

《概率统计讲义》习题参考答案

作者: txbb

第一章 随机事件与概率

习题一 古典概型

1. 求例 1.2 及例 1.3 中的 $P(A), P(B)$ 。

(附例 1.2 内容: 投掷两枚分币, $A =$ “两个都是正面朝上”, $B =$ “两个都是正面朝下”。)

(附例 1.3 内容: 从十个同类产品 (其中有 8 个正品, 2 个次品) 中, 任意抽取三个。
 $A =$ “三个都是正品”, $B =$ “至少有一个是次品”。)

解:

(1) 对于例 1.2: 投掷两枚分币, 样本空间为 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$, 总样本点数 $n = 4$ 。

- 事件 A (两个都是正面朝上) 包含 1 个样本点 $\{(\text{正}, \text{正})\}$, 故 $P(A) = \frac{1}{4}$ 。
- 事件 B (两个都是正面朝下) 包含 1 个样本点 $\{(\text{反}, \text{反})\}$, 故 $P(B) = \frac{1}{4}$ 。

(2) 对于例 1.3: 从 10 个产品中任取 3 个, 样本点总数为 $n = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ 。

- 事件 A (三个都是正品) 需从 8 个正品中取出 3 个, 样本点数为 $m_A = C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ 。

$$P(A) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

- 事件 B (至少有一个是次品) 是事件 A 的对立事件, 即 $B = \bar{A}$ 。

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

综上: 例 1.2 中: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}$; 例 1.3 中: $P(A) = \frac{7}{15}, P(B) = \frac{8}{15}$ 。

2. 袋中有红、黄、白色球各一个，每次任取一个，有放回地抽三次，求下列事件的概率：

$A =$ “三个都是红的” = “全红”， $B =$ “全黄”， $C =$ “全白”， $D =$ “颜色全同”， $E =$ “全不同”， $F =$ “不全同”， $G =$ “无红”， $H =$ “无黄”， $I =$ “无白”， $J =$ “无红且无黄”， $K =$ “全红或全黄”

解：每次从 3 个球中取 1 个，有放回地取 3 次，样本空间的总样本点数为 $n = 3 \times 3 \times 3 = 27$ 。

1. 求 $P(A), P(B), P(C)$ ：事件 A 即取出 (红, 红, 红)，仅 1 种情况。同理 B, C 各 1 种。

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{27}$$

2. 求 $P(D)$ ：事件 D (颜色全同) $= A \cup B \cup C$ 。因 A, B, C 互不相容，

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

3. 求 $P(E)$ ：事件 E (全不同) 意味着三次取出的颜色分别为红、黄、白的一个排列，共有 $A_3^3 = 3! = 6$ 种情况。

$$P(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

4. 求 $P(F)$ ：事件 F (不全同) 是事件 D (全同) 的对立事件。

$$P(F) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

5. 求 $P(G), P(H), P(I)$ ：事件 G (无红) 意味着每次只能取黄或白，共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种情况。 H (无黄) 和 I (无白) 同理。

$$P(G) = P(H) = P(I) = \frac{8}{27}$$

6. 求 $P(J)$ ：事件 J (无红且无黄) 意味着三次都只能取白色，即事件 C 。

$$P(J) = P(C) = \frac{1}{27}$$

7. 求 $P(K)$ ：事件 K (全红或全黄) $= A \cup B$ 。因 A, B 互斥，

$$P(K) = P(A) + P(B) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

3. 从一副扑克的 52 张牌中, 任意抽取两张, 问都是黑桃的概率有多大?

解: 从 52 张牌中任取 2 张, 样本点总数为 $n = C_{52}^2$ 。一副牌中有 13 张黑桃。事件“都是黑桃”意味着从 13 张黑桃中取出 2 张, 样本点数为 $m = C_{13}^2$ 。所求概率为:

$$P = \frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{\frac{13 \times 12}{2}}{\frac{52 \times 51}{2}} = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

4. 在例 2.4 中, 求至少有两件次品的概率。

(附例 2.4 内容: 100 件产品, 其中有 5 件次品, 从中任取 50 件。)

解: 设从 100 件产品 (5 次品, 95 正品) 中任取 50 件, 取出的次品数为 X 。样本点总数 $n = C_{100}^{50}$ 。事件“至少有两件次品”即 $X \geq 2$ 。利用对立事件求解, 即排除“恰有 0 件次品”和“恰有 1 件次品”的情况。

- 恰有 0 件次品 ($X = 0$) 的取法: $C_5^0 C_{95}^{50} = C_{95}^{50}$ 。
- 恰有 1 件次品 ($X = 1$) 的取法: $C_5^1 C_{95}^{49} = 5C_{95}^{49}$ 。

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{C_{95}^{50} + 5C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$$

至少有两件次品的概率 $P \approx 0.82$ 。

5. 五人排队抓阄, 决定谁取得一物 (即五个阄中有四个是白阄, 只有一个是有物之阄)。

(1) 问第三人抓到有物之阄的概率是多少?

