

# 《概率统计讲义》习题参考答案

作者: txbb

## 第二章 随机变量与概率分布

### 习题六 离散型随机变量

1. 求例 1.1 中“抽得的次品件数”  $X$  的概率分布。

(附例 1.1 内容: 设有产品 100 件, 其中有 5 件次品、95 件正品。现从中随便抽取 20 件, 问“抽得的次品件数”  $X$  是多少?)

解: 这是一个超几何分布问题。产品总数  $N = 100$ , 次品数  $M = 5$ , 抽取数  $n = 20$ 。随机变量  $X$  表示抽到的次品数, 其取值范围为  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  (因为总共只有 5 件次品)。根据超几何分布公式, 分布律为:

$$P\{X = k\} = \frac{C_5^k C_{95}^{20-k}}{C_{100}^{20}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

---

2. 求例 1.3 中“击中目标次数”  $X$  的概率分布。

(附例 1.3 内容: 设某射手每次射击打中目标的概率是 0.8, 现在连续射击 30 次。则“击中目标的次数”  $X$  是一个随机变量。)

解: 这是一个独立重复试验 (伯努利试验) 问题。射击次数  $n = 30$ , 单次击中概率  $p = 0.8$ 。随机变量  $X$  服从二项分布  $B(30, 0.8)$ 。 $X$  的可能取值为  $0, 1, 2, \dots, 30$ 。分布律为:

$$P\{X = k\} = C_{30}^k (0.8)^k (0.2)^{30-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 30.$$

---

3. 求例 1.4 中“所需射击次数”  $X$  的概率分布。

(附例 1.4 内容: 某射手每次射击打中目标的概率是 0.8, 现在连续向一个目标射击, 直到第一次击中目标时为止。则“射击次数”  $X$  是一个随机变量。)

**解：**这是几何分布问题。事件“击中目标”在前  $k-1$  次未发生，而在第  $k$  次发生。单次击中概率  $p = 0.8$ ，未击中概率  $q = 1 - 0.8 = 0.2$ 。 $X$  的可能取值为  $1, 2, 3, \dots$ 。分布律为：

$$P\{X = k\} = (0.2)^{k-1} \cdot 0.8, \quad k = 1, 2, \dots$$

**4. 一批零件中有九个正品与三个废品。安装机器时，从这批零件中任取一个。如果每次取出的废品不再放回，而再取一个零件，直到取得正品时为止。求在取得正品以前已取出废品数的概率分布。**

**解：**设  $X$  为取得正品以前已取出的废品数。零件总数为 12 个（9 正 3 废）。由于只有 3 个废品， $X$  的可能取值为  $0, 1, 2, 3$ 。

- $X = 0$ ：第一次就取到正品。

$$P(X = 0) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

- $X = 1$ ：第一次取到废品，第二次取到正品。

$$P(X = 1) = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} = \frac{1}{4} \times \frac{9}{11} = \frac{9}{44}$$

- $X = 2$ ：前两次取到废品，第三次取到正品。

$$P(X = 2) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{440} = \frac{9}{220}$$

- $X = 3$ ：前三次取到废品，第四次取到正品（必然事件，因为只剩正品）。

$$P(X = 3) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} \times 1 = \frac{6}{1320} = \frac{1}{220}$$

分布律列表如下：

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

**5. 抛掷一枚分币，直到出现“正面朝上”时为止。求抛掷次数的概率分布。**

**解：**设  $X$  为抛掷次数。分币出现正面的概率  $p = 1/2$ 。这是一个几何分布。

$$P\{X = k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

6. 从一副扑克牌中发出五张，求其中黑桃张数的概率分布。

解：设  $X$  为发出的 5 张牌中黑桃的张数。一副牌 52 张 ( $N = 52$ )，其中黑桃 13 张 ( $M = 13$ )，发出 5 张 ( $n = 5$ )。  $X$  服从超几何分布，取值为  $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。分布律为：

$$P\{X = k\} = \frac{C_{13}^k C_{39}^{5-k}}{C_{52}^5}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

7. 设  $X$  服从泊松分布，且已知  $P(X = 1) = P(X = 2)$ ，求  $P(X = 4)$ 。

解：泊松分布律为  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 。由题意  $P(X = 1) = P(X = 2)$ ，得：

$$\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$

因为  $e^{-\lambda} \neq 0$ ，且参数  $\lambda > 0$ ，可化简为：

$$\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \implies 1 = \frac{\lambda}{2} \implies \lambda = 2$$

