

# 《简明线性代数》习题参考答案

作者: txbb

## 第八章 线性映射

### 习题 8.1 线性映射及其运算

1. 判断下面所定义的  $K^3$  上的变换, 哪些是线性变换?

$$(1) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3^2 \end{bmatrix};$$

$$(2) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

**解:** (1) 不是线性变换。因为变换中第三个分量出现了  $x_3^2$ , 不满足线性性质。

(2) 是线性变换。设  $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T \in K^3, k \in K$ 。变换后的每个分量都是  $x_1, x_2, x_3$  的一次齐次式, 显然满足加法和数乘的封闭性。即  $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$  且  $A(kX) = kA(X)$ 。

2. 判断下面所定义的  $M_n(K)$  上的变换, 哪些是线性变换?

(1) 设  $A \in M_n(K)$ , 令  $A(X) = XA, \forall X \in M_n(K)$ ;

(2) 设  $B, C \in M_n(K)$ , 令  $A(X) = BXC, \forall X \in M_n(K)$ 。

**解:** (1) 是线性变换。对于任意  $X, Y \in M_n(K)$  和  $k \in K$ :  $A(X + Y) = (X + Y)A = XA + YA = A(X) + A(Y)$ ;  $A(kX) = (kX)A = k(XA) = kA(X)$ 。

(2) 是线性变换。对于任意  $X, Y \in M_n(K)$  和  $k \in K$ :  $A(X + Y) = B(X + Y)C = BXC + BYC = A(X) + A(Y)$ ;  $A(kX) = B(kX)C = k(BXC) = kA(X)$ 。

\*3. 判断下面定义的  $K[x]$  上的变换是不是线性变换？给定  $a \in K$ ,

$$Af(x) = f(x+a), \quad \forall f(x) \in K[x].$$

**解：是线性变换。**对于任意  $f(x), g(x) \in K[x]$  和  $k \in K$ :  $A(f(x)+g(x)) = (f+g)(x+a) = f(x+a)+g(x+a) = Af(x)+Ag(x)$ ;  $A(kf(x)) = (kf)(x+a) = k \cdot f(x+a) = kAf(x)$ 。故  $A$  是线性变换。

4. 设  $\mathbf{R}^+$  是习题 7.1 第 1 题 (2) 小题的实线性空间（加法定义为乘积，数乘定义为幂），判别  $\mathbf{R}^+$  到  $\mathbf{R}$  的下述映射是不是线性映射？设  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，令

$$\log_a : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \log_a x.$$

**解：是线性映射。**设  $x, y \in \mathbf{R}^+$ （原空间的“向量”）， $k \in \mathbf{R}$ （标量）。回顾  $\mathbf{R}^+$  上的运算：向量加法为  $x \oplus y = xy$ ，数乘为  $k \odot x = x^k$ 。 $\mathbf{R}$  上的运算为通常的加法和乘法。(1) 保持加法： $\log_a(x \oplus y) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ 。成立。(2) 保持数乘： $\log_a(k \odot x) = \log_a(x^k) = k \log_a x$ 。成立。故  $\log_a$  是线性映射。

\*5. 在  $K[x]$  中，令  $Af(x) = xf(x), \forall f(x) \in K[x]$ 。(1) 证明  $A$  是  $K[x]$  上的一个线性变换；(2) 用  $D$  表示求导数，证明： $DA - AD = I$ 。

**证：(1)** 对于任意  $f, g \in K[x], k \in K$ :  $A(f+g) = x(f(x)+g(x)) = xf(x)+xg(x) = Af+Ag$ ;  $A(kf) = x(kf(x)) = k(xf(x)) = kAf$ 。故  $A$  是线性变换。

**(2)** 对任意  $f(x) \in K[x]$ ，验证  $(DA-AD)f(x)$ :  $DAf(x) = D(Af(x)) = D(xf(x)) = (x)'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。 $ADf(x) = A(Df(x)) = A(f'(x)) = xf'(x)$ 。所以， $(DA-AD)f(x) = (f(x) + xf'(x)) - xf'(x) = f(x) = If(x)$ 。即  $DA - AD = I$ 。

6. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是线性空间  $V$  的一个基， $A$  是  $V$  上的一个线性变换，证明： $A$  可逆当且仅当  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$  是  $V$  的一个基。

