《概率统计讲义》习题参考答案

作者：txbb

第五章　统计估值

习题十六　统计估值

【特别说明：关于统计分布表的查表方式】

不同的教材或参考书对临界值的定义方式不同，查表时务必先查看表头的定义公式或示意图。常见的有两种情况（以 t 分布构建 $1-\alpha$ 置信区间为例）：

1. **双侧概率定义（即本题图片中的定义）：**
   - **定义公式：** $P\{|t|>\lambda\}=\alpha$
   - **含义：** 表中的 α 代表**双侧尾部面积的总和**。
   - **查表方法：** 若求 95% 置信区间（即显著性水平 $\alpha=0.05$），直接在表头找 $\boldsymbol{\alpha=0.05}$ 对应的数值。
2. **单侧概率定义（常见于其他教材）：**
   - **定义公式：** $P\{t>t_\alpha\}=\alpha$
   - **含义：** 表中的 α 仅代表**右侧单尾面积**。
   - **查表方法：** 若求 95% 置信区间（双侧总面积为 0.05，单侧为 0.025），需要在表头找 $\boldsymbol{\alpha=0.025}$ 对应的数值。

结论： 在解题步骤中，我们通常统一书写为 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 以表示数学上的分位点逻辑。但在具体查您手中的表时，请根据图注 $P\{|t|>\lambda\}=\alpha$，直接代入总的显著性水平 α 查找。

---

1. 某食品厂为加强质量管理，对某天生产的罐头抽查了 100 个（数据如下表）。试画直方图；它是否近似服从正态分布？

100 个罐头样品的净重数据（单位：g）：

342	340	348	346	343
342	346	341	344	348
346	346	340	344	342
344	345	340	344	344
343	344	342	343	345
339	350	337	345	349
336	348	344	345	332
342	342	340	350	343
347	340	344	353	340
340	356	346	345	346
340	339	342	352	342
350	348	344	350	335
340	338	345	345	349
336	342	338	343	343
341	347	341	347	344
339	347	348	343	347
346	344	345	350	341
338	343	339	343	346
342	339	343	350	341
346	341	345	344	342

解： 略。

---

2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本值，μ 已知，求 σ^2 的最大似然估计量。

解： 样本的似然函数为：

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

取对数：

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}(\sigma^2)} = 0$，得：

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

解得最大似然估计量为：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

---

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态分布 $N(\mu, 1)$ 的样本值，求 μ 的最大似然估计量。

解： 样本的似然函数为：

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

取对数：

$$\ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\mu} = 0$，得：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

解得最大似然估计量为：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

---

4. 设 X 服从区间 $[0, \lambda](\lambda > 0)$ 上的均匀分布，λ 是未知参数。**而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的样本值，试求出 λ 的最大似然估计量和矩估计量**。

解： (1) **最大似然估计**：X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 \le x \le \lambda \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。似然函数为：

$$L(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n}, & \lambda \ge \max\{x_1, \cdots, x_n\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$L(\lambda)$ 是关于 λ 的减函数，要使 $L(\lambda)$ 最大，λ 应取其允许范围内的最小值，即：

$$\hat{\lambda} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

(2) **矩估计**：总体期望 $E(X) = \frac{0+\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$。令样本均值等于总体期望：$\bar{x} = \frac{\lambda}{2}$。解得矩估计量为：

$$\tilde{\lambda} = 2\bar{x} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

---

5. 某车间生产滚珠，从长期实践中知道，滚珠直径 X 服从正态分布，且已知其方差为 $\sigma^2 = 0.05$。从某天的产品里随机抽取 6 个，量得直径如下（单位：mm）：

$$14.70, 15.21, 14.90, 14.91, 15.32, 15.32$$

试分别对置信度 0.99 和 0.90，找出该天产品直径均值的置信区间。

解： 已知 $X \sim N(\mu, 0.05)$，方差 $\sigma^2 = 0.05$ 已知，故 $\sigma = \sqrt{0.05} \approx 0.2236$。样本容量 $n = 6$。首先计算样本均值：

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(14.70 + 15.21 + 14.90 + 14.91 + 15.32 + 15.32) = \frac{90.36}{6} = 15.06$$

由于 σ 已知，均值 μ 的置信区间公式为：

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

标准误为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.2236}{\sqrt{6}} \approx 0.09129$。

(1) **置信度 $1 - \alpha = 0.99$：** $\alpha = 0.01$，查标准正态分布表得临界值 $z_{0.005} = 2.576$。误差限 $\Delta = 2.576 \times 0.09129 \approx 0.235$（取 0.24）。置信区间为：

$$[15.06 - 0.24, 15.06 + 0.24] = [14.82, 15.30]$$

(2) **置信度 $1 - \alpha = 0.90$：** $\alpha = 0.10$，查标准正态分布表得临界值 $z_{0.05} = 1.645$。误差限 $\Delta = 1.645 \times 0.09129 \approx 0.150$。置信区间为：

$$[15.06 - 0.15, 15.06 + 0.15] = [14.91, 15.21]$$

---

6. 用某仪器间接测量温度，重复测量 5 次，得到的结果如下（单位：°C）：

$$1250, 1265, 1245, 1260, 1275$$

设温度测量值服从正态分布，试分别对置信度 0.99 与 0.90，找出温度真值（均值）的置信区间。

解： 样本容量 $n = 5$。总体方差 σ^2 未知，应使用 t 分布构造置信区间。计算样本均值 $\bar{x}$ 和样本方差 S^2：

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1250 + 1265 + 1245 + 1260 + 1275) = \frac{6295}{5} = 1259$$

$$S^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4}[(-9)^2 + 6^2 + (-14)^2 + 1^2 + 16^2]$$

$$S^2 = \frac{1}{4}(81 + 36 + 196 + 1 + 256) = \frac{570}{4} = 142.5$$

样本标准差 $S = \sqrt{142.5} \approx 11.937$。标准误估计值为 $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{11.937}{\sqrt{5}} \approx 5.338$。置信区间公式为：

