《概率统计讲义》习题参考答案

作者：txbb

第三章　随机变量的数字特征

习题八　离散型随机变量的期望

1. 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{10}, k=2,4,\cdots,18,20$。求 $E(X)$。

解： 由已知条件，X 的可能取值是 $2,4,6,\cdots,20$，共有 10 个值，且每个值的概率均为 1/10。根据离散型随机变量期望的定义：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{10}x_ip_i=\frac{1}{10}(2+4+6+\cdots+20)$$

括号内是一个首项 $a_1=2$，末项 $a_{10}=20$，项数 $n=10$ 的等差数列，其和为：

$$S_{10}=\frac{10\times(2+20)}{2}=110$$

所以：

$$E(X)=\frac{110}{10}=11$$

---

2. 两台生产同一种零件的车床，一天生产中次品数的概率分布分别是：

甲	0	1	2	3	(次品数)
p	0.4	0.3	0.2	0.1	

乙	0	1	2	3	(次品数)
p	0.3	0.5	0.2	0	

如果两台机床的产量相同，问哪台机床好？

解： 评价机床好坏通常看平均次品数的多少，即计算其次品分布的数学期望。

计算甲机床次品数的期望：

$$E(X_{甲}) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1$$

计算乙机床次品数的期望：

$$E(X_{乙}) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0 = 0.9$$

因为 $E(X_{乙}) < E(X_{甲})$，说明乙机床平均每天产生的次品数更少，故乙机床更好。

---

3. 某射手每次射击打中目标的概率都是 0.8，现连续向一目标射击，直到第一次击中为止。求“射击次数” X 的期望。（附推导过程）

解： 射击次数 X 服从几何分布，记单次击中概率为 $p = 0.8$，未击中概率为 $q = 1 - p = 0.2$。其分布律为：

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

根据离散型随机变量期望的定义：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

利用几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ （当 $|q| < 1$ 时）。对等式两边关于 q 求导：

$$\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

左边逐项求导得：

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

右边求导得：

$$\frac{1}{(1-q)^2}$$

将此结果代入期望表达式中：

$$E(X) = p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$$

由于 $1 - q = p$，代入上式得：

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

计算结果：将 $p=0.8$ 代入公式：

$$E(X)=\frac{1}{0.8}=1.25$$

答：射击次数的期望为 1.25。

---

4. 推导超几何分布的期望计算公式。

解：设总数为 N 的产品中有 M 个次品，现从中不放回地任取 n 件，令 X 为取出的次品数。引入指示变量 X_i（$i=1,2,\cdots,n$），若第 i 次取出的是次品，则 $X_i=1$，否则 $X_i=0$。则总次品数 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$。根据期望的线性性质：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

对每一次抽取，由于抽样的对称性，第 i 次抽到次品的概率均为 $\frac{M}{N}$，即 $E(X_i)=\frac{M}{N}$。因此：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{M}{N}=n\cdot\frac{M}{N}$$

---

5. 盒中有五个球，其中有三白二黑，从中随机抽取两个球，求“抽得的白球数” X 的期望。

解：这是一个超几何分布问题。产品总数 $N=5$，白球总数 $M=3$，抽取件数 $n=2$。由题 4 推导的公式 $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}$ 可得：

$$E(X)=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

---

6. 射击比赛，每人射四次（每次一发），约定全部不中得 0 分，只中一弹得 15 分，中二弹得 30 分，中三弹得 55 分，中四弹得 100 分。甲每次射击命中率为 $\frac{3}{5}$，问他期望能得多少分？

解：设甲击中目标的次数为 K，则 $K\sim B(4,0.6)$。计算各项概率：

- $P(K=0)=C_4^0(0.6)^0(0.4)^4=0.0256$
- $P(K=1)=C_4^1(0.6)^1(0.4)^3=0.1536$

- $P(K=2) = C_4^2(0.6)^2(0.4)^2 = 0.3456$
- $P(K=3) = C_4^3(0.6)^3(0.4)^1 = 0.3456$
- $P(K=4) = C_4^4(0.6)^4(0.4)^0 = 0.1296$

