

《简明线性代数》习题参考答案

作者: txb

第八章 线性映射

习题 8.1 线性映射及其运算

1. 判断下面所定义的 K^3 上的变换，哪些是线性变换？

$$(1) \ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3^2 \end{bmatrix};$$

$$(2) \ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

解: (1) 不是线性变换。因为变换中第三个分量出现了 x_3^2 , 不满足线性性质。

(2) 是线性变换。设 $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T \in K^3, k \in K$ 。变换后的每个分量都是 x_1, x_2, x_3 的一次齐次式，显然满足加法和数乘的封闭性。即 $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$ 且 $A(kX) = kA(X)$ 。

2. 判断下面所定义的 $M_n(K)$ 上的变换，哪些是线性变换？

(1) 设 $A \in M_n(K)$, 令 $A(X) = XA, \forall X \in M_n(K)$;

(2) 设 $B, C \in M_n(K)$, 令 $A(X) = BXC, \forall X \in M_n(K)$.

解: (1) 是线性变换。对于任意 $X, Y \in M_n(K)$ 和 $k \in K$: $A(X + Y) = (X + Y)A = XA + YA = A(X) + A(Y)$; $A(kX) = (kX)A = k(XA) = kA(X)$ 。

(2) 是线性变换。对于任意 $X, Y \in M_n(K)$ 和 $k \in K$: $A(X + Y) = B(X + Y)C = BXC + BYC = A(X) + A(Y)$; $A(kX) = B(kX)C = k(BXC) = kA(X)$ 。

*3. 判断下面定义的 $K[x]$ 上的变换是不是线性变换？给定 $a \in K$,

$$Af(x) = f(x+a), \quad \forall f(x) \in K[x].$$

解：是线性变换。对于任意 $f(x), g(x) \in K[x]$ 和 $k \in K$: $A(f(x)+g(x)) = (f+g)(x+a) = f(x+a)+g(x+a) = Af(x)+Ag(x)$; $A(kf(x)) = (kf)(x+a) = k \cdot f(x+a) = kAf(x)$ 。故 A 是线性变换。

4. 设 \mathbf{R}^+ 是习题 7.1 第 1 题 (2) 小题的实线性空间（加法定义为乘积，数乘定义为幂），判别 \mathbf{R}^+ 到 \mathbf{R} 的下述映射是不是线性映射？设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，令

$$\log_a : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \log_a x.$$

解：是线性映射。设 $x, y \in \mathbf{R}^+$ (原空间的“向量”), $k \in \mathbf{R}$ (标量)。回顾 \mathbf{R}^+ 上的运算: 向量加法为 $x \oplus y = xy$, 数乘为 $k \odot x = x^k$ 。 \mathbf{R} 上的运算为通常的加法和乘法。(1) 保持加法: $\log_a(x \oplus y) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ 。成立。(2) 保持数乘: $\log_a(k \odot x) = \log_a(x^k) = k \log_a x$ 。成立。故 \log_a 是线性映射。

*5. 在 $K[x]$ 中, 令 $Af(x) = xf(x), \forall f(x) \in K[x]$ 。(1) 证明 A 是 $K[x]$ 上的一个线性变换; (2) 用 D 表示求导数, 证明: $DA - AD = I$ 。

证: (1) 对于任意 $f, g \in K[x], k \in K$: $A(f+g) = x(f(x)+g(x)) = xf(x)+xg(x) = Af+Ag$; $A(kf) = x(kf(x)) = k(xf(x)) = kAf$ 。故 A 是线性变换。

(2) 对任意 $f(x) \in K[x]$, 验证 $(DA - AD)f(x)$: $DAf(x) = D(Af(x)) = D(xf(x)) = (x)'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。 $ADf(x) = A(Df(x)) = A(f'(x)) = xf'(x)$ 。所以, $(DA - AD)f(x) = (f(x) + xf'(x)) - xf'(x) = f(x) = If(x)$ 。即 $DA - AD = I$ 。