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

自由度 $df = n - 1 = 4$。

(1) **置信度** $1 - \alpha = 0.99$**：** $\alpha = 0.01$，查 t 分布表得 $t_{0.005}(4) = 4.604$。误差限 $\Delta = 4.604 \times 5.338 \approx 24.576$（约为 24.6）。置信区间为：

$$[1259 - 24.6, 1259 + 24.6] = [1234.4, 1283.6]$$

(2) **置信度** $1 - \alpha = 0.90$**：** $\alpha = 0.10$，查 t 分布表得 $t_{0.05}(4) = 2.132$。误差限 $\Delta = 2.132 \times 5.338 \approx 11.38$（约为 11.4）。置信区间为：

$$[1259 - 11.4, 1259 + 11.4] = [1247.6, 1270.4]$$

---

7. 已知样本 3.3, -0.3, -0.6, -0.9，求具有 $\sigma = 3$ 的正态分布的均值的置信区间（置信度为 0.95）。如果 σ 未知，问均值的置信区间为何？

解： 样本均值 $\bar{x} = \frac{3.3+(-0.3)+(-0.6)+(-0.9)}{4} = \frac{1.5}{4} = 0.375$。样本量 $n = 4$。

(1) $\sigma = 3$ **已知**：$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$。误差限 $\Delta = 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{4}} = 1.96 \times 1.5 = 2.94$。置信区间为 $[0.375 - 2.94, 0.375 + 2.94] = [-2.565, 3.315]$。

(2) σ **未知**：计算样本方差 $S^2 = \frac{1}{4-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$。$S^2 = \frac{1}{3}[(3.3 - 0.375)^2 + (-0.3 - 0.375)^2 + (-0.6 - 0.375)^2 + (-0.9 - 0.375)^2] \approx 3.856$。$S \approx 1.964$。使用 t 分布，$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(3) = 3.182$。误差限 $\Delta = 3.182 \times \frac{1.964}{\sqrt{4}} \approx 3.126$。置信区间为 $[0.375 - 3.126, 0.375 + 3.126] = [-2.751, 3.501]$。

---

8. 对某一句离进行 5 次独立测量，得（单位：m）：

2 781, 2 836, 2 807, 2 763, 2 858

已知测量无系统误差，求该距离的置信度为 0.95 的置信区间（测量值可认为服从正态分布）。

解： $n=5$。样本均值 $\bar{x}=\frac{2781+2836+2807+2763+2858}{5}=2809$。样本标准差 $S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\approx 38.83$。$\sigma$ 未知，使用 t 分布。查表得 $t_{0.025}(4)=2.776$。置信区间为 $\bar{x}\pm t_{0.025}(4)\frac{S}{\sqrt{5}}$。误差限 $\Delta=2.776\times\frac{38.83}{2.236}\approx 48.2$。区间为 $[2809-48.2,2809+48.2]=[2760.8,2857.2]$。

---

9. 为了估计灯泡使用时数的均值 μ 及标准差 σ，测试 10 个灯泡，得 $\bar{x}=1500$ h，$S=20$ h。如果已知灯泡使用时数是服从正态分布的，求 μ 及 σ 的置信区间（置信度为 0.95）。

解： $n=10,\bar{x}=1500,S=20$。

(1) μ **的置信区间**：使用 t 分布，自由度 $n-1=9$。$t_{0.025}(9)=2.262$。区间为 $\left[1500-2.262\times\frac{20}{\sqrt{10}},1500+2.262\times\frac{20}{\sqrt{10}}\right]=[1500-14.3,1500+14.3]=[1485.7,1514.3]$。

(2) σ **的置信区间**：使用 χ^2 分布。$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$。σ^2 的区间为 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}}\right]=\left[\frac{9\times 400}{19.023},\frac{9\times 400}{2.700}\right]=[189.24,1333.33]$。$\sigma$ 的区间为 $[\sqrt{189.24},\sqrt{1333.33}]=[13.8,36.5]$。

---

10. 测量铝的比重 16 次，测得 $\bar{x}=2.705,S=0.029$，试求铝的比重的置信区间（设测量值服从正态分布，置信度为 0.95）。

解： $n=16,\bar{x}=2.705,S=0.029$。使用 t 分布，自由度 $n-1=15$。$t_{0.025}(15)=2.131$。误差限 $\Delta=2.131\times\frac{0.029}{\sqrt{16}}\approx 0.015$。置信区间为 $[2.705-0.015,2.705+0.015]=[2.690,2.720]$。

---

11. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2),x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是其样本值。如果 σ^2 已知，问：n 取多大时方能保证 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的长度不大于给定的 L？

解： 置信区间长度 $2\Delta=2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。置信度 0.95 对应 $z_{0.025}=1.96$。要求 $2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq L$。即 $\frac{3.92\sigma}{L}\leq\sqrt{n}$。$n\geq\left(\frac{3.92\sigma}{L}\right)^2\approx 15.3664\frac{\sigma^2}{L^2}$。故 $n\geq 15.37\sigma^2/L^2$。

---

12. 随机地从甲批导线中抽取 4 根，从乙批导线中抽取 5 根，测得其电阻为（单位：Ω）：甲批导线：0.143, 0.142, 0.143, 0.137 乙批导线：0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140 设甲、乙两批导线的电阻分别服从 $N(\mu_1,\sigma^2),N(\mu_2,\sigma^2)$（并且它们相互独立）。$\sigma^2$ 已知，等于 0.0025^2，但 μ_1,μ_2 均未知。试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间。