所以：

$$P(X = 4) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} = \frac{16}{24} e^{-2} = \frac{2}{3} e^{-2} \approx 0.0902$$

8. 已知一电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布。求：(1) 每分钟恰有 8 次呼唤的概率；(2) 每分钟呼唤次数大于 8 的概率。

解：设每分钟呼唤次数为  $X$ ，则  $X \sim P(4)$ 。公式： $P(X = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}$ 。

$$(1) P(X = 8) = \frac{4^8}{8!} e^{-4} = \frac{65536}{40320} \times 0.0183156 \approx 0.0298.$$

$$(2) P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \sum_{k=0}^8 \frac{4^k}{k!} e^{-4} \approx 0.0214.$$

答：(1) 0.0298；(2) 0.0214。

9. 设  $X$  服从泊松分布，分布律为  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。问当  $k$  取何值时  $P\{X = k\}$  最大？

解：考察前后两项的比值：

$$\frac{P(X = k)}{P(X = k - 1)} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k}$$

- 当  $k < \lambda$  时, 比值  $> 1$ , 概率值递增;
- 当  $k > \lambda$  时, 比值  $< 1$ , 概率值递减。

由此讨论: 1. 若  $\lambda$  不是整数, 概率值在  $k = [\lambda]$  ( $\lambda$  的整数部分) 时达到最大。2. 若  $\lambda$  是整数: 当  $k = \lambda$  时, 比值为 1, 即  $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$ 。此时概率值在  $k = \lambda$  和  $k = \lambda - 1$  时同时达到最大。

综上所述:

$$k = \begin{cases} [\lambda] & \text{如果 } \lambda \text{ 不是整数} \\ \lambda - 1, \lambda & \text{如果 } \lambda \text{ 是整数} \end{cases}$$

10. 验证等式  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$  ( $\lambda > 0$ ) (泊松分布的“总概率”为 1)。

证明: 将常数因子  $e^{-\lambda}$  提到求和符号外面, 利用  $e^x$  的麦克劳林级数展开式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

因为  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ , 所以  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ 。代入得:

$$e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$$

等式成立。

11. 利用恒等式  $(1+x)^N = (1+x)^M \cdot (1+x)^{N-M}$  两边  $x^n$  的系数相等, 验证等式

$$\sum_{k=0}^l \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1$$

验证:

我们要利用多项式恒等原理, 比较等式两边  $x^n$  项的系数。

第一步: 考察等式左边  $(1+x)^N$

根据二项式定理:

$$(1+x)^N = \sum_{r=0}^N C_N^r x^r = C_N^0 + C_N^1 x + \cdots + C_N^n x^n + \cdots + C_N^N x^N$$

显然，等式左边  $x^n$  的系数是  $C_N^n$ 。

**第二步：考察等式右边  $(1+x)^M \cdot (1+x)^{N-M}$**

我们将右边看作两个多项式的乘积：

- 第一个因子： $(1+x)^M = C_M^0 + C_M^1 x + C_M^2 x^2 + \cdots + C_M^M x^M$
- 第二个因子： $(1+x)^{N-M} = C_{N-M}^0 + C_{N-M}^1 x + \cdots + C_{N-M}^{N-M} x^{N-M}$

**第三步：详细分析右边乘积中  $x^n$  的系数来源**

两个多项式相乘时，结果中的每一项都是由第一个多项式中的某一项  $C_M^i x^i$  与第二个多项式中的某一项  $C_{N-M}^j x^j$  相乘得到的。即：

$$(C_M^i x^i) \cdot (C_{N-M}^j x^j) = C_M^i C_{N-M}^j x^{i+j}$$

为了得到  $x^n$  项，我们需要指数满足  $i+j=n$ 。如果我们令第一个多项式的指数  $i=k$ ，那么第二个多项式的指数必须是  $j=n-k$ 。

让我们列举出所有能“凑”出  $x^n$  的组合情况：

1. 取第一个式子的  $x^0$  项和第二个式子的  $x^n$  项： $C_M^0 \cdot C_{N-M}^n x^n$
2. 取第一个式子的  $x^1$  项和第二个式子的  $x^{n-1}$  项： $C_M^1 x \cdot C_{N-M}^{n-1} x^{n-1} = C_M^1 C_{N-M}^{n-1} x^n$
3. 取第一个式子的  $x^2$  项和第二个式子的  $x^{n-2}$  项： $C_M^2 x^2 \cdot C_{N-M}^{n-2} x^{n-2} = C_M^2 C_{N-M}^{n-2} x^n$
4. ....
5. 一般情况：取第一个式子的  $x^k$  项和第二个式子的  $x^{n-k}$  项： $C_M^k x^k \cdot C_{N-M}^{n-k} x^{n-k} = C_M^k C_{N-M}^{n-k} x^n$

