

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1-p & 0 & p & \\ & & 1-p & 0 & p \\ & & & 1-p & 0 & p \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

**例 3.2(带吸收壁的随机游动)** 质点在点集  $\{0, 1, 2, \dots\}$  上游动, 转移规律是: 若在某时刻处于位置  $i > 0$ , 则下一步以概率  $p$  转移到  $i+1$ , 以概率  $1-p$  转移到  $i-1$ , 若某时刻处于位置 0, 则下一步仍停留在 0. 如果开始时质点位于  $i_0$  ( $i_0 > 0$ ), 在时刻  $n$  时位置是  $X_n$ , 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  是一马氏链, 其一步转移概率矩阵是

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1-p & 0 & p & 0 & \\ 0 & 1-p & 0 & p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

**例 3.3(Ehrenfest 模型)** 我们考察带有  $m+1$  个状态(记以  $0, 1, \dots, m$ )的系统的转移问题. 其转移规律是: 若系统在某时刻处于状态  $i$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ), 则下一步以概率  $\frac{i}{m}$  转移到状态  $i-1$ , 以概率  $1 - \frac{i}{m}$  转移到状态  $i+1$ ; 若某时刻处于状态 0, 则下一步转移到状态 1; 若某时间处于状态  $m$ , 则下一步转移到状态  $m-1$ .

设开始时系统的状态是  $X_0$ , 时刻  $n$  的状态为  $X_n$ , 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  是马氏链. 这个链的状态空间是有限集.

这个链有一个有意义的物理解释. 在统计力学中, Ehrenfest 氏考虑了一个假想的实验: 有  $m$  个质点分布在两个容器  $A, B$  中, 在时刻  $n$ , 随机地选择一个质点并把它从一个容器移到另一个容器中去, 系统的状态由  $A$  中质点个数来决定. 假定在某一时刻, 确实有  $k$  个质点在容器  $A$  中, 在下一步, 系统的状态将变为  $k-1$  或

$k+1$ , 这要看是  $A$  中还是  $B$  中的质点被选取而定, 相应的概率是  $\frac{k}{m}$  和  $\frac{m-k}{m}$ . 这样, 上述模型描述了 Ehrenfest 实验.

马氏链论里研究的问题很多, 我们简略地谈一谈下列三个重要问题.

1° 状态的性质怎样? 是否有些状态经常出现?

2° 转移概率  $p_{ij}^{(n)}$  当  $n \rightarrow \infty$  时是否有极限? 若有极限, 极限是多少?

3° 设马氏链  $(X_n, n \geq 0)$  的一步转移概率矩阵  $P = (p_{ij}, i \in E, j \in E)$  ( $E$  是状态空间), 什么条件下各  $X_n$  有相同的概率分布? 并问什么条件下, 序列  $f(X_0), f(X_1), \dots, f(X_n), \dots$  符合强大数定律, 即  $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \{f(X_i) - E[f(X_i)]\} = 0\right) = 1$ ? (这里  $f(x)$  是任何有界函数).

为了回答上述问题, 先给出两个重要定义.

**定义 3.3** 称状态  $i$  是马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的常返状态, 若  $P\{\text{存在 } n > s \text{ 使 } X_n = i \mid X_s = i\} = 1$ . 否则的话, 叫非常返状态.

换句话说, 如果从状态  $i$  出发, 将来还会出现  $i$  的概率是 1, 则称  $i$  为常返的.

**定义 3.4** 称马氏链  $(X_n, n \geq 0)$  是不可约的, 若  $i, j$  是任二状态, 必有  $P(\text{存在 } n > s \text{ 使 } X_n = j \mid X_s = i) > 0$ .

可以证明:

① 如果  $i$  是常返状态, 则从  $i$  出发将来无穷多次出现  $i$  的概率等于 1.

② 状态  $i$  常返的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ .

③ 如果  $i$  是常返的, 又存在  $n > s$  使

$$P\{X_n = j \mid X_s = i\} > 0$$

则  $j$  也是常返的.

关于  $n$  步转移概率  $p_{ij}^{(n)}$ , 有下列事实:

①  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p_{ij}^{(n)} = \pi_{ij}$  永远存在.

② 如果状态空间  $E$  是有限集, 存在  $n_0$  使

$$p_{ij}^{(n_0)} > 0 \quad (\text{对一切 } i, j \in E)$$

则  $\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j$  存在 ( $\pi_j$  与  $i$  无关), 而且  $\{\pi_j, j \in E\}$  是下列方程组

$$x_j = \sum_{i \in E} x_i p_{ij} \quad (\text{一切 } j \in E)$$

的满足条件  $x_j > 0, \sum_{j \in E} x_j = 1$  的惟一解.

关于上述问题 3°, 可以证明当且仅当  $X_0$  的概率分布  $\{p_i, i \in E\}$  ( $p_i \triangleq P(X_0 = i)$ ) 满足

$$p_i = \sum_{k \in E} p_k p_{ki} \quad (\text{一切 } i \in E) \quad (3.4)$$

时每个  $X_n$  与  $X_0$  有相同的概率分布. 如果 (3.4) 成立而且马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  是不可约的, 则可以证明强大数律成立, 即有

$$P \left\{ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) = E[f(X_0)] \right\} = 1,$$

其中  $f(x)$  是任何有界函数.

上述各项结论的证明均可在 [4] 中找到. [4] 中对马氏链有系统而深入的论述.

**例 3.4** (两状态的马氏链)  $E = \{0, 1\}$ , 一步转移概率矩阵是

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

其中  $a, b$  已知,  $0 < a < 1, 0 < b < 1$ .

我们来求出  $p_{ij}^{(n)}$ , 并研究  $n \rightarrow \infty$  时  $p_{ij}^{(n)}$  的渐近性质.

用数学归纳法可以证明:

$$(p_{ij}^{(n)}) = P^n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n \end{pmatrix}$$

(也可用母函数法直接求出  $P^n$  的这个表达式)。

因为  $0 < a+b < 2$ , 故  $-1 < 1-a-b < 1$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-a-b)^n = 0$ , 于是得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = \frac{b}{a+b}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{01}^{(n)} = \frac{a}{a+b}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{10}^{(n)} = \frac{b}{a+b}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)} = \frac{a}{a+b}$$

两状态的马氏链可用来描写一个传输数字 0 和 1 的通讯系统. 每个数字传输时必须通过若干个步骤, 通过每一步时数字不改变的概率是  $p$ , 于是一步转移概率矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \quad (q = 1-p)$$

设  $X_0$  是进入系统的数字,  $X_n$  是这个通讯系统在第  $n$  步发出的数字.  $\{X_n, n \geq 0\}$  便是以上述  $P$  为转移矩阵的马氏链.

利用前面的结果知

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{pmatrix}$$

例如, 若  $p = \frac{2}{3}$  则  $P\{X_2 = 1 | X_0 = 1\} = p_{11}^{(2)} = \frac{5}{9}$ ,  $P\{X_3 = 1 | X_0 = 1\} = p_{11}^{(3)} = \frac{14}{27}$ . 这表示通讯系统两步后正确传输出“1”的概率是  $\frac{5}{9}$ , 三步后正确传输出“1”的概率是  $\frac{14}{27}$ .

## §4 平稳过程

### 1. 定义

在许多科学技术(特别在无线电电子技术和自动控制)领域中,我们常常遇到一类与前面所述的马尔可夫过程不一样的随机过程:它的过去情况对未来有着强烈的不可忽视的影响.

以下恒设参数集  $T$  具有性质:若  $s, t \in T$ , 则  $s + t \in T$ .

**定义 4.1** 称随机过程  $\{X_t, t \in T\}$  是严平稳的, 若对任何  $n \geq 1, t_1, \dots, t_n, \tau \in T$  及实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均成立:

$$\begin{aligned} & P\{X_{t_1+\tau} \leq x_1, X_{t_2+\tau} \leq x_2, \dots, X_{t_n+\tau} \leq x_n\} \\ &= P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

换句话说,如果有限维分布函数随着时间的推移不改变,则叫做严平稳过程.

一般说来,当产生随机现象的一切主要条件可视为不随时间的推移而改变时,常常出现严平稳过程.例如电子管中自由电子的不规则运动(即热运动)而引起的电路中电压的波动过程,就可看作是严平稳过程.

显然,如果  $\{X_t, t \in T\}$  是严平稳过程,则  $X_t$  的分布函数  $F_t(x)$  与  $t$  无关,  $(X_{t_1}, X_{t_2})$  的分布函数只依赖于  $t_2 - t_1$ , 由此可以推知  $E(X_t) \equiv C$  (常数), 协方差  $\text{cov}(X_t, X_{t+\tau})$  只依赖于  $\tau$  (当期望和协方差存在时).

**定义 4.2** 称随机过程  $\{X_t, t \in T\}$ <sup>①</sup> 为宽平稳过程, 如果它满足:

(1)  $E|X_t|^2$  存在且有限 ( $t \in T$ )

---

① 我们假定  $X_t$  取复数值. 若  $X = U + iV$ , 其中  $U, V$  是实值随机变量, 规定  $EX = E(U) + iE(V)$  以下恒用  $\bar{z}$  表示  $z$  的共轭复数.

$$(2) E(X_t) \equiv C(\text{常数}) \quad (t \in T)$$

$$(3) E[(X_t - C)(X_{t+\tau} - C)] \text{只依赖于 } \tau, \text{与 } t \text{ 无关.}$$

**定义 4.3** 称函数

$$B(\tau) = E\{[X_t - E(X_t)][X_{t+\tau} - E(X_{t+\tau})]\}$$

为宽平稳过程的自协方差函数,也称相关函数.

宽平稳过程也叫弱平稳过程.显然,如果 $\{X_t, t \in T\}$ 是一个二阶矩存在(即 $E|X_t|^2$ 存在且有限)的严平稳过程,则它一定是宽平稳过程.

由于宽平稳性只是对过程的一、二阶矩加条件,并没有对一切有限维分布都加条件,因而在工程上有更多应用.工程技术界常常使用的名词“平稳过程”,一般就是指宽平稳过程.

**例 4.1** 设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是互不相关的实值随机变量列(即对任何 $n \neq n'$ ,  $X_n$ 与 $X_{n'}$ 的协方差等于0), $E(X_n) \equiv 0$ ,  $D(X_n) \equiv \sigma^2 > 0$ .则 $\{X_n\}$ 是宽平稳过程(序列).

实际上,

$$E(X_n X_{n+\tau}) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

在物理上和工程技术中常把这种随机变量列称为“白噪声”.在随机干扰理论中,“白噪声”干扰考察较多,因为它存在于多种波动现象中.标准差是1(即 $\sigma = 1$ )的白噪声称为标准白噪声.

