《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第二章　行列式

习题 2.1　n 元排列

1. 求下列各个排列的逆序数，并且指出它们的奇偶性：

(1) **315462**

解： 统计每个元素前比它大的元素个数（或后方比它小的元素个数）：

- 3 后面比 3 小的有：1, 2 （2 个）
- 1 后面比 1 小的有：无（0 个）
- 5 后面比 5 小的有：4, 2 （2 个）
- 4 后面比 4 小的有：2 （1 个）
- 6 后面比 6 小的有：2 （1 个）
- 2 后面无（0 个）

逆序数 $\tau = 2 + 0 + 2 + 1 + 1 + 0 = 6$。**该排列为偶排列**。

(2) **365412**

解：

- 3 后有 1, 2 （2 个）
- 6 后有 5, 4, 1, 2 （4 个）
- 5 后有 4, 1, 2 （3 个）
- 4 后有 1, 2 （2 个）
- 1 后无（0 个）

逆序数 $\tau = 2 + 4 + 3 + 2 + 0 = 11$。**该排列为奇排列**。

(3) **654321**

解： 这是自然顺序 123456 的逆序排列。$n=6$，逆序数 $\tau=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$。**该排列为奇排列**。

(4) **7654321**

解： 这是自然顺序的逆序排列。$n=7$，逆序数 $\tau=\frac{7\times 6}{2}=21$。**该排列为奇排列**。

(5) **87654321**

解： 这是自然顺序的逆序排列。$n=8$，逆序数 $\tau=\frac{8\times 7}{2}=28$。**该排列为偶排列**。

(6) **987654321**

解： 这是自然顺序的逆序排列。$n=9$，逆序数 $\tau=\frac{9\times 8}{2}=36$。**该排列为偶排列**。

(7) **123456789**

解： 这是自然排列（标准排列）。逆序数 $\tau=0$。**该排列为偶排列**。

(8) **518394267**

解： 统计逆序数:

- 5: 1, 3, 4, 2 (4 个)
- 1: (0 个)
- 8: 3, 4, 2, 6, 7 (5 个)
- 3: 2 (1 个)
- 9: 4, 2, 6, 7 (4 个)
- 4: 2 (1 个)
- 2: (0 个)
- 6: (0 个)

逆序数 $\tau=4+0+5+1+4+1+0+0=15$。**该排列为奇排列**。

(9) **518694237**

解： 统计逆序数:

- 5: 1, 4, 2, 3 (4 个)
- 1: (0 个)
- 8: 6, 4, 2, 3, 7 (5 个)

- 6: 4, 2, 3 (3 个)
- 9: 4, 2, 3, 7 (4 个)
- 4: 2, 3 (2 个)
- 2: (0 个)
- 3: (0 个)

逆序数 $\tau = 4+0+5+3+4+2 = 18$。**该排列为偶排列**。

---

2. 求下列 n 元排列的逆序数：

(1) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$

解： 该排列前 $n-1$ 个元素是 $n-1, n-2, \ldots, 1$，即 1 到 $n-1$ 的逆序排列，其逆序数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$。最后一个元素 n 是最大的，排在最后，不与前面的任何元素构成逆序。故总逆序数为：

$$\tau = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

(2) $23\cdots(n-1)n1$

解： 元素 1 位于最后一位，它比前面的 $2, 3, \ldots, n$ 这 $n-1$ 个数都小，因此构成 $n-1$ 个逆序。前面的 $2, 3, \ldots, n$ 自身是自然顺序，逆序数为 0。故总逆序数为：

$$\tau = n-1$$

---

3. 写出把排列 315462 变成排列 123456 的那些对换。

解： 我们可以通过逐步归位的方法进行对换（方法不唯一）：

1. 当前：3 1 5 4 6 2。目标首位是 1，交换 3 和 1：

$$3\ 1\ 5\ 4\ 6\ 2 \xrightarrow{(3,1)} \mathbf{1}\ 3\ 5\ 4\ 6\ 2$$

2. 第二位目标是 2，2 在最后，交换 3 和 2：

$$1\ 3\ 5\ 4\ 6\ 2 \xrightarrow{(3,2)} 1\ \mathbf{2}\ 5\ 4\ 6\ 3$$

3. 第三位目标是 3，3 在最后，交换 5 和 3：

$$1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 3 \xrightarrow{(5,3)} 1\ 2\ \mathbf{3}\ 4\ 6\ 5$$

4. 第四位是 4，已归位。

5. 第五位目标是 5，交换 6 和 5：

$$1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5 \xrightarrow{(6,5)} 1\ 2\ 3\ 4\ \mathbf{5}\ \mathbf{6}$$

所作对换为： $(1,3),(2,3),(3,5),(5,6)$（答案不唯一，但必定是偶数次）。

---

4. 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并且讨论它的奇偶性。

解： 这是 $1,2,\ldots,n$ 的完全逆序排列。逆序数为：

$$\tau = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

奇偶性讨论：

- 当 $n \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，是**偶排列**。
- 当 $n \equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，是**奇排列**。

