《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第三章 线性方程组的进一步理论

习题 3.1 n 维向量空间

1. 在 K^4 中，设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\7\\-2\\6\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-10\\-25\\16\\-12\end{pmatrix}.$$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的以下列各组数为系数的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$：

(1) $k_1=-2,k_2=3,k_3=1$；

解：

$$\begin{aligned}-2\alpha_1+3\alpha_2+1\alpha_3&=-2\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4\\7\\-2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\-25\\16\\-12\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2\\4\\-10\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\21\\-6\\18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\-25\\16\\-12\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2+12-10\\4+21-25\\-10-6+16\\-6+18-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) $k_1=0,k_2=0,k_3=0$。

解： 零个数的线性组合必为零向量。

$$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=\mathbf{0}$$

---

2. 在 K^4 中，设 $\alpha = (6, -2, 0, 4)', \beta = (-3, 1, 5, 7)'$。求向量 γ 使得 $2\alpha + \gamma = 3\beta$。

解： 由 $2\alpha + \gamma = 3\beta$ 可得 $\gamma = 3\beta - 2\alpha$。

$$\begin{aligned}\gamma &= 3\begin{pmatrix}-3\\1\\5\\7\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}6\\-2\\0\\4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-9\\3\\15\\21\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\-4\\0\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9-12\\3-(-4)\\15-0\\21-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21\\7\\15\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

即 $\gamma = (-21, 7, 15, 13)'$。

---

3. 在 K^4 中，判断向量 β 能否由下列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。若能，写出它的一种表示方式。

(1)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\-5\end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\7\\-3\end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{pmatrix}$$

解： 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$。建立非齐次线性方程组，其增广矩阵为：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -4 & 8\\3 & 0 & 1 & 3\\0 & 7 & -2 & -1\\-5 & -3 & 6 & -25\end{pmatrix}$$

进行初等行变换：

$$\xrightarrow{R_2+3R_1, R_4-5R_1} \begin{pmatrix}-1 & 2 & -4 & 8\\0 & 6 & -11 & 27\\0 & 7 & -2 & -1\\0 & -13 & 26 & -65\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\div(-13)} \begin{pmatrix}-1 & 2 & -4 & 8\\0 & 6 & -11 & 27\\0 & 7 & -2 & -1\\0 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -11 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-7R_2, R_4-6R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

由 R_4 可知 $x_3 = -3$，代入 R_3 验证成立。回代求解：1. 由 R_2: $x_2 - 2(-3) = 5 \implies x_2 + 6 = 5 \implies x_2 = -1$。2. 由 R_1: $-x_1 + 2(-1) - 4(-3) = 8 \implies -x_1 - 2 + 12 = 8 \implies -x_1 = -2 \implies x_1 = 2$。

结论：能线性表出。表示方式为 $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$。

(2)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$$

解：建立增广矩阵并化简：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & -8 \\ 7 & -5 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 7 & -5 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & -2 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-7R_1, R_3+2R_1, R_4-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -27 & -52 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & -31 \end{pmatrix}$$

对 R_3, R_4 观察：由 R_3: $3x_2 + x_3 = 6 \implies x_3 = 6 - 3x_2$。代入 R_4: $-2x_2 - 10(6-3x_2) = -31 \implies -2x_2 - 60 + 30x_2 = -31 \implies 28x_2 = 29 \implies x_2 = 29/28$。代入 R_2 验证：$-5(29/28) - 27(6 - 3 \cdot 29/28) = -5(29/28) - 162 + 81(29/28) = 76(29/28) - 162 \approx 78 - 162 \neq -52$。或者继续行变换可得矛盾方程 $0 = d(d \neq 0)$。

结论： β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。

(3)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 13 \\ -26 \end{pmatrix}$$

解： 建立增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 11 & -30 \\ 2 & -3 & -5 & 13 \\ -4 & 6 & 10 & -26 \end{pmatrix}$$

观察 $R_4 = -2R_3$，故第 4 行可化为 0。

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 13 \\ -5 & 7 & 11 & -30 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 2, R_3 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 13 \\ -10 & 14 & 22 & -60 \\ 6 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + 5R_1, R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 21 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 7R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组有无穷多解。取自由变量 $x_3 = 0$。由 R_2: $-x_2 = 5 \implies x_2 = -5$。由 R_1: $2x_1 - 3(-5) = 13 \implies 2x_1 + 15 = 13 \implies 2x_1 = -2 \implies x_1 = -1$。

结论： 能线性表出（表出方式不唯一）。其中一种为：$\beta = -\alpha_1 - 5\alpha_2$。

---

4. 在 K^n 中，令

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

证明：K^n 中任一向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 能够由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出，并且表出方式惟一，写出这种表出方式。

证： 设有系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$\alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$$

即

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

根据向量相等的定义，必有 $k_1 = a_1, k_2 = a_2, \cdots, k_n = a_n$。因为 a_i 是确定的，所以系数 k_i 是唯一确定的。

表出方式为： $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$。

---

5. 在 K^4 中，设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

证明：K^4 中任一向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)'$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，并且表出方式惟一，写出这种表出方式。

证：设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$，写成方程组形式：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}$$

系数矩阵 A 为上三角形矩阵，且主对角线元素全为 1，故行列式 $|A| = 1 \neq 0$。根据克莱姆法则（或逆矩阵存在），该方程组有唯一解。从最后一个方程开始回代求解：

- 第 4 行：$x_4 = a_4$
- 第 3 行：$x_3 + x_4 = a_3 \implies x_3 = a_3 - a_4$
- 第 2 行：$x_2 + x_3 + x_4 = a_2 \implies x_2 + (a_3 - a_4) + a_4 = a_2 \implies x_2 = a_2 - a_3$
- 第 1 行：$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1 \implies x_1 + a_2 = a_1 \implies x_1 = a_1 - a_2$

表出方式为： $\alpha = (a_1 - a_2)\alpha_1 + (a_2 - a_3)\alpha_2 + (a_3 - a_4)\alpha_3 + a_4\alpha_4$。

---

6. 证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任一向量 α_i 可以由这个向量组线性表出。

证：对于向量组中的任意向量 α_i $(1 \leq i \leq s)$，我们可以选取如下系数：

$$k_i = 1, \quad \text{且当} j \neq i \text{ 时，} k_j = 0$$

则有:

$$\sum_{j=1}^{s} k_j\alpha_j = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s = \alpha_i$$