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基, A 是 V 上的一个线性变换, 证明: A 可逆当且仅当 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$ 是 V 的一个基。

证: 必要性 (\Rightarrow): 若 A 可逆, 则 A 是 V 到自身的同构映射。根据同构映射将基映射为基的性质, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是基, 则其象 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 也是 V 的一个基。

充分性 (\Leftarrow): 若 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 是 V 的一个基。

1. 证明 A 是满射：因为 $A\alpha_i$ 生成整个空间 V ，对任意 $\beta \in V$ ， β 可由 $A\alpha_i$ 线性表示，即 $\beta = \sum k_i A\alpha_i = A(\sum k_i \alpha_i)$ ，故 A 是满射。

2. 证明 A 是单射：设 $A(\xi) = 0$ 。设 $\xi = \sum x_i \alpha_i$ ，则 $A(\xi) = \sum x_i A\alpha_i = 0$ 。由于 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 线性无关，故系数 x_i 全为 0，即 $\xi = 0$ 。故 $\text{Ker}A = \{0\}$ 。综上，线性变换 A 既单又满，故 A 可逆。

7. 设 A 是线性空间 V 上的一个线性变换，证明：如果 $A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0 (m > 0)$ ，则 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

证：设有线性组合使得

$$k_0\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \dots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0 \quad (*)$$

在 (*) 式两边用变换 A^{m-1} 作用：

$$A^{m-1}(k_0\alpha + k_1A\alpha + \dots) = k_0A^{m-1}\alpha + k_1A^m\alpha + \dots = 0$$

已知 $A^m\alpha = 0$ ，故后续项 $A^{m+1}\alpha$ 等均为 0。上式化为 $k_0A^{m-1}\alpha = 0$ 。因为已知 $A^{m-1}\alpha \neq 0$ ，所以必须有 $k_0 = 0$ 。

现在 (*) 式变为 $k_1A\alpha + \dots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$ 。两边用 A^{m-2} 作用，同理可得 $k_1A^{m-1}\alpha = 0$ ，从而 $k_1 = 0$ 。以此类推，可依次证得 $k_0 = k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$ 。故向量组线性无关。

8. 设 V 是数域 K 上的线性空间，并且 $V = U \oplus W$ 。对于 $\alpha \in V, \alpha$ 可唯一表示成 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in U, \alpha_2 \in W$ 。令 $P_U(\alpha) = \alpha_1, P_W(\alpha) = \alpha_2$ 。

(1) 证明 P_U, P_W 都是 V 上的一个线性变换；

证：设 $\alpha, \beta \in V, k \in K$ 。设 $\alpha = u_1 + w_1, \beta = u_2 + w_2$ ，其中 $u_i \in U, w_i \in W$ 。则 $\alpha + \beta = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$ 。由直和分解的唯一性： $P_U(\alpha + \beta) = u_1 + u_2 = P_U(\alpha) + P_U(\beta)$ 。同理 $k\alpha = ku_1 + kw_1, P_U(k\alpha) = ku_1 = kP_U(\alpha)$ 。故 P_U 是线性变换。同理可证 P_W 是线性变换。

(2) 证明： $P_U(\delta) = \begin{cases} \delta, & \delta \in U \\ 0, & \delta \in W \end{cases}$ ；

证：若 $\delta \in U$ ，则其分解为 $\delta = \delta + 0$ ($\delta \in U, 0 \in W$)。故 $P_U(\delta) = \delta$ 。若 $\delta \in W$ ，则其分解为 $\delta = 0 + \delta$ ($0 \in U, \delta \in W$)。故 $P_U(\delta) = 0$ 。

(3) 证明: $P_U^2 = P_U$, $P_U + P_W = I$, $P_U P_W = 0$ 。

证: 对于任意 $\alpha \in V$, 设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ($\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in W$)。1. $P_U^2(\alpha) = P_U(P_U(\alpha)) = P_U(\alpha_1)$ 。因为 $\alpha_1 \in U$, 由 (2) 知 $P_U(\alpha_1) = \alpha_1$ 。所以 $P_U^2(\alpha) = \alpha_1 = P_U(\alpha)$, 即 $P_U^2 = P_U$ 。