---

5. 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 r，求 n 元排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数。

解： 在 n 个元素的所有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个元素对中，任意一对 (a,b) 在原排列中要么构成逆序，要么构成顺序。当排列倒序后（即变成 $j_n\cdots j_1$），原先的顺序对变为逆序对，原先的逆序对变为顺序对。设原排列逆序数为 r，则顺序对数为 $N-r$，其中 $N=\frac{n(n-1)}{2}$。倒序后，原先的顺序对全部转化为逆序对。故新排列的逆序数为：

$$\tau' = \frac{n(n-1)}{2} - r$$

---

6. 计算下列 2 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **解：** 原式 $= 3\times 2-(-1)\times 5 = 6+5 = 11$。

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ **解：** 原式 $= 0 \times 4 - 0 \times 1 = 0$。

(3) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$ **解：** 原式 $= (-2) \times (-10) - 5 \times 4 = 20 - 20 = 0$。

---

7. 利用 2 阶行列式，判断下述二元一次方程组是否有惟一解？并且当有惟一解时，求出这个解。

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

解： 计算系数行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-3) \times 5 = 8 + 15 = 23$$

因为 $D = 23 \neq 0$，所以该方程组**有惟一解**。

利用克拉默法则（Cramer's Rule）求解：

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - (-3) \times 6 = 28 + 18 = 46$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 7 \times 5 = 12 - 35 = -23$$

故解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{46}{23} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-23}{23} = -1$$

即方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ 。

习题 2.2 n 阶行列式的定义

1. 按定义计算下列行列式:

(1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解: 根据行列式的定义，每一行必须取不同列的元素。

- 第 1 行只能取第 4 列的 a_{14}（其余为 0）。
- 第 2 行只能取第 3 列的 a_{23}（第 4 列已被占，其余为 0）。
- 第 3 行只能取第 2 列的 a_{32}（第 3、4 列已被占，其余为 0）。
- 第 4 行只能取第 1 列的 a_{41}。

所取元素为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，列标排列为 4321。该排列的逆序数 $\tau(4321) = 3+2+1+0 = 6$（偶数）。

故原式 $= a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$。

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解: 这是副对角线行列式。非零项为 $a_1a_2\cdots a_n$。列标排列为 $n, n-1, \cdots, 2, 1$。该排列的逆序数为 $\tau = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$。

故原式 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$。

(3)

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解: 每行取非零元素，得到的项为 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n$。对应的列标排列为：$2, 3, \cdots, n, 1$。计算逆序数：

- 元素 $2, 3, \ldots, n$ 之间不构成逆序。
- 最后一位是 1，它比前面的 $n-1$ 个数都小，构成 $n-1$ 个逆序。

总逆序数 $\tau = n - 1$。

故原式 $= (-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n$。

(4)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

解: 该行列式可视为 n 阶行列式。非零项为 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$。列标排列为：$n-1, n-2, \cdots, 1, n$。

- 前 $n-1$ 个元素是 1 到 $n-1$ 的逆序排列，逆序数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$。
- 最后一个元素 n 大于前面所有元素，不产生逆序。

总逆序数 $\tau = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$。

故原式 $= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$。

(5)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解： 利用行列式定义，选取不同行不同列的非零元素乘积。

- 第 1 行必取 1（第 4 列）;
- 第 2 行必取 2（第 3 列）;
- 第 5 行必取 5（第 5 列）;
- 剩下第 3 行和第 4 行，列 1 和列 2 可选。
- 第 3 行若取 8（第 3 列）则冲突，故必取 3（第 2 列）;
- 第 4 行若取 9（第 2 列）或 7（第 4 列）均冲突，故必取 4（第 1 列）。

非零项为 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$。列标排列为 $4, 3, 2, 1, 5$。逆序数计算：

- 4: 后有 3, 2, 1 (3 个)
- 3: 后有 2, 1 (2 个)
- 2: 后有 1 (1 个)
- 1, 5: (0 个)

$\tau = 6$ (偶数)。

故原式 $= 120$。

---

2. 计算下列 3 阶行列式：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

解： 利用对角线法则：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1\cdot 5\cdot 6+4\cdot 1\cdot 2+2\cdot 3\cdot 1-(2\cdot 5\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1+4\cdot 3\cdot 6)\\ &= 30+8+6-(20+1+72)\\ &= 44-93=-49\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2\cdot 1\cdot 6+(-1)(-2)\cdot 1+5\cdot 3\cdot 4-(5\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 3\cdot 6+2(-2)\cdot 4)\\ &= 12+2+60-(5-18-16)\\ &= 74-(-29)=103\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{vmatrix}$$

解： 这是一个上三角形行列式，其值等于主对角线元素的乘积。

故原式 $= a_{11}a_{22}a_{33}$。

(4)