**证：必要性 ( $\Rightarrow$ ):** 若  $A$  可逆，则  $A$  是  $V$  到自身的同构映射。根据同构映射将基映射为基的性质， $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是基，则其象  $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$  也是  $V$  的一个基。

**充分性 ( $\Leftarrow$ ):** 若  $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$  是  $V$  的一个基。

1. **证明  $A$  是满射**: 因为  $A\alpha_i$  生成整个空间  $V$ , 对任意  $\beta \in V$ ,  $\beta$  可由  $A\alpha_i$  线性表出, 即  $\beta = \sum k_i A\alpha_i = A(\sum k_i \alpha_i)$ , 故  $A$  是满射。

2. **证明  $A$  是单射**: 设  $A(\xi) = 0$ 。设  $\xi = \sum x_i \alpha_i$ , 则  $A(\xi) = \sum x_i A\alpha_i = 0$ 。由于  $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$  线性无关, 故系数  $x_i$  全为 0, 即  $\xi = 0$ 。故  $\text{Ker} A = \{0\}$ 。综上, 线性变换  $A$  既单又满, 故  $A$  可逆。

7. 设  $A$  是线性空间  $V$  上的一个线性变换, 证明: 如果  $A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0 (m > 0)$ , 则  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$  线性无关。

**证**: 设有线性组合使得

$$k_0\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \dots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0 \quad (*)$$

在  $(*)$  式两边用变换  $A^{m-1}$  作用:

$$A^{m-1}(k_0\alpha + k_1A\alpha + \dots) = k_0A^{m-1}\alpha + k_1A^m\alpha + \dots = 0$$

已知  $A^m\alpha = 0$ , 故后续项  $A^{m+1}\alpha$  等均为 0。上式化为  $k_0A^{m-1}\alpha = 0$ 。因为已知  $A^{m-1}\alpha \neq 0$ , 所以必须有  $k_0 = 0$ 。

现在  $(*)$  式变为  $k_1A\alpha + \dots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$ 。两边用  $A^{m-2}$  作用, 同理可得  $k_1A^{m-1}\alpha = 0$ , 从而  $k_1 = 0$ 。以此类推, 可依次证得  $k_0 = k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$ 。故向量组线性无关。

8. 设  $V$  是数域  $K$  上的线性空间, 并且  $V = U \oplus W$ 。对于  $\alpha \in V, \alpha$  可唯一表示成  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in U, \alpha_2 \in W$ 。令  $P_U(\alpha) = \alpha_1, P_W(\alpha) = \alpha_2$ 。

(1) **证明  $P_U, P_W$  都是  $V$  上的一个线性变换**;

**证**: 设  $\alpha, \beta \in V, k \in K$ 。设  $\alpha = u_1 + w_1, \beta = u_2 + w_2$ , 其中  $u_i \in U, w_i \in W$ 。则  $\alpha + \beta = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$ 。由直和分解的唯一性:  $P_U(\alpha + \beta) = u_1 + u_2 = P_U(\alpha) + P_U(\beta)$ 。同理  $k\alpha = ku_1 + kw_1, P_U(k\alpha) = ku_1 = kP_U(\alpha)$ 。故  $P_U$  是线性变换。同理可证  $P_W$  是线性变换。

(2) **证明**:  $P_U(\delta) = \begin{cases} \delta, & \delta \in U \\ 0, & \delta \in W \end{cases}$ ;

**证**: 若  $\delta \in U$ , 则其分解为  $\delta = \delta + 0$  ( $\delta \in U, 0 \in W$ )。故  $P_U(\delta) = \delta$ 。若  $\delta \in W$ , 则其分解为  $\delta = 0 + \delta$  ( $0 \in U, \delta \in W$ )。故  $P_U(\delta) = 0$ 。

(3) 证明:  $P_U^2 = P_U, P_U + P_W = I, P_U P_W = 0$ 。

证: 对于任意  $\alpha \in V$ , 设  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  ( $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in W$ )。1.  $P_U^2(\alpha) = P_U(P_U(\alpha)) = P_U(\alpha_1)$ 。因为  $\alpha_1 \in U$ , 由 (2) 知  $P_U(\alpha_1) = \alpha_1$ 。所以  $P_U^2(\alpha) = \alpha_1 = P_U(\alpha)$ , 即  $P_U^2 = P_U$ 。

