四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第四节 子空间

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、子空间的定义

二、矩阵的列空间

三、矩阵的零空间

一、子空间的定义

定义4.4.1 H是R^n的非空子集，如果H满足性质：

(1) $0 \in H$; ⟶ 非必要条件

(2) $\alpha, \beta \in H \Rightarrow \alpha + \beta \in H$;

(3) $\alpha \in H, k \in R \Rightarrow k\alpha \in H$.

则称H为R^n的子空间.

简单地讲，**子空间是对加法和数乘运算封闭的R^n的非空子集。**

定义4.1.5 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p \in R^n$，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$的所有可能的线性组合构成的集合称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$**张成**（生成）的$R^n$的子集，记为$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$，即

$$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p | k_1,k_2,\ldots,k_p \in R\}.$$

从几何上看，

- 若α是非零向量，则$span\{\alpha\}$表示由向量α确定的直线；
- 若α和β是非零向量，且不共线，则$span\{\alpha,\beta\}$表示由向量α和β确定的平面。

例4.4.1 若$\alpha_1,\alpha_2\in R^n$，则$H=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$是$R^n$的子空间。

证明：零向量显然在H中。

任取H中两个向量$\beta=s_1\alpha_1+s_2\alpha_2$，$\gamma=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，有

$$\beta+\gamma=(s_1+t_1)\alpha_1+(s_2+t_2)\alpha_2\in H,$$

对任意$\beta\in H,k\in R$,有

$$k\beta=(ks_1)\alpha_1+(ks_2)\alpha_2\in H.$$

由定义，H是R^n的子空间。

一般地，我们有

定理4.4.1 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\in R^n$，$H=span\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$是$R^n$的子空间。

命题：等价向量组生成相同的子空间。

例4.4.2 过原点的直线是一维子空间，不过原点的直线不是子空间。

注：两个特殊的子空间：R^n，$\{0\}$。

例4.4.3 在（欧式）空间中，设

$$W_1 = \{(x,y,0)^T | x,y \in R\} \quad XY\text{平面}$$

$$W_2 = \{(x,0,z)^T | x,z \in R\} \quad XZ\text{平面}$$

$$W_3 = \{(0,y,z)^T | y,z \in R\} \quad YZ\text{平面}$$

W_1, W_2, W_3均是R^3的子空间。

一般地，过原点的平面是子空间的一个直观描述。

例：判别下列集合是否为向量空间。

(1) $V_1=\left\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$

(2) $V_2=\{x=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$

解： (1) $\forall\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)^T,\ \beta=(0,b_2,\cdots,b_n)^T\in V_1$

有$\alpha+\beta=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T\in V_1$

$\forall\lambda\in R$, 有$\lambda\alpha=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T\in V_1$.

所以，V_1是向量空间。

(2) V_2不是向量空间。

因为若$\alpha=(1,a_2,\cdots,a_n)^T\in V_2$,

则$2\alpha=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^T\notin V_2$.

二、矩阵的列空间

下面引入两个与矩阵A有关的重要的子空间.

定义4.4.2 设A是$m \times n$矩阵，A的列空间col$A$是A的列向量的所有可能的线性组合构成的集合。记$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则

$$ColA = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset R^m.$$

注：易知$ColA = \{b|存在x \in R^n，使得b = Ax\}$，故$ColA$也称为$A$的值域空间Range$(A)$。

定理4.4.2 $m \times n$矩阵A的列空间$ColA$是R^m的子空间。

问题：如何判断一个向量$\boldsymbol{b}$是否属于$\mathbf{A}$的列空间？

本质上示判断$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$有无解。

例4.4.4 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -4 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 6\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$，判断$b$是否在col$A$中。

解：b在col$A$中当且仅当方程组$Ax=b$有解。

$$[A\quad b]=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & -2 & 3\\ -3 & 7 & 6 & -4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & -6 & -18 & 15\\ 0 & -2 & -6 & 5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & -6 & -18 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此，方程组$Ax=b$相容，b在col$A$中。