**例 4.2**(通讯系统中的加密序列) 设 $\{\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots\}$ 是相互独立的实值随机变量列(即其中任何有限个是相互独立的),诸 $\xi_i$ 服从相同的分布(分布函数是 $F(x)$ ),诸 $\eta_i$ 也服从相同的分布(分布函数是 $G(x)$ ),又 $E(\xi_i) \equiv 0, E(\eta_i) \equiv 0, D(\xi_i) \equiv \sigma^2 > 0, D(\eta_i) \equiv \sigma^2 > 0$ ,设

$$X_n = \xi_n + \eta_n + (\xi_n - \eta_n)(-1)^n \quad (n \geq 0)$$

则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是宽平稳过程(序列).

实际上,

$$E(X_n) = E(\xi_n) + E(\eta_n) + [E(\xi_n) - E(\eta_n)](-1)^n = 0$$

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= E[(\xi_n + \eta_n)^2 + (\xi_n - \eta_n)^2 + \\ &\quad 2(-1)^n(\xi_n + \eta_n)(\xi_n - \eta_n)] \\ &= E[2\xi_n^2 + 2\eta_n^2 + 2(-1)^n(\xi_n^2 - \eta_n^2)] = 4\sigma^2 \end{aligned}$$

若  $\tau > 0$ , 利用独立性易知  $E(X_n X_{n+\tau}) = 0$ . 所以  $\{X_n, n \geq 0\}$  是宽平稳过程.

值得注意的是,  $X_{2n} = 2\xi_{2n}$ ,  $X_{2n+1} = 2\eta_{2n+1}$  ( $n \geq 0$ ), 只要  $F(x)$  与  $G(x)$  不同, 则  $X_{2n}$  与  $X_{2n+1}$  的分布不同, 从而  $\{X_n, n \geq 0\}$  不是严平稳过程.

#### 例 4.3 (随机相位的余弦波)

$$X_t = A \cos(\lambda t + \theta) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其中  $\lambda$  是常数,  $A$  是正数,  $\theta$  为服从  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量.

可以验证,

$$E(X_t) = 0$$

$$E(X_t X_{t+\tau}) = \frac{A^2}{2} \cos \lambda \tau$$

故  $\{X_t, -\infty < t < +\infty\}$  是宽平稳过程.

#### 例 4.4 (具有随机振幅的波)

$$X_t = \xi \cos 2\pi t + \eta \sin 2\pi t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其中  $\xi, \eta$  是二随机变量, 满足:  $E(\xi) = E(\eta) = 0$ ,  $E(\xi^2) = E(\eta^2) = 1$ ,  $E(\xi\eta) = 0$ .

可以验证,  $\{X_t, -\infty < t < +\infty\}$  是一宽平稳过程. 请读者自己计算一下.

服从  $n$  维正态分布的随机向量叫做高斯随机向量, 也叫正态随机向量.  $n$  维正态分布的概念在第四章已经介绍了.

**定义 4.4** 称  $\{X_t, t \in T\}$  为高斯过程, 如果对  $T$  中任何  $n$  个不相同的数  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  是高斯随机向量.

**定理 4.1** 设  $\{X_t, t \in T\}$  是高斯过程, 则为了它是严平稳的, 必须而且只须它是宽平稳的.

**证** 必要性不足道. 现证充分性. 设高斯过程  $\{X_t, t \in T\}$  是宽平稳的, 我们来证

$$\xi = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \text{ 与 } \eta = (X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$$

有相同的概率分布.

设  $\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ ,  $\eta \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ , 其中  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ,  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\sigma}_{ij})$ ,  $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j})$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij} = \text{cov}(X_{t_i+\tau}, X_{t_j+\tau})$ .

由于  $E(X_t) \equiv \text{常数 } C$ , 知  $\mu = \tilde{\mu}$ , 又  $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = \text{cov}(X_{t_i+\tau}, X_{t_j+\tau}) = \tilde{\sigma}_{ij}$ , 故  $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ . 所以  $\xi, \eta$  服从相同的概率分布, 从而  $\{X_t, t \in T\}$  是严平稳的. 证毕.

由此可见, 对于高斯过程(这在实际工作中是最常见的)来讲, 严平稳性与宽平稳性等价.

## 2. 相关函数(自协方差函数)

从相关函数  $B(\tau)$  的定义, 易知有下列性质:

$$1^\circ |B(\tau)| \leq B(0);$$

$$2^\circ B(-\tau) = \overline{B(\tau)}.$$

相关函数  $B(\tau)$  刻画  $X_t$  与  $X_{t+\tau}$  的(线性)相关程度, 研究相关函数的特性与计算相关函数的数值是宽平稳过程论里最基本的内容.

**例 4.5(随机振荡迭加)** 设

$$X_t = \sum_{k=1}^n \eta_k e^{i(w_k t + \lambda_k)} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其中  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  相互独立,  $\eta_k \sim N(0, \sigma_k^2)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 诸  $\lambda_k$  都服从  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布.

可以证明,  $\{X_t, t \in (-\infty, +\infty)\}$  是宽平稳过程,

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{-i\omega_k \tau}$$

以下设  $T = (-\infty, +\infty)$  或  $[0, +\infty)$ .

**定义 4.5** 称随机过程  $\{X_t, t \in T\}$  是均方连续的, 如果对任何  $t \in T$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow 0} E |X_{t+k} - X_t|^2 = 0$$

可以证明, 若  $\{X_t, t \in T\}$  是宽平稳过程, 则它均方连续的充要条件是: 相关函数  $B(\tau)$  是连续的.

**定理 4.2** 设  $B(\tau)$  是均方连续的宽平稳过程的相关函数, 则存在惟一的右连续不减函数  $F(\lambda)$ , 适合:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) &= 0 \\ B(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda) \textcircled{1} \quad (\text{一切 } \tau) \end{aligned} \quad (4.2)$$

证明较长, 从略.

(4.2) 式叫做相关函数的谱展式, 其中  $F(\lambda)$  叫做过程的谱函数. 如果存在非负函数  $f(\lambda)$  使

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\lambda) d\lambda$$

则称  $f(\lambda)$  为过程的谱密度 (工程上叫功率谱密度).

什么时候存在谱密度呢? 经过数学研究知道, 如果  $\int_{-\infty}^{+\infty} |B(\tau)| d\tau$  存在且有限, 则就有谱密度  $f(x)$ , 而且

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau x} B(\tau) d\tau$$

对于任意宽平稳列  $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , 也可以证明有谱展式:

$$B(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$$

---

① 这里是斯蒂尔切斯(Stieltjes)积分. 不了解这种积分的读者可略去本定理.

其中  $F(\lambda)$  是不减的右连续函数,  $F(-\pi) = 0$ .

还可以证明, 如果级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |B(n)|$  收敛, 则存在非负函数  $f(\lambda)$  (谱密度) 使

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(\lambda) d\lambda \quad (\text{一切 } x \in [-\pi, \pi])$$

而且

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\lambda} B(k)$$

谱函数和谱密度都是有物理意义的, 在工程上应用较多.

最后, 我们要讨论宽平稳过程的一个统计问题. 设  $\{X_t, -\infty < t < +\infty\}$  是一个宽平稳过程, 怎样根据一段时间上的观测数据去估计  $E(X_t)$  和相关函数  $B(\tau)$  呢?

在工程实践上常用下列办法. 设  $\{x_t, M \leq t \leq N\}$  是观测到的数据 (一个“实现”的一段), 如果  $N - M$  足够大, 可用

$$C = \frac{1}{N - M} \int_M^N x_t dt$$

作为  $E(X_t)$  的估计值. 用

$$\frac{1}{N - \tau - M} \int_M^{N-\tau} x_t \bar{x}_{t+\tau} dt - |C|^2$$

作为  $B(\tau)$  ( $\tau \geq 0$ ) 的估计值.

这个办法是有理论根据的. 数学上可以证明, 在一定条件下, 成立:

$$\lim_{N-M \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{N-M} \int_M^N X_t dt - E(X_0) \right|^2 = 0$$

$$\lim_{N-M \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{N-M} \int_M^N X_t \bar{X}_{t+\tau} dt - E(X_0 \bar{X}_\tau) \right|^2 = 0$$

适合这两个关系式的宽平稳过程叫做遍历的. 我们在实际工

作中碰到的许多过程是遍历的.

## \* §5 时间序列的统计分析简介

随机序列常用来刻画随时间而变的随机现象,因而随机序列也叫时间序列.(宽)平稳时间序列简称为(宽)平稳序列.

我们重点介绍宽平稳序列的统计分析,因为它是研究一般时间序列统计分析的基础.

在宽平稳时间序列的应用中,最重要的是所谓的  $AR(p)$  模型( $p$  阶自回归模型).

**定义 5.1** 称实值随机序列  $\{x_t; t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  为  $AR(p)$  ( $p$  是正整数),若它满足下列方程:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t, \quad (5.1)$$

这里  $\theta_0 > 0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  ( $\varphi_p \neq 0$ ) 都是实数,  $\{\varepsilon_t\}$  是标准白噪声(即  $E(\varepsilon_t) \equiv 0, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$  ( $t \neq s$ ),  $E(\varepsilon_t^2) = 1$ ), 而且多项式  $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$  的根均在单位圆外(即对一切复数  $z$ , 只要  $|z| \leq 1$ , 必有  $\Phi(z) \neq 0$ ).

从(5.1)看出,  $x_t$  的值主要依赖于前  $p$  个时刻的值  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ , 这就是“自回归”一词的来源.

**例 5.1** 设  $\{x_t\}$  是满足下列方程的宽平稳列

$$x_t = \frac{5}{6} x_{t-1} - \frac{1}{6} x_{t-2} + \varepsilon_t \quad (t=0, \pm 1, \dots)$$

其中  $\{\varepsilon_t\}$  是独立同分布随机变量列, 共同分布是  $N(0, 1)$ .

不难看出,  $\theta_0 = 1 > 0, \Phi(z) = 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2 = \frac{1}{6}(z-3)(z-2)$ . 可见  $\Phi(z)$  的二根均在单位圆外, 故  $\{x_t\}$  是  $AR(2)$ .

定义 5.1 中的多项式  $\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j z^j$  叫做  $AR(p)$  的特征多项式.

由于  $\Phi(z)$  在单位圆上无根, 故有  $\gamma > 1$ , 对一切  $|z| < \gamma$  有

$$\Psi(z) \triangleq \frac{1}{\Phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (5.2)$$

由此知  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$  收敛.

对于  $AR(p)$ , 我们可以证明下列重要结论.

1° 为了实值随机序列  $\{x_t: t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  是满足(5.1)的  $AR(p)$ , 必须且只需  $x_t$  有表达式

$$x_t = \theta_0 \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j} \quad (5.3)$$

这里  $c_j$  由(5.2)确定,  $\{\epsilon_t\}$  是标准白噪声.