因此，α_i 可以由该向量组线性表出。证毕。

习题 3.2 线性相关与线性无关的向量组

1. 下述说法对吗？为什么？

(1) "向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果有全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。"

解：不对。线性无关的定义是"**当且仅当** $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时，等式才成立"。对于任何向量组，全为零的系数 $k_i=0$ 总是能使线性组合为零向量（这是平凡解）。仅凭存在一组全零解不能断定线性无关，必须排除存在非零解的可能性。

(2) "如果有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。"

解：不对。有一组不全为零的数不够，应该是对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 才是线性无关的。

(3) "若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关，则其中每一个向量都可以由其余向量线性表出。"

解：不对。线性相关只意味着**至少有一个**向量可以由其余向量线性表出，而不是**每一个**。例如 $\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(2,0),\alpha_3=(0,1)$。该组线性相关（因为 $2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3=0$），但 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表出。

---

2. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关？如果线性相关，试找出其中一个向量，使得它可以由其余向量线性表出，并且写出它的一种表达式。

(1)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-4\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix}$$

解： 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，对系数矩阵进行行变换：

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&0&2\\2&5&0\\-4&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\2&5&0\\-4&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1,R_3-2R_1,R_4+4R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-7\\0&5&-4\\0&-2&11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-5R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 31\\ 0 & -2 & 11\end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 3，等于向量个数。方程组只有零解。**故该向量组线性无关**。

(2)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}$$

解： 观察向量组，尝试寻找线性关系。计算 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$：

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1+3\\1-3+0\\0+2+2\\3+4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}=\alpha_4$$

故该向量组线性相关。表示式为：$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$。

(3)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$$

解： 向量个数 (4 个) 大于向量维数 (3 维)，**根据定理，该向量组必定线性相关**。我们需要找出其中一个向量的表达式。观察 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的关系。设 $\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$：

$$\begin{cases}3x_1+x_2=7\\ -x_1+5x_2=-13\\ 2x_1-7x_2=20\end{cases}$$

由前两式联立：(2)$\times 3 \implies -3x_1+15x_2=-39$。与 (1) 相加：$16x_2=-32 \implies x_2=-2$。代入 (1)：$3x_1-2=7 \implies 3x_1=9 \implies x_1=3$。代入 (3) 检验：$2(3)-7(-2)=6+14=20$，成立。故 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2$。**故该向量组线性相关**。表示式为：$\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2$ （答案不唯一，如 α_4 也可被表出）。

(4)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix}$$

解： 构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&3&4\\4&9&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&3&4\\(-2)^2&3^2&4^2\end{pmatrix}$$

这是一个范德蒙 (Vandermonde) 行列式。$|A|=(4-3)(4-(-2))(3-(-2))=1\times6\times5=30\neq0$。由于行列式不为 0，向量组满秩。**故该向量组线性无关**。

---

3. 证明：几何空间中任意 4 个向量都线性相关。

证： 几何空间是 3 维空间，其中的向量 α 可以表示为 3 维坐标形式（即 K^3 中的向量）。设这 4 个向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。考察关于未知数 x_1,x_2,x_3,x_4 的齐次线性方程组：

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\mathbf{0}$$

将其写成坐标形式，这等价于一个包含 3 个方程（对应 3 个坐标分量）、4 个未知数的齐次线性方程组。因为未知数的个数 (4) 大于方程的个数 (3)，根据齐次线性方程组的性质，该方程组必有非零解。即存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}$。**故几何空间中任意 4 个向量都线性相关**。

***4. 证明：K^n 中，任意 $n+1$ 个向量都线性相关**。

证： 任取 K^n 中的 $n+1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$。考察关于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的齐次线性方程组：

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n+1}\alpha_{n+1}=\mathbf{0}$$

由于 $\alpha_i\in K^n$，每个向量有 n 个分量。上述向量方程等价于一个包含 n 个线性方程、$n+1$ 个未知数的齐次线性方程组。因为未知数的个数 $(n+1)$ 大于方程的个数 (n)，所以该方程组必有非零解。即存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$ 使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n+1}\alpha_{n+1}=\mathbf{0}$$

根据线性相关的定义，**这 $n+1$ 个向量线性相关**。

---

5. 证明：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_3 + 3\alpha_1$ 也线性无关。

证： 设 $k_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + 5\alpha_3) + k_3(4\alpha_3 + 3\alpha_1) = 0$。整理得：

$$(2k_1 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (5k_2 + 4k_3)\alpha_3 = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以它们的系数必须全为 0：

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ 5k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

该齐次方程组的系数行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) + 3(5) = 8 + 15 = 23 \neq 0$$

因为 $D \neq 0$，方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。故原向量组线性无关。

---

6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 是否线性无关？

解： 令 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$。考察它们的线性组合：

$$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

存在不全为 0 的系数 $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1$ 使得线性组合为 0。**故该向量组线性相关**。

***7. 证明：如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，则表出方式惟一的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。**

证： 必要性： 设表出方式唯一。反证法：假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。则存在不全为 0 的 k_i 使得 $\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = 0$。已知 β 可被表出，设 $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_s\alpha_s$。那么 $\beta = \beta + 0 = \sum c_i\alpha_i + \sum k_i\alpha_i = \sum(c_i + k_i)\alpha_i$。因为 k_i 不全为 0，所以 $(c_i + k_i)$ 与 c_i 不全相同，即 β 有两种不同的表出方式，与题设矛盾。故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

充分性： 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。若 β 有两种表出方式：$\beta = \sum x_i\alpha_i = \sum y_i\alpha_i$。则 $\sum(x_i - y_i)\alpha_i = 0$。由线性无关性知，系数必全为 0，即 $x_i - y_i = 0 \implies x_i = y_i$。故表出方式惟一。

***8. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_s\alpha_s$。如果对于某个 $b_r \neq 0$，则用 β 替换 α_r 以后得到的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 也线性无关。**

证： 设有一组数 $k_1, \cdots, k_s$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\beta + k_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \quad (*)$$

