

# 四川大学期末考试试卷 (A)

(2012—2013 学年第一学期)

科 目: 微积分(I)-1

适用专业年级: 四川大学数学一类 2012 级各专业本科生

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

## 考 试 须 知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试,必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》.有考试违纪作弊行为的,一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理.

四川大学各级各类考试的监考人员,必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》.有违反学校有关规定的,严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理.

### 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、  $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$  的最大值是 ( ).

2、 设  $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ , 则  $y^{(100)} = ( )$ .

3、 定积分  $\int_{-1}^1 (x^2 \sin x + |x| \sqrt{1-x^2}) dx = ( )$ .

4、 函数  $y = 2x + \frac{1}{x-1} - 1$  的斜渐近线方程是 ( ).

5、 将  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ , 在  $(-\pi, \pi)$  上展为傅里叶级数,  $\cos 2x$  项系数  $a_2 = ( )$ .

### 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分) (将正确选择项的字母填入括号内)。

1、 设  $f(x)$  有二阶连续导数, 且  $f'(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 则 ( ).

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值;

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值;

(C)  $(0, f(0))$  是曲线  $f(x)$  的拐点;

(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值

任课教师:

姓名:

学号:

年级:

学院:

2、由参数方程  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$  确定函数  $y = y(x)$ , 则  $y''(0) = ( \quad )$ 。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

3、设  $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} \int_1^{+\infty} f(t) dt$ , 则  $\int_1^{+\infty} f(t) dt = ( \quad )$ 。

- (A)  $\frac{e}{e-1}$  (B)  $\frac{1}{e-1}$  (C)  $\frac{2e}{e-1}$  (D)  $\frac{2}{e-1}$

4、四个数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$  中, 收敛级数共有 ( ) 个。

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则 ( )。

- (A)  $0 < dy < \Delta y$  (B)  $0 < \Delta y < dy$  (C)  $\Delta y < dy < 0$  (D)  $dy < \Delta y < 0$

三、计算题。(每小题 8 分, 共 24 分)

1、计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

2、由方程  $e^{x+y} + 2x^2 + 3y - 1 = 0$  确定函数  $y = y(x)$ ，求  $y'(0)$ ， $y''(0)$ 。

3、计算不定积分  $\int (\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{e^x+1}) dx$ 。

四、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

1、设  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - a}{x^2}, & x > 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}x + b & x \leq 0 \end{cases}$ ，且  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续。

(1) 求  $a, b$  的值；

(2) 判定  $f(x)$  在  $x=0$  处是否可导。

2、设幂级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$ ， (1) 求其收敛域，(2) 求它的和函数  $s(x)$ 。

五、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

1、(1) 设  $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + cx$ ,  $x \in [0,1]$  且  $a < 0$ , (2) 当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) > 0$ .

(3) 由  $y = f(x)$ ,  $x = 1$  与  $y = 0$  围成平面图形  $D$ , 且  $D$  的面积为 2。

问:  $a$  取何值时, 平面图形  $D$  绕  $X$  轴旋转而成的旋转体体积最小?

2、一个圆柱体容器, 高 10 米, 底面半径为 2 米, 该圆柱体容器盛满水。

(1) 求该圆柱体侧面所受水的压力。

(2) 若将该圆柱体容器内的水从顶部全部抽出, 则至少要作多少功?

(重力加速  $G$  取 10 米/秒<sup>2</sup>, 水密度  $\rho$  取 1000 千克/米<sup>3</sup>, 圆周率  $\pi$  取 3)。

六、证明题（每小题 7 分，共 14 分）。

1、设  $f(x)$  在  $R$  上具有二阶连续导数，且  $f(0)=0$ ，令  $\varphi(x)=(x-1)^2 f(x)$ 。

求证：存在  $0 < \xi < 1$ ，使  $\varphi''(\xi)=0$ 。

2、 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$  证明对任  $\lambda > 0$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛。