(一)、夹逼定理.

(1). $\exists N_1 \in N^+$ $\forall n > N_1$，有 $y_n \le x_n \le z_n$.

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

$\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

数列的极限.

二

① 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：令 $\alpha=\sqrt[n]{n}-1$. $(\alpha>0)$ → 转证: $\alpha\to0$

思路? → 至少抽第三项.

$1+\alpha=n^{\frac{1}{n}}$

$n=(1+\alpha)^n=C_n^0\cdot1+C_n^1\cdot\alpha+C_n^2\cdot\alpha^2+\cdots+C_n^n\alpha^n$.

$n>C_n^2\alpha^2=\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

即 $0<\alpha^2<\frac{2}{n-1}$

→ $0<\alpha<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ → $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$.

$y_n=\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. $\left|\sqrt{\frac{2}{n-1}}-0\right|<\varepsilon$.

$\frac{2}{\varepsilon^2}+1<n$. 即取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]+1$.

当 $n>N$ 时, $\forall\varepsilon>0$, 有 $|y_n-0|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

故 夹逼定理.

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明完毕.

② 证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$ — $a>1$ 同证

设 $b=\sqrt[n]{a}-1$

$0<a<1$. $a=\frac{1}{b}$, $b>1$.

$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$

$a=1+b\ (b>0)$.

$a^n=(1+b)^n>\frac{n(n-1)}{2}\cdot b^2$.

$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\cdot b^2}=\frac{2}{b^2(n-1)}$ $z_n\to 0\ (n\to\infty)$.

③

求解：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{100+2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+100+3^n+5^n+\cdots+b^n}\ (b^n>5^n)=b$.

b^n影响最大.

$b\cdot\sqrt[n]{a}=1$.

lim

$n>N$, $2^n>100$

$$2=\sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{100+2^n} < \sqrt[n]{2^n+2^n} = \underbrace{2\times\sqrt[n]{2}}_{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1} \leq 2n.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{100+2^n}=2.$

上确界：设有非空数集 E，若 $\exists \beta\in R$，且 （最小的上界）.

(1). $\forall x\in E$，有 $x\leq\beta$.

(2). $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $\beta-\varepsilon<x_0$.（x 多一点都会超 β）.

$\hookrightarrow \beta<x_0+\varepsilon.$

公理：有上界的非空数集，必有上确界，且上确界唯一.

当 $n>N$ 时，有 $\beta-\varepsilon<x_N\leq x_n. \Rightarrow 0\leq\beta-x_n<\varepsilon.$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta=\sup\{x_n\}.$ $\quad 0\leq|x_n-\beta|<\varepsilon.$

单调有界准则：单调有界的数列必有极限 $\left[\begin{array}{l}\{x_n\}\text{单增}\to\text{有上界}\\ \{x_n\}\text{单减}\to\text{有下界}\end{array}\right.$

① 证明：$\{x_n\}=(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

且该数列收敛.

$$x_n = 1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\underbrace{\frac{(n-1)(n-2)}{n\cdot n}}_{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=1+1+\underbrace{\frac{n(n+1)}{2!}\frac{1}{(n+1)^2}}_{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{\to 0}$$

$x_n<x_{n+1}$

$$\frac{1}{3\times2}<\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{2^2}.\quad \frac{1}{4\times3\times2}<\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{2^3}.$$

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^n}\right)=3}$$

故 x_n 单调，且有上界 $\Rightarrow$ x_n 有极限 $\Rightarrow$ x_n 收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

② $x_1=10$. $x_2=4$. $x_3=\sqrt{10}$. $x_4=\sqrt{6+\sqrt{10}}$. --- $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$.

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，求其极限.

由 $x_1>x_n$. 假设 $x_{n-1}>x_n$.

则 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}} > \sqrt{6+x_n} = x_{n+1}$.

故 x_n 单调递减.

显然 $x_n>0$. $\Rightarrow$ x_n 有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$x_n=\sqrt{6+x_{n-1}} \Rightarrow x_n^2 = 6+x_{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (6+x_{n-1})$

$a^2=6+a \to a=3$ 或 $a=-2$.

保序性：当 $n>N$，$x_n>y_n$ 且 $x_n\to a$，$y_n\to b$.
则 $a\geq b$.

由 $x_n>0$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} 0=0$

故 $a\geq 0$.

即 $a=3$.

exercise.

$(1+\frac{1}{n})^n=e$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=e$. 夹逼法则.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

$$\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)<\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1$$

$$=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e.$$

放缩法的使用. | 夹逼定理.