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & a_1 & a_2\\ 0 & b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开 (见 2.4 方法，对角线法则也可简单求得)：

$$\text{原式} = c\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} = c(a_1b_2-a_2b_1)$$

***3. 用行列式定义计算：**

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0\\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

解： 观察行列式的最后三行（第 3, 4, 5 行）。这三行的非零元素只集中在第 1 列和第 2 列。根据行列式的定义，展开式的每一项是从每一行取一个不同列的元素的乘积。我们需要从第 3, 4, 5 行分别取元素，且这些元素的列标必须互不相同。然而，这三行的非零元素只能提供 2 个可用的列标（列 1 和列 2）。而要在 2 个可用的列中选出 3 个不同的列是不可能的。因此，在行列式的所有展开项中，至少有一个因子必为 0。

故该行列式的值为 0。

---

4. n 阶行列式的反对角线上 n 个元素的乘积一定带负号吗？

解： 不一定。

n 阶行列式反对角线上的元素乘积项为 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。对应的列标排列为 $n, n-1, \cdots, 2, 1$。该排列的逆序数为 $\tau = \frac{n(n-1)}{2}$。该项的符号由 $(-1)^\tau$ 决定。

- 当 $n = 2$ 时，$\tau = 1$，符号为负（$-$）。
- 当 $n = 3$ 时，$\tau = 3$，符号为负（$-$）。
- 当 $n = 4$ 时，$\tau = 6$，符号为正（$+$）。
- 当 $n = 5$ 时，$\tau = 10$，符号为正（$+$）。

一般来说：

- 若 $n \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，带正号。
- 若 $n \equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，带负号。

习题 2.3 行列式的性质

1. 计算下列行列式：

(1)

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$$

解： 先提取第二行的公因子 2，然后利用第三行的大数与上方行的关系简化。我们观察到 $196 = 200 - 4$，$203 = 200 + 3$，$199 = 200 - 1$。利用第二列：$C_2 - 600C_3$ 会太繁琐。直接观察行变换：$R_3 - 100R_2 = (196 - 200, 203 - 200, 199 - 200) = (-4, 3, -1)$。

$$原式 = 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3-100R_2} 2\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

利用第二行消元第一行和第三行：

$$\xrightarrow[R_3+4R_2]{R_1-5R_2} 2\begin{vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

按第一列展开：

$$= 2 \times 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2(-18 - (-14)) = -2(-4) = 8$$

(2)

$$\begin{vmatrix} -1 & 203 & 1/3 \\ 3 & 298 & 1/2 \\ 5 & 399 & 2/3 \end{vmatrix}$$

解： 观察第二列元素接近 200, 300, 400 的整数倍。第三列乘以 600 即可得到 200, 300, 400。作列变换 $C_2 - 600C_3$：

- $203 - 600 \times \frac{1}{3} = 203 - 200 = 3$
- $298 - 600 \times \frac{1}{2} = 298 - 300 = -2$
- $399 - 600 \times \frac{2}{3} = 399 - 400 = -1$

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1/3 \\ 3 & -2 & 1/2 \\ 5 & -1 & 2/3 \end{vmatrix}$$

提取第三列的公因子 $\frac{1}{6}$（为了处理整数）：

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

利用第一行消元：

$$\xrightarrow[R_3+5R_1]{R_2+3R_1} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 14 & 14 \end{vmatrix}$$

按第一列展开：

$$= \frac{1}{6} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 14 & 14 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(7 \times 14 - 9 \times 14) = -\frac{1}{6} \times 14 \times (-2) = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

解： 利用 $a_{11} = 1$ 将第一列其他元素化为 0。

$$\xrightarrow[R_3-2R_1,\ R_4-3R_1]{R_2+4R_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -12 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

按第一列展开，得到 3 阶行列式。观察到第 3 行与第 4 行前两个元素相同，作 $R_3 - R_2$（指新矩阵的行）：

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -12 & 3 \\ 3 & 5 & -10 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{vmatrix} -1 & -12 & 3 \\ 3 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

按第 3 行展开：

$$= 5 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & -12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5(-5 - (-36)) = 5 \times 31 = 155$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解：各行元素之和均为 $1+2+3+4=10$。将第 2, 3, 4 列加到第 1 列上，并提取公因子 10：

$$\xrightarrow{C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

将第 1 行分别从第 2, 3, 4 行中减去：

$$\xrightarrow{R_i-R_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开：

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

观察第 3 行与第 1 行的关系，作 R_3+R_1：

$$\xrightarrow{R_3+R_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

按第 3 行展开：

$$= 10 \times (-4) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -40(-2-2) = -40(-4) = 160$$

---

2. 计算下列 n 阶行列式：

(1)

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解： 各列加到第 1 列上（每行元素之和为 $a+n-1$）：

$$D \xrightarrow{\sum C_i \to C_1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

将第 1 行分别从其余各行减去 $R_i - R_1$：

$$= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

这是一个上三角形行列式，故

$$D = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

解： 从第 1 行到第 $n-1$ 行，分别减去第 n 行：$R_i - R_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$。

