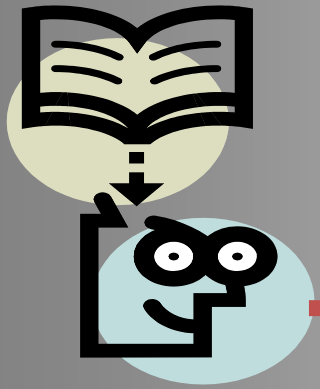
四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换



xuexue_zhou@scu.edu.cn

回顾

逆矩阵的定义

对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

说明 1. 若A是可逆矩阵，则A必为方阵.

2. 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

判别矩阵可逆的方法：

方法一： 用定义进行判断

方法二： 设A、B为同阶方阵，若$AB = E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

注：

判断B是否为A的逆矩阵，只需验证$AB = E$和$BA = E$中的一个即可。

可逆矩阵的运算性质

性质1 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

性质2 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

性质3 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

推广 $(A_1 A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

本节课主要内容：

一、初等变换与初等矩阵

二、用矩阵的初等变换求逆阵

一、初等变换与初等矩阵

定义 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**.

(1) **对换两行:** $r_i \leftrightarrow r_j$ $c_i \leftrightarrow c_j$

(2) **数乘某行:** $r_i \times k$ $c_i \times k$

(3) **倍加某行:** $r_i + kr_j$ $c_i + kc_j$

同理，把 r 换成 c 可定义矩阵的**初等列变换**.

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的**初等变换**.

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ **逆变换** $r_i \leftrightarrow r_j$; $r_i \times k$ **逆变换** $r_i \times (\frac{1}{k})$;

$r_i + kr_j$ **逆变换** $r_i - kr_j$.

矩阵等价

定义

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B,

就称矩阵 **A 与 B 等价**，记作 $A \cong B$

等价关系的性质：

（1）反身性： $A \cong A$;

（2）对称性： $if \quad A \cong B, \Rightarrow B \cong A$;

（3）传递性： $if \quad A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

初等矩阵

定义 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵，称为初等矩阵。

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

$$\begin{cases} 1.\ \text{以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行(列)}; \\ 2.\ \text{交换两行(列)}; \\ 3.\ \text{以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去}. \end{cases}$$

(1) 交换两行或两列，得第一类初等矩阵（初等对换矩阵）。

交换 E 中第 i,j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$P(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

← 第 i 行

← 第 j 行

第 i 列　　第 j 列

（2）以数$k\neq 0$乘某行或某列，得到第二类初等矩阵（初等倍乘矩阵）。

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$P(i(k))$.

$$
P(i(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

（3）以数k乘某行（列）加到另一行（列）上，得第三类初等矩阵。

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

（或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$）

$$P(i,j(k))=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{cc}\text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列}\end{array} & \end{array}$$

练习

判断下列矩阵是否为初等矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ×

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ×

初等矩阵与初等变换的关系

例1：计算

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

引理 2.3.1

设A是$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘一个相应的n阶初等矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

一般记法:

$P(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换,

$AP(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$P(i(k))A$表示A的第i行乘k,

$AP(i(k))$表示A的第i列乘k.

$P(i,j(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上,

$AP(i,j(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

矩阵的初等变换与初等矩阵的关系

$P(i,j)A$ 相当于$r_i \leftrightarrow r_j$，

$AP(i,j)$ 相当于$c_i \leftrightarrow c_j$，

$P(i(k))A$ 相当于$r_i \times k$，

$AP(i(k))$ 相当于$c_i \times k$，

$P(i,j(k))A$ 相当于$r_i + kr_j$，

$AP(i,j(k))$ 相当于$c_j + kc_i$，

说明：对矩阵实施一次初等变换可以用一个相应的初等矩阵去左乘或右乘表示。

推论 初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。

（1）变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，则 $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$ ；

（2）变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$，则 $P(i(k))^{-1} = P(i(\frac{1}{k}))$;

（3）变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$，则

$$P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k))\ .$$

练习

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$
$$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}))$$
$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$$

求初等矩阵逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

二、用矩阵的初等变换求逆阵

定理2.3.4 设$A=(a_{ij})_n$,则下列命题等价

(1) A可逆.