将 $\beta = \sum_{i=1}^{s} b_i\alpha_i$ 代入 $(*)$ 式：

$$\sum_{j\neq r} k_j\alpha_j + k_r\left(b_r\alpha_r + \sum_{j\neq r} b_j\alpha_j\right) = 0$$

整理关于 α_i 的系数：

$$\sum_{j\neq r}(k_j + k_rb_j)\alpha_j + (k_rb_r)\alpha_r = 0$$

因为原向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，故对应系数全为 0。特别地，α_r 的系数必须为 0，即 $k_rb_r = 0$。已知 $b_r \neq 0$，所以必有 $k_r = 0$。将 $k_r = 0$ 代入上述其余系数方程：$k_j + 0 \cdot b_j = 0 \implies k_j = 0$ (对于所有 $j \neq r$)。综上，所有 $k_i = 0$。故替换后的向量组线性无关。

***9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是两两不同的数，$r \leq n$。令**

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_r = \begin{pmatrix} 1 \\ a_r \\ \vdots \\ a_r^{n-1} \end{pmatrix}$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是线性无关的。

证： 分两种情况讨论：

(1) 当 $r = n$ 时： 以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列向量组构成的矩阵 A 的行列式为：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

这是 n 阶范德蒙 (Vandermonde) 行列式。其值为 $\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$。因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同，所以 $|A|\neq 0$。故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

(2) 当 $r<n$ 时: 取向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的前 r 个分量, 构成 r 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$:

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\a_1\\\vdots\\a_1^{r-1}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_2^{r-1}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \beta_r=\begin{pmatrix}1\\a_r\\\vdots\\a_r^{r-1}\end{pmatrix}$$

考察 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 构成的行列式，这是一个 r 阶范德蒙行列式。同理，由于 $a_1,\cdots,a_r$ 两两不同，该行列式不等于 0，因此 r 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关。

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的**延伸组**。根据性质：线性无关向量组的延伸组仍线性无关。所以，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也是线性无关的。

习题 3.3 向量组的秩

1. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组，以及它的秩。

解： 考察齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \mathbf{0}$：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵是阶梯形矩阵，非零行个数 2 等于未知量个数 2，因此方程组只有零解，即 α_1, α_2 线性无关。类似的，考察 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$，这是一个含有 3 个未知量但只有 2 个有效方程（第 3 个方程恒为 0）的方程组。未知量个数大于有效方程个数，故有非零解，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。因此，α_1, α_2 是向量组的一个极大线性无关组，向量组的秩为 2。（注：α_1, α_3 或 α_2, α_3 也是极大线性无关组。）

---

2. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组，以及它的秩。

解： 先考察 α_1, α_3。设 $k_1\alpha_1 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$，即：

$$\begin{cases} 3k_1 - k_3 = 0 \\ -2k_1 + 5k_3 = 0 \\ 8k_3 = 0 \end{cases}$$

由第 3 个方程得 $k_3 = 0$，代入第 1 个方程得 $k_1 = 0$，故 α_1, α_3 线性无关。再观察 α_1, α_2，显然 $\alpha_2 = 9\alpha_1$，故 α_1, α_2 线性相关。根据线性相关的性质，既然 α_1, α_2 相关，那么包含它们的整体 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也必线性相关。所以，α_1, α_3 是一个极大线性无关组，秩为 2。

---

3. 证明：秩为 r 的向量组中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组。

证： 设向量组 S 的秩为 r，且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 S 中任意 r 个线性无关的向量。要证明它们构成极大线性无关组，只需证明：从 S 中其余向量中任取一个 β 添进去，所得的 $r+1$ 个向量形成的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$ 一定线性相关。根据秩的定义，向量组 S 的秩为 r，意味着 S 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关。因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$ 必定线性相关。由极大线性无关组的定义可知，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 即为 S 的一个极大线性无关组。

---

4. 证明：K^n 中任一线性无关的向量组所含向量的个数不超过 n。

证： 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是 K^n 中的线性无关向量组。根据习题 3.1 第 4 题的结论，K^n 中的单位坐标向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可以线性表出 K^n 中任一向量。因此，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 都可以由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出。根据推论（若向量组 I 线性无关，且可由向量组 II 线性表出，则 I 的个数 $\leq$ II 的个数），可得：

$$r \leq n$$

即线性无关向量组的个数不超过 n。

---

5. 证明：K^n 中，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，则任一向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。

证： 考察向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$。这是一个包含 $n+1$ 个向量的向量组。根据第 4 题的结论，K^n 中线性无关的向量个数不超过 n。因此，这 $n+1$ 个向量必定线性相关。已知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，根据线性相关性的充要条件，向量 β 必可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。

***6. 证明：K^n 中，如果任一向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。**

证： 已知 K^n 中的单位坐标向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性无关的。根据题设，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。根据向量组秩的性质（若向量组 I 可由向量组 II 线性表出，则 $\text{rank(I)} \leq \text{rank(II)}$），我们有：

$$n = \text{rank}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \leq \text{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

又因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 只有 n 个向量，其秩不可能超过 n，即：

$$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\} \leq n$$

综上，$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\} = n$。这表明这 n 个向量的向量组的秩为 n，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

***7. 证明：如果秩为 r 的向量组可以由它的 r 个向量线性表出，则这 r 个向量构成这向量组的一个极大线性无关组**。

证： 设该向量组为 S，其秩 $\text{rank}(S) = r$。设 S 可以由其子组 $T = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性表出。根据秩的性质，有 $\text{rank}(S) \leq \text{rank}(T)$。即 $r \leq \text{rank}(T)$。又因为 T 只含有 r 个向量，显然 $\text{rank}(T) \leq r$。因此 $\text{rank}(T) = r$。这意味着由 r 个向量组成的向量组 T 的秩是 r，故 T 中的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。因为 S 可由 T 线性表出，且 T 是线性无关的，所以 T 是 S 的一个极大线性无关组。

***8. 证明：数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 对任何 $\beta \in K^n$ 都有解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A| \neq 0$。**

证： 充分性： 若系数行列式 $|A| \neq 0$，根据克莱姆法则（Cramer's Rule），线性方程组对任意常数项 β 都有唯一解。

必要性： 若方程组对任何 $\beta \in K^n$ 都有解，说明 K^n 中任一向量 β 都可以由系数向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。利用第 6 题的结论，可知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。由 n 个 n 维向量构成的向量组线性无关的充要条件是其构成的行列式不为 0。故 $|A| \neq 0$。