2° 任给定实数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  及  $\theta_0, \varphi_p \neq 0, \theta_0 > 0$ , 若多项式  $\Phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \varphi_k z^k$  的根均在单位圆外, 则对任何标准白噪声  $\{\epsilon_t\}$ , 一定存在  $AR(p)$  模型  $\{x_t\}$  满足(5.1), 而且这样的  $\{x_t\}$  是宽平稳列,  $E(x_t) \equiv 0$ , 相关函数是  $B(\tau) = \theta_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+\tau}$  ( $c_j$  的定义见(5.2)).

3° 设  $\{x_t\}$  是  $AR(p)$  (满足方程(5.1)者), 则其相关函数  $B(\tau)$  和模型参数  $\theta_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  满足下列关系式

$$\sum_{k=1}^p B(k) \varphi_k = B(0) - \theta_0^2 \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^p B(n-k) \varphi_k = B(n) \quad (\text{一切 } n \geq 1) \quad (5.5)$$

4° 设  $\{x_t\}$  是  $AR(p)$  (满足方程(5.1)者), 则对任何正整数  $\tau$ , 根据  $t$  时刻及以前的观测值  $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$  可得到  $x_{t+\tau}$  的最佳线性预测值为

$$\hat{x}_{t+\tau} = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j^{(\tau)} x_{t-j} \quad (5.6)$$

其中

---

① 这里级数收敛的概率为 1, (5.3) 的意义是  $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_0 \sum_{j=0}^n c_j \epsilon_{t-j} = x_t\right) = 1$ .

② 这里“最佳线性预测”的含义是: 观测值的线性函数中均方误差最小者, 即有

$E|\hat{x}_{t+\tau} - x_{t+\tau}|^2 = \min\{E(\xi_t - x_{t+\tau})^2: \xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j x_{t-j}, \lambda_j \text{ 是实数, } \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 \text{ 收敛}\}.$

$$\begin{pmatrix} \beta_0^{(\tau)} \\ \beta_1^{(\tau)} \\ \beta_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ \beta_{p-2}^{(\tau)} \\ \beta_{p-1}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varphi_2 & -\varphi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\varphi_{p-2} & -\varphi_{p-3} & -\varphi_{p-4} & -\varphi_{p-5} & \cdots & 1 & 0 \\ -\varphi_{p-1} & -\varphi_{p-2} & -\varphi_{p-3} & -\varphi_{p-4} & \cdots & -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\tau \\ C_{\tau+1} \\ C_{\tau+2} \\ \vdots \\ C_{\tau+p-2} \\ C_{\tau+p-1} \end{pmatrix},$$

这里

$$c_s = \begin{cases} 1 & , s = 0 \\ \sum_{l=1}^s \varphi_l c_{s-l} & , s = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{l=1}^p \varphi_l c_{s-l} & , s > p \end{cases}$$

5° 设  $\{x_t\}$  是任何宽平稳列, 其相关函数的  $p+1$  个值  $B(0), B(1), \dots, B(p)$  已知, 且矩阵

$$R_p = \begin{pmatrix} B(0) & B(1) & \cdots & B(p) \\ B(1) & B(0) & \cdots & B(p-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B(p) & B(p-1) & \cdots & B(0) \end{pmatrix}$$

是正定的. 设  $\theta_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  由下列方程所确定.

$$\theta_0^2 = B(0) - \sum_{k=1}^p B(k) \varphi_k$$

$$R_{p-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(p) \end{pmatrix}$$

则多项式  $\Phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \varphi_k z^k$  的根在单位圆外, 而且由方程

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t$$

( $\{\varepsilon_t\}$  是独立同分布随机变量列, 共同分布是  $N(0, 1)$ ) 所确定的  $AR(p) \{y_t\}$  的相关函数  $\tilde{B}(\tau)$  满足  $\tilde{B}(k) = B(k)$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ).

以上各项的证明都比较长, 有兴趣的读者可参阅 P. Brockwell 和 R. Davis

合著的《时间序列的理论与方法》(第二版,田铮译,高等教育出版社与 Springer 出版社,2001),在上述理论的基础上,我们可对宽平稳时间序列的统计分析进行初步讨论.

设  $(x_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  是宽平稳列,基本统计问题是,若有一段观测值  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , 如何对  $\{x_t\}$  给出一个合理的近似的数学模型,以便进行预测或推断?

首先找  $(x_t, t=0, \pm 1, \dots)$  的相关函数  $B(\tau)$  的估计量

$$\hat{B}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x}),$$

$$(\tau=0, 1, \dots, m), \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, m \leq M, M \text{ 是 } \sqrt{N} \text{ 的 } 2 \text{ 至 } 3 \text{ 倍}.$$

解方程组 (参看(5.4)–(5.5))

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \hat{B}(k) \varphi_k = \hat{B}(0) - \theta_0^2 & (\theta_0 > 0) \\ \sum_{k=1}^m \hat{B}(n-k) \varphi_k = \hat{B}(n) & (n=1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (5.7)$$

得到  $\theta_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ . 由此可得到由差分方程

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_m y_{t-m} + \theta_0 \epsilon_t$$

( $\{\epsilon_t\}$  是独立同分布随机变量列, 共同分布是  $N(0, 1)$ ) 确定的  $AR(m) \{y_t\}$ .

这个  $\{y_t\}$  便是原过程  $\{x_t\}$  的近似. 用  $\{y_t\}$  代替  $(x_t)$  可进行预测或推断.

这里有一个问题:  $m$  应取多大? 这是自回归模型的定阶问题. 许多实际工作表明, 采用下列 AIC 准则常常比较接近实际.

对每个  $m (1 \leq m \leq M)$ , 从方程(5.7)可得到  $\theta_0$  的值, 记为  $\hat{\theta}_0(m)$ . 令

$$AIC(m) = \ln(\hat{\theta}_0(m))^2 + \frac{2m}{N}$$

设  $p$  是  $AIC(m)$  的最小值点, 即

$$AIC(p) = \min_{0 \leq m \leq M} AIC(m)$$

(这样的  $p$  若不止一个, 就取最小者). 我们就采用  $AR(p)$ .

以上是用  $AR(p)$  来近似一般的宽平稳列.  $AR(p)$  是比较简单而重要的模型, 还有许多稍为复杂的模型. 如 ARMA 模型也可利用来作为宽平稳列的近似.

在实际工作中常遇到非平稳的时间序列.一般情形下,时间序列 $\{x_t\}$ 由三部分迭加而成:

$$x_t = m(t) + p(t) + y(t), \quad (5.8)$$

其中  $m(t)$  是趋势项,  $p(t)$  是含有周期性的项(例如反映季节性影响),  $y(t)$  是平稳序列(纯随机性影响).

如何把(5.8)中的三项分离出来是时间序列统计分析的中心问题.在许多问题里,  $m(t) + p(t) = s(t)$  是一个非随机的函数,如何从 $\{x_t\}$ 的一段观测数据中估计出  $s(t)$  就是有名的时间序列的滤波问题.现代对于时间序列的统计分析已有大量的研究成果,请参看上面提到的 Brockwell 和 Davis 的书及其他著作.

## 附录一 排列与组合

本附录介绍排列组合的基本知识,供学习概率统计而又不熟悉排列组合知识的读者参考.排列组合的知识不仅在学习概率统计时必须具备,而且在日常生活和实际工作中也会直接用到.

### § 1 排 列

排列有两种,可重复排列与非重复排列.我们从一些简单的例子入手,逐步引入排列的一般概念.

**例 1** 北京市的电话号码是八位数字,(这里是“八位数字”,不是“八位数”,允许从“0”开始),例如北京大学的电话号码是 62751201,问:北京市的电话号码最多有多少个?

显然,一个八位数字就是这样的有顺序的一排数: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ ,其中  $a_1$  是十个数码  $0, 1, 2, \dots, 9$  中的一个, $a_2, a_3, \dots, a_8$  分别都是这十个数码中的一个.这里次序很要紧,例如 62751201 与 26751201 是不同的.这种有次序的一排东西就叫做一个排列.一个电话号码就是由  $0, 1, \dots, 9$  中一些数构成的一个排列.八位数字的电话号码一共有多少种呢?换句话说,排列  $a_1 a_2 \cdots a_8$  一共有多少种?因为每个  $a_i$  有十种可能,不难知道,一共有  $10 \times 10 \times \cdots \times 10$  (共 8 个 10 相乘)  $= 10^8$  种可能.于是,北京市的电话号码最多有一亿个.

**例 2** 我国的邮政编码是 6 位数字,例如北京大学是 100871,问:最多有多少个不同的邮政编码?

回答很简单.全部六位数字共有  $10^6$  个,故至多有 100 万个不

同的邮政编码.

这些例子都是非常简单的,我们要注意的是,刚才谈的“排列”都是允许重复的,例如电话号码 62751201 里“2”就重复出现了. 邮政编码 100871 里“1”,“0”都重复出现了. 这种允许重复的排列叫做可重复排列. 现在问:

从  $n$  个各不相同的东西  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  中任取一个,然后又放回去,再任取一个,然后又放回去,这样下去共进行  $m$  次,得到不同的序列共有多少种?

显然  $m$  次有放回的抽取就得到由  $\{a_i\}$  组成的可重复的排列.

这种排列共有  $\overbrace{n \times n \times \dots \times n}^{m \text{ 个}} = n^m$  种.

这就是计算可重复排列的公式.

**例 3** 三艘远洋货轮中派两艘外出,要考虑先后次序,问共有几种派法?

这个问题的答案直接写出是不难的. 设以  $a, b, c$  代表三艘货轮,则共有六种派法,即

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

写出这个答案时也遵从从一个确定的法则,首先考虑第一艘货轮,共有三种可能,即  $a$  或  $b$  或  $c$ ,当派出一艘之后,剩下来只有两艘可供第二次派遣,例如派出  $a$  后,第二次只能再派  $b$  或  $c$ ,因此总的派法为  $3 \times 2 = 6$  种.

这个问题的一般提法是:从  $n$  个各不相同的东西里,任取  $m$  个排成一行 ( $1 \leq m \leq n$ ). (注意,没有东西重复!)问:这样的排列共有多少种.

我们称这个问题为非重复的排列问题,简称排列问题. 排列总数记为  $P_n^m$ .

我们来导出  $P_n^m$  的计算公式. 注意  $m$  是不超过  $n$  的正整数. 每个排列都是这样有次序的一排东西:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_m$$

先看  $m = 1$  的情形,此时每个排列就只有一个东西.显然共有  $n$  个可能.故  $P_n^1 = n$ .

再看  $m = 2$  的情形.此时排列是有次序的两个东西构成.首先考虑第一个位置上的  $a_1$  有多少种可能,显然有  $n$  种可能,选定一种后,第二个位置就只有  $n - 1$  种可能(因为不能与第一个位置上的相重).于是  $a_1 a_2$  共有  $n(n - 1)$  种可能,故  $P_n^2 = n(n - 1)$ .

