《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第九章　欧几里得空间和酉空间

习题 9.1　欧几里得空间的结构

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，对于任意 $\alpha=(x_1,x_2),\beta=(y_1,y_2)$，规定

$$(\alpha,\beta)\stackrel{\text{def}}{=}x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+4x_2y_2.$$

判断 (α,β) 是不是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个内积。

解：是。验证内积的四个公理：

1. **对称性**：$(\beta,\alpha)=y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1+4y_2x_2=(\alpha,\beta)$。成立。

2. **线性性**：$(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$ 和 $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$。式子关于 x_1,x_2 是线性的，显然成立。

3. **非负性**：

$$(\alpha,\alpha)=x_1^2-x_1x_2-x_2x_1+4x_2^2=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$$

配方得：

$$(\alpha,\alpha)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2$$

显然 $(\alpha,\alpha)\geq 0$。

4. **正定性**：若 $(\alpha,\alpha)=0$，则 $(x_1-x_2)^2+3x_2^2=0$。这意味着 $x_2=0$ 且 $x_1-x_2=0\implies x_1=0$。即 $\alpha=0$。成立。

综上，是内积。

---

2. 在实线性空间 $M_n(\mathbf{R})$ 中，规定一个二元函数为 $f(A,B)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{tr}(AB)$。判断 $f(A,B)$ 是不是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的一个内积。

解：不是。对于 $n \geq 2$，正定性不成立。取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$。显然 $A \neq 0$。计算 $f(A, A) = \mathrm{tr}(AA) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$。存在非零向量 A 使得自身内积为 0，违反了正定性公理。

---

3. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，对于任意两个列向量 α, β，规定 $(\alpha, \beta) \overset{\text{def}}{=} \alpha' A \beta$，其中 A 是一个 n 级正定矩阵。证明：(α, β) 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积。

证：

1. **对称性**：因为 (α, β) 是一个数，其转置等于自身。$(\alpha, \beta) = (\alpha' A \beta)' = \beta' A' \alpha$。因为 A 是正定矩阵，必对称，即 $A' = A$。所以 $(\alpha, \beta) = \beta' A \alpha = (\beta, \alpha)$。

2. **线性性**：矩阵乘法满足分配律和结合律。$(k\alpha + \gamma, \beta) = (k\alpha + \gamma)' A \beta = k\alpha' A \beta + \gamma' A \beta = k(\alpha, \beta) + (\gamma, \beta)$。

3. **正定性**：因为 A 是正定矩阵，根据正定矩阵的定义，对于任意 $\alpha \neq 0$，都有 $\alpha' A \alpha > 0$。且当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha' A \alpha = 0$。

综上，满足内积的所有条件。

---

4. 在 $\mathbf{R}^4$ 中，给定了标准内积，求 α 与 β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$，其中 $\alpha = (1, -1, 4, 0)$，$\beta = (3, 1, -2, 2)$。

解：计算内积：$(\alpha, \beta) = 1(3) + (-1)(1) + 4(-2) + 0(2) = 3 - 1 - 8 = -6$。计算长度：$|\alpha| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2 + 0} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$。$|\beta| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4 + 4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$。计算夹角余弦：$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} = \frac{-6}{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$。故夹角 $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$。

---

5. 在 $\mathbf{R}[x]_3$ 中，给定一个内积为 $(f(x), g(x)) \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$，求 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一个标准正交基。

解：取基 $1, x, x^2$。利用施密特正交化。

1. 令 $g_1 = 1$。$|g_1|^2 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$。

2. 令 $g_2 = x - \frac{(x,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1$。$(x,g_1) = \int_{-1}^{1} x dx = 0$。故 $g_2 = x$。$|g_2|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$。

3. 令 $g_3 = x^2 - \frac{(x^2,g_1)}{(g_1,g_1)}g_1 - \frac{(x^2,g_2)}{(g_2,g_2)}g_2$。$(x^2,g_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$。$(x^2,g_2) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$。故 $g_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$。$|g_3|^2 = \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx = 2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}) = 2(\frac{9-10+5}{45}) = \frac{8}{45}$。

单位化：$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。$e_2 = \frac{x}{\sqrt{2/3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$。$e_3 = \frac{x^2-1/3}{\sqrt{8/45}} = \frac{3x^2-1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1) = \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$。

---

6. 设 V 是 3 维欧几里得空间，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一个基。度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$，求 V 的一个标准正交基。

解： 利用施密特正交化。1. 取 $\beta_1 = \alpha_1$。$|\beta_1|^2 = (\alpha_1,\alpha_1) = a_{11} = 1$。单位化：$\eta_1 = \frac{\beta_1}{1} = \alpha_1$。

2. 取 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。由度量矩阵知：$(\alpha_2,\beta_1) = (\alpha_2,\alpha_1) = 0$。故 $\beta_2 = \alpha_2$。$|\beta_2|^2 = (\alpha_2,\alpha_2) = 10$。单位化：$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\alpha_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2$。