2.  $(P_U + P_W)(\alpha) = P_U(\alpha) + P_W(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = I(\alpha)$ 。所以  $P_U + P_W = I$ 。

3.  $(P_U P_W)(\alpha) = P_U(P_W(\alpha)) = P_U(\alpha_2)$ 。因为  $\alpha_2 \in W$ , 由 (2) 知  $P_U(\alpha_2) = 0$ 。所以  $P_U P_W = 0$ 。

## 习题 8.2 线性映射的矩阵表示

1. 设  $A$  是  $K^3$  上的一个线性变换:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix},$$

求  $A$  在标准基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵。

解: 标准基  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 。计算  $A\varepsilon_i$ :

$$A\varepsilon_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2(0) \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3$$

$$A\varepsilon_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2(1) \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\varepsilon_1 - 1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3$$

$$A\varepsilon_3 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2(0) \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 - 1\varepsilon_3$$

将像向量按列排成矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 在  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  中, 由下述两个函数

$$f_1 = e^{ax} \cos bx, \quad f_2 = e^{ax} \sin bx$$

生成的 2 维子空间记作  $V$ , 说明求导数  $D$  是  $V$  上的一个线性变换, 并且求  $D$  在  $V$  的一个基  $f_1, f_2$  下的矩阵。

解: (1) 证明是线性变换: 对于任意  $f \in V$ , 设  $f = k_1 f_1 + k_2 f_2$ 。  $D(f) = k_1 D(f_1) + k_2 D(f_2)$ 。计算导数:  $D(f_1) = D(e^{ax} \cos bx) = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx = af_1 - bf_2$ 。  $D(f_2) = D(e^{ax} \sin bx) = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = bf_1 + af_2$ 。可见  $D(f_1), D(f_2) \in V$ , 故  $D(f) \in V$ 。且求导显然满足线性性质。

(2) 求矩阵: 由上述计算得:  $D(f_1) = af_1 - bf_2$   $D(f_2) = bf_1 + af_2$  故在基  $f_1, f_2$  下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

3.  $A$  是  $M_2(K)$  上的一个线性变换:

$$A(X) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X, \quad \forall X \in M_2(K),$$

求  $A$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的矩阵。

解: 设  $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。  $A(E_{11}) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22}$ 。  
 $A(E_{12}) = P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22}$ 。  
 $A(E_{21}) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22}$ 。  
 $A(E_{22}) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22}$ 。将系数按列排列:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

4. 设  $V$  是数域  $K$  上的  $n$  维线性空间, 设有  $V$  上的线性变换  $A$  与  $V$  中的向量  $\alpha$ , 使得  $A^{n-1}\alpha \neq 0$  且  $A^n\alpha = 0$ 。证明:  $V$  中存在一个基, 使得  $A$  在这个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

证: 根据习题 8.1 第 7 题结论, 若  $A^{n-1}\alpha \neq 0$  且  $A^n\alpha = 0$ , 则向量组  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$  线性无关。因为  $V$  是  $n$  维空间, 这  $n$  个线性无关的向量构成  $V$  的一个基。为了得到题目形式的矩阵 (上对角线为 1), 我们要适当地排列基向量的顺序。取基  $\varepsilon_1 = A^{n-1}\alpha, \varepsilon_2 =$

$A^{n-2}\alpha, \dots, \varepsilon_{n-1} = A\alpha, \varepsilon_n = \alpha$ 。验证变换作用:  $A(\varepsilon_1) = A(A^{n-1}\alpha) = A^n\alpha = 0$ 。  $A(\varepsilon_2) = A(A^{n-2}\alpha) = A^{n-1}\alpha = \varepsilon_1$ 。  $A(\varepsilon_3) = A(A^{n-3}\alpha) = A^{n-2}\alpha = \varepsilon_2$ 。  $\vdots$   $A(\varepsilon_n) = A(\alpha) = \varepsilon_{n-1}$ 。即:  $A\varepsilon_1 = 0$   $A\varepsilon_2 = 1\varepsilon_1$   $A\varepsilon_3 = 1\varepsilon_2 \cdots A\varepsilon_n = 1\varepsilon_{n-1}$  写出矩阵表示 (第  $j$  列是  $A\varepsilon_j$  的坐标): 第 1 列为全 0。第 2 列第 1 个元素为 1 其余为 0。第 3 列第 2 个元素为 1 其余为 0... 所得矩阵正是题目所求形式。