再看  $m = 3$  的情形.此时排列是有次序的三个东西  $a_1 a_2 a_3$  构成, $a_1$  有  $n$  种可能,选定  $a_1$  后  $a_2$  有  $n - 1$  种可能(因为不能与第一个位置上的相重), $a_1, a_2$  选定后, $a_3$  有  $n - 2$  种可能(因不能与第一个位置及第二个位置上的相重).于是排列  $a_1 a_2 a_3$  共有  $n(n - 1)(n - 2)$  种.故  $P_n^3 = n(n - 1)(n - 2)$ .

按同样的推理知  $P_n^m = n(n - 1) \cdots (n - m + 1)$ . 这是计算排列的一般公式.注意一共有  $m$  个因子.

特别  $m = n$  时,得  $P_n^n = n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1$ . 这个乘积在数学里常出现,给它一个名字,叫做  $n$  的阶乘,记作  $n!$ ,即  $n! = n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1$ . 以后为了方便规定  $0! = 1$ .

$$P_n^m = \frac{n!}{(n - m)!} \quad (1 \leq m \leq n)$$

**例 4** 北京市的电话号码是八位数字.问:数字均不相同的电话号码共有多少种?

用刚才的公式,我们知共有  $P_{10}^8 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1814400$  种.

**习题 1** 四间房子分配给四个单位使用,每个单位一间,共有多少种分配方案?

## § 2 组 合

我们还是从简单的例子出发.

**例 5** 从三艘远洋货轮中派两艘外出,不分先后,有多少种派法?

如果用  $a, b, c$  代表这三艘货轮,那么派出去的货轮可以是  $a, b$  或者  $b, c$  或者  $c, a$  共三种.

这里不讲派出去的次序,若讲次序便是前面讲过的六种.

**例 6** 某男子乒乓球队运动员四人,派其中三人参加团体赛,问:有多少种派法?

设这四个运动员为  $A, B, C, D$ .任派三人,不同派法是  $A, B, C; B, C, D; C, D, A; D, A, B$ .

一共是四种.我们这里不讲出场次序.如果讲究出场次序,那是排列问题,共有  $P_4^3 = 24$  种.

不讲次序的问题就是所谓“组合问题”,一般提法是:从  $n$  个各不相同的东西里,任取  $m$  个出来(不管顺序),问共有多少种取法?

每一种取法称为一个组合.不同的组合总数通常用符号  $C_n^m$  表示(或者用符号  $\binom{n}{m}$  表示).

我们特别强调一下,排列和组合的不同处在于:从  $n$  个东西里取出  $m$  个后在排列中还要考虑这  $m$  个的次序,在组合中则不考虑次序.

现在来导出  $C_n^m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) 的计算公式.

设  $n$  个东西是  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .先看  $m = 1$  的情形.任取其中一个,显然有  $n$  种取法.因为一个东西无所谓次序,排列和组合的种数相同,也就是  $C_n^1 = P_n^1 = n$ .

现在研究  $m = 2$  的情形.从  $n$  个东西里任取两个,每种取法(组合)可以排成两种次序.例如取到  $a$  和  $b$ ,则可以排成  $ab$  和  $ba$ .可见排列数比组合数多一倍.故  $P_n^2 = 2 \cdot C_n^2$ .于是

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

现在考虑  $m=3$  的情形,即求从  $n$  个东西里取出 3 个的组合数.设某一种取法中的三个东西是  $a, b, c$ . 对应这种取法(组合)如果还要排列则  $abc, acb, bca, bac, cba, cab$  都是不同的,这里一共有  $P_3^3$  种可能.所有这些排列是由一种组合变来的,所以排列数是组合数的  $P_3^3$  倍,即 6 倍.也就是  $P_n^3 = P_3^3 \cdot C_n^3$ . 所以

$$C_n^3 = \frac{P_n^3}{P_3^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

根据完全相同的道理,从  $n$  个东西中任取  $m$  个出来(例如  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ),对这  $m$  个东西进行各种排列共得  $P_m^m$  种不同的结果.所以排列的总数是组合总数的  $P_m^m$  倍,即  $P_n^m = P_m^m \cdot C_n^m$ , 故

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

显然

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1 \leq m \leq n)$$

在数学里,常规定  $C_n^0 = 1$ . 这样在上面的公式里,  $m=0$  也行.

**例 7** 有五个人在一块劳动,需要三人铲土,两人推车,有几种劳动力分配方案?

因为不是推车便是铲土,故只要定下推车的人,分配方案就定了.易知分配方案的总数

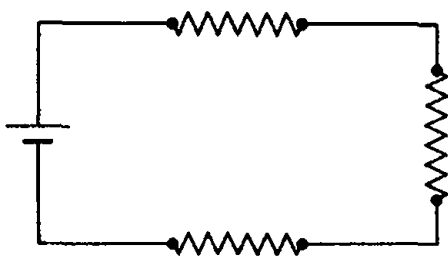
$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

**习题 1** 机场上停有十架飞机,马上要调八架起飞去执行任务,问有多少种调法?

**习题 2** 某电子回路由电源串联三个电阻而成,见下图.一共有六个焊接点,如果六个焊接点中有一个脱焊,整个电路就不通了.问如果已知电路不通了,那么脱焊的可能情况有多少种?

现在考虑较复杂的问题.(初学者可以不管它).

**例 8** 要把 10 个篮球分配给甲、乙、丙三个班,每班至少一



球,问:共有多少种不同的分配方案?

更一般地,有  $n$  个东西(外表一样,不能分辨)要分配给  $r$  个单位(单位 1,单位 2,  $\dots$ , 单位  $r$ ),每个单位至少一个东西,问:共有多少种不同的分配方案? ( $n \geq r \geq 2$ ).

答案是:共有  $C_{n-1}^{r-1}$  种不同的分配方案. 这是如何推算出来的呢? 我们可以这样设想:把这  $n$  个东西(例如  $n$  个球)排成一行,任何两个相邻的东西都有一个间隔,这样共有  $n-1$  个间隔. 见下图(用  $\bigcirc$  表示东西,  $\wedge$  表示间隔)

$$\bigcirc \wedge \bigcirc \wedge \bigcirc \wedge \bigcirc \wedge \dots \wedge \bigcirc$$

在这  $n-1$  个间隔中任意取定  $r-1$  个间隔各放入一个小纸条. 从左到右共有  $r-1$  个小纸条,把  $n$  个东西分成  $r$  组:第 1 个小纸条的左边的东西分配给单位 1,第 1 个小纸条与第 2 个小纸条之间的东西分配给单位 2,  $\dots$ , 第  $i-1$  个小纸条与第  $i$  个小纸条之间的东西分配给单位  $i$  ( $i=2, \dots, r-1$ ), 第  $r-1$  个小纸条右边的东西分配给单位  $r$ . 这样,任选定  $r-1$  个间隔放入小纸条后对应一种分配方案;反之,任给定一个分配方案后,先把单位 1 的东西排成一行然后放上一个纸条,再接着把单位 2 的东西一一排上,再放上一个纸条,  $\dots$ , 最后把单位  $r$  的东西排上. 由此看出,有多少种分配方案就等于问:从  $n-1$  个间隔中任选  $r-1$  个间隔,共有多少种不同的选法? 所以,共有  $C_{n-1}^{r-1}$  种不同的分配方案.

由此知,例 8 中的篮球分配问题共有  $C_9^2 = 36$  种不同的分配方案.

在上面的问题里,有一项规定:各单位至少分得一个东西. 若

此项规定取消(即允许有的单位得不到任何东西),共有多少种分配方案? 我们指出,这个问题可转化为上面讨论过的问题.可以这样设想,设有  $n+r$  个同样的东西要分配给  $r$  个单位(单位 1,单位 2, ..., 单位  $r$ ). 首先各单位均分上一个东西,然后把剩下的  $n$  个东西再分给  $r$  个单位(再分时不要求各单位均分到东西). 由此可见,  $n$  个东西分配给  $r$  个单位的一个分配方案对应  $n+r$  个东西分配给  $r$  个单位(但每个单位至少一个东西)的一个分配方案,反之亦然. 故前者的分配方案总数与后者的分配方案总数相等. 根据上面的讨论,后者的分配方案的总数是  $C_{n+r-1}^{r-1}$ , 所以  $n$  个东西分配给  $r$  个不同单位共有  $C_{n+r-1}^{r-1}$  种分配方案.

## 附录二 关于几种常用的统计量

在这个附录里,我们要给出几种常用统计量的概率分布的数学推导.这是区间估计和假设检验的数学基础.由于需要用到较多的数学知识,只关心应用的读者记住正文里的结论就可以了,这个附录可以不看.

### §1 正交矩阵与正态分布

我们在代数学里学过正交矩阵,回忆一下定义.  
设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个方阵,如果  $A'A$  等于单位矩阵,则称  $A$  是( $n$  阶)正交矩阵.换句话说,如果:

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

则  $A$  就叫正交矩阵.

正交矩阵有许多特性,现在列举几点如下

1° 设  $A$  是正交矩阵,则  $AA'$  是单位矩阵.换句话说,从(1)可推得:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}a_{lj} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2)$$

2° 设  $A$  是正交矩阵,则  $A'$  也是正交矩阵,且  $|A| = 1$  或  $-1$

( $|A|$ 表示  $A$  的行列式).

3° 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶正交矩阵.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是任意  $n$  个数, 又

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3)$$

这些事实都是很基本的, 代数学里都讲过, 我们这里不去一一证明了, 不过顺便指出, (3) 可由 (1) 直接推出. 实际上,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k,l} a_{ik} x_k a_{il} x_l \right) \\ &= \sum_{k,l} \left( \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{il} \right) x_k x_l = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 \right) x_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{aligned}$$

正交矩阵对于研究正态随机变量用处很大, 最突出的是有下列事实:

**定理 1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从  $N(0, \sigma^2)$ . 又  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶正交矩阵

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

则  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  也相互独立, 且都服从  $N(0, \sigma^2)$ .

