参考解答

一、计算题(每小题 7 分，共 28 分)

1. 已知二元函数 $f(x,y)=x^2\sin(x+y)$，计算 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(\pi,0)}$.

解: $$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin(x+y)+x^2\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y)$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(\pi,0)}=-2\pi$$

2. 设方程 $e^z+x+y+z-1=0$ 确定的隐函数为 $z=z(x,y)$，计算 $dz|_{(0,0)}$.

解:对 $e^z+x+y+z-1=0$ 两边微分,得

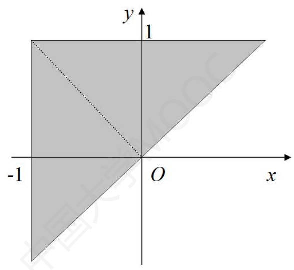
$$e^z dz+dx+dy+dz=0$$

将 $x=0, y=0$ 代入 $e^z+x+y+z-1=0$ 得到 $z=0$,所以

$$dz|_{(0,0)}=-\left.\frac{dx+dy}{e^z+1}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{2}(dx+dy)$$

3. 设平面区域 D 是由直线 $y=x, x=-1, y=1$ 围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$.

解: 将平面区域 D 分解为 $\begin{cases} x\le y\le 1 \\ -1\le x\le 1\end{cases}$,则



$$\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x}^{1}ydy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)dx=0$$

(也可以加辅助线再利用奇偶性)

4. 交换二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$ 的积分次序，并计算该积分值.

解: $$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_{y^2}^{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin ydy$$

$$=\int_0^1 (y-1)d(\cos y)=(y-1)\cos y\Big|_0^1-\int_0^1 \cos y dy=1-\sin 1$$

二、(12 分) 设 $z=f(x+y,x-y)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: $$\frac{\partial x}{\partial x}=f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''$$

由于 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f_{12}''=f_{21}''$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{22}''$$

三、(12 分) 设空间曲面 $\Sigma_1: x^2+y^2+2z^2=10$，空间曲面 $\Sigma_2: z=x^2+y^2$，

(1) 求曲面 Σ_1 在点(1,1,2)处的切平面方程.

(2) 求曲面 Σ_1 与曲面 Σ_2 的交线在点(1,1,2)处的切线方程.

解: (1)曲面 Σ_1 在点(1,1,2)处的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(2x,2y,4z)\big|_{(1,1,2)}=(2,2,8)$,所求切平面方程为

$$2(x-1)+2(y-1)+8(z-2)=0$$

即 $$x+y+4z=10$$

(2)曲面 Σ_2 在点(1,1,2)处的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(2x,2y,-1)\big|_{(1,1,2)}=(2,2,-1)$

所求切线的方向为 $$\vec{T}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(2,2,8)\times(2,2,-1)=18(-1,1,0)$$

所求切线方程为 $$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$$

四、(12 分) 设空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，求 Γ 上的点 $P(x,y,z)$ 到点 $(0,0,3)$ 的距离的最大值.

解: Γ 上的点 $P(x,y,z)$ 到点 $(0,0,3)$ 的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-6z+9}$$

由于 $P(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上,将其方程代入简化 $d=\sqrt{10-6z}$,取 $d^2=10-6z$ 作为目标函数,设

$$F=10-6z+\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$$

$$\begin{cases} F_x=2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ F_y=2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ F_z=-6+2\lambda_1 z+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ z=-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ z=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

将其代入 $d_1=\sqrt{10+2\sqrt{6}}$， $d_2=\sqrt{10-2\sqrt{6}}$(舍去)．

所以距离的最大值为 $\sqrt{10+2\sqrt{6}}$．

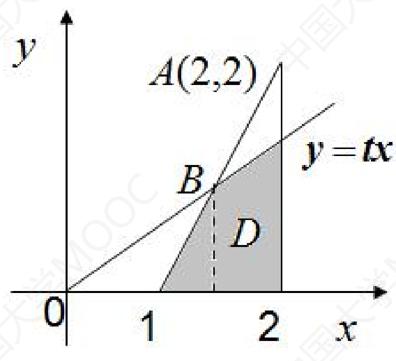
五、(12 分) 设空间曲面 $\Sigma_1: z=2-\sqrt{x^2+y^2}$，空间曲面 Σ_2 是由曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成，求由曲面 Σ_1 和曲面 Σ_2 围成立体的体积.

解：旋转曲面 Σ_2 的为 $z=x^2+y^2$，它与空间曲面 Σ_1 围成的体投影到 xoy 坐标面的区域为 $x^2+y^2\le 1$．所求立体的体积为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(2-r-r^2)dr=\frac{5}{6}\pi$$

六、(12 分) 设平面区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,y-tx\le 0, t>0)\}$，平面区域 $D_2=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2(x-1), 1\le x\le 2\}$，平面区域 $D=D_1\cap D_2$，计算二重积分 $I(t)=\iint\limits_D xdxdy$.



解：当 $0<t\le 1$ 时，通过计算可得 $B(\dfrac{2}{2-t},\dfrac{2t}{2-t})$，

$$I(t)=\iint\limits_D xdxdy=\int_1^{\frac{2}{2-t}}xdx\int_0^{2(x-1)}dy+\int_{\frac{2}{2-t}}^2 xdx\int_0^{tx}dy$$

$$=2\int_1^{\frac{2}{2-t}}x(x-1)dx+t\int_{\frac{2}{2-t}}^2 x^2dx$$

$$=2(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^{\frac{2}{2-t}}+t\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{\frac{2}{2-t}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}[1+8t-\frac{4}{(2-t)^2}]$$

当$t\ge 1$时，平面区域D与$t=1$一致，所以积分为$I(1)=\frac{5}{3}$.

七、(12 分)已知二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

(1) 求 $f_x'(0,0),\ f_y'(0,0)$；

(2) 设向量$\vec{l}=(1,1)$，求函数$f(x,y)$在$\vec{l}$方向的方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}$.

(3) 讨论函数$f(x,y)$在(0,0)点处的可微性.

解: (1) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{(\Delta x)^3}\sin[(\Delta x)^2]=0$

类似地，$f_y'(0,0)=0$

(2) 设向量$\vec{l}=(1,1)$，将它单位化$\vec{l}^0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，那么从(0,0)出发在$\vec{l}^0$方向的动点为

$P(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho,\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)$，根据方向导数的定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho,\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\rho}{\rho^3}\sin(\rho^2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $$\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}=\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]$$

设 $\Delta y = k\Delta x$，则上式化为

$$\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

当 $\Delta x \to 0$ 是，极限为 $\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$。

它的值随 k 变化，所以原函数在(0,0)点处的不可微.