2011-2012第二学期中期参考答案

一. $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$; $\underline{\sqrt{2}}$; $\underline{\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(\sqrt{x^2+y^2})dx}$; $\underline{2e^3}$; $\underline{\arctan 2}$

二. A, A, D, C, D

三. 1. $\frac{dy}{dx}=f_x+f_t\frac{dt}{dx}$（4分）; $F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_t\frac{dt}{dx}=0$（4分）解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{F_tf_x-F_xf_t}{F_t+F_y\cdot f_t}$（1分）

2. 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^2dv$（2分）$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\rho^4dz$（6分）$=\frac{\pi}{28}$（1分）

3. 设L分别与L_1, L_2交点为$A(t_1, 2t_1+1, 2)$, $B(-t_2-1, 1, t_2)$ （本题方法多）

$\overrightarrow{AB}=(-t_2-t_1-1, -2-2t_1, t_2-2)\perp\vec{S_1}=(1,2,0)$, $\overrightarrow{AB}\perp\vec{S_2}=(-1,0,1)$

有 $\begin{cases}-5t_1-t_2=5\\t_1+2t_2=1\end{cases}$ 得 $t_1=-\frac{11}{9}$, $t_2=\frac{10}{9}$ $\overrightarrow{AB}=(-\frac{8}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$, $A(-\frac{11}{9},-\frac{13}{9},2)$

$\therefore d=|\overrightarrow{AB}|=\frac{12}{9}$（3分） L方程: $\frac{x+\frac{11}{9}}{-2}=\frac{y+\frac{13}{9}}{1}=\frac{z-2}{-2}$（6分）

四. 1. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)$ 故连续, $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+o(x^3)}{x}=0$

同理 $f_y(0,0)=0$.（3分）

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^3}=1$ 知 $x>0$ 且 $x\to0$ 时 $f(x,0)>f(0,0)$, $x<0$ 且 $x\to0$ 时

$f(x,0)<f(0,0)$. 故 $f(0,0)$ 不为极值.

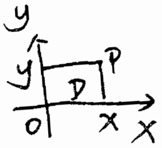
(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}x^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}y^2+\right.$

$\left.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}x^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}y\right)\frac{o(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\right]=0$ 5分

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

2. $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy$（2分）; D: $2x^2+y^2\le R^2$（2分）

$\therefore A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$（3分）$=\sqrt{2}\iint\limits_D 1\,dxdy=\sqrt{2}A(D)=\pi R^2$（2分）

五. 

$V(x,y)=\int_0^x dx\int_0^y dy\int_0^{\frac{1-x-\frac{y}{2}}{4}} 1\,dz=\frac{1}{4}xy-\frac{1}{8}x^2y-\frac{1}{16}xy^2$ (5分)

令 $F(x,y)=V(x,y)+\lambda\left(x+\frac{y}{2}-1\right)$

$$\begin{cases} F_x=\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}xy-\frac{1}{16}y^2+\lambda=0 \\ F_y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}xy+\frac{\lambda}{2}=0 \\ x+\frac{y}{2}=1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$ 故 $V_{max}=\frac{1}{16}$ (6分)

六 (1) $f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$

$=f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$ (3分)

$\therefore\ 0\le|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|x-x_0|+|y-y_0|$ (2分)

由夹逼定理 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 故 $f(x,y)$ 在 D 上连续

(1分)

(2) 用极坐标 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial\rho}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta=\frac{xf_x+yf_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (3分)

$\therefore\ I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\Big|_0^1 d\theta$

$=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ (2分)

$\therefore\ |I|\le\int_0^{2\pi}1\,d\theta=2\pi.$ (1分)