线性代数

Linear Algebra

四川大学

SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第六节 矩阵的秩

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、矩阵秩的定义

二、矩阵秩的性质

三、如何求矩阵的秩

子式的定义　在 $m\times n$矩阵A中任取k行k列($k\le m, k\le n$)，位于这些行列交叉处的个k^2元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s, \\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n \end{matrix}$$

称为矩阵A的**k阶子式**。

练习：　找出A的所有2阶子式

$m\times n$ 阶矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

得到一个二阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots$$

矩阵秩的定义 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子 式D，且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于 0，那么 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数 r称为矩阵 A 的秩，记作 $rankA, R(A)$, 秩A 或r_A，并规定零矩阵的秩等于零。

$m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数。

例如

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\0&2&-1&3\\-2&0&1&5\end{pmatrix}$$

容易找到

$$\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\\-2&0&1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&3&2\\0&2&3\\-2&0&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3&-2&2\\2&-1&3\\0&1&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&-2&2\\0&-1&3\\-2&1&5\end{vmatrix}=0.$$

$$\therefore R(A)=2.$$

说明:由定义可知,矩阵秩有如下性质

(1) $R(O)=0$

(2) $R(A)\le \min\{m,n\}$

(3) $R(A^T)=R(A), R(kA)=R(A), k\neq 0$

(4) 若A有一个 r阶子式不为零，则$R(A)\ge r$

若A所有 r阶子式全为零，则$R(A)< r$

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中，$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0.$

又 $\because$ A 的 3 阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$，$\therefore$ $R(A)=2.$

补例1 $|B|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&0\\4&7&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\therefore R(B)=3$

若 A 为 n 阶方阵，则 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow R(A)=n$ 称 A 为满秩矩阵

例2 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\therefore$ $R(B)=3$.

思考 矩阵B的行秩和列秩是多少？

B的行秩 $=$ B的列秩 $=R(B)=3$.

下面引入一个与矩阵$\boldsymbol{A}$有关的重要的子空间.

行空间的定义　设A是$m \times n$矩阵，A的行空间$RowA$是A的行向量的所有可能的线性组合构成的集合。

记$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$，其中$\gamma_i (i = 1,2,\cdots,m)$是$A$的第$i$行，则

$$RowA = span\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\} \subset R^n.$$

行秩与列秩的定义 矩阵A的行空间$RowA$、列空间$ColA$的维数分别称为A的行秩(row rank)、列秩(column rank)。

注：矩阵A的行秩即A的行向量组的秩，A的列秩即A的列向量组的秩。

例4.6.3 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 6\\ -3 & 1\end{bmatrix}$的秩、行秩和列秩。

解： A的二阶子式$D=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 6\end{bmatrix}\neq 0$，$A$没有三阶子式，故$r_A=2$。

A的两个列向量线性无关，A的列秩=2。

A的1、2行线性无关，3个二维行向量线性相关，A的行秩=2。

综上，秩A = A的列秩 = A的行秩 = 2。

引理 设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}$的列秩等于A的列数n，则A的行秩、秩都等于n。

证明： 对A进行按列分块和按行分块。

$$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right),A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix},$$

$$A\text{的列秩}=r\left\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right\}=n$$

$$A\text{的行秩}=r\left\{A_1,A_2,\cdots,A_s\right\}$$

$\Leftrightarrow$ 列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关

A的列秩$=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\} = n$ $\qquad A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}$

$\Leftrightarrow$ 列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=O$只有零解

$AX=O$

$\Rightarrow s\geq n$

$\Rightarrow$ A的行向量组$A_1,A_2,\cdots,A_s$中，$s\geq n$

$\Rightarrow r\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}=t\leq n$

若$r\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}=t<n$，则$A$的行向量可由其极大无关组

$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_t}$线性表出，

若$r\{A_1, A_2, \cdots, A_s\} = t < n$，则$A$的行向量可由其极大无关组

$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_t}$线性表出，

则A可以通过一系列的初等行变换变化为

$$B = \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_t} \\ 0_{(s-t)\times n} \end{pmatrix}, \qquad 在\ A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_n} \end{matrix}} \\ A_s \end{pmatrix} 中，$$

$AX = O$与$BX = O$为同解方程组，$BX = O$有非零解

$\therefore AX = O$有非零解, 矛盾。$\therefore r\{A_1, A_2, \cdots, A_s\} = t = n$

$$\begin{vmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore A$有一个n阶非零子式，且为最高阶的

$\therefore R(A) = n$

定理1 矩阵的A的行秩= A的列秩= A的秩。

证明： 如果$A=0$，则结论显然成立。

当$A \neq 0$时，设$r_A = r$, A的列秩为p.

一方面，由于A的秩为r,根据定义

知：A中一定有一个非零r阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{\alpha}_{j_1} \quad \tilde{\alpha}_{j_2} \quad \cdots \quad \tilde{\alpha}_{j_r}$$

$\tilde{\alpha}_{j_1}, \tilde{\alpha}_{j_2}, \cdots, \tilde{\alpha}_{j_r}$

线性无关

对应地，$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$

线性无关

$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$为$A$的$r$个线性无关的列向量，

所以A的列秩$p \geq r$;

另一方面，根据引理，A的极大无关列构成的矩阵一定有一个非零的p阶子式（也是A的子式），故$p \leq r$.