我们需要估计两个正态总体均值之差 $\mu_1 - \mu_2$。

1. **点估计：** $\mu_1 - \mu_2$ 的自然估计量是样本均值之差 $\bar{X} - \bar{Y}$。
2. **抽样分布的性质：**
   - 因为总体服从正态分布，所以样本均值 $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$，$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$。
   - 正态分布的线性组合仍然是正态分布，所以 $\bar{X} - \bar{Y}$ 也服从正态分布。
   - **期望：** $E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$。
   - **方差：** 由于两批导线抽取是**相互独立**的，根据方差性质 $Var(A-B) = Var(A) + Var(B)$，差值的方差等于各自分布方差之**和**（而不是差）：
   $$Var(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$
3. **标准化统计量：** 因为方差 σ^2 是**已知**的，我们不需要用样本方差 S^2 去估计它，因此标准化后的统计量服从**标准正态分布** Z，而不是 t 分布：
   $$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

因此，置信区间的公式为：

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

解：

计算样本均值：

$$\bar{x}_1 = 0.14125, \quad \bar{x}_2 = 0.1392$$

均值差的点估计为 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.00205$。

已知 $\sigma = 0.0025$，置信度 0.95 对应临界值 $z_{0.025} = 1.96$。置信区间公式为 $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$。

代入数据计算误差限：

$$\Delta = 1.96 \times 0.0025 \times \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \approx 0.00329$$

故置信区间为：

$$[0.00205 - 0.00329, \quad 0.00205 + 0.00329] = [-0.00124, \quad 0.00534]$$

答：$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间约为 $[-0.001, 0.005]$。

第六章 假设检验

习题十七 假设检验

1. 由经验知某零件重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\mu = 15, \sigma^2 = 0.05$。技术革新后，抽了六个样品，测得重量为 (单位：g)： 14.7, 15.1, 14.8, 15.0, 15.2, 14.6 已知方差不变，问平均重量是否仍为 15？$(\alpha = 0.05)$

解： 设革新后零件重量 $X \sim N(\mu, 0.05)$。建立假设：$H_0 : \mu = 15 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 15$。已知 $\sigma = \sqrt{0.05} \approx 0.2236, n = 6, \mu_0 = 15$。统计量 $u = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。计算样本均值：

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(14.7 + 15.1 + 14.8 + 15.0 + 15.2 + 14.6) = \frac{89.4}{6} = 14.9$$

代入计算统计量观测值：

$$|u| = \left|\frac{14.9 - 15}{0.2236/\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{-0.1}{0.0913}\right| \approx 1.095$$

临界值 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$。因为 $|u| = 1.095 < 1.96$，故接受 H_0。

答：认为平均重量仍为 15（相容）。

---

2. 糖厂用自动打包机打包，每包标准重量为 100kg。每天开工后需要检验一次打包机工作是否正常，即检查打包机是否有系统偏差。某日开工后测得几包重量 (单位：kg) 如下： 99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5 问：该日打包机工作是否正常？$(\alpha = 0.05$**；已知包重服从正态分布。)**

解： 建立假设：$H_0 : \mu = 100 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 100$。方差未知，选用 t 检验，统计量 $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。样本量 $n = 9$。计算样本均值与样本方差：

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum x_i \approx 99.978$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 \approx 1.464, \quad S \approx 1.21$$

计算统计量观测值：

$$|t| = \left|\frac{99.978 - 100}{1.21/\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{-0.022}{0.403}\right| \approx 0.05$$

查 t 分布表，临界值 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$。因为 $|t| = 0.05 < 2.306$，故接受 H_0。

答：没发现不正常。

3. 正常人的脉搏平均为 72min^{-1}，现某医生测得 10 例慢性四乙基铅中毒患者的脉搏 (单位：min^{-1}) 如下： 54, 67, 68, 78, 70, 66, 67, 70, 65, 69 问：四乙基铅中毒者和正常人的脉搏有无显著性差异？(已知四乙基铅中毒者的脉搏服从正态分布。)

解： 建立假设：$H_0: \mu = 72 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 72$。方差未知，选用 t 检验。$n = 10$。计算样本均值与标准差：

$$\bar{x} = 67.4, \quad S \approx 5.91$$

计算统计量观测值：

$$|t| = \left|\frac{67.4 - 72}{5.91/\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{-4.6}{1.869}\right| \approx 2.45$$

查表 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.262$。因为 $|t| = 2.45 > 2.262$，故拒绝 H_0。

答：有显著性差异。

---

4. 用热敏电阻测温仪间接测量地热勘探井底温度，重复测量 7 次，测得温度 (°C)：112.0, 113.4, 111.2, 112.0, 114.5, 112.9, 113.6 而用某精确办法测得温度为 112.6 (可看作温度真值)，试问用热敏电阻测温仪间接测量温有无系统偏差？$(\alpha = 0.05)$

解： 建立假设：$H_0: \mu = 112.6 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 112.6$。$n = 7$。计算样本均值与标准差：

$$\bar{x} \approx 112.8, \quad S \approx 1.134$$

计算统计量观测值：

$$|t| = \left|\frac{112.8 - 112.6}{1.134/\sqrt{7}}\right| = \left|\frac{0.2}{0.4286}\right| \approx 0.466$$

查表 $t_{0.025}(6) = 2.447$。因为 $|t| = 0.466 < 2.447$，故接受 H_0。

答：没发现有系统偏差。

---

5. 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 $0.005(\Omega)$。**今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得** $S = 0.007(\Omega)$，**设总体为正态分布。问在水平** $\alpha = 0.05$ **下能认为这批导线的标准差显著偏大吗？**

