小测验 1 答案

姓名______________　　　序号______

1、 （10）求数列极限：$a_n = \frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+2} + \cdots + \frac{n}{3n^2+n}$.

解：

$$a_n \le \frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+1} + \cdots + \frac{n}{3n^2+1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(3n^2+1)}, \qquad (3')$$

$$a_n \ge \frac{1}{3n^2+n} + \frac{2}{3n^2+n} + \cdots + \frac{n}{3n^2+n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2(3n^2+n)}, \qquad (3')$$

而
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2(3n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2(3n^2+n)} = \frac{1}{6}, \qquad (2')$$

故由夹逼定理，有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6}$. (2')

2、 （12）求函数极限（三选一）

a) $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{x^3}$;

c) $\lim_{x\to+\infty} x^2[lnarctan(x+2) - lnarctanx]$.

解：

a) 因为

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\ln\left[e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{2} + x^2\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]\right\}, \qquad (3')$$

令 $x = \frac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{2} + x^2\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2t} + \frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{-t+2\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{2t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-1+\frac{1}{1+\frac{t}{2}}}{4t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2-2-t}{2+t}}{4t} = -\frac{1}{8}, \qquad (6')$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{8}}. \qquad (3')$$

b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{tanx-sinx}{x^3\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{sinx(1-cosx)}{x^3}\cdot\frac{1}{cosx\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}=\frac{1}{4}.\qquad(12')$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[lnarctan(x+2)-lnarctanx]=\lim_{x\to+\infty}x^2ln\frac{\arctan(x+2)}{arctanx}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{\arctan(x+2)}{arctanx}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\arctan(x+2)-arctanx}{arctanx}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+2)-arctanx]$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+2)-arctanx}{\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(2+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\frac{2x^3(x+1)}{[1+(2+x)^2](1+x^2)}=\frac{4}{\pi}.\qquad(12')$$

3、（18）$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^3-3t^2+1\\y=2t^4-4t^3+2\end{cases}$($t$为参数)决定，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dt}=8t^3-12t^2=4t^2(2t-3),(3')\ \frac{dx}{dt}=3t^2-6t,(3')$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^2(2t-3)}{3t(t-2)}=\frac{4t(2t-3)}{3(t-2)}.\qquad(3')$$

因为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}},\qquad(3')$$

而

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4}{3}\frac{(4t-3)(t-2)-t(2t-3)}{(t-2)^2}=\frac{8(t-1)(t-3)}{3(t-2)^2},\qquad(3')$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8(t-1)(t-3)}{9t(t-2)^3}.\qquad(3')$$

4、 (20) 设函数$f(x)=\begin{cases}(2x+1)e^{sinx}, x>0\\ ax+b, \quad\quad x\le 0\end{cases}$在$\mathbb{R}$上可导,

a) 求a,b;

b) 讨论$f(x)$在$x=0$处的二阶可导性.

解:

a) 由$f(x)$在$\mathbb{R}$上可导，知$f(x)$连续，且$f'(x)$存在。从而有

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0), f_+'(0)=f_-'(0). \quad (2')$$

因为

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(2x+1)e^{sinx}=1, f(0)=b,$$

所以$b=1$; (3')

又

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{(2x+1)e^{sinx}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}=3, \quad (3')$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{ax+1-1}{x}=a, \quad (2')$$

所以$a=3$. (1')

b) 由 a)知$f'(x)=\begin{cases}[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}, x>0\\ \quad 3, \quad\quad x\le 0\end{cases}$, (2')

当$x=0$时,

$$f_+''(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\{[(2x+1)cosx+2]cosx+2cosx-(2x+1)sinx\}e^{sinx}=5, \quad (5')$$

$$f_-''(0)=0. \quad (1')$$

所以$f_+''(0)\neq f_-''(0)$，从而$f(x)$在$x=0$处的二阶导数不存在。 (1')

5、 (20) 讨论方程$lnx=kx$的根的个数.

解:

当$k=0$时，方程显然只有一个实根$x=1$. (2')

当$k>0$时，令

$$f(x)=lnx-kx(k>0). \quad (1')$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k, \quad (1')$$

令$f'(x)=0$得驻点为

$$x=\frac{1}{k}(k>0). \quad (2')$$

由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线始终呈凸状.

当$x \in \left(0,\dfrac{1}{k}\right)$时，$f'(x) > 0$；当$x \in \left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$时，$f'(x) < 0$. $(3')$

所以

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = ln\frac{1}{k} - 1 \qquad (2')$$

为最大值.

故当$k > \dfrac{1}{e}$时, $f\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$, 此时方程无根；

当 $0 < \mathrm{k} < \dfrac{1}{e}$时, $f\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$,

而

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad (2')$$

因此，此时方程有两个实根，分别位于$\left(0,\frac{1}{k}\right)$和$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$内； $(2')$

当$-\infty < k < 0$时，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0,$

因此，方程有且仅有一个实根位于$(0,1)$内. $(5')$

6、 **(20)** 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.证明:

a) 存在$\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi) = \xi$;

b) 对任意实数λ，必存在$\eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$.

证明：

a) 令$F(x) = f(x) - x$$(3')$，则$F(x)$在$[0,1]$连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, F(1) = -1 < 0,$$

由连续函数零点定理，必存在$\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi) = \xi$. $(5')$

b) 令$G(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$$(5')$，则$G(0) = G(\xi) = 0$$(2')$，应用罗尔定理，必存在$\eta \in (0,\xi)$，

使得

$$G'(\eta) = -\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta) - \eta] + e^{-\lambda\eta}[f'(\eta) - 1] = 0,$$

于是成立

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1. \qquad (5')$$

证毕