一.微分方程的基本概念.

①定义：表示未知函数与未知函数的导数(微分)及自变量之间的关系式. →如 $\frac{dy}{dx}=2x$、$\frac{d^2s}{dx^2}=g$.

- 未知函数为一元函数：常微分方程.
- 未知函数为多元函数：偏微分方程.

② $\boxed{\text{微分方程的解}}$：把某个函数以及它的导数代入微分方程，能使该方程成为恒等式. → 几何上：微分方程的积分曲线.

解中包含的独立任意常数的个数，分别与对应的微分方程阶数相同.

↳ $\boxed{\text{微分方程的通解}}$ ⇒ $y=x+C$

(通解中任意常数确定后，所得的解叫 $\boxed{\text{微分方程的特解}}$) ⇒ $y=x^2+1$.

如 $y=x+C$ 是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的解.

如 $y=\int_a^x e^{t^2}dt+C$ 是 $\frac{dy}{dx}=e^{x^2}$ 的解.(不定积分法)

↳ 微分方程的初值问题.

求微分方程的一个解，使它满足预先给定的 $\boxed{\text{初值条件}}$

Eg. 验证：$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ 的解.

并满足条件 $\boxed{x|_{t=0}=A}$，$\boxed{\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0}$ 的解.

初值条件.

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt \quad ①$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 C_1\cos kt - k^2 C_2 \sin kt. \quad ②$$

将②和 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 代入 $-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)=0$.

$\Rightarrow$ $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是原方程的$\boxed{\text{通解}}$.

代入 $x|_{t=0}=A \Rightarrow C_1=A$. 代入 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0 \Rightarrow C_2=0$.

↳ 故 $x=A\cos kt$ 是原方程的$\boxed{\text{特解}}$.

③ 微分方程解的存在性

定理：对于微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 和初值条件 $y(x_0)=y_0$.

→如果 $f(x,y)$ 在矩形区域 D: $|x_0-x|\le a$, $|y_0-y|\le b$ 内连续，存在常数 $L>0$,

使得对 y 适合利普希茨条件：$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$.

则初值问题在区间 $I=[x_0-h, x_0+h]$ 上存在唯一解.

$h=\min(a,\frac{b}{M})$, $M>\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$.