设得分随机变量为 X，期望得分为：

$$E(X) = 0 \times 0.0256 + 15 \times 0.1536 + 30 \times 0.3456 + 55 \times 0.3456 + 100 \times 0.1296$$

$$E(X) = 0 + 2.304 + 10.368 + 19.008 + 12.96 = 44.64$$

---

7. 某射手每次射中目标的概率是 p，现携有 10 发子弹准备对一目标连续射击（每次打一发），一旦射中或子弹打完了就立刻转移到别的地方。问他在转移前平均射击几次？

解： 设射击次数为随机变量 X，其可能取值为 $1, 2, \ldots, 10$。

第一步：利用期望的一种特殊计算公式

对于仅取非负整数值的随机变量 X，其数学期望可以使用以下公式计算（即累计概率求和法）：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10} P(X \geq k)$$

第二步：分析每一项的概率 $P(X \geq k)$

事件 $\{X \geq k\}$ 表示 "射击次数至少为 k 次"，这意味着前 $k-1$ 次射击均未击中目标。

- 当 $k=1$ 时，$P(X \geq 1) = 1$ （必然会进行第 1 次射击）。
- 当 $k=2$ 时，只有第 1 次没射中才会进行第 2 次，故 $P(X \geq 2) = (1-p)^1$。
- 当 $k=3$ 时，只有前 2 次都没射中才会进行第 3 次，故 $P(X \geq 3) = (1-p)^2$。
- 一般地，对于 $1 \leq k \leq 10$，要进行到第 k 次射击，必须满足前 $k-1$ 次全部脱靶，其概率为：
$$P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$$

第三步：求和计算

将上述概率代入期望公式：

$$E(X) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \cdots + P(X \geq 10)$$

$$E(X) = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^9$$

这是一个首项 $a_1 = 1$，公比 $r = 1-p$，项数 $n = 10$ 的等比数列。

根据等比数列求和公式 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$，得：

$$E(X) = \frac{1 \cdot [1-(1-p)^{10}]}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^{10}}{p}$$

结论：他在转移前平均射击的次数为 $\dfrac{1-(1-p)^{10}}{p}$。

习题九　期望的简单性质及随机变量函数的期望公式

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$。

解： 根据连续型随机变量数学期望的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\int_0^1 2x^2dx$$

计算定积分得：

$$E(X)=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

---

2. 设随机变量 X 的密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$。

解：

$$E(X)=\int_{-1}^1 x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$$

由于被积函数 $f(x)=\dfrac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ 是关于原点对称的奇函数，且积分区间 $[-1,1]$ 关于原点对称，故其积分值为 0。即：

$$E(X)=0$$

---

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty$$

求 $E(X)$。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}dx$$

因为被积函数 $g(x)=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-|x|}$ 满足 $g(-x)=-g(x)$，是一个奇函数，且积分区间为整个实轴，由奇函数的对称性可知：

$$E(X)=0$$

---

4. 设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $E(X^n)$。

解： X 的概率密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$。根据期望定义：

$$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

（一）当 n 为奇数时：由于密度函数 $p(x)$ 是关于 $x=0$ 对称的偶函数，而当 n 为奇数时，x^n 是奇函数。奇函数与偶函数的乘积 $x^np(x)$ 仍为奇函数。根据对称区间上奇函数的积分性质可知：

$$E(X^n)=0\quad(\text{当}n=1,3,5,\dots\text{ 时})$$

（二）当 n 为偶数时：记 $I_n=E(X^n)$。我们利用分部积分法寻找 I_n 与 I_{n-2} 的递推关系。注意到 $\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)=-\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，由此可变形为：

$$x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=-\sigma^2\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)$$

