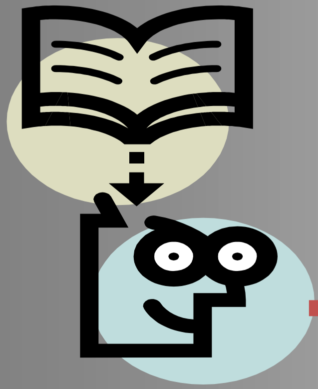
四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第五章 特征值与特征向量

第一节 矩阵的特征值与特征向量



xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、特征值和特征向量的定义

二、特征值和特征向量的性质

三、求解方阵的全部特征值和特征向量

引例

求椭圆$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=1$的长半轴与短半轴的长度。

解：记$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$,则椭圆可以表示为$X^TAX=1$

令$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 则$P$恰好使得$P^TAP=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 故做变换 $X=PY$,

有

$$X^TAX=(PY)^TA(PY)=Y^T(P^TAP)Y=Y^T\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}Y$$

即

$$\frac{3}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2=1$$

即在变换

$$X = PY \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_2 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_2 \end{cases}$$

下，原方程化为了一个新的方程：

$$\frac{y_1^{\ 2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}^{\,2}} + \frac{y_2^{\ 2}}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1$$

短半轴

长半轴

问题：这个变换矩阵P是怎么找出来的呢？

一、特征值和特征向量的定义

定义 设A为复数域上的n阶矩阵，如果存在复数λ和非零向量X，使得

$$AX=\lambda X,$$

则称λ是A的一个特征值（eigenvalue），X是A的属于特征值λ的特征向量（eigenvector）。

说明：

（1）特征向量$X\neq 0$；

（2）特征值和特征向量只对方阵而言；

（3）X是A的属于特征值λ的特征向量，则AX与X共线；

（4）n阶单位阵的特征值为1，所有非零n维向量都是它的特征向量。

例1 设$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$，因每行元素之和都为4，则对任意的 a, 总有

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix},$$

故对任意 $a\neq 0$, 向量$\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}$都是 A 的对应于特征值 4 的特征向量.

结论：

若n阶方阵A的每行元素和都相等，等于λ，则λ就是A的一个特征值，且对任意的$a\neq 0$, 非零向量

$$\alpha=(a,a,\cdots,a)^T$$

都是A中特征值λ对应的特征向量。

例2　多选题

设A为n 阶方阵，若 A的每行元素之和都为常数c，则

A　A有特则值c

B　$k(1,1,\ldots,1)^T$,属于c的特征向量

C　$k(1,1,\ldots,1)^T$,k不为0,是属于c的特征向量

D　不清楚

二、特征值和特征向量的性质

性质1 若X_1, X_2是A的属于同一个特征值λ_0的特征向量，且$X_1 + X_2 \neq 0$，则$X_1 + X_2$也是A的属于λ_0的特征向量。

证明 $\because A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2 = \lambda_0 X_1 + \lambda_0 X_2 = \lambda_0 (X_1 + X_2)$

$\therefore X_1 + X_2$也是A的属于λ_0的特征向量

性质2 若X_0是A的属于特征值λ_0的特征向量，k为任意非零常数，则kX_0也是A的属于特征值λ_0的特征向量。

证明 $\because A(kX_0)=k(AX_0)=k(\lambda_0 X_0)=\lambda_0(kX_0)$，且$kX_0\neq 0$

$\therefore kX_0\neq 0$也是A中输入特征值λ_0的特征向量。

性质3 更一般地，若$X_1,X_2,\cdots,X_t$为A的属于同一特征值λ_0的特征向量，则

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t(\neq 0)$$

仍是A的属于特征值λ_0的特征向量.

性质4 λ是A的特征值，则

（1）当m为正整数时，λ^m是A^m的特征值；

（2）当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值；

（3）当A可逆,m为整数时，λ^m是A^m的特征值；

证明 （1）由定义知，存在$X\neq 0$，使得$AX=\lambda X$

$$A^m X = A^{m-1}(AX) = A^{m-1}(\lambda X) = \lambda(A^{m-1}X)$$

$$=\lambda A^{m-2}(AX) = \cdots = \lambda^m X;$$

所以，λ^m是A^m的特征值，

而且,X是A^m中属于λ^m的特征向量。

（2）当A可逆时，它的特征值$\lambda\neq 0$，下面用反证法证明这个结论。

假设$\lambda=0$， 由定义知，存在$X\neq 0$，使得

$$AX=\lambda X=0$$

则有

$$X=A^{-1}0=0$$

这与存$X\neq 0$矛盾，所以假设不成立， $\lambda\neq 0$，则

$$A^{-1}X=\lambda^{-1}X$$

所以，当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值，

而且，X也是A^{-1}中属于λ^{-1}的特征向量。

（3）当m为正整数时，由（1）知结论成立；

当m=0时，$A^m = E$，$\lambda^m = 1$，显然是E的特征值，结论成立；

当m为负整数时，$-m$为正整数，假设X是A中属于λ的特征向量，则由（2）知

$$\left(A^{-1}\right)^{-m} X = \left(\lambda^{-1}\right)^{-m} X$$

即$A^m X = \lambda^m X$，结论成立，

而且，X是A^m中属于λ^m的特征向量。

性质5

λ是A的特征值，X是A中属于特征值λ的特征向量，且$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0$，则$f(\lambda) = a_m \lambda^m + \cdots + a_1 \lambda + a_0$为$f(A)$的特征值，且$f(\lambda)$对应的特征向量也为$X$。

