《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第七章　线性空间

习题 7.1　线性空间的结构

1. 判断下述集合对于所指的运算是否形成实数域 R 上的一线性空间：

(1) $\mathbf{R}[x]$ 中所有 2 次多项式组成的集合，对于多项式的加法与数量乘法；

解：不是。对于集合 $S = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid \deg(f(x)) = 2\}$。取 $f(x) = 2x^2 + x \in S$，$g(x) = -2x^2 + x \in S$。则 $f(x) + g(x) = 2x \notin S$（因为 $2x$ 是 1 次多项式，不是 2 次多项式）。集合对加法运算不封闭，故不构成线性空间。

(2) 所有正实数组成的集合 $\mathbf{R}^+$，加法与数量乘法分别定义为

$$a \oplus b = ab, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}^+,$$

$$k \odot a = a^k, \quad \forall a \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{R};$$

解：是。验证线性空间的 8 条公理：1. 加法封闭：$a, b > 0 \implies ab > 0$。2. 加法交换律：$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$。3. 加法结合律：$(a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$。4. 零元：存在 $e = 1 \in \mathbf{R}^+$，使得 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$。5. 负元：对任意 $a \in \mathbf{R}^+$，存在 $a^{-1} = 1/a \in \mathbf{R}^+$，使得 $a \oplus a^{-1} = a \cdot (1/a) = 1$（即零元）。6. 数乘封闭：$a > 0 \implies a^k > 0$。7. 数乘分配律 1：$k \odot (a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = (k \odot a) \oplus (k \odot b)$。8. 数乘分配律 2：$(k + l) \odot a = a^{k+l} = a^k a^l = (k \odot a) \oplus (l \odot a)$。9. 数乘结合律：$k \odot (l \odot a) = k \odot (a^l) = (a^l)^k = a^{lk} = (kl) \odot a$。10. 单位元：$1 \odot a = a^1 = a$。综上，构成线性空间。

(3) 区间 $[a, b]$ 上的所有连续函数组成的集合，记作 $C[a, b]$，对于函数的加法与数量乘法。

解：是。连续函数的和仍为连续函数，连续函数的数乘仍为连续函数（封闭性满足）。函数加法和数乘显然满足线性空间的 8 条公理。

---

2. 判断实数域 R 上的线性空间 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 中的下列函数组是否线性无关？

(1) $1, \cos^2 x, \cos 2x$；

解： 利用二倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$。即 $1\cdot(1) + (-2)\cdot(\cos^2 x) + 1\cdot(\cos 2x) = 0$。存在不全为零的系数 $(1, -2, 1)$ 使得线性组合为零函数。**故线性相关。**

(2) $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$；

解： 设 $k_0 \cdot 1 + k_1\cos x + k_2\cos 2x + k_3\cos 3x = 0$ 对任意 x 成立。选取 x 的 4 个特殊值代入：$x = 0$: $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0$ $x = \pi$: $k_0 - k_1 + k_2 - k_3 = 0$ $x = \pi/2$: $k_0 - k_2 = 0 \implies k_0 = k_2$ $x = \pi/3$: $k_0 + \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2 - k_3 = 0$ 由前两式得 $2(k_0 + k_2) = 0 \implies k_0 + k_2 = 0$。结合 $k_0 = k_2$，得 $2k_0 = 0 \implies k_0 = 0, k_2 = 0$。代回得 $k_1 + k_3 = 0$ 和 $\frac{1}{2}k_1 - k_3 = 0 \implies k_1 = 2k_3$。所以 $3k_3 = 0 \implies k_3 = 0, k_1 = 0$。只有零解 $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$。**故线性无关。**

(3) $1, \sin x, \cos x$；

解： 设 $k_0 + k_1\sin x + k_2\cos x = 0$。$x = 0 \implies k_0 + k_2 = 0$。$x = \pi \implies k_0 - k_2 = 0$。联立得 $k_0 = 0, k_2 = 0$。$x = \pi/2 \implies k_0 + k_1 = 0 \implies k_1 = 0$。**故线性无关。**