- 第 1 行变：$(-b, 0, \cdots, 0, b)$
- 第 2 行变：$(0, -b, \cdots, 0, b)$
- $\cdots$

$$D = \begin{vmatrix} -b & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & -b & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b & b \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n - b \end{vmatrix}$$

将第 1 列到第 $n-1$ 列全部加到第 n 列上：

- 第 n 列的前 $n-1$ 个元素变为：$b+(-b)=0$。
- 第 n 列的最后一个元素变为：$(a_n-b)+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=\sum_{i=1}^n a_i-b$。

$$D=\begin{vmatrix} -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \sum a_i - b \end{vmatrix}$$

这是一个下三角形行列式（或对角形），故

$$D=(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i-b\right)$$

---

3. 证明（也可参考书中例 3 做法）：

(1)

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

证： 记该行列式的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。观察各列之和：

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix} (a_1-b_1)+(b_1-c_1)+(c_1-a_1) \\ (a_2-b_2)+(b_2-c_2)+(c_2-a_2) \\ (a_3-b_3)+(b_3-c_3)+(c_3-a_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

即三列线性相关（$C_1+C_2+C_3=0$），故行列式的值为 0。得证。

(2)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=0$$

证： 作列变换：C_2-C_1 和 C_3-C_1。

$$\text{左式}=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 \\ a_2+b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 \\ a_3+b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}$$

观察变换后的第 2 列和第 3 列：第 2 列元素均为 b_2-b_1；第 3 列元素均为 b_3-b_1。若 $b_2-b_1=0$ 或 $b_3-b_1=0$，则有零列，行列式为 0。若均不为 0，则第 2 列与第 3 列成比例（比例系数为 $\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$），两列线性相关。故行列式的值为 0。得证。

***4. 计算下列 n 阶行列式：**

(1)

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解： 我们要消去第 1 列中除 a_1 以外的元素 b_i。利用第 i 行（$i=2,\dots,n$）的对角元 1，将第 1 列的 b_i 消去。具体操作：$C_1-b_2C_2-b_3C_3-\cdots-b_nC_n$。第 1 列第 1 行的元素变为：

$$a_1-(a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)=a_1-\sum_{k=2}^{n}a_kb_k$$

第 1 列其余元素变为：$b_i-1\cdot b_i=0$。变换后的行列式为下三角矩阵（实际上除第一行外是单位矩阵）：

$$D=\begin{vmatrix} a_1-\sum_{k=2}^{n}a_kb_k & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=a_1-\sum_{k=2}^{n}a_kb_k$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0$。

解： 利用初等行变换将行列式化简。

第一步：将第 1 行分别从第 2 行、第 3 行、$\cdots$、第 n 行中减去（即 $r_i - r_1$，其中 $i = 2, \dots, n$)。目的是利用第一行的 x_j 消去下方各行的 x_j。

- 第 1 列变为：$x_1 - (x_1 - a_1) = a_1$
- 第 i 列 $(i \neq 1)$ 对角线上变为：$(x_i - a_i) - x_i = -a_i$
- 其他位置变为：$x_j - x_j = 0$

变换后的行列式为：

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

这是一个“爪形”行列式（或箭头形）。为了计算它，我们可以利用第 2 行到第 n 行的非零元素（$-a_2, -a_3, \dots, -a_n$）将第 1 行的 $x_2, x_3, \dots, x_n$ 消为 0。

第二步：作行变换 $r_1 + \frac{x_2}{a_2} r_2 + \frac{x_3}{a_3} r_3 + \cdots + \frac{x_n}{a_n} r_n$。(题目已知 $a_i \neq 0$，故可以作分母)。

- 第 1 行第 j 列 $(j \geq 2)$ 变为：$x_j + \frac{x_j}{a_j}(-a_j) = 0$。
- 第 1 行第 1 列变为：

$$(x_1 - a_1) + \frac{x_2}{a_2} a_1 + \frac{x_3}{a_3} a_1 + \cdots + \frac{x_n}{a_n} a_1 = x_1 - a_1 + a_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{x_k}{a_k}$$

提取 $-a_1$ 公因子整理：

$$= -a_1 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{x_k}{a_k} \right) = -a_1 \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} \right)$$

此时行列式变为：

$$D_n = \begin{vmatrix} -a_1(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

按第一行展开，得到一个下三角形行列式：

$$
\begin{aligned}
D_n &= \left[-a_1\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{a_k}\right)\right]\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
&= \left[-a_1\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{a_k}\right)\right]\cdot((-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n)) \\
&= (-a_1)(-a_2)\cdots(-a_n)\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{a_k}\right) \\
&= (-1)^n a_1a_2\cdots a_n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\right)
\end{aligned}
$$

注：如果将括号展开，结果也可以写成：

$$
D_n = (-1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}a_i-\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\prod_{k\neq j}a_k\right)\right)
$$

