《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第六章 二次型 · 矩阵的合同

习题 6.1 二次型和它的标准形

1. 用正交替换把下列实二次型化成标准形：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

解： 二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$。对应单位正交特征向量：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T$，$\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$，$\eta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$。正交变换为 $X=TY$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

标准形为：

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$

解： 二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

求特征值：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$。特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$。求特征向量并正交化单位化：

- $\lambda = 1$：解 $(I-A)X = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to x_1 = x_2, x_3 = -x_4$。基础解系 $\alpha_1 = (1,1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,0,1,-1)^T$。已正交。单位化：$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T$。

- $\lambda = -1$：解 $(-I-A)X = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to x_1 = -x_2, x_3 = x_4$。基础解系 $\alpha_3 = (1,-1,0,0)^T, \alpha_4 = (0,0,1,1)^T$。已正交。单位化：$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T, \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T$。

正交变换为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

标准形为：

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$$

***2. 作直角坐标变换，把下述二次曲面的方程式化成标准方程，并且指出它是什么二次曲面：**

$$2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 1 = 0$$

解： 二次项部分对应的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求特征值：$|\lambda I-A|=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)(\lambda^2-4\lambda-12)=(\lambda-6)(\lambda-6)(\lambda+2)$。特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$。求特征向量：

- $\lambda=6$：解 $(6I-A)X=0 \implies \begin{pmatrix}4&0&-4\\0&0&0\\-4&0&4\end{pmatrix}\to x_1=x_3$。基础解系 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$。已正交。单位化：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,\eta_2=(0,1,0)^T$。
- $\lambda=-2$：解 $(-2I-A)X=0 \implies \begin{pmatrix}-4&0&-4\\0&-8&0\\-4&0&-4\end{pmatrix}\to x_1=-x_3,x_2=0$。基础解系 $\alpha_3=(1,0,-1)^T$。单位化：$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$。

正交变换为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}$$

代入原方程，得到新坐标系下的方程：

$$6(x^*)^2+6(y^*)^2-2(z^*)^2=1$$

这表示**单叶双曲面**。

---

3. 作非退化线性替换把数域 K 上下列二次型化成标准形，并且写出所作的非退化线性替换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$

解： 配方法。

$$\begin{aligned}f&=(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)+2x_2^2\\&=(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2+2x_2^2\\&=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3-x_3^2\\&=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2-2x_3^2\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}\implies\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

标准形为：$f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$。

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

解： 配方法。

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + 2x_1x_2) + 2x_2x_3 - x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

标准形为：$f = y_1^2 - y_2^2$。

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

解： 由于二次型中不含平方项，根据配方法的一般步骤，首先需要作变换造出平方项。

第一步：引入中间变量，造出平方项

利用公式 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = y_1^2 - y_2^2$，令：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

代入原二次型：

$$\begin{aligned} f &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= (y_1^2 - y_2^2) + (y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 \end{aligned}$$

第二步：对 y 变量进行配方

将含有 y_1 的项组合配方：

$$\begin{aligned} f &= (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 \\ &= (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

此时，我们得到了标准形的形式：$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$。

第三步：确定从 x 到 z 的总变换

令标准形中的新变量为 z，则有对应关系：

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

将 y 用 z 表示，代回第一步中 x 与 y 的关系式：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 = (z_1 - z_3) - z_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 = (z_1 - z_3) + z_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases}$$

结论：所作非退化线性替换为：

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

标准形为：$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$。

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$

解：该二次型包含两组独立的交叉项 $2x_1x_2$ 和 $-2x_3x_4$，且不含平方项。我们可以对这两部分分别进行“和差变换”。

第一步：设计变换

对于 $2x_1x_2$，令：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \implies x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2$$

对于 $-2x_3x_4$，令：

$$\begin{cases} x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_3 + y_4 \end{cases} \implies x_3x_4 = y_3^2 - y_4^2$$

第二步：综合代入

将上述变换合写在一起，即作非退化线性替换：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_3 + y_4 \end{cases}$$

第三步：计算标准形

代入原式：

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - 2(y_3 - y_4)(y_3 + y_4) \\ &= 2(y_1^2 - y_2^2) - 2(y_3^2 - y_4^2) \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2 \end{aligned}$$

