四川大学半期考试试卷

（2014—2015 年第二学期）

科目：微积分（III）-2　课程号：201077030　考试时间：90 分钟

注： 请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

1、（10 分）计算定积分 $\int_0^1 x\arctan x dx$

原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2\arctan x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x-\arctan x]\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

参考答案	$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$
对应考点	分部积分法求定积分

2、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 2-x, 1<x\le 2\end{cases}$，记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le 2)$，求出 $F(x)$.

当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3}$；

当 $1<x\le 2$ 时，$F(x)=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x(2-t)dt=-\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}$，

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}.$

参考答案	$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}.$
对应考点	定积分的计算

3、（10 分）求由曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$， $y=x$， $y=2x$ 所围成的平面图形的面积.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x_1=0, x_2=2 .$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x_3=0, x_4=4 .$$

$$S=\int_0^2(2x-x)dx+\int_2^4(2x-\frac{x^2}{2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+(x^2-\frac{x^3}{6})\Big|_2^4=4\frac{2}{3}.$$

参考答案	$4\frac{2}{3}$.
对应考点	定积分求平面图形的面积

4、（10 分）设平面图形由不等式 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定.求此图形绕直线 $x=2$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

$$\begin{cases} x=1-\sqrt{1-y^2} \\ x=y \end{cases}，\text{交点 } (0, 0), (1, 1) .$$

解法一 $$dv=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}dy$$

$$=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy,$$

$$\therefore V=\int_0^1 dV=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]dy$$

$$=2\pi[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{1}{3}(1-y)^3]\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi.$$

解法二 $$V=2\pi\int_0^1(\sqrt{2x-x^2}-x)(2-x)dx$$

$$=2\pi[\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}dx-\int_0^1 x(2-x)dx]$$

$$=2\pi[\int_0^1(2-x)\sqrt{1-(x-1)^2}dx-\frac{2}{3}].$$

参考答案	$\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi$.
对应考点	旋转体的体积

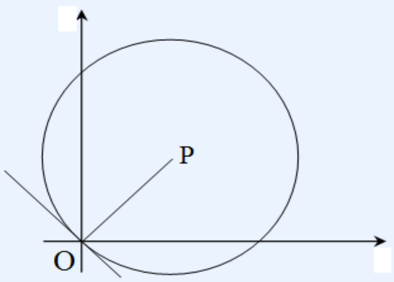
5、（12 分）设 $z=e^x\cos y-\sin(xy)$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}$ ， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y-y\cos(xy)$ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(0,\pi)}=-1-\pi$ 或 $z(x,\pi)=-e^x-\sin\pi x,\ z_x'(0,\pi)=-1-\pi$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y-x\cos(xy)$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(0,\pi)}=0$ 或 $z(0,y)=\cos y,\ z_y'(0,\pi)=0$.	
参考答案	$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(0,\pi)}=-1-\pi$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(0,\pi)}=0$.
对应考点	偏导数的计算

6、（12 分）已知 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 f 二阶可导，g 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

设 $u=2x-y,\ \upsilon=x,\ \omega=xy$. $z_x=f_u u_x+g_\upsilon \upsilon_x+g_\omega \omega_x=2f_u+g_\upsilon+yg_\omega$, $z_{xy}=2f_{uu}(-1)+g_{\upsilon\omega}x+g_\omega+yg_{\omega\omega}x$ $=-2f_{uu}+xg_{\upsilon\omega}+xyg_{\sigma\omega}+g_\omega$.	
参考答案	$-2f_{uu}+xg_{\upsilon\omega}+xyg_{\sigma\omega}+g_\omega$.
对应考点	偏导数的计算

7、（10 分）计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}(x+y)dxdy$.