***9. 证明：**

$$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r\} \leq \text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\} + \text{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$$

证： 设向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$（个数为 m）；设向量组 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 的一个极大线性无关组为 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$（个数为 k）。则原来的两个向量组都可以分别由这两个极大线性无关组线性表出。从而，合并后的向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 中的每一个向量，都可以由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$ 这 $m+k$ 个向量线性表出。根据秩的性质，合并后向量组的秩不超过生成它的向量个数。即：

$$\text{rank}\{\alpha,\beta\} \leq m + k = \text{rank}\{\alpha\} + \text{rank}\{\beta\}$$

得证。

习题 3.4 矩阵的秩

1. 计算下列矩阵的秩，并且求出它的列向量组的一个极大线性无关组：

(1)

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0&1\\-1&-3&2&0\\2&0&-4&5\\4&1&-2&1\end{pmatrix}$$

解： 对矩阵 A 进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}3&-2&0&1\\-1&-3&2&0\\2&0&-4&5\\4&1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}-1&-3&2&0\\3&-2&0&1\\2&0&-4&5\\4&1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\3&-2&0&1\\2&0&-4&5\\4&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-3R_1,\ R_3-2R_1,\ R_4-4R_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&-6&0&5\\0&-11&6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-R_2}\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\0&-11&6&1\\0&-6&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

非零行有 3 行，故 **秩** $R(A)=3$。矩阵的第 1、2、3 列构成一个非零子式（变换后的前三列线性无关），对应的原列向量组线性无关。

极大线性无关组： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$（即原矩阵的前三列）。

(2)

$$A=\begin{pmatrix}3&6&1&5\\1&4&-1&3\\-1&-10&5&-7\\4&-2&8&0\end{pmatrix}$$

解： 对矩阵 A 进行初等行变换：

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\3&6&1&5\\-1&-10&5&-7\\4&-2&8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1,\ R_3+R_1,\ R_4-4R_1}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&-6&4&-4\\0&-6&4&-4\\0&-18&12&-12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2,\ R_4-3R_2}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 3\\ 0 & -6 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

非零行有 2 行，故 **秩** $R(A)=2$。主元所在的列为第 1、2 列。

极大线性无关组： α_1,α_2（即原矩阵的前两列）。

---

2. 求下列列向量组的秩以及它的一个极大线性无关组：

(1)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\9\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

解： 将向量组构造成矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 并行变换：

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 9 & 4 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 9 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-5R_1,\ R_3-3R_1,\ R_4+2R_1}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 21 & 10 & 3\\ 0 & 10 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 10 & 5 & 4\\ 0 & 21 & 10 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-10R_2,\ R_4-21R_2}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 5 & 54\\ 0 & 0 & 10 & 108\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-2R_3}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 5 & 54\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 3。主元位于第 1, 2, 3 列。

极大线性无关组： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

(2)

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

解： 构造矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 3 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1,\ R_3-4R_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 15 & -6\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 2。主元位于第 1 列和第 3 列（注意：第二列没有主元）。

极大线性无关组： α_1, α_3。

(3)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}3\\ -7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 0\\ -3\end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix}1\\ -9\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$$

解： 构造矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ -1 & -7 & -3 & -9\\ 2 & 8 & 0 & 6\\ 3 & 9 & -3 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1,\ R_3-2R_1,\ R_4-3R_1} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -4 & -4 & -8\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\div(-4)} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 2。主元位于第 1 列和第 2 列。

极大线性无关组： α_1, α_2。

---

3. 对于 λ 的不同的值，下述矩阵的秩分别是多少？

$$A = \begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

解： 对 A 进行行变换：

$$\xrightarrow{R_2-2R_1,\ R_3-R_1} \begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\end{pmatrix}$$

观察第 2 行元素，含有公因子 $(\lambda-3)$。

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\\ 0 & 3(3-\lambda) & \lambda-3 & 0\end{pmatrix}$$

情形 1： 当 $\lambda=3$ 时，

$$R_3=(0,0,0,0)$$

矩阵变为 $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，非零行 2 行。此时 $R(A)=2$。

情形 2： 当 $\lambda\neq 3$ 时，第 3 行除以 $(\lambda-3)$ 得 $(0,-3,1,0)$。

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

交换 R_2,R_3 并整理：

$$\sim\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\end{pmatrix}$$

由于阶梯形中第 3 行第 4 列元素为 -1（非零），且前两行线性无关，故 3 行均非零且线性无关。此时 $R(A)=3$。

答： 当 $\lambda=3$ 时，秩为 2；当 $\lambda\neq 3$ 时，秩为 3。

---

4. 证明：矩阵的任意一个子矩阵的秩不会超过这个矩阵的秩。

证： 设矩阵 A 的秩为 r。根据行列式定义秩的性质，A 中存在一个 r 阶非零子式，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在）全为 0。设 B 是 A 的任意一个子矩阵。B 的任意一个 k 阶子式，也是 A 的一个 k 阶子式。如果 B 的秩为 $k>r$，则 B 中存在一个 k 阶非零子式。这意味着 A 中也存在一个 k 阶非零子式。但已知 A 的秩为 r，所有阶数大于 r 的子式皆为 0，这产生了矛盾。因此 B 的秩 k 必须满足 $k\leq r$。得证。

---

5. 求复数域上下述矩阵 A 的秩以及它的列向量组的一个极大线性无关组：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i^m & i^{2m} & i^{3m} & i^{4m} \\ 1 & i^{m+1} & i^{2(m+1)} & i^{3(m+1)} & i^{4(m+1)} \\ 1 & i^{m+2} & i^{2(m+2)} & i^{3(m+2)} & i^{4(m+2)} \\ 1 & i^{m+3} & i^{2(m+3)} & i^{3(m+3)} & i^{4(m+3)} \end{pmatrix}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，m 是正整数。

