2015-2016 秋季 A 卷答案（微积分 III-1）

一．填空题（18 分）

1. 0　　2. 0.04　　3. $\dfrac{1}{1+\ln x}$　　4. $\dfrac{2}{3}$　　5 $f'(x)$　　6 $\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

二．在 $xy=x+\sin y$ 两边对 x 求导，得：

$y+xy'=1+y'\cos y \quad \Rightarrow x=y=0$ 时，$y'=-1$

再对 x 求导，得：

$2y'+xy''=y''\cos y-y'^2\sin y$

代入 $x=y=0, \quad y'=-1$，得

$y''|_{x=y=0}=-2$

三．$y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$ 得不可导点 $x=0$ 驻点 $x=1$

$x<0, y'>0$，函数单增。

$0<x<1$，$y'<0$，函数单减。

$x>1, y'>0$ 函数单增。

$f(0)=0$ 是极大值，$f(1)=-\dfrac{9}{10}$ 是极小值。

$y''=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}(2x+1)$，零点 $x=-\dfrac{1}{2}$ 不可导点 $x=0$

在 0 的左右邻域 $y''>0$，函数上凹

$x<-\dfrac{1}{2}, y''<0$，函数下凹

$0>x>-\dfrac{1}{2}, y''>0$，函数上凹

$x>0,\ y''>0$，函数上凹

$(2,-\dfrac{9}{5}(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{3}})$ 是拐点。

四．定义域$(-\infty,-1)(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(1+\frac{1}{x})\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^2}=0$$

$$\lim_{x\to -1^-} x^2\ln(1+\frac{1}{x})=-\infty$$

$x=-1$是垂直渐近线

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{x^2}$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}$$

$y=x-\dfrac{1}{2}$是斜渐近线

$$R=PQ=(60-P^2)P$$

五．（1）$R'=60-3P^2$

$$R'(6)=-48$$

$P=6$时，价格再上涨 1 个单位，收益将下降 48 个单位。

（2）$\dfrac{EQ}{QP}|_{P=6}=\left|\dfrac{P}{Q}\dfrac{dQ}{dP}\right|_{P=6}=\left|\dfrac{2P^2}{60-P^2}\right|_{P=6}=3$

$P=6$时，价格再上涨 1%，需求将下降 3%。

（3）$\dfrac{ER}{EP}|_{p=6}=\left|\dfrac{P}{R}\dfrac{dR}{dP}\right|_{p=6}=\left|\dfrac{1}{Q}\dfrac{dR}{dP}\right|_{p=6}=2$

$P=6$时，价格再上涨 1%，收益将下降 2%。

六．（1）令$\sqrt[4]{1+e^x}=t$，则$x=\ln(t^4-1)$，$dx=\dfrac{4t^3}{t^4-1}dt$

原式=$\int(4t^6-4t^2)dt=\frac{4}{7}t^7-\frac{4}{3}t^3+c$

$=\frac{4}{7}(1+e^x)^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{4}}+c$

（2）原式=$\int\ln(\ln x)d(\ln x)$

$\overset{t=\ln x}{=}\int\ln tdt=t\ln t-t+c$

$=\ln x\ln(\ln x)-\ln x+c$

七． $f(x)$单减$\Leftrightarrow f^{'}(x)\le 0$

$\therefore -\alpha xe^{-x}\le-\beta \qquad (x>0)$

即（1）$\alpha<0, xe^{-x}\le\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow(xe^{-x})_{\max}\le\frac{\beta}{\alpha}$

（2）$\alpha>0, xe^{-x}\ge\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow(xe^{-x})_{\min}\ge\frac{\beta}{\alpha}$

令$g(x)=xe^{-x}$

$g^{'}(x)=(1-x)e^{-x}$　有唯一驻点$x=1$

$x<1, g^{'}(x)>0$， $g(x)$单增。

$x>1, g^{'}(x)<0$， $g(x)$单减。

$g(1)=\frac{1}{e}$是最大值

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$

得：（1）$\alpha<0,\frac{1}{e}\le\frac{\beta}{\alpha}$ 或者（2）$\alpha>0, 0\ge\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\alpha>0,\beta<0$

八．对 $f(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 应用拉格朗日中值定理

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\frac{1}{2}}{x_0} \qquad 0<\xi_1<x_0$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x_0} \qquad x_0<\xi_2<1$$

由 $f''(x)>0$，得 $f'(x)$ 单增

所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

即 $\dfrac{\frac{1}{2}}{x_0}<\dfrac{\frac{1}{2}}{1-x_0}\Rightarrow x_0>\dfrac{1}{2}$

另解。由函数的凹性（$f''(x)>0$）$\Leftrightarrow$ 区间中任意两点间的连线总在曲线上方

$(0,0)(1,1)$ 的连线为 $y=x$

所以 $\forall x\in(0,1), \quad x>f(x)$

$$\therefore x_0>f(x_0)$$
$$=\frac{1}{2}$$

附加题（8 分）

连续函数在闭区间必有最大和最小值。

不妨设 $f_+'(a)<0, f_-'(b)>0$（$f_+'(a)>0, f_-'(b)<0$ 同理）

$f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ 由极限的保号性，在 a 的右邻域有：

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0\Rightarrow f(x)<f(a)$ 说明 $f(a)$ 不是最小值。

$f_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 由极限的保号性，在 b 的左邻域有：

$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0 \Rightarrow f(x)<f(b)$说明$f(b)$不是最小值。

所以最小值不是端点值，在开区间中获得。必是极值。设为$f(\xi)$（$\xi \in (a,b)$）

由可导函数取极值的必要条件，得：

$$f'(\xi)=0$$