**证** 因  $X_i$  的分布密度是  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x_i^2}$ , 故  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合分布密度是  $\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

任给定  $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$ , 令

$$D = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

这  $D$  是  $n$  维空间中的一个区域. 易知

$$\begin{aligned} P \{ a_1 < Y_1 < b_1, a_2 < Y_2 < b_2, \dots, a_n < Y_n < b_n \} \\ &= P \{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 取值属于 } D \} \\ &= \iint_D \cdots \int \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

作变数替换

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

于是

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} y_k \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

容易验证, 变数替换的雅可比式:

$$\begin{aligned} J \left( \frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{y_1, y_2, \dots, y_n} \right) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = |A'| \\ &= 1 \text{ 或 } -1 \end{aligned}$$

又  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k^2$ , 故

$$\begin{aligned} &\iint_D \cdots \int \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n y_k^2} \\ &\quad \cdot \left| J \left( \frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{y_1, y_2, \dots, y_n} \right) \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n y_k^2} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}} dy_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}} dy_2 \cdots \\
&\quad \cdot \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_n^2}{2\sigma^2}} dy_n \\
&= P\{a_1 < Y_1 < b_1\} \cdot P\{a_2 < Y_2 < b_2\} \cdots P\{a_n < Y_n < b_n\}
\end{aligned}$$

这就表明  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立. 且不难看出, 都服从  $N(0, \sigma^2)$ . 定理 1 证毕.

**定理 2** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立. 且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶正交矩阵,

$$Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立. 且

$$Y_i \sim N\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k, \sigma^2\right) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

**证** 令  $Z_i = X_i - \mu_i$ , 则  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  相互独立, 都服从  $N(0, \sigma^2)$ . 根据定理 1 知  $\sum_{k=1}^n a_{1k} Z_k, \sum_{k=1}^n a_{2k} Z_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} Z_k$  相互独立.

且

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k \sim N(0, \sigma^2)$$

但

$$\begin{aligned}
Y_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (X_k - \mu_k) + \sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k + \sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k
\end{aligned}$$

可见  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立, 且  $Y_i \sim N\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k, \sigma^2\right) (i=1, 2, \dots, n)$ , 定理 2 证毕.

这个定理 2 在后面的 § 3 中要用到.

## § 2 关于 $\chi^2$ 分布

正文里介绍过  $\chi^2$  分布的定义, 现在重复一遍: 称随机变量服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布, 如果它的分布密度函数  $p(u)$  是这样的:

$$p(u) = k_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\chi^2$  分布的直观意义与重要性在于下列事实:

**定理 3** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从  $N(0, 1)$ , 则  $\xi$

$= \sum_{i=1}^n X_i^2$  服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布

**证** 令  $F(u) = P(\xi \leq u)$ , 这就是  $\xi$  的分布函数. 我们只须证明  $u \neq 0$  时,  $F'(u) = k_n(u)$  就行了<sup>①</sup>.

显然, 当  $u \leq 0$  时  $F(u) = 0$ . 故对一切  $u < 0$ , 均有  $F'(u) = k_n(u)$ . 以下设  $u > 0$ , 我们来研究  $F(u)$ . 由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联

合分布密度是  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$ . 于是

$$\begin{aligned} F(u) &= P\left\{\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq u\right\} \\ &= \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \textcircled{2} \\ &= F(u+h) - F(u) \end{aligned}$$

① 实际上, 当  $n \geq 3$  时, 对一切  $u$  都成立:  $F'(u) = k_n(u)$ .

② 本节里, 记号  $\int$  表示  $n$  重积分.

$$= \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (h > 0)$$

故

$$\begin{aligned} & F(u+h) - F(u) \\ & \leq \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u}{2}} \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & F(u+h) - F(u) \geq \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u+h}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u+h}{2}} \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

总之：

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \frac{e^{-\frac{u+h}{2}}}{h} \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & \leq \frac{F(u+h) - F(u)}{h} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{h} \int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

令

$$S(x) = \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq x} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (x > 0)$$

则

$$\int_{u < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u+h} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = S(u+h) - S(u)$$

于是有

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u+h}{2}} \cdot \frac{S(u+h) - S(u)}{h} \\ & \leq \frac{F(u+h) - F(u)}{h} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u}{2}} \cdot \frac{S(u+h) - S(u)}{h} \end{aligned}$$

下面来计算  $S(x)$ . 作变数替换  $x_i = y_i \sqrt{x}$ , 于是

$$\begin{aligned} dx_i &= \sqrt{x} dy_i \\ S(x) &= \int_{\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 1} (\sqrt{x})^n dy_1 dy_2 \cdots dy_n = x^{\frac{n}{2}} \cdot C_n \end{aligned}$$

这里  $C_n = \int_{\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 1} dy_1 dy_2 \cdots dy_n$  是一个仅与  $n$  有关的常数.

于是  $S'(x) = \frac{n}{2} C_n x^{\frac{n}{2}-1}$ . 由此可见

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{u}{2}} S'(u) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n C_n \frac{n}{2} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \end{aligned}$$

用类似的办法可知

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n C_n \frac{n}{2} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

总之

$$F'(u) = B_n u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

$B_n$  究竟等于多少呢? 我们可以用下法来确定.

根据上面的讨论,  $\xi$  的密度函数是

$$p(u) = \begin{cases} B_n u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

从  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1$ , 知  $\int_0^{+\infty} B_n u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du = 1$ . 但

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du &= \int_0^{+\infty} (2x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} 2 dx \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx = 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

故

$$B_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

总之,  $\xi$  的密度函数是

$$k_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

这就表明:  $\xi$  服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布. 证毕.

补充一句, 如果使用  $n$  维球坐标变换, 定理的证明可以简单一些, 但没有这里的证明初等.

系 若  $\xi$  服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布, 则  $E(\xi) = n$ .

顺便介绍一个记号, 如果  $\xi$  服从  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布, 则记作  $\xi \sim \chi^2(n)$ .

**定理 4** 设  $\xi$  与  $\eta$  相互独立, 且  $\xi \sim \chi^2(n_1)$ ,  $\eta \sim \chi^2(n_2)$ . 则  $\xi + \eta \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ .

**证** 记  $\xi$  的分布密度为  $p_1(x)$ ,  $\eta$  的分布密度为  $p_2(x)$ . 我们知道  $\xi + \eta$  的分布密度  $p(x)$  可以这样来求(见第四章),

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(u) p_2(x-u) du$$

现在

$$p_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} u^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

$$p_2(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} u^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

以下设  $x > 0$ , 于是

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} u^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} (x-u)^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{x-u}{2}} du \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{n_1}{2}-1} (x-u)^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} du \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{n_1}{2}-1} (x-u)^{\frac{n_2}{2}-1} du \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 v^{\frac{n_1}{2}-1} (1-v)^{\frac{n_2}{2}-1} dv \end{aligned}$$

但从  $\Gamma$  函数的定义容易证明下列恒等式:

$$\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p, q \text{ 正整数})$$

故

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0)$$

当  $x \leq 0$  时,  $P\{\xi + \eta \leq x\} = 0$ , 故  $p(x) = 0$  (一切  $x \leq 0$ ).

总之,  $\xi + \eta$  的分布密度  $p(x)$  可写成这样的形式:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

由此可见,  $\xi + \eta$  服从  $n_1 + n_2$  个自由度的  $\chi^2$  分布, 定理 4 证毕.

**定理 5** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 都服从  $N(0, 1)$ . 则有下列三条结论:

$$(1) \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right);$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) \bar{X} \text{ 与 } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 相互独立.}$$

**证** 我们同时证明这三条结论的正确性. 取正交矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} & \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} & \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} & \frac{-2}{\sqrt{2 \cdot 3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdots & \frac{-(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}} \end{bmatrix}$$

利用这矩阵作  $X_i$  的变换如下:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}(X_1 - X_2)$$

$$Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}(X_1 + X_2 - 2X_3)$$

.....

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} - (n-1)X_n)$$

根据本附录的定理 1, 知  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$  相互独立, 且都服从  $N(0, 1)$ .

特别  $Y_1 \sim N(0, 1)$ . 于是  $\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ . 这就是定理

5 的第一条结论.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \sum_{i=1}^n Y_i^2, \text{ 则} \\ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1\right)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2 \end{aligned}$$

可见  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $n-1$  个自由度的  $\chi^2$  分布.

由于  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$  相互独立, 而

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_1, \quad \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2$$

当然有  $\bar{X}$  与  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  独立. 这就是所要证的第三条结论. 证毕.

系 设  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  相互独立, 都服从  $N(\mu, \sigma^2)$ . 则有下列三条结论:

$$(1) \bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right);$$

$$(2) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) \bar{X} \text{ 与 } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 相互独立.}$$

证 令  $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 再利用定理 5 即得.

定理 5 及其系很重要, 下面就要用到.

### § 3 关于 $t$ 分布

正文里已介绍过  $t$  分布, 再说一遍.

**定义** 称随机变量  $\xi$  服从  $n$  个自由度的  $t$  分布, 如果它的分布密度函数  $p(u)$  是这样的:

$$p(u) = t_n(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (5)$$

$t$  分布的直观意义与重要性在于下列事实:

**定理 6** 设  $\xi$  与  $\eta$  相互独立, 而且  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $\eta \sim \chi^2(n)$ , 则

$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \text{ 服从 } n \text{ 个自由度的 } t \text{ 分布.}$$

证 记  $F(u) = P\{\zeta \leq u\}$ . 只须证明  $F'(u) = t_n(u)$  就行了. 我们来计算  $F(u)$ .

$\xi$  的分布密度是  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $\eta$  的分布密度是  $k_n(x)$ ,  $\xi, \eta$  的联

合分布密度是  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot k_n(v)$ . 于是

$$\begin{aligned}
& P\left\{\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \leq x\right\} \\
&= P\left\{\frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right\} \\
&= \iint_{\frac{u}{\sqrt{v}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} k_n(v) du dv \\
&= \iint_{\frac{u}{\sqrt{v}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} du dv
\end{aligned}$$

作变数替换:

$$\begin{aligned}
u &= t\sqrt{s} \\
v &= s
\end{aligned}$$

易看出

$$J\left(\frac{u, v}{s, t}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{t}{2\sqrt{s}} & \sqrt{s} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{s}$$

于是

$$\begin{aligned}
P\left\{\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \leq x\right\} &= \iint_{\substack{t \leq \frac{x}{\sqrt{n}} \\ s > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)s} \left| J\left(\frac{u, v}{s, t}\right) \right| ds dt \\
&= \iint_{\substack{t \leq \frac{x}{\sqrt{n}} \\ s > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot s^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)s} ds dt \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)s} \frac{1}{2} ds
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} z^{\frac{n-1}{2}} e^{-(1+t^2)z} dz$$

但

$$\int_0^{+\infty} z^{\frac{n-1}{2}} e^{-(1+t^2)z} dz = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\left( \because \int_0^{+\infty} w^{p-1} e^{-\lambda w} dw = \frac{\Gamma(p)}{\lambda^p} \quad (\lambda > 0, p > 0) \right)$$

故

$$P\left\{\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} du$$

可见  $\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$  的分布密度是  $\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

这就是说,  $\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$  服从  $n$  个自由度的  $t$  分布. 定理 6 证毕.

作为应用, 我们来证明下列重要结论.