(2) 前三人之一抓到有物之阄的概率是多少?

(3) 如果有两物 (即五个阄中有两个是有物之阄), 问后两个人都抓不到有物之阄的概率是多少?

解: (1) 抽签具有对称性, 与次序无关。任何一个人抓到有物之阄的概率都相等。

$$P_1 = \frac{1}{5}$$

(2) “前三人之一抓到”即“第 1 人中”或“第 2 人中”或“第 3 人中”。由于只有一个有物之阄, 这些事件是互斥的。

$$P_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

(3) 此时有 2 个有物之阄, 3 个白阄。“后两个人抓不到有物之阄”等价于“后两个人抓到的都是白阄”。这相当于从 5 个阄中选出 2 个给最后两人, 且这两个必须来自 3 个白阄。

$$P_3 = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

答: (1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $\frac{3}{10}$ 。

习题二 事件的运算及概率的加法公式

1. 某产品 40 件，其中有次品 3 件。现从中任取两件，求其中至少有一件次品的概率。

解：设从 40 件产品中任取两件，样本点总数为 $n = C_{40}^2$ 。设事件 A 为“至少有一件次品”。考虑其对立事件 \bar{A} 为“两件全是正品”。产品中有 $40 - 3 = 37$ 件正品。

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{37}^2}{C_{40}^2} = \frac{\frac{37 \times 36}{2}}{\frac{40 \times 39}{2}} = \frac{37 \times 36}{40 \times 39} = \frac{37 \times 3}{10 \times 13} = \frac{111}{130}$$

利用对立事件概率公式：

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{111}{130} = \frac{19}{130} \approx 0.146$$

答：其中至少有一件次品的概率为 $\frac{19}{130}$ （约 0.146）。

2. 对立与互不相容有何异同？试举例说明。

解：

1. 定义不同：

- **互不相容（互斥）**：若事件 A 和 B 不能同时发生，即 $AB = \emptyset$ ，则称 A 与 B 互不相容。
- **对立（互逆）**：若事件 A 和 B 互不相容且它们的和事件为必然事件，即 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$ ，则称 A 与 B 互为对立事件。

2. **联系与区别**：对立事件一定是互不相容的，但互不相容的事件不一定是对立事件。对立要求两事件“非此即彼”，涵盖了样本空间的所有可能；而互不相容只要求“不同时发生”。

3. **举例**：掷一颗骰子， $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

- 令 $A = \{1\}, B = \{2\}$ 。此时 $AB = \emptyset$ ，故 A, B 互不相容；但 $A \cup B \neq \Omega$ ，故它们不是对立事件。
- 令 $C = \{\text{出现奇数}\}, D = \{\text{出现偶数}\}$ 。此时 $CD = \emptyset$ 且 $C \cup D = \Omega$ ，故 C, D 互为对立事件。

3. A, B, C 三事件互不相容与 $ABC = \emptyset$ 是否是一回事？为什么？

解：不是一回事。

- A, B, C 互不相容 (通常指两两互不相容) 意味着 $AB = \emptyset, AC = \emptyset, BC = \emptyset$ 。即任何两个事件都不能同时发生。
- $ABC = \emptyset$ 仅意味着三个事件不能同时发生, 但其中某两个事件完全可能同时发生。

反例: 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 。令 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 4\}$ 。此时 $ABC = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$ 。但是 $AB = \{2\} \neq \emptyset$, 故 A, B, C 不是互不相容的。因此两者概念不同。

4. 从一副扑克牌的 13 张黑桃中, 一张接一张地有放回地抽取 3 次, 问没有同号的概率 (假定在 13 张中抽到任何一张的机会是一样的)?