结论：所作非退化线性替换如上所示，标准形为 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2$。

---

4. 证明：

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

证：对于二次型 $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$，作非退化线性替换 $y_1 = x_2, y_2 = x_3, y_3 = x_1$。该替换的矩阵为 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，显然 $|C| \neq 0$。变换后的二次型为 $a_2y_1^2 + a_3y_2^2 + a_1y_3^2$。这两个二次型相互合同，故其对应的矩阵合同。

---

5. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：A 是斜对称矩阵当且仅当对于 K^n 中任一列向量 α，有 $\alpha' A\alpha = 0$。

证： 必要性：设 A 是斜对称矩阵，即 $A' = -A$。对于任意 α，$\alpha' A\alpha$ 是一个数（1×1 矩阵），故其转置等于自身。$(\alpha' A\alpha)' = \alpha' A'(\alpha')' = \alpha'(-A)\alpha = -(\alpha' A\alpha)$。即 $k = -k \implies 2k = 0$。在特征不为 2 的数域 K 上，得 $\alpha' A\alpha = 0$。

充分性：设对任意 α 都有 $\alpha' A\alpha = 0$。取 $\alpha = \varepsilon_i$，则 $\varepsilon_i' A\varepsilon_i = a_{ii} = 0$。即对角元全为 0。取 $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i \neq j)$，$(\varepsilon_i + \varepsilon_j)' A(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \varepsilon_i' A\varepsilon_i + \varepsilon_j' A\varepsilon_j + \varepsilon_i' A\varepsilon_j + \varepsilon_j' A\varepsilon_i$。即 $0 = 0 + 0 + a_{ij} + a_{ji}$。故 $a_{ij} = -a_{ji}$。综上，对于任意 i, j，有 $a_{ii} = 0$ 且 $a_{ij} = -a_{ji}$。所以 A 是斜对称矩阵。

---

6. 设 A 是数域 K 上的 n 级对称矩阵，证明：如果对于 K^n 中任一列向量 α 都有 $\alpha' A\alpha = 0$，则 $A = 0$。

证： 由上一题的充分性证明过程可知: 若对任意 α 都有 $\alpha' A\alpha = 0$, 则 A 必然是斜对称矩阵 (即 $A' = -A$)。又因为已知 A 是对称矩阵 ($A' = A$)。所以 $A = -A \implies 2A = 0$。在特征不为 2 的数域 K 上，得 $A = 0$。

---

7. 证明：秩为 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和。

证： 设 A 是数域 K 上秩为 r 的对称矩阵。根据对称矩阵的合同标准形理论，存在可逆矩阵 C，使得

$$C'AC = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0) = D$$

其中 $d_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$。由上式可得:

$$A = (C')^{-1}DC^{-1} = (C^{-1})'DC^{-1}$$

令 $P = C^{-1}$。由于 C 可逆，则 P 也是可逆矩阵。设 P 的第 i 个**行向量**为 α_i（即 α_i 是 $1 \times n$ 矩阵)，则

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad P' = (\alpha_1', \cdots, \alpha_n')$$

将 A 展开:

$$\begin{aligned} A &= P'DP \\ &= (\alpha_1', \cdots, \alpha_n') \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1', \cdots, \alpha_n') \begin{pmatrix} d_1\alpha_1 \\ \vdots \\ d_r\alpha_r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{r} d_i \alpha_i' \alpha_i \end{aligned}$$

令 $M_i = d_i \alpha_i' \alpha_i$ $(i = 1, \cdots, r)$。我们需要证明 M_i 是秩为 1 的对称矩阵:

1. **对称性**：
$$M_i' = (d_i\alpha_i'\alpha_i)' = d_i\alpha_i'(\alpha_i')' = d_i\alpha_i'\alpha_i = M_i$$
故 M_i 是对称矩阵。

2. **秩为 1**：因为 P 是可逆矩阵，其行向量 α_i 线性无关，故 $\alpha_i \neq 0$。又因为 $d_i \neq 0$，所以 M_i 是一个非零列向量 $(d_i\alpha_i')$ 与一个非零行向量 (α_i) 的乘积。根据矩阵秩的性质，非零列向量与非零行向量乘积的秩恒为 1。

综上所述，$A = \sum_{i=1}^{r} M_i$ 即为 r 个秩为 1 的对称矩阵之和。

---

8. 用矩阵的成对初等行、列变换法把数域 K 上下述二次型化成标准形，并且写出所作的非退化线性替换：

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

解： 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。构造增广矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$，对 A 做合同变换，对 I 做相应的列变换以记录变换矩阵 C。