所以 $p = r$。

类似地，有 $r = R(A) = R(A^T) = A^T$的列秩 $=$ A的行秩。

综上所述，有 $R(A) = A$的列秩 $= A$的行秩

推论 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

定理4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S$为一列向量组，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S)$，A经过一系列初等行变换化为$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S)$。

(1) $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$线性无关当且仅当$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$线性无关；

(2) $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组当且仅当$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S$的一个极大无关组；

(3) $\alpha_l=k_1\alpha_{j_1}+k_2\alpha_{j_2}+\cdots k_r\alpha_{j_r}$当且仅当$\beta_l=k_1\beta_{j_1}+k_2\beta_{j_2}+\cdots k_r\beta_{j_r}$；

证明： 由上述定理知，矩阵的初等行变换不改变矩阵的列秩；

同理，矩阵的初等列变换不改变矩阵的行秩秩；

再由定理1，初等变换不改变矩阵的秩。

说明： 求矩阵A的秩时，只需对A进行初等行变换化为阶梯形矩阵，该阶梯形矩阵的非零行的数目就是A的秩。

例3 设$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩。

解： 对A进行初等行变换化为阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_4]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4\\ r_2-r_4}} \begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11\\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3.$

例4 设$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&3&-1&6\\-4&-6&-2&0\end{pmatrix}$，证明：$r_A=2$，且$A$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$等价。

证明：$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&3&-1&6\\-4&-6&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&1&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad\therefore r_A=2$

$$\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B \qquad \therefore A\cong B$$

注：$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2&0\\0&0\end{pmatrix}$称为**标准型矩阵**。

$\boxed{\text{任何一个非零矩阵}A\text{都可经过一系列的初等变换化为标准形矩阵}B\text{，且}A\cong B\text{。}}$

推论 $A_{m\times n}\cong B_{m\times n}\Leftrightarrow rankA=rankB.$

定理2（秩定理） 如果矩阵A有n列，则rank$A+dim$Nul$A=n$

证明：A的主元列构成$ColA$的基，因此rank$A$恰好是A的主元列的数目，也是A的行最简形矩阵B中主元列的数目。

另一方面，Nul$A$的维数等于方程组$Ax=0$中自由变量的个数，即A中非主元列的数目.

显然，主元列的数目+非主元列的数目=总列数=n，因此结论成立。

定理3 矩阵乘积的秩$r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$.

证明：记A的列分块形式为$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times p}$，则

$$AB=\left[b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\cdots\cdots,b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{np}\alpha_n\right].$$

即AB的列向量组能被A的列向量组线性表出，

从而，AB的列秩≤A的列秩，即$r_{AB} \le r_A$.

又$r_{AB}=r_{(AB)^T}=r_{B^TA^T} \le r_{B^T}=r_B$.

综上，$r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$.

推论 设A是一个$s\times n$阶矩阵，P、Q分别是s阶和n阶可逆矩阵，则

$$r_A=r_{PA}=r_{AQ}=r_{PAQ}.$$

三、矩阵秩的性质

性质1 $R(A) \le \min\{m,n\}$

性质2 $R(A^T) = R(A), R(kA) = R(A), k \ne 0$

性质3 $A_{s\times n}$，$B_{s\times n}$，A与B等价$\Leftrightarrow r_A = r_B$.

性质4 $r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$.

推论 设A是一个$s\times n$阶矩阵，P、Q分别是s阶和n阶可逆矩阵，则

$$r_A = r_{PA} = r_{AQ} = r_{PAQ}.$$

注意： 关于矩阵秩的证明要注意和向量组的秩相结合，向量组的秩的相关证明注意和极大无关组向量个数相结合。

例5

求方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{cases}$

系数矩阵和增广矩阵的秩

解

$$\tilde{A} = (A \ \ b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}=(A\ \ b)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$R(A)=R(\tilde{A})=3$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-4)r_1 \\ r_4+(-3)r_1}]{\substack{\frac{1}{2}\times r_3 \\ r_2+(-2)r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-1)r \\ r_3 \leftrightarrow r_2}]{\substack{-\frac{1}{2}\times r_3 \\ r_4+r_2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{3}{2}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

练习

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

求方程组系数矩阵和增广矩阵的秩

并判断方程组是否有解？

小结

一、矩阵秩的定义

$m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数，并规定零矩阵的秩为零。

矩阵行向量组的秩是矩阵的行秩；
矩阵列向量组的秩是矩阵的列秩。

二、如何求矩阵的秩

定理1 矩阵的$\boldsymbol{A}$的行秩= $\boldsymbol{A}$的列秩= $\boldsymbol{A}$的秩。

推论　矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

矩阵求秩的方法： 求矩阵A的秩时，只需对A进行初等行变换化为阶梯形矩阵，该阶梯形矩阵的非零行的数目就是A的秩。

三、矩阵秩的性质

性质1　$R(A) \le \min\{m,n\}$

性质2　$R(A^T) = R(A), R(kA) = R(A), k \ne 0$

性质3　$A_{s\times n}$，$B_{s\times n}$，A与B等价$\Leftrightarrow r_A = r_B$.

性质4　$r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$.

推论　设A是一个$s \times n$阶矩阵，P、Q分别是s阶和n阶可逆矩阵，则

$$r_A = r_{PA} = r_{AQ} = r_{PAQ}.$$

注意：关于矩阵秩的证明要注意和向量组的秩相结合，向量组的秩的相关证明注意和极大无关组向量个数相结合。