解： 设 α_j 为矩阵 A 的第 j 列 $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$。注意到 $i^{4m} = (i^4)^m = 1^m = 1$，故第 5 列 α_5 的元素为 $i^{k(m+0)} = i^{km} \cdot 1$，实际上：$\alpha_5 = (i^{4m}, i^{4(m+1)}, i^{4(m+2)}, i^{4(m+3)})^T = (1, 1, 1, 1)^T = \alpha_1$。因此 α_5 与 α_1 相同，只需考察前 4 列。令 $q = i^m$。前 4 列可以写为：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = q \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = q^2 \begin{pmatrix} 1 \\ i^2 \\ i^4 \\ i^6 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = q^3 \begin{pmatrix} 1 \\ i^3 \\ i^6 \\ i^9 \end{pmatrix}$$

忽略非零常数因子 q, q^2, q^3，考察核心向量组：

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

这 4 个向量构成的矩阵是一个 4 阶范德蒙矩阵（参数为 $1, i, i^2 = -1, i^3 = -i$），且参数两两不同。因此行列式不为 0，这 4 个向量线性无关。**故 A 的秩为 4**。

极大线性无关组： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$。

---

6. 求复数域上下述矩阵 A 的秩以及它的列向量组的一个极大线性无关组，其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$m$ 是正整数。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^m & \omega^{2m} & \omega^{3m} & \omega^{4m} \\ 1 & \omega^{m+1} & \omega^{2(m+1)} & \omega^{3(m+1)} & \omega^{4(m+1)} \\ 1 & \omega^{m+2} & \omega^{2(m+2)} & \omega^{3(m+2)} & \omega^{4(m+2)} \end{pmatrix}$$

解： 已知 ω 是 3 次单位根，满足 $\omega^3 = 1$。考察矩阵的列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$。利用 $\omega^{3k} = 1$ 的性质：

- $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$

- $\alpha_2 = \omega^m(1,\omega,\omega^2)^T$
- $\alpha_3 = \omega^{2m}(1,\omega^2,\omega^4)^T = \omega^{2m}(1,\omega^2,\omega)^T$
- $\alpha_4 = \omega^{3m}(1,\omega^3,\omega^6)^T = 1\cdot(1,1,1)^T = \alpha_1$
- $\alpha_5 = \omega^{4m}(1,\omega^4,\omega^8)^T = \omega^m(1,\omega,\omega^2)^T = \alpha_2$

可见 $\alpha_4 = \alpha_1$，$\alpha_5 = \alpha_2$。只需考察前 3 列 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性。忽略常数因子，这三列对应的基向量为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}$$

构成矩阵 $V = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$。这也是一个范德蒙矩阵，参数为 $1,\omega,\omega^2$。由于 $1,\omega,\omega^2$ 两两不同，故行列式 $|V| \neq 0$。因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。由于矩阵只有 3 行，秩最大为 3。**故 A 的秩为 3**。

极大线性无关组： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

习题 3.5 线性方程组有解的充分必要条件

1. 判断复数域上的下述线性方程组有没有解？有多少解？

$$\begin{cases} x_1 + i^m x_2 + i^{2m} x_3 + i^{3m} x_4 = b_1 \\ x_1 + i^{m+1} x_2 + i^{2(m+1)} x_3 + i^{3(m+1)} x_4 = b_2 \\ x_1 + i^{m+2} x_2 + i^{2(m+2)} x_3 + i^{3(m+2)} x_4 = b_3 \\ x_1 + i^{m+3} x_2 + i^{2(m+3)} x_3 + i^{3(m+3)} x_4 = b_4 \end{cases}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，m 是正整数。

解： 设系数矩阵为 A。即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i^m & (i^m)^2 & (i^m)^3 \\ 1 & i^{m+1} & (i^{m+1})^2 & (i^{m+1})^3 \\ 1 & i^{m+2} & (i^{m+2})^2 & (i^{m+2})^3 \\ 1 & i^{m+3} & (i^{m+3})^2 & (i^{m+3})^3 \end{pmatrix}$$

这是一个范德蒙（Vandermonde）矩阵，其参数为 $x_1 = i^m, x_2 = i^{m+1}, x_3 = i^{m+2}, x_4 = i^{m+3}$。由于 m 是整数，$i^m, i^{m+1}, i^{m+2}, i^{m+3}$ 必然取遍 $1, i, -1, -i$ 这四个值，显然两两不同。因此，范德蒙行列式 $|A| = \prod_{1\le j<k\le 4}(x_k - x_j) \neq 0$。矩阵 A 满秩，即 $R(A) = 4$。

结论： 这是一个满秩的 4 元线性方程组，故对任意常数项 $b_1, \dots, b_4$，方程组**有惟一解**。

---

2. 判断下述线性方程组有没有解？有多少解？

$$\begin{cases} x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a^2 x_2 + a^4 x_3 + \cdots + a^{2(n-1)} x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + a^s x_2 + a^{2s} x_3 + \cdots + a^{s(n-1)} x_n = b_s \end{cases}$$

其中 $s < n$，且当 $0 < r < s$ 时，$a^r \neq 1$。

解： 系数矩阵 A 是一个 $s \times n$ 的矩阵。令 $\lambda_i = a^i$。这构成了一个 $s \times n$ 的范德蒙矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{n-1} \end{pmatrix}$$

我们需要判断 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是否互不相同。若 $\lambda_i = \lambda_j$ $(1 \le i < j \le s)$，则 $a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$。令 $r = j - i$，则 $0 < r < s$。根据题设条件，此时 $a^r \neq 1$，产生矛盾。因此 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 两两不同。由于 $s < n$，矩阵 A 包含一个 s 阶的范德蒙子式（取前 s 列），其行列式不为 0。故系数矩阵的秩 $R(A) = s$。考察增广矩阵 $\bar{A} = (A, b)$，其大小为 $s \times (n+1)$。由于 A 的行向量组线性无关（因为 $R(A) = s$，也就是满行秩），增广矩阵的秩 $R(\bar{A})$ 必然也等于行数 s（秩不能超过行数）。即 $R(A) = R(\bar{A}) = s$。因为 $s < n$（方程个数小于未知数个数），且方程组相容。

结论： 方程组**有无穷多个解**。

---

3. 判断下述线性方程组有没有解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2 \\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 = d^3 \end{cases}$$