解1. 用极坐标作（如图所示）

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\sin\theta+\cos\theta)dr=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+2\sin 2\theta+\text{sing}^2 2\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

解2. 作变换：$x=u+\frac{1}{2},\ y=v+\frac{1}{2}$，则

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac{1}{2}}(1+u+v)dudv=\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac{1}{2}}dudv=\frac{\pi}{2}.$$

解3. 本题一个简单的解法是：由 x,y 的对称性知 $I=2\iint\limits_{x^2+y^2\le x+y}xdxdy$

而均匀圆板 $x^2+y^2\le x+y$ 的质心为圆心 $P:\bar{x}=\frac{1}{2},\ \bar{y}=\frac{1}{2}$

但 $\bar{x}=\frac{1}{2}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\frac{1}{2}\pi}$，所以 $\iint\limits_D xdxdy=\frac{\pi}{4}$. 从而 $I=\frac{\pi}{2}$.

参考答案	$\frac{\pi}{2}$.

8、（12 分）设 $f(x,y)$ 为连续函数，化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 为累次积分(两种次序都要)，

其中 D 是由直线 $y=x,\ y=x+3,\ y=-2x+1$ 及 $y=-2x+5$ 围成的平行四边形区域.

$\because$ 交点为 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)$

$\therefore$ 原式 $=\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}dx\int_{-2x+1}^{x+3}f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}dx\int_{x}^{x+3}f(x,y)dy+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}dx\int_{x}^{-x+5}f(x,y)dy;$

原式 $=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{y}f(x,y)dx+\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{7}{3}}dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{11}{3}}dy\int_{y-3}^{\frac{5-y}{2}}f(x,y)dx.$

参考答案	$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}dx\int_{-2x+1}^{x+3}f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}dx\int_{x}^{x+3}f(x,y)dy+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}dx\int_{x}^{-x+5}f(x,y)dy;$ $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{y}f(x,y)dx+\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{7}{3}}dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{11}{3}}dy\int_{y-3}^{\frac{5-y}{2}}f(x,y)dx.$
对应考点	交换二次积分次序的步骤

9、（12 分）

由 $\begin{cases} z_x=y(2x+2)=0 \\ z_y=x^2+3y^2+2x=0 \end{cases}$，得 D 内驻点 $\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

且 $z\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

在边界 $y=0$ 上，$z(x,y)=0$

在边界 $y=1$ 上，$z_1=x^2+2x+1\quad(-2\le x\le 2)$

$z_1'=2x+2=0$，　得驻点 $x=-1$

$z_1(-2)=1,\quad z_1(2)=9,\quad z_1(-1)=0$

在边界 $x=-2$ 上，$z_2=y^3\quad(0\le y\le 1)$

$z_2'=3y^2\ge 0,\quad z_2(0)=0,\quad z_2(1)=1$

在边界 $x=2$ 上，$z_3=y^3+8y\quad(0\le y\le 1)$

$z_3'=3y^2+8>0,\quad z_3(0)=0,\quad z_3(1)=9$

比较后可知，函数 z 在点 $\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 处取最小值 $z\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

在点 $(2,1)$ 处取最大值 $z(2,1)=9.$

参考答案	最小值 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 最大值 9.
对应考点	二元函数的最值

10、（附加题：10 分）设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上可导，且 $f(2)=\int_3^4(x-1)^2f(x)dx$，求证：在 $[2,4]$ 内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证　设 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，因为 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上可导，故 $F(x)$ 也在 $[2,4]$ 上可导，且 $F(2)=f(2)$

又由　$f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)dx$，应用积分中值定理

得　$f(2)=(\eta-1)^2 f(\eta)$　　$\eta\in[3,4]$

从而有　$f(2)=F(\eta)=F(2)$

在 $[2,\eta]$ 上应用 $Rolle$ 定理，$\exists\xi\in(2,\eta)\subset(2,4)$，使 $F'(\xi)=0$

即　$2(\xi-1)f(\xi)+(\xi-1)^2 f'(\xi)=0$

亦即　$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi),\ \xi\in(2,4)$.

参考答案	答案见解析.
对应考点	