由于这些项相加构成了总的  $x^n$  项，因此  $x^n$  的总系数就是上述所有情况系数的累加和。对  $k$  进行求和， $k$  的取值从 0 开始，直到取遍所有可能的情况（即  $k$  最多到  $n$ ，且受限于  $M$ ，故上限为  $l = \min(M, n)$ ）。

所以，右边  $x^n$  的系数为：

$$\sum_{k=0}^l C_M^k C_{N-M}^{n-k}$$

**第四步：利用系数相等得出结论**

根据多项式恒等原理，左右两边  $x^n$  的系数必须相等：

$$C_N^n = \sum_{k=0}^l C_M^k C_{N-M}^{n-k}$$

(范德蒙德恒等式 Vandermonde's Identity)。将等式两边同时除以  $C_N^n$ ：

$$1 = \frac{\sum_{k=0}^l C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

即：

$$\sum_{k=0}^l \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1$$

验证完毕。

## 习题七 连续型随机变量 + 随机变量函数的分布

1. 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} Cx & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2)  $X$  落在区间  $(0.3, 0.7)$  内的概率。

解: (1) 由概率密度的性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ , 得:

$$\int_0^1 Cx dx = C \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{C}{2} = 1 \implies C = 2$$

(2)  $X$  落在区间  $(0.3, 0.7)$  内的概率为:

$$P(0.3 < X < 0.7) = \int_{0.3}^{0.7} 2x dx = [x^2]_{0.3}^{0.7} = 0.7^2 - 0.3^2 = 0.49 - 0.09 = 0.4$$

答: (1)  $C = 2$ ; (2)  $0.4$ 。

---

2. 随机变量  $X$  的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2)  $X$  落在区间  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  内的概率。

解: (1) 利用归一性:

$$\int_{-1}^1 \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} dx = C [\arcsin x]_{-1}^1 = C \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = C\pi = 1 \implies C = \frac{1}{\pi}$$

(2) 所求概率为:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{6} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

答: (1)  $C = \frac{1}{\pi}$ ; (2)  $\frac{1}{3}$ 。

---

3. 随机变量  $X$  的概率密度为

$$p(x) = Ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

求 (1) 常数  $C$ ; (2)  $X$  落在区间  $(0, 1)$  内的概率。

解: (1) 函数  $p(x)$  为偶函数, 故:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-|x|} dx = 2C \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2C [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 2C(0 - (-1)) = 2C = 1 \implies C = \frac{1}{2}$$

(2) 所求概率为:

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} [-e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

答: (1)  $C = \frac{1}{2}$ ; (2)  $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ 。

---

4. 设  $X \sim N(1, 0.6^2)$ , 求  $P(X > 0)$  和  $P(0.2 < X < 1.8)$ 。

解: 由题意  $\mu = 1, \sigma = 0.6$ 。

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 1}{0.6}\right) = 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) \approx 0.9522$$

$$\begin{aligned} P(0.2 < X < 1.8) &= \Phi\left(\frac{1.8 - 1}{0.6}\right) - \Phi\left(\frac{0.2 - 1}{0.6}\right) \\ &= \Phi(1.33) - \Phi(-1.33) = 2\Phi(1.33) - 1 \\ &\approx 0.8172 \end{aligned}$$

答: 0.9522; 0.8172。

---

5. 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 对

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0.95, 0.90, 0.99$$

分别找出相应的  $k$  值 (查表)。又对于  $k$  的什么值有  $P(X > \mu - k\sigma) = 0.95$ ?

解: (1) 对于双侧区间:  $P(|X - \mu| < k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$ 。

$$\bullet \quad 2\Phi(k) - 1 = 0.95 \implies \Phi(k) = 0.975 \implies k = 1.96$$

- $2\Phi(k) - 1 = 0.90 \implies \Phi(k) = 0.95 \implies k = 1.645 \approx 1.65$
- $2\Phi(k) - 1 = 0.99 \implies \Phi(k) = 0.995 \implies k = 2.576 \approx 2.58$

(2) 对于单侧区间:

$$P(X > \mu - k\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > -k\right) = P(Z > -k) = \Phi(k)$$