习题 2.4　行列式按一行（列）展开

1. 计算下列行列式：

(1)

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ 2 & -5 & 1 & -3\\ 4 & 1 & -2 & 6\\ -3 & 2 & 7 & 1\end{vmatrix}$$

解： 利用第 1 行消去第 1 列的其他元素：$R_2-2R_1, R_3-4R_1, R_4+3R_1$。

$$D\to\begin{vmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 1 & -11\\ 0 & 9 & -2 & -10\\ 0 & -4 & 7 & 13\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}-1 & 1 & -11\\ 9 & -2 & -10\\ -4 & 7 & 13\end{vmatrix}$$

利用第 1 行消去第 1 列的其他元素：R_2+9R_1, R_3-4R_1。

$$=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -11\\ 0 & 7 & -109\\ 0 & 3 & 57\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & -109\\ 3 & 57\end{vmatrix}$$

$$=-(7\times 57-(-109)\times 3)=-(399+327)=-726$$

(2)

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & -3 & 5\\ -3 & 1 & 4 & -2\\ 7 & 2 & 5 & 3\\ 4 & -3 & -2 & 6\end{vmatrix}$$

解： 选取 $a_{22}=1$ 作为主元，消去第 2 列的其他元素：$R_1+4R_2, R_3-2R_2, R_4+3R_2$。

$$D\to\begin{vmatrix}-10 & 0 & 13 & -3\\ -3 & 1 & 4 & -2\\ 13 & 0 & -3 & 7\\ -5 & 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-10 & 13 & -3\\ 13 & -3 & 7\\ -5 & 10 & 0\end{vmatrix}$$

提取第 3 行的 -5：

$$=-5\begin{vmatrix}-10 & 13 & -3\\ 13 & -3 & 7\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

利用 R_3 消元：R_1+10R_3, R_2-13R_3。

$$= -5\begin{vmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 0 & 23 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5\times 1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 23 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -5(-49-(-69)) = -5(20) = -100$$

(3)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

解：观察发现 C_2 与 C_3 对应元素相加有规律，或直接做行变换 R_2+R_3。

$$\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

提取第 2 行公因子 $(\lambda-1)$：

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

C_3-C_2：

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

按第 2 行展开：

$$= (\lambda-1)\times 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda-9)-8) = (\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+18-8)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10) = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

(4)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

解：为了避免直接展开产生高次项，利用 $a_{21}=-1$ 消元。作行变换 $R_1+(\lambda-2)R_2$ 以及 R_3+2R_2：

1. R_1 变为：
   - 第 1 列：$(\lambda-2)+(\lambda-2)(-1)=0$
   - 第 2 列：$-3+(\lambda-2)(\lambda-8)=-3+(\lambda^2-10\lambda+16)=\lambda^2-10\lambda+13$
   - 第 3 列：$-2+(\lambda-2)(-2)=-2-2\lambda+4=-2(\lambda-1)$
2. R_3 变为：
   - 第 1 列：$2+2(-1)=0$
   - 第 2 列：$14+2(\lambda-8)=14+2\lambda-16=2(\lambda-1)$
   - 第 3 列：$(\lambda+3)+2(-2)=\lambda-1$

得到新行列式并按第 1 列展开：

$$D=\begin{vmatrix}0 & \lambda^2-10\lambda+13 & -2(\lambda-1)\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 0 & 2(\lambda-1) & \lambda-1\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}\lambda^2-10\lambda+13 & -2(\lambda-1)\\ 2(\lambda-1) & \lambda-1\end{vmatrix}$$

仅提取第 2 行的公因子 $(\lambda-1)$：

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda^2-10\lambda+13 & -2(\lambda-1)\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

计算 2 阶行列式：

$$\begin{aligned}D&=(\lambda-1)\left[1\cdot(\lambda^2-10\lambda+13)-2\cdot(-2(\lambda-1))\right]\\&=(\lambda-1)\left[\lambda^2-10\lambda+13+4(\lambda-1)\right]\\&=(\lambda-1)(\lambda^2-10\lambda+13+4\lambda-4)\\&=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9)\\&=(\lambda-1)(\lambda-3)^2\end{aligned}$$

---

2. 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n\end{vmatrix}$$

解：观察发现，从第 2 行开始，每一行的行和均为 0（例如第 2 行 $1+(-1)=0$，第 3 行 $2+(-2)=0$，第 n 行 $(n-1)+(1-n)=0$）。将第 2 列、第 3 列、$\cdots$、第 n 列全部加到第 1 列上：$C_1+\sum_{j=2}^{n} C_j$。

- 第 1 行第 1 列变为：$\sum_{i=1}^{n} a_i$。
- 第 i 行 $(i \geq 2)$ 第 1 列变为：0。

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，得到对角矩阵：

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

这是一个下三角行列式，对角线元素为 $-1,-2,\cdots,-(n-1)$。

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot [(-1)\cdot(-2)\cdots(-(n-1))]$$