例3 设$f(A)=3A^2+A-E+2A^{-1}$，且2为A的特征值，

则 $f(2)=3\cdot 2^2+2-2^0+2\cdot 2^{-1}=14$

为 $3A^2+A-E+2A^{-1}$ 的特征值。

性质5'

λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n为n阶方阵A的全部特征值，则$f(\lambda_1), f(\lambda_2),\cdots, f(\lambda_n)$为$f(A)$的全部特征值；并且若$X_i$（i=1,⋯, n）是$A$中属于$\lambda_i$的特征向量，则$X_i$也是$f(A)$中属于$f(\lambda_i)$的特征向量。

例4 若矩阵A满足$A^2=A$，证明：A的特征值只能为0或1。

证明 设λ_0为A的任意特征值，则存在$X_0\neq 0$，使得$AX_0=\lambda_0 X_0$，

而 $A^2=A\Rightarrow A^2-A=0$，于是 $\lambda_0^2-\lambda_0$是A^2-A的特征值，且

$$(A^2-A)X_0=(\lambda_0^2-\lambda_0)X_0$$

$$\text{所以有},(\lambda_0^2-\lambda_0)X_0=0。$$

由于$X_0\neq 0$，可知$\lambda_0^2-\lambda_0=0\Rightarrow\lambda_0=0$或1。

性质6 X_0是A属于λ_0的特征向量 $\Leftrightarrow$ X_0是齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = 0$的非零解。

证明：

$$X_0 \neq 0, AX_0 = \lambda_0 X_0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_0 X_0 - AX_0 = 0, X_0 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_0 E - A)X_0 = 0, X_0 \neq 0$$

性质7 λ_0是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E - A| = 0$

定义 设$A=(a_{ij})_n$为n阶矩阵，λ为一个数，称$\lambda E-A$为A的**特征矩阵**，称特征矩阵的行列式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

为A的**特征多项式**， 方程$|\lambda E-A|=0$ 称为A的**特征方程**.

注意： **性质6和性质7给出了求A的所有特征值和特征向量的方法.**

三、求解n阶矩阵A的全部特征值和特征向量的步骤

(1) 计算特征多项式$|\lambda E - A|$；

(2) 求出$|\lambda E - A| = 0$的全部根，得A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(3) 对于每个不同的特征值λ_j，求出齐次线性方程组$(\lambda_j E - A)X = 0$的一个基础解系$X_1, X_2, \cdots, X_t$，则A的属于λ_j的全部特征向量为

$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t$（其中$k_1, k_2, \cdots, k_t$是不全为零的任意常数）。

例5　设$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\8&2&4\\8&3&3\end{pmatrix}$求A的特征值与对应的特征向量。

解：A的特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-8&\lambda-2&-4\\-8&-3&\lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda-6)=0$$

A的特征值为$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=6$。

当$\lambda=-1$时，解方程组$(-E-A)X=0$,

$$-E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-8&-3&-4\\-8&-3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-8&-3&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

根据非零首元的位置可知，自由未知量为x_2,x_3,

分别令$x_2=8,x_3=0$和$x_2=0,x_3=2$，得基础解系

$$X_1=\begin{pmatrix}-3\\8\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},$$

属于-1的全部特征向量为$k_1X_1+k_2X_2$，（k_1,k_2为不全为零的常数）。

当$\lambda = 6$时，解$(6E - A)X = 0$,

$$6E - A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -4 \\ -8 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$x_3 = 1$，得$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以属于6的全部特征向量为$kX_3$,

k是非零的任意常数。

练习

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

从特征值和特征向量的性质可以看出：矩阵A的一个特征值对应若干个线性无关的特征向量；

但反之，一个特征向量只能属于一个特征值。

事实上，设X_0为某个矩阵A的特征向量，若有λ_1，λ_2满足：

$$AX_0=\lambda_1 X_0,\ AX_0=\lambda_2 X_0$$

则有$\lambda_1 X_0=\lambda_2 X_0$或$(\lambda_1-\lambda_2)X_0=0$，而$X_0\neq 0$，有

$$\lambda_1-\lambda_2=0,\ \lambda_1=\lambda_2$$

例6

设λ_1,λ_2为方阵A的互异的特征值，X_i为A的属于特征值$\lambda_i (i=1,2)$的特征向量，则X_1+X_2不是A的特征向量.

