性方程组有无解? 有多少解?

$$\begin{cases} a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b_1, \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 + \cdots + a_n^3x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n+1}x_1 + a_2^{n+1}x_2 + \cdots + a_n^{n+1}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不同的非零数.

3. 当 λ 取什么值时,下述齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (\lambda - 8)x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 14x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 0. \end{cases}$$

4. 当 a, b 取什么值时,下述齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. 当 a, b 取什么值时,下述线性方程组有惟一解?

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

*6. 对于第 5 题中的线性方程组,当 a, b 为何值时,方程组无解? 当 a, b 为何值时,方程组有无穷多个解?

*7. 讨论下述线性方程组何时有惟一解？有无穷多个解？无解？

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

§6 行列式按 k 行(列)展开

回顾

我们在本章§4讲了行列式按一行(列)展开定理. 例如,3阶行列式$|A|$按第1行展开得

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中3个二阶行列式依次为(1,1)元、(1,2)元、(1,3)元的余子式. 现在我们反过来看,把这3个二阶行列式都称为$|A|$的**子式**,而把3个一阶行列式$|a_{11}|$,$|a_{12}|$,$|a_{13}|$分别叫做这3个子式的**余子式**. $|A|$的子式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

是由$|A|$的第2,3行与第2,3列交叉处的元素按原来的排法组成的二阶行列式,我们把它记作

$$A\begin{pmatrix} 2,3 \\ 2,3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中括号内上面一行是行指标,下面一行是列指标. 子式(3)的余子式$|a_{11}|$是$|A|$的1阶子式,类似地把它记成$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 把

$$(-1)^{(2+3)+(2+3)}A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

称为子式(3)的**代数余子式**. $|A|$中第 2,3 行元素组成的二阶子式共有 3 个,它们都出现在公式(1)的右端. 运用子式和代数余子式的术语,3 阶行列式按第 1 行展开的公式(1)又可以叙述成:

3 阶行列式$|A|$中取定两行:第 2,3 行,这两行元素形成的所有 2 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$.

3 阶行列式$|A|$中取定其他两行,也有类似的结论. 这称为 3 阶行列式$|A|$**按两行展开**.

对于 n 阶行列式是否也有类似的结论?

抽象

n 阶行列式$|A|$中任意取定 k 行、k 列($1\leqslant k<n$),位于这些行和列的交叉处的 k^2 个元素按原来的排法组成的 k 阶行列式,称为$|A|$的一个 k 阶**子式**. 如果取定第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行($i_1<i_2<\cdots<i_k$),取定第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列($j_1<j_2<\cdots<j_k$),则所得到的 k 阶子式记作

$$A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\j_1,j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}. \tag{5}$$

划去子式(5)所在的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行,第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列,剩下的元素按原来的排法组成的$(n-k)$阶行列式,称为子式(5)的**余子式**. 它前面乘以

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} \tag{6}$$

则称为子式(5)的**代数余子式**.

例如,5 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{vmatrix}. \tag{7}$$

取定$|A|$的 1,2 行,第 4,5 列得到的 2 阶子式为

$$A\begin{pmatrix}1,2\\4,5\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{14} & a_{15}\\a_{24} & a_{25}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

子式(8)的余子式为

$$A\begin{pmatrix}3,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\a_{41} & a_{42} & a_{43}\\a_{51} & a_{52} & a_{53}\end{vmatrix}. \tag{9}$$

子式(8)的代数余子式为

$$(-1)^{(1+2)+(4+5)}A\begin{pmatrix}3,4,5\\1,2,3\end{pmatrix}. \tag{10}$$

5 阶行列式$|A|$中,取定第 1,2 行,这两行元素形成的 2 阶子式的个数为

$$C_5^2=\frac{5\times 4}{2!}=10.$$

当取定第 j_1,j_2 列($j_1<j_2$)时,所得到的 2 阶子式为

$$A\begin{pmatrix}1,2\\j_1,j_2\end{pmatrix}. \tag{11}$$

子式(11)的余子式为

$$A\begin{pmatrix}3,4,5\\j_1',j_2',j_3'\end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中$\{j_1',j_2',j_3'\}$是$\{j_1,j_2\}$对于全集$\{1,2,3,4,5\}$的补集,并且

$$j_1'<j_2'<j_3'.$$

论证

定理 1 (Laplace) 在 n 阶行列式$|A|$中,取定 k 行:第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行($i_1<i_2<\cdots<i_k$,且 $1\leqslant k<n$),则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$. ▌

我们对于 5 阶行列式$|A|$来叙述证明的思路,这一思路对于 n 阶行列式也行得通.