3. 取 $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$。$(\alpha_3,\beta_1) = (\alpha_3,\alpha_1) = 1$。$(\alpha_3,\beta_2) = (\alpha_3,\alpha_2) = -2$。$(\beta_1,\beta_1) = 1$, $(\beta_2,\beta_2) = 10$。$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{1}{1}\alpha_1 - \frac{-2}{10}\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2$。计算模长平方：$|\beta_3|^2 = (\alpha_3 - \alpha_1 + 0.2\alpha_2, \alpha_3 - \alpha_1 + 0.2\alpha_2)$。利用矩阵计算 $X'AX$：系数向量 $(-1, 0.2, 1)$。$= (-1, 0.2, 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1+1, 2-2, -1-0.4+2) \cdot (-1, 0.2, 1)^T = (0, 0, 0.6) \cdot (-1, 0.2, 1)^T = 0.6 = \frac{3}{5}$。单位化：$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3/5}}\beta_3 = \frac{\sqrt{15}}{3}(-\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1 + \frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2 + \frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3$。

---

7. 设 η_1, η_2, η_3 是 3 维欧几里得空间 V 的一个标准正交基，令

$$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\eta_1 - \eta_2 + 2\eta_3), \quad \beta_2 = \frac{1}{3}(2\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3), \quad \beta_3 = \frac{1}{3}(\eta_1 - 2\eta_2 - 2\eta_3).$$

证明：$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 V 的一个标准正交基。

证： 要证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是标准正交基，只需验证 $(\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}$，即当 $i = j$ 时内积为 1，当 $i \neq j$ 时内积为 0。已知 $(\eta_k, \eta_l) = \delta_{kl}$。我们可以将 β_i 的坐标向量写出来进行计

算。设 β_1,β_2,β_3 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标向量分别为：

$$x_1=\frac{1}{3}(2,-1,2)^T,\quad x_2=\frac{1}{3}(2,2,-1)^T,\quad x_3=\frac{1}{3}(1,-2,-2)^T$$

利用坐标计算内积：

1. **验证单位性 (模长为 1)：**

$$(\beta_1,\beta_1)=x_1^Tx_1=\frac{1}{9}(2^2+(-1)^2+2^2)=\frac{1}{9}(4+1+4)=\frac{9}{9}=1.$$

$$(\beta_2,\beta_2)=x_2^Tx_2=\frac{1}{9}(2^2+2^2+(-1)^2)=\frac{1}{9}(4+4+1)=\frac{9}{9}=1.$$

$$(\beta_3,\beta_3)=x_3^Tx_3=\frac{1}{9}(1^2+(-2)^2+(-2)^2)=\frac{1}{9}(1+4+4)=\frac{9}{9}=1.$$

2. **验证正交性 (两两内积为 0)：**

$$(\beta_1,\beta_2)=x_1^Tx_2=\frac{1}{9}(2\cdot 2+(-1)\cdot 2+2\cdot(-1))=\frac{1}{9}(4-2-2)=0.$$

$$(\beta_1,\beta_3)=x_1^Tx_3=\frac{1}{9}(2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-2))=\frac{1}{9}(2+2-4)=0.$$

$$(\beta_2,\beta_3)=x_2^Tx_3=\frac{1}{9}(2\cdot 1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2))=\frac{1}{9}(2-4+2)=0.$$

综上所述，向量组 β_1,β_2,β_3 满足 $(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$，且 V 是 3 维空间，故它们构成 V 的一个标准正交基。

---

8. 设 $\eta_1,\ldots,\eta_5$ 是标准正交基，$V_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$，其中 $\alpha_1=\eta_1+2\eta_3-\eta_5,\alpha_2=\eta_2-\eta_3+\eta_4,\alpha_3=-\eta_2+\eta_3+\eta_5$。(1) 求 (α_i,α_j)；(2) 求 V_1 的一个正交基。

解：(1) $\alpha_1=(1,0,2,0,-1)$（坐标表示）。$\alpha_2=(0,1,-1,1,0)$。$\alpha_3=(0,-1,1,0,1)$。$(\alpha_1,\alpha_1)=1+4+1=6$。$(\alpha_2,\alpha_2)=1+1+1=3$。$(\alpha_3,\alpha_3)=1+1+1=3$。$(\alpha_1,\alpha_2)=0+0-2+0+0=-2$。$(\alpha_1,\alpha_3)=0+0+2+0-1=1$。$(\alpha_2,\alpha_3)=0-1-1+0+0=-2$。

(2) 施密特正交化：1. $\beta_1=\alpha_1$。2. $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{-2}{6}\alpha_1=\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_1$。3. $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$。$(\alpha_3,\beta_1)=1$。$(\alpha_3,\beta_2)=(\alpha_3,\alpha_2)+\frac{1}{3}(\alpha_3,\alpha_1)=-2+\frac{1}{3}(1)=-\frac{5}{3}$。$(\beta_2,\beta_2)=(\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_1,\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_1)=3+\frac{2}{3}(-2)+\frac{1}{9}(6)=3-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$。$\beta_3=\alpha_3-\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{-5/3}{7/3}\beta_2=\alpha_3-\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{5}{7}\beta_2=\alpha_3-\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{5}{7}(\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_1)=\alpha_3+\frac{5}{7}\alpha_2+(\frac{5}{21}-\frac{1}{6})\alpha_1$ $=\alpha_3+\frac{5}{7}\alpha_2+\frac{1}{14}\alpha_1$。整理得正交基：$\alpha_1,\frac{1}{3}\alpha_1+\alpha_2,\frac{1}{14}\alpha_1+\frac{5}{7}\alpha_2+\alpha_3$。

