《简明线性代数》习题参考答案

作者：txbb

第一章　线性方程组

习题 1.1　解线性方程组的算法

1. 解下列线性方程组：

(1)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

解：写出方程组的增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -9 \\ -1 & 4 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+5\times②} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{pmatrix}$$

进行回代求解：

1. 由 ③ 行得：$-23x_3 = -23 \implies x_3 = 1$。
2. 代入 ② 行：$x_2 - 3 \times 1 = -4 \implies x_2 = -4 + 3 \implies x_2 = -1$。
3. 代入 ① 行：$x_1 - 3 \times (-1) - 2 \times 1 = 3 \implies x_1 + 3 - 2 = 3 \implies x_1 = 2$。

故方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+5x_3=7 \\ 3x_1+7x_2+x_3=-8 \\ -x_1-4x_2+x_3=10 \end{cases}$$

解：写出增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-3\times①,\quad ④+①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-2\times②,\quad ④-②]{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

对最后两行化简：③ $\div(-7)$ 得 $x_3=3$；④ $\div 2$ 亦得 $x_3=3$。方程组相容。

进行回代求解：

1. 已知 $x_3=3$。
2. 代入 ② 行：$x_2-3=-5 \implies x_2=-2$。
3. 代入 ① 行：$x_1+3\times(-2)+2\times 3=1 \implies x_1-6+6=1 \implies x_1=1$。

故方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3-x_4=6 \\ 3x_1-8x_2+x_3+5x_4=0 \\ -2x_1+x_2-4x_3+x_4=-12 \\ -x_1+4x_2-x_3-3x_4=2 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+2\times①,\quad ④+①]{②-3\times①} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-②]{③+5\times②} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & -90 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[④\div(-2)]{③\div 3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2\times④} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{④+5\times③} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -33 \end{pmatrix}$$

进行回代求解：

1. 由 ④ 行：$11x_4 = -33 \implies x_4 = -3$。
2. 代入 ③ 行：$-x_3 + 1 \times (-3) = -4 \implies -x_3 = -1 \implies x_3 = 1$。
3. 代入 ② 行：$x_2 + 7 \times 1 + 8 \times (-3) = -18 \implies x_2 + 7 - 24 = -18 \implies x_2 = -1$。
4. 代入 ① 行：$x_1 - 3 \times (-1) - 2 \times 1 - (-3) = 6 \implies x_1 + 3 - 2 + 3 = 6 \implies x_1 = 2$。

故方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+3\times①,\quad ④-①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+2\times②,\quad ④+②]{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -18 & -20 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

进行回代求解：

1. 由 ③ 行得：$13x_3 = 13 \implies x_3 = 1$。
2. 代入 ② 行：$x_2 - 18 \times 1 = -20 \implies x_2 = -2$。
3. 代入 ① 行：$x_1 + 3 \times (-2) - 7 \times 1 = -8 \implies x_1 - 6 - 7 = -8 \implies x_1 = 5$。

故方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换。为计算方便，观察到 ② 与 ③ 的系数较简单，可先做差消元。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

为了避免分数，利用 ② 和 ③ 消元：$3\times③-5\times②$；利用 ② 和 ④ 消元：$3\times④+7\times②$。

$$\xrightarrow[3\times④+7\times②]{3\times③-5\times②}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15\\ 0 & 0 & 11 & -10 & 66\\ 0 & 0 & -19 & 38 & -114\end{pmatrix}$$

化简第四行：$-19x_3+38x_4=-114 \implies -x_3+2x_4=-6$。化简第三行：$11x_3-10x_4=66$。
联立后两行求解：由 ④′ 得 $x_3=2x_4+6$，代入 ③′：

$$11(2x_4+6)-10x_4=66 \implies 22x_4+66-10x_4=66 \implies 12x_4=0 \implies x_4=0$$

进而得 $x_3=6$。

回代求解：

1. 代入 ② 行：$3x_2-4(6)+5(0)=-15 \implies 3x_2=9 \implies x_2=3$。
2. 代入 ① 行：$x_1-2(3)+3(6)-4(0)=4 \implies x_1-6+18=4 \implies x_1=-8$。

故方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=-8\\ x_2=3\\ x_3=6\\ x_4=0\end{cases}$$

---

2. 投资问题

题目简述： 总投资 1 万元给 A_1,A_2,A_3 三个企业，利润率分别为 $12\%,15\%,22\%$，目标总利润 2000 元。设投入给 A_1,A_2,A_3 的资金分别为 x_1,x_2,x_3 元。根据题意，建立基础方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10000 \quad (\text{总本金})\\ 0.12x_1+0.15x_2+0.22x_3=2000 \quad (\text{总利润})\end{cases} \tag{1}$$