代入期望公式中，将 x^n 拆为 $x^{n-1}\cdot x$：

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}\left[-\sigma^2\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\right]dx\end{aligned}$$

应用分部积分公式 $\int udv=uv-\int vdu$，令 $u=x^{n-1}$，$dv=d(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})$：

$$I_n=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(x^{n-1})\right)$$

第一项：当 $x\to\pm\infty$ 时，指数衰减速度远快于幂函数，故 $\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0$。第二项：$d(x^{n-1})=(n-1)x^{n-2}dx$，整理得：

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{\sigma^2(n-1)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\\&=\sigma^2(n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$

得到递推公式：$E(X^n) = \sigma^2(n-1)E(X^{n-2})$。连续使用递推公式：

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sigma^2(n-1)\cdot\sigma^2(n-3)\cdot\cdots\cdot\sigma^2(1)\cdot E(X^0) \\ &= \sigma^n(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1 \end{aligned}$$

已知 $E(X^0)=1$，且乘积项可记作双阶乘符号 $(n-1)!!$。

结论：

$$E(X^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ \sigma^n(n-1)!!, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

---

5. 对球的直径作近似测量，设其值均匀地分布在区间 $[a,b]$ 内，求球体积的均值。

解： 设直径为 D，则 $D\sim U(a,b)$，其概率密度为 $p(d)=\frac{1}{b-a}, a\le d\le b$。球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{D}{2})^3=\frac{\pi}{6}D^3$。根据随机变量函数的期望公式：

$$E(V) = E\left(\frac{\pi}{6}D^3\right) = \int_a^b \frac{\pi}{6}x^3\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{\pi}{6(b-a)}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b$$

$$E(V) = \frac{\pi(b^4-a^4)}{24(b-a)} = \frac{\pi(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{24(b-a)} = \frac{\pi(b+a)(b^2+a^2)}{24}$$

---

6. 点随机地落在中心在原点、半径为 R 的圆周上，并对弧长是均匀分布的。求落点横坐标的均值。

解： 设落点与原点的连线与 x 轴正方向的夹角为 Θ。由于对弧长均匀分布，则 Θ 在 $[0,2\pi]$ 上服从均匀分布，即 $\Theta\sim U(0,2\pi)$，密度函数为 $f(\theta)=\frac{1}{2\pi}, 0\le\theta\le 2\pi$。落点的横坐标 $X=R\cos\Theta$。

$$E(X) = E(R\cos\Theta) = \int_0^{2\pi} R\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{R}{2\pi}[\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$

---

7. 设 X 的密度函数 $p(x)$ 满足 $p(c+x)=p(c-x)$ $(x>0)$，其中 c 为一常数，又 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx$ 收敛。求证：$E(X)=c$。

证明： 已知 $p(c+x)=p(c-x)$ 说明密度函数 $p(x)$ 关于直线 $x=c$ 对称。设 $u=x-c$，则 $x=u+c$。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(u+c)p(u+c)du$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}up(c+u)du+c\int_{-\infty}^{+\infty}p(c+u)du$$

由已知 $p(c+u)=p(c-u)$，可知 $p(c+u)$ 是关于 u 的偶函数。那么 $up(c+u)$ 就是关于 u 的奇函数，其在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分为 0。同时，根据密度的规范性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(c+u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$$

故：

$$E(X)=0+c\cdot 1=c$$

证毕。

习题十 方差及其简单性质

1. 对于习题八的习题 1, 3 中的随机变量, 分别求出它们的方差.

