线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第三节 向量组的极大无关组和秩

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、向量组的线性表出

二、向量组的极大无关组和秩

三、如何求向量组的极大无关组和秩

一、向量组的线性表出

定义 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ (I)中的每一个向量都能被向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ (II)线性表出，则称(I)可由(II)线性表出；如果(I)与(II)可以相互线性表出，则称(I)与(II)等价。

例如 $B:\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$

$A:\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$
$$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+0\varepsilon_3$$
$$\alpha_3=\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3$$

所以向量组B可以由向量组A线性表示。

注：

(1) 部分组可由全部组线性表出；

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)(s>1)$线性相关；

$\Leftrightarrow (I)$可由某个部分组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$线性表出；

例1 由n维向量组成的任意向量组都可以由它的基本向量组线性表示。

(3) 向量组的等价关系具有如下性质：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (I)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\ (II)\quad \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p\ (III)$$

- 反身性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (I)$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (I)$ 等价；
- 对称性：如果(I)与(II) 等价，则(II)与(I) 等价；
- 传递性：如果(I)与(II) 等价，(II)与(III) 等价，则(III)与(I) 等价；

定理2 如果

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出；

(2) $s>t$；

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性相关。

(下面给出s=3,t=2的情形的证明.)

证明： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$(1)可由$\beta_1,\beta_2$(2)线性表出,即

$$\begin{cases}\alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{21}\beta_2\\\alpha_2=k_{12}\beta_1+k_{22}\beta_2\\\alpha_3=k_{13}\beta_1+k_{23}\beta_2\end{cases}\qquad(3)$$

考察
$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0,\qquad(4)$$

由(3)与(4)以及向量的线性运算性质,

$$(k_{11}x_1+k_{12}x_2+k_{13}x_3)\beta_1+(k_{21}x_1+k_{22}x_2+k_{23}x_3)\beta_2=0,$$

令
$$\begin{cases}k_{11}x_1+k_{12}x_2+k_{13}x_3=0\\k_{21}x_1+k_{22}x_2+k_{23}x_3=0\end{cases}\qquad(5)$$

齐次线性方程(5)的方程数2小于未知量个数3，有非零解，非零解满足(4)，故(1)**线性相关。**

定理2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$(I)可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$(II)线性表出，且$s>t$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关。

推论1 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则有$s\le t$。

推论2 任意m(>n)个n维向量线性相关。

推论3 两个等价的线性无关组含有相同的向量个数。

证：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$(I)与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$(II)都线性无关，且(I)与(II)等价。

于是(I)可由(II)线性表示且(I)线性无关，由推论2即知：$s\le t$。

同理，(II)可由(I)线性表示且(II)线性无关，由推论2又可知：$t\le s$。

于是$s=t$。

二、向量组的极大无关组和秩

定义8 设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$(II)为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$(I)的一个部分组。如果

(1) (II)是一线性无关组；

(2) (I)中的任意向量可由(II)线性表示；

则称(II)为(I)的一个极大（线性）无关组。

例如 设$\alpha,\beta,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n(I)$为n维向量空间中的向量组，其中$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n(II)$为基本向量组，则(II)就是$(I)$一个极大无关组。

说明 （1）极大无关组不唯一；

（2）向量组与它的极大无关组是等价的。

定理3 向量组的任意两个极大线性无关组等价，且包含的向量个数相等。

证： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$(I)与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$(II)为同一个向量组的极大线性无关组。

由极大线性无关组的定义知(I)、(II)都线性无关，且(I)与(II)可相互线性表出，

故(I)与(II)等价，于是由推论3，即得$s=t$。

定义9 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为不全为零的向量组，其极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩($rank$)，记为$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$。

特别说明： 全为零的向量组我们认为没有极大无关组，其秩定义为0。

定理4 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}<s.$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=s.$

定理 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为不全为零的向量组，其秩为r，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$任意向量个数为r的线性无关组都是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组。

推论5 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$(I)可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$(II)线性表出，则

$$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\le r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$$

证： 设(I)的秩=r，(II)的秩 $=u$，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$(III)为(I)的一个极大无关组，

$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_u}$(IV)为(II)的一个极大无关组。

由极大无关组的定义: (I)与(III)等价，(II)与(IV)等价。

(I)可由(II)线性表出，则由线性表出的传递性知：(III)可由(IV)线性表出。

又由于(III)是线性无关的，则由推论 1 得到$r\le u$。

推论6 等价向量组的秩相等。

证： 不妨设向量组(I)与向量组(II)的秩分别为 s和 r。

(I)与(II)等价表示(I)与(II)可相互线性表出。

(I)可由(II)表出，$s\le r$，同样(II)可由(I)表出，可推出$r\le s$。

于是得到$r=s$.