解: 每次抽取有 13 种可能, 有放回抽取 3 次, 样本空间总数 $n = 13 \times 13 \times 13 = 13^3$ 。事件“没有同号”即三次抽到的点数互不相同。第一次可任取 (13 种), 第二次只能取剩余的 (12 种), 第三次取剩余的 (11 种)。有利样本点数 $m = 13 \times 12 \times 11$ 。

$$P = \frac{13 \times 12 \times 11}{13^3} = \frac{12 \times 11}{13^2} = \frac{132}{169} \approx 0.781$$

答: 没有同号的概率为 $\frac{132}{169}$ 。

5. 同第 4 题, 问抽到有同号的概率?

解: “抽到有同号”是“没有同号”(即三个全不同)的对立事件。利用第 4 题的结果:

$$P(\text{有同号}) = 1 - P(\text{没有同号}) = 1 - \frac{132}{169} = \frac{37}{169} \approx 0.219$$

答: 抽到有同号的概率为 $\frac{37}{169}$ (约 0.219)。

6. 同第 4 题, 问抽到的 3 张中最多只有两张同号的概率?

解: “最多只有两张同号”的对立事件是“三张全部同号”。在 13 张牌中有放回取 3 次, 三张全部同号的情况有 13 种 (即 $(1,1,1), (2,2,2), \dots, (K,K,K)$)。

$$P(\text{三张全同}) = \frac{13}{13^3} = \frac{1}{13^2} = \frac{1}{169}$$

所以, “最多只有两张同号”的概率为:

$$P = 1 - P(\text{三张全同}) = 1 - \frac{1}{169} = \frac{168}{169} \approx 0.994$$

答：最多只有两张同号的概率为 $\frac{168}{169}$ (约 0.994)。

7. 将习题一第 2 题中的条件改为：盒中有四个球，其中两个红球、一个黄球、一个白球，其他不变，求 A, B, \dots, K 的概率，并求事件 $L = \text{“无红或无黄”}$ 的概率。

解：有放回地取 3 次，样本空间总数 $n = 4 \times 4 \times 4 = 64$ 。球的构成：红 (2)，黄 (1)，白 (1)。

1. $A = \text{“全红”}$ ：每次取红有 2 种可能。 $P(A) = \frac{2 \times 2 \times 2}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ 。

2. $B = \text{“全黄”}$ ：每次取黄有 1 种可能。 $P(B) = \frac{1^3}{64} = \frac{1}{64}$ 。

3. $C = \text{“全白”}$ ： $P(C) = \frac{1^3}{64} = \frac{1}{64}$ 。

4. $D = \text{“颜色全同”} = A \cup B \cup C$ (互斥)。 $P(D) = \frac{8+1+1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$ 。

5. $E = \text{“全不同”}$ ：即取出的颜色为红，黄，白的排列。每次取法数：红 (2)，黄 (1)，白 (1)。颜色排列顺序有 $A_3^3 = 6$ 种。样本数 $m = 6 \times (2 \times 1 \times 1) = 12$ 。 $P(E) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$ 。

6. $F = \text{“不全同”} = 1 - P(D)$ 。 $P(F) = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$ 。

7. $G = \text{“无红”}$ ：每次只能取黄或白 (共 2 个)。 $P(G) = \frac{2^3}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ 。

8. $H = \text{“无黄”}$ ：每次只能取红或白 (共 3 个)。 $P(H) = \frac{3^3}{64} = \frac{27}{64}$ 。

9. $I = \text{“无白”}$ ：每次只能取红或黄 (共 3 个)。 $P(I) = \frac{3^3}{64} = \frac{27}{64}$ 。

10. $J = \text{“无红且无黄”}$ ：即三次全白，等于 C 。 $P(J) = P(C) = \frac{1}{64}$ 。

11. $K = \text{“全红或全黄”} = P(A) + P(B)$ 。 $P(K) = \frac{8}{64} + \frac{1}{64} = \frac{9}{64}$ 。

12. $L = \text{“无红或无黄”} = G \cup H$ 。由加法公式： $P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(GH)$ 。 GH 表示“无红且无黄”，即 J 。 $P(L) = \frac{8}{64} + \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$ 。

8. 利用加法公式 (2) 导出三个事件的概率加法公式。

解：加法公式 (2) 为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。对于三个事件 A, B, C ，令 $M = A \cup B$ ，则 $P(A \cup B \cup C) = P(M \cup C)$ 。应用公式 (2)：