***9. 在 $\mathbf{R}^2$ 中指定一个内积为** $(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=} x_1y_1 + 2x_2y_2$**，其中** $\alpha = (x_1,x_2)', \beta = (y_1,y_2)'$**，把这个欧几里得空间记作** V。**找出** V **到指定标准内积的欧几里得空间** $\mathbf{R}^2$ **的一个同构映射**。

解: 要构造同构映射 $\sigma : V \to \mathbf{R}^2$,需保持线性运算和内积。即 $(\alpha,\beta)_V = (\sigma(\alpha),\sigma(\beta))_{\mathbf{R}^2}$。已知 $(\alpha,\beta)_V = x_1y_1 + 2x_2y_2 = x_1y_1 + (\sqrt{2}x_2)(\sqrt{2}y_2)$。令 $\sigma(\alpha) = (x_1,\sqrt{2}x_2)^T$。则 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))_{\mathbf{R}^2} = x_1y_1 + \sqrt{2}x_2 \cdot \sqrt{2}y_2 = x_1y_1 + 2x_2y_2$。两者相等。且 σ 显然是线性的双射。故 $\sigma : (x_1,x_2)^T \mapsto (x_1,\sqrt{2}x_2)^T$ 即为所求同构映射。

习题 9.2 正交补 · 正交投影

1. 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$ (指定标准内积) 的一个子空间，$U=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$，其中

$$\alpha_1=(1,1,2,1),\quad \alpha_2=(1,0,0,-2).$$

求 $U^{\perp}$ 的维数和正交基。

解: 根据正交补的定义，$\gamma\in U^{\perp}$ 当且仅当 γ 与 U 中的所有向量正交。即 $(\gamma,\alpha_1)=0$ 且 $(\gamma,\alpha_2)=0$。设 $\gamma=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则得到齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1 \quad -2x_4=0 \end{cases}$$

方程组的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&0&0&-2\end{pmatrix}$。秩 $R(A)=2$，故基础解系含 $4-2=2$ 个向量。即 $\dim U^{\perp}=2$。求解方程组: 由第 2 式得 $x_1=2x_4$。代入第 1 式: $2x_4+x_2+2x_3+x_4=0 \implies x_2+2x_3+3x_4=0 \implies x_2=-2x_3-3x_4$。取自由未知量 $x_3=1,x_4=0$，得基础解 $\xi_1=(0,-2,1,0)$。取自由未知量 $x_3=0,x_4=1$，得基础解 $\xi_2=(2,-3,0,1)$。ξ_1,ξ_2 是 $U^{\perp}$ 的一组基。由于题目要求正交基，我们需要对 ξ_1,ξ_2 进行施密特正交化。令 $\beta_1=\xi_1=(0,-2,1,0)$。

$$\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,-3,0,1)-\frac{0+6+0+0}{0+4+1+0}(0,-2,1,0)$$

$$=(2,-3,0,1)-\frac{6}{5}(0,-2,1,0)=(2,-3+\frac{12}{5},-\frac{6}{5},1)=(2,-\frac{3}{5},-\frac{6}{5},1)$$

答: $\dim U^{\perp}=2$。一个正交基为 $\beta_1=(0,-2,1,0),\beta_2=(2,-0.6,-1.2,1)$。

---

2. 设 V 是一个 n 维欧几里得空间，$\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq 0$，求 $\langle\alpha\rangle^{\perp}$ 的维数。

解: 设 $U=\langle\alpha\rangle$。因为 $\alpha\neq 0$，所以 U 是一维子空间，即 $\dim U=1$。根据正交补定理，对于有限维欧几里得空间 V 的子空间 U，有

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

从而 $\dim V=\dim U+\dim U^{\perp}$。所以 $\dim U^{\perp}=\dim V-\dim U=n-1$。

---

3. 设 U 是 n 维欧几里得空间 V 的一个子空间，证明: $(U^{\perp})^{\perp}=U$。

证： 首先证明 $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$。任取 $\alpha \in U$。对于任意 $\beta \in U^{\perp}$，根据正交补定义，有 $(\alpha, \beta) = 0$。这意味着 α 与 $U^{\perp}$ 中所有向量正交。故 $\alpha \in (U^{\perp})^{\perp}$。所以 $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$。其次，考虑维数：

$$\dim U^{\perp} = n - \dim U$$

$$\dim (U^{\perp})^{\perp} = n - \dim U^{\perp} = n - (n - \dim U) = \dim U$$

因为 U 是 $(U^{\perp})^{\perp}$ 的子空间，且两者维数相等，所以 $U = (U^{\perp})^{\perp}$。

---

4. 证明：欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ (指定标准内积) 的任一子空间 U 是一个齐次线性方程组的解空间。

证： 设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间。考虑 U 的正交补 $U^{\perp}$。取 $U^{\perp}$ 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$，其中 $m = \dim U^{\perp}$。令矩阵 $A = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)^T$（即以这些基向量为行向量）。考察齐次线性方程组 $AX = 0$，即

$$\begin{cases} (\eta_1, X) = 0 \\ \vdots \\ (\eta_m, X) = 0 \end{cases}$$

该方程组的解空间 $W = \{X \in \mathbf{R}^n \mid X \perp \eta_i, \forall i\} = \{X \in \mathbf{R}^n \mid X \perp U^{\perp}\}$. 即 $W = (U^{\perp})^{\perp}$。由第 3 题结论知 $(U^{\perp})^{\perp} = U$。所以 U 正是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间。