**定理 7** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 相互独立, 且都服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$  服从  $n-1$  个自由度的  $t$  分布. 这里

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

证 令

$$\xi = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, \eta = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

根据定理 5 的系, 我们知道  $\xi$  与  $\eta$  相互独立 (因为  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立), 而且  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $\eta \sim \chi^2(n-1)$ .

再根据定理 6 知  $\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n-1}}}$  遵从  $n-1$  个自由度的  $t$  分布.

但

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n-1}}}$$

故  $T$  遵从  $n-1$  个自由度的  $t$  分布. 定理 7 证毕.

## § 4 关于 $F$ 分布

先复习一下定义.

定义 称随机变量  $\xi$  服从自由度为  $n_1, n_2$  的  $F$  分布, 如果它的分布密度  $p(u)$  有下列形式:

$$p(u) = f_{n_1, n_2}(u) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} u^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}u\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

这里  $n_1, n_2$  是两个正整数.  $n_1$  叫第一自由度,  $n_2$  叫第二自由度.

$F$  分布的直观意义与重要性在于下列事实:

**定理 8** 设  $\xi$  与  $\eta$  相互独立, 且  $\xi \sim \chi^2(n_1)$ ,  $\eta \sim \chi^2(n_2)$ , 则

$\zeta = \frac{\frac{\xi}{n_1}}{\frac{\eta}{n_2}}$  服从自由度为  $n_1, n_2$  的  $F$  分布.

**证** 令  $F(u) = P\{\zeta \leq u\}$ , 我们只需证明: 对一切  $u$ ,

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f_{n_1, n_2}(t) dt$$

我们来直接计算  $F(u)$ , 显然  $u \leq 0$  时,  $F(u) = 0$ . 从而对一切  $t < 0$ ,  $f_{n_1, n_2}(t) = 0$ . 当然  $F(u) = \int_{-\infty}^u f_{n_1, n_2}(t) dt$ . 下设  $u > 0$ . 注意  $\xi$  的分布密度是  $k_{n_1}(x)$ ,  $\eta$  的分布密度是  $k_{n_2}(y)$ , 故  $\xi, \eta$  的联合分布密度是  $k_{n_1}(x)k_{n_2}(y)$ . 于是

$$\begin{aligned} F(u) &= P\{\zeta \leq u\} = P\left\{\frac{\frac{\xi}{n_1}}{\frac{\eta}{n_2}} \leq u\right\} \\ &= P\left\{\frac{\xi}{\eta} \leq \frac{n_1}{n_2} u\right\} = \iint_{\left\{\frac{x}{y} \leq \frac{n_1}{n_2} u\right\}} k_{n_1}(x) k_{n_2}(y) dx dy \\ &= \iint_{\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y} \leq \frac{n_1}{n_2} u \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right\}} \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n_2}{2}-1} dx dy \end{aligned}$$

作变数替换:  $x = st, y = s$ . 易知雅可比式

$$J\left(\frac{x, y}{s, t}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -s$$

于是

$$\begin{aligned}
F(u) &= \iint_{\left\{ \begin{array}{l} 0 < t \leq \frac{n_1}{n_2} u \\ s > 0 \end{array} \right\}} \frac{e^{-\frac{s}{2}(1+t)} s^{\frac{n_1+n_2}{2}-2}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} t^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot \left| J\left(\frac{x, y}{s, t}\right) \right| ds dt \\
&= \iint_{\left\{ \begin{array}{l} 0 < t \leq \frac{n_1}{n_2} u \\ s > 0 \end{array} \right\}} \frac{e^{-\frac{s}{2}(1+t)}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} s^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} t^{\frac{n_1}{2}-1} ds dt \\
&= \int_0^{\frac{n_1}{n_2} u} \frac{t^{\frac{n_1}{2}-1}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} dt \int_0^\infty s^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+t)s} ds
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} s^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+t)s} ds &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \int_0^{+\infty} w^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-w} dw \\
&= 2^{\frac{n_1+n_2}{2}} (1+t)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) \quad (t > 0)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
F(u) &= \int_0^{\frac{n_1}{n_2} u} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} t^{\frac{n_1}{2}-1} (1+t)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dt \\
&= \int_0^u \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2} v\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{n_1}{n_2} v\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \frac{n_1}{n_2} dv \\
&= \int_0^u \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} v^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} v\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dv
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^u f_{n_1 n_2}(v) dv$$

这就表明,  $\zeta$  的分布密度是  $f_{n_1 n_2}(v)$ , 换句话说,  $\zeta$  服从自由度为  $n_1, n_2$  的  $F$  分布. 定理 8 证毕.

**定理 9** 设  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  这  $n_1 + n_2$  个随机变量相互独立, 且都服从  $N(\mu, \sigma^2)$ . 则

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}$$

服从自由度为  $n_1 - 1, n_2 - 1$  的  $F$  分布. ( $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$ )

**证** 令  $\xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \eta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$

我们知道  $\xi \sim \chi^2(n_1 - 1), \eta \sim \chi^2(n_2 - 1)$ , 现在来证明  $\xi$  与  $\eta$  相互独立. 这在直观上很明显. 数学推导可如下进行. 令

$$U_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, V_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$$

当然  $U_1, U_2, \dots, U_{n_1}, V_1, V_2, \dots, V_{n_2}$  相互独立, 且都服从  $N(0, 1)$ , 于是它们的联合分布密度

$$\begin{aligned} & p(u_1, u_2, \dots, u_{n_1}, v_1, v_2, \dots, v_{n_2}) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n_1 + n_2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n_1} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n_2} v_i^2 \right)} \end{aligned}$$

由于  $\xi = \sum_{i=1}^{n_1} (U_i - \bar{U})^2, \eta = \sum_{i=1}^{n_2} (V_i - \bar{V})^2$

$$\left[ \text{其中 } \bar{U} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} U_i, \bar{V} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} V_i \right]$$

于是

$$\begin{aligned}
& P(a < \xi < b, c < \eta < d) \\
&= \int \cdots \int_{\left\{ \begin{array}{l} a < \sum_{i=1}^{n_1} (u_i - \bar{u})^2 < b \\ c < \sum_{i=1}^{n_2} (v_i - \bar{v})^2 < d \end{array} \right\}} p(u_1, \cdots, u_{n_1}, v_1, \cdots, v_{n_2}) du_1 \cdots du_{n_1} dv_1 \cdots dv_{n_2} \\
&= \int \cdots \int_{\left\{ \begin{array}{l} a < \sum_{i=1}^{n_1} (u_i - \bar{u})^2 < b \\ c < \sum_{i=1}^{n_2} (v_i - \bar{v})^2 < d \end{array} \right\}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n_1} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} u_i^2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n_2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2} v_i^2} du_1 \cdots du_{n_1} dv_1 \cdots dv_{n_2} \\
&= \int \cdots \int_{\left\{ a < \sum_{i=1}^{n_1} (u_i - \bar{u})^2 < b \right\}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n_1} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} u_i^2} du_1 du_2 \cdots du_{n_1} \cdot \\
&\quad \int \cdots \int_{\left\{ c < \sum_{i=1}^{n_2} (v_i - \bar{v})^2 < d \right\}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n_2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2} v_i^2} dv_1 dv_2 \cdots dv_{n_2} \\
&= P \left\{ a < \sum_{i=1}^{n_1} (U_i - \bar{U})^2 < b \right\} \cdot P \left\{ c < \sum_{i=1}^{n_2} (V_i - \bar{V})^2 < d \right\} \\
&= P \{ a < \xi < b \} \cdot P \{ c < \eta < d \}
\end{aligned}$$

由于  $a, b, c, d$  是任意的, 这就证明了  $\xi$  与  $\eta$  是相互独立的.

再根据定理 8 知,  $\frac{\xi}{\frac{\eta}{n_2 - 1}}$  服从自由度为  $n_1 - 1, n_2 - 1$  的  $F$

分布. 也就是说,  $\zeta = \frac{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}$  服从自由度为  $n_1 - 1,$

$n_2 - 1$  的  $F$  分布. 定理 9 证毕.

附表 1 正态分布数值表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.00	0.500 0	1.42	0.922 20	2.35	0.9 <sup>2</sup> 0613
0.05	0.519 9	1.45	0.926 47	2.38	0.9 <sup>2</sup> 1344
0.10	0.539 8	1.48	0.930 6	2.40	0.9 <sup>2</sup> 1802
0.15	0.559 6	1.50	0.933 19	2.42	0.9 <sup>2</sup> 2240
0.20	0.579 3	1.55	0.939 43	2.45	0.9 <sup>2</sup> 2857
0.25	0.598 7	1.58	0.942 95	2.50	0.9 <sup>2</sup> 3790
0.30	0.617 9	1.60	0.945 20	2.55	0.9 <sup>2</sup> 4614
0.35	0.636 8	1.65	0.950 53	2.58	0.9 <sup>2</sup> 5060
0.40	0.655 4	1.68	0.953 52	2.60	0.9 <sup>2</sup> 5339
0.45	0.673 6	1.70	0.955 43	2.62	0.9 <sup>2</sup> 5604
0.50	0.691 5	1.75	0.959 94	2.65	0.9 <sup>2</sup> 5975
0.55	0.708 8	1.78	0.962 46	2.68	0.9 <sup>2</sup> 6319
0.60	0.725 7	1.80	0.964 07	2.70	0.9 <sup>2</sup> 6533
0.65	0.742 2	1.85	0.967 84	2.72	0.9 <sup>2</sup> 6736
0.70	0.758 0	1.88	0.969 95	2.75	0.9 <sup>2</sup> 7020
0.75	0.773 4	1.90	0.971 28	2.78	0.9 <sup>2</sup> 7282
0.80	0.788 1	1.95	0.974 41	2.80	0.9 <sup>2</sup> 7445
0.85	0.802 3	1.96	0.975 00	2.82	0.9 <sup>2</sup> 7599
0.90	0.815 9	2.00	0.977 25	2.85	0.9 <sup>2</sup> 7814
0.95	0.828 9	2.02	0.978 31	2.88	0.9 <sup>2</sup> 8012
1.00	0.841 3	2.05	0.979 82	2.90	0.9 <sup>2</sup> 8134
1.05	0.853 1	2.08	0.981 24	2.92	0.9 <sup>2</sup> 8250
1.10	0.864 3	2.10	0.982 14	2.95	0.9 <sup>2</sup> 8411
1.15	0.874 9	2.12	0.983 00	2.98	0.9 <sup>2</sup> 8559
1.20	0.884 9	2.15	0.984 22	3.00	0.9 <sup>2</sup> 8650
1.25	0.894 4	2.18	0.985 37	3.50	0.9 <sup>3</sup> 7674
1.28	0.899 7	2.20	0.986 10	4.00	0.9 <sup>4</sup> 6833
1.30	0.903 20	2.22	0.986 79	5.00	0.9 <sup>5</sup> 9713
1.32	0.906 58	2.25	0.987 78	6.00	0.9 <sup>8</sup> 9013
1.35	0.911 49	2.28	0.988 70		
1.38	0.916 21	2.30	0.989 28		
1.40	0.919 24	2.33	0.9 <sup>2</sup> 0097		

[注]:  $0.9^{a_1 a_2 a_3 a_4} \triangleq 0.\underbrace{99 \cdots 9}_{a_1 \uparrow} a_1 a_2 a_3 a_4$ .