令  $\Phi(k) = 0.95$ , 查表得  $k = 1.645 \approx 1.65$ 。

答:  $k$  依次为 1.96, 1.65, 2.58; 后者  $k = 1.65$ 。

## 6. 乘以什么常数 $C$ 将使 $Ce^{-x^2+x}$ 变成概率密度函数?

解: 要使函数成为概率密度函数, 其在  $(-\infty, +\infty)$  上的积分为 1。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-x^2+x} dx = 1$$

对指数部分进行配方:

$$-x^2 + x = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

代入积分式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} dx &= Ce^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2} dx \\ \text{令 } u = x - \frac{1}{2}, du &= dx \quad = Ce^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

利用高斯积分公式  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ , 得:

$$Ce^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi} = 1$$

解得:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$$

答:  $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$ 。

## 7. 设 $X$ 的密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2+1)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求  $Y = \ln X$  的密度。(当  $x \leq 0$  时, 规定  $\ln x = 0$ 。)

解: 当  $x > 0$  时,  $y = \ln x$  是单调增函数, 反函数为  $x = e^y$ , 导数为  $x' = e^y$ 。Y 的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ 。根据随机变量函数的密度公式:

$$p_Y(y) = p_X(e^y) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{2}{\pi((e^y)^2 + 1)} \cdot e^y = \frac{2e^y}{\pi(e^{2y} + 1)}, \quad -\infty < y < +\infty$$

答:  $p_Y(y) = \frac{2e^y}{\pi(e^{2y} + 1)}, \quad -\infty < y < +\infty$ 。

8. 设  $X$  服从自由度为  $k$  的  $\chi^2$  分布:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求  $Y = \sqrt{X/k}$  的密度。

解: 当  $x > 0$  时,  $y = \sqrt{x/k} > 0$ , 即  $x = ky^2$ ,  $\frac{dx}{dy} = 2ky$ 。

$$p_Y(y) = p_X(ky^2) \cdot 2ky = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} (ky^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{ky^2}{2}} \cdot 2ky$$

整理得:

$$p_Y(y) = \frac{2k^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}) 2^{\frac{k}{2}}} y^{k-2} \cdot y \cdot e^{-\frac{ky^2}{2}} = \frac{2(k/2)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} y^{k-1} e^{-\frac{ky^2}{2}}, \quad y > 0$$

答:  $p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} y^{k-1} e^{-\frac{ky^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

9. 由统计物理学知道分子运动的速率  $X$  服从麦克斯韦 (Maxwell) 分布, 即密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中参数  $a > 0$ 。求分子的动能  $Y = \frac{1}{2}mX^2$  的密度。

解: 由  $y = \frac{1}{2}mx^2$  ( $x > 0$ ) 得  $x = \sqrt{\frac{2y}{m}}$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2my}}$ 。

$$p_Y(y) = p_X\left(\sqrt{\frac{2y}{m}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2my}} = \frac{4\left(\frac{2y}{m}\right)}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{2y}{ma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}\sqrt{y}}$$

$$= \frac{8y}{ma^3\sqrt{\pi}\sqrt{2m}\sqrt{y}} e^{-\frac{2y}{ma^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\alpha^3\sqrt{\pi}m^{3/2}} \sqrt{y} e^{-\frac{2y}{ma^2}}, \quad y > 0$$

$$\text{答: } p_Y(y) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{a^3\sqrt{\pi}m^{3/2}} \sqrt{y} e^{-\frac{2y}{ma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$


---

10. 设  $\ln X \sim N(1, 2^2)$ , 求  $P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right)$ 。 ( $\ln 2 = 0.693$ )

解: 令  $Y = \ln X$ , 则  $Y \sim N(1, 4)$ 。

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right) &= P(\ln 0.5 < \ln X < \ln 2) \\ &= P(-\ln 2 < Y < \ln 2) \\ &= P(-0.693 < Y < 0.693) \end{aligned}$$

标准化:  $Z = \frac{Y-1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} P &= P\left(\frac{-0.693-1}{2} < Z < \frac{0.693-1}{2}\right) \\ &= P(-0.8465 < Z < -0.1535) \\ &= \Phi(-0.1535) - \Phi(-0.8465) \\ &= (1 - \Phi(0.1535)) - (1 - \Phi(0.8465)) \\ &\approx 0.2403 \end{aligned}$$