解： 建立假设：$H_0: \sigma^2 \leq 0.005^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.005^2$ (单侧检验)。统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$。已知 $n = 9, S = 0.007, \sigma_0 = 0.005$。计算观测值：

$$\chi^2 = \frac{8 \times (0.007)^2}{(0.005)^2} = 8 \times 1.96 = 15.68$$

查 χ^2 分布表（单侧），$\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(8)=15.5$。因为 $\chi^2=15.68>15.5$，故拒绝 H_0。

答：可以认为标准差显著偏大。

---

6. 机床厂某日从两台机器所加工的同一种零件中，分别抽若干个样测量零件尺寸，得：第一台机器的：6.2, 5.7, 6.5, 6.0, 6.3, 5.8, 5.7, 6.0, 6.0, 5.8, 6.0 $(n_1=11)$ **第二台机器的：5.6, 5.9, 5.6, 5.7, 5.8, 6.0, 5.5, 5.7, 5.5** $(n_2=9)$ **问：这两台机器的加工精度是否有显著性差异？**$(\alpha=0.05)$

解：“加工精度”通常指方差。建立假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。计算样本方差：第一台：$\bar{x}_1\approx 6.00, S_1^2\approx 0.064$。第二台：$\bar{x}_2\approx 5.70, S_2^2\approx 0.030$。统计量 $F=S_1^2/S_2^2$ (取大比小)。

$$F=\frac{0.064}{0.03}\approx 2.13$$

临界值：$F_{0.025}(10,8)=4.30$；下临界值 $1/F_{0.025}(8,10)=1/3.85\approx 0.26$。因为 $0.26<2.13<4.30$，落入接受域，接受 H_0。

答：无显著性差异。

---

7. 检查了 26 匹马，测得每 100mL 的血清中，所含的无机磷平均为 3.29mL，标准差为 0.34mL，又检查了 18 头羊，100mL 的血清中含无机磷平均为 3.96mL，标准差为 0.40mL。试以 0.05 的检验水平，检验马与羊的血清中含无机磷的量是否有显著性差异？

解：建立假设：$H_0:\mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$。马：$n_1=26,\bar{x}_1=3.29,S_1=0.34$。羊：$n_2=18,\bar{x}_2=3.96,S_2=0.40$。假设方差相等 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，计算合并方差 S_w^2：

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{25(0.34)^2+17(0.40)^2}{42}\approx 0.1336$$

$S_w=\sqrt{0.1336}\approx 0.3655$。统计量 $t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$。

$$|t|=\left|\frac{3.29-3.96}{0.3655\sqrt{1/26+1/18}}\right|=\left|\frac{-0.67}{0.3655\times 0.3066}\right|=\left|\frac{-0.67}{0.112}\right|\approx 5.98$$

自由度 $df=42$，查表 $t_{0.025}(42)\approx 2.021$。因为 $|t|=5.98>2.021$，故拒绝 H_0。

答：有显著性差异。

---

8. 十个失眠患者，服用甲、乙两种安眠药，延长睡眠的时间如下表所示：

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
甲	1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
乙	0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1	3.4	3.7	0.8	0	2.0

问这两种安眠药的疗效有无显著性差异？(可以认为服用两种安眠药后增加的睡眠时间之差近似服从正态分布。)$(\alpha = 0.05)$

解： 这是配对数据，t 检验。令 $D = X_{甲} - X_{乙}$。计算差值 d_i：1.2, 2.4, 1.3, 1.3, 0, 1.0, 1.8, 0.8, 4.6, 1.4。$n = 10$。建立假设：$H_0 : \mu_D = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_D \neq 0$。计算差值的均值和标准差：$\bar{d} = 1.58, \quad S_d \approx 1.23$。统计量 $t = \frac{\bar{d}-0}{S_d/\sqrt{n}}$。

$$t = \frac{1.58}{1.23/\sqrt{10}} = \frac{1.58}{0.389} \approx 4.06$$

查表 $t_{0.025}(9) = 2.262$。因为 $4.06 > 2.262$，故拒绝 H_0。

答：有显著性差异。

---

9. 比较甲、乙两种安眠药的疗效。将 20 个患者分成两组，每组 10 人；甲组病人服用甲种安眠药，乙组病人服用乙种安眠药。如服药后延长的睡眠时间分别近似服从正态分布，其数据仍如上题 (自然，数据不是两两成对了)，问这两种安眠药的疗效有无显著性差异？$(\alpha = 0.05)$

解： 这是两个独立样本的 t 检验。甲组：$\bar{x}_1 = 2.33, S_1^2 \approx 4.009$。乙组：$\bar{x}_2 = 0.75, S_2^2 \approx 3.205$。建立假设：$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$。合并方差 $S_w^2 = \frac{9\times4.009+9\times3.205}{18} \approx 3.607$，$S_w \approx 1.90$。统计量 $t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_w\sqrt{1/10+1/10}}$。

$$t = \frac{2.33 - 0.75}{1.90 \times 0.447} = \frac{1.58}{0.849} \approx 1.86$$

查表 $t_{0.025}(18) = 2.101$。因为 $1.86 < 2.101$，故接受 H_0。

答：无显著性差异。

---

10. 在一正 20 面体的 20 个面上，分别标以数字 $0, 1, 2, \cdots, 9$**，每个数字在两个面上标出。为检验其匀称性，共作 800 次投掷试验，数字** $0, 1, 2, \cdots, 9$ **朝正上方的次数如下：**

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频数	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