2. $(P_U + P_W)(\alpha) = P_U(\alpha) + P_W(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = I(\alpha)$ 。所以 $P_U + P_W = I$ 。

3. $(P_U P_W)(\alpha) = P_U(P_W(\alpha)) = P_U(\alpha_2)$ 。因为 $\alpha_2 \in W$, 由 (2) 知 $P_U(\alpha_2) = 0$ 。所以 $P_U P_W = 0$ 。

习题 8.2 线性映射的矩阵表示

1. 设 A 是 K^3 上的一个线性变换:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix},$$

求 A 在标准基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵。

解: 标准基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 。计算 $A\varepsilon_i$:

$$A\varepsilon_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2(0) \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3$$

$$A\varepsilon_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2(1) \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\varepsilon_1 - 1\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3$$

$$A\varepsilon_3 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2(0) \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 - 1\varepsilon_3$$

将像向量按列排成矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 在 R^R 中, 由下述两个函数

$$f_1 = e^{ax} \cos bx, \quad f_2 = e^{ax} \sin bx$$

生成的 2 维子空间记作 V , 说明求导数 D 是 V 上的一个线性变换, 并且求 D 在 V 的一个基 f_1, f_2 下的矩阵。

解: (1) 证明是线性变换: 对于任意 $f \in V$, 设 $f = k_1 f_1 + k_2 f_2$ 。 $D(f) = k_1 D(f_1) + k_2 D(f_2)$ 。计算导数: $D(f_1) = D(e^{ax} \cos bx) = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx = af_1 - bf_2$ 。 $D(f_2) = D(e^{ax} \sin bx) = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = bf_1 + af_2$ 。可见 $D(f_1), D(f_2) \in V$, 故 $D(f) \in V$ 。且求导显然满足线性性质。

(2) 求矩阵: 由上述计算得: $D(f_1) = af_1 - bf_2$, $D(f_2) = bf_1 + af_2$ 故在基 f_1, f_2 下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

3. A 是 $M_2(K)$ 上的一个线性变换:

$$A(X) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X, \quad \forall X \in M_2(K),$$

求 A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

解: 设 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。 $A(E_{11}) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22}$ 。
 $A(E_{12}) = P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22}$ 。
 $A(E_{21}) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22}$ 。
 $A(E_{22}) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22}$ 。将系数按列排列:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

4. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, 设有 V 上的线性变换 A 与 V 中的向量 α , 使得 $A^{n-1}\alpha \neq 0$ 且 $A^n\alpha = 0$ 。证明: V 中存在一个基, 使得 A 在这个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

证: 根据习题 8.1 第 7 题结论, 若 $A^{n-1}\alpha \neq 0$ 且 $A^n\alpha = 0$, 则向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关。因为 V 是 n 维空间, 这 n 个线性无关的向量构成 V 的一个基。为了得到题目形式的矩阵(上对角线为 1), 我们要适当地排列基向量的顺序。取基 $\varepsilon_1 = A^{n-1}\alpha, \varepsilon_2 =$

$A^{n-2}\alpha, \dots, \varepsilon_{n-1} = A\alpha, \varepsilon_n = \alpha$ 。验证变换作用: $A(\varepsilon_1) = A(A^{n-1}\alpha) = A^n\alpha = 0$ 。 $A(\varepsilon_2) = A(A^{n-2}\alpha) = A^{n-1}\alpha = \varepsilon_1$ 。 $A(\varepsilon_3) = A(A^{n-3}\alpha) = A^{n-2}\alpha = \varepsilon_2$ 。 \vdots $A(\varepsilon_n) = A(\alpha) = \varepsilon_{n-1}$ 。即: $A\varepsilon_1 = 0$ $A\varepsilon_2 = 1\varepsilon_1$ $A\varepsilon_3 = 1\varepsilon_2 \dots$ $A\varepsilon_n = 1\varepsilon_{n-1}$ 写出矩阵表示 (第 j 列是 $A\varepsilon_j$ 的坐标): 第 1 列为全 0。第 2 列第 1 个元素为 1 其余为 0。第 3 列第 2 个元素为 1 其余为 0……所得矩阵正是题目所求形式。