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍，应当分别投资多少？

解： 增加条件 $x_2=2x_1$。代入方程组 (1)：

$$\begin{cases}x_1+(2x_1)+x_3=10000\\ 12x_1+15(2x_1)+22x_3=200000 \quad (\text{等式两边同乘 }100)\end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 10000 \implies x_3 = 10000 - 3x_1 \\ 42x_1 + 22x_3 = 200000 \end{cases}$$

将 x_3 代入第二式：

$$42x_1 + 22(10000 - 3x_1) = 200000 \implies 42x_1 + 220000 - 66x_1 = 200000$$

$$-24x_1 = -20000 \implies x_1 = \frac{20000}{24} = \frac{2500}{3} \approx 833.33$$

计算 x_2, x_3：$x_2 = 2x_1 = \frac{5000}{3} \approx 1666.67$。$x_3 = 10000 - 3(\frac{2500}{3}) = 7500$。

答： 应分别投资 A_1 约 833.33 元，A_2 约 1666.67 元，A_3 7500 元。

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和？

解： 假设可以，则增加条件 $x_3 = x_1 + x_2$。代入总本金方程：

$$(x_1 + x_2) + x_3 = 10000 \implies x_3 + x_3 = 10000 \implies x_3 = 5000$$

同时 $x_1 + x_2 = 5000$。将 $x_3 = 5000$ 代入总利润方程：

$$0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22(5000) = 2000$$

$$0.12x_1 + 0.15x_2 + 1100 = 2000 \implies 12x_1 + 15x_2 = 90000$$

联立关于 x_1, x_2 的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5000 \implies x_2 = 5000 - x_1 \\ 12x_1 + 15x_2 = 90000 \end{cases}$$

代入求解：

$$12x_1 + 15(5000 - x_1) = 90000 \implies 12x_1 + 75000 - 15x_1 = 90000$$

$$-3x_1 = 15000 \implies x_1 = -5000$$

投资金额不能为负数，故假设不成立。

答： 不可以。

---

3. 解下列线性方程组：

(1)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换。

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

为计算方便，交换第一行与第三行 ① $\leftrightarrow$ ③，使首项系数变为 -1：

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

消去第一列的元素：

$$\xrightarrow[③+2\times①]{②-3\times①} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

消去第二列的元素：

$$\xrightarrow{③+②} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

最后一行对应方程 $0 = 13$，矛盾。**故方程组 (1) 无解**。

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵（仅常数项与 (1) 不同）：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

同样进行行变换 ① $\leftrightarrow$ ③：

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

消去第一列元素（② $-3\times$ ①，③ $+2\times$ ①）：

$$\xrightarrow[③+2①]{②-3①}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3 & 1 & 11\\ 0 & 7 & -7 & -7 & -28\\ 0 & -7 & 7 & 7 & 28\end{pmatrix}$$

消去第二列元素（③ $+$ ②）：

$$\xrightarrow{③+②}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3 & 1 & 11\\ 0 & 7 & -7 & -7 & -28\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

最后一行恒成立，方程组有无穷多解。由第二行化简（两边除以 7）：

$$x_2 - x_3 - x_4 = -4 \implies x_2 = x_3 + x_4 - 4$$

将 x_2 代入第一行：

$$-x_1 - 2(x_3 + x_4 - 4) + 3x_3 + x_4 = 11$$

$$-x_1 - 2x_3 - 2x_4 + 8 + 3x_3 + x_4 = 11$$

$$-x_1 + x_3 - x_4 = 3 \implies x_1 = x_3 - x_4 - 3$$

故方程组 (2) 有无穷多个解，一般解是：

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3, \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4, \end{cases} \qquad \text{其中} x_3, x_4 \text{ 是自由未知量.}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 12x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = -1 \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ -1 & 12 & 7 & -5 \\ 1 & 16 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

利用第一行消元：

$$\xrightarrow[④-①]{②-2\times①,\quad ③+①}\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 21 & 15 & -5\end{pmatrix}$$

利用第二行消元：

$$\xrightarrow[④-3\times②]{③-②}\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

第四行对应方程 $0=-2$，矛盾。**故方程组 (3) 无解**。

(4)

$$\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=4\\ 2x_1-3x_2+x_3=7\\ -x_1+12x_2+7x_3=-5\\ x_1+16x_2+13x_3=1\end{cases}$$

解：写出增广矩阵（仅第四行常数项为 1）：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 1 & 7\\ -1 & 12 & 7 & -5\\ 1 & 16 & 13 & 1\end{pmatrix}$$

第一步消元同上：

$$\xrightarrow[④-①]{②-2\times①,\quad ③+①}\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 21 & 15 & -3\end{pmatrix}\quad (注：④常数项为1-4=-3)$$

第二步消元（$③-②$，$④-3\times②$）：

$$\xrightarrow[④-3\times②]{③-②}\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组相容，有无穷多解。由第二行得：

$$7x_2+5x_3=-1\implies x_2=-\frac{5}{7}x_3-\frac{1}{7}$$

代入第一行：

$$x_1 - 5\left(-\frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}\right) - 2x_3 = 4$$

$$x_1 + \frac{25}{7}x_3 + \frac{5}{7} - \frac{14}{7}x_3 = 4$$

$$x_1 + \frac{11}{7}x_3 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7} \implies x_1 = -\frac{11}{7}x_3 + \frac{23}{7}$$

故方程组 (4) 有无穷多个解，一般解是：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 + \frac{23}{7}, \\ x_2 = -\frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}, \end{cases} \qquad \text{其中} x_3 \text{ 是自由未知量.}$$

习题 1.2 线性方程组的解的情况及其判别准则

1. a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解。

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵并进行初等行变换：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-②} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

方程组有解的条件是最后一行常数项为 0，即 $a+1=0 \implies a=-1$。当 $a=-1$ 时，最后一行全为 0。选取 x_3 为自由未知量，进行回代：由第二行 $7x_2+x_3=2$ 得：

$$7x_2 = -x_3 + 2 \implies x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}$$

代入第一行 $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1$：

$$x_1 - 4\left(-\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}\right) + 2x_3 = -1$$

$$x_1 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{8}{7} + \frac{14}{7}x_3 = -1$$

$$x_1 + \frac{18}{7}x_3 = -1 + \frac{8}{7} = \frac{1}{7} \implies x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7}$$

原线性方程组有解当且仅当 $a=-1$。此时它的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{18}{7}x_3 + \dfrac{1}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{2}{7}, \end{cases} \qquad \text{其中}x_3\ \text{是自由未知量.}$$

---

2. a 为何值时，下述线性方程组有唯一解？a 为何值时，此方程组无解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

解： 增广矩阵变换如下：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&2&-a&9\\2&-1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[③-2\times①]{②-①}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-a-1&6\\0&-3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+3\times②}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-a-1&6\\0&0&1+3(-a-1)&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&-a-1&6\\0&0&-3a-2&18\end{pmatrix}$$

若 $-3a-2\neq 0$，即 $a\neq -2/3$ 时，系数矩阵满秩，有唯一解。若 $-3a-2=0$，即 $a=-2/3$ 时，最后一行变为 $(0,0,0,18)$，矛盾，无解。

原线性方程组有唯一解当且仅当 $\boldsymbol{a\neq -\frac{2}{3}}$；

原线性方程组无解当且仅当 $\boldsymbol{a=-\frac{2}{3}}$。

---

3. (1) 下述线性方程组有无解？有多少个解？

$$\begin{cases}x+y=1\\x-3y=-1\\10x-4y=3\end{cases}$$

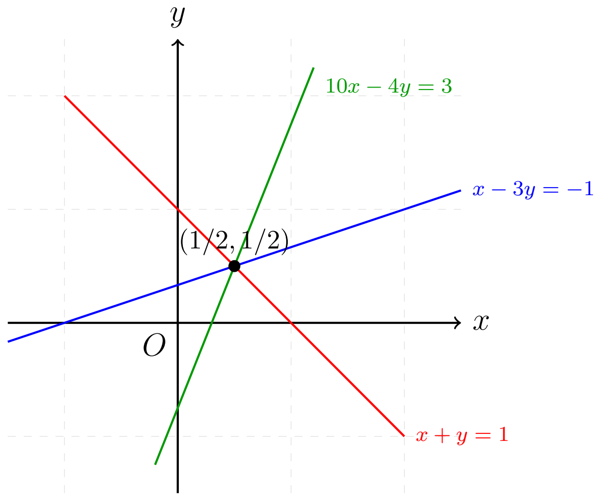
解： 联立前两个方程：$(x+y)-(x-3y)=1-(-1)\implies 4y=2\implies y=1/2$。代入得 $x=1/2$。检验第三个方程：$10(1/2)-4(1/2)=5-2=3$，成立。

原线性方程组有唯一解： $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

(2) 改变第 (1) 小题中方程组的一个方程的某一个系数，使得新的方程组没有解。

解： 只要使第三条直线不过点 $(1/2,1/2)$ 即可。把第 3 个方程改成 $\boldsymbol{x-4y=3}$。代入交点 $(1/2,1/2)$：左边 $=1/2-4(1/2)=0.5-2=-1.5\neq 3$。矛盾。

(3) 在平面直角坐标系 Oxy 里，画出第 (1) 小题中各个方程表示的图形。



---

4. a **为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解。**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7 \\ x_1+\quad+3x_3-x_4=8 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=2a \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①,④-3①,⑤-2①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14 \end{pmatrix}$$

为了检查相容性，观察 ③ 与 ② 的关系，以及 ⑤ 与 ④ 的关系。

$$\xrightarrow[⑤-④]{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2a+24 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{pmatrix}$$

由 ④ 得 $-x_4=10 \implies x_4=-10$。代入 ③ 检查相容性：$-2(-10)=2a+24 \implies 20=2a+24 \implies 2a=-4 \implies a=-2$。同时检查 ⑤：$2a+4=0 \implies 2a=-4 \implies a=-2$。两处条件一致。**故当 $a=-2$ 时，方程组有解。**

此时求解：已知 $x_4=-10$。由 ② 行：$-x_2+2x_3-2(-10)=15 \implies -x_2+2x_3=-5 \implies x_2=2x_3+5$。由 ① 行：$x_1+(2x_3+5)+x_3+(-10)=-7 \implies x_1+3x_3-5=-7 \implies x_1=-3x_3-2$。

原线性方程组有解当且仅当 $a=-2$。此时，它的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-3x_3-2, \\ x_2=2x_3+5, \\ x_4=-10, \end{cases} \quad \text{其中} x_3 \text{ 是自由未知量.}$$

---

5. 当 c 与 d 取什么值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$$

解： 写出增广矩阵，并进行初等行变换：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[④-5①]{②-3①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & d-5 \end{pmatrix}$$

观察第 2、3、4 行：③+② $\implies 0=3+(c-3) \implies c=0$。④−② $\implies 0=(d-5)-(c-3)$。代入 $c=0$ 得：$d-5-(-3)=0 \implies d-2=0 \implies d=2$。**故当 $c=0$ 且 $d=2$ 时，方程组有解。**

此时，有效方程为前三行（其中第 2 行与第 3 行互为相反数，实质只剩第 1、3 行有效）：由 ③ 得：$x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5$。代入 ①：

$$x_1+(3-2x_3-2x_4-6x_5)+x_3+x_4+x_5=1$$

$$x_1+3-x_3-x_4-5x_5=1 \implies x_1=x_3+x_4+5x_5-2$$

原线性方程组有解当且仅当 $c=0$ 且 $d=2$。此时，它的一般解为

$$\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-2, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3, \end{cases} \quad \text{其中} x_3, x_4, x_5 \text{ 是自由未知量.}$$

---

6. 是否存在 2 次多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 其图像经过下述 4 个点： $P(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2)$ **？**

解： 若存在这样的多项式，则 a, b, c 应满足以下方程组：

1. 过 $N(0,2) \implies a(0)^2 + b(0) + c = 2 \implies c = 2$。
2. 过 $P(1,2) \implies a + b + c = 2$。
3. 过 $Q(-1,3) \implies a - b + c = 3$。
4. 过 $M(-4,5) \implies 16a - 4b + c = 5$。

将 $c = 2$ 代入 (2) 和 (3)：

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \implies 2a = 1 \implies a = 0.5, \quad b = -0.5$$

此时多项式应为 $f(x) = 0.5x^2 - 0.5x + 2$。检验点 $M(-4,5)$ 是否在图像上：

$$f(-4) = 0.5(-4)^2 - 0.5(-4) + 2 = 0.5(16) + 2 + 2 = 8 + 4 = 12$$

而 $12 \neq 5$，出现矛盾。不存在满足要求的 2 次多项式。

---

7. 下列齐次线性方程组有无非零解？若有非零解，求出它的一般解。

(1)

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 写出系数矩阵并化简。为方便计算，先将 ③ 换到第一行并取反。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[①\times(-1)]{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-3①,④-4①]{②-2①}\begin{pmatrix}1 & -7 & 4 & -3\\ 0 & 17 & -13 & 7\\ 0 & 16 & -11 & 7\\ 0 & 43 & -23 & 21\end{pmatrix}\xrightarrow[③-②]{观察}\begin{pmatrix}1 & -7 & 4 & -3\\ 0 & 17 & -13 & 7\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 43 & -23 & 21\end{pmatrix}$$