解: (1) 习题 8-1 中, X 取值为 $2, 4, \ldots, 20$, 每个值的概率均为 $1/10$。已知 $E(X) = 11$。计算 $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{10} (2k)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 154$$

方差 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 154 - 11^2 = 154 - 121 = 33$。

(2) 习题 8-3 中，X 服从几何分布，击中概率 $p = 0.8$，未击中概率 $q = 1 - p = 0.2$。已知几何分布的方差公式为 $D(X) = \frac{q}{p^2}$:

$$D(X) = \frac{0.2}{0.8^2} = \frac{0.2}{0.64} = 0.3125$$

附：几何分布方差 $D(X) = \frac{q}{p^2}$ 的详细推导

已知： 随机变量 X 服从几何分布，其分布律为 $P\{X = k\} = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$。其中 $q = 1 - p$。

推导步骤： 根据公式 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$，我们分步计算。

1. 计算期望 $E(X)$： 利用级数 $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$，两边对 q 求导得：$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$。则:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

2. 计算 $E[X(X-1)]$ (二阶阶乘矩): 对 $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ 连续求两次导得：$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$。则:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p \\ &= pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ &= pq \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2} \end{aligned}$$

3. 计算二阶原点矩 $E(X^2)$： 利用性质 $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$:

$$E(X^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q + p}{p^2}$$

4. 计算方差 $D(X)$：

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{2q+p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\
&= \frac{2q+p-1}{p^2}
\end{aligned}
$$

由于 $p-1=-q$，代入上式得：

$$
D(X) = \frac{2q-q}{p^2} = \frac{q}{p^2}
$$

---

2. 对于习题九的习题 1, 2, 3, 6 中的随机变量，分别求出它们的方差。

解： 计算方差统一使用公式 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$。

(1) **针对习题 9-1：** $p(x) = 2x, x \in [0,1]$。已知 $E(X) = 2/3$。首先计算二阶原点矩 $E(X^2)$：

$$
E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot p(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot (2x)dx = \int_0^1 2x^3 dx
$$

根据幂函数积分公式：

$$
E(X^2) = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}
$$

则方差为：

$$
D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}
$$

(2) **针对习题 9-2：** $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$。已知 $E(X) = 0$。计算 $E(X^2)$：

$$
E(X^2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx
$$

使用三角代换，令 $x = \sin\theta$，则 $dx = \cos\theta d\theta$。当 $x=-1$ 时，$\theta = -\pi/2$；当 $x = 1$ 时，$\theta = \pi/2$。代入积分式（注意 $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$）：

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] - \left[-\frac{\pi}{2} - 0\right]\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

则方差为：

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2}$$

(3) **针对习题 9-3：** $p(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, x \in (-\infty, +\infty)$。已知 $E(X) = 0$。计算 $E(X^2)$：

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} dx$$

由于被积函数是偶函数，根据对称性：

$$E(X^2) = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} dx$$

使用分部积分法：令 $u = x^2, dv = \mathrm{e}^{-x}dx \implies du = 2xdx, v = -\mathrm{e}^{-x}$。

$$E(X^2) = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-x}dx = 0 + 2\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$$

再次分部积分：

$$E(X^2) = 2\left(\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}dx\right) = 2(0+1) = 2$$

则方差为：

$$D(X) = 2 - 0^2 = 2$$

(4) **针对习题 9-6：** $X = R\cos\Theta, \Theta \sim U(0, 2\pi)$。已知 $E(X) = 0$。计算 $E(X^2)$：

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$$

利用降幂公式 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$：

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{R^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{R^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{R^2}{4\pi}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{4\pi}(2\pi + 0 - 0) = \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

则方差为：

$$D(X) = \frac{R^2}{2} - 0^2 = \frac{R^2}{2}$$

---

3. 设 X 服从参数为 $N, M, n(n \leq N - M)$ 的超几何分布，试证明：

$$D(X) = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$$

证：引入指示变量 X_i $(i=1,\ldots,n)$，若第 i 次取出为次品则 $X_i=1$，否则 $X_i=0$。则总次品数 $X=\sum_{i=1}^n X_i$。已知在超几何分布中，每次取到次品的概率均为 $P(X_i=1)=\frac{M}{N}$，故 $E(X_i)=\frac{M}{N}$。其方差为：$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{M}{N}-(\frac{M}{N})^2=\frac{M(N-M)}{N^2}$。