附表 2  $t$  分布临界值表

$\lambda \backslash \alpha$ $n$	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
1	3.078	6.314	12.706	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	4.032	6.859
6	1.440	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	3.499	5.405
8	1.397	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	3.250	5.781
10	1.372	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.704	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.660	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.617	3.373
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.576	3.291

[注]  $n$ : 自由度,  $\lambda$ : 临界值,  $P\{|t| > \lambda\} = \alpha$ .

附表 3  $\chi^2$  分布临界值表

$\lambda$ $n$	$\alpha$	0.975	0.05	0.025	0.01
1		0.000 98	3.84	5.02	6.63
2		0.050 6	5.99	7.38	9.21
3		0.216	7.81	9.35	11.3
4		0.484	9.49	11.1	13.3
5		0.831	11.07	12.8	15.1
6		1.24	12.6	14.4	16.8
7		1.69	14.1	16.0	18.5
8		2.18	15.5	17.5	20.1
9		2.70	16.9	19.0	21.7
10		3.25	18.3	20.5	23.2
11		3.82	19.7	21.9	24.7
12		4.40	21.0	23.3	26.2
13		5.01	22.4	24.7	27.7
14		5.63	23.7	26.1	29.1
15		6.26	25.0	27.5	30.6
16		6.91	26.3	28.8	32.0
17		7.56	27.6	30.2	33.4
18		8.23	28.9	31.5	34.8
19		8.91	30.1	32.9	36.2
20		9.59	31.4	34.2	37.6
21		10.3	32.7	35.5	38.9
22		11.0	33.9	36.8	40.3
23		11.7	35.2	38.1	41.6
24		12.4	36.4	39.4	43.0
25		13.1	37.7	40.6	44.3
26		13.8	38.9	41.9	45.6
27		14.6	40.1	43.2	47.0
28		15.3	41.3	44.5	48.3
29		16.0	42.6	45.7	49.6
30		16.8	43.8	47.0	50.9

[注]  $n$ : 自由度,  $\lambda$ : 临界值,  $P\{\chi^2 > \lambda\} = \alpha$ .

附表 4  $F$  分布临界值表 ( $\alpha = 0.05$ )

$\begin{array}{c} n_1 \\ \lambda \\ n_2 \end{array}$		1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	$\infty$
1		161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	243.9	249.1	254.3
2		18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
3		10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.74	8.64	8.53
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.91	5.77	5.63
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.68	4.53	4.36
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.00	3.84	3.67
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.57	3.41	3.23
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.28	3.12	2.93
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.07	2.90	2.71
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.91	2.74	2.54
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.79	2.61	2.40
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.69	2.51	2.30
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.60	2.42	2.21
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.53	2.35	2.13
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.48	2.29	2.07
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.42	2.24	2.01
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.38	2.19	1.96

18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.20	2.01	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.09	1.89	1.60
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.83	1.61	1.24
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.75	1.52	1.00

[注] 表中  $n_1$  是第一自由度(分子的自由度);

$n_2$  是第二自由度(分母的自由度);

$\lambda$  是临界值,  $P\{F > \lambda\} = \alpha = 0.05$ .

附表 5  $F$  分布临界值表 ( $\alpha = 0.025$ )

$\begin{array}{c} n_1 \\ \lambda \\ n_2 \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	$\infty$
1	648.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	976.7	997.2	1018.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.41	39.46	39.5
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.34	14.12	13.9
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.75	8.51	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.52	6.28	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.37	5.12	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.67	4.42	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.20	3.95	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.87	3.61	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.62	3.37	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.43	3.17	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.28	3.02	2.73
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.15	2.89	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.05	2.79	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	2.96	2.70	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.89	2.63	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.82	2.56	2.25

18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.77	2.50	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.72	2.45	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.68	2.41	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.64	2.37	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.60	2.33	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.57	2.30	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.54	2.27	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.51	2.24	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.49	2.22	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.47	2.19	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.45	2.17	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.43	2.15	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.41	2.14	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.29	2.01	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.17	1.88	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.05	1.76	1.31
$\infty$	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	1.94	1.64	1.00

[注] 表中  $n_1$  是第一自由度(分子的自由度);

$n_2$  是第二自由度(分母的自由度);

$\lambda$  是临界值,  $P\{F > \lambda\} = \alpha = 0.025$ .

附表 6  $F$  分布临界值表 ( $\alpha=0.01$ )

$\begin{array}{c} n_1 \\ \lambda \\ n_2 \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	$\infty$
1	4 052	4 999	5 403	5 625	5 764	5 859	5 928	5 982	6 106	6 234	6 366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.1	26.6	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.4	13.9	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	9.89	9.47	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	3.96	3.59	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.46	3.08	2.65

18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.34	1.95	1.38
$\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.18	1.79	1.00

[注] 表中的  $n_1$  是第一自由度(分子的自由度);

$n_2$  是第二自由度(分母的自由度);

$\lambda$  是临界值,  $P\{F > \lambda\} = \alpha = 0.01$ .

## 习 题 答 案

### 习 题 一

1.  $P(A) = P(B) = \frac{1}{4}$ . (例 1.2)

$$P(A) = \frac{7}{15}, P(B) = \frac{8}{15}. \text{ (例 1.3)}$$

2.  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{27}$ ;

$$P(D) = \frac{1}{9}; P(E) = \frac{2}{9}; P(F) = \frac{8}{9};$$

$$P(G) = P(H) = P(I) = \frac{8}{27};$$

$$P(J) = \frac{1}{27}; P(K) = \frac{2}{27}.$$

3.  $C_{13}^2 / C_{52}^2 = \frac{1}{17}$ .

4.  $P\{\text{至少有两件次品}\} \approx 0.82$ .

5. (1)  $\frac{1}{5}$ ; (2)  $\frac{3}{5}$ ; (3)  $\frac{3}{10}$ .

### 习 题 二

1.  $\frac{19}{130} \approx 0.146$ .

4.  $132/169 \approx 0.781$ .

5. 0.219.

6. 0.994.

$$7. P(\text{全红}) = \frac{1}{8}; \quad P(\text{全黄}) = P(\text{全白}) = \frac{1}{64};$$

$$P(\text{色全同}) = \frac{5}{32}; \quad P(\text{全不同}) = \frac{3}{16};$$

$$P(\text{不全同}) = \frac{27}{32}; \quad P(\text{无红}) = \frac{1}{8};$$

$$P(\text{无黄}) = P(\text{无白}) = \frac{27}{64};$$

$$P(\text{无红且无黄}) = \frac{1}{64};$$

$$P(\text{全红或全黄}) = \frac{9}{64};$$

$$P(\text{无红或无黄}) = \frac{17}{32}.$$

$$\begin{aligned} 8. P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ &\quad - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

### 习 题 三

$$1. 0.902.$$

$$2. P(A + BC) = 0.328.$$

$$3. 96.5\%.$$

$$4. P_1 = \frac{1}{10}, P_2 = \frac{3}{5}.$$

$$5. 0.124.$$

$$6. \frac{5}{13}.$$

### 习 题 四

$$1. 0.973; 0.25.$$

$$2. 0.1458; 5/21.$$

$$3. \frac{1}{2}; \frac{2}{9}.$$

### 习 题 五

$$1. (0.99)^4 = 0.9606; \quad C_4^1(0.01)(0.99)^3 = 0.0388;$$

$$C_4^2(0.01)^2(0.99)^2 = 0.0006; \quad C_4^3(0.01)^3 \cdot 0.99 \approx 0;$$

$$C_4^4(0.01)^4 \approx 0.$$

$$2. 0.104.$$

$$3. (1) 0.923; \quad (2) 0.177.$$

$$4. \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p}.$$

## 习 题 六

$$1. P\{X=k\} = C_5^k C_{95}^{20-k} / C_{100}^{20} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

$$2. P\{X=k\} = C_{30}^k (0.8)^k (0.2)^{30-k} \quad (k=0, 1, \dots, 30).$$

$$3. P\{X=k\} = (0.2)^{k-1} \cdot 0.8 \quad (k=1, 2, \dots).$$

$$4. \begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & \frac{3}{4} & \frac{9}{44} & \frac{9}{220} & \frac{1}{220} \end{array}$$

$$5. P\{X=k\} = \frac{1}{2^k} \quad (k=1, 2, \dots).$$

$$6. P\{X=k\} = C_{13}^k C_{39}^{5-k} / C_{52}^5 \quad (k=0, 1, \dots, 5).$$

$$7. 0.0902.$$

$$8. 0.0298; 0.0214.$$

$$9. k = \begin{cases} [\lambda] & \text{如果 } \lambda \text{ 不是整数} \\ \lambda - 1, \lambda & \text{如果 } \lambda \text{ 是整数} \end{cases}$$

## 习 题 七

$$1. (1) C=2; \quad (2) 0.4.$$

$$2. (1) C = \frac{1}{\pi}; \quad (2) \frac{1}{3}.$$

$$3. (1) C = \frac{1}{2}; \quad (2) \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

$$4. 0.9522; 0.8172.$$

$$5. 1.96, 1.65, 2.58; 1.65.$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}}.$$

$$7. p_Y(y) = \frac{2e^y}{\pi(e^{2y} + 1)}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

$$8. \begin{cases} p_Y(y) = \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} y^{k-1} e^{-\frac{ky^2}{2}} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} p_Y(y) = \frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3\sqrt{\pi}m^{\frac{3}{2}}} \sqrt{y} e^{-\frac{2y}{ma^2}} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0. \end{cases}$$

10. 0.240 3.

$$11. p_V(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \left(\frac{2}{9\pi}\right)^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} & \frac{\pi a^3}{6} \leq y \leq \frac{\pi b^3}{6} \\ 0. & \text{其他} \end{cases}$$

$$12. p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} & |x| < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

13. (1) 0.864 7, 0.049 8;

$$(2) p(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$14. (1) F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

15.  $\sigma \leq 31.25$ .

## 习 题 八

1.  $E(X) = 11$ .

2. 甲机床次品数的期望为 1, 乙机床次品数的期望为 0.9.

3.  $E(X) = 1.25$ .
4.  $E(X) = nM/N$ .
5.  $E(X) = \frac{6}{5}$ .
6.  $E(X) = 44.64$ .
7.  $[1 - (1 - p)^{10}] / p$ .