---

5. 设 U 是 n 维欧几里得空间 V 的一个子空间，在 U 中取一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$，则 α 在 U 上的正交投影 α_1 为

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha, \eta_i) \eta_i.$$

证： 设 $\alpha_1 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha, \eta_i) \eta_i$。显然 $\alpha_1 \in U$。令 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$。要证明 α_1 是正交投影，只需证明 $\alpha_2 \perp U$，即 α_2 与 U 的基向量 η_j 正交 $(j = 1, \ldots, m)$。

$$(\alpha_2, \eta_j) = (\alpha - \alpha_1, \eta_j) = (\alpha, \eta_j) - (\alpha_1, \eta_j)$$

计算 (α_1, η_j)：

$$(\alpha_1, \eta_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} (\alpha, \eta_i) \eta_i, \eta_j \right) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha, \eta_i)(\eta_i, \eta_j)$$

因为 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 是标准正交基，所以 $(\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij}$。故求和式中只有 $i = j$ 项非零：

$$(\alpha_1, \eta_j) = (\alpha, \eta_j) \cdot 1 = (\alpha, \eta_j)$$

代回原式：

$$(\alpha_2, \eta_j) = (\alpha, \eta_j) - (\alpha, \eta_j) = 0$$

所以 $\alpha_2 \perp U$。根据正交投影的定义及唯一性，α_1 即为 α 在 U 上的正交投影。

---

6. 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^3$ (指定标准内积) 中，设 $U = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$，其中 $\gamma_1 = (1,2,1), \gamma_2 = (1,0,-2)$. 求 $\alpha = (1,-3,0)$ 在 U 上的正交投影 α_1.

解： 先求 U 的一个标准正交基。$\eta_1' = \gamma_1 = (1,2,1)$。$\eta_2' = \gamma_2 - \frac{(\gamma_2,\eta_1')}{(\eta_1',\eta_1')}\eta_1' = (1,0,-2) - \frac{1+0-2}{1+4+1}(1,2,1) = (1,0,-2) - \frac{-1}{6}(1,2,1) = (1,0,-2) + (1/6, 1/3, 1/6) = (7/6, 1/3, -11/6)$。为计算方便，取正交基 $\beta_1 = (1,2,1), \beta_2 = (7,2,-11)$。单位化：$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$。$|\beta_2|^2 = 49+4+121 = 174$。$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{174}}(7,2,-11)$。利用第 5 题公式计算投影 α_1：

$$\alpha_1 = (\alpha, \eta_1)\eta_1 + (\alpha, \eta_2)\eta_2 = \frac{(\alpha, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1 + \frac{(\alpha, \beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2$$

计算内积：$(\alpha, \beta_1) = 1(1) + (-3)(2) + 0(1) = 1 - 6 = -5$。$|\beta_1|^2 = 6$。$(\alpha, \beta_2) = 1(7) + (-3)(2) + 0(-11) = 7 - 6 = 1$。$|\beta_2|^2 = 174 = 29 \times 6$。

$$\alpha_1 = -\frac{5}{6}(1,2,1) + \frac{1}{174}(7,2,-11)$$

$$\alpha_1 = \left(-\frac{23}{29}, -\frac{48}{29}, -\frac{26}{29}\right)$$

***7. 设 U 是欧几里得空间 V 的一个子空间，则 V 在 U 上的正交投影 P 具有下述性质：**

$$(P\alpha, \beta) = (\alpha, P\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

证： 对于任意 $\alpha \in V$，其在 U 上的正交投影为 $P\alpha = \alpha_1$，且 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，其中 $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U^\perp$。同理，对于 $\beta \in V$，设 $\beta = \beta_1 + \beta_2$，其中 $\beta_1 = P\beta \in U, \beta_2 \in U^\perp$。考察左边：

$$(P\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_1, \beta_2)$$

因为 $\alpha_1 \in U, \beta_2 \in U^\perp$，所以 $(\alpha_1, \beta_2) = 0$。故 $(P\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1)$。考察右边：

$$(\alpha, P\beta) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_1)$$

因为 $\alpha_2 \in U^\perp, \beta_1 \in U$，所以 $(\alpha_2, \beta_1) = 0$。故 $(\alpha, P\beta) = (\alpha_1, \beta_1)$。综上，$(P\alpha, \beta) = (\alpha, P\beta)$。这说明正交投影变换 P 是一个**对称变换**。

习题 9.3 正交变换

1. 设 V 是实内积空间，证明：V 上的正交变换 $\mathcal{A}$ 如果有特征值，则它的特征值必为 1 或 -1。

证： 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，$\xi \neq 0$ 是对应的特征向量，即 $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$。由于 $\mathcal{A}$ 是正交变换，正交变换保持向量的内积（长度）不变。故 $(\mathcal{A}\xi, \mathcal{A}\xi) = (\xi, \xi)$。另一方面，利用特征值的性质：$(\mathcal{A}\xi, \mathcal{A}\xi) = (\lambda\xi, \lambda\xi) = \lambda^2(\xi, \xi)$。因此

$$\lambda^2(\xi, \xi) = (\xi, \xi)$$

因为 $\xi \neq 0$，所以 $(\xi, \xi) > 0$。从而 $\lambda^2 = 1$，即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$。