对于 $i\neq j$，考虑协方差 $Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$：其中 $E(X_iX_j)=P(X_i=1,X_j=1)=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}$。代入计算：

$$\begin{aligned}Cov(X_i,X_j)&=\frac{M(M-1)}{N(N-1)}-\frac{M^2}{N^2}=\frac{MN(M-1)-M^2(N-1)}{N^2(N-1)}\\&=\frac{M^2N-MN-M^2N+M^2}{N^2(N-1)}=\frac{M^2-MN}{N^2(N-1)}=-\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}\end{aligned}$$

根据方差性质 $D(\sum X_i)=\sum D(X_i)+\sum_{i\neq j}Cov(X_i,X_j)$，项数分别为 n 和 $n(n-1)$：

$$\begin{aligned}D(X)&=n\cdot\frac{M(N-M)}{N^2}-n(n-1)\cdot\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}\\&=\frac{nM(N-M)}{N^2}\left[1-\frac{n-1}{N-1}\right]=\frac{nM(N-M)}{N^2}\left[\frac{(N-1)-(n-1)}{N-1}\right]\\&=\frac{nM(N-M)}{N^2}\cdot\frac{N-n}{N-1}=\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}\end{aligned}$$

证毕。

---

4. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y=e^X$, 求 Y 的分布密度, 并计算 $E(Y)$ 和 $D(Y)$.

解：(1) **分布密度**：由于 e^X 恒大于 0，故当 $y\le 0$ 时，$p_Y(y)=0$。当 $y>0$ 时，累积分布函数 $F_Y(y)=P(e^X\le y)=P(X\le\ln y)=\Phi\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)$。两边对 y 求导：

$$p_Y(y)=\frac{d}{dy}\Phi\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad y>0$$

(2) **期望与方差**：利用 $E(e^{tX})$ 的公式（或正态分布矩母函数 $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$）：$E(Y)=E(e^X)=M_X(1)=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$。$E(Y^2)=E(e^{2X})=M_X(2)=e^{2\mu+\frac{1}{2}\sigma^2(2)^2}=e^{2\mu+2\sigma^2}$。方差：

$$\begin{aligned}D(Y)&=E(Y^2)-[E(Y)]^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-(e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2})^2\\&=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)\end{aligned}$$

附：正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 矩母函数的详细推导

1. 定义与表达式

根据矩母函数的定义 $M_X(t)=E[e^{tX}]$，以及正态分布的概率密度函数：

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

将常数项提到积分符号外，并将指数项合并：

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

2. 指数项配方

我们重点考察指数部分的表达式：

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{2\sigma^2 tx - (x^2 - 2\mu x + \mu^2)}{2\sigma^2} = \frac{-x^2 + 2(\mu+\sigma^2 t)x - \mu^2}{2\sigma^2}$$

为了构造一个完全平方式，对分子关于 x 进行配方：

$$\begin{aligned}
-x^2 + 2(\mu+\sigma^2 t)x - \mu^2 &= -[x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x] - \mu^2 \\
&= -[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2 + (\mu+\sigma^2 t)^2 - \mu^2 \\
&= -[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2 + (\mu^2 + 2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2) - \mu^2 \\
&= -[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2 + 2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2
\end{aligned}$$

将其代回原指数位置：

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2} = -\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

3. 积分求解

将配方后的指数项代回积分式，并将与 x 无关的项提到积分外：

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}}dx\right)$$

观察括号内的积分项：它正好是均值为 $\mu+\sigma^2 t$、方差为 σ^2 的新正态分布 $N(\mu+\sigma^2 t, \sigma^2)$ 在全实数域上的全概率积分。根据概率密度的规范性（全概率之和为 1）：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

4. 结论

代入上式即得正态分布的矩母函数公式：

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

利用此公式，计算 $E(e^X)$ 时令 $t=1$，计算 $E(e^{2X})$ 时令 $t=2$ 即可。

---

5. 设轮船横向摇摆的振幅 X 的密度为 $p(x) = Axe^{-x^2/2\sigma^2}(x > 0)$。求 (1) A; (2) $P(X > E(X))$; (3) $D(X)$.

