求数列极限：$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}\ (a_1>0)$ ⇒类似的此类题，须先说明单调有界 → 有极限 → 求极限.

(1). 由题：数列 $\{a_n\}$ 存在极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$（$A$为常数）.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\Leftrightarrow A=2+\frac{1}{A}\Leftrightarrow A^2-2A-1=0.$

解得 $A=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$，由 $a_1>0$ 及保号性：$A=1+\sqrt{2}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt{2}$.

求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$ ⇒夹逼定理，提取法.

(2). $0<(1+n)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1\right]<n^\alpha(1+\frac{1}{n}-1)=n^\alpha\cdot\frac{1}{n}=(\frac{1}{n})^{1-\alpha}$.

$(1+\frac{1}{n})^\alpha<1+\frac{1}{n}$

$a^x(a>1)$.

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{1-\alpha}\quad(0<\alpha<1)\quad=0.\quad\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^\alpha-n^\alpha]=0.$

计算极限：$a_n=\frac{1}{n^n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^k$. ⇒ 全并项法.

(3). $a_n=\frac{1}{n^n}\cdot\left[1^1+2^2+3^3+\cdots+(n-1)^{n-1}+n^n\right]$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^n}+(\frac{2}{n})^2\cdot(\frac{1}{n})^{n-2}+(\frac{3}{n})^3\cdot(\frac{1}{n})^{n-3}+\cdots+(\frac{n-1}{n})^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+1\right]=1.$

设 $f(x)=1-\cos(1-\cos\frac{1}{x})$，问 α、β 何值，$f(x)$ 与 αx^β 在 $x\to\infty$ 时为等价无穷小量.

(4). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\alpha x^\beta}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{1}{x})}{\alpha x^\beta}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{1}{x})^2}{\alpha x^\beta}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)^2}{\alpha x^\beta}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\frac{x^{-4}}{\alpha x^\beta}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8\alpha}\cdot x^{-4-\beta}$$

$$=1.$$

$\Leftrightarrow\ \alpha=\frac{1}{8},\ \beta=-4.$

计算极限 $I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ 号学洛.

(5). $I=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{nx}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}}$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}}=e^{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

$\Rightarrow$ 洛必达法则.

$\Rightarrow$ 幂指函数处理.

证明: $\lim_{n\to\infty}\sin\left[\pi(n^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]=0.$

$\Rightarrow$ 观察提取有界函数.

$\Rightarrow$ 分子有理化.

(6). $\lim_{n\to\infty}\sin\left[\pi(n^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin\left[\pi(n^2+1)^{\frac{1}{2}}-n\pi\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right]$$

$n\to\infty$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sin\left[\pi \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}\right]$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} (-1)^n}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)}_{} \rightarrow \sin 0\text{，无穷小量}$$

$$= 0$$