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{i=1}^{n} a_i$$

---

3. 计算 n 阶行列式 $(n \geq 2)$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解：这是经典的**范德蒙德（Vandermonde）行列式**。根据范德蒙德行列式的公式：

$$V = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

---

4. 用数学归纳法证明：对一切 $n \geq 2$，有

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

证：(1) 当 $n = 2$ 时：

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x + a_1 \end{vmatrix} = x(x + a_1) - (-1)a_0 = x^2 + a_1 x + a_0$$

结论成立。

(2) 假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，即 $D_{n-1}(a_0, \ldots, x + a_{n-2}) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$。现考虑 n 阶行列式，按第 1 列展开：

$$D_n = x \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} M_{21} = x M_{11} + M_{21}$$

其中 M_{11} 是删去第 1 行第 1 列后的 $n-1$ 阶行列式：

$$M_{11} = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & a_1 \\ -1 & x & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

观察发现 M_{11} 的结构与原命题形式完全一致，只是常数项下标变为 a_1 到 a_{n-1}。根据归纳假设：

$$M_{11} = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$$

对于 M_{21}，删去第 2 行第 1 列：

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

按第 1 行展开，只有最后一个元素 a_0 非零：

$$M_{21} = a_0 \cdot (-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} -1 & x & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式，对角线元素为 -1（共 $n-2$ 个）。$M_{21} = a_0(-1)^n(-1)^{n-2} = a_0(-1)^{2n-2} = a_0$。

综上：

$$D_n = x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

证毕。

---

5. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

解： 按第 1 行展开：

$$D_n = 2D_{n-1} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{vmatrix}_{n-1}$$

第二个行列式按第 1 列展开得 $(-1)D_{n-2}$。故递推公式为：

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0 \implies (r-1)^2 = 0$。通解形式为 $D_n = c_1 + c_2 n$。计算初值：$D_1 = 2$；$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$。代入通解：$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \implies c_2 = 1, c_1 = 1$。故 $D_n = n + 1$。

---

6. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

解： 按第 1 行展开：

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 2a & a^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{vmatrix}_{n-1}$$

第二个行列式按第 1 列展开得 $1 \cdot D_{n-2}$。递推式：$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$。特征方程：$r^2 - 2ar + a^2 = 0 \implies (r-a)^2 = 0$。通解：$D_n = (c_1 + c_2 n)a^n$。初值：$D_1 = 2a = (c_1 + c_2)a \implies c_1 + c_2 = 2$。$D_2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 = (c_1 + 2c_2)a^2 \implies c_1 + 2c_2 = 3$。解得 $c_2 = 1, c_1 = 1$。故 $D_n = (n+1)a^n$。

***7. 解方程**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{其中} a_1, \cdots, a_{n-1} \text{ 是两两不同的数.}$$

解： 该行列式是 n 阶范德蒙德行列式，变量为 $x, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$。

$$D = \left[\prod_{1 \le j < i \le n-1} (a_i - a_j) \right] \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - x)$$

或者写成标准形式（x 是第 1 个变量）：

$$D = \left[\prod_{1 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \right] \cdot (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x)$$

题目给定 a_i 两两不同，故常数部分 $\prod(a_j - a_i) \neq 0$。要使行列式为 0，必须有：

$$(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) = 0$$

故方程的解为： $x = a_1, x = a_2, \cdots, x = a_{n-1}$。

***8. 计算 n 阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$

解： 利用第 2 行全是 2 的特点，将第 2 行分别从其余各行减去：$R_i - R_2$ $(i \neq 2)$。

- $R_1 - R_2 = (1-2, 0, 0, \cdots, 0) = (-1, 0, 0, \cdots, 0)$
- $R_3 - R_2 = (0, 0, 1, \cdots, 0)$
- $R_k - R_2 = (0, 0, 0, \cdots, k-2, \cdots, 0)$（第 k 个位置）
- $R_n - R_2 = (0, 0, 0, \cdots, 0, n-2)$

变换后的行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

按第 1 行展开：

$$= (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式，对角线元素为 $2, 1, 2, 3, \cdots, n-2$。

故 $D_n = (-1) \times 2(n-2)! = -2(n-2)!$。

注：此公式适用于 $n \geq 3$。当 $n = 2$ 时，直接计算得 -2；公式得 $-2(0)! = -2$，亦成立。

习题 2.5 克莱姆法则

1. 判断下述线性方程组有无解？有多少解？

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 = b_1 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 = b_2 \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 = b_3 \end{cases}$$

解： 计算系数行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{vmatrix}$$

该行列式第二列元素为 $2^2, 2^3, 2^4$，第三列元素为 $3^2, 3^3, 3^4$。作行变换 $R_2 - R_1, R_3 - R_1$：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 72 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 \times 72 - 12 \times 18) = 288 - 216 = 72$$

