

《概率统计讲义》习题参考答案

作者: txbb

第四章 随机向量

习题十一 随机向量的（联合）分布与边缘分布

1. 离散型随机向量 (X, Y) 有如下的概率分布:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5	6
0	0.202	0.174	0.113	0.062	0.049	0.023	0.004
1	0	0.099	0.064	0.040	0.031	0.020	0.006
2	0	0	0.031	0.025	0.018	0.013	0.008
3	0	0	0	0.001	0.002	0.004	0.011

求边缘分布。又: 随机变量 X, Y 是否独立?

解: (1) 计算 X 的边缘分布 $P\{X = i\}$ (行和):

- $P\{X = 0\} = 0.202 + 0.174 + 0.113 + 0.062 + 0.049 + 0.023 + 0.004 = 0.627$
- $P\{X = 1\} = 0 + 0.099 + 0.064 + 0.040 + 0.031 + 0.020 + 0.006 = 0.260$
- $P\{X = 2\} = 0 + 0 + 0.031 + 0.025 + 0.018 + 0.013 + 0.008 = 0.095$
- $P\{X = 3\} = 0 + 0 + 0 + 0.001 + 0.002 + 0.004 + 0.011 = 0.018$

(2) 计算 Y 的边缘分布 $P\{Y = j\}$ (列和):

- $P\{Y = 0\} = 0.202$
- $P\{Y = 1\} = 0.174 + 0.099 = 0.273$
- $P\{Y = 2\} = 0.113 + 0.064 + 0.031 = 0.208$

- $P\{Y = 3\} = 0.062 + 0.040 + 0.025 + 0.001 = 0.128$
- $P\{Y = 4\} = 0.049 + 0.031 + 0.018 + 0.002 = 0.100$
- $P\{Y = 5\} = 0.023 + 0.020 + 0.013 + 0.004 = 0.060$
- $P\{Y = 6\} = 0.004 + 0.006 + 0.008 + 0.011 = 0.029$

(3) 独立性判断：取 $X = 0, Y = 0$ ，由表得 $P\{X = 0, Y = 0\} = 0.202$ 。由计算得 $P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = 0.627 \times 0.202 \approx 0.1267 \neq 0.202$ 。由于联合分布不等于边缘分布之积，故 X, Y 不独立。

2. 随机向量 (X, Y) 在矩形区域 $D = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ 上服从均匀分布，求联合密度与边缘密度。又问随机变量 X, Y 是否独立？

解：矩形区域 D 的面积为 $S = (b - a)(d - c)$ 。根据均匀分布定义，联合密度函数为：

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b - a)(d - c)}, & a < x < b, c < y < d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算 X 的边缘密度：当 $a < x < b$ 时：

$$p_X(x) = \int_c^d \frac{1}{(b - a)(d - c)} dy = \frac{1}{(b - a)(d - c)} [y]_c^d = \frac{1}{b - a}$$

$$\text{即 } p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

计算 Y 的边缘密度：当 $c < y < d$ 时：

$$p_Y(y) = \int_a^b \frac{1}{(b - a)(d - c)} dx = \frac{1}{(b - a)(d - c)} [x]_a^b = \frac{1}{d - c}$$

$$\text{即 } p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d - c}, & c < y < d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

独立性判断：显然对于任意 (x, y) ，均有 $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ ，故 X, Y 相互独立。

3. 随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $p(x, y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 < R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq R^2 \end{cases}$ 求: (1) 系数 c ; (2) 随机向量落在圆 $x^2 + y^2 \leq r^2 (r < R)$ 内的概率。

解: (1) 利用全概率积分性质 $\iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1$ 。引入极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 其雅可比行列式为 ρ :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R c(R - \rho) \rho d\rho = 1$$

$$2\pi c \left[\frac{1}{2} R \rho^2 - \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^R = 2\pi c \left(\frac{1}{2} R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = 2\pi c \cdot \frac{R^3}{6} = \frac{\pi c R^3}{3} = 1$$

解得: $c = \frac{3}{\pi R^3}$ 。

(2) 计算 $P\{X^2 + Y^2 \leq r^2\}$:

$$P = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} p(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{3}{\pi R^3} (R - \rho) \rho d\rho$$

$$P = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi R^3} \left[\frac{1}{2} R \rho^2 - \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^r = \frac{6}{R^3} \left(\frac{1}{2} R r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{3r^2}{R^2} - \frac{2r^3}{R^3} = \frac{3r^2}{R^2} \left(1 - \frac{2r}{3R} \right)$$

4. 设 (X, Y) 的联合密度是 $p(x, y) = \frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)}$ 。求: (1) 系数 c ; (2) (X, Y) 落在以 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 为顶点的正方形内的概率; (3) 问 X, Y 是否独立?