答: 约为 0.2403。

---

11. 对球的直径作测量, 设其值均匀地分布在  $[a, b]$  内。求体积的密度函数。

解: 设直径为  $D \sim U(a, b)$ , 密度  $p_D(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$ 。体积  $V = \frac{\pi}{6}D^3$ 。当  $a \leq D \leq b$  时,  $\frac{\pi a^3}{6} \leq V \leq \frac{\pi b^3}{6}$ 。反函数  $D = \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{1/3}$ , 导数  $\frac{dD}{dV} = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} V^{-2/3}$ 。

$$p_V(y) = p_D(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} y^{-2/3} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/3} y^{-2/3}$$

$$\text{答: } p_V(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \left(\frac{2}{9\pi}\right)^{1/3} y^{-2/3} & \frac{\pi a^3}{6} \leq y \leq \frac{\pi b^3}{6} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$


---

12. 点随机地落在中心在原点, 半径为  $R$  的圆周上, 并且对弧长是均匀地分布的。求落点的横坐标的概率密度。

解: 设极角  $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ 。横坐标  $X = R \cos \Theta$ 。分布函数  $F_X(x) = P(R \cos \Theta \leq x) = P(\cos \Theta \leq x/R)$ 。由于对称性, 考虑  $\Theta \in [0, \pi]$ , 对应密度  $1/\pi$ 。 $X$  单调减。 $x = R \cos \theta \implies \theta = \arccos(x/R)$ 。

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{d\theta}{dx} \right| = \frac{1}{\pi} \left| -\frac{1}{\sqrt{1-(x/R)^2}} \cdot \frac{1}{R} \right| = \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - x^2}}, \quad |x| < R$$

答:  $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - x^2}} & |x| < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

---

13. 设随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求  $P\{X \leq 2\}, P\{X > 3\}$ ; (2) 求  $X$  的密度函数  $p(x)$ 。

解: (1)  $P\{X \leq 2\} = F(2) = 1 - e^{-2} \approx 0.8647$ 。  $P\{X > 3\} = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} \approx 0.0498$ 。

(2) 对  $F(x)$  求导得:  $p(x) = F'(x) = e^{-x}, (x > 0)$ 。

答: (1) 0.8647, 0.0498; (2)  $p(x) = e^{-x}(x > 0), 0(x \leq 0)$ 。

---

14. 设随机变量  $X$  的分布密度为 (1)  $p(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$  (2)  $p(x) =$

$$\begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \text{ 求 } X \text{ 的分布函数 } F(x), \text{ 并作出 (2) 中 } p(x) \text{ 与 } F(x) \text{ 的图形。}$$

解: 分布函数定义为  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ 。

(1)

- 当  $x \leq -1$  时,  $p(t) = 0$ , 故  $F(x) = 0$ 。
- 当  $-1 < x < 1$  时,

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt$$

令  $t = \sin u, dt = \cos u du$ , 下限  $-1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ , 上限  $x \rightarrow \arcsin x$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \cos^2 u du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{1}{\pi} \left[ u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \\ &= \frac{1}{\pi} [u + \sin u \cos u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

- 当  $x \geq 1$  时,  $F(x) = 1$ 。

综上所述:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(2)

- 当  $x < 0$  时,  $p(t) = 0$ , 故  $F(x) = 0$ 。
- 当  $0 \leq x < 1$  时,

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2$$

- 当  $1 \leq x < 2$  时,

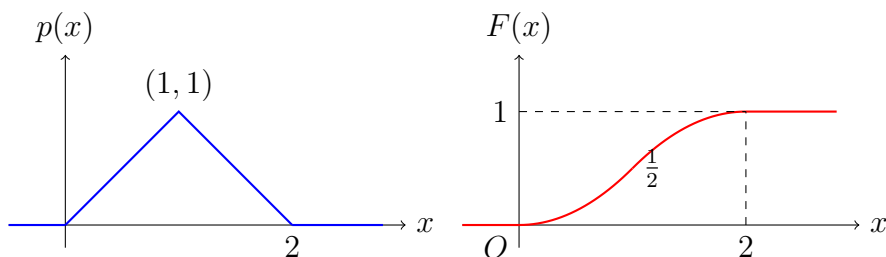
$$F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = \frac{1}{2} + \left[ 2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{1}{2} + \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) - \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

- 当  $x \geq 2$  时,  $F(x) = 1$ 。

综上所述:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

图形绘制 (示意图):



15. 某产品的质量指标  $X \sim N(160, \sigma^2)$ , 若要求  $P\{120 < X < 200\} \geq 0.80$ , 问: 允许  $\sigma$  最多为多少?

