① 两个重要极限.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

$\boxed{已知\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.}$

证: $\exists n$ 使 $n\le x\le n+1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n+1})\le(1+\frac{1}{x})\le(1+\frac{1}{n})$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n+1})^n\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{n})^x\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$

当 $x\to+\infty$, $n\to+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n+1}}=e.$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e.$

故 $x\to+\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

当 $x\to-\infty$ 时.

令 $-x=t>0$, 当 $x\to-\infty$, $t\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1+1}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\cdot\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})$

$=e.$

综上: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$ / $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Eg:

② $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-3})^x=$ "法一": $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x-3})^x=\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x-3}{5}})^{(\frac{x-3}{5}+\frac{3}{5})5}}$

$=\left[\lim(1+\frac{1}{\frac{x-3}{5}})^{\frac{x-3}{5}}\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x-3})\right]^{\frac{3}{5}}\right]^5$

"法二".

$\frac{1}{x}$ 显然！

$$= e^{5}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}} = \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right]^{-3}} = \frac{e^{2}}{e^{-3}} = e^{5}.$$

三、无穷小和无穷大.

① 无穷小：若 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时，$f(x)\to 0$. 则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时的无穷小.

↳ ★ 以 0 为极限. (0是唯一的无穷小常数).

定理1：无穷小与函数极限的关系.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha.\ \text{其中 } \alpha \text{ 为 } x\to x_0 \text{ 的无穷小量.}}$$

$\rightleftharpoons$ $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\rightleftharpoons$ $\forall\varepsilon>0. \exists\delta>0.$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\alpha-0|<\varepsilon$.

$\rightleftharpoons$ $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$. 故 α 为 $x\to x_0$ 的无穷小量.

② 无穷大：$\forall M>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时（$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$），都有 $|f(x)|>M$. → $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大.

$\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)|>M$. → $f(x)$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷大.

↳ ★ 函数的绝对值无限增大.

Eg. 证明. $\lim \frac{1}{x-1}=\infty$.

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，对一切满足 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{M}$．取 $\delta=\frac{1}{M}$．

故 $\forall M>0$，$\exists\delta=\frac{1}{M}>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$．

③

若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小． (1)
若 $f(x)$ 为无穷小，则 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大 (2)

证：(1) 找到 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$． 析：

由 $f(x)$ 为无穷大，则 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)|>M$．

取 $\varepsilon=\frac{1}{M}$． 则 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$．

故 $\forall\varepsilon=\frac{1}{M}>0$，$\exists\delta>0$，使 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$．

→ 无限个无穷小之和不一定是无穷小．

④

一般情况，幂越大，阶越高．

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=0$．称 β 为 α 的高阶无穷小量 $\beta=o(\alpha)$．

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\infty$．称 β 为 α 的低阶无穷小量．

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=C$（$C$ 为常数且 $C\neq 0$） 称 β 为 α 的同阶无穷小量．$\beta=O(\alpha)$．

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1$． 称 β 为 α 的等价无穷小量． $\beta\sim\alpha$．（一阶无穷小量）．

☆ $\beta = (2x^4 + x^5)$ → 是 x 的 4 阶无穷小!!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{x^4} = \lim_{x\to 0}(2+x) = 2.$$

等价无穷小:

① $\sin x \sim x$.

② $\arcsin x \sim x$.

③ $\tan x \sim x$.

④ $\arctan x \sim x$.

⑤ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \sim \frac{1}{2}\sin^2 x$

⑥ $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

⑦ $e^x - 1 \sim x$.

⑧ $\ln(1+x) \sim x$.

⑨ $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a}$ ⟶ $\frac{\ln(1+x)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a}$.

⑩ $a^x - 1 \sim x\ln a$ ⇒ $e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a$.

⑪ $(1+x)^{u} - 1 \sim ux$ ⇐ $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$. ⇐ $e^{\frac{1}{n}\ln(1+x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln(1+x) \sim \frac{1}{n}x$.

这里的 u 是常数!!!

$a^{2x} - 1$

$$\frac{x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2}{2x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}{x^2} = \frac{\ln\left(1+\frac{\cos x - 1}{2}\right)}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{2x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$