解: (1) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = 1$ 由于 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} = \pi$, 故 $c \cdot \pi \cdot \pi = 1 \implies c = \frac{1}{\pi^2}$ 。

(2) 正方形区域为 $0 < x < 1, 0 < y < 1$:

$$P = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\pi^2} [\arctan x]_0^1 \cdot [\arctan y]_0^1 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$$

(3) 显然联合密度可写为 $p(x, y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, 满足独立性定义, 故 X, Y 相互独立。

5. 设 (X, Y) 的联合密度是 $p(x, y) = \begin{cases} A \sin(x+y), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求: (1) 系数 A ; (2) 边缘密度。

解: (1) $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} A \sin(x+y) dy = A \int_0^{\pi/2} [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} dx = A \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = 1$ $A[-\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = A(1 - (-1)) = 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$ 。

(2) 当 $0 < x < \pi/2$ 时:

$$p_X(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy = \frac{1}{2} [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$$

即 $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \cos x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。由对称性知, Y 与 X 同分布。

6. 一机器制造直径为 X 的圆轴, 另一机器制造内径为 Y 的轴衬, 设 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 2500 & 0.49 < x < 0.51, 0.51 < y < 0.53 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若轴衬的内径与轴的直径之差大于 0.004 且小于 0.036, 则两者可以相适衬。求一轴与一轴衬相适衬的概率。

解: 由联合密度可知, (X, Y) 在矩形区域 $G = \{(x, y) \mid 0.49 < x < 0.51, 0.51 < y < 0.53\}$ 上服从均匀分布。该区域面积 $S_G = (0.51 - 0.49) \times (0.53 - 0.51) = 0.02 \times 0.02 = 0.0004$ 。适衬的条件为 $0.004 < Y - X < 0.036$ 。设 D 为适衬区域, 我们需要计算 $P((X, Y) \in D)$ 。在区域 G 内, 不满足条件的“不适衬”部分由两个小三角形组成:

1. 满足 $Y - X \leq 0.004$ 的部分 (左下角): 直线 $y = x + 0.004$ 与 G 的交点为 $(0.506, 0.51)$ 和 $(0.51, 0.514)$ 。这是一个直角三角形, 边长为 0.004, 面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 0.004^2 = 0.000008$ 。
2. 满足 $Y - X \geq 0.036$ 的部分 (右上角): 直线 $y = x + 0.036$ 与 G 的交点为 $(0.49, 0.526)$ 和 $(0.494, 0.53)$ 。这同样是一个直角三角形, 面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 0.004^2 = 0.000008$ 。

适衬区域的面积为 $S_D = S_G - (S_1 + S_2) = 0.0004 - 0.000016 = 0.000384$ 。故相适衬的概率为:

$$P = \iint_D p(x, y) dx dy = 2500 \times S_D = 2500 \times 0.000384 = 0.96$$

7. 设 (X, Y) 服从 $D = \left\{ (x, y) : \frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} \leq 1 \right\}$ 上的均匀分布, 求 (X, Y) 的联合密度 $p(x, y)$ 。

解：由于 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布，其联合密度 $p(x, y) = \frac{1}{S_D}$ ，其中 S_D 为区域 D 的面积。进行变量代换，令 $u = x + y, v = x - y$ 。此时方程变为椭圆区域 $D' = \left\{ (u, v) : \frac{u^2}{2a^2} + \frac{v^2}{2b^2} \leq 1 \right\}$ 。椭圆的半轴长分别为 $\sqrt{2}a$ 和 $\sqrt{2}b$ ，故其面积 $S_{D'} = \pi \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}b = 2\pi ab$ 。雅可比行列式为：

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

则 $dudv = |J|dxdy = 2dxdy$ ，即 $dxdy = \frac{1}{2}dudv$ 。区域 D 的面积为：

$$S_D = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D'} dudv = \frac{1}{2} S_{D'} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi ab = \pi ab$$

因此，联合密度函数为：

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi ab} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

8. 对于下列三组参数，写出二维正态随机向量的联合密度与边缘密度。

组别	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	ρ
(1)	3	0	1	1	1/2
(2)	1	1	1/2	1/2	1/2
(3)	1	2	1	1/2	0

解：二维正态分布的联合密度通用公式为：

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

其边缘密度分别为 $p_X(x) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $p_Y(y) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

(1) 代入 $\mu_1 = 3, \mu_2 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \rho = 1/2$ ：

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \exp \left\{ -\frac{2}{3} [(x-3)^2 - (x-3)y + y^2] \right\}$$