多选题：矩阵$A_{m\times n}$的col$A$是

A　A的列向量的全体

B　A的列向量的扩张（张集）

C　线性映射X:→AX的值域

D　N维向量空间的子空间

三、矩阵的零空间

定义4.4.3 设A是$m \times n$阶矩阵，A的零空间Nul$A$是齐次线性方程组$Ax = 0$的所有解向量构成的集合。即

$$NulA = \{x \in R^n | Ax = 0\}.$$

定理4.4.3 矩阵A的零空间Nul$A$是R^n的子空间．等价地，m个方程n个未知量的齐次线性方程组$Ax = 0$的解集是R^n的子空间，称为$Ax = 0$的解空间。

证明： 显然，0在Nul$A$中。

任取Nul$A$中两个向量α, β有：

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in NulA.$$

对任意实数k有：$A(k\alpha) = k(A\alpha) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow k\alpha \in NulA.$

所以Nul$A$是R^n的子空间。

例4.4.5 $A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}$，求Nul$A$的一个生成集。

解：首先，利用初等变换可化A为行最简形

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，对应的同解方程组为\begin{cases}x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0\\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0\\ 0 = 0\end{cases}$$

取x_2,x_4,x_5为自由变量，则解为：$x_1=2x_2+x_4-3x_5,\quad x_3=-2x_4+2x_5.$

然后，将一般解分解为以自由变量为权的向量的线性组合（解的参数形式）：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2x_2+x_4-3x_5\\x_2\\-2x_4+2x_5\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}=x_2\alpha+x_4\beta+x_5\gamma,$$

则$\{\alpha,\beta,\gamma\}$是Nul$A$的生成集。

问题： 怎样求A的Nul$A$的生成集？

1. 将A用初等行变换化为行最简形
2. 写出相应的最简方程组
3. 将全部解用向量表示，并写成线性组合形式
4. 解的线性组合中具体的向量构成**null(A)**的生成集

小结　一、子空间的定义

定义4.4.1　H是R^n的非空子集，如果H满足性质：

(1) $0 \in H$; ⟶ **非必要条件**

(2) $\alpha, \beta \in H \Rightarrow \alpha + \beta \in H$;

(3) $\alpha \in H, k \in R \Rightarrow k\alpha \in H$.

则称H为R^n的子空间.

简单地讲，**子空间是对加法和数乘运算封闭的R^n的非空子集。**

定义4.1.5　设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in R^n$，由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$的所有可能的线性组合构成的集合称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$张成（生成）的$R^n$的子集，记为$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$，

张集（扩张）

生成集

即

$$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p | k_1, k_2, \ldots, k_p \in R\}.$$

子空间

命题：等价向量组生成相同的子空间。

二、矩阵的列空间

定义4.4.2 设A是$m \times n$矩阵，A的列空间col$A$是A的列向量的所有可能的线性组合构成的集合。记$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则

$$ColA = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \subset R^m.$$

注：易知$ColA = \{b | 存在x \in R^n，使得b = Ax\}$，故$ColA$也称为$A$的值域空间Range$(A)$。

定理4.4.2 $m \times n$矩阵A的列空间$ColA$是R^m的子空间。

问题：如何判断一个向量**b**是否属于**A**的列空间？

本质上示判断$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$有无解。

三、矩阵的零空间

定义4. 4. 3 设A是$m\times n$ 阶矩阵， A的零空间Nul$A$是齐次线性方程组$Ax=0$的所有解向量构成的集合。即

$$NulA=\{x\in R^n|Ax=0\}.$$

定理4. 4. 3 矩阵A的零空间Nul$A$是R^n的子空间．等价地， m个方程n个未知量的齐次线性方程组$Ax=0$的解集是R^n的子空间，称为$Ax=0$的解空间。