## 习 题 九

1.  $E(X) = \frac{2}{3}$ .
2. 0.
3. 0.
4.  $E(X^n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \sigma^n (n-1)!! & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$
5.  $\pi(b+a)(b^2+a^2)/24$ .
6. 0.

## 习 题 十

1. 33; 0.312 5.
2.  $\frac{1}{18}, \frac{1}{2}, 2, \frac{R^2}{2}$ .
4.  $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-(\ln y - \mu)^2 / (2\sigma^2)}, y > 0;$   
 $E(Y) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2};$   
 $D(Y) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$
5. (1)  $A = \frac{1}{\sigma^2};$   
 (2)  $e^{-\frac{\pi}{4}} \left( E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \right);$   
 (3)  $\left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) \sigma^2.$
6. 注意到  $E(X) = m + 1, D(X) = m + 1$ , 用切比雪夫不等式即可证

得.

$$7. E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}.$$

$$8. E(X) = \frac{r}{p}; D(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

### 习 题 十 一

1. 不独立.

$$2. p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & (x, y) \in D, \\ 0 & \text{其他;} \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b, \\ 0 & \text{其他;} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & c < y < d, \\ 0 & \text{其他;} \end{cases}$$

$X$  与  $Y$  相互独立.

$$3. (1) c = \frac{3}{\pi R^3};$$

$$(2) \frac{3r^2}{R^2} \left(1 - \frac{2r}{3R}\right).$$

$$4. (1) c = \frac{1}{\pi^2}; \quad (2) \frac{1}{16};$$

(3) 独立.

$$5. (1) A = \frac{1}{2};$$

$$(2) p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{其他;} \end{cases}$$

$Y$  与  $X$  同分布.

6. 0.96.

$$7. p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi ab} & (x, y) \in D, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$8. (1) p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}[(x-3)^2 - (x-3)y + y^2]},$$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}, \quad p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$(2) p(x, y) = \frac{4}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{8}{3}[(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2]},$$

$$p_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(x-1)^2}, \quad p_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(y-1)^2}.$$

$$(3) p(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2 + 4(y-2)^2]},$$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad p_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(y-2)^2}.$$

## 习 题 十 二

$$1. p_Z(z) = \begin{cases} (e-1)e^{-z} & z \geq 1, \\ 1-e^{-z} & 0 < z < 1, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

$$4. p_{\min(X, Y)}(z) = 2[1 - F(z)]p(z).$$

$$5. p_1(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0; \end{cases}$$

$$p_2(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z} & z > 0, \\ 0 & z \leq 0; \end{cases}$$

$$p_3(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) & z > 0, \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

$$6. (1) \begin{cases} \frac{1}{6}z^3 e^{-z} & , z > 0; \\ 0 & , z \leq 0 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{120}y^5 e^{-y} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0. \end{cases}$$

### 习 题 十 三

1.  $E(Z) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$ .
3.  $A = \frac{1}{\pi}$ ;  $\sigma_{XX}, \sigma_{YY}$  都不存在.
4.  $\rho = \frac{1}{2}$ .
5.  $E(X_1 \cdot X_2) = 4$ .
6.  $D(X + Y) = 85, D(X - Y) = 37$ .
7.  $1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$ .
9.  $\rho_{XY} = \begin{cases} 0 & n \text{ 偶}, \\ \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}} & n \text{ 奇}. \end{cases}$

### 习 题 十 四

1.  $X, Y, Z$  独立同分布, 密度是  $\begin{cases} p(t) = e^{-t} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0. \end{cases}$
2.  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$
3.  $\begin{cases} p(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^2 e^{-\frac{1}{2}u^2} & , u > 0 \\ 0 & , u \leq 0. \end{cases}$
4.  $E(Y) = \mu, D(Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ .
5.  $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  服从参数为  $m, \eta/n^{\frac{1}{m}}$  的韦布尔分布.
6.  $E(X) = M \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{M} \right)^n \right]$ .
7.  $E(X) = \sum_i p_i, D(X) = \sum_i p_i (1 - p_i)$ .
8.  $E(X + Y + Z) = 1, D(X + Y + Z) = 3$ .

## 习题十五

1. 对一切非负整数  $n$ ,

$$P(X=K|X+Y=n)=\begin{cases} 0, & K>n \\ C_n^K \frac{\lambda_1^K \lambda_2^{n-K}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}, & K=0,1,\cdots,n \end{cases}$$

2. 小猫到达地面的时间的期望是 10 h.

4. 该商店一天的平均营业额是 60 000 元.

## 习题十六

$$2. \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \mu)^2.$$

$$3. \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i x_i.$$

$$4. \hat{\lambda} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}; \tilde{\lambda} = \frac{2}{n} \sum_i x_i.$$

$$5. [15.06 - 0.24, 15.06 + 0.24], [15.06 - 0.15, 15.06 + 0.15].$$

$$6. [1\,234.4, 1\,283.6], [1\,247.6, 1\,270.4].$$

$$7. [-2.565, 3.315], [-2.751, 3.501].$$

$$8. [2\,760.8, 2\,857.2].$$

$$9. [1\,485.7, 1\,514.3], [13.8, 36.5].$$

$$10. [2.690, 2.720].$$

$$11. n \geq 15.37\sigma^2/L^2.$$

$$12. [-0.001, 0.005].$$

## 习题十七

1. 相容( $1.095 < 1.96$ ).

2. 未发现不正常( $0.05 < 2.306$ ).

3. 有显著性差异( $2.45 > 2.262$ ).

4. 未发现系统偏差( $0.465\,9 < 2.447$ ).

5. 可以认为偏大( $15.68 > 15.5$ ).

6. 无显著性差异( $\frac{1}{3.85} < 2.13 < 4.30$ ).

7. 有显著性差异( $5.98 > 2.021$ ).
8. 有显著性差异( $4.06 > 2.262$ ).
9. 无显著性差异( $1.86 < 2.101$ ).
10. 可以认为是匀称的( $5.125 < 16.9$ ).
11. 有显著性差异,新法好( $-2.06 < -1.833$ ).

### 习 题 十 八

1. 回归直线方程: $\hat{y} = 188.99 + 1.867x$ .
2. 显著( $\alpha = 0.05$ ), ( $7.55 > 5.32$ ).
3.  $x = 65$  时  $\hat{y} = 310$ , 预报区间 $[256, 365]$ ,  $\alpha = 0.05$ .

### 习 题 十 九

1. (1) 第 3 号条件:上升温度  $800^{\circ}\text{C}$ , 保温时间 8 h, 出炉温度  $500^{\circ}\text{C}$ .
- (2) 第 8 号条件:品种为南二矮 5 号, 插植密度 20 万棵/亩, 施肥量每亩 5 斤纯氮.
- (3) 第 6 号条件:pH 9~10, 加凝聚剂, 用 NaOH 作沉淀剂, 加  $\text{CaCl}_2$ , 用浓的废水.
2. (1) 可能好的配合:上升温度:  $800^{\circ}\text{C}$ , 保温时间 8 h, 出炉温度  $400^{\circ}\text{C}$ .
- (2) 可能好的配合:品种为窄叶青 8 号, 插植密度 30 万棵/亩. 施肥量 10 斤/亩纯氮.
- (3) 可能好的配合: pH 9~10, 用 NaOH 做沉淀剂, 凝聚剂和  $\text{CaCl}_2$  都不用加.(废水浓度稀、浓都可以, 看需要而定.)

### 习 题 二 十

3.  $\lambda$  的贝叶斯估计是  $\frac{\alpha + \sum_{i=1}^n X_i}{\beta + n}$ .

4.  $\theta$  的贝叶斯估计是  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 1}{n - 2}$ .

5. 贝叶斯检验是: 当  $\mu^* > \theta_0$  时接受假设  $H_2$ ; 当  $\mu^* < \theta_0$  时接受假设

$H_1$ ; 当  $\mu^* = \theta_0$  时接受  $H_1$  或  $H_2$  均可. 这里  $\mu^* = (\mu_0 + n\sigma_0^2 \bar{X}) / (1 + n\sigma_0^2)$ ,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

6. 全部决策共有九个. 具体内容及相应的风险如下

$\delta(\text{决策})$		$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	$\delta_6$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_9$
$x$ (地层 结构)	0	$a_1$	$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_3$	$a_3$
	1	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$R(\theta, \delta)$	$\theta_0$	12	7.6	9.6	5.4	1	3.0	8.4	4.0	6
(风险)	$\theta_1$	0	4.9	3.5	2.1	7	5.6	1.5	6.4	5

$\delta_4$  是 minimax 决策. 若先验分布  $\xi(\theta_0) = 0.2, \xi(\theta_1) = 0.8$ , 则  $\delta_1$  是相应的贝叶斯决策.

## 参 考 书 目

- [1] Гнепенко Б В. 概率论教程. 丁寿田译. 北京: 高等教育出版社, 1956
- [2] Fisz M. 概率论及数理统计. 王福保译. 上海: 上海科学技术出版社, 1962
- [3] 赵仲哲. 概率论讲义. 北京大学油印本, 1957
- [4] 王梓坤. 随机过程论. 北京: 科学出版社, 1965
- [5] 中国科学院数学研究所概率统计室. 回归分析方法. 北京: 科学出版社, 1974
- [6] 浙江大学数学系高等数学教研组. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1979
- [7] 汪仁官. 概率论引论. 北京: 北京大学出版社, 1994
- [8] 钱敏平, 叶俊. 随机数学. 北京: 高等教育出版社, 2000
- [9] 茆诗松, 周纪芄. 概率论与数理统计(第二版). 北京: 中国统计出版社, 2000
- [10] 陈家鼎, 孙山泽, 李东风. 数理统计学讲义. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [11] Ross S M. A First Course in Probability (6<sup>th</sup> Ed.). 影印版, 北京: 中国统计出版社, 2003
- [12] Groebner D F et al. Business Statistics: A Decision-making Approach. 影印版. 北京: 中国统计出版社, 2003
- [13] Rosner B. Fundamentals of Biostatistics (4<sup>th</sup> Ed.). Belmont: Wadsworth Publishing Company. 1995
- [14] Casella G, Berger R L. Statistical Inference. 影印版, 北京: 机械工业出版社, 2002

- [15] Brockwell P J, Davis R A. 时间序列的理论与方法. 第 2 版. 田铮译. 北京:高等教育出版社与 Springer 出版社,2001
- [16] Rao B L. Nonparametric Functional Estimation. Washington: Academic Press, 1983
- [17] 韦博成,鲁国斌,史建清. 统计诊断引论. 南京:东南大学出版社,1991
- [18] 陈家鼎. 生存分析与可靠性引论. 合肥:安徽教育出版社, 1993
- [19] 陈家鼎. 序贯分析. 北京:北京大学出版社,1995
- [20] 北京大学数学系试验设计组. 电视讲座:正交试验法,1979