① 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明：至少 $\exists\xi\in(0,1)$，使得
$\int_0^{\xi} f(t)dt = f(\xi)$

析：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 证明：$F(x)-F'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}[F(x)-F'(x)]=0$.

设 $G(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$，则 $G(0)=G(1)=0$.

故由罗尔定理：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $G'(\xi)=0$.

即 $e^{-x}f(\xi)+(-e^{-x})\int_0^{\xi} f(t)dt=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\xi} f(t)dt = f(\xi)$. $\xi\in(0,1)$.

小结：关注 $\int_0^x f(t)dt$ 与 $f(x)$ 的关系；常见的微分中值问题

② 证明不等式 $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^2\,dx<1-\frac{\pi}{4}$.

左边：

由 $u\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\tan u>u$. 而当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$x^2\in(0,\frac{\pi^2}{16})\subset(0,\frac{\pi}{2})$

故 $\tan x^2>x^2$. 即 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^2\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$. 常见放缩.

右边.

又 $x\in(0,\frac{\pi}{4})\subset(0,1)$，$\tan x^2<\tan^2 x$ 只能倒推吧…

即 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=1-\frac{\pi}{4}$.

小结：定积分不等式常见解决办法，