其中 a, b, c, d 两两不同。

解： 设系数矩阵为 A，增广矩阵为 $\bar{A}$。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\bar{A}$ 是关于 a, b, c, d 的 4 阶范德蒙矩阵。因为 a, b, c, d 两两不同，所以 $|\bar{A}| \neq 0$，故 $R(\bar{A}) = 4$。矩阵 A 是 4×3 矩阵，其秩 $R(A) \le 3$。显然 $R(A) \neq R(\bar{A})$。

结论： 该线性方程组**无解**。

---

4. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩等于下述矩阵 B 的秩：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

证明上述线性方程组有解。

证：设线性方程组的增广矩阵为 $\bar{A} = (A, b)$，其中 $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$。观察矩阵 B 的结构：

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$$

我们可以看出，增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ 是矩阵 B 的前 n 行构成的子矩阵。根据矩阵秩的性质（子矩阵的秩不超过原矩阵的秩），有：

$$R(\bar{A}) \le R(B)$$

另一方面，系数矩阵 A 是增广矩阵 $\bar{A}$ 的子矩阵（去掉最后一列），故：

$$R(A) \le R(\bar{A})$$

综合上述不等式，得到：

$$R(A) \le R(\bar{A}) \le R(B)$$

题目已知条件为 $R(A) = R(B)$。因此，不等式链中所有等号必须成立，即 $R(A) = R(\bar{A})$。根据线性方程组有解的判定定理，当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩时，方程组有解。

故原线性方程组有解。

习题 3.6 齐次线性方程组的解集的结构

1. 求数域 K 上下列齐次线性方程组的一个基础解系，并且写出它的解集。

(1)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 对系数矩阵进行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+5R_1, R_3+R_1, R_4-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2, R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩 $r = 2$，未知数个数 $n = 4$，基础解系含 $4 - 2 = 2$ 个向量。选取 x_3, x_4 为自由未知量。由第 2 行得：$-14x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \implies x_2 = \frac{3}{14}x_3 - \frac{1}{2}x_4$。代入第 1 行得：$x_1 = 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3(\frac{3}{14}x_3 - \frac{1}{2}x_4) - x_3 + 2x_4 = -\frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{2}x_4$。

$$令 \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}，得 \xi_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}；令 \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}，得 \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}。$$

基础解系为： $\xi_1 = (-5, 3, 14, 0)^T$，$\xi_2 = (1, -1, 0, 2)^T$。**解集为：** $\{k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$。

(2)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 15x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 对系数矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & -5 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 21 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

化简第 2 行（除以 -5），并交换行使得简单行靠前：

$$\xrightarrow{R_2 \div (-5) \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 21 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{继续消元}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $r = 3$，未知数 $n = 4$，基础解系含 $4 - 3 = 1$ 个向量。选取 x_4 为自由变量。由第 3 行：$9x_3 - 5x_4 = 0 \implies x_3 = \frac{5}{9}x_4$。由第 2 行：$2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \implies 2x_2 = x_3 - x_4 = -\frac{4}{9}x_4 \implies x_2 = -\frac{2}{9}x_4$。由第 1 行：$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \implies x_1 = -3(-\frac{2}{9}x_4) + \frac{5}{9}x_4 - 2x_4 = (\frac{6}{9} + \frac{5}{9} - \frac{18}{9})x_4 = -\frac{7}{9}x_4$。令 $x_4 = 9$，得 $\xi = (-7, -2, 5, 9)^T$。

基础解系为： $\xi = (-7, -2, 5, 9)^T$。**解集为：** $\{k\xi \mid k \in K\}$。

(3)

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 对系数矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 10 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \\ 0 & 19 & -8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \div 5, R_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 19 & -8 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{3}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 3 行对应 $-0.5x_3 = 0 \implies x_3 = 0$。第 2 行对应 $2x_2 - 0 + 2x_4 = 0 \implies x_2 = -x_4$。第 1 行对应 $x_1 + 2(-x_4) - 0 + 3x_4 = 0 \implies x_1 = -x_4$。令 $x_4 = 1$，得 $\xi = (-1, -1, 0, 1)^T$。

基础解系为： $\xi = (-1, -1, 0, 1)^T$。**解集为：** $\{k\xi \mid k \in K\}$。

(4)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 15x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

解: 观察系数矩阵: 第 2 行是第 1 行的 -3 倍; 第 3 行是第 1 行的 2 倍; 第 4 行是第 1 行的 5 倍。故矩阵的秩 $r = 1$。方程组等价于: $x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$。即 $x_1 = 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5$。自由未知量为 x_2, x_3, x_4, x_5。分别取 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$，得到基础解系。

基础解系为：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解集为： $\{k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + k_4\xi_4 \mid k_i \in K\}$。

---

2. 证明：设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 (1) 的一个基础解系，则与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 等价的线性无关的向量组也是方程组 (1) 的基础解系。

证： 设 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 是一个与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 等价的线性无关的向量组。根据基础解系的定义，$\eta_1, \cdots, \eta_t$ 是线性无关的。根据第三章关于向量组秩的性质：两个等价的线性无关向量组，其所含向量个数相等。因此，我们有 $m = t$。

接下来验证 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 满足基础解系的定义：1. **线性无关**：题目已知条件已给出。2. **能够线性表出方程组的任一解**：设 η 是方程组 (1) 的任一解。因为 $\eta_1, \cdots, \eta_t$ 是基础解系，所以 η 可以由 $\eta_1, \cdots, \eta_t$ 线性表出。又因为向量组 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 与 $\eta_1, \cdots, \eta_t$ 等价，这意味着 $\eta_1, \cdots, \eta_t$ 中的每一个向量都可以由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 线性表出。根据线性表出的传递性，η 可以由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 线性表出。

综上，$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ (即 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$) 也是方程组 (1) 的基础解系。

---

3. 证明：设 n 元齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$，则方程组 (1) 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是它的一个基础解系。

证：设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r}$ 是方程组 (1) 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量。要证明它们构成基础解系，只需证明方程组的任一解向量 η 都能由它们线性表出。

任取方程组 (1) 的一个解向量 η。考察向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r},\eta$。我们知道方程组 (1) 的基础解系包含 $s=n-r$ 个向量，记为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$。因为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r},\eta$ 都是方程组的解，所以它们都可以由基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出。根据向量组秩的性质：若向量组 I 能由向量组 II 线性表出，则 I 的秩 $\le$ II 的秩。所以：

$$\text{rank}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r},\eta\}\le\text{rank}\{\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}\}=n-r$$