三、问题：如何求向量组的秩和一个极大线性无关组？

定理4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为一列向量组，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，A经过一系列初等行变换化为$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$。

(1) $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$线性无关当且仅当$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$线性无关；

(2) $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组当且仅当 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的一个极大无关组；

(3) $\alpha_l=k_1\alpha_{j_1}+k_2\alpha_{j_2}+\cdots k_r\alpha_{j_r}$当且仅当$\beta_l=k_1\beta_{j_1}+k_2\beta_{j_2}+\cdots k_r\beta_{j_r}$；

证明: 矩阵$(\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr},\alpha_l)$经相同的初等行变换化为矩阵$(\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{jr},\beta_l)(l=1,2,\cdots,m)$,

考虑以下四个向量形式的线性方程组

$$x_1\alpha_{j1}+x_2\alpha_{j2}+\cdots+x_r\alpha_{jr}=0 \quad (1)$$

$$x_1\beta_{j1}+x_2\beta_{j2}+\cdots+x_r\beta_{jr}=0 \quad (2)$$

$$y_1\alpha_{j1}+y_2\alpha_{j2}+\cdots+y_r\alpha_{jr}=\alpha_l \quad (3)$$

$$y_1\beta_{j1}+y_2\beta_{j2}+\cdots+y_r\beta_{jr}=\beta_l \quad (4)$$

(1)与(2)同解，(3)与(4)同解。

对于阶梯形矩阵，我们已经知道：首元所在的列向量组是线性无关的。利用这一结论可求出阶梯形矩阵列向量组的极大线性无关组。

补例3 设$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -8\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)$，

首元所在的列向量组β_1,β_2,β_3线性无关，且$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$线性相关，

于是β_4可由β_1,β_2,β_3线性表出。

这可推出β_1,β_2,β_3为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的一个极大无关组。

结论： 阶梯形矩阵首元所在的列向量组是阶梯形矩阵列向量组的一个极大线性无关组.

下面通过具体例题来说明求向量组的秩和一个极大线性无关组的方法。

例4 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\\1\end{pmatrix}$，求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组，并把不属极大无关组的向量用该极大无关组线性表出。

解 令$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&1&-2\\1&1&0&3\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$，对$A$施行初等行变换变为行阶梯形矩阵

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4),$$

阶梯形矩阵B首元首所在的列向量β_1,β_2,β_3即为B的列向量组的一个极大无关组。

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组,

事实上，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$也为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组。

要把 α_4 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，必须将 B 再进一步化成$Jordan$阶梯形矩阵。

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=J=(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_3,\tilde{\beta}_4).$$

由于 $\tilde{\beta}_4=\tilde{\beta}_1+2\tilde{\beta}_2-4\tilde{\beta}_3$，得到$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3$.

例5 设 $\alpha_1=(1, -2, 0, 3), \alpha_2=(2, -5, -3, 6), \alpha_3=(0, 1, 3, 0), \alpha_4=(2, -1, 4, -7), \alpha_5=(5, -8, 1, 2)$，求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出。

解 令 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组，

且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2, \alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

总结：向量组的秩、极大无关组的求法

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$作列向量构成矩阵$A$。

(2) $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$（阶梯形矩阵）

(3) B的非零首元所在的列，是B的一个列极大无关组对应A的一个列极大无关组。

（根据见定理4）

练习

1. 求列向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\\1\end{pmatrix}$的一个极大无关组。

2. $\alpha_1=(5,-1,1,8)$，$\alpha_2=(-1,1,3,4)$，$\alpha_3=(-7,3,5,0)$，$\alpha_4=(1,-2,-4,-11)$

   (1) 求向量组的秩和一个极大无关组。

   (2) 将其余向量用该极大无关组线性表示。

总结：向量组的秩的一些重要结论

(1) 零向量组的秩为0。

(2) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关⇔极大无关组是本身⇔ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关⇔极大无关组是它的真部分组 ⇔ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

(3) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

(4) 等价的向量组必有相同的秩。

(5) $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

$$\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

说明:有关向量组的秩的概念的理论题目，比较难做。一定要和极大线性无关组的概念联系起来考虑。

补充例子

已知向量组$(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;(II)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;(III)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5;$如果各向量组的秩分别为$R(I)=R(II)=3$，$R(III)=4$，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4。