函数的极限.（自变量趋于无穷大/有限值).

(一) 无限大.

$x\to+\infty$. x向右无限远离原点. ⎤
$x\to-\infty$. x向左无限远离原点. ⎦ 单侧.

$x\to\infty$. $|x|$无限增大. $\longrightarrow$ 双侧.

数列极限是函数极限自变量趋于正无穷大的特例.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$正整数N, 当$n>N$时, 有$|x_n-a|<\varepsilon$.

函数极限定义:

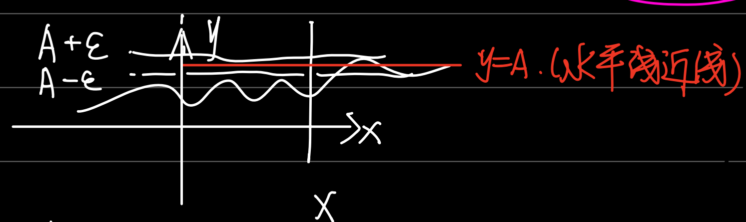
$|x|>X$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$正数X, 当$x>X$时, 有$|f(x)-a|<\varepsilon$. ⎤

$\forall\varepsilon>0$, $\exists$正数X, 当$x<-X$时, 有$|f(x)-a|<\varepsilon$. ⎦ (刻画了$f(x)$与a的距离无限接近).

$\longrightarrow$ $x\to\infty$时, $f(x)\to A$. 即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. 则$A$是$x\to\infty$时$f(x)$的极限.

↳ 几何解释:



必须"两个无穷"的极限相同才行!

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

①

证明: $\lim \frac{1}{x}=0$.

$x\to\infty$

$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$ 取 $X=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $x>X$ 时, $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

(二) 有限值.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$x\to1$, $f(x)=2x+1\to3$ 即 $|f(x)-3|$ 能任意小!

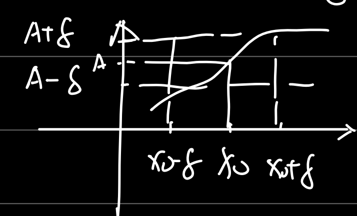
只需要.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-3|<\varepsilon$, $|2x+1-3|=|2x-2|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. ~~即~~

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 都 $\exists\delta>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, 都有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$y=f(x)$



$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \left|\frac{x-x_0}{\quad}\right| < \left|\frac{x-x_0}{\quad}\right| < \varepsilon$.

$\sqrt{x}+\sqrt{x_0}$ $\sqrt{x_0}$

使

即 $0<|x-x_0|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$.

且 $x>0 \Rightarrow |x-x_0|\le x_0$. 取 $\delta=\min\{\sqrt{x_0}\,\varepsilon, x_0\}$.

故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\min\{\sqrt{x_0}\,\varepsilon, x_0\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 时, 有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.