**\*5. 设  $A$  是数域  $K$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的一个线性变换。证明: 在  $K[x]$  中存在一个次数不超过  $n^2$  的非零多项式  $f(x)$ , 使得  $f(A) = 0$ 。**

**证:** 考虑线性空间  $\text{Hom}(V, V)$  (即  $V$  上所有线性变换组成的集合, 也同构于  $M_n(K)$ )。已知  $\dim \text{Hom}(V, V) = n^2$ 。考虑  $\text{Hom}(V, V)$  中的  $n^2 + 1$  个向量:

$$I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$$

因为向量个数  $n^2 + 1$  大于空间维数  $n^2$ , 所以这组向量必然线性相关。即存在不全为 0 的系数  $k_0, k_1, \dots, k_{n^2} \in K$ , 使得

$$k_0 I + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_{n^2} A^{n^2} = 0$$

令  $f(x) = k_0 + k_1 x + \dots + k_{n^2} x^{n^2}$ 。显然  $f(x)$  是非零多项式 (因为系数不全为 0), 且次数不超过  $n^2$ , 且满足  $f(A) = 0$ 。

**6. 设  $V$  是数域  $K$  上  $n$  维线性空间,  $K$  可看成是自身上的线性空间,  $V$  到  $K$  的线性映射称为  $V$  上的线性函数。把  $\text{Hom}(V, K)$  记成  $V^*$ , 称  $V^*$  是  $V$  的对偶空间。证明:  $V^* \cong V$ 。**

**证:** 根据线性映射空间维数公式:  $\dim V^* = \dim \text{Hom}(V, K) = (\dim V)(\dim K) = n \times 1 = n$ 。又知  $\dim V = n$ 。因为  $V^*$  和  $V$  都是数域  $K$  上的有限维线性空间, 且维数相等, 所以它们同构, 即  $V^* \cong V$ 。

**7. 设  $A$  是数域  $K$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的一个线性变换,  $A$  在  $V$  的一个基下的矩阵是  $A$ 。证明:  $A$  是幂等变换当且仅当  $A$  是幂等矩阵。**

**证:** 线性变换  $A$  是幂等变换定义为  $A^2 = A$ 。设  $A$  在基下的矩阵为  $A$ 。根据线性变换运算与矩阵运算的对应关系 (同构保持乘法):  $A$  对应矩阵  $A$ , 则  $A^2$  对应矩阵  $A^2$ 。因此,  $A^2 = A \iff A^2 = A$ 。即  $A$  是幂等变换当且仅当它的矩阵  $A$  是幂等矩阵。

8. 已知  $K^3$  上线性变换  $A$  在标准基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

设  $\eta_1 = (2, 3, 1)^T, \eta_2 = (3, 4, 1)^T, \eta_3 = (1, 2, 2)^T$ , 求  $A$  在基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  下的矩阵  $B$ 。

解: 按照提示步骤进行计算:

第一步: 求过渡矩阵  $S$  基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  到基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  的过渡矩阵  $S$  由新基向量作为列向量组成:

$$S = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

第二步: 求逆矩阵  $S^{-1}$  对矩阵  $S$  进行求逆运算 (利用初等行变换  $(S|I) \rightarrow (I|S^{-1})$  或伴随矩阵法): 经计算可得:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第三步: 利用相似变换公式  $B = S^{-1}AS$  求矩阵  $B$  首先计算  $AS$ :

$$AS = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30-33+5 & 45-44+5 & 15-22+10 \\ 40-45+8 & 60-60+8 & 20-30+16 \\ 16-21+6 & 24-28+6 & 8-14+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

然后计算  $S^{-1}(AS)$ :

$$B = S^{-1}(AS) = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. 设  $V$  是数域  $K$  上 3 维线性空间,  $V$  上的一个线性变换  $A$  在  $V$  的一个基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵为  $A$ , 求  $A$  的全部特征值和特征向量。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