问：该正 20 面体是否匀称？

解： 拟合优度 χ^2 检验。$n = 800$。若匀称，每个数字出现的概率相等，为 1/10。期望频数 $E_i = 800 \times 0.1 = 80$。建立假设：$H_0$: 总体服从均匀分布。统计量 $\chi^2 = \sum_{i=0}^{9} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$。

$$\chi^2 = \frac{1}{80}[(74-80)^2 + (92-80)^2 + \cdots + (91-80)^2]$$

$$= \frac{1}{80}[36 + 144 + 9 + 1 + 0 + 49 + 9 + 25 + 16 + 121]$$

$$= \frac{410}{80} = 5.125$$

自由度 $df = 10 - 1 = 9$。查表 $\chi^2_{0.05}(9) = 16.9$。因为 $5.125 < 16.9$，故接受 H_0。

答：可以认为是匀称的。

11．某工厂采用新法处理废水，对处理后的水测量所含某种有毒物质的浓度，得到 10 个数据 (单位：$10^{-6}\mathbf{g} \cdot \mathbf{L}^{-1}$)： 22, 14, 17, 13, 21, 16, 15, 16, 19, 18 而以往用老法处理废水后，该种有毒物质的平均浓度为 19。问：新法是否比老法效果好？(检验水平 $\alpha = 0.05$)

解： 建立假设：$H_0 : \mu \geq 19 \leftrightarrow H_1 : \mu < 19$ (单侧检验，效果好意味着浓度低)。$n = 10, \mu_0 = 19$。计算样本均值与标准差：

$$\bar{x} = 17.1, \quad S \approx 2.92$$

统计量 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$。

$$t = \frac{17.1 - 19}{2.92/\sqrt{10}} = \frac{-1.9}{0.923} \approx -2.06$$

查表 $t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(9) = 1.833$。拒绝域为 $t < -1.833$。因为 $t = -2.06 < -1.833$，故拒绝 H_0，接受 H_1。

答：有显著性差异，新法好。

第七章 回归分析方法

习题十八 回归分析方法

1. 炼铝厂测得所产铸模用的铝的硬度 x 与抗张强度 y 数据如下：

x	68	53	70	84	60	72	51	83	70	64
y	288	293	349	343	290	354	283	324	340	286

求 y 对 x 的回归直线。

解： 样本量 $n = 10$。计算各项基本数据：$\sum x_i = 675$, $\sum y_i = 3150 \implies \bar{x} = 67.5$, $\bar{y} = 315$。$\sum x_i^2 = 46659$, $\sum y_i^2 = 1000120$, $\sum x_i y_i = 214672$。

计算离差平方和：

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 46659 - 10 \times (67.5)^2 = 1096.5$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 214672 - 10 \times 67.5 \times 315 = 2047$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 1000120 - 10 \times 315^2 = 7870$$

回归系数 b：

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{2047}{1096.5} \approx 1.8668 \approx 1.867$$

回归截距 a：

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 315 - 1.8668 \times 67.5 = 189.041 \approx 188.99$$

故 y 对 x 的回归直线方程为：

$$\hat{y} = 188.99 + 1.867x$$

---

2. 检验第 1 题所得回归直线的显著性。

解： 采用 F 检验法，建立原假设 $H_0 : b = 0$。计算回归平方和 U 与残差平方和 Q：

$$U = bS_{xy} = 1.8668 \times 2047 = 3821.34$$

$$Q = S_{yy} - U = 7870 - 3821.34 = 4048.66$$

计算 F 统计量（自由度为 1 和 $n-2=8$）：

$$F = \frac{U/1}{Q/8} = \frac{3821.34}{4048.66/8} \approx \frac{3821.34}{506.08} \approx 7.55$$

取显著性水平 $\alpha = 0.05$，查表得临界值 $F_{0.05}(1,8) = 5.32$。由于 $F = 7.55 > 5.32$，故拒绝原假设，认为回归直线显著。

---

3. 对于第 1 题所讨论的问题，试预报当铝的硬度 $x = 65$ 时的抗张强度 y。

解： (1) 点预报：将 $x_0 = 65$ 代入回归方程：

$$\hat{y}_0 = 188.99 + 1.867 \times 65 = 310.345 \approx 310$$

(2) 区间预报（置信水平 $\gamma = 0.95$）：计算残差标准差 $\hat{\sigma} = \sqrt{Q/(n-2)} = \sqrt{506.08} \approx 22.496$。取 $\alpha = 0.05$，查表得 $t_{0.025}(8) = 2.306$。预报误差半径 δ：

$$\delta = t_{0.025}(8) \cdot \hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

$$\delta = 2.306 \times 22.496 \times \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(65-67.5)^2}{1096.5}}$$

$$\delta \approx 51.87 \times \sqrt{1.1057} \approx 51.87 \times 1.0515 \approx 54.5$$

预测区间为 $[\hat{y}_0 - \delta, \hat{y}_0 + \delta]$，即 $[310 - 54.5, 310 + 54.5]$，约为 $[256, 365]$。

答： 当硬度为 65 时，抗张强度预报值为 310，在 $\alpha = 0.05$ 下的预报区间为 $[256, 365]$。

第八章 正交试验法

习题十九 正交试验法

1. 安排试验方案:

(1) 某轴承厂为了提高轴承圈退火的质量，因素位级表如下:

因　素	上升温度 (°C)	保温时间 (h)	出炉温度 (°C)
位级 1	800	6	400
位级 2	820	8	500

解: 选用标准 $L_4(2^3)$ 正交表如下:

试验号	1 (上升温度)	2 (保温时间)	3 (出炉温度)
1	1	1	1
2	2	1	2
3	**1**	**2**	**2**
4	2	2	1

查表可知，第 3 号试验的位级组合为 $(1,2,2)$。对应因素位级表得:

第 3 号试验条件为: 上升温度 800°**C，保温时间** 8**h，出炉温度** 500°**C**。

---

(2) 高州县良种繁殖场为了提高水稻产量，因素位级表如下:

因　素	品　种	密度 (万棵/亩)	施肥量 (斤/亩)
位级 1	窄叶青 8 号	30	纯氮 10
位级 2	南二矮 5 号	25	纯氮 5
位级 3	珍珠矮 11 号	20	纯氮 15

解: 选用标准 $L_9(3^4)$ 正交表如下:

试验号	1 (品种)	2 (密度)	3 (施肥量)	4 (空列)
1	1	1	3	2
2	2	1	1	1
3	3	1	2	3
4	1	2	2	1
5	2	2	3	3
6	3	2	1	2
7	1	3	1	3
8	**2**	**3**	**2**	2
9	3	3	3	1

查表可知，第 8 号试验的位级组合为 $(2,3,2)$。对应因素位级表得：

第 8 号试验条件为：品种为南二矮 5 号，密度 20 万棵/亩，施肥量纯氮 5 斤/亩。

---

(3) 北京化工厂摸索废水沉淀法处理条件，因素位级表如下：

因　素	pH 值	凝聚剂	沉淀剂	$CaCl_2$	废水浓度
位级 1	7∼8	加	NaOH	不加	稀
位级 2	8∼9	不加	Na_2CO_3	加	浓
位级 3	9∼10				
位级 4	10∼11				

解： 选用标准 $L_8(4^1 \times 2^4)$ 正交表如下：

试验号	1 (pH)	2 (凝聚剂)	3 (沉淀剂)	4 ($CaCl_2$)	5 (浓度)
1	1	1	2	2	1
2	3	2	2	1	1
3	2	2	2	2	2
4	4	1	2	1	2
5	1	2	1	1	2
6	**3**	**1**	**1**	**2**	**2**
7	2	1	1	1	1
8	4	2	1	2	1

查表可知，第 6 号试验的位级组合为 $(3,1,1,2,2)$。对应因素位级表得：

第 6 号试验条件为：pH 9∼10，加凝聚剂，用 NaOH 作沉淀剂，加 $CaCl_2$**，废水浓度为浓**。

---

2. 试验结果的计算：

现将第 1 题的三组试验结果列在下表中：

试验号	(1) 硬度合格率 (%)	(2) 亩产 (斤)	(3) 综合评分
1	100	839	45
2	45	761	70
3	85	688	55
4	70	734	65
5		774	85
6		754	95
7		843	90
8		676	100
9		726	

说明：此处 (3) 中的综合评分，是根据八个试验去锌去镉的效果综合给出的，实用中常利用综合评分的方法来处理多指标的试验。在每个小题所列出的试验方案右边，填上试验结果，通过表格化计算，求出可能好的配合及各因素的极差 R。

解：

(1) 轴承圈退火质量分析（指标越大越好）：根据题 1(1) 所用的标准 $L_4(2^3)$ 表进行极差分析：

- **因素 A (上升温度)：** $K_1 = 100 + 85 = 185, K_2 = 45 + 70 = 115$；均值 $k_1 = 92.5, k_2 = 57.5$。极差 $R_A = 35$。优选位级 1。
- **因素 B (保温时间)：** $K_1 = 100 + 45 = 145, K_2 = 85 + 70 = 155$；均值 $k_1 = 72.5, k_2 = 77.5$。极差 $R_B = 5$。优选位级 2。
- **因素 C (出炉温度)：** $K_1 = 100+70 = 170, K_2 = 45+85 = 130$；均值 $k_1 = 85, k_2 = 65$。极差 $R_C = 20$。优选位级 1。

可能好的配合：上升温度 800°C，保温时间 8h，出炉温度 400°C。

---

(2) 水稻产量分析（指标越大越好）： 根据题 1(2) 所用的标准 $L_9(3^4)$ 表进行极差分析：

- **因素 A (品种)：** $K_1 = 2416, K_2 = 2211, K_3 = 2168$；均值 $k_1 = 805.3, k_2 = 737, k_3 = 722.7$。极差 $R_A = 82.6$。优选位级 1。
- **因素 B (密度)：** $K_1 = 2288, K_2 = 2262, K_3 = 2245$；均值 $k_1 = 762.7, k_2 = 754, k_3 = 748.3$。极差 $R_B = 14.4$。优选位级 1。
- **因素 C (施肥量)：** $K_1 = 2358, K_2 = 2098, K_3 = 2339$；均值 $k_1 = 786, k_2 = 699.3, k_3 = 779.7$。极差 $R_C = 86.7$。优选位级 1。

可能好的配合： 品种为窄叶青 8 号，插植密度 30 万棵/亩，施肥量 10 斤/亩纯氮。

---

(3) 废水处理综合评分分析（指标越大越好）： 根据题 1(3) 所用的标准 $L_8(4^1 \times 2^4)$ 表进行极差分析：

- **因素 A (pH)：** 计算各水平均值，$k_1 = 65, k_2 = 72.5, k_3 = 82.5, k_4 = 82.5$。优选位级 3 或 4。
- **因素 B (凝聚剂)：** 计算均值 $k_1 = 73.75, k_2 = 77.5$。优选位级 2（不加）。
- **因素 C (沉淀剂)：** 计算均值 $k_1 = 93.75, k_2 = 57.5$。极差最大，优选位级 1 (NaOH)。
- **因素 D ($CaCl_2$)：** 极差较小，根据实际生产需要选定位级 1（不加）。

可能好的配合： pH 9∼10，用 NaOH 做沉淀剂，凝聚剂和 $CaCl_2$ 都不用加。

第九章　统计决策与贝叶斯统计大意

习题二十　统计决策与贝叶斯统计大意

1. 设 X 是离散或连续型随机变量，$E(X^2)$ 存在。试证明：为了使 $E(X-a)^2$ (a 是实数) 达到最小值，必须且只需 $a=E(X)$。

证明： 记 $f(a)=E(X-a)^2$。由于 $E(X^2)$ 存在，则 $E(X)$ 也一定存在。利用期望的线性性质对表达式进行展开：

$$\begin{aligned} E(X-a)^2 &= E[X^2-2aX+a^2] \\ &= E(X^2)-2aE(X)+a^2 \end{aligned}$$