(2) $AX=0$只有零解.

(3) A与单位矩阵E_n行等价

(A经有限次初等行变换化为E).

证： 1)=>2)

若A可逆，且X是$AX=0$的一个解，则

$$X=EX=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}0=0$$

故$AX=0$只有零解.

2)=>3)

由推论1.2.1，A的主元列数等于未知量个数n，

这n个主元位置一定在对角线上，

即A的行最简形是n阶单位矩阵E.

A可经有限次初等行变换化为单位矩阵.

3)=>1)

因为A的行化简的每一步都对应着左乘以一个相应的初等阵，所以存在初等阵$P_1, P_2, \cdots P_k$，使$P_k \cdots P_2 P_1 A = E$

令$B = P_k \cdots P_2 P_1$，则有$BA = E$。所以A是可逆的。

因初等阵是可逆的，可逆阵的乘积仍然可逆。所以

$$(P_k \cdots P_2 P_1)^{-1}(P_k \cdots P_2 P_1) A = (P_k \cdots P_2 P_1)^{-1} E$$

$$A = (P_k \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$$

A可以表示成若干初等矩阵的乘积

推论2.3.2. 对n阶方阵A,下列命题等价

（1）A可逆.

（2）A可表为若干初等矩阵的乘积.

（3）A的主元列数为n.

推论2.3.3. n阶矩阵A与B行等价,则A可逆 $\Leftrightarrow$ B可逆.

推论2.3.4. n阶方阵A、B,若$AB=E$(或$BA=E$),则A、B可逆，且互为逆矩阵。

逆矩阵的求法二：利用初等变换求逆阵的方法：

当A可逆时，由 $\boxed{P_k P_{k-1} \cdots P_1} A = E$，有

$$A^{-1} = \boxed{P_k P_{k-1} \cdots P_1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 E,$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$n \times 2n$矩阵

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解:

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&\boxed{-2}&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

练习 用初等行变换求可逆矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$(A\ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等变换求逆矩阵

注：1. A 与 E 每一次变换必须同步;

2. 求逆时,自始至终每一步都只能用初等行变换，千万不能夹杂任何初等列变换.

3. 若作初等行变换时,出现全行为0，则无法等价为单位阵。结论：矩阵不可逆!

另：利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

即

$$\begin{array}{cc} (A \,\vdots & B) \\ \Big\downarrow & \Big\downarrow \text{初等行变换} \\ E & \boxed{A^{-1}B} \end{array}$$

例

求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解： 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

方法1：先求出 A^{-1}，再计算 $A^{-1}B$。

方法2：直接求 $A^{-1}B$ 。

$$(A\ \vdots\ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \vdots\ A^{-1}B)$$

$$(A\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right),\qquad \therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

思考： 初等变换可以求BA^{-1}，$A^{-1}CB^{-1}$吗？

利用初等列变换求逆阵：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

如果要解 $YA = C$，则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

即可得 $Y = CA^{-1}$.

练习1

求矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \qquad (\prod a_i \neq 0)$$

解

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & a_3^{-1} & \\ & & & a_4^{-1} \end{pmatrix}$$

求矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix} \quad (\prod a_i \neq 0)$$

答案

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & a_4^{-1} \\ & & a_3^{-1} & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

练习2

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}$$

求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&4&0\\5&0&0\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1/5\\0&1/4&0\\1/3&0&0\end{pmatrix}$$

求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\a_n&\cdots&0&0\end{pmatrix}$的逆阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1/a_n\\0&0&\iddots&0\\0&1/a_2&\cdots&0\\1/a_1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

练习3

求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 2 & 4 & 3\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A\ \ B)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\to(E\ \ A^{-1}B)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\dfrac{21}{2} & -11\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5\end{pmatrix}$$

练习4

已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{X}$满足

$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$,求$\boldsymbol{X}^4$.

解. 变形$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}\qquad(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^4=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

小结

利用初等列变换求逆阵：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

如果要解 $YA = C$，则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$$

即可得 $Y = CA^{-1}$.

小结　用矩阵的初等变换求逆矩阵

用矩阵的初等行变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等列变换求逆矩阵方法

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$