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2+C_1} \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3+\frac{2}{3}C_2} \xrightarrow{R_3+\frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \\ \hline 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

标准形：$y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$。变换：$x_1 = y_1 + y_2 + \frac{2}{3}y_3$，$x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3$，$x_3 = y_3$。

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

解： 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$。构造增广矩阵 $\begin{pmatrix}A\\ I\end{pmatrix}$，我们将对列和行进行成对变换。

第一步：产生主对角线上的非零元

由于 $a_{11}=0$，无法作为主元消去其他元素。我们将第 2 列加到第 1 列（C_1+C_2），紧接着将第 2 行加到第 1 行（R_1+R_2）。

$$\left(\begin{array}{ccc}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1+R_2]{C_1+C_2}\left(\begin{array}{ccc}1 & 1/2 & 1\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1 & 1/2 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

此时 $a_{11}=1\neq 0$，可以作为主元。

第二步：消去第 1 行和第 1 列的非对角元

目标是消去 $a_{12}=1/2$ 和 $a_{13}=1$。操作: 1. 第 2 列减去第 1 列的 1/2 倍 ($C_2-\frac{1}{2}C_1$)；对应行变换 ($R_2-\frac{1}{2}R_1$)。2. 第 3 列减去第 1 列 (C_3-C_1)；对应行变换 (R_3-R_1)。

$$\xrightarrow[R_2-\frac{1}{2}R_1]{C_2-\frac{1}{2}C_1}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 1\\ 0 & -1/4 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & -1/2 & 0\\ 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{C_3-C_1}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hline 1 & -1/2 & -1\\ 1 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

此时，上方矩阵已化为对角矩阵 Λ，下方矩阵即为所求的变换矩阵 C。

结论：

- **标准形：** $f=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2$。

- **非退化线性替换：** $X = CY$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

  展开写为：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

***9. 证明：数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵：**

$$\operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0), \cdots, (0) \right\}$$

证： 对斜对称矩阵 A 的阶数 n 做数学归纳法。

1. 归纳基础： 当 $n = 1$ 时，斜对称矩阵 A 满足 $A' = -A$，即 $a_{11} = -a_{11}$，故 $a_{11} = 0$。$A = (0)$，结论显然成立。当 $n = 2$ 时，若 $A = 0$ 成立；若 $A \neq 0$，则 $a_{12} \neq 0$（因 $a_{11} = a_{22} = 0$）。作合同变换（第 2 列乘以 $1/a_{12}$，第 2 行乘以 $1/a_{12}$），可将 A 化为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，结论成立。

2. 归纳假设与步骤： 假设对于 $n-2$ 级斜对称矩阵结论成立。现考虑 n 级斜对称矩阵 A。

情形一： 若 $A = 0$，结论显然成立（全为 0 块）。

情形二： 若 $A \neq 0$，则至少存在一个元素 $a_{ij} \neq 0$。由于主对角元全为 0，必有 $i \neq j$。

1. **交换行列（定位）：** 若 $a_{12} = 0$，通过交换行和交换列（合同变换），将非零元素 a_{ij} 移至 $(1, 2)$ 位置。此时有 $a_{12} \neq 0$，且由于斜对称性，$a_{21} = -a_{12}$。
2. **倍乘行列（标准化）：** 作合同变换：将矩阵的第 2 列乘以 $1/a_{12}$，同时将第 2 行乘以 $1/a_{12}$。变换后的矩阵（仍记为 A）满足：$a_{12} = 1, a_{21} = -1$。此时 A 的左上角 2×2 子块为 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。

3. **消元（分块对角化）：**我们要利用 H 消去第 1、2 行和第 1、2 列中其余元素。对于 $j = 3, \ldots, n$：

- 为了消去第 1 行第 j 列的元素 a_{1j}：利用第 2 行的 -1（位置 $(2,1)$）。作行变换 $R_j + a_{1j}R_2$，以及对应的列变换 $C_j + a_{1j}C_2$。由于 $a_{11} = 0, a_{12} = 1$，列变换由对称性保证了 A 保持斜对称，因此第 j 行第 1 列的元素也会变为 0。
- 为了消去第 2 行第 j 列的元素 a_{2j}：利用第 1 行的 1（位置 $(1,2)$）。作行变换 $R_j - a_{2j}R_1$，以及对应的列变换 $C_j - a_{2j}C_1$。同理，这也将消除第 j 行第 2 列的元素。