(4) $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$；

解： 设 $k_1\sin x + k_2\cos x + k_3\sin^2 x + k_4\cos^2 x = 0$。取特殊值：$x = 0 \implies k_2 + k_4 = 0$ $x = \pi \implies -k_2 + k_4 = 0$。联立得 $k_2 = 0, k_4 = 0$。$x = \pi/2 \implies k_1 + k_3 = 0$ $x = -\pi/2 \implies -k_1 + k_3 = 0$。联立得 $k_1 = 0, k_3 = 0$。**故线性无关。**

(5) $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \cdots, e^{nx}$；

解： 设 $\sum_{i=0}^{n} c_i e^{ix} = 0$。这是一个关于 e^x 的多项式方程 $P(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n = 0$，其中 $t = e^x$。因为 x 可以取任意实数值，所以 $t = e^x$ 可以取 $(0, +\infty)$ 上的无穷多个值。一个非零多项式只有有限个根。如果它有无穷多个根，则系数必须全为 0。故 $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$。**故线性无关。**

(6) $x^2, x|x|$。

解： 设 $k_1 x^2 + k_2 x|x| = 0$。$x = 1 \implies k_1 + k_2 = 0$。$x = -1 \implies k_1 - k_2 = 0$。联立得 $k_1 = 0, k_2 = 0$。**故线性无关。**

---

3. 求第 1 题的 (2) 小题中线性空间的一个基和维数。

解： 该空间是正实数乘法群关于广义数乘构成的空间。任意正实数 $x \in \mathbf{R}^+$ 可以表示为 $x = a^{\log_a x} = (\log_a x) \odot a$（其中 $a \neq 1$ 是基底）。即对于固定的 $a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1$，任一向量 x 可由 a 线性表出。**取定一个正实数 $a \neq 1$（例如 e），则 a 是这个线性空间的**

一个基。 维数为 1。

---

4. 把复数域 C 看成实数域 R 上的线性空间，求它的一个基和维数，以及每个复数 $z = a + bi$ 在这个基下的坐标。

解： 任意复数 $z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$。实数 a, b 是系数。1 和 i 在实数域上线性无关（若 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot i = 0$，因 $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$，必有 $k_1 = 0, k_2 = 0$）。**故** $1, i$ **是一个基。 维数为 2**。复数 $z = a + bi$ 在基 $1, i$ 下的坐标是 $(a, b)^T$。

---

5. 把数域 K 看成自身上的线性空间，求它的一个基和维数。

解： 对于任意 $x \in K$，有 $x = x \cdot 1$。且 $1 \neq 0$。**故** 1 **是一个基。 维数为 1**。

---

6. 说明数域 K 上所有 n 级对称矩阵组成的集合 V_1，对于矩阵的加法与数量乘法，形成 K 上一个线性空间，求 V_1 的一个基和维数。

解： 对称矩阵的和仍是对称矩阵，数乘仍是对称矩阵，且满足线性空间公理，故构成线性空间。取基矩阵：

- E_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$：共 n 个。
- $E_{ij} + E_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq n)$：共 $n(n-1)/2$ 个。

任一对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 可唯一表示为：

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

这组基线性无关。基元素总数 $= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$。**维数为** $\frac{n(n+1)}{2}$。

---

7. 说明数域 K 上所有 n 级斜对称矩阵组成的集合 V_2，对于矩阵的加法与数量乘法，形成 K 上一个线性空间，求 V_2 的一个基和维数。

解： 斜对称矩阵满足 $a_{ii} = 0$ 且 $a_{ji} = -a_{ij}$。自由变量为上三角部分（不含对角线）的元素 a_{ij} $(i < j)$。取基矩阵：

$$E_{ij} - E_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

任一斜对称矩阵可表示为 $\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}(E_{ij}-E_{ji})$。基元素个数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。**维数为** $\frac{n(n-1)}{2}$。

---

8. 说明数域 K 上所有 n 级上三角矩阵组成的集合 W，对于矩阵的加法与数量乘法，形成 K 上一个线性空间，求 W 的一个基和维数。

解：上三角矩阵的非零元素集中在主对角线及其上方。基矩阵为所有的 E_{ij}，其中 $1\le i\le j\le n$。元素个数为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。**维数为** $\frac{n(n+1)}{2}$。

---

9. 在 K^3 中，设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，并且求向量 $\alpha=(2,5,3)^T$ 分别在这两个基下的坐标 X,Y。

解：

令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$。即：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1. 求过渡矩阵 P

