定积分

基本概念和性质

定积分的定义

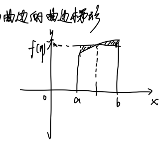
- 定义1：$f(x)$在$[a,b]$上有界，分成n个区间，计算各区间面积：$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
  - 1）积分值仅与被积函数和积分区间有关，与积分变量无关。
  - 2）定义中区间分法和ξ_i的取法是任意的。
  - 3）当$f(x)$在区间$[a,b]$上定积分存在时，称$f(x)$在$[a,b]$上可积。
- 定积分存在性定理
  - 1）当$f(x)$在$[a,b]$上连续时，$f(x)$在区间$[a,b]$上可积。
  - 2）当$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，$f(x)$在区间$[a,b]$上可积。
- 定积分的几何意义
  - 1）$f(x)>0$，$\int_a^b f(x)dx=A$，曲边梯形的面积。
  - 2）$f(x)<0$，$\int_a^b f(x)dx=-A$，曲边梯形面积的负值。

定积分的性质

- 1）特殊定义：当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$.
  当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.
- 2）可加性：$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
- 3）常数可乘性：$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- 4）连续性：设$a<c<b$，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- 5）若在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)dx \geq 0$. ⇒ 推论：若在$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.（$a<b$）.
- 6）有界性：若m、M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则 $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

定积分中值定理

- 1）代数形式：若$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则在$[a,b]$内至少存在一点η，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$.（$a\leq\eta\leq b$）.
- 2）几何形式：在区间$[a,b]$内，至少存在一点ξ，使以区间$[a,b]$为底，曲边$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同底而高为$f(\eta)$的一个矩形面积。



微积分基本公式

积分上限函数和其导数

- 积分上限函数定义：若上限x在$[a,b]$上任意变动，则对于每个取定的x值，定积分都有一个对应的值，记$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.
- 定理1（导数性质）：对$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$\Phi'(x)=f(x)$.
  - 1）肯定了连续函数的原函数存在。
  - 2）初步揭示积分学中定积分与原函数的关系。
- 定理2（存在性定理）：在区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$原函数一定存在。
- 定理3（复合性质）：若$f(t)$连续，$a(x)$，$b(x)$可导，则$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$的导数：$F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$.

牛顿-莱布尼茨公式

- 定义：若$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$.
- 用途：将定积分问题转化为求原函数问题。

定积分的积分方法

换元法

- $f(x)$在$[a,b]$连续
- $x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$单调连续且可导.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d[\varphi(t)]$

分部积分法

- 设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

广义函数

无穷限的广义积分

- 定义：设$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取$b>a$，若$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则该极限为$f(x)$在$[a,+\infty)$的广义积分，记为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
- 定义：极限存在时，称广义积分收敛；极限不存在时，称广义积分发散。（特别地：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx$、当且仅当两极限同时存在时收敛）

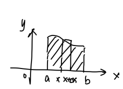
无界限数的广义积分

- 定义：设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且在a的右邻域内无界，取$\varepsilon>0$，若$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$存在，则称该极限为$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分.
  记作：$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.
- 瑕积分：设$f(x)$在$[a,b]$上除点c（$a<c<b$）外连续，而在点c的邻域内无界。若$\int_a^c f(x)dx$、$\int_c^b f(x)dx$都收敛。
  则 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.（c为瑕点，该积分为瑕积分）

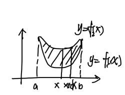
定积分的应用

平面图形的面积

- 直角坐标系：

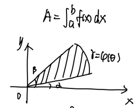


$A=\int_a^b f(x)dx$



$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$

- 极坐标系：

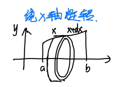


$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$.

立体图形的体积

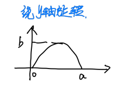
- 旋转体体积：

绕x轴旋转.



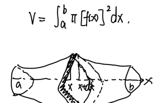
$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.

绕y轴旋转.



$V=\int_0^b \pi[\varphi(y)]^2 dy$ / $V=2\pi\int_0^a x|f(x)|dx$

- 平面截面已知：



$dV=A(x)dx \Rightarrow V=\int_a^b A(x)dx$

平面曲线的弧长

- 直角坐标：$S=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ （$y=f(x)$）
- 参数方程：$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ （$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$）
- 极坐标：$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$ （$r=r(\theta)$）