边缘密度： $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ ， $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ 。

(2) 代入 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1/2, \sigma_2 = 1/2, \rho = 1/2$ ：此时 $\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{3}/2, \sigma_1\sigma_2 = 1/4$ ，系数为 $\frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}\pi}$ 。

$$p(x, y) = \frac{4}{\sqrt{3}\pi} \exp \left\{ -\frac{8}{3} [(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2] \right\}$$

边缘密度: $p_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(x-1)^2}$, $p_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(y-1)^2}$ 。

(3) 代入 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1/2, \rho = 0$: 因为 $\rho = 0$, 变量独立。

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(x-1)^2 + 4(y-2)^2] \right\}$$

边缘密度: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$, $p_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(y-2)^2}$ 。

习题十二 两个随机变量的函数的分布

1. 设 X, Y 相互独立, 其密度分别为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

求 $X + Y$ 的密度。

解: 设 $Z = X + Y$ 。由卷积公式, Z 的概率密度为 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$ 。由于 $p_X(x)$ 仅在 $[0, 1]$ 上非零, 积分限受限于 $0 \leq x \leq 1$ 。同时 $p_Y(z-x)$ 要求 $z-x > 0$, 即 $x < z$ 。

(1) 当 $z \leq 0$ 时, $p_Z(z) = 0$;

(2) 当 $0 < z < 1$ 时, 积分限为 0 到 z :

$$p_Z(z) = \int_0^z 1 \cdot e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^z e^x dx = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^{-z}$$

(3) 当 $z \geq 1$ 时, 积分限为 0 到 1:

$$p_Z(z) = \int_0^1 1 \cdot e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^1 e^x dx = e^{-z}(e - 1) = (e - 1)e^{-z}$$

综上所述:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ (e - 1)e^{-z}, & z \geq 1 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

2. 设 X, Y 相互独立, 分别服从自由度为 k_1, k_2 的 χ^2 分布。证明 $X + Y$ 也服从 χ^2 分布, 自由度为 $k_1 + k_2$ 。

证: 利用可加性证明。已知 $\chi^2(k)$ 分布本质上是参数为 $(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$ 的 Γ 分布。因为 $X \sim \Gamma(\frac{k_1}{2}, \frac{1}{2})$, $Y \sim \Gamma(\frac{k_2}{2}, \frac{1}{2})$, 且 X, Y 相互独立。根据 Γ 分布的性质 (独立随机变量之和的参数满足 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$), 可知:

$$X + Y \sim \Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

这正好是自由度为 $k_1 + k_2$ 的 χ^2 分布的定义。

3. 设 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且相互独立, 求证: (1) $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$; (2) $\frac{X_1 + X_2}{2} \sim N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}\right)$ 。

证: (1) 独立正态随机变量的和仍服从正态分布。其期望为 $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \mu_1 + \mu_2$ 。其方差为 $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 。故 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 。

(2) 设 $Z = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ 。由正态分布的线性变换性质可知 Z 仍服从正态分布。其期望为 $E(Z) = \frac{1}{2}E(X_1 + X_2) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ 。其方差为 $D(Z) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 D(X_1 + X_2) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}$ 。故 $\frac{X_1 + X_2}{2} \sim N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}\right)$ 。

4. 设 X, Y 独立同分布, 密度为 $p(\cdot)$, 分布函数为 $F(\cdot)$ 。求 $\min\{X, Y\}$ 的密度。

解: 设 $Z = \min\{X, Y\}$ 。其分布函数为:

$$F_Z(z) = P(\min\{X, Y\} \leq z) = 1 - P(\min\{X, Y\} > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$$

由于 X, Y 独立同分布:

$$F_Z(z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F(z)]^2$$

对 z 求导得密度函数:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = -2[1 - F(z)] \cdot [-p(z)] = 2[1 - F(z)]p(z)$$

5. 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成, 联接的方式分别为 (1) 串联, (2) 并联, (3) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作)。已知 L_1, L_2 的寿命分别为 X 和 Y , 其概率密度分别为:

$$p_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 且 $\alpha \neq \beta$ 。试分别就这三种联接方式写出系统 L 的总寿命 Z 的概率密度。

解: 已知 X, Y 的分布函数分别为 $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ($x > 0$) 和 $F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y}$ ($y > 0$)。

(1) 串联方式: $Z = \min\{X, Y\}$ 系统串联意味着只要有一个子系统损坏, 整个系统就停止工作。先求 Z 的分布函数 $F_{Z_1}(z)$ 。对于 $z > 0$:

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z) &= P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) \\ &= 1 - P(\min\{X, Y\} > z) \\ &= 1 - P(X > z, Y > z) \end{aligned}$$

由于 X, Y 相互独立:

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z) &= 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\ &= 1 - e^{-\alpha z} \cdot e^{-\beta z} = 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} \end{aligned}$$

对 z 求导得概率密度 $p_1(z)$:

$$p_1(z) = \frac{d}{dz}[1 - e^{-(\alpha+\beta)z}] = (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, \quad z > 0$$

(2) 并联方式: $Z = \max\{X, Y\}$ 系统并联意味着只有当所有子系统都损坏时, 整个系统才停止工作。先求 Z 的分布函数 $F_{Z_2}(z)$ 。对于 $z > 0$:

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(z) &= P(Z \leq z) = P(\max\{X, Y\} \leq z) \\ &= P(X \leq z, Y \leq z) \end{aligned}$$

由于 X, Y 相互独立:

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(z) &= P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z) \\ &= (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}) = 1 - e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} + e^{-(\alpha+\beta)z} \end{aligned}$$

对 z 求导得概率密度 $p_2(z)$:

$$p_2(z) = \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, \quad z > 0$$

(3) 备用方式: $Z = X + Y$ 系统备用意味着总寿命是两个子系统寿命之和。使用卷积公式求 Z 的密度 $p_3(z)$ 。当 $z > 0$ 时:

$$p_3(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

由于 $x > 0$ 且 $z - x > 0$ (即 $x < z$), 积分限为 0 到 z :

$$\begin{aligned} p_3(z) &= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \cdot \beta e^{-\beta(z-x)} dx \\ &= \alpha \beta e^{-\beta z} \int_0^z e^{(\beta-\alpha)x} dx \\ &= \alpha \beta e^{-\beta z} \left[\frac{1}{\beta-\alpha} e^{(\beta-\alpha)x} \right]_0^z \\ &= \frac{\alpha \beta e^{-\beta z}}{\beta-\alpha} (e^{(\beta-\alpha)z} - 1) \\ &= \frac{\alpha \beta}{\beta-\alpha} (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}), \quad z > 0 \end{aligned}$$

当 $z \leq 0$ 时, $p_3(z) = 0$ 。

6. 设商品一周需要量密度为 $p(x) = xe^{-x}$ ($x > 0$)。求 (1) 两周, (2) 三周需要量的密度。

解: 已知 $p(x)$ 是参数为 $(2, 1)$ 的 Γ 分布。(1) 两周需要量 $Z = X_1 + X_2$ 。根据 Γ 分布可加性, $Z \sim \Gamma(2 + 2, 1) = \Gamma(4, 1)$ 。其密度为:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(4)} z^{4-1} e^{-z} = \frac{1}{6} z^3 e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

(2) 三周需要量 $W = X_1 + X_2 + X_3$ 。同理 $W \sim \Gamma(2 + 2 + 2, 1) = \Gamma(6, 1)$ 。其密度为:

$$p_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(6)} w^{6-1} e^{-w} = \frac{1}{120} w^5 e^{-w}, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases}$$

习题十三 随机向量的数字特征

1. 设 (X, Y) 的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的均值 (用两种方法)。

解：方法一：利用随机变量函数的期望公式

根据公式 $E[g(X, Y)] = \iint g(x, y)p(x, y)dxdy$:

$$E(Z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{x^2 + y^2} \cdot 4xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

引入极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 雅可比行列式为 r 。积分区域变为 $0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi/2$:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty r \cdot 4(r \cos \theta)(r \sin \theta)e^{-r^2} \cdot r dr \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^\infty 2r^4 e^{-r^2} dr \right) \end{aligned}$$

计算三角积分: $\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\theta d\theta = [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$ 。

计算径向积分: 令 $t = r^2, dt = 2r dr \implies r = \sqrt{t}, dr = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$:

$$\int_0^\infty 2r^4 e^{-r^2} dr = \int_0^\infty t^2 e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty t^{3/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

故 $E(Z) = 2 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ 。

方法二：通过分布函数求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数

根据定义, $F_Z(z) = P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z)$ 。对于 $z > 0$, 该概率对应于第一象限内半径为 z 的四分之一圆域 $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2, x > 0, y > 0\}$ 。

$$F_Z(z) = \iint_{D_z} 4xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

引入极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 其雅可比行列式为 r 。积分限为 $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq z$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^z 4(r \cos \theta)(r \sin \theta)e^{-r^2} \cdot r dr \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^z 2r^3 e^{-r^2} dr \right) \end{aligned}$$

计算角度部分: $\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\theta d\theta = [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$ 。计算径向部分: $F_Z(z) = 2 \int_0^z r^3 e^{-r^2} dr$ 。