根据过渡矩阵的定义：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，即 $B=AP$。由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为基，矩阵 A 可逆，故 $P=A^{-1}B$。我们可以通过对增广矩阵 $(A\mid B)$ 进行初等行变换，将其左侧化为单位矩阵 I，右侧即为 P。

$$(A\mid B)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&-1&1\\0&1&1&1&1&2\\-1&1&1&1&0&1\end{array}\right]$$

$r_3+r_1\to r_3$：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&-1&1\\0&1&1&1&1&2\\0&3&2&1&-1&2\end{array}\right]$$

$r_3 - 3r_2 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$r_3 \times (-1)$，并用 r_3 消去上方元素（$r_2 - r_3, r_1 - r_3$）:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$r_1 - 2r_2 \to r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

故过渡矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. 求向量 α 在基 β 下的坐标 Y

设向量 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$。即 $\alpha = BY$。对增广矩阵 $(B \mid \alpha)$ 进行初等行变换求解线性方程组:

$$(B \mid \alpha) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

交换 r_1, r_2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$r_3 - r_1 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$r_3 - r_2 \to r_3$：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

由最后一行得 $-2y_3 = -4 \implies y_3 = 2$。代入第二行 $-y_2 + 2 = 2 \implies y_2 = 0$。代入第一行 $y_1 + 0 + 4 = 5 \implies y_1 = 1$。

故向量 α 在基 β 下的坐标为：

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. 求向量 α 在基 α 下的坐标 X

根据坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} X = \alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} PY$$

即 $X = PY$。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

故向量 α 在基 α 下的坐标为：

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

***10. 证明：在数域 K 上的 n 维线性空间 V 中，如果每一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基。**

证： 在 V 中任取一个基 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$。由已知条件，$\delta_1, \cdots, \delta_n$ 中的每一个向量都可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。根据第三章关于向量组秩的性质（若向量组 I 可由向量组 II 线性表出，则 $\mathrm{rank}(\mathrm{I}) \leq \mathrm{rank}(\mathrm{II})$），有：

$$\mathrm{rank}\{\delta_1, \cdots, \delta_n\} \leq \mathrm{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

因为 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 是基，线性无关，故其秩为 n。所以 $n \leq \operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$。又因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 只含 n 个向量, 其秩最大为 n。故 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = n$。这意味着 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。又由题设知它们可以生成 V（任一向量可被表出）。所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基。

习题 7.2 子空间的交与和 · 子空间的直和

1. 判断数域 K 上下列 n 元方程的解集是否为 K^n 的子空间：

(1) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$；

解：是。这是 n 元齐次线性方程，其解集对加法和数乘运算封闭，且包含零向量，故是子空间。

(2) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$；

解：不是。这是非齐次线性方程。零向量 $(0,\ldots,0)$ 不满足方程（$0 \neq 1$），故解集不包含零向量，不是子空间。

(3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$。

解：不是。解集对加法不封闭。例如取 $n = 2$，方程为 $x_1^2 - x_2^2 = 0$。向量 $\alpha = (1,1)$ 和 $\beta = (1,-1)$ 均是解，但 $\alpha + \beta = (2,0)$ 代入方程得 $4 \neq 0$，不是解。

---

2. 设 A 是数域 K 上的一个 n 级矩阵. 证明：数域 K 上所有与 A 可交换的矩阵组成的集合是 $M_n(K)$ 的一个子空间，把它记作 $C(A)$。

证： 集合 $C(A) = \{X \in M_n(K) \mid AX = XA\}$。1. **非空性**：$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$，故 $0 \in C(A)$。2. **加法封闭**：若 $X_1, X_2 \in C(A)$，则 $A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = X_1A+X_2A = (X_1+X_2)A$。3. **数乘封闭**：若 $X \in C(A), k \in K$，则 $A(kX) = k(AX) = k(XA) = (kX)A$。综上，$C(A)$ 是子空间。

---

3. 设 $A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 K 中两两不同的数. 求 $C(A)$ 的一个基和维数。

解： 设 $X = (x_{ij}) \in C(A)$。由 $AX = XA$ 对比两边元素得 $a_ix_{ij} = x_{ij}a_j$，即 $x_{ij}(a_i - a_j) = 0$。因为 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$，故必须有 $x_{ij} = 0$ $(i \neq j)$。当 $i = j$ 时方程恒成立。因此 $C(A)$ 由所有对角矩阵组成。基可取为 $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$（$E_{ii}$ 表示第 (i,i) 位为 1 其余为 0 的矩阵）。**维数为** n。