---

2. 设 V 是 n 维欧几里得空间，η 是 V 中一个单位向量，设 $\mathcal{P}$ 是 V 在 $\langle\eta\rangle$ 上的正交投影。令 $\mathcal{A} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$，则 $\mathcal{A}$ 称为关于超平面 $\langle\eta\rangle^\perp$ 的镜面反射。证明：镜面反射是正交变换，并且是第二类的。

证：(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是正交变换： 根据习题 9.2 第 5 题的结论，$\mathcal{P}\alpha = (\alpha, \eta)\eta$。所以 $\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta$。我们需要证明 $(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$。

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) &= (\alpha - 2(\alpha, \eta)\eta, \beta - 2(\beta, \eta)\eta) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\beta, \eta)(\alpha, \eta) - 2(\alpha, \eta)(\eta, \beta) + 4(\alpha, \eta)(\beta, \eta)(\eta, \eta)\end{aligned}$$

由于 η 是单位向量，即 $(\eta, \eta) = 1$。且内积具有对称性 $(\eta, \beta) = (\beta, \eta)$。上式变为：

$$(\alpha, \beta) - 2(\alpha, \eta)(\beta, \eta) - 2(\alpha, \eta)(\beta, \eta) + 4(\alpha, \eta)(\beta, \eta) \cdot 1 = (\alpha, \beta)$$

即 $\mathcal{A}$ 保持内积不变。再证 $\mathcal{A}$ 是满射：任取 $\gamma \in V$，令 $\alpha = \mathcal{A}\gamma = \gamma - 2(\gamma, \eta)\eta$（注意 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$）。验证 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\gamma) = (\mathcal{I} - 2\mathcal{P})^2\gamma = (\mathcal{I} - 4\mathcal{P} + 4\mathcal{P}^2)\gamma$。由于 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$（投影的幂等性），故 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I} - 4\mathcal{P} + 4\mathcal{P} = \mathcal{I}$。所以 $\mathcal{A}\alpha = \gamma$，即 $\mathcal{A}$ 是满射。综上，$\mathcal{A}$ 是正交变换。

(2) 证明 $\mathcal{A}$ 是第二类的（即行列式为 -1）： 取 $\langle\eta\rangle^\perp$ 的一组基 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$。则 $\eta, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基。因为 $\eta \in \langle\eta\rangle$，所以 $\mathcal{P}\eta = \eta$，从而 $\mathcal{A}\eta = \eta - 2\eta = -\eta$。因为 $\alpha_i \in \langle\eta\rangle^\perp$ $(i = 2, \ldots, n)$，所以 $\mathcal{P}\alpha_i = 0$，从而 $\mathcal{A}\alpha_i = \alpha_i - 0 = \alpha_i$。$\mathcal{A}$ 在基 $\eta, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为：

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

该矩阵的行列式 $|M|=-1$。所以 $\mathcal{A}$ 是第二类正交变换。

***3. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一正交变换，并且 1 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，$\mathcal{A}$ 的属于 1 的特征子空间 V_1 的维数是 $n-1$。证明：$\mathcal{A}$ 是镜面反射。**

证： 设 V_1 为属于特征值 1 的特征子空间，$\dim V_1=n-1$。在 V_1 中取一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$。考虑 V_1 的正交补 $V_1^\perp$。因为 $V=V_1\oplus V_1^\perp$，所以 $\dim V_1^\perp=1$。设 $V_1^\perp=\langle\eta\rangle$，其中 η 为单位向量。则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\eta$ 构成 V 的一组标准正交基。对于 $\alpha_i\in V_1$，有 $\mathcal{A}\alpha_i=\alpha_i$。由于 $\mathcal{A}$ 是正交变换，保持正交性：对任意 i，有 $(\mathcal{A}\eta,\mathcal{A}\alpha_i)=(\eta,\alpha_i)=0$。即 $(\mathcal{A}\eta,\alpha_i)=0$。这说明 $\mathcal{A}\eta$ 与所有的 α_i 都正交，即 $\mathcal{A}\eta\perp V_1$。所以 $\mathcal{A}\eta\in V_1^\perp=\langle\eta\rangle$。即 $\mathcal{A}\eta=k\eta$。又因为 $\mathcal{A}$ 保持长度不变，即 $|\mathcal{A}\eta|=|\eta|=1$，所以 $|k|=1$，即 $k=1$ 或 $k=-1$。若 $k=1$，则 $\mathcal{A}\eta=\eta$，这意味着 $\eta\in V_1$，这与 $V_1\cap V_1^\perp=\{0\}$ 矛盾（因为 $\eta\neq 0$）。所以必须有 $k=-1$，即 $\mathcal{A}\eta=-\eta$。现在考察镜面反射 $\mathcal{B}=\mathcal{I}-2\mathcal{P}$（关于 $\langle\eta\rangle^\perp=V_1$ 的反射）。$\mathcal{B}\alpha_i=\alpha_i$（因为 $\alpha_i\perp\eta\implies\mathcal{P}\alpha_i=0$）。$\mathcal{B}\eta=\eta-2\mathcal{P}\eta=\eta-2\eta=-\eta$。可见线性变换 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\eta$ 上的作用完全相同。故 $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{I}-2\mathcal{P}$，即 $\mathcal{A}$ 是镜面反射。

