线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第三章 行列式

第二节 行列式的主要性质

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、可逆矩阵判别定理

二、方阵乘积的行列式

三、可逆矩阵逆的行列式

一、方阵可逆的判别定理

n阶方阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0.$

证明： 方阵A可经有限次初等行变换化为阶梯形U,

存在初等阵$P_1, P_2, \cdots, P_k$, 使得

$$U = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

由于初等阵的行列式不为零, $\therefore |A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0$

如果A不可逆, A的主元列数小于列数, U有一零行,

$$|U| = 0 \Rightarrow |A| = 0.$$

如果A可逆, A的主元列数等于列数, U的主对角线上元都不为零,

$$|U| \neq 0, \text{ 从而} |A| \neq 0.$$

$\therefore A$可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0.$

二、方阵乘积的行列式

设A,B均为n阶方阵,$|AB|=|A||B|$.

证明 若B不可逆,等价于方程组$BX=0$有无穷多解.

而其解是方程组$ABX=0$的解,所以AB不可逆.

$$\therefore |AB|=0=|A||B|.$$

若B可逆,则$B=P_kP_{k-1}\cdots P_1$.

$$\therefore |AB|=|AP_kP_{k-1}\cdots P_1|=|A||P_k||P_{k-1}|\cdots|P_1|=|A||B|.$$

推论

可逆矩阵的判别方法

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶方阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$

可逆方阵逆的行列式

$$\boxed{\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{-1}}$$

n阶方阵行列式的运算规律

（A B是n阶方阵矩阵，$\lambda \in R$）

(1) $|A^T| = |A|$

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

(3) $|AB| = |A||B| = |BA|$

(4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(5) $|A^n| = |A|^n$

注 $|A+B| \overset{?}{=} |A| + |B|$

小结

一、可逆矩阵的常用判别方法

1、充要条件

n阶方阵A可逆当且仅当A的主元列数等于n。

2、判别定理

n阶方阵A可逆当且仅当 $|A| \neq 0$

3、推论

设A、B为同阶方阵，若$AB = E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

二、方阵乘积的行列式

设A,B均为n阶方阵,$|AB|=|A||B|$.

三、可逆方阵逆的行列式

$$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$$

n阶方阵行列式的运算规律

（A B是n阶方阵矩阵，$\lambda\in R$）

(1) $\left|A^T\right|=|A|$

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(3) $|AB|=|A||B|=|BA|$

(4) $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$

(5) $\left|A^n\right|=|A|^n$

一、可逆矩阵的常用判别方法

1、充要条件

n阶方阵A可逆当且仅当A的主元列数等于n。

2、判别定理

n阶方阵A可逆当且仅当 $|A| \neq 0$

3、推论

设A、B为同阶方阵，若$AB = E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

二、方阵乘积的行列式

$$\text{设}A,B\text{均为}n\text{阶方阵,}|AB|=|A||B|.$$

三、可逆方阵逆的行列式

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

n阶方阵行列式的运算规律

（A B是n阶方阵矩阵，$\lambda\in R$）

(1) $|A^T|=|A|$

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(3) $|AB|=|A||B|=|BA|$

(4) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

(5) $|A^n|=|A|^n$