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(MC)$$

其中：1. $P(M) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 2. $MC = (A \cup B)C = AC \cup BC$ 所以 $P(MC) = P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(AC \cap BC)$ 注意到 $AC \cap BC = ABC$ ，

故 $P(MC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC)$ 。

代回原式：

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= [P(A) + P(B) - P(AB)] + P(C) - [P(AC) + P(BC) - P(ABC)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

即得三个事件的加法公式：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

9. 利用加法公式 (2) 和数学归纳法证明下列若尔当 (Jordan) 公式：设 A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) 是 n 个事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right) \right)$$

证明： (1) 当 $n = 2$ 时，公式右边为：

$$\sum_{k=1}^2 (\dots) = (-1)^0 \sum P(A_i) + (-1)^1 P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

这正是两个事件的加法公式，结论成立。

(2) 假设当 $n = m$ 时公式成立，即

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} S_k^{(m)}, \quad \text{其中 } S_k^{(m)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} P(A_{i_1} \cdots A_{i_k})$$

考虑 $n = m + 1$ 时：令 $B = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ，则 $\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i = B \cup A_{m+1}$ 。由两个事件的加法公式：

$$P(B \cup A_{m+1}) = P(B) + P(A_{m+1}) - P(BA_{m+1})$$

其中 $P(B)$ 由归纳假设给出。而 $BA_{m+1} = (\bigcup_{i=1}^m A_i)A_{m+1} = \bigcup_{i=1}^m (A_i A_{m+1})$ 。这也是 m 个事件的并，可应用归纳假设。展开各项并合并同类项（即包含 A_{m+1} 的项和不包含 A_{m+1} 的项），可以看出这恰好构成了 $n = m + 1$ 时的组合求和形式。

具体地，每一项 $P(A_{i_1} \cdots A_{i_k})$ 前的系数均符合公式要求，从而得证公式对 $n = m + 1$ 也成立。

结论：根据数学归纳法，该公式对一切 $n \geq 2$ 成立。

习题三 条件概率、乘法公式与独立性

1. 一个工人看管三台机床，在一小时内机床不需要工人照管的概率：第一台等于 0.9，第二台等于 0.8，第三台等于 0.7。求在一小时内三台机床中最多有一台需要工人照管的概率。（各机床是否需要照管是相互独立的）

解：设事件 A_i 表示“第 i 台机床在一小时内不需要工人照管” ($i = 1, 2, 3$)。已知 $P(A_1) = 0.9, P(A_2) = 0.8, P(A_3) = 0.7$ 。则机床需要照管（即 \bar{A}_i ）的概率分别为： $P(\bar{A}_1) = 0.1, P(\bar{A}_2) = 0.2, P(\bar{A}_3) = 0.3$ 。

设事件 B 为“三台机床中最多有一台需要工人照管”。 B 包含以下两种互斥的情况：

1. 0 台需要照管（即 3 台都不需要照管）：

$$P(A_1 A_2 A_3) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504$$

2. 恰有 1 台需要照管：

- 仅第 1 台需要 ($\bar{A}_1 A_2 A_3$): $0.1 \times 0.8 \times 0.7 = 0.056$
- 仅第 2 台需要 ($A_1 \bar{A}_2 A_3$): $0.9 \times 0.2 \times 0.7 = 0.126$
- 仅第 3 台需要 ($A_1 A_2 \bar{A}_3$): $0.9 \times 0.8 \times 0.3 = 0.216$

恰有 1 台需要照管的概率为 $0.056 + 0.126 + 0.216 = 0.398$ 。

因此，

$$P(B) = 0.504 + 0.398 = 0.902$$

答：最多有一台需要工人照管的概率为 0.902。

2. 电路由电池 A 与两个并联的电池 B 及 C 串联而成。设电池 A, B, C 损坏的概率分别是 0.3, 0.2, 0.2。求电路发生断电的概率。（各电池是否损坏是互不影响的）

解：设 A, B, C 分别表示电池 A, B, C 损坏的事件。已知 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(C) = 0.2$ 。电路结构为： A 串联 (B 并联 C)。电路发生断电（设为事件 E ），意味着通路被切断。通路被切断的条件是： A 坏了，或者 (B 和 C 同时坏了)。即 $E = A \cup (BC)$ 。利用概率加法公式：

$$P(E) = P(A) + P(BC) - P(A \cap BC)$$

由于各电池损坏互不影响（独立），且 $P(BC) = P(B)P(C) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$ 。

