四川大学 2010－2011 学年上学期《微积分（II）－1》

期中试题参考答案与评分标准

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1、1 ； 2、10 ； **3**、$\boldsymbol{e}$ ； 4、**2010!** ； 5、 $\boldsymbol{y=1}$.

二、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1—5：C D D B D

三、计算题(每题 8 分, 共 32 分)

1、解：$\because\ 1\le(n!)^{\frac{1}{n^2}}\le(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}$ …6 分

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ …8 分

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$

2、解：(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{5n}\right)^n$，对 a 分以下两种情形讨论：

① 当 $a=0$ 时，$1+\frac{a}{5n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{5n}\right)^n=1$；

② 当 $a\ne0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{5n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{5n}\right)^{\frac{5n}{a}}\right]^{\frac{a}{5n}\cdot n}=e^{\frac{a}{5}}$；

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{5n}\right)^n=e^{\frac{a}{5}}$ （注：未讨论 $a=0$ 情形要扣 1 分！）…3 分

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2$ …7 分

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{5n}\right)^n\cdot\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=e^{\frac{a}{5}}\cdot e^2=e^{\frac{10+a}{5}}$ …8 分

3、**解**：在 $y=\sqrt[3]{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 两端取对数，有

$$\ln y=\frac{1}{3}\left[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^x\right)\right] \quad \cdots 2\text{ 分}$$

在上式两端分别对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\left(-e^x\right)}{1-e^x}\right] \quad \cdots 6\text{ 分}$$

于是 $y'=\frac{1}{3}y\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\left(-e^x\right)}{1-e^x}\right]=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\left(-e^x\right)}{1-e^x}\right]$

故 $dy=y'dx=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\frac{\left(-e^x\right)}{1-e^x}\right]$ $\cdots 8$ 分

4、**解**：由 $\frac{dx}{dt}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$， $\frac{dy}{dt}=-\frac{(t-1)^2}{t^2+1}$，得 $\cdots 2$ 分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-t}{1+t}\text{，从而}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=1 \quad \cdots 4\text{ 分}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\left(1+t^2\right)}{(1+t)^2\left(1-t^2\right)} \quad \cdots 8\text{ 分}$$

四、解答题(每题 8 分,共 24 分)

1、**解**：已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+ax+b\right)}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+ax+b\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^2-(1+2ab)x+\left(1-b^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+ax+b\right)}=0 \quad \cdots 3\text{ 分}$$

成立（可知：分子的次数必低于 1 次），从而

$$\begin{cases}1-a^2=0\\1+2ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$$ …6 分

但当$a=-1,b=\frac{1}{2}$时，极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}\right)$不存在。故$a=1,b=-\frac{1}{2}$ …8 分

2、解：由$f(x)$在$x=0$处连续，知$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=0$。

即，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}(1-\cos ax)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^-}a^2x=0$

且 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln\left(b+x^2\right)=0$

可得，$b=1$。 …4 分

再由$f(x)$在$x=0$处可导，知$f_+'(0)=f_-'(0)$。

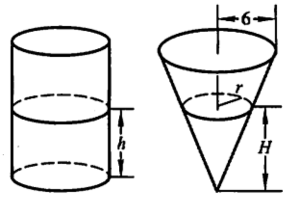
又，$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=1$，

$$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\frac{1}{2}a^2$$

故 $\frac{a^2}{2}=1$，即 $a=\pm\sqrt{2}$。 …8 分

3、解：如图所示，设在 t 时刻漏斗中的水深为$H=H(t)$，圆柱形筒中水深为$h=h(t)$.

建立 h 与 H 之间的关系：$\frac{1}{3}\pi6^2\cdot18-\frac{1}{3}\pi r^2H=\pi5^2h$ …3 分



又$\frac{r}{6}=\frac{H}{18}$，即$r=\frac{H}{3}$. 故 $\frac{1}{3}\pi6^2\cdot18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2H=\pi5^2h$

即 $216\pi-\frac{1}{27}\pi H^3=25\pi h$ …5 分

上式两端分别对 t 求导，得 $-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{dH}{dt}=25\pi\frac{dh}{dt}$ …7 分

当$H=12$时，$\frac{dH}{dt}=-1$，此时

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{25\pi}\left(-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{dH}{dt}\right)\Bigg|_{\substack{H=12\\ \frac{dH}{dt}=-1}}=\frac{16}{25}\quad (\mathrm{cm/min})$$ …8 分

五、证明题(每题 7 分, 共 14 分)

1、 证明：令 $f(x)=x^3+px+q$，由于

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)=+\infty$.…**2 分**

根据零点存在定理，知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少存在一个实根。 …**4 分**

又由于 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left[x_2{}^2+x_2x_1+x_1{}^2+p\right]>0\ (\forall x_2>x_1)$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是（严格）单调增加的。 …**6 分**

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有一个实根。 …**7 分**

2、 证明：

当 $0<x_n<\sqrt{2}-1$时，有 $x_{n+1}>\sqrt{2}-1$；当 $x_n>\sqrt{2}-1$时，有 $0<x_{n+1}<\sqrt{2}-1$.

由于 $x_1=\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$，故 $\forall n\in N$， $x_{2n+1}>\sqrt{2}-1$且 $0<x_{2n}<\sqrt{2}-1$. …**2 分**

又由于 $x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}-x_{2n-1}=\frac{-2(x_{2n-1}-\sqrt{2}+1)(x_{2n-1}+\sqrt{2}+1)}{5+2x_{2n-1}}<0$，

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}-x_{2n}=\frac{-2(x_{2n}-\sqrt{2}+1)(x_{2n}+\sqrt{2}+1)}{5+2x_{2n}}>0,$$

从而得知数列 $\{x_{2n-1}\}$单调减少且有下界，数列 $\{x_{2n}\}$单调增加且有上界。

据单调有界收敛准则，可得数列 $\{x_{2n-1}\}$与数列 $\{x_{2n}\}$都收敛。 …**4 分**

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$，对等式 $x_{2n+1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$ 与 $x_{2n+2}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$ 两端

求极限，得到方程 $a=\frac{2+a}{5+2a}$ 与 $b=\frac{2+b}{5+2b}$，解此两方程，得到解

$a=b=\sqrt{2}-1$（另一解 $a=b=-\sqrt{2}-1$舍去）。 …**6 分**

因此，数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}-1$ 。 …**7 分**