这是一个关于 a 的二次函数。为了求其最小值，对 a 求导：

$$\frac{df(a)}{da}=-2E(X)+2a$$

令导数为 0，得：

$$-2E(X)+2a=0 \implies a=E(X)$$

由于二次项系数为正，该驻点即为最小值点。此外，也可以通过配方法证明：

$$E(X-a)^2=E[(X-E(X))+(E(X)-a)]^2=D(X)+(E(X)-a)^2$$

显然当 $a=E(X)$ 时，上式达到最小值 $D(X)$。

---

2. 设 X 是离散型或连续型随机变量，$E(X)$ 存在。试证明：为了使 $E|X-a|$ (a 是实数) 达到最小值，必须且只需 a 是 X 的中位数。

证明： 以连续型为例，设 X 的概率密度为 $p(x)$。记 $g(a)=E|X-a|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|p(x)dx$。将绝对值拆开：

$$g(a)=\int_{-\infty}^{a}(a-x)p(x)dx+\int_{a}^{+\infty}(x-a)p(x)dx$$

根据变上限积分求导公式（莱布尼茨准则）：

$$g'(a)=\int_{-\infty}^{a}p(x)dx+(a-a)p(a)-\left[\int_{a}^{+\infty}p(x)dx-(a-a)p(a)\right]$$

$$g'(a)=P(X\le a)-P(X>a)=P(X\le a)-[1-P(X\le a)]=2P(X\le a)-1$$

令 $g'(a)=0$，得：

$$2P(X\le a)-1=0 \implies P(X\le a)=\frac{1}{2}$$

根据中位数的定义，使平均绝对偏差最小的 a 即为 X 的中位数。

---

3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自 Poisson 分布的样本，$P(X_i=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ ($\lambda>0,k=0,1,\ldots$)。设 λ 的先验分布是参数为 α,β 的 Γ 分布，损失函数是 $(\lambda-a)^2$，试求 λ 的贝叶斯估计。

解： (1) 先验分布 $\pi(\lambda)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\lambda},\lambda>0$。(2) 似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^n\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$。(3) 后验分布 $\pi(\lambda\mid x)\propto\pi(\lambda)L(\lambda)\propto\lambda^{\alpha+\sum x_i-1}\mathrm{e}^{-(\beta+n)\lambda}$。可见后验分布仍为 Γ 分布，其参数为 $\alpha'=\alpha+\sum_{i=1}^n x_i,\beta'=\beta+n$。在平方损失函数下，贝叶斯估计是后验分布的期望值：

$$\hat{\lambda}_B=E(\lambda\mid x_1,\ldots,x_n)=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha+\sum_{i=1}^n X_i}{\beta+n}$$

---

4. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自伯努利分布的样本 ($n\ge 3$)，$P(X_i=1)=\theta,P(X_i=0)=1-\theta$。设 θ 的先验分布是 $(0,1)$ 上的均匀分布，损失函数是 $L(\theta,a)=\left[\frac{\theta-a}{\theta(1-\theta)}\right]^2$。试求 θ 的贝叶斯估计。

解： 设 $k=\sum_{i=1}^n x_i$。先验分布 $\pi(\theta)=1$，似然函数 $L(\theta)=\theta^k(1-\theta)^{n-k}$。损失函数可记为 $w(\theta)(\theta-a)^2$，其中 $w(\theta)=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}$。加权平方损失下的贝叶斯估计公式为 $\hat{\theta}_B=\frac{E[\theta w(\theta)|x]}{E[w(\theta)|x]}$。

$$\hat{\theta}_B=\frac{\int_0^1\theta\cdot\theta^{-2}(1-\theta)^{-2}\cdot\theta^k(1-\theta)^{n-k}d\theta}{\int_0^1\theta^{-2}(1-\theta)^{-2}\cdot\theta^k(1-\theta)^{n-k}d\theta}=\frac{\int_0^1\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k-2}d\theta}{\int_0^1\theta^{k-2}(1-\theta)^{n-k-2}d\theta}$$

利用 Beta 积分公式 $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$：

$$\hat{\theta}_B=\frac{B(k,n-k-1)}{B(k-1,n-k-1)}=\frac{\frac{\Gamma(k)\Gamma(n-k-1)}{\Gamma(n-1)}}{\frac{\Gamma(k-1)\Gamma(n-k-1)}{\Gamma(n-2)}}=\frac{(k-1)!}{(n-2)!}\cdot\frac{(n-3)!}{(k-2)!}=\frac{k-1}{n-2}$$

故贝叶斯估计量为 $\hat{\theta}_B=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-1}{n-2}$。

---

5. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\theta,1)$ 的样本，θ 是未知参数。给定检验问题：

$$H_1:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_2:\theta>\theta_0$$

用 a_i 表示"接受假设 H_i"($i = 1, 2$)。设损失函数如下:

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} 0, & \theta \le \theta_0 \\ k(\theta - \theta_0), & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$L(\theta, a_2) = \begin{cases} k|\theta - \theta_0|, & \theta \le \theta_0 \\ 0, & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

其中 k 是正常数。若 θ 的先验分布是 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$,试求出贝叶斯检验。

解: 贝叶斯检验的核心是比较接受 H_1 和 H_2 时的后验期望损失,选择损失较小的一个。

第一步:求 θ 的后验分布

已知样本 $X \sim N(\theta, 1)$,先验 $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$。根据正态分布共轭先验的性质,后验分布 $\theta \mid x$ 仍为正态分布:

$$\theta \mid X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu^*, \sigma^{*2})$$