*5. 设 A 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换。证明: 在 $K[x]$ 中存在一个次数不超过 n^2 的非零多项式 $f(x)$, 使得 $f(A) = 0$ 。

证: 考虑线性空间 $\text{Hom}(V, V)$ (即 V 上所有线性变换组成的集合, 也同构于 $M_n(K)$)。已知 $\dim \text{Hom}(V, V) = n^2$ 。考虑 $\text{Hom}(V, V)$ 中的 $n^2 + 1$ 个向量:

$$I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$$

因为向量个数 $n^2 + 1$ 大于空间维数 n^2 , 所以这组向量必然线性相关。即存在不全为 0 的系数 $k_0, k_1, \dots, k_{n^2} \in K$, 使得

$$k_0 I + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_{n^2} A^{n^2} = 0$$

令 $f(x) = k_0 + k_1 x + \dots + k_{n^2} x^{n^2}$ 。显然 $f(x)$ 是非零多项式 (因为系数不全为 0), 且次数不超过 n^2 , 且满足 $f(A) = 0$ 。

6. 设 V 是数域 K 上 n 维线性空间, K 可看成是自身的线性空间, V 到 K 的线性映射称为 V 上的线性函数。把 $\text{Hom}(V, K)$ 记成 V^* , 称 V^* 是 V 的对偶空间。证明: $V^* \cong V$ 。

证: 根据线性映射空间维数公式: $\dim V^* = \dim \text{Hom}(V, K) = (\dim V)(\dim K) = n \times 1 = n$ 。又知 $\dim V = n$ 。因为 V^* 和 V 都是数域 K 上的有限维线性空间, 且维数相等, 所以它们同构, 即 $V^* \cong V$ 。

7. 设 A 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, A 在 V 的一个基下的矩阵是 A 。证明: A 是幂等变换当且仅当 A 是幂等矩阵。

证: 线性变换 A 是幂等变换定义为 $A^2 = A$ 。设 A 在基下的矩阵为 A 。根据线性变换运算与矩阵运算的对应关系 (同构保持乘法): A 对应矩阵 A , 则 A^2 对应矩阵 A^2 。因此, $A^2 = A \iff A^2 = A$ 。即 A 是幂等变换当且仅当它的矩阵 A 是幂等矩阵。

8. 已知 K^3 上线性变换 A 在标准基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

设 $\eta_1 = (2, 3, 1)^T, \eta_2 = (3, 4, 1)^T, \eta_3 = (1, 2, 2)^T$, 求 A 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵 B 。

解：按照提示步骤进行计算：

第一步：求过渡矩阵 S 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵 S 由新基向量作为列向量组成：

$$S = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

第二步：求逆矩阵 S^{-1} 对矩阵 S 进行求逆运算（利用初等行变换 $(S|I) \rightarrow (I|S^{-1})$ 或伴随矩阵法）：经计算可得：

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第三步：利用相似变换公式 $B = S^{-1}AS$ 求矩阵 B 首先计算 AS ：

$$AS = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - 33 + 5 & 45 - 44 + 5 & 15 - 22 + 10 \\ 40 - 45 + 8 & 60 - 60 + 8 & 20 - 30 + 16 \\ 16 - 21 + 6 & 24 - 28 + 6 & 8 - 14 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

然后计算 $S^{-1}(AS)$ ：

$$B = S^{-1}(AS) = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. 设 V 是数域 K 上 3 维线性空间， V 上的一个线性变换 A 在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 A ，求 A 的全部特征值和特征向量。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

