四川大学期末考试试卷（A）

（2012—2013 年第二学期）

科目：微积分（I）-2

适用专业年级：数学一各专业 2012 级本科生

题 号	一	二	三			四		五		总 分
得 分										

考 试 须 知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 与 $(-2,3,1)$ 和 $(3,-2,1)$ 两个向量都垂直且方向向上的单位向量__________.

2. 设 $w=f(x_1, x_2, \ldots, x_{2013})$ 关于每个自变量 x_k 的偏导数都存在. 且

$x_1=u_1-u_2$, $x_2=u_2-u_3$, $\ldots, x_{2012}=u_{2012}-u_{2013}$, $x_{2013}=u_{2013}-u_1$.

则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2013}\frac{\partial w}{\partial u_k}=\frac{\partial w}{\partial u_1}+\frac{\partial w}{\partial u_2}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial u_{2013}}=$__________.

3. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left(\frac{x e^{x^2+y^2}}{1+\sin(x^2+y^2)}+2\sqrt{2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

4. Γ 是 $4x^2+4y^2+z^2=10$ 与 $z=2$ 的交线，$\int_\Gamma (2x^2+2y^2+3)\mathrm{d}s=$__________.

5. 设 Σ 是由坐标面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 及平面 $z=1-x-y$ 所围成的四面体的表面，则 $\displaystyle\oiint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S=$__________.

二、 选择题（每小题3分，共15分）

1. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4-y^2}{y-\sin^3 x} =$（　　）.

(A) $+\infty$；　(B) $-\infty$；　(C) 不存在；　(D) 0.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

则在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$（　　）.

(A) 偏导数不存在；　(B) 可微但偏导数不连续；

(C) 不可微；　(D) 偏导数存在且连续.

3. 两柱面 $y=2x^3, z=3+x^2$ 的交线在 $x=1$ 所对应的点处的切线方程是（ ）

(A) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$；　(B) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-4}{2}$；

(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-4}{2}$；　(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{4}$.

4. 设函数 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+4z^2-16$， 则（ ）.

(A) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 在 $(2,2,1)$ 处切平面是 $2(x+2)+y+2+2(z+1)=0$；

(B) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 在 $(2,2,1)$ 处法向量 $\vec{n}=(-1,-\dfrac{1}{2},1)$；

(C) 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,2,1)$ 处的梯度为 $(8,4,8)$；

(D) 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,2,1)$ 处沿方向 $(-1,1,1)$ 的方向导数是 4.

5. 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$ 是 $y''-y=x^2$ 的三个不同的解，下面结论正确的是（ ）

(A) $c_1(y_1-y_2)+c_2(y_1-y_3)$ 是 $y''-y=0$ 的通解；

(B) $y_1-y_2+y_3$ 是 $y''-y=x^2$ 的一个特解；

(C) $c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$ 是 $y''-y=x^2$ 的通解；

(D) $c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$ 都不是 $y''-y=x^2$ 的解，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

三、 计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 计算积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}x^2e^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\vec{\Sigma}$ 是锥面 $x^2+y^2-z^2=0\ (0\le z\le 2)$ 的下侧.

3. 求二阶线性微分方程 $\begin{cases} y''-2012y'-2013y-2014=0 \\ y(0)=\dfrac{2012}{2013},\quad y'(0)=2012 \end{cases}$ 的特解.

四、 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$. 试 求 下 面 极 限：

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\pi\rho^3}\iint\limits_{x^2+y^2\leq\rho^2} f(x,y)dxdy$.

2. 设 $\mathrm{d}\,u(x,y)=(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3-y\varphi(x)+e^y)\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x)$ 可导.

（1）求函数 $u(x,y)$；

（2）计算曲线积分 $\int_{\vec{L}}(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3-y\varphi(x)+e^y)\mathrm{d}y$，其中 $\vec{L}$ 是由起点 $(0,0)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 到终点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的有向路径.

五、 应用题（每小题8分，共16分）

1. 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

2. 设L是一条平面曲线，其上任一点$p(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距，且L经过点$(\frac{1}{2},0)$，

（1） 求曲线L的方程；

（2） 求L位于第一象限的一条切线，使该切线与L以及两坐标轴围城的图形面积最小。

六、 证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 $y(x)$是一阶微分方程 $y'+\phi'(x)y=\phi'(x)\phi(x)$ 的一个解, 其中 $\phi(x)$是已知可导函数. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\infty$

2. 设 $f(x)$ 可导且导函数连续, $f(0)=0$, $\Omega_t=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$, 证明:

$$\lim_{t\to0}\iiint_{\Omega_t}\frac{1}{\pi t^4}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=f'(0).$$