根据变上限积分求导定理:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} \left(2 \int_0^z r^3 e^{-r^2} dr \right) = 2z^3 e^{-z^2}, \quad z > 0$$

$$E(Z) = \int_0^\infty z \cdot p_Z(z) dz = \int_0^\infty z(2z^3 e^{-z^2}) dz = \int_0^\infty 2z^4 e^{-z^2} dz$$

令 $t = z^2$, 则 $dt = 2z dz \implies dz = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ 。积分限仍为 0 到 ∞ :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^\infty 2(t^2) e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^\infty t^{3/2} e^{-t} dt \\ &= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

得结果为 $\frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ 。

2. 证明: 如果 X 与 Y 独立, 则 $D(XY) = D(X)D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X)$ 。

证: 因为 X, Y 独立, 所以 $E(XY) = E(X)E(Y)$ 且 $E(X^2 Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$ 。根据方差定义:

$$D(XY) = E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)]^2[E(Y)]^2$$

代入 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$ 和 $E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2$:

$$\begin{aligned} D(XY) &= \{D(X) + [E(X)]^2\} \{D(Y) + [E(Y)]^2\} - [E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= D(X)D(Y) + D(X)[E(Y)]^2 + [E(X)]^2 D(Y) + [E(X)]^2[E(Y)]^2 - [E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= D(X)D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X) \end{aligned}$$

证毕。

3. 设 (X, Y) 的联合密度 $p(x, y) = \frac{A}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ 。试出 A 的数值, 并问 σ_{XX} 与 σ_{YY} 是否存在?

解: 利用规范性 $\iint p(x, y) dx dy = 1$ 。采用极坐标:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{Ar}{(r^2 + 1)^2} dr = 2\pi A \left[-\frac{1}{2(r^2 + 1)} \right]_0^\infty = 2\pi A \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \pi A = 1$$

解得 $A = \frac{1}{\pi}$ 。由于 $E(X^2) = \iint \frac{x^2}{\pi(x^2+y^2+1)^2} dx dy$, 采用极坐标得被积函数量级为 $\frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r}{r^4} = \frac{\cos^2 \theta}{r}$ 。由于积分 $\int_1^\infty \frac{1}{r} dr$ 发散, 故 $E(X^2)$ 不存在, 从而方差 σ_{XX} 与 σ_{YY} 均不存在。

4. 设 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ 上的均匀分布, 求相关系数 ρ 。

解: 区域 D 的面积 $S = 1/2$, 联合密度 $p(x, y) = 2, (x, y) \in D$ 。
 $E(X) = \int_0^1 \int_0^x 2x dy dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$; $E(Y) = \int_0^1 \int_0^x 2y dy dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$; $E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} \Rightarrow D(X) = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$; $E(Y^2) = \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx = \frac{1}{6} \Rightarrow D(Y) = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$; $E(XY) = \int_0^1 \int_0^x 2xy dy dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$; $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ 。
 $\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{1/36}{1/18} = \frac{1}{2}$ 。

5. 设 X_1, X_2 独立, 其概率密度分别为:

$$p_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)}, & x > 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X_1 \cdot X_2)$ 。

解: $E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1)E(X_2)$ 。 $E(X_1) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}$; $E(X_2) = \int_5^\infty x e^{-(x-5)} dx$ 。令 $t = x - 5$: $E(X_2) = \int_0^\infty (t+5)e^{-t} dt = \Gamma(2) + 5\Gamma(1) = 1 + 5 = 6$ 。故 $E(X_1 \cdot X_2) = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ 。

6. 已知 $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho = 0.4$ 。求 $D(X+Y)$ 及 $D(X-Y)$ 。

解: $Cov(X, Y) = \rho \sigma_X \sigma_Y = 0.4 \times 5 \times 6 = 12$ 。 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y) = 25 + 36 + 24 = 85$ 。 $D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X, Y) = 25 + 36 - 24 = 37$ 。

7. 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 已知 $E(X) = E(Y) = 0, D(X) = a^2, D(Y) = b^2$, 相关系数 $\rho = 0$ 。求随机向量 (X, Y) 落在区域 $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k^2 \right\}$ 中的概率 ($k > 0$)。

解: 由于 $\rho = 0$, 变量独立。且 $X \sim N(0, a^2), Y \sim N(0, b^2)$ 。令 $U = X/a, V = Y/b$, 则 $U, V \sim N(0, 1)$ 且相互独立。所求概率为 $P\{U^2 + V^2 \leq k^2\}$ 。由于 $W = U^2 + V^2 \sim \chi^2(2)$, 其密度函数为 $f(w) = \frac{1}{2}e^{-w/2}, w > 0$ 。 $P = \int_0^{k^2} \frac{1}{2}e^{-w/2}dw = [-e^{-w/2}]_0^{k^2} = 1 - e^{-k^2/2}$ 。