经过上述变换，矩阵 A 合同于：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_1 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 $n-2$ 级斜对称矩阵。

3. 结论：由归纳假设，A_1 合同于标准形式。故 A 也合同于标准形式。证毕。

***10. 证明：斜对称矩阵的秩一定是偶数。**

证：由第 9 题可知，斜对称矩阵 A 合同于标准形 D。D 是分块对角阵，由 k 个 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和若干个 0 组成。每个 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2。故 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(D) = 2k$。所以秩为偶数。

***11. 设 n 元实二次型 $X'AX$ 的一个特征值是 λ_i，证明：存在 $\mathbb{R}^n$ 中非零向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$，使得**

$$\alpha' A\alpha = \lambda_i(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

证：取 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量 α。即 $A\alpha = \lambda_i\alpha$。左乘 α'：

$$\alpha' A\alpha = \alpha'(\lambda_i\alpha) = \lambda_i(\alpha'\alpha)$$

其中 $\alpha'\alpha = \sum_{j=1}^n a_j^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$。故等式成立。

习题 6.2 实二次型的规范形

1. 把习题 6.1 的第 3 题的所有实二次型的标准形进一步化成规范形，并且写出所作的非退化线性替换。

解： (1) 标准形为 $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$。令

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 \end{cases}$$

规范形为：$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$。

(2) 标准形为 $f = y_1^2 - y_2^2$。这已经是规范形（系数为 1 或 -1）。无需进一步变换。

(3) 标准形为 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$。这已经是规范形。

(4) 标准形为 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2$。令

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_4 \\ y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \end{cases}$$

规范形为：$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$。

---

2. 3 级实对称矩阵组成的集合按照合同关系分类，可以分成多少类？每一类里写出一个最简单的矩阵 (即合同规范形)。

解： 根据惯性定理，实对称矩阵的合同分类由其正惯性指数 p 和负惯性指数 q（或秩 $r = p + q$）唯一确定。对于 3 级矩阵，可能的 (p, q) 组合如下（共 10 类）：

1. $r = 0$: $(0,0) \to \mathbf{0}$
2. $r = 1$: $(1,0) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(0,1) \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $r = 2$: $(2,0) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(1,1) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(0,2) \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $r=3$: $(3,0)\to I_3$, $\quad (2,1)\to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$$(1,2)\to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, \quad (0,3)\to -I_3$$

综上，共分成 10 类。

***3. n 级实对称矩阵组成的集合按照合同关系分类，可以分成多少类？**

解：分类的依据是惯性指数对 (p,q)。矩阵的秩 $r=p+q$，其中 $0\le r\le n$。对于给定的秩 r，正惯性指数 p 可以取 $0,1,\cdots,r$，共有 $r+1$ 种情况。因此，总的类别数为:

$$\sum_{r=0}^{n}(r+1)=1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

---

4. 设 $X'AX$ 是一个 n 元实二次型，证明：如果 $\mathbb{R}^n$ 中有列向量 α_1,α_2，使得 $\alpha_1'A\alpha_1>0,\alpha_2'A\alpha_2<0$，则 $\mathbb{R}^n$ 中有非零列向量 α_3，使得 $\alpha_3'A\alpha_3=0$。

证：设二次型 $X'AX$ 的规范形为

$$f(y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

由存在 α_1 使得值大于 0，知 $p\ge 1$（至少有一个正平方项）。由存在 α_2 使得值小于 0，知负惯性指数 $q=r-p\ge 1$（即至少有一个负平方项）。因此，规范形中至少包含 y_1^2 和 $-y_{p+1}^2$。我们可以在 y 坐标系下取向量 $\eta=(1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$，其中第 1 个分量和第 $p+1$ 个分量为 1，其余为 0。此时

$$f(\eta)=1^2-1^2=0$$

设从 x 到 y 的可逆线性变换为 $y=Cx$（即 $x=C^{-1}y$）。令 $\alpha_3=C^{-1}\eta$。由于 $\eta\ne 0$ 且 C^{-1} 可逆，故 $\alpha_3\ne 0$。且 $\alpha_3'A\alpha_3=f(\eta)=0$。命题得证。

---

5. 设 A 为一个 n 级实对称矩阵，证明：如果 $|A|<0$，则在 $\mathbb{R}^n$ 中有非零列向量 α，使得 $\alpha'A\alpha<0$。