---

4. 证明：实内积空间 V 到自身的满射 $\mathcal{A}$ 是正交变换当且仅当 $\mathcal{A}$ 是保持向量长度不变的线性变换。

证：必要性： 若 $\mathcal{A}$ 是正交变换，定义即要求保持内积不变，自然保持长度不变（长度由内积定义 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$）。

充分性： 设 $\mathcal{A}$ 是保持长度不变的线性变换。即 $|\mathcal{A}\alpha|=|\alpha|$ 对任意 $\alpha\in V$ 成立。我们要证明它保持内积不变，即 $(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$。利用极化恒等式：

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(|\alpha+\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2)$$

计算变换后的内积：

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)&=\frac{1}{2}(|\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta|^2-|\mathcal{A}\alpha|^2-|\mathcal{A}\beta|^2)\\&=\frac{1}{2}(|\mathcal{A}(\alpha+\beta)|^2-|\mathcal{A}\alpha|^2-|\mathcal{A}\beta|^2)\quad(\text{线性性})\\&=\frac{1}{2}(|\alpha+\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2)\quad(\text{保长性})\\&=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}$ 保持内积不变，是正交变换。

***5. 实内积空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果满足 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$, $\forall\alpha,\beta\in V$，则称 $\mathcal{A}$ 是对称变换。证明：n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是对称变换当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵是对称矩阵。**

证：设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一组标准正交基。设 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $A=(a_{ij})$。根据线性变换矩阵的定义，$\mathcal{A}\eta_j=\sum_{k=1}^n a_{kj}\eta_k$。利用标准正交基下的内积计算公式：

$$a_{ij}=(\mathcal{A}\eta_j,\eta_i)$$

必要性：若 $\mathcal{A}$ 是对称变换。$a_{ij}=(\mathcal{A}\eta_j,\eta_i)=(\eta_j,\mathcal{A}\eta_i)=(\mathcal{A}\eta_i,\eta_j)=a_{ji}$。(利用了实内积的对称性 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$)。即 $A^T=A$，矩阵是对称矩阵。

充分性：若矩阵 A 是对称矩阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$。对任意 $\alpha,\beta\in V$，设它们在基下的坐标分别为 $X=(x_1,\ldots,x_n)^T,Y=(y_1,\ldots,y_n)^T$。则 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(AX)^TY=X^TA^TY$。$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=X^T(AY)=X^TAY$。因为 A 是对称矩阵，$A^T=A$，所以 $X^TA^TY=X^TAY$。即 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$。故 $\mathcal{A}$ 是对称变换。

习题 9.4 酉空间

1. 在酉空间 $\mathbf{C}^3$ (指定标准内积) 中，设

$$\alpha = (1, -1, 1), \quad \beta = (1, 0, \mathrm{i}),$$

求 $|\alpha|, |\beta|, \alpha$ **与** β **的夹角** $\langle \alpha, \beta \rangle$。

解： 在酉空间中，标准内积定义为 $(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$。根据教材定义，夹角计算公式为 $\cos\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha||\beta|}$。

1. 计算向量的长度（范数）：

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$|\beta| = \sqrt{(\beta, \beta)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i})} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

2. 计算内积及其模： 首先计算内积（注意 β 的分量取共轭）：

$$(\alpha, \beta) = 1 \cdot \bar{1} + (-1) \cdot \bar{0} + 1 \cdot \bar{\mathrm{i}} = 1 + 0 + (-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}$$

计算内积的模：

$$|(\alpha, \beta)| = |1 - \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

3. 计算夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$： 代入教材中的定义公式：

$$\cos\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{|(\alpha, \beta)|}{|\alpha||\beta|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

由于 $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \frac{\pi}{2}$，故：

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

---

2. 在酉空间 $\mathbf{C}^2$ (指定标准内积) 中，设

$$\alpha_1 = (1, -1), \quad \alpha_2 = (1, i),$$

求与 α_1, α_2 **等价的一个标准正交基** η_1, η_2。

解： 施密特正交化。令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1)$。$|\beta_1|^2 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$。$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$。

令 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。内积 $(\alpha_2,\beta_1) = 1\cdot 1 + i\cdot(-1) = 1-i$ （若内积定义为 $x\bar{y}$）。或者 $(\alpha_2,\beta_1) = 1\cdot 1 + i\cdot(-1) = 1-i$（此处 -1 是实数，共轭也是 -1）。$\beta_2 = (1,i) - \frac{1-i}{2}(1,-1) = (1,i) - (\frac{1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}) = (1-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}, i-\frac{-1}{2}-\frac{i}{2}) = (\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2})$。计算 $|\beta_2|^2 = |\frac{1+i}{2}|^2 + |\frac{1+i}{2}|^2 = 2\cdot\frac{1^2+1^2}{4} = 2\cdot\frac{2}{4} = 1$。所以 $|\beta_2| = 1$。$\eta_2 = \beta_2 = (\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2})$。