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.3 + 0.04 - 0.3 \times 0.04 \\ &= 0.34 - 0.012 \\ &= 0.328 \end{aligned}$$

答：电路发生断电的概率为 0.328。

3. 某机械零件的加工由两道工序组成。第一道工序的废品率为 0.015，第二道工序的废品率为 0.02，假定两工序出废品是彼此无关的，求产品的合格率。

解：设 D_1 为第一道工序合格， D_2 为第二道工序合格。则 $P(D_1) = 1 - 0.015 = 0.985$ ， $P(D_2) = 1 - 0.02 = 0.98$ 。产品合格意味着两道工序都必须合格。由于工序彼此无关（独立），产品合格率 $P(D)$ 为：

$$P(D) = P(D_1 D_2) = P(D_1)P(D_2) = 0.985 \times 0.98 = 0.9653$$

答：产品的合格率为 96.5%。

4. 在 $1, 2, \dots, 100$ 中任取一数，问它既能被 2 整除又能被 5 整除的概率是多少？它或被 2 整除或能被 5 整除的概率是多少？

解：设样本空间为 $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ ，样本点总数 $N = 100$ 。设 A 为“被 2 整除”， B 为“被 5 整除”。

- 被 2 整除的数有 $100 \div 2 = 50$ 个，故 $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ 。
- 被 5 整除的数有 $100 \div 5 = 20$ 个，故 $P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ 。

(1) 既能被 2 整除又能被 5 整除：即事件 AB ，意味着该数能被 10 整除。在 1 到 100 中，10 的倍数有 $10, 20, \dots, 100$ ，共 10 个。

$$P(AB) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

(2) 能被 2 整除或能被 5 整除：即事件 $A \cup B$ 。利用加法公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

答：既能被 2 整除又能被 5 整除的概率是 $\frac{1}{10}$ ；能被 2 整除或能被 5 整除的概率是 $\frac{3}{5}$ 。

5. 加工某一零件共需经过四道工序。设第一，二，三，四道工序的次品率分别是 2%, 3%, 5%, 3%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率。

解：直接求次品率较为繁琐（需要考虑至少一道工序出次品），利用对立事件先求“合格率”。设 A_i 表示第 i 道工序合格 ($i = 1, 2, 3, 4$)。各道工序合格的概率分别为： $P(A_1) = 1 - 0.02 = 0.98$ $P(A_2) = 1 - 0.03 = 0.97$ $P(A_3) = 1 - 0.05 = 0.95$ $P(A_4) = 1 - 0.03 = 0.97$

因为各工序互不影响，零件合格的概率为：

$$\begin{aligned} P(\text{合格}) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 0.98 \times 0.97 \times 0.95 \times 0.97 \\ &= 0.9506 \times 0.9215 \\ &\approx 0.875978 \end{aligned}$$

零件的次品率 $P(\text{次品}) = 1 - P(\text{合格})$ ：

$$P(\text{次品}) = 1 - 0.875978 = 0.124022 \approx 0.124$$

答：加工出来的零件的次品率为 0.124。

6. 当掷五枚分币时，已知至少出现两个正面，问正面数刚好是三个的条件概率是什么？

解：设事件 B 为“至少出现两个正面”，事件 A 为“正面数刚好是三个”。题目要求求条件概率 $P(A|B)$ 。掷五枚分币，样本空间总数为 $2^5 = 32$ 。

1. 计算 $P(B)$ ：“至少两个正面”的对立事件是“0 个正面”或“1 个正面”。

- 0 个正面（全反）： $C_5^0 = 1$ 种情况。
- 1 个正面： $C_5^1 = 5$ 种情况。

事件 B 包含的样本点数 $n(B) = 32 - 1 - 5 = 26$ 。所以 $P(B) = \frac{26}{32}$ 。

2. 计算 $P(AB)$ ：事件 AB 表示“至少出现两个正面 且 正面数刚好是三个”，这实际上就是事件 A 本身（因为 3 个正面满足至少 2 个正面的条件）。事件 A （3 个正面）的样本点数 $n(A) = C_5^3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 。所以 $P(AB) = P(A) = \frac{10}{32}$ 。

3. 计算 $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{10/32}{26/32} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

答：正面数刚好是三个的条件概率是 $\frac{5}{13}$ 。

习题四 全概公式与逆概公式

1. 两台机床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是 0.03，第二台出现废品的概率是 0.02。加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的零件是合格品的概率；又：如果任意取出的零件经检查是废品，求它是由第二台机床加工的概率。