证： 设 A 的规范形为 $\Lambda = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)$，其中 1 有 p 个，-1 有 q 个。根据合同变换性质，$A = C'\Lambda C$，其中 C 可逆。两边取行列式：$|A| = |C'||\Lambda||C| = |C|^2|\Lambda|$。因为 $|A| < 0$ 且 $|C|^2 > 0$，所以必有 $|\Lambda| < 0$。这意味着：1. 0 的个数为 0，即 $r = n$（A 满秩）。2. -1 的个数 q 必须是奇数。因为 q 是奇数，所以 $q \geq 1$。即规范形中至少有一项 $-y_k^2$。取 $y = e_k$（第 k 个分量为 1 的单位向量），则规范形的值为 $-1 < 0$。对应的原象 $\alpha = C^{-1}e_k \neq 0$ 满足 $\alpha' A\alpha < 0$。

***6. 证明：一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 并且符号差为 0，或者它的秩等于 1。**

证： 设 n 元实二次型为 $f(x) = X'AX$。

1. 充分性

1. 若二次型的秩 $r = 1$，则其规范形为 $f = \pm y_1^2$。显然可以分解为 $(\pm y_1) \cdot y_1$（或 $\sqrt{k}y_1 \cdot \mathrm{sgn}(k)\sqrt{k}y_1$），即两个一次齐次多项式的乘积。
2. 若二次型的秩 $r = 2$ 且符号差 $s = 0$。由 $p + q = 2$ 且 $p - q = 0$ 解得 $p = 1, q = 1$。故其规范形为 $f = y_1^2 - y_2^2$。利用平方差公式：
$$f = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$
由于 y_1, y_2 均是 $x_1, \ldots, x_n$ 的一次齐次多项式，故 $y_1 + y_2$ 与 $y_1 - y_2$ 也是。充分性得证。

2. 必要性设 $X'AX$ 可以分解为两个实系数 1 次齐次多项式的乘积，即：
$$X'AX = (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + \cdots + b_nx_n)$$
令系数向量 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)'$，$\beta = (b_1, \cdots, b_n)'$。则 $f(x) = (\alpha' X)(\beta' X)$。

情形 1： α 与 β 线性相关。此时不妨设 $\beta = k\alpha$（k 为实数）。则 $f(x) = k(\alpha' X)^2 = k(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2$。作非退化线性替换：
$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ y_2, \ldots, y_n \text{补充使得变换矩阵可逆} \end{cases}$$
在新的坐标系下，二次型化为 $f = ky_1^2$。显然，此二次型的秩为 1。

情形 2： α 与 β 线性无关。此时 α,β 的分量不成比例。此时不妨设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$。作线性替换：

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

该线性替换的系数矩阵为 $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$。其行列式 $|C| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，故该替换是非退化的。代入二次型表达式，得：

$$f = y_1y_2$$

为了求其秩和符号差，再次作非退化线性替换：

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_i = z_i \quad (i = 3, \ldots, n) \end{cases}$$

则 $f = (z_1+z_2)(z_1-z_2) = z_1^2 - z_2^2$。这是一个规范形。显然，秩 $r = 2$；正惯性指数 $p = 1$，负惯性指数 $q = 1$，故符号差 $s = p - q = 0$。

综上所述，必要性得证。

---

7. 证明：复数域上 n 元二次型（简称为复二次型）$X'AX$ 能经过非退化线性替换成述形式的标准形：$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$，其中 r 是二次型的秩。

证： 第一步：与实二次型类似，复二次型 $X'AX$ 首先可以通过非退化线性替换（配方法或正交变换）化为标准形：

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 r 为矩阵 A 的秩，且 $d_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$。注意这里 d_i 是复数。

第二步：再作非退化线性替换。由于在复数域中，任何非零复数 d_i 都可以开平方。令

$$z_i = \sqrt{d_i} y_i \quad (i = 1, \cdots, r), \quad z_j = y_j \quad (j = r+1, \cdots, n)$$

即 $y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} z_i$。代入上式，得：

$$f = (\sqrt{d_1} y_1)^2 + \cdots + (\sqrt{d_r} y_r)^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