在 5 阶行列式$|A|$中,取定两行:第 i_1,i_2 行($i_1<i_2$),要证明下式成立:

$$|A| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant 5} A\begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ j_1, j_2 \end{pmatrix} (-1)^{(i_1+i_2)+(j_1+j_2)} A\begin{pmatrix} i_1', i_2', i_3' \\ j_1', j_2', j_3' \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中$\{i_1', i_2', i_3'\}$是$\{i_1, i_2\}$对于全集$\{1,2,3,4,5\}$的补集.且$i_1'<i_2'<i_3'$;$\{j_1', j_2', j_3'\}$是$\{j_1, j_2\}$对于全集$\{1,2,3,4,5\}$的补集,且$j_1'<j_2'<j_3'$.

证明思路如下:(13)式左端$|A|$是5! 项的代数和.我们来看右端是多少项的代数和.右端中的2阶子式是2! 项的代数和,3阶子式是3! 项的代数和,它们的乘积展开后为2! 3! 项的代数和.又由于右端连加号中求和的项数为C_5^2.因此右端的代数和中的项数为

$$C_5^2 \cdot 2!\,3! = \frac{5!}{2!3!}2!3! = 5!.$$

这证明了(13)式右端的项数等于左端的项数.如果我们能进一步证明右端的每一项都是左端的某一项,那么右端的5! 项的代数和就正好是左端的5! 项的代数和,从而右端与左端相等.这第二步的证明可以看丘维声编著的《高等代数(上册)》(高等教育出版社出版)的第72～73页.

定理1称为行列式按k行展开定理,也称为**拉普拉斯定理**.

由于行列式中行与列的地位对称,因此也有行列式按k列展开定理:

定理2 n阶行列式$|A|$中,取定k列,则这k列元素形成的所有k阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$. ▌

行列式按k行(列)展开定理在计算某些特殊类型的行列式时发挥着重要作用.看下面的例子.

示范

例1 证明下式成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

证明 把(14)式左端的行列式按前 k 行展开，这 k 行元素形成的 k 阶子式中，只有左上角的 k 阶子式的值可能不为零，其余的 k 阶子式一定包含零列，从而其值为零. 左上角的 k 阶子式的余子式正好是右下角的 r 阶子式，并且

$$(-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)}=1,$$

因此(14)式成立. ▌

令

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix},$$

则(14)式可以简洁地写成

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{vmatrix}=|A_1|\,|A_2|. \tag{15}$$

注意(15)式中 A_1, A_2 都必须是方阵.

公式(15)是非常有用的.

习 题 2.6

1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

*3. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}.$$

*4. 设$|A|$是关于$1,2,\cdots,n$这n个数的范德蒙行列式. 计算：

(1) $A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 2,3,\cdots,\ n \end{pmatrix}$；　　(2) $A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 1,3,\cdots,\ n \end{pmatrix}$.

第三章　线性方程组的进一步理论

思考

为了直接用线性方程组的系数和常数项判断方程组有没有解，有多少解，我们在第二章给出了用系数行列式判断 n 个方程的 n 元线性方程组有惟一解的充分必要条件. 这一判定方法只适用于方程个数与未知量个数相等的线性方程组；而且当系数行列式等于零时，只能得出方程组无解或有无穷多个解的结论，没有区分出何时无解，何时有无穷多个解. 能不能对于任意的线性方程组，给出直接从它的系数和常数项判断方程组有没有解，有多少解的方法呢？为此，我们需要探讨和建立线性方程组的进一步理论. 这一理论还将使我们能弄清楚线性方程组有无穷多个解时解集的结构.

探索

判断下述线性方程组有没有解？有多少解？

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ x_1 - 2x_2 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 = -9. \end{cases}$$

我们按照第一章给出的方法，把方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此看出，方程组有解，并且有惟一解.

在上述化成阶梯形矩阵的过程中，需要把一行的倍数加到另一行上. 例如，把第 1 行的(−3)倍加到第 3 行上. 第 1 行的(−3)倍可以写成

$$(-3)(1,-1,-2)=(-3,3,6), \tag{1}$$

再把它加到第 3 行上，可以写成

$$(-3,3,6)+(3,-4,-9)=(0,-1,-3). \tag{2}$$

从上述例子受到启发，为了研究直接从线性方程组的系数和常数项判断它有没有解，有多少解的问题，需要在所有 n 元有序数组组成的集合中，规定像(2)式那样的加法运算，以及像(1)式那样的数量乘法运算. 因此这一章我们将研究规定了加法和数量乘法运算的 n 元有序数组的集合的结构，然后利用它研究如何直接从线性方程组的系数和常数项判断方程组有无解，有多少解的问题，以及方程组有无穷多个解时解集的结构问题.