解：设 M_1, M_2 分别表示“零件是由第一台、第二台机床加工的”事件。设 B 表示“取出的是废品”， A 表示“取出的是合格品”（即 \bar{B} ）。根据题意：1. 第一台加工的零件比第二台多一倍，即数量之比为 2:1。

$$P(M_1) = \frac{2}{3}, \quad P(M_2) = \frac{1}{3}$$

2. 各机床出现废品的概率（条件概率）：

$$P(B|M_1) = 0.03 \implies P(A|M_1) = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$P(B|M_2) = 0.02 \implies P(A|M_2) = 1 - 0.02 = 0.98$$

(1) 求任意取出的零件是合格品的概率 $P(A)$ ：

由全概率公式：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(M_1)P(A|M_1) + P(M_2)P(A|M_2) \\ &= \frac{2}{3} \times 0.97 + \frac{1}{3} \times 0.98 \\ &= \frac{1.94 + 0.98}{3} \\ &= \frac{2.92}{3} \approx 0.973 \end{aligned}$$

(2) 已知是废品，求它是第二台机床加工的概率 $P(M_2|B)$ ：

首先计算取出废品的总概率 $P(B)$ ：

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2.92}{3} = \frac{0.08}{3}$$

或者利用全概率公式计算： $P(B) = \frac{2}{3} \times 0.03 + \frac{1}{3} \times 0.02 = \frac{0.06+0.02}{3} = \frac{0.08}{3}$ 。

由贝叶斯公式：

$$P(M_2|B) = \frac{P(M_2)P(B|M_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0.02}{\frac{0.08}{3}} = \frac{0.02}{0.08} = \frac{1}{4} = 0.25$$

答：合格品的概率为 0.973；如果是废品，来自第二台机床的概率为 0.25。

2. 盒中放有 12 个乒乓球, 其中有 9 个是新的。第一次比赛时从中任取 3 个来用, 比赛后仍放回盒中。第二次比赛时再从盒中任取 3 个, 求第二次取出的球都是新球的概率。又: 已知第二次取出的球都是新球, 求第一次取到都是新球的概率。

解: 设 $H_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 表示第一次比赛取出的 3 个球中有 i 个是新球。由于取出的新球比赛后变成了旧球, 盒中新球的数量会发生变化。初始状态: 12 球 (9 新, 3 旧)。样本总数 $N = C_{12}^3 = 220$ 。

各假设及其概率 $P(H_i)$ 和对应的第二次全取新球的条件概率 $P(A|H_i)$ 如下 (设 A 为第二次取出的 3 个都是新球):

- H_0 (第一次取 0 新 3 旧): $P(H_0) = \frac{C_9^0 C_3^3}{220} = \frac{1}{220}$ 。放回后新球仍为 9 个。 $P(A|H_0) = \frac{C_9^3}{220} = \frac{84}{220}$ 。
- H_1 (第一次取 1 新 2 旧): $P(H_1) = \frac{C_9^1 C_3^2}{220} = \frac{9 \times 3}{220} = \frac{27}{220}$ 。放回后新球变为 $9 - 1 = 8$ 个。 $P(A|H_1) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$ 。
- H_2 (第一次取 2 新 1 旧): $P(H_2) = \frac{C_9^2 C_3^1}{220} = \frac{36 \times 3}{220} = \frac{108}{220}$ 。放回后新球变为 $9 - 2 = 7$ 个。 $P(A|H_2) = \frac{C_7^3}{220} = \frac{35}{220}$ 。
- H_3 (第一次取 3 新 0 旧): $P(H_3) = \frac{C_9^3 C_3^0}{220} = \frac{84 \times 1}{220} = \frac{84}{220}$ 。放回后新球变为 $9 - 3 = 6$ 个。 $P(A|H_3) = \frac{C_6^3}{220} = \frac{20}{220}$ 。

(1) 求 $P(A)$: 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^3 P(H_i)P(A|H_i) \\ &= \frac{1}{220^2} (1 \times 84 + 27 \times 56 + 108 \times 35 + 84 \times 20) \\ &= \frac{1}{48400} (84 + 1512 + 3780 + 1680) \\ &= \frac{7056}{48400} \approx 0.1458 \end{aligned}$$