证 由定义知:$AX_1=\lambda_1 X_1, AX_2=\lambda_2 X_2$.用反证法证.若存在$\lambda_0$使得

$$A(X_1+X_2)=\lambda_0(X_1+X_2),$$

则 $\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2=\lambda_0 X_1+\lambda_0 X_2,$

即 $(\lambda_0-\lambda_1)X_1+(\lambda_0-\lambda_2)X_2=0$ （1）

A左乘（1）两端得到 $(\lambda_0-\lambda_1)\lambda_1 X_1+(\lambda_0-\lambda_2)\lambda_2 X_2=0$ （2）

用λ_1数乘(1)两端得到 $(\lambda_0-\lambda_1)\lambda_1 X_1+(\lambda_0-\lambda_2)\lambda_1 X_2=0$ （3）

(2)与（3）相减得到$(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)X_2=0.$

由于$X_2\neq 0$,这就有 $(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)=0$.因$\lambda_1\neq\lambda_2$,于是$\lambda_0=\lambda_2$.

同理，（2）减（1）的λ_2倍可得到$\lambda_0=\lambda_1$，这就导致$\lambda_1=\lambda_2$，矛盾.

$\therefore X_1+X_2$不是A的特征向量.

例7 矩阵A与A^T的特征值相同。

证明 $\because$ A的特征多项式为 $|\lambda E - A|$

又 $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A^T|$

$\therefore$ A与A^T的特征多项式相同

$\therefore$ A与A^T的特征方程相同 $\therefore$ A与A^T的特征值相同

思考：A与A^T具有相同的特征向量吗？

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，

A与A^T具有相同的特征值$\lambda = 1$(二重).

但A的所有特征向量为$c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c \neq 0$，而$A^T$的所有特征向量为$c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$c \neq 0$.

性质8 设n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

证明 $\because$方阵A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都是$f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$的根

$$\therefore f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

比较上式两端的常数项与λ^{n-1}项的系数

推论 方阵A可逆当且仅当A没有零特征值。

例8　　若三阶方阵A的特征值为1,2,3

(1). 证明：A可逆

(2). 求$\left|A^2+A-4E\right|$.

(1). 证明　$\because \left|A\right| = 1\times 2\times 3 = 6 \neq 0$　　$\therefore A$可逆

(2). A^2+A-4E的特征值分别为

$$1^2+1-4=-2 \qquad 2^2+2-4=2 \qquad 3^2+3-4=8$$

$$\therefore \left|A^2+A-4E\right| = (-2)\times 2\times 8 = -32$$

课堂练习

1、若$\lambda = 2$为可逆阵A的特征值，则 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 的一个特征值为（　　）

2、三阶方阵A的三个特征值为1、2、0，则 $\left|2E + 3A^2\right| =$（　　）

3、n阶方阵A的满足 $A^2 - 2A - 8E = 0$ 则A的特征值只能为（　　）

一、特征值和特征向量的定义

定义 设A为复数域上的n阶矩阵，如果存在复数λ和非零向量X，使得

$$AX=\lambda X,$$

则称λ是A的一个特征值（eigenvalue），X是A的属于特征值λ的特征向量（eigenvector）。

说明：

（1）特征向量$X\neq 0$；

（2）特征值和特征向量只对方阵而言；

（3）X是A的属于特征值λ的特征向量，则AX与X共线；

（4）n阶单位阵的特征值为1，所有非零n维向量都是它的特征向量。

二、特征值和特征向量的性质

若$X_1, X_2, \cdots, X_t$为A的属于同一特征值λ_0的特征向量，则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t (\neq 0)$$

仍是A的属于特征值λ_0的特征向量.

λ_1，$\lambda_2, \cdots$，λ_n为n阶方阵A的全部特征值，则$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$为$f(A)$的全部特征值；并且若$X_i$（i=1,···, n）是$A$中属于$f(\lambda_i)$的特征向量，则$X_i$也是$f(A)$中属于$\lambda_i$的特征向量。

从特征值和特征向量的性质可以看出：矩阵A的一个特征值对应若干个线性无关的特征向量；但反之，一个特征向量只能属于一个特征值。

设n阶方阵$A = (a_{ij})$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$.

特征矩阵、特征多项式、特征方程

设$A=(a_{ij})_n$为n阶矩阵，λ为一个数，称$\lambda E-A$为A的特征矩阵，称特征矩阵的行列式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

为A的特征多项式，方程$|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程.

三、求解n阶矩阵A的全部特征值和特征向量的步骤

(1) 计算特征多项式$|\lambda E - A|$；

(2) 求出$|\lambda E - A| = 0$的全部根，得A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(3) 对于每个不同的特征值λ_j，求出齐次线性方程组$\left(\lambda_j E - A\right) X = 0$的一个基础解系$X_1, X_2, \cdots, X_t$，则$A$的属于$\lambda_j$的全部特征向量为

$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_t X_t$（其中$k_1, k_2, \cdots, k_t$是不全为零的任意常数）。

三、求解n阶矩阵A的全部特征值和特征向量的步骤

(1) 计算特征多项式$|\lambda E - A|$；

(2) 求出$|\lambda E - A| = 0$的全部根，得A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(3) 对于每个不同的特征值λ_j，求出齐次线性方程组$(\lambda_j E - A)X = 0$的一个基础解系$X_1, X_2, \cdots, X_t$，则A的属于λ_j的全部特征向量为

$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_t X_t$(其中$k_1, k_2, \cdots, k_t$是不全为零的任意常数)。