解：第一步：求特征值

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

通过行列式变换计算可得：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 10$ 。

第二步：求特征向量

1. 对于 $\lambda_1 = 1$: 解齐次线性方程组 $(I - A)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应方程为 $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, 即 $x_1 = -2x_2 + 2x_3$ 。取自由未知量 x_2, x_3 分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$, 得基础解系:

$$\eta_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (2, 0, 1)^T$$

还原为 V 中的向量:

$$\xi_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \xi_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$$

故属于特征值 1 的全部特征向量为:

$$\{k_1(-2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(2\alpha_1 + \alpha_3) \mid k_1, k_2 \in K, \text{ 且 } k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

2. 对于 $\lambda_2 = 10$: 解齐次线性方程组 $(10I - A)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \dots \xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

实际上解得 $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : -2$ 。基础解系为 $\eta_3 = (1, 2, -2)^T$ 。还原为 V 中的向量: $\xi_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ 。故属于特征值 10 的全部特征向量为:

$$\{k(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

解：第一步：求特征值

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ (二重)。

第二步：求特征向量

1. 对于 $\lambda_1 = 1$: 解方程组 $(I - A)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\eta_1 = (-2, 0, 1)^T$ 。还原为向量： $\xi_1 = -2\alpha_1 + \alpha_3$ 。故属于特征值 1 的全部特征向量为：

$$\{k(-2\alpha_1 + \alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

2. 对于 $\lambda_2 = 3$: 解方程组 $(3I - A)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 20 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即 $x_1 - 0.5x_3 = 0$, $x_2 + 0.5x_3 = 0$ 。令 $x_3 = 2$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ 。基础解系 $\eta_2 = (1, -1, 2)^T$ 。还原为向量： $\xi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$ 。故属于特征值 3 的全部特征向量为：

$$\{k(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \mid k \in K, k \neq 0\}$$

10. 第 9 题中的线性变换 A 是否可对角化？如果 A 可对角化，求 A 的标准形。

解：(1) 对于矩阵(1)，特征值1的代数重数为2，几何重数(线性无关特征向量个数)也为2。特征值10的代数重数1，几何重数1。几何重数之和 $2+1=3=\dim V$ ，故可对角化。标准形(对角矩阵)为 $J = \text{diag}(1, 1, 10)$ 。

(2) 对于矩阵(2)，特征值3的代数重数为2，但只求得1个线性无关特征向量(几何重数为1)。几何重数之和 $1+1=2<3$ ，故不可对角化。

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是数域 K 上4维线性空间 V 的一个基， V 上的线性变换 A 在这个基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的全部特征值与特征向量；(2) 求 V 的一个基，使得 A 在这个基下的矩阵为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。

解：

(1) 求特征值与特征向量

第一步：求特征值

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开(或观察矩阵结构，对角线元素即特征值，除第三行第一列外为上三角/对角阵)：

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1) \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

故 A 的全部特征值为： $\lambda_1 = 1$ (二重)， $\lambda_2 = 0$ (二重)。

第二步：求特征向量

1. 对于 $\lambda = 1$ ：解齐次线性方程组 $(I - A)X = 0$ ：

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{整理}} \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \end{cases}$$

x_4 为自由变量。取基础解系为：

$$\eta_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

将坐标还原为 V 中的向量：

$$\xi_1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$$

$$\xi_2 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 = \alpha_4$$

故属于特征值 1 的全部特征向量为：

$$\{k_1(\alpha_1 + \alpha_3) + k_2\alpha_4 \mid k_1, k_2 \in K, \text{ 且 } k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

2. 对于 $\lambda = 0$: 解齐次线性方程组 $(0I - A)X = 0 \Rightarrow AX = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应方程为 $x_1 = 0, x_4 = 0$ 。 x_2, x_3 为自由变量。取基础解系为：

$$\eta_3 = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_4 = (0, 0, 1, 0)^T$$