(2) 求 $P(H_3|A)$: 由贝叶斯公式:

$$\begin{aligned} P(H_3|A) &= \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{84}{220} \times \frac{20}{220}}{\frac{7056}{220^2}} \\ &= \frac{1680}{7056} = \frac{1680 \div 336}{7056 \div 336} = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

答：第二次取出都是新球的概率为 0.1458；在此条件下，第一次取出都是新球的概率为 5/21。

3. 有三只盒子，在甲盒中装有 2 枝红芯圆珠笔、4 枝蓝芯圆珠笔，乙盒中装有 4 枝红的、2 枝蓝的，丙盒中装有 3 枝红的、3 枝蓝的。今从中任取一枝。设到三只盒子中取物的机会相同，它是红芯圆珠笔的概率为多少？又若已知取得的是红的，它是从甲盒中取出的概率为多少？

解：设 A, B, C 分别代表取自甲、乙、丙盒的事件， R 代表取出红笔的事件。已知：

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

各盒中红笔的比例（条件概率）：

$$P(R|A) = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}$$

$$P(R|B) = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$$

$$P(R|C) = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

(1) 求它是红芯圆珠笔的概率 $P(R)$ ：

由全概率公式：

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) + P(C)P(R|C) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 已知取得的是红的，求从甲盒取出的概率 $P(A|R)$ ：

由贝叶斯公式：

$$P(A|R) = \frac{P(A)P(R|A)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

答：取出红芯圆珠笔的概率为 1/2；已知是红笔，它来自甲盒的概率为 2/9。

习题五 独立试验序列模型

1. 设某种型号的电灯的次品率为 0.01, 现在从产品中抽取 4 个, 分别求出没有次品、有 1 个次品、有 2 个次品、有 3 个次品、全是次品的概率。

解: 设 X 表示抽取的 4 个电阻中的次品数。这是一个 $n = 4$ 的伯努利试验 (独立重复试验)。次品率 $p = 0.01$, 合格品率 $q = 1 - p = 0.99$ 。根据二项分布公式 $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, 计算如下:

1. 没有次品 ($k = 0$):

$$P(X = 0) = C_4^0 (0.01)^0 (0.99)^4 = 0.99^4 \approx 0.9606$$

2. 有 1 个次品 ($k = 1$):

$$P(X = 1) = C_4^1 (0.01)^1 (0.99)^3 = 4 \times 0.01 \times 0.970299 \approx 0.0388$$

3. 有 2 个次品 ($k = 2$):

$$P(X = 2) = C_4^2 (0.01)^2 (0.99)^2 = 6 \times 0.0001 \times 0.9801 \approx 0.0006$$

4. 有 3 个次品 ($k = 3$):

$$P(X = 3) = C_4^3 (0.01)^3 (0.99)^1 = 4 \times 0.000001 \times 0.99 \approx 0$$

5. 全是次品 ($k = 4$):

$$P(X = 4) = C_4^4 (0.01)^4 (0.99)^0 = 1 \times 10^{-8} \approx 0$$

答: 概率依次约为 0.9606, 0.0388, 0.0006, 0, 0。

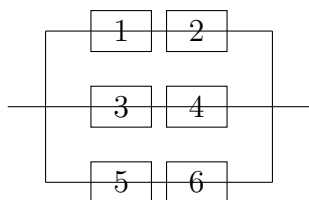
2. 某类电灯泡使用时数在 1000 h 以上的概率为 0.2, 求三个灯泡在使用 1000 h 以后最多只有一个坏的概率。

解: 设“灯泡坏了”(即寿命 ≤ 1000 h) 为事件 \bar{A} , “灯泡完好”(即寿命 > 1000 h) 为事件 A 。已知 $P(A) = 0.2$, 则 $P(\bar{A}) = 1 - 0.2 = 0.8$ 。设 3 个灯泡中坏掉的个数为 Y , 则 $Y \sim B(3, 0.8)$ 。“最多只有一个坏”即 $Y \leq 1$, 包含“0 个坏 (3 个好)”和“1 个坏 (2 个好)”两种情况。

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\
 &= C_3^0(0.8)^0(0.2)^3 + C_3^1(0.8)^1(0.2)^2 \\
 &= 1 \times 1 \times 0.008 + 3 \times 0.8 \times 0.04 \\
 &= 0.008 + 0.096 \\
 &= 0.104
 \end{aligned}$$