这就是复二次型的规范形。

习题 6.3 正定二次型与正定矩阵

1. 证明：如果 A, B 都是 n 级正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵。

证：因为 A, B 都是正定矩阵, 所以 A, B 都是实对称矩阵。从而 $(A+B)' = A'+B' = A+B$，即 $A+B$ 也是实对称矩阵。对任意非零列向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $(\alpha \neq 0)$，根据正定矩阵的定义有：

$$\alpha' A\alpha > 0, \quad \alpha' B\alpha > 0$$

将两式相加得：

$$\alpha' A\alpha + \alpha' B\alpha = \alpha'(A+B)\alpha > 0$$

因此 $A+B$ 是正定矩阵。

---

2. 证明：如果 A 是正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定矩阵。

证： (1) 先证 A^{-1} 是对称矩阵：因为 A 是正定矩阵，所以 A 是可逆的对称矩阵。$(A^{-1})' = (A')^{-1} = A^{-1}$，故 A^{-1} 是对称矩阵。

(2) 再证 A^{-1} 正定：根据正定矩阵的充要条件，存在可逆矩阵 P，使得 $A = P'P$（即 $A \cong I$）。则 $A^{-1} = (P'P)^{-1} = P^{-1}(P')^{-1} = P^{-1}(P^{-1})'$。令 $Q = (P^{-1})'$，则 Q 可逆，且 $A^{-1} = Q'Q = Q'IQ$。这说明 A^{-1} 合同于单位矩阵 I。因为 I 是正定的，所以 A^{-1} 也是正定矩阵。

---

3. 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，则 A^* 也是正定矩阵。

证：因为 A 是对称矩阵，所以 $(A^*)' = (A')^* = A^*$，即 A^* 是对称矩阵。利用公式 $AA^* = |A|I$。因为 A 是正定矩阵，所以 $|A| > 0$ 且 A^{-1} 存在。于是 $A^* = |A|A^{-1}$。任取 $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0$，计算二次型：

$$\alpha' A^*\alpha = \alpha'(|A|A^{-1})\alpha = |A|(\alpha' A^{-1}\alpha)$$

由第 2 题知 A^{-1} 是正定矩阵，故 $\alpha' A^{-1}\alpha > 0$。又 $|A| > 0$，所以 $\alpha' A^*\alpha > 0$。故 A^* 是正定矩阵。

---

4. 设 A 是 n 级实对称矩阵，它的 n 个特征值的绝对值中最大者记作 $S_r(A)$。证明：当 $t > S_r(A)$ 时，$tI + A$ 是正定矩阵。

证： 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。则 $tI + A$ 的特征值为 $t+\lambda_1, t+\lambda_2, \cdots, t+\lambda_n$。因为 $S_r(A) = \max_i |\lambda_i|$，且已知 $t > S_r(A)$，所以对于任意 i，有 $t > |\lambda_i| \geq -\lambda_i$，即 $t + \lambda_i > 0$。$tI + A$ 是实对称矩阵，且其所有特征值均大于 0，因此 $tI + A$ 是正定矩阵。

---

5. 证明：正定矩阵的迹大于零。

证： 设 A 是正定矩阵，则 A 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 全大于 0。根据矩阵迹的性质，$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$。因为 $\lambda_i > 0$，所以 $\sum \lambda_i > 0$，即 $\mathrm{tr}(A) > 0$。

---

6. 判断下列实二次型是否正定： **(1)** $f = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ **(2)** $f = 10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + x_3^2$ **(3)** $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

解： 利用赫尔维茨定理（顺序主子式大于 0）判断。

(1) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$。$D_1 = 5 > 0$。$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26 > 0$。$D_3 = 5(24-4) - (-2)(-8) = 100 - 16 = 84 > 0$。**结论：正定**。

(2) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{bmatrix}$。$D_1 = 10 > 0$。$D_2 = 20 - 16 = 4 > 0$。$D_3 = 10(2-196) - 4(4+168) + 12(-56-24) = -1940 - 688 - 960 < 0$。**结论：不是正定**。

(3) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$。$D_1 = 3 > 0$。$D_2 = 12 - 4 = 8 > 0$。$D_3 = 3(20-4) - 2(10) = 48 - 20 = 28 > 0$。**结论：正定**。

---

7. t 满足什么条件时，下列实二次型是正定的？ **(1)** $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ **(2)** $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$

解： **(1)** 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$。需满足：$D_1 = 1 > 0$。$D_2 = 1 - t^2 > 0 \implies -1 < t < 1$。$D_3 = 1(5-4) - t(5t+2) - 1(2t+1) = 1 - 5t^2 - 2t - 2t - 1 = -5t^2 - 4t > 0$。解 $-5t^2 - 4t > 0 \implies -t(5t+4) > 0$。方程根为 $0, -0.8$。不等式解为 $-0.8 < t < 0$。结