将坐标还原为 V 中的向量：

$$\xi_3 = \alpha_2, \quad \xi_4 = \alpha_3$$

故属于特征值 0 的全部特征向量为：

$$\{l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3 \mid l_1, l_2 \in K, \text{ 且 } l_1, l_2 \text{ 不全为 } 0\}$$

(2) 对角化

由于几何重数之和 $2 + 2 = 4 = n$, 故 A 可对角化。取 A 的 4 个线性无关的特征向量作为 V 的一组新基:

$$\alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

A 在这组基下的矩阵为对角矩阵:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*12. 设 V 是数域 K 上任意一个线性空间, A 是 V 上的一个线性变换。证明: A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证: 设 λ_1, λ_2 是不同特征值, ξ_1, ξ_2 是对应的特征向量。假设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ 。两边用变换 A 作用: $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_2\xi_2 = 0$ 。又原式乘以 λ_1 得: $k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_1\xi_2 = 0$ 。两式相减: $k_2(\lambda_2 - \lambda_1)\xi_2 = 0$ 。因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 且 $\xi_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$ 。代回得 $k_1\xi_1 = 0 \implies k_1 = 0$ 。故线性无关。(对于多个特征值的情况, 可用数学归纳法推广证明)。

习题 8.3 约当 (Jordan) 标准形

1. 求下列复数域上矩阵的约当标准形:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

解: 首先求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda + 7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$$

特征值为 $\lambda_1 = 1$ (单重), $\lambda_2 = 0$ (二重)。

1. 对于 $\lambda_1 = 1$, 对应一个 1 阶约当块 $J_1(1) = [1]$ 。2. 对于 $\lambda_2 = 0$, 考察矩阵 $0I - A = -A$ 的秩:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩 $r(A) = 2$ 。特征值 0 的几何重数 $m = n - r(A) = 3 - 2 = 1$ 。因为几何重数为 1, 说明只有一个属于 0 的约当块, 由于代数重数为 2, 故该块为 2 阶约当块 $J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

解: 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$$

特征值为 $\lambda_1 = 3$ (单重), $\lambda_2 = -1$ (二重)。

1. 对于 $\lambda_1 = 3$, 对应 $J_1(3) = [3]$ 。2. 对于 $\lambda_2 = -1$, 考察矩阵 $(-1)I - A$ 的秩:

$$-I - A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \implies \text{秩} = 2$$

特征值 -1 的几何重数 $m = 3 - 2 = 1$ 。故只有一个约当块, 阶数为 2, 即 $J_2(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解: 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 4) + 4] = (\lambda - 2)(\lambda - 2)^2 = (\lambda - 2)^3$$

特征值为 $\lambda = 2$ (三重)。

考察矩阵 $2I - A$ 的秩:

$$2I - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然第 2、3 行都是第 1 行的倍数, 故秩 $r = 1$ 。几何重数 $m = 3 - 1 = 2$ 。这意味着有两个约当块。由于代数重数为 3, 约当块的阶数之和为 3, 故只能是一个 1 阶块和一个 2 阶块。即 $J_1(2) = [2]$ 和 $J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{注: 题目图中题号标为 (3), 此处按顺序记为 (4)})$$

解: 求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3$$

特征值为 $\lambda = 1$ (三重)。

考察矩阵 $I - A$ 的秩:

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩 $r = 2$ 。几何重数 $m = 3 - 2 = 1$ 。只有一个约当块, 阶数为 3。即 $J_3(1)$ 。

综上, 约当标准形为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 证明: n 级复矩阵 A 的迹等于 A 的 n 个特征值的和。

证: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。在复数域上, 任何方阵 A 都相似于其约当标准形 J 。即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = J$$

其中 J 是上三角矩阵, 且其主对角线上的元素恰好是 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (包括重数)。

根据矩阵迹的性质: 1. 相似矩阵的迹相等, 即 $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(J)$ 。2. 矩阵的迹等于主对角线元素之和。

因此:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(J) = \sum_{i=1}^n J_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

即矩阵 A 的迹等于其特征值之和。