8. 直接验证: 若随机变量 X 的方差 $D(X) > 0$, 且 $Y = a + bX$ (其中 a, b 为常数, $b \neq 0$), 则相关系数 ρ_{XY} 满足:

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & \text{当 } b > 0 \\ -1, & \text{当 } b < 0 \end{cases}$$

证: $Cov(X, Y) = Cov(X, a + bX) = bD(X)$ 。 $D(Y) = b^2D(X) \implies \sigma_Y = |b|\sigma_X$ 。
 $\rho = \frac{bD(X)}{\sigma_X|b|\sigma_X} = \frac{b}{|b|}$ 。故 $b > 0$ 时 $\rho = 1$, $b < 0$ 时 $\rho = -1$ 。

9. 设 $X \sim N(0, 1), Y = X^n$, **求** ρ_{XY} 。

解: $Cov(X, Y) = E(X \cdot X^n) - E(X)E(X^n) = E(X^{n+1}) - 0 \cdot E(X^n) = E(X^{n+1})$ 。

(1) 当 n 为偶数时, $n+1$ 为奇数。由标准正态分布的对称性可知 $E(X^{n+1}) = 0$, 故 $\rho_{XY} = 0$ 。

(2) 当 n 为奇数时, $n+1$ 为偶数。 $E(X^{n+1}) = n!!$ (见习题九第 4 题)。且 $D(X) = 1$, $D(Y) = E(X^{2n}) - [E(X^n)]^2 = (2n-1)!! - 0$ 。故 $\rho_{XY} = \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}$ 。

$$\text{综上: } \rho_{XY} = \begin{cases} 0, & n \text{ 偶} \\ \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}, & n \text{ 奇} \end{cases}。$$

习题十四 关于 n 维随机向量

1. 已知 (X, Y, Z) 的联合密度为

$$p(x, y, z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)}, & x > 0, y > 0, z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求出 X, Y, Z 的单个密度。又： X, Y, Z 相互独立吗？

解：计算 X 的边缘密度：当 $x > 0$ 时，

$$p_X(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)} dy dz = e^{-x} \left(\int_0^\infty e^{-y} dy \right) \left(\int_0^\infty e^{-z} dz \right)$$

由于 $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ ，故 $p_X(x) = e^{-x}$ ($x > 0$)。同理，当 $y > 0$ 时， $p_Y(y) = e^{-y}$ ；当 $z > 0$ 时， $p_Z(z) = e^{-z}$ 。即三个随机变量的边缘密度均为：

$$p(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

由于对于所有实数 x, y, z ，均满足联合密度等于边缘密度之积：

$$p(x, y, z) = p_X(x)p_Y(y)p_Z(z)$$

故随机变量 X, Y, Z 相互独立。

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布，都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，求 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合密度。

解：每个 X_i 的概率密度为 $p_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ 。由于 X_1, \dots, X_n 相互独立，其联合密度为各边缘密度之积：

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

整理得：

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

3. 设 X, Y, Z 独立同分布，服从 $N(0, 1)$ ，求 $U = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 的概率密度。

解： (X, Y, Z) 的联合密度为 $p(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right\}$ 。利用球坐标变换计算 U 的分布函数。当 $u > 0$ 时：

$$F_U(u) = P(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \leq u) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq u^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} dx dy dz$$

引入球坐标，体积元 $dv = 4\pi r^2 dr$ ：

$$F_U(u) = \int_0^u \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-r^2/2} \cdot 4\pi r^2 dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u r^2 e^{-r^2/2} dr$$

对 u 求导，得概率密度为：

$$p(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^2 e^{-\frac{1}{2}u^2}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布，分布的均值是 μ ，方差是 σ^2 。而 $Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ ，求 $E(Y), D(Y)$ 。

解： 根据期望的线性性质：

$$E(Y) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

由于 X_i 相互独立，根据方差的性质：

$$D(Y) = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，且均服从参数为 m, η 的韦布尔分布，其概率密度函数为：

$$p(x) = \frac{m}{\eta^m} x^{m-1} e^{-(x/\eta)^m}, \quad m > 0, \eta > 0, x > 0$$

试证明： $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 仍然服从韦布尔分布。

证：

第一步： 推导单个随机变量的生存函数 $R(x)$

生存函数定义为 $R(x) = P(X_i > x)$ 。对于 $x > 0$ ：

$$R(x) = \int_x^\infty p(t) dt = \int_x^\infty \frac{m}{\eta^m} t^{m-1} e^{-(t/\eta)^m} dt$$