现在向量组 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r},\eta\}$ 共有 $n-r+1$ 个向量，但其秩不超过 $n-r$。根据线性相关的充分条件（向量个数大于秩），该向量组必**线性相关**。已知 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$ 线性无关，根据线性相关性的性质，η 必可由 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$ 线性表出。故 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$ 是方程组的一个基础解系。

---

4. 证明：设 n 元齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 是方程组 (1) 的解向量，则 rank$\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}\le n-r$。

证：取齐次线性方程组 (1) 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$。根据基础解系的定义，方程组的任何解向量都可以由基础解系线性表出。因此，解向量 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 均可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出。根据向量组秩的性质（若向量组 A 可由向量组 B 线性表出，则 $R(A)\le R(B)$），有：

$$\text{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}\le\text{rank}\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}$$

因为基础解系线性无关，所以 $\text{rank}\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}=n-r$。故：

$$\text{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}\le n-r$$

***5. 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于零，并且 A 的**

(k,l) **元的代数余子式** $A_{kl} \neq 0$。**证明：**

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

证：第一步：利用行列式按一行展开的定理，证明 η_1 是方程组的解。考察 $A\eta_1$ 的第 i 个分量，即计算 $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}$：

- 若 $i = k$，则 $\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{kj} = |A|$。已知 $|A| = 0$，故结果为 0。
- 若 $i \neq k$，则 $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}$ 等于将行列式 $|A|$ 的第 k 行元素换成第 i 行元素后的值。此时行列式有两行相同，故结果为 0。

因此 $A\eta_1 = \mathbf{0}$，η_1 是方程组的解。又因为题目已知 $A_{kl} \neq 0$，所以 η_1 是**非零解**。

第二步：计算基础解系所含解的个数。因为 A 中存在一个 $n-1$ 阶子式 $A_{kl} \neq 0$，所以系数矩阵 A 的秩 $r(A) \geq n-1$。又因为 $|A| = 0$，所以 $r(A) < n$。综上可知 $r(A) = n-1$。根据定理，基础解系所含向量的个数 $s = n - r(A) = n - (n-1) = 1$。

第三步：利用第 3 题结论。我们找到了 1 个非零的解向量 η_1。而基础解系所需向量个数正好是 1。，η_1 就是该方程组的一个基础解系。

习题 3.7 非齐次线性方程组的解集的结构

1. 求数域 K 上下列非齐次线性方程组的解集：

(1)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 \quad - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

解： 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变换：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+3R_1, R_3+R_1, R_4-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2, R_4+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组有无穷多解。选取 x_3, x_4 为自由未知量。由第 2 行：$-14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 28 \implies x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2$。代入第 1 行：$x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 11 = 5(\frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2) - 2x_3 + 3x_4 + 11 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 1$。

确定解集：

- **特解** γ_0：令 $x_3 = 0, x_4 = 0$，得 $x_2 = -2, x_1 = 1$。即 $\gamma_0 = (1, -2, 0, 0)^T$。
- **基础解系** η_1：令 $x_3 = 7, x_4 = 0$，得 $x_2 = 1, x_1 = -9$。即 $\eta_1 = (-9, 1, 7, 0)^T$。
- **基础解系** η_2：令 $x_3 = 0, x_4 = 2$，得 $x_2 = -1, x_1 = 1$。即 $\eta_2 = (1, -1, 0, 2)^T$。

解集为：

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, k_1, k_2 \in K \right\}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \\ -5x_1 - 10x_2 - 2x_3 + x_4 = -21 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16 \end{cases}$$

解： 对增广矩阵进行初等行变换：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & -10 & -2 & 1 & -21 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 9 & -3 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & -10 & -2 & 1 & -21 \\ 2 & -3 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 9 & -3 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元}} \dots \xrightarrow{\text{化简}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选取 x_4 为自由未知量。由第 3 行：$3x_3 = -x_4 - 6 \implies x_3 = -\frac{1}{3}x_4 - 2$。由第 2 行：$x_2 = 8x_3 + 2x_4 + 17 = 8(-\frac{1}{3}x_4 - 2) + 2x_4 + 17 = -\frac{2}{3}x_4 + 1$。由第 1 行：$x_1 = 1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 - 4(-\frac{2}{3}x_4 + 1) - 3(-\frac{1}{3}x_4 - 2) - 2x_4 = \frac{5}{3}x_4 + 3$。

确定解集：

- **特解** γ_0：令 $x_4 = 0$，得 $x_3 = -2, x_2 = 1, x_1 = 3$。即 $\gamma_0 = (3, 1, -2, 0)^T$。
- **基础解系** η：令 $x_4 = 3$，得 $x_3 = -3, x_2 = -1, x_1 = 8$。

  我们重新检查齐次方程的解：$x_1 = \frac{5}{3}x_4, x_2 = -\frac{2}{3}x_4, x_3 = -\frac{1}{3}x_4$。令 $x_4 = 3$，得 $\eta = (5, -2, -1, 3)^T$。

解集为：

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, k \in K \right\}$$

(3)

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 4$$

解： 这是一个 5 元线性方程，系数矩阵秩为 1。方程变形为：$x_1 = 4 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 6x_5$。选取 x_2, x_3, x_4, x_5 为自由未知量。

确定解集：

- **特解**：令 $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$，得 $x_1 = 4$。$\gamma_0 = (4, 0, 0, 0, 0)^T$。
- **基础解系**：令 $x_2 = 1$（其余自由量为 0），得 $x_1 = 4$。$\eta_1 = (4, 1, 0, 0, 0)^T$。令 $x_3 = 1$（其余自由量为 0），得 $x_1 = -2$。$\eta_2 = (-2, 0, 1, 0, 0)^T$。令 $x_4 = 1$（其余自由量为 0），得 $x_1 = 3$。$\eta_3 = (3, 0, 0, 1, 0)^T$。令 $x_5 = 1$（其余自由量为 0），得 $x_1 = -6$。$\eta_4 = (-6, 0, 0, 0, 1)^T$。