---

4. 设 $V = K^4$, $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$，其中

$$\alpha_1 = (1,2,1,0)', \alpha_2 = (-1,1,1,1)', \alpha_3 = (0,3,2,1)';$$

$$\beta_1 = (2, -1, 0, 1)', \beta_2 = (1, -1, 3, 7)'.$$

分别求 $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ 的一个基和维数。

解： (1) 对于 $V_1 + V_2$：将五个向量排成矩阵求秩，可得秩为 3。极大无关组可取 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$。故 $\dim(V_1 + V_2) = 3$，基为 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$。

(2) 对于 $V_1 \cap V_2$：由维数公式，$\dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 3 = 1$。寻找线性关系：$-\alpha_1 + 4\alpha_2 = (-5, 2, 3, 4)'$，且 $\beta_2 - 3\beta_1 = (-5, 2, 3, 4)'$。故交集中的非零向量为 $\xi = (-5, 2, 3, 4)'$。基为 ξ，维数为 1。

---

5. 设 $V = K^4$，$V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，$V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$，其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 1)', \alpha_2 = (-2, 3, 1, -3)';$$

$$\beta_1 = (1, 2, 0, -2)', \beta_2 = (1, 3, 1, -3)'.$$

分别求 $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ 的一个基和维数。

解： (1) 对于 $V_1 + V_2$：矩阵求秩得 3。$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 线性无关。故 $\dim(V_1 + V_2) = 3$，基为 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$。

(2) 对于 $V_1 \cap V_2$：$\dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 3 = 1$。观察得 $2\alpha_1 + \alpha_2 = (0, 1, 1, -1)'$，且 $\beta_2 - \beta_1 = (0, 1, 1, -1)'$。故基为 $(0, 1, 1, -1)'$，维数为 1。

---

6. 设 $V = K^n$，齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间记作 V_1；齐次线性方程组 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间记作 V_2。证明：$V = V_1 + V_2$。

证： 要证明 $V = V_1 + V_2$，我们需要证明 V 中的任意向量都可以表示为一个 V_1 中的向量和一个 V_2 中的向量之和。更进一步，我们可以证明这是一个直和 $V = V_1 \oplus V_2$。

第一步：证明任意向量可分解 (存在性) 任取 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \in V$。我们需要寻找 $\alpha_1 \in V_1$ 和 $\alpha_2 \in V_2$，使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。令

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

构造向量

$$\alpha_2 = (c, c, \cdots, c)'$$

显然 $\alpha_2 \in V_2$。接下来，令

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = (a_1 - c, a_2 - c, \cdots, a_n - c)'$$

我们要验证 $\alpha_1 \in V_1$。计算 α_1 各分量之和：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - c) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} a_i - n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

因为分量之和为 0，所以 α_1 满足方程 $x_1 + \cdots + x_n = 0$，即 $\alpha_1 \in V_1$。综上，$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，故 $V = V_1 + V_2$。

第二步：证明交集为零 (直和条件) 设 $\xi \in V_1 \cap V_2$。因为 $\xi \in V_2$，设 $\xi = (k, k, \cdots, k)'$。因为 $\xi \in V_1$，其分量之和为 0，即：

$$k + k + \cdots + k = nk = 0$$

由于是在数域 K 上（假设特征不整除 n），得出 $k = 0$。所以 $\xi = (0, 0, \cdots, 0)' = \mathbf{0}$。即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$。

---

7. 证明：数域 K 上每一个 n 维线性空间 V 都可以表示成 n 个一维子空间的直和。

证： 设 $\dim V = n$。在 V 中取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。令 $W_i = \langle \alpha_i \rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$。显然，每个 W_i 都是由非零向量 α_i 生成的子空间，故 $\dim W_i = 1$。

(1) 证明 V 是 W_i 的和： 对任意 $\alpha \in V$，由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是基，存在唯一的数 $k_1, \cdots, k_n \in K$ 使得：

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

其中第 i 项 $\xi_i = k_i\alpha_i \in \langle \alpha_i \rangle = W_i$。所以 $\alpha = \xi_1 + \cdots + \xi_n$，即 $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$。