§1 n 维向量空间 K^n

抽象

取定一个数域 K，设 n 是任意给定的一个正整数. 令

$$K^n \overset{\text{def}}{=\!=} \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in K,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

K^n 中两个元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 称为**相等**，如果 $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n$.

K^n 中的元素用小写希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示.

在 K^n 中规定加法运算如下：

$$\begin{aligned}&(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)\\ &\overset{\text{def}}{=\!=}(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).\end{aligned} \tag{1}$$

在 K 的元素与 K^n 的元素之间规定数量乘法运算如下：

$$k(a_1,a_2,\cdots,a_n) \overset{\text{def}}{=\!=} (ka_1,ka_2,\cdots,ka_n),\quad k\in K. \tag{2}$$

容易直接验证加法和数量乘法满足下述 8 条运算法则：对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in K^n$，以及任意 $k,l\in K$，有

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ （加法**交换律**）；

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ （加法**结合律**）；

3° 把元素 $(0,0,\cdots,0)$ 记作 0，它使得

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha,$$

称 0 是 K^n 的**零元素**；

4° 对于 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in K^n$，令

$$-\alpha\overset{\text{def}}{=\!=}(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)\in K^n,$$

我们有

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0,$$

称 $-\alpha$ 是 α 的**负元素**；

5° $1\alpha=\alpha$；

6° $(kl)\alpha=k(l\alpha)$；

7° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

8° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

定义 1 数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n，连同定义在它上面的加法运算和数量乘法运算及其满足的 8 条运算法则一起，称为数域 K 上的一个 ***n* 维向量空间**. K^n 的元素称为 ***n* 维向量**；设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称 a_i 是 α 的第 i 个**分量**.

在 n 维向量空间 K^n 中，可以定义减法运算如下：

$$\alpha-\beta\overset{\text{def}}{=\!=}\alpha+(-\beta). \tag{3}$$

在 n 维向量空间 K^n 中，容易直接验证下述 4 条性质：

$$0\alpha=0; \tag{4}$$

$$(-1)\alpha=-\alpha; \tag{5}$$

$$k0=0; \tag{6}$$

$$k\alpha=0 \implies k=0 \text{ 或者 } \alpha=0. \tag{7}$$

n 元有序数组可以写成一行：$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称它为**行向量**. 也可以把 n 元有序数组写成一列：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

称它为**列向量**. 把写成列的所有 n 元有序数组组成的集合仍记作 K^n，并且在 K^n 中类似地定义加法运算，在 K 的元素与 K^n 的元素之间定义

数量乘法运算，它们仍满足 8 条运算法则，因此这时 K^n 也是数域 K 上的一个 n 维向量空间. 它与前面所说的 n 维向量空间 K^n 没有本质的区别，只是元素的写法不同而已.

例如，数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

A 的每一行是 n 维行向量，把第 i 个行向量 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 记作 γ_i，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 称为 A 的**行向量组**. A 的每一列是 s 维列向量，把第 j 个列向量

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{bmatrix}$$

记作 α_j，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为 A 的**列向量组**.

观察

在 K^3 中，设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix},$$

则

$$3\alpha_1+2\alpha_2=3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

我们把 $3\alpha_1+2\alpha_2$ 称为 α_1,α_2 的一个**线性组合**. 记

$$\beta=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

从(8)式知道，$\beta=3\alpha_1+2\alpha_2$，我们称 β 可以由 α_1,α_2 **线性表出**.

抽象

在 K^n 中，给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，任给 K 中一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，我们把 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个**线性组合**，把 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为**系数**.

对于 $\beta\in K^n$，如果存在 K 中一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s, \tag{9}$$

则称 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性表出**.

分析

利用向量的加法运算和数量乘法运算，我们可以把数域 K 上的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{10}$$

写成

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}. \tag{11}$$

令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix},$

则线性方程组(10)可以写成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta, \tag{12}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是方程组的系数矩阵的列向量组，β 是常数项组成的列向量. 于是

数域 K 上的线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ **有解**