合 D_2 的条件，最终范围是：$-\frac{4}{5} < t < 0$。

(2) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。需满足：$D_1 = 1 > 0$。$D_2 = 4 - t^2 > 0 \implies -2 < t < 2$。
$D_3 = 1(8) - t(2t) + 1(-4) = 8 - 2t^2 - 4 = 4 - 2t^2 > 0$。解 $2t^2 < 4 \implies t^2 < 2 \implies -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。取交集，最终范围是：$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。

***8. 证明：n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为：有可逆实对称矩阵 C 使得** $A = C^2$。

证： **充分性：**若存在可逆实对称矩阵 C 使得 $A = C^2$。则 $A' = (C^2)' = (C')^2 = C^2 = A$，故 A 对称。对任意 $\alpha \neq 0$，$\alpha' A\alpha = \alpha' CC\alpha = \alpha' C'C\alpha = (C\alpha)'(C\alpha) = |C\alpha|^2$。因为 C 可逆且 $\alpha \neq 0$，所以 $C\alpha \neq 0$，故 $|C\alpha|^2 > 0$。即 A 正定。

必要性：若 A 是正定矩阵，则存在正交矩阵 T 使得 $A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)T^{-1}$，且 $\lambda_i > 0$。因为 T 是正交阵，$T^{-1} = T'$。构造 $\Lambda^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$。令 $C = T\Lambda^{1/2}T'$。显然 C 是实对称矩阵（$C' = (T\Lambda^{1/2}T')' = T(\Lambda^{1/2})'T' = C$）。且 $C^2 = T\Lambda^{1/2}T'T\Lambda^{1/2}T' = T\Lambda^{1/2}I\Lambda^{1/2}T' = T\Lambda T' = A$。$C$ 的特征值为 $\sqrt{\lambda_i} > 0$，故 $|C| = \prod \sqrt{\lambda_i} \neq 0$，即 C 可逆。

***9. 证明：如果 A 是正定矩阵，则存在正定矩阵 C，使得 $A = C^2$。**

证：由第 8 题证明过程可知，构造的矩阵 $C = T\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})T'$。$C$ 是实对称矩阵。C 的特征值为 $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$。因为 A 正定，所以 $\lambda_i > 0$，从而 $\sqrt{\lambda_i} > 0$。特征值全大于 0 的实对称矩阵是正定矩阵。故存在正定矩阵 C 满足 $A = C^2$。。

---

10. 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级半正定矩阵，则 $A + B$ 是正定矩阵。

证： A 正定 $\implies \forall \alpha \neq 0, \alpha' A\alpha > 0$。$B$ 半正定 $\implies \forall \alpha, \alpha' B\alpha \geq 0$。则对于任意 $\alpha \neq 0$：

$$\alpha'(A + B)\alpha = \alpha' A\alpha + \alpha' B\alpha > 0 + 0 = 0$$

所以 $A + B$ 是正定矩阵。

---

11. 判断 $I + J$ 是否正定矩阵，其中 J 是元素全为 1 的 n 级矩阵。

解： J 是实对称矩阵。其对应的二次型为 $X'JX = (\sum x_i)^2 \geq 0$。所以 J 是半正定矩阵。I 是单位矩阵，显然是正定矩阵。根据第 10 题结论，正定矩阵 I 加半正定矩阵 J 仍为正定矩阵。故 $I+J$ 是正定矩阵。

---

12. 证明：n 级实对称矩阵 A 是负定的充分必要条件为：它的奇数阶顺序主子式全小于零，偶数阶顺序主子式全大于零。

证： 由定义，A 是负定的 $\iff$ $-A$ 是正定的。设 A 的 k 阶顺序主子式为 $D_k(A)$。$-A$ 的 k 阶顺序主子式为 $D_k(-A)$。根据行列式性质，$D_k(-A) = (-1)^k D_k(A)$。根据赫尔维茨定理，$-A$ 正定的充要条件是其所有顺序主子式大于零：即 $D_k(-A) > 0$ 对 $k = 1, \ldots, n$ 成立。代入得：$(-1)^k D_k(A) > 0$。

- 当 k 为奇数时，$(-1)D_k(A) > 0 \implies D_k(A) < 0$。
- 当 k 为偶数时，$(1)D_k(A) > 0 \implies D_k(A) > 0$。

得证。