---

3. 在酉空间 $\mathbf{C}^3$ (指定标准内积) 中，设

$$\alpha_1 = (1,-1,1), \quad \alpha_2 = (1,0,i),$$

求与 α_1,α_2 等价的一个正交向量组 β_1,β_2。

解： 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1,-1,1)$。$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$。$(\alpha_2,\beta_1) = 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + i\cdot 1 = 1+i$, $(\beta_1,\beta_1) = 1+1+1 = 3$。

$$\beta_2 = (1,0,i) - \frac{1+i}{3}(1,-1,1) = (1-\frac{1+i}{3}, 0+\frac{1+i}{3}, i-\frac{1+i}{3})$$
$$= (\frac{2-i}{3}, \frac{1+i}{3}, \frac{-1+2i}{3})$$

---

4. 写出 1 级酉矩阵的形式。

解： 设 1 级矩阵 $A = (a)$。A 是酉矩阵 $\iff AA^H = I \iff a\bar{a} = 1 \iff |a|^2 = 1$。即 a 是模长为 1 的复数。形式为 $(e^{i\theta})$，其中 $\theta \in \mathbf{R}$。

---

5. 证明：酉矩阵的行列式的模为 1。

证： 设 A 为酉矩阵，则 $AA^H = I$ （$A^H = \bar{A}'$）。两边取行列式：$|AA^H| = |I| = 1$。$|A|\cdot|A^H| = 1$。又 $|A^H| = |\bar{A}'| = \overline{|A|}$。所以 $|A|\cdot\overline{|A|} = 1$。即 $||A||^2 = 1 \implies ||A|| = 1$。

---

6. 证明：酉变换的特征值的模为 1。

证： 设 $\mathcal{A}$ 是酉变换，λ 是其特征值，$\xi \neq 0$ 是对应的特征向量。则 $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$。酉变换保持内积不变（从而保持长度不变），故 $(\mathcal{A}\xi,\mathcal{A}\xi) = (\xi,\xi)$。另一方面，$(\mathcal{A}\xi,\mathcal{A}\xi) = (\lambda\xi,\lambda\xi) = \lambda\bar{\lambda}(\xi,\xi) = |\lambda|^2(\xi,\xi)$。因为 $\xi \neq 0$，所以 $(\xi,\xi) > 0$。于是 $|\lambda|^2 = 1 \implies |\lambda| = 1$。

---

7. n 级复矩阵 A 如果满足 $A^*=A$（即 $\bar{A}'=A$），则称 A 是埃尔米特 (Hermite) 矩阵 (或者自伴矩阵)，写出 2 级 Hermite 矩阵的形式。

解： 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。$A^*=\bar{A}'=\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$。$A=A^* \implies \begin{cases} a=\bar{a} \\ b=\bar{c} \\ c=\bar{b} \\ d=\bar{d} \end{cases}$ 。$a=\bar{a}$ 意味着 a 是实数。同理 d 是实数。$b=\bar{c}$ 意味着 b 与 c 互为共轭复数。形式为：

$$\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$$

其中 $a,b,c,d \in \mathbf{R}$。

***8. 酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果满足 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$, $\forall \alpha,\beta\in V$，则称 $\mathcal{A}$ 是埃尔米特 (Hermite) 变换 (或者自伴变换)。证明：n 维酉空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是 Hermite 变换当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是 Hermite 矩阵。**

证： 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个标准正交基。设 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $A=(a_{ij})$。则 $a_{ij}=(\mathcal{A}\eta_j,\eta_i)$。

必要性： 若 $\mathcal{A}$ 是 Hermite 变换。$a_{ij}=(\mathcal{A}\eta_j,\eta_i)=(\eta_j,\mathcal{A}\eta_i)=\overline{(\mathcal{A}\eta_i,\eta_j)}=\overline{a_{ji}}$。即 $A^T=\bar{A}$，或 $A=\bar{A}^T=A^*$。所以 A 是 Hermite 矩阵。

充分性： 若矩阵 A 是 Hermite 矩阵，即 $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$。任取 $\alpha,\beta\in V$，设坐标分别为 X,Y。$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(AX)^T\bar{Y}=X^TA^T\bar{Y}$。$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=X^T(\overline{AY})=X^T\bar{A}\bar{Y}$。因为 A 是 Hermite 矩阵，$A^T=\bar{A}$。所以 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$。$\mathcal{A}$ 是 Hermite 变换。

***9. 证明：酉空间 V 上的 Hermite 变换 $\mathcal{A}$ 的特征值一定是实数。**

证： 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值，$\xi\neq 0$ 是对应的特征向量。则 $\mathcal{A}\xi=\lambda\xi$。考虑 $(\mathcal{A}\xi,\xi)$：一方面，$(\mathcal{A}\xi,\xi)=(\lambda\xi,\xi)=\lambda(\xi,\xi)$。另一方面，利用 Hermite 变换性质 $(\mathcal{A}\xi,\xi)=(\xi,\mathcal{A}\xi)$。$(\xi,\mathcal{A}\xi)=(\xi,\lambda\xi)=\bar{\lambda}(\xi,\xi)$。所以 $\lambda(\xi,\xi)=\bar{\lambda}(\xi,\xi)$。因为 $\xi\neq 0$，$(\xi,\xi)>0$，所以 $\lambda=\bar{\lambda}$。即 λ 是实数。