(2) 证明是直和： 假设零向量有如下分解：

$$\mathbf{0} = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n, \quad \text{其中}\eta_i \in W_i$$

由于 $\eta_i \in W_i$，存在标量 c_i 使得 $\eta_i = c_i\alpha_i$。代入得：

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，所以必须有系数全为零，即 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$。从而 $\eta_i = 0\alpha_i = \mathbf{0}$ 对所有 i 成立。根据直和的定义，零向量只有一种分解方式（全为零），所以该和为直和。即 $V = \langle \alpha_1 \rangle \oplus \langle \alpha_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \alpha_n \rangle$。

---

8. 用 $M_n^0(K)$ 表示 $M_n(K)$ 中迹为零的矩阵组成的集合。(1) 证明：$M_n^0(K)$ 是线性空间 $M_n(K)$ 的一个子空间；(2) 证明：$M_n(K) = \langle I \rangle \oplus M_n^0(K)$。

证： **(1)** 集合 $M_n^0(K) = \{A \in M_n(K) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$。利用迹函数的线性性质：$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$，$\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$。

1. 非空性：零矩阵 O 的迹 $\mathrm{tr}(O) = 0$，故 $O \in M_n^0(K)$。

2. 加法封闭：若 $A, B \in M_n^0(K)$，则 $\mathrm{tr}(A) = 0, \mathrm{tr}(B) = 0$。$\mathrm{tr}(A+B) = 0 + 0 = 0 \implies A + B \in M_n^0(K)$。

3. 数乘封闭：若 $A \in M_n^0(K), k \in K$，则 $\mathrm{tr}(kA) = k \cdot 0 = 0 \implies kA \in M_n^0(K)$。故 $M_n^0(K)$ 是子空间。

(2) 要证明直和，需证明 $M_n(K) = \langle I \rangle + M_n^0(K)$ 且交集为零。

分解存在性：任取矩阵 $A \in M_n(K)$。令 $\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)$。我们可以将 A 写成：

$$A = \lambda I + (A - \lambda I)$$

第一部分：令 $A_1 = \lambda I$，显然 $A_1 \in \langle I \rangle$。第二部分：令 $A_2 = A - \lambda I$。计算其迹：

$$\mathrm{tr}(A_2) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(\lambda I) = \mathrm{tr}(A) - n\lambda = \mathrm{tr}(A) - n \cdot \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A) = 0$$

所以 $A_2 \in M_n^0(K)$。故 $A = A_1 + A_2$，即 $M_n(K) = \langle I \rangle + M_n^0(K)$。

交集唯一性：设 $X \in \langle I \rangle \cap M_n^0(K)$。因为 $X \in \langle I \rangle$，故 $X = kI$。因为 $X \in M_n^0(K)$，故 $\mathrm{tr}(X) = 0$。即 $\mathrm{tr}(kI) = nk = 0$。在数域 K 中（特征不整除 n），这意味着 $k = 0$。所以 $X = 0 \cdot I = O$。交集仅含零矩阵，故为直和。

---

9. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的全部不同的特征值，用 V_{λ_i} 表示 A 的属于 λ_i 的特征子空间。证明：A 可对角化的充分必要条件是 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$。

证： 首先回顾一个重要性质：属于不同特征值的特征向量是线性无关的。这意味着不同特征子空间的和总是直和，即：

$$\sum_{i=1}^{s} V_{\lambda_i} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

记这个直和空间为 W。显然 $W \subseteq K^n$。

必要性 ($\Rightarrow$)：假设 A 可对角化。根据第五章相关定理，A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。或者等价地说，各特征子空间的维数之和等于 n：

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n$$

因为直和空间的维数等于各子空间维数之和，所以：

$$\dim W = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n$$

因为 W 是 K^n 的子空间且 $\dim W = \dim K^n = n$，所以 $W = K^n$。即 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$。

充分性 ($\Leftarrow$)：假设 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$。这意味着：

$$\dim K^n = \sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i}$$

即 $n = \sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i}$。我们在每个特征子空间 V_{λ_i} 中取一组基。因为是直和，所有这些基合并起来就构成了全空间 K^n 的一组基。这组基中的每一个向量都是 V_{λ_i} 中的向量，即都是 A 的特征向量。既然 K^n 存在由 A 的特征向量组成的基，根据对角化的定义，A 可对角化。