引入换元法, 令 $u = (t/\eta)^m = \frac{t^m}{\eta^m}$, 则对 t 求导得:

$$du = \frac{mt^{m-1}}{\eta^m} dt$$

观察被积函数, 正好满足上述微分形式。当代换积分限时: 当 $t = x$ 时 $u = (x/\eta)^m$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $u \rightarrow \infty$ 。

$$R(x) = \int_{(x/\eta)^m}^{\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_{(x/\eta)^m}^{\infty} = 0 - (-e^{-(x/\eta)^m}) = e^{-(x/\eta)^m}$$

第二步: 求最小值 W 的生存函数 $R_W(x)$

由于 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 最小值大于 x 等价于每一个观测值都大于 x :

$$\begin{aligned} R_W(x) &= P(W > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \\ &= P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= [R(x)]^n = [e^{-(x/\eta)^m}]^n \\ &= e^{-n(x/\eta)^m} \end{aligned}$$

第三步: 整理表达式并识别分布形式

为了判断 W 是否符合韦布尔分布的标准形式, 我们需要将指数部分改写。利用恒等式 $n = (n^{1/m})^m$:

$$n \left(\frac{x}{\eta} \right)^m = (n^{1/m})^m \cdot \frac{x^m}{\eta^m} = \left(\frac{n^{1/m} \cdot x}{\eta} \right)^m = \left(\frac{x}{\eta \cdot n^{-1/m}} \right)^m$$

代回生存函数表达式得:

$$R_W(x) = e^{-\left(\frac{x}{\eta'}\right)^m}, \quad \text{其中 } \eta' = \eta \cdot n^{-1/m} = \frac{\eta}{n^{1/m}}$$

由于 W 的生存函数具有韦布尔分布的标准形式 (且形状参数 m 不变), 其累积分布函数为 $F_W(x) = 1 - R_W(x) = 1 - e^{-(x/\eta')^m}$ 。这证明了 $\min(X_1, \dots, X_n)$ 仍然服从韦布尔分布。

6. 将 n 只球放入 M 只盒子中去, 设每只球落入各个盒子是等可能性的。求有球的盒子数 X 的均值。

解: 引进指示变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 只盒子中有球} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 只盒子中无球} \end{cases}$, 则 $X = \sum_{i=1}^M X_i$ 。对于第 i 只盒子,

任一球不落入该盒的概率为 $1 - \frac{1}{M}$ 。由于每只球投落是独立的, n 只球均不落入该

盒的概率为 $(1 - \frac{1}{M})^n$ 。因此, 第 i 只盒子有球的概率为 $P(X_i = 1) = 1 - (1 - \frac{1}{M})^n$ 。由此得 $E(X_i) = 1 - (1 - \frac{1}{M})^n$ 。根据期望的线性性质:

$$E(X) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = M \left[1 - \left(1 - \frac{1}{M} \right)^n \right]$$

7. 求事件在 n 次独立试验中发生次数的均值与方差, 如果该事件在第 i 次试验中发生的概率等于 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

解: 设 X_i 为第 i 次试验中事件是否发生的指示变量, 则总发生次数 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ 。已知 $E(X_i) = p_i, D(X_i) = p_i(1 - p_i)$ 。根据期望和方差的线性性质 (各试验独立):

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

8. 对于随机变量 X, Y, Z , 已知 $E(X) = E(Y) = 1, E(Z) = -1, D(X) = D(Y) = D(Z) = 1, \rho_{XY} = 0, \rho_{XZ} = \frac{1}{2}, \rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$ 。求 $E(X + Y + Z), D(X + Y + Z)$ 。

解: (1) 计算期望:

$$E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 1 + 1 + (-1) = 1$$

(2) 计算方差: 根据方差公式 $D(\sum X_i) = \sum D(X_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j)$: 协方差计算如下: $Cov(X, Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ $Cov(X, Z) = \rho_{XZ} \sigma_X \sigma_Z = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ $Cov(Y, Z) = \rho_{YZ} \sigma_Y \sigma_Z = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$ 代入方差公式:

$$D(X + Y + Z) = 1 + 1 + 1 + 2 \left(0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 3$$

习题十五 条件分布与条件期望

1. 设 X 与 Y 相互独立, X 服从泊松分布, $E(X) = \lambda_1$, Y 也服从泊松分布, $E(Y) = \lambda_2$ 。试在 $X + Y = n$ 的条件下求出 X 的条件分布。