解: 由题意, 均值  $\mu = 160$ 。所求概率区间  $(120, 200)$  关于均值对称  $(160 \pm 40)$ 。

$$\begin{aligned} P\{120 < X < 200\} &= P\left(\frac{120 - 160}{\sigma} < \frac{X - 160}{\sigma} < \frac{200 - 160}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{40}{\sigma} < Z < \frac{40}{\sigma}\right) \quad (\text{其中 } Z \sim N(0, 1)) \\ &= 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

题目要求该概率  $\geq 0.80$ , 即:

$$2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.80 \implies \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.90$$

查标准正态分布表可知,  $\Phi(1.28) \approx 0.90$ 。因此需要:

$$\frac{40}{\sigma} \geq 1.28 \implies \sigma \leq \frac{40}{1.28} = 31.25$$

答: 允许  $\sigma$  最多为 31.25。

16. 如果  $X$  的分布函数  $F(x)$  具有连续的导函数  $F'(x)$ , 试证:  $F'(x)$  是  $X$  的分布密度。

**证明：**要证明  $p(x) = F'(x)$  是概率密度函数，需验证其满足概率密度的两个性质：

1. **非负性：**由于分布函数  $F(x) = P(X \leq x)$  是单调不减函数，其导数（在存在处）必非负。即  $p(x) = F'(x) \geq 0$ 。
2. **归一性：**利用牛顿-莱布尼茨公式（微积分基本定理）：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty)$$

由分布函数的性质知  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$ 。故  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ 。

此外，对于任意  $x$ ，有  $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$ 。综上所述， $F'(x)$  确为  $X$  的分布密度。

**17. 设  $X$  的分布函数  $F(x)$  满足下列条件：**

1.  $F(x)$  连续；
2. 存在  $x_1 < x_2 < \cdots < x_n (n \geq 1)$ ，在区间  $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_n, +\infty)$  上  $F'(x)$  存在且连续。

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{当 } F'(x) \text{ 存在时} \\ 0 & \text{当 } F'(x) \text{ 不存在时} \end{cases}$$

**试证：** $f(x)$  是  $X$  的分布密度。

**证明：**与第 16 题类似，需验证非负性和积分值。

1. **非负性：**在  $F'(x)$  存在的区间上，因  $F(x)$  单调不减，故  $F'(x) \geq 0$ 。在  $F'(x)$  不存在的点， $f(x) = 0$ 。故恒有  $f(x) \geq 0$ 。

2. **积分还原分布函数：**对于任意  $x$ ，不妨设  $x$  落在第  $k$  个区间  $(x_k, x_{k+1})$  内（记  $x_0 = -\infty$ ）。

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F'(t)dt + \int_{x_k}^x F'(t)dt$$

由于  $F(x)$  连续（包括在分点  $x_i$  处），根据微积分基本定理：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F'(t)dt = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

所以积分和为：

$$[F(x_1) - F(-\infty)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x) - F(x_k)]$$

这是一个对消和, 结果为  $F(x) - F(-\infty) = F(x)$ 。即  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 。

满足密度函数的定义, 故证毕。

---

18. 设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$  不是连续函数, 试证明: 随机变量  $Y = F(X)$  一定不服从  $(0, 1)$  上的均匀分布。

**证明:** 利用反证法。假设  $Y \sim U(0, 1)$ 。由于  $F(x)$  不是连续函数, 则存在至少一个间断点  $x_0$ 。因为  $F(x)$  是单调不减的右连续函数, 间断点必为跳跃间断点。即  $F(x_0) - F(x_0-) = p > 0$ , 其中  $F(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$ 。这意味着  $P(X = x_0) = p > 0$ 。

考察随机变量  $Y = F(X)$  在点  $y_0 = F(x_0)$  处的取值概率:

$$P(Y = F(x_0)) = P(F(X) = F(x_0))$$

由于当  $X = x_0$  时,  $F(X) = F(x_0)$ , 故事件  $\{X = x_0\} \subseteq \{F(X) = F(x_0)\}$ 。所以:

$$P(Y = F(x_0)) \geq P(X = x_0) = p > 0$$

然而, 若  $Y$  服从  $(0, 1)$  上的均匀分布, 则  $Y$  是连续型随机变量。对于任何连续型随机变量, 其在任意单点处的概率应为 0, 即  $P(Y = y) = 0$  对任意  $y$  成立。这与上述推导  $P(Y = F(x_0)) > 0$  矛盾。

因此, 随机变量  $Y = F(X)$  一定不服从  $(0, 1)$  上的均匀分布。