

四川大学期中考试试卷（闭卷）

（2012—2013 第一学期）

课程名称：微积分（I）—1 任课教师： 学院

适用专业：数一各专业 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

一. 填空题(每题 3 分,共 15 分).

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3 + 1, & x < 0 \end{cases}$ 则 $f(f(x)) =$ _____;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$ _____;

3. $y = x + x^4$ 上平行于 $y = 5x - 1$ 的切线方程 _____;

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{a}{x^2-4}} = e^3$, 则 $a =$ _____;

5. $f(x) = x^x$, 则 $f'(x) =$ _____;

二. 选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $f(x)$ 在 x_0 处可导, $f'(x_0) = 0$ 是 $y = f(x_0 + |x|)$ 在 $x = 0$ 处可导的()条件.

(A)充分 (B)必要 (C)充要 (D)既不充分也不必要

2. 下面()是 $x \rightarrow 0$ 的最高阶无穷小.

(A) $1 - \cos 2x$ (B) $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ (C) $\sin x - \tan x$ (D) $e^x - e^{-x}$

3. 对 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 下面()成立.

(A) 在 $(0, 1)$ 上无界, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \infty$;

(B) 在 $(0, 1)$ 上无界, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

(C) 在 $(0, 1)$ 上有界, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \infty$;

(D) 在 $(0, 1)$ 上有界, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ 。

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n = (\quad)$;

(A) 1 (B) $\frac{1}{e}$ (C) ∞ (D) e

5. 下面函数中有跳跃间断点的是()

(A) $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} + \cos x}$

(B) $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} + x}$

(C) $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} + e^x}$

(D) $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + \cos x}$

三. 计算题(每题 8 分, 共 32 分)

1 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \sin(x^2 y) = y$ 确定, 求 $y'(0)$

2. $f(x)$ 二阶可导函数, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 2$, $\begin{cases} x = t^3 + 3t^4 + 1 \\ y = f(t^3) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1}$

3. (同济教材班做) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(川大教材班做) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ 的值.

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\arctan(n+1)^2 - \arctan n^2)$ (提示: 利用中值定理和夹逼法, 其他方法也可)

四.解答题(每题 8 分,共 24 分)

1. 函数 $f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (\cos xy)^{\frac{1}{y^2}}$, 且 $F(x) = x^{f(x)}$ 求导数 $F'(x)$

2. (同济教材班做) $f(x) = 2a^3x + \frac{1}{x^2} - 1$ 在 $x \geq 2$ 上的单调函数, 求 a 的范围.

(川大教材班做) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-2\lambda}}$ 的绝对收敛, 条件收敛和发散.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin^2 x} - a}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}, & x > 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\arctan cx}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求常数 a, b, c 的值.

五.证明题(每题 7 分,共 14 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$, 且 $\varphi(x)$ 在 a 的某邻域有定义, $f(x) = \varphi(x)|x-a|$, 证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的充要条件是 $A=0$ 。

- 2 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(a) = f(b) = 0$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) - 3\xi f(\xi) = 0$