

四川大学期末考试试卷 (A 卷)

(2012—2013 年第二学期)

科目: 微积分 (III) -2

课程号: 201077030

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各类考试, 必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的, 一律照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理

四川大学各级各类考试的监考人员, 必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的, 严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}}{n} = (\quad)$.

2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx = (\quad)$.

3. 改变积分次序: $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = (\quad)$.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和为 S, 则 S = (\quad)

5. 若将函数 $f(x) = \frac{1}{4+x}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数, 则在其收敛区间内该幂级数为 (\quad)

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下述结论中, 不正确的是 (\quad)

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{10} u_n$ 收敛

2. 下列级数中, 绝对收敛的是 (\quad)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n-1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

3. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \right]$ (\quad)

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 无法判断敛散性

4. 二元函数 $z = f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极小值点是 (\quad)

A. (1, 2)

B. (-3, 0)

C. (-3, 2)

D. (1, 0)

5. 若 $\iint_D dx dy = 1$, 则积分区域 D 可以是 (\quad)

A. 由 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y-2=0$ 所围成的区域

B. 由 $x=1$, $x=2$ 及 $y=2$, $y=4$ 所围成的区域

C. 由 $|x+y|=1$, $|x-y|=1$ 所围成的区域

D. 由 $|x|=\frac{1}{2}$, $|y|=\frac{1}{2}$ 所围成的区域

三、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

2. 求微分方程 $y'' + y' = e^x$ 的通解.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

四、应用题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 求由曲面 $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ 及平面 $z = 0$ 所围成的立体的体积.

2. 某企业为生产甲乙两种产品, 投入的固定成本为 10000 万元, 设该企业生产两种产品的产量分别为 x 件和 y 件, 若成本函数为:

$$C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + D(y) \quad (\text{万元}), \quad \text{且} \quad C'_y(x, y) = 6 + y \quad (\text{万元/件})$$

(1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元);

(2) 当总产量为 50 件时, 甲乙两种产品各为多少可使总成本最小, 并求最小成本.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 若函数 $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x)$, 其中 f 为

可微分的函数, 证明: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.

2. 若 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内定义的以 T 为周期的连续函数, 即对任意的

$x \in (-\infty, +\infty)$, 总成立 $f(x) = f(x+T)$, 证明:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad (a \text{ 为任意实数}).$$

六、解答题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 判断函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

是否可微分.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 能否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛? 并说明理由.