利用 ③ $(x_2 = 2x_3)$ 进一步化简：② $: 17(2x_3) - 13x_3 + 7x_4 = 0 \implies 34x_3 - 13x_3 + 7x_4 = 0 \implies 21x_3 + 7x_4 = 0 \implies 3x_3 = -x_4$。即 $x_3 = -\frac{1}{3}x_4$。从而 $x_2 = 2x_3 = -\frac{2}{3}x_4$。代入 ①：$x_1 - 7(-\frac{2}{3}x_4) + 4(-\frac{1}{3}x_4) - 3x_4 = 0$。$x_1 + \frac{14}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{9}{3}x_4 = 0 \implies x_1 + \frac{1}{3}x_4 = 0 \implies x_1 = -\frac{1}{3}x_4$。

验证第四个方程：$4(-1/3)+15(-2/3)-7(-1/3)+9 = (-4-30+7+27)/3 = 0/3 = 0$。成立。方程组有非零解。

有非零解。它的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}x_4, \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_4, \\ x_3 = -\dfrac{1}{3}x_4, \end{cases} \quad \textbf{其中}\boldsymbol{x_4}\ \textbf{是自由未知量.}$$

(2)

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解：未知数个数 $(4) >$ 方程个数 (3)，必然有非零解。系数矩阵变换如下：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-5①]{②+3①} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 13 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

为避免分数，对 ②,③ 进行交叉消元：$4 \times$ ③ $+ 13 \times$ ②。

$$\xrightarrow{4③+13②} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4(-6)+13(5) & 4(-8)+13(5) \end{pmatrix}$$

计算系数：$-24+65=41$；$-32+65=33$。矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 41 & 33 \end{pmatrix}$$

由 ③ 得：$41x_3+33x_4=0 \implies x_3=-\frac{33}{41}x_4$。代入 ②：$-4x_2+5(-\frac{33}{41}x_4)+5x_4=0$ $-4x_2-\frac{165}{41}x_4+\frac{205}{41}x_4=0$ $-4x_2+\frac{40}{41}x_4=0 \implies 4x_2=\frac{40}{41}x_4 \implies x_2=\frac{10}{41}x_4$。代入 ①：$x_1-3(\frac{10}{41}x_4)+2(-\frac{33}{41}x_4)+x_4=0$ $x_1-\frac{30}{41}x_4-\frac{66}{41}x_4+\frac{41}{41}x_4=0$ $x_1-\frac{55}{41}x_4=0 \implies x_1=\frac{55}{41}x_4$。

有非零解，它的一般解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{55}{41}x_4, \\ x_2=\dfrac{10}{41}x_4, \\ x_3=-\dfrac{33}{41}x_4, \end{cases} \qquad \textbf{其中}\boldsymbol{x_4}\ \textbf{是自由未知量.}$$

习题 1.3　数域

1. 令 $\mathbb{Q}(\mathrm{i}) = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$，证明 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 是一个数域。

解： 根据数域的定义，需要验证 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 包含 0 和 1，且对加、减、乘、除（除数不为 0）四种运算封闭。

1. **包含 0 和 1：** 显然 $0 = 0 + 0\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$，$1 = 1 + 0\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$（因为 $0, 1 \in \mathbb{Q}$）。
2. **封闭性验证：** 设任意两个数 $\alpha = a + b\mathrm{i}, \beta = c + d\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$。

- **加法与减法：**
$$\alpha \pm \beta = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i}$$
由于有理数域 $\mathbb{Q}$ 对加减封闭，故 $a \pm c \in \mathbb{Q}, b \pm d \in \mathbb{Q}$，所以 $\alpha \pm \beta \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$。
- **乘法：**
$$\alpha\beta = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$
同理，由 $\mathbb{Q}$ 的封闭性知实部和虚部均为有理数，故 $\alpha\beta \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$。
- **除法：** 若 $\beta \neq 0$（即 c, d 不全为 0），则
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$
因为 $c, d \in \mathbb{Q}$ 且不全为 0，故 $c^2 + d^2$ 是非零有理数。分子分母均为有理数运算，故结果的实部和虚部均属于 $\mathbb{Q}$。所以 $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$。

结论： $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ **对于加、减、乘、除 4 种运算封闭，且包含 0 和 1，从而** $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ **是一个数域**。

---

2. 最大的数域是哪一个？(即，哪一个数域包含了所有的数域？)

解： 通常我们讨论的数域都是复数域的子域。**最大的数域是复数域** $\mathbb{C}$。