其中后验均值为:

$$\mu^* = \frac{\mu_0 + n\sigma_0^2 \bar{X}}{1 + n\sigma_0^2}, \quad \left(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

第二步:计算后验期望损失

接受 H_1 的后验损失 $r(a_1 \mid x) = E[L(\theta, a_1) \mid x] = \int_{\theta_0}^{\infty} k(\theta - \theta_0) p(\theta \mid x) d\theta$。接受 H_2 的后验损失 $r(a_2 \mid x) = E[L(\theta, a_2) \mid x] = \int_{-\infty}^{\theta_0} k(\theta_0 - \theta) p(\theta \mid x) d\theta$。

第三步:确定决策准则

比较这两个损失的大小。设 $h(\mu^*) = r(a_1 \mid x) - r(a_2 \mid x)$,通过代数化简可以证明:

$$r(a_1 \mid x) - r(a_2 \mid x) = k(\mu^* - \theta_0)$$

因此:

- 当 $\mu^* > \theta_0$ 时,$r(a_1 \mid x) > r(a_2 \mid x)$,应选择 a_2,即接受 H_2;
- 当 $\mu^* < \theta_0$ 时,$r(a_1 \mid x) < r(a_2 \mid x)$,应选择 a_1,即接受 H_1;
- 当 $\mu^* = \theta_0$ 时,接受 H_1 或 H_2 均可。

结论: 贝叶斯检验规则为:当 $\mu^* > \theta_0$ 时接受 H_2;当 $\mu^* < \theta_0$ 时接受 H_1。其中 $\mu^* = (\mu_0 + n\sigma_0^2 \bar{X})/(1 + n\sigma_0^2)$。

6. 地质学家要根据某地区的地层结构来判断该地是否蕴藏石油。地层结构总是 0, 1 两种状态之一；用 θ_0 表示该地无油，θ_1 表示该地有油。已知下列概率分布规律（其中 x 表示地层结构的状态，θ 表示石油的状态）：

θ \ x	0	1
θ_0 (无油)	0.6	0.4
θ_1 (有油)	0.3	0.7

它表示如果该地区无油，那么地层结构呈现状态 0 的概率为 0.6，呈现状态 1 的概率为 0.4；如果该地区蕴藏石油，那么地层结构呈现状态 0 的概率为 0.3，呈现状态 1 的概率为 0.7。土地所有者希望根据分析决定行动：a_1（自己投资钻探）、a_2（出卖所有权）、a_3（开辟旅游点）。其损失函数 $L(\theta, a)$ 为：

θ \ a	a_1 (投资钻探)	a_2 (出卖所有权)	a_3 (开辟旅游点)
θ_0 (无油)	12	1	6
θ_1 (有油)	0	7	5

试写出可供选择的全部决策函数及其风险。求出 minimax 决策。若 θ 的先验分布是 $\xi(\theta_0) = 0.2, \xi(\theta_1) = 0.8$，试求出贝叶斯决策。

解： 决策函数 $\delta(x)$ 将观察到的状态 x 映射到行动 a。由于 x 有 2 种状态，a 有 3 种选择，共有 $3^2 = 9$ 种决策函数。

第一步：列出决策函数及其对应的风险 $R(\theta, \delta)$

风险函数计算公式为：$R(\theta, \delta) = L(\theta, \delta(0))P(x = 0 \mid \theta) + L(\theta, \delta(1))P(x = 1 \mid \theta)$。

δ(决策)		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9
x	0	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
状态	1	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
风险	$R(\theta_0, \delta)$	12	7.6	9.6	5.4	1	3.0	8.4	4.0	6
$R(\theta, \delta)$	$R(\theta_1, \delta)$	0	4.9	3.5	2.1	7	5.6	1.5	6.4	5

第二步：求 minimax 决策

计算每个决策的最大风险 $\max_\theta R(\theta, \delta)$：

- 各决策最大风险：$12, 7.6, 9.6, \mathbf{5.4}, 7, 5.6, 8.4, 6.4, 6$。
- 其中最小值出现在 δ_4。

结论： δ_4 是 minimax 决策（即当 $x=0$ 时选 a_2，当 $x=1$ 时选 a_1）。

第三步：求贝叶斯决策

已知先验分布 $\xi(\theta_0)=0.2$ 且 $\xi(\theta_1)=0.8$。贝叶斯决策是指使平均风险（后验风险）$r(\xi,\delta)=0.2R(\theta_0,\delta)+0.8R(\theta_1,\delta)$ 达到最小的决策。

我们逐一计算 9 种决策函数的平均风险：

- $r(\xi,\delta_1)=0.2(12)+0.8(0)=\mathbf{2.40}$
- $r(\xi,\delta_2)=0.2(7.6)+0.8(4.9)=1.52+3.92=5.44$
- $r(\xi,\delta_3)=0.2(9.6)+0.8(3.5)=1.92+2.80=4.72$
- $r(\xi,\delta_4)=0.2(5.4)+0.8(2.1)=1.08+1.68=2.76$
- $r(\xi,\delta_5)=0.2(1.0)+0.8(7.0)=0.20+5.60=5.80$
- $r(\xi,\delta_6)=0.2(3.0)+0.8(5.6)=0.60+4.48=5.08$
- $r(\xi,\delta_7)=0.2(8.4)+0.8(1.5)=1.68+1.20=2.88$
- $r(\xi,\delta_8)=0.2(4.0)+0.8(6.4)=0.80+5.12=5.92$
- $r(\xi,\delta_9)=0.2(6.0)+0.8(5.0)=1.20+4.00=5.20$

结论： 通过比较可知，最小平均风险为 2.40，对应的决策函数是 δ_1。