**解： 第一步： 求特征值**

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

通过行列式变换计算可得：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1$  (二重),  $\lambda_2 = 10$ 。

**第二步： 求特征向量**

1. 对于  $\lambda_1 = 1$ : 解齐次线性方程组  $(I - A)X = 0$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应方程为  $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ , 即  $x_1 = -2x_2 + 2x_3$ 。取自由未知量  $x_2, x_3$  分别为  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$ , 得基础解系:

$$\eta_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (2, 0, 1)^T$$

还原为  $V$  中的向量:

$$\xi_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \xi_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$$

故属于特征值 1 的全部特征向量为:

$$\{k_1(-2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(2\alpha_1 + \alpha_3) \mid k_1, k_2 \in K, \text{ 且 } k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

2. 对于  $\lambda_2 = 10$ : 解齐次线性方程组  $(10I - A)X = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \dots \xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

实际上解得  $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : -2$ 。基础解系为  $\eta_3 = (1, 2, -2)^T$ 。还原为  $V$  中的向量:  $\xi_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ 。故属于特征值 10 的全部特征向量为:

$$\{k(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

**解： 第一步：求特征值**

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$  (二重)。

**第二步：求特征向量**

1. 对于  $\lambda_1 = 1$ ：解方程组  $(I - A)X = 0$ ：

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系  $\eta_1 = (-2, 0, 1)^T$ 。还原为向量： $\xi_1 = -2\alpha_1 + \alpha_3$ 。故属于特征值 1 的全部特征向量为：

$$\{k(-2\alpha_1 + \alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

2. 对于  $\lambda_2 = 3$ ：解方程组  $(3I - A)X = 0$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 20 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即  $x_1 - 0.5x_3 = 0, x_2 + 0.5x_3 = 0$ 。令  $x_3 = 2$ , 得  $x_1 = 1, x_2 = -1$ 。基础解系  $\eta_2 = (1, -1, 2)^T$ 。还原为向量： $\xi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$ 。故属于特征值 3 的全部特征向量为：

$$\{k(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

10. 第 9 题中的线性变换  $A$  是否可对角化？如果  $A$  可对角化，求  $A$  的标准形。

**解：** (1) 对于矩阵 (1)，特征值 1 的代数重数为 2，几何重数（线性无关特征向量个数）也为 2。特征值 10 的代数重数 1，几何重数 1。几何重数之和  $2 + 1 = 3 = \dim V$ ，故 **可对角化**。标准形（对角矩阵）为  $J = \text{diag}(1, 1, 10)$ 。

(2) 对于矩阵 (2)，特征值 3 的代数重数为 2，但只求得 1 个线性无关特征向量（几何重数为 1）。几何重数之和  $1 + 1 = 2 < 3$ ，故 **不可对角化**。

**11. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是数域  $K$  上 4 维线性空间  $V$  的一个基， $V$  上的线性变换  $A$  在这个基下的矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**(1) 求  $A$  的全部特征值与特征向量；(2) 求  $V$  的一个基，使得  $A$  在这个基下的矩阵为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。**

**解：**

**(1) 求特征值与特征向量**

**第一步：求特征值**

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开（或观察矩阵结构，对角线元素即特征值，除第三行第一列外为上三角/对角阵）：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1) \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

故  $A$  的全部特征值为： $\lambda_1 = 1$ （二重）， $\lambda_2 = 0$ （二重）。

**第二步：求特征向量**

**1. 对于  $\lambda = 1$ ：解齐次线性方程组  $(I - A)X = 0$ ：**

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{整理}} \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \end{cases}$$

$x_4$  为自由变量。取基础解系为：

$$\eta_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

将坐标还原为  $V$  中的向量：

$$\xi_1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$$

$$\xi_2 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 = \alpha_4$$

故属于特征值 1 的全部特征向量为：

$$\{k_1(\alpha_1 + \alpha_3) + k_2\alpha_4 \mid k_1, k_2 \in K, \text{ 且 } k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

2. 对于  $\lambda = 0$ ：解齐次线性方程组  $(0I - A)X = 0 \Rightarrow AX = 0$ ：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应方程为  $x_1 = 0, x_4 = 0$ 。 $x_2, x_3$  为自由变量。取基础解系为：

$$\eta_3 = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_4 = (0, 0, 1, 0)^T$$