解集为：

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k_i \in K \right\}$$

---

2. 证明：n 个方程的 n 元非齐次线性方程组有惟一解当且仅当它的导出组只有零解。

证： 根据**克莱姆法则**：

1. 对于 n 个方程的 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$，其有惟一解的充分必要条件是系数行列式 $|A| \neq 0$。
2. 对于其导出组 $Ax = 0$，只有零解的充分必要条件也是系数行列式 $|A| \neq 0$。

因此，两者的条件完全一致，命题得证。

---

3. 证明：如果 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$ 都是 n 元非齐次线性方程组 (1) 的解，并且一组数 $u_1, u_2, \cdots, u_t$ 满足 $\sum_{i=1}^t u_i = 1$，则 $\sum_{i=1}^t u_i\gamma_i$ 也是方程组 (1) 的一个解。

证： 设非齐次线性方程组为 $Ax = b$。已知 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 都是解，即 $A\gamma_i = b\,(i = 1, \ldots, t)$。

根据题设，$\sum_{i=1}^{t} u_i = 1$，即 $u_1 = 1 - u_2 - \cdots - u_t$。我们将线性组合 $\beta = \sum_{i=1}^{t} u_i\gamma_i$ 变形：

$$\begin{aligned}\beta &= u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t \\ &= (1 - u_2 - \cdots - u_t)\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t \\ &= \gamma_1 + u_2(\gamma_2 - \gamma_1) + u_3(\gamma_3 - \gamma_1) + \cdots + u_t(\gamma_t - \gamma_1)\end{aligned}$$

由于 γ_i 和 γ_1 都是 $Ax = b$ 的解，差向量 $\gamma_i - \gamma_1$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的解（即 $A(\gamma_i - \gamma_1) = b - b = 0$）。因此，$\sum_{i=2}^{t} u_i(\gamma_i - \gamma_1)$ 是导出组解的线性组合，仍然是导出组 $Ax = 0$ 的解，记为 η。所以 $\beta = \gamma_1 + \eta$。根据解的结构定理，特解 γ_1 加上导出组的解 η，结果仍然是非齐次方程组 $Ax = b$ 的解。得证。

---

4. 证明：如果 γ_0 是非齐次线性方程组 (1) 的一个特解，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是它的导出组的一个基础解系。令

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \eta_1, \quad \gamma_2 = \gamma_0 + \eta_2, \quad \cdots, \quad \gamma_t = \gamma_0 + \eta_t.$$

则非齐次线性方程组 (1) 的任意一个解 γ 可以表示成

$$\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t,$$

其中 $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1$。

证：由非齐次线性方程组解的结构定理可知，任一解 γ 可以唯一地表示为特解与基础解系的线性组合：

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t \quad (*)$$

根据题目定义，$\eta_i = \gamma_i - \gamma_0$。将此代入 $(*)$ 式：

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 + k_1(\gamma_1 - \gamma_0) + k_2(\gamma_2 - \gamma_0) + \cdots + k_t(\gamma_t - \gamma_0) \\ &= \gamma_0 + k_1\gamma_1 - k_1\gamma_0 + k_2\gamma_2 - k_2\gamma_0 + \cdots + k_t\gamma_t - k_t\gamma_0 \\ &= (1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_t)\gamma_0 + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_t\gamma_t\end{aligned}$$

令 $u_i = k_i$ $(i = 1, \ldots, t)$，且令 $u_0 = 1 - (k_1 + \cdots + k_t)$。则 γ 可表示为 $\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_t\gamma_t$。且系数之和为：

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_t = [1 - (k_1 + \cdots + k_t)] + k_1 + \cdots + k_t = 1$$

得证。

习题 3.8 基 · 维数

1. 设 $r < n$，令

$$U = \{(a_1, a_2, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)' \mid a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, r\}$$

说明 U 是 K^n 的一个子空间，并且求 U 的一个基和维数。

解：(1) 证明 U 是子空间： 显然 $\mathbf{0} \in U$（当所有 $a_i = 0$ 时），故 U 非空。任取 $\alpha, \beta \in U$，设 $\alpha = (a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)'$，$\beta = (b_1, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)'$。任取 $k \in K$。则 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r, 0, \ldots, 0)' \in U$。且 $k\alpha = (ka_1, \ldots, ka_r, 0, \ldots, 0)' \in U$。根据子空间的定义，加法和数乘封闭，故 U 是 K^n 的一个子空间。

(2) 求基和维数： 取向量：

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)', \quad \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)', \quad \cdots, \quad \varepsilon_r = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)'$$

显然，对任意 $\alpha \in U$，有 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_r\varepsilon_r$。即 U 可由 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 线性表出。又因为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 是 K^n 标准基的一部分，它们线性无关。

故 U 的一个基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$，维数 $\dim U = r$。

---

2. 证明：K^n 中的向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 K^n 的一个基。

证： 将这 n 个向量作为列向量构成矩阵 A：

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

这是一个上三角形矩阵，主对角线元素全为 1。其行列式 $|A| = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1 \neq 0$。因为行列式不为 0，所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。在 n 维向量空间 K^n 中，任意 n 个线性无关的向量都构成一个基。

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 K^n 的一个基。

---

3. 在 K^4 中，求下述向量组生成的子空间的一个基和维数：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解： 生成的子空间即为这四个向量构成的矩阵的列空间。首先观察到 $\alpha_2 = (-1)\alpha_1$，故 α_2 可以由 α_1 线性表出，计算秩和基时可将其剔除。构造矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$ 并进行行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & -11 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - 4R_1, R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2, R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 2。主元位于第 1 列和第 2 列。对应的原向量 α_1, α_3 线性无关。

故子空间的一个基为 α_1, α_3（答案不唯一），维数为 2。

---

4. 求下述矩阵的列空间的维数和一个基：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

解： 对矩阵 A 进行初等行变换以求秩：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 5R_1, R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -13 & 10 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -7\\ 0 & -1 & -3 & 4\\ 0 & -13 & 10 & 36\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-13R_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -7\\ 0 & -1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 49 & -16\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

非零行有 3 行, 故矩阵的秩为 3。列空间的维数为 3。阶梯形矩阵的主元位于第 1, 2, 3 列。根据列空间的性质, 原矩阵 A 的第 1, 2, 3 列构成列空间的一个基。令 $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$。
故列空间的维数为 3。 一个基为:

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$