答：最多只有一个坏的概率为 0.104。

3. 有 6 个元件，它们断电的概率第一个为 $p_1 = 0.6$ ，第二个为 $p_2 = 0.2$ ，其余四个都为 $p_3 = 0.3$ ，求线路断电的概率，若 (1) 所有的元件串联； (2) 元件按下图连接。



解：设元件 i 断电为事件 D_i ，通电（正常工作）为事件 W_i 。已知 $P(D_1) = 0.6 \Rightarrow P(W_1) = 0.4$ ； $P(D_2) = 0.2 \Rightarrow P(W_2) = 0.8$ ； $P(D_k) = 0.3 \Rightarrow P(W_k) = 0.7$ ($k = 3, 4, 5, 6$)。

(1) **所有的元件串联**：串联电路中，只要有一个元件断电，整个线路就断电。线路正常工作的概率是所有元件都正常工作的概率：

$$P(\text{通}) = P(W_1)P(W_2)P(W_3)P(W_4)P(W_5)P(W_6)$$

$$P(\text{通}) = 0.4 \times 0.8 \times (0.7)^4 = 0.32 \times 0.2401 = 0.076832$$

线路断电的概率为：

$$P(\text{断}) = 1 - P(\text{通}) = 1 - 0.076832 = 0.923168 \approx 0.923$$

(2) **元件按图 1.5 连接**：电路分为三条并联的支路。第一条支路（元件 1、2 串联）断电记为 L_1 ；第二条支路（元件 3、4 串联）断电记为 L_2 ；第三条支路（元件 5、6 串联）断电记为 L_3 。整个线路断电当且仅当三条支路 **同时**断电。

计算各支路断电概率：

- L_1 正常工作的概率 $P(\bar{L}_1) = P(W_1)P(W_2) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$ 。则 $P(L_1) = 1 - 0.32 = 0.68$ 。
- L_2 正常工作的概率 $P(\bar{L}_2) = P(W_3)P(W_4) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$ 。则 $P(L_2) = 1 - 0.49 = 0.51$ 。
- L_3 正常工作的概率 $P(\bar{L}_3) = P(W_5)P(W_6) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$ 。则 $P(L_3) = 1 - 0.49 = 0.51$ 。

整个线路断电的概率：

$$P(\text{全断}) = P(L_1)P(L_2)P(L_3) = 0.68 \times 0.51 \times 0.51 = 0.68 \times 0.2601 = 0.176868 \approx 0.177$$

答：(1) 0.923；(2) 0.177。

4. 设昆虫生产 k 个卵的概率 $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)，又设一个虫卵能孵化为昆虫的概率等于 p 。若卵的孵化是互相独立的，问此昆虫的下一代有 l 条的概率是多少？

解：设 N 为昆虫产卵的个数， X 为孵化出的下一代昆虫条数。已知产卵个数 N 服从参数为 λ 的泊松分布： $P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 。在已知产卵个数 $N = k$ 的条件下，孵化条数 X 服从参数为 (k, p) 的二项分布。即：

$$P(X = l | N = k) = C_k^l p^l (1 - p)^{k-l}, \quad (k \geq l)$$

若 $k < l$ ，则概率为 0。

根据全概率公式，下一代有 l 条的概率为：

$$\begin{aligned} P(X = l) &= \sum_{k=l}^{\infty} P(X = l | N = k) \cdot P(N = k) \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} \left[\frac{k!}{l!(k-l)!} p^l (1-p)^{k-l} \right] \cdot \left[\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right] \\ &= \frac{p^l e^{-\lambda}}{l!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda^k (1-p)^{k-l}}{(k-l)!} \end{aligned}$$

令 $j = k - l$ (即 $k = j + l$)，当 k 从 l 变到 ∞ 时， j 从 0 变到 ∞ 。代入上式：

$$\begin{aligned} P(X = l) &= \frac{p^l e^{-\lambda}}{l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+l} (1-p)^j}{j!} \\ &= \frac{p^l \lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \end{aligned}$$

利用泰勒级数展开 $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$, 这里 $x = \lambda(1-p)$:

$$\begin{aligned} P(X=l) &= \frac{(\lambda p)^l e^{-\lambda}}{l!} \cdot e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^l}{l!} \cdot e^{-\lambda+\lambda-\lambda p} \\ &= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

这表明下一代昆虫的条数 X 服从参数为 λp 的泊松分布。

答：下一代有 l 条的概率是 $\frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p}$ 。