将坐标还原为  $V$  中的向量：

$$\xi_3 = \alpha_2, \quad \xi_4 = \alpha_3$$

故属于特征值 0 的全部特征向量为：

$$\{l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3 \mid l_1, l_2 \in K, \text{ 且 } l_1, l_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

## (2) 对角化

由于几何重数之和  $2 + 2 = 4 = n$ ，故  $A$  可对角化。取  $A$  的 4 个线性无关的特征向量作为  $V$  的一组新基：

$$\alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

$A$  在这组基下的矩阵为对角矩阵：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**\*12.** 设  $V$  是数域  $K$  上任意一个线性空间,  $A$  是  $V$  上的一个线性变换。证明:  $A$  的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

**证:** 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是不同特征值,  $\xi_1, \xi_2$  是对应的特征向量。假设  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ 。两边用变换  $A$  作用:  $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_2\xi_2 = 0$ 。又原式乘以  $\lambda_1$  得:  $k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_1\xi_2 = 0$ 。两式相减:  $k_2(\lambda_2 - \lambda_1)\xi_2 = 0$ 。因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  且  $\xi_2 \neq 0$ , 所以  $k_2 = 0$ 。代回得  $k_1\xi_1 = 0 \implies k_1 = 0$ 。故线性无关。(对于多个特征值的情况, 可用数学归纳法推广证明)。

## 习题 8.3 约当 (Jordan) 标准形

1. 求下列复数域上矩阵的约当标准形:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

解: 首先求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda + 7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$$

特征值为  $\lambda_1 = 1$  (单重),  $\lambda_2 = 0$  (二重)。

1. 对于  $\lambda_1 = 1$ , 对应一个 1 阶约当块  $J_1(1) = [1]$ 。2. 对于  $\lambda_2 = 0$ , 考察矩阵  $0I - A = -A$  的秩:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩  $r(A) = 2$ 。特征值 0 的几何重数  $m = n - r(A) = 3 - 2 = 1$ 。因为几何重数为 1, 说明只有一个属于 0 的约当块, 由于代数重数为 2, 故该块为 2 阶约当块  $J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

解: 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$$

特征值为  $\lambda_1 = 3$  (单重),  $\lambda_2 = -1$  (二重)。

1. 对于  $\lambda_1 = 3$ , 对应  $J_1(3) = [3]$ 。2. 对于  $\lambda_2 = -1$ , 考察矩阵  $(-1)I - A$  的秩:

$$-I - A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{秩} = 2$$

特征值  $-1$  的几何重数  $m = 3 - 2 = 1$ 。故只有一个约当块, 阶数为 2, 即  $J_2(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**解:** 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 4) + 4] = (\lambda - 2)(\lambda - 2)^2 = (\lambda - 2)^3$$

特征值为  $\lambda = 2$  (三重)。

考察矩阵  $2I - A$  的秩:

$$2I - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然第 2、3 行都是第 1 行的倍数, 故秩  $r = 1$ 。几何重数  $m = 3 - 1 = 2$ 。这意味着有两个约当块。由于代数重数为 3, 约当块的阶数之和为 3, 故只能是一个 1 阶块和一个 2 阶块。即  $J_1(2) = [2]$  和  $J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{注: 题目图中题号标为 (3), 此处按顺序记为 (4)})$$

解: 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3$$

特征值为  $\lambda = 1$  (三重)。

考察矩阵  $I - A$  的秩:

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩  $r = 2$ 。几何重数  $m = 3 - 2 = 1$ 。只有一个约当块, 阶数为 3。即  $J_3(1)$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2. 证明: $n$ 级复矩阵 $A$ 的迹等于 $A$ 的 $n$ 个特征值的和。

证: 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。在复数域上, 任何方阵  $A$  都相似于其约当标准形  $J$ 。即存在可逆矩阵  $P$  使得

$$P^{-1}AP = J$$

其中  $J$  是上三角矩阵, 且其主对角线上的元素恰好是  $A$  的全部特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (包括重数)。

根据矩阵迹的性质: 1. 相似矩阵的迹相等, 即  $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(J)$ 。2. 矩阵的迹等于主对角线元素之和。

因此:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(J) = \sum_{i=1}^n J_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

即矩阵  $A$  的迹等于其特征值之和。