因为 $D = 72 \neq 0$，根据克莱姆法则，该方程组有惟一解。

---

2. 判断下述线性方程组有无解？有多少解？

$$\begin{cases} a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = b_1 \\ a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 + \cdots + a_n^3 x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n+1} x_1 + a_2^{n+1} x_2 + \cdots + a_n^{n+1} x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两不同的非零数。

解： 计算系数行列式 D。第 j 列的元素为 $a_j^2, a_j^3, \cdots, a_j^{n+1}$。从第 j 列提取公因子 a_j^2：

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & \cdots & a_n^{n+1} \end{vmatrix} = (a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

右边是范德蒙德行列式，故：

$$D = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

已知 a_i 为非零数，故 $\prod a_i^2 \neq 0$；已知 a_i 两两不同，故 $\prod(a_i - a_j) \neq 0$。因此 $D \neq 0$。根据克莱姆法则，该方程组有惟一解。

---

3. 当 λ 取什么值时，下述齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + (\lambda-8)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 14x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

解： 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $D = 0$。

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$R_3 + 2R_2$ 消元：

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_2 - 2C_3$：

$$\xrightarrow{C_2-2C_3} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda-4)+1) = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

令 $D = 0$，解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$。

答：当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$ 时，方程组有非零解。

---

4. 当 a, b 取什么值时，下述齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解： 系数行列式 D 为：

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}$$

利用第 3 行减去第 2 行 $R_3 - R_2$：

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$$

按第 3 行展开：

$$= -b \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1)$$

方程组有非零解 $\iff$ $D = 0$。即 $-b(a-1) = 0 \implies b = 0$ 或 $a = 1$。

答：当 $b = 0$ 或 $a = 1$ 时，方程组有非零解。

---

5. 当 a, b 取什么值时，下述线性方程组有惟一解？

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

解：系数行列式 D 与上一题相同：$D = -b(a-1)$。方程组有惟一解的充要条件是 $D \neq 0$。即 $b \neq 0$ 且 $a \neq 1$。

答：当 $b \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，方程组有惟一解。

***6. 对于第 5 题中的线性方程组，当 a, b 为何值时，方程组无解？当 a, b 为何值时，方程组有无穷多个解？**

解：由上题可知，当 $D = 0$ 即 $b = 0$ 或 $a = 1$ 时，方程组无解或有无穷多解。

情形 1：当 $b = 0$ 时

方程组变为：

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

后两个方程 $x_1 + x_3 = 1$ 与 $x_1 + x_3 = 2$ 矛盾，故此时**方程组无解**。

情形 2：当 $a = 1$ 且 $b \neq 0$ 时

增广矩阵为：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

进行行变换 $R_2 - R_1, R_3 - R_1$：

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由第 3 行得：$(2b-1)x_2 = 0$。由第 2 行得：$(b-1)x_2 = -1$。

1. 若 $b = 1$，第 2 行变为 $0 = -1$，矛盾，**无解**。
2. 若 $b \neq 1$，由第 2 行得 $x_2 = \frac{-1}{b-1}$。代入第 3 行方程：$(2b-1) \cdot \frac{-1}{b-1} = 0 \implies 2b-1 = 0 \implies b = \frac{1}{2}$。
    - 如果 $b \neq \frac{1}{2}$，则出现矛盾，**无解**。
    - 如果 $b = \frac{1}{2}$，则方程相容。此时 $x_2 = \frac{-1}{1/2-1} = 2$。代入第 1 行：$x_1 + 2 + x_3 = 2 \implies x_1 + x_3 = 0$，有**无穷多解**。

综上所述：

- 当 $b = 0$ 或 $(a = 1$ 且 $b \neq \frac{1}{2})$ 时，**方程组无解**。
- 当 $a = 1$ 且 $b = \frac{1}{2}$ 时，**方程组有无穷多个解**。

***7. 讨论下述线性方程组何时有惟一解？有无穷多个解？无解？**

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解： 系数行列式 $D = -b(a-1)$。

(1) 惟一解： 当 $D \neq 0$，即 $b \neq 0$ **且** $a \neq 1$ 时，方程组有惟一解。

(2) 无穷多解或无解：

- **当 $b=0$ 时：** 方程组变为：

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

后两个方程相同，等价于 $x_1 + x_3 = 1$。

  - 若 $a=1$，方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 + x_3 = 1 \implies x_2 = 1$，有无穷多解。
  - 若 $a \neq 1$，方程组为 $ax_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 + x_3 = 1 \implies (a-1)x_1 + x_2 = 1$，仍有无穷多解（秩为 2，变量 3）。

故只要 $b=0$，**方程组有无穷多个解**。

- **当 $a=1$ 且 $b \neq 0$ 时：** 方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1) \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \quad (2) \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1 \quad (3) \end{cases}$$

(3) - (2) 得：$bx_2 = 0$。因 $b \neq 0$，故 $x_2 = 0$。将 $x_2 = 0$ 代入 (2) 得 $x_1 + x_3 = 1$。将 $x_2 = 0$ 代入 (1) 得 $x_1 + x_3 = 2$。矛盾，此时**方程组无解**。