解: 由题意知 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ 。由于 X, Y 相互独立, 根据泊松分布的可加性, 其和 $Z = X + Y$ 仍服从泊松分布, 即 $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。对于一切非负整数 $k \leq n$:

$$\begin{aligned} P(X = k | X + Y = n) &= \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

由此可见, 在 $X + Y = n$ 的条件下, X 服从参数为 n 和 $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 的二项分布 $B(n, p)$ 。当 $k > n$ 时, 概率为 0。

2. 一只小猫不幸陷进一个有三扇门洞的大山洞中。第一个门洞通到一条通道, 沿此通道走 2h 后可到达地面; 第二个门洞通到另一个通道, 沿它走 3h 后又回到原处; 第三个门洞通到第三个通道, 沿它走 5h 后也回到原处。假定这只小猫总是等可能地在三个门洞中任意选择一个。试计算这只小猫到达地面的时间的期望。

解: 设 T 为小猫到达地面所需的时间。利用全期望公式计算。小猫等可能地选择三扇门, 每扇门的概率均为 $1/3$ 。

- 若选择第一扇门, 耗时 2h 到达地面。
- 若选择第二扇门, 耗时 3h 回到原处, 此时到达地面的期望时间变为 $3 + E(T)$ 。
- 若选择第三扇门, 耗时 5h 回到原处, 此时到达地面的期望时间变为 $5 + E(T)$ 。

根据全期望公式:

$$E(T) = \frac{1}{3}(2) + \frac{1}{3}(3 + E(T)) + \frac{1}{3}(5 + E(T))$$

解方程:

$$E(T) = \frac{2 + 3 + E(T) + 5 + E(T)}{3} = \frac{10 + 2E(T)}{3}$$

$$3E(T) = 10 + 2E(T) \implies E(T) = 10$$

答：小猫到达地面的期望时间是 10 h。

3. 设 X 和 Y 都是离散型随机变量, $E(Y^2)$ 存在, $\varphi(x) = \begin{cases} E(Y | X = x) & P(X = x) > 0 \\ 0 & \end{cases}$ 。

试证明：对任何非负函数 $\psi(x)$, 只要 $E[\psi(X)]^2$ 存在, 必成立： $E[\varphi(X) - Y]^2 \leq E[\psi(X) - Y]^2$ 。

证明：考察 $E[\psi(X) - Y]^2$, 在其中插入 $\varphi(X)$ ：

$$\begin{aligned} E[\psi(X) - Y]^2 &= E[\psi(X) - \varphi(X) + \varphi(X) - Y]^2 \\ &= E[\psi(X) - \varphi(X)]^2 + E[\varphi(X) - Y]^2 + 2E[(\psi(X) - \varphi(X))(\varphi(X) - Y)] \end{aligned}$$

利用条件期望的性质考察交叉项：

$$\begin{aligned} E[(\psi(X) - \varphi(X))(\varphi(X) - Y)] &= E_X[E[(\psi(X) - \varphi(X))(\varphi(X) - Y) | X]] \\ &= E_X[(\psi(X) - \varphi(X)) \cdot E[\varphi(X) - Y | X]] \end{aligned}$$

由于 $\varphi(X) = E(Y | X)$, 在给定 X 的条件下, $\varphi(X)$ 是常数, 则：

$$E[\varphi(X) - Y | X] = \varphi(X) - E(Y | X) = 0$$

因此交叉项为 0。原式变为：

$$E[\psi(X) - Y]^2 = E[\psi(X) - \varphi(X)]^2 + E[\varphi(X) - Y]^2$$

由于 $E[\psi(X) - \varphi(X)]^2 \geq 0$, 故：

$$E[\psi(X) - Y]^2 \geq E[\varphi(X) - Y]^2$$

证明完毕。

4. 设一天走进某百货商店的顾客数是均值为 1200 的随机变量, 又设这些顾客所花的钱数是相互独立的, 均值为 50 元的随机变量。又设任一顾客所花的钱数和进入该商店的总人数相互独立。试问该商店一天的平均营业额是多少？

解：设走进商店的顾客数为 N , 每位顾客花的钱数为 X_i 。则商店一天的营业额为 $S = \sum_{i=1}^N X_i$ 。已知 $E(N) = 1200$, $E(X_i) = 50$ 。利用全期望公式：

$$E(S) = E[E(S | N)]$$

在给定 $N = n$ 的条件下:

$$E(S \mid N = n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 50n$$

因此, $E(S \mid N) = 50N$ 。代回全期望公式:

$$E(S) = E(50N) = 50E(N) = 50 \times 1200 = 60,000$$

答: 该商店一天的平均营业额是 60,000 元。