解： (1) 利用规范性 $\int_0^\infty p(x)dx = 1$。令 $u = \frac{x^2}{2\sigma^2}$，则 $du = \frac{x}{\sigma^2}dx$。

$$\int_0^\infty Axe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = A\sigma^2\int_0^\infty e^{-u}du = A\sigma^2 \cdot 1 = 1 \implies A = \frac{1}{\sigma^2}$$

(2) **第一步：推导均值** $E(X)$

根据期望定义：

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot p(x)dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $x = \sigma t$，则 $dx = \sigma dt$。当 $x = 0$ 时 $t = 0$，当 $x \to \infty$ 时 $t \to \infty$。代入得：

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{\sigma^2 t^2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(\sigma dt) = \sigma\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

对积分 $I = \int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 使用**分部积分法**。我们将 $t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 拆分为 $t \cdot (t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})$：设 $u = t \implies du = dt$；设 $dv = t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt \implies v = \int t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$。根据分部积分公式 $\int udv = uv - \int vdu$：

$$\begin{aligned} I &= \left[t \cdot (-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\right]_0^\infty - \int_0^\infty(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})dt \\ &= \left(\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\mathrm{e}^{t^2/2}} - 0\right) + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt \end{aligned}$$

由洛必达法则，第一项为 0。第二项是概率论中的标准积分（高斯积分的一半）：已知 $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$，故 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$。所以，$E(X) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$。

第二步：计算概率 $P(X > \sigma\sqrt{\pi/2})$

$$P(X > \sigma\sqrt{\pi/2}) = \int_{\sigma\sqrt{\pi/2}}^\infty \frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $u = \frac{x^2}{2\sigma^2}$，则 $du = \frac{x}{\sigma^2}dx$。下限变为 $u = \frac{(\sigma\sqrt{\pi/2})^2}{2\sigma^2} = \frac{\pi\sigma^2/2}{2\sigma^2} = \frac{\pi}{4}$。

$$P(X > E(X)) = \int_{\pi/4}^\infty \mathrm{e}^{-u}du = \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{\pi/4}^\infty = 0 - (-\mathrm{e}^{-\pi/4}) = \mathrm{e}^{-\pi/4}$$

(3) **第一步：详细推导二阶矩** $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \int_0^\infty \frac{x^3}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

使用**换元法**：令 $u = \frac{x^2}{2\sigma^2}$，则 $x^2 = 2\sigma^2 u$，且 $du = \frac{x}{\sigma^2}dx$。代入积分式：

$$E(X^2) = \int_0^\infty (2\sigma^2 u)\mathrm{e}^{-u}du = 2\sigma^2\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u}du$$

对 $\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u}du$ 使用**分部积分法**：设 $w = u \implies dw = du$；设 $dz = \mathrm{e}^{-u}du \implies z = -\mathrm{e}^{-u}$。

$$\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u}du = \left[-u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\mathrm{e}^{-u})du = 0 + \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_0^\infty = 1$$

所以，$E(X^2) = 2\sigma^2 \cdot 1 = 2\sigma^2$。

第二步：组合得到方差

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 2\sigma^2 - \left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \\ &= 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 \\ &= \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

---

6. 设 X 的密度为 $p(x) = \frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}$ $(x \geq 0)$。试证：$P\{0 < X < 2(m+1)\} \geq \frac{m}{m+1}$。

证：

第一步：计算 $E(X)$ 和 $D(X)$

利用伽马积分性质：$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}dx = n!$ （对于正整数 n）。

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \cdot \frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+1}\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= \frac{(m+1)!}{m!} = m+1 \end{aligned}$$

为了求方差，先求二阶原点矩 $E(X^2)$：

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+2}\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= \frac{(m+2)!}{m!} = (m+2)(m+1) \end{aligned}$$