总结：

- 当 $b \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，有**惟一解**。
- 当 $b = 0$ 时，有**无穷多个解**。
- 当 $a = 1$ 且 $b \neq 0$ 时，**无解**。

习题 2.6 行列式按 k 行（列）展开

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解： 这是一个分块行列式。观察行列式的右上角是一个 2×3 的零矩阵。我们将行列式分块如下：

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 为 2×2 矩阵，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为 3×3 矩阵。根据 Laplace 定理,-1 项的指数是偶数，故 $D = \det(A) \cdot \det(B)$。

计算 $\det(A)$：

$$\det(A) = 2 \times 4 - 3 \times (-1) = 8 + 3 = 11$$

计算 $\det(B)$（按第 1 列展开）：

$$\det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(6-0) + 1(8-0) = 6 + 8 = 14$$

故原行列式的值为：

$$D = 11 \times 14 = 154$$

---

2. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

解： 该行列式具有如下分块形式：

$$D = \begin{vmatrix} A_{k\times k} & C_{k\times r} \\ O_{r\times k} & B_{r\times r} \end{vmatrix}$$

这是一个分块上三角形行列式。根据行列式的性质，其值等于对角线上两个子块行列式的乘积（可参考例 1）。

故 $D = \det(A)\cdot\det(B)$。

***3. 计算行列式**

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}$$

解： 根据题目给出的下标，行列式的左上角 O 是 $k\times r$ 的零矩阵，右上角 A 是 $k\times k$ 的矩阵，左下角 B 是 $r\times r$ 的矩阵，右下角 C 是 $r\times k$ 的矩阵。即：

$$D = \begin{vmatrix} O_{k\times r} & A_{k\times k} \\ B_{r\times r} & C_{r\times k} \end{vmatrix}$$

为了利用分块对角阵的结论，我们需要交换列的位置。将后 k 列（即包含 A 和 C 的列）整体移到前 r 列的左边。这相当于进行了 $r\times k$ 次相邻列的交换。交换后的行列式变为：

$$D' = \begin{vmatrix} A_{k\times k} & O_{k\times r} \\ C_{r\times k} & B_{r\times r} \end{vmatrix}$$

此时 $D' = \det(A)\cdot\det(B)$。由于 $D' = (-1)^{rk}D$，所以 $D = (-1)^{rk}D'$。

故 $D = (-1)^{rk}\det(A)\det(B)$。

***4. 设 $|A|$ 是关于 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的范德蒙行列式. 计算：**

$$(1)\ A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 2,3,\cdots,n \end{pmatrix}; \qquad (2)\ A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 1,3,\cdots,n \end{pmatrix}.$$

解： 设 $V(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ 表示关于 $x_1,\ldots,x_m$ 的 m 阶范德蒙行列式，其值为 $\prod_{1\le j<i\le m}(x_i-x_j)$。特别地，当 $x_k=k$ 时，$V(1,2,\ldots,m)=\prod_{k=1}^{m-1}k!$。

(1) 子式 $M_1 = A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 2,3,\cdots,n \end{pmatrix}$ 选取了前 $n-1$ 行（对应幂次 $0,1,\ldots,n-2$）和第 2 到 n 列（对应变量 $2,3,\ldots,n$）。故 M_1 是关于 $2,3,\ldots,n$ 的范德蒙行列式：

$$M_1 = V(2,3,\ldots,n) = \prod_{2\le j<i\le n}(i-j)$$

令 $u=j-1, v=i-1$，则 $1\le u<v\le n-1$，且 $i-j=v-u$。

$$M_1 = \prod_{1\le u<v\le n-1}(v-u) = V(1,2,\ldots,n-1)$$

根据范德蒙行列式数值公式：

$$M_1 = \prod_{k=1}^{(n-1)-1} k! = \prod_{k=1}^{n-2} k!$$

(2) 子式 $M_2 = A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,n-1 \\ 1,3,\cdots,n \end{pmatrix}$ 选取了前 $n-1$ 行和列 $1,3,\ldots,n$。故 M_2 是关于 $1,3,4,\ldots,n$ 的范德蒙行列式：

$$M_2 = V(1,3,4,\ldots,n)$$

我们将 M_2 与 $M_1 = V(2,3,4,\ldots,n)$ 进行比较。在 M_1 中，涉及第一个参数 2 的因子乘积为：

$$P_1 = (3-2)(4-2)\cdots(n-2) = 1\times 2\times\cdots\times(n-2) = (n-2)!$$

在 M_2 中，涉及第一个参数 1 的因子乘积为：

$$P_2 = (3-1)(4-1)\cdots(n-1) = 2\times 3\times\cdots\times(n-1) = (n-1)!$$

其余因子（即 $3,4,\ldots,n$ 之间的差）在 M_1 和 M_2 中完全相同。因此：

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = n-1$$

即：

$$M_2 = (n-1)M_1 = (n-1)\prod_{k=1}^{n-2} k!$$