习题 9.5 双线性函数

1. 在 K^4 中，设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)',\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$，令

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4,$$

(1) 证明 f 是 K^4 上的一个双线性函数；(2) 求 f 在标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵；(3) 说明 f 是非退化的；(4) 说明 f 是对称的；(5) 求一个向量 $\alpha\neq 0$，使得 $f(\alpha,\alpha)=0$。

解： (1) 设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta\in K^4,k\in K$。设 $\alpha=(x_i)'$, $\beta=(y_i)'$。对第一个变元：

$$\begin{aligned}f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)&=(x_{11}+x_{21})y_1+(x_{12}+x_{22})y_2+(x_{13}+x_{23})y_3-(x_{14}+x_{24})y_4\\&=(x_{11}y_1+x_{12}y_2+x_{13}y_3-x_{14}y_4)+(x_{21}y_1+x_{22}y_2+x_{23}y_3-x_{24}y_4)\\&=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(k\alpha,\beta)&=(kx_1)y_1+(kx_2)y_2+(kx_3)y_3-(kx_4)y_4\\&=k(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4)=kf(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

同理可证对第二个变元也满足线性性质。故 f 是双线性函数。

(2) 标准基向量 ε_i 的第 i 个分量为 1，其余为 0。度量矩阵 $A=(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$。$a_{11}=1\cdot1+0+0-0=1$; $a_{22}=1$; $a_{33}=1$; $a_{44}=0+0+0-1\cdot1=-1$; 当 $i\neq j$ 时，ε_i 和 ε_j 的非零分量位置不同，乘积项均为 0，故 $a_{ij}=0$。所以度量矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$$

(3) 矩阵 A 的行列式 $|A|=1\times1\times1\times(-1)=-1\neq0$。因为度量矩阵是非奇异的、满秩的，所以双线性函数 f 是非退化的。

(4) 因为度量矩阵 A 是对称矩阵（$A^T=A$），所以 f 是对称双线性函数。$f(\beta,\alpha)=y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3-y_4x_4=f(\alpha,\beta)$。

(5) 要使 $f(\alpha,\alpha)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$。我们可以取 $x_1=0,x_2=0,x_3=1,x_4=1$。此时 $\alpha=(0,0,1,1)'\neq0$，且 $f(\alpha,\alpha)=0+0+1^2-1^2=0$。。

---

2. 设 f 是数域 K 上线性空间 V 上的一个双线性函数，证明：f 是斜对称的当且仅当 $\forall\alpha\in V$，有 $f(\alpha,\alpha)=0$。（假设数域 K 的特征不为 2）

证：

必要性 (⇒)： 设 f 是斜对称的，即对任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$。取 $\beta=\alpha$，则有 $f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)$。移项得 $2f(\alpha,\alpha)=0$。因为数域 K 的特征不为 2（即 $1+1\neq 0$），所以 $f(\alpha,\alpha)=0$。

充分性 (⇐)： 设对任意 $\gamma\in V$，都有 $f(\gamma,\gamma)=0$。对于任意 $\alpha,\beta\in V$，取 $\gamma=\alpha+\beta$。则由双线性性质展开：

$$f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)$$

根据假设，等式左边为 0，右边的 $f(\alpha,\alpha)$ 和 $f(\beta,\beta)$ 也为 0。所以：

$$0=0+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+0$$

即 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$。故 f 是斜对称的。

---

3. 证明：如果 f 是实数域 R 上 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数，则 V 中存在一个基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使得 f 在此基下的表达式为

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r,$$

其中 $0\leq p\leq r\leq n$，$(x_1,\cdots,x_n)'$ 和 $(y_1,\cdots,y_n)'$ 分别为 α,β 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的坐标。

证： f 是实数域上的对称双线性函数，对应于一个实二次型 $q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$。对于实对称矩阵（或实二次型），根据惯性定理，一定存在一个非退化线性替换（即存在一组基），将其化为规范形。具体步骤如下：1. 由于 f 是对称的，存在 V 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，使得 f 在该基下的度量矩阵 A 为对角矩阵。即：

$$f(\alpha,\beta)=d_1u_1v_1+d_2u_2v_2+\cdots+d_nu_nv_n$$

其中 u_i,v_i 是坐标。2. 重新排列基向量，使得前 p 个 $d_i>0$，接下来的 $r-p$ 个 $d_i<0$，最后的 $n-r$ 个 $d_i=0$。其中 r 为 f 的秩。3. 作基变换（单位化）：令

$$\eta_i=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\xi_i, & 1\leq i\leq p\\ \frac{1}{\sqrt{-d_i}}\xi_i, & p+1\leq i\leq r\\ \xi_i, & r+1\leq i\leq n\end{cases}$$

在新的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下，度量矩阵变为对角阵，且对角元分别为 $1,\cdots,1$ (p 个), $-1,\cdots,-1$ ($r-p$ 个), $0,\cdots,0$。因此，设 α 和 β 在新基下的坐标分别为 x 和 y，则双线性函数的

表达式为：

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{p}1\cdot x_iy_i+\sum_{j=p+1}^{r}(-1)\cdot x_jy_j+\sum_{k=r+1}^{n}0\cdot x_ky_k$$

即

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r$$

得证。