则方差为：

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (m+2)(m+1) - (m+1)^2 = (m+1)(m+2-m-1) = m+1$$

第二步：应用切比雪夫不等式

切比雪夫不等式的形式为：$P\{|X - E(X)| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}$。观察待证结论的区间 $0 < X < 2(m+1)$，我们可以将其改写为关于均值 $E(X) = m+1$ 对称的形式：

$$0 < X < 2(m+1) \iff -(m+1) < X - (m+1) < m+1 \iff |X - (m+1)| < m+1$$

设定 $\epsilon = m+1$，代入切比雪夫不等式：

$$P\{|X-(m+1)| < m+1\} \geq 1-\frac{D(X)}{(m+1)^2} = 1-\frac{m+1}{(m+1)^2} = 1-\frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$$

即证得：$P\{0 < X < 2(m+1)\} \geq \frac{m}{m+1}$。证毕。

附：伽马积分性质 $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} dx = n!$ 的证明

1. 定义与基础

定义积分 $I_n = \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} dx$，其中 n 为非负整数。首先计算 $n=0$ 的情况：

$$I_0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

由于 $0! = 1$，故当 $n=0$ 时性质成立。

2. 递推关系的推导（使用分部积分法）

对于 I_n $(n \geq 1)$，我们使用分部积分法 $\int u dv = uv - \int v du$。设 $u = x^n \implies du = nx^{n-1}dx$；设 $dv = \mathrm{e}^{-x}dx \implies v = -\mathrm{e}^{-x}$。代入公式得：

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} dx = \left[-x^n \mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\mathrm{e}^{-x}) \cdot nx^{n-1} dx \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{-x^n}{\mathrm{e}^x} - 0\right) + n\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} dx \end{aligned}$$

根据幂函数与指数函数的极限性质（或通过 n 次洛必达法则），可知 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$。因此，我们得到了核心递推公式：

$$I_n = n \cdot I_{n-1}$$

3. 结论的得出

利用上述递推关系，可以进行连续迭代：

$$\begin{aligned} I_n &= n \cdot I_{n-1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1 \cdot I_0 \end{aligned}$$

由于前面已算出 $I_0 = 1$，故：

$$I_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

7. 设 $X\sim$ Beta(α,β), 即它的密度为 $p(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $(0<x<1,\alpha>0,\beta>0)$。**求** $E(X),D(X)$。

解: 计算贝塔分布的期望和方差,最有效的方法是利用贝塔函数 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$。已知 $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$。

第一步:计算 $E(X)$

$$E(X)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

利用 Γ 函数性质 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 进行化简:

$$E(X)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

第二步:计算 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+2)}=\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

第三步:计算 $D(X)$

$$\begin{aligned}D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2&=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta)-\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\end{aligned}$$

对分子进行详细展开化简:

$$\begin{aligned}\text{分子}&=\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta)-(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2)\\&=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2=\alpha\beta\end{aligned}$$

故得方差:

$$D(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

---

8. 对一目标进行射击, 直到击中 r 次为止. 若命中率为 p, 求需射击次数的均值与方差.

解: 设 X 为击中 r 次所需的总射击次数。可将 X 拆解为 r 个独立的阶段:$X=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_r$。其中 ξ_1 为击中第 1 次所需的次数,ξ_2 为在击中第 1 次后到击中第 2 次所需的次数,以此类推。由于每次射击独立,每个 ξ_i 都服从几何分布 $G(p)$,其均值 $E(\xi_i)=\frac{1}{p}$,方差 $D(\xi_i)=\frac{1-p}{p^2}$。由期望与方差的线性性质(各阶段相互独立):$E(X)=\sum_{i=1}^r E(\xi_i)=\frac{r}{p}$。$D(X)=\sum_{i=1}^r D(\xi_i)=\frac{r(1-p)}{p^2}$。