习题 7.3 线性空间的同构

1. 证明：数域 K 上的线性空间 $M_{s\times n}(K)$ 与 K^{sn} 同构，并且写出一个同构映射。

证：线性空间 $M_{s\times n}(K)$ 的基可以取为 E_{ij} $(i=1,\ldots,s; j=1,\ldots,n)$，其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的矩阵。基的个数为 sn，故 $\dim M_{s\times n}(K)=sn$。另一方面，$\dim K^{sn}=sn$。因为两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相等，所以 $M_{s\times n}(K)\cong K^{sn}$。

一个具体的同构映射 $\sigma : M_{s\times n}(K)\to K^{sn}$ 定义如下：对于任意 $A=(a_{ij})\in M_{s\times n}(K)$，

$$\sigma(A)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn})^T$$

即将矩阵 A 的元素按行拉直排列成一个 sn 维列向量。显然 σ 是双射且保持线性运算。

---

2. 证明：数域 K 上的线性空间 $K_n[x]$ 与 K^n 同构，并且写出一个同构映射。

证：$K_n[x]$ 表示次数小于 n 的多项式（包括零多项式）组成的线性空间。其一组基为 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$，故 $\dim K_n[x]=n$。又知 $\dim K^n=n$。由于维数相等，故 $K_n[x]\cong K^n$。

一个具体的同构映射 $\sigma : K_n[x]\to K^n$ 定义如下：对于任意 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in K_n[x]$，

$$\sigma(f(x))=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})^T$$

即将多项式映射为其系数坐标向量。

---

3. 证明：实数域 $\mathbf{R}$ 作为它自身的线性空间与习题 7.1 的第 1 题 (2) 小题的线性空间 $\mathbf{R}^+$ 同构，并且写出一个同构映射。

证：回顾习题 7.1(2) 中 $\mathbf{R}^+$ 的运算定义：加法 $a\oplus b=ab$，数乘 $k\odot a=a^k$。$\mathbf{R}$ 作为自身的线性空间，维数为 1。$\mathbf{R}^+$ 也是实数域上的一维线性空间（基可以取不等于 1 的任意正实数，如 2）。故它们同构。

定义映射 $\sigma : \mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 为：

$$\sigma(x)=2^x$$

验证 σ 是同构映射：

1. 双射性：指数函数 $y=2^x$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一一映射。

2. 保持加法：对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\sigma(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = \sigma(x) \oplus \sigma(y)$$

3. 保持数乘：对于任意 $k \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$,

$$\sigma(kx) = 2^{kx} = (2^x)^k = k \odot \sigma(x)$$

故 σ 是一个同构映射。

***4. 令 $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$。(1) 证明：$L$ 是实数域上线性空间 $M_2(\mathbf{R})$ 的一个子空间，并且求 L 的一个基和维数；(2) 证明：复数域 $\mathbf{C}$ 作为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间与 L 同构，并且写出一个同构映射。**

证：(1) 非空性：取 $a = b = 0$，得零矩阵 $\in L$。

加法封闭：设 $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in L$,

则 $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} \in L$。**数乘封闭**：设 $k \in \mathbf{R}$，则 $kA_1 = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ -kb_1 & ka_1 \end{pmatrix} \in L$。故 L 是 $M_2(\mathbf{R})$ 的子空间。

对于任意 $A \in L$，有

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。显然 E_1, E_2 线性无关，且生成 L。故 L 的一个基为 E_1, E_2，维数 $\dim L = 2$。

(2) 复数域 $\mathbf{C}$ 看作实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间时，一组基为 $1, i$，故 $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$。由 (1) 知 $\dim L = 2$。因为维数相等，所以 $\mathbf{C} \cong L$。

构造同构映射 $\sigma : \mathbf{C} \to L$，对于任意 $z = a + bi \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$，定义：

$$\sigma(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

验证同构性质：

显然 σ 是双射。

保持加法：$\sigma((a+bi)+(c+di)) = \sigma((a+c)+(b+d)i) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} = \sigma(a+bi)+\sigma(c+di)$。

保持数乘：$\sigma(k(a+bi)) = \sigma(ka+kbi) = \begin{pmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{pmatrix} = k\sigma(a+bi)$。