① 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$

原式 $=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}\cdot i=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{-1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}.$

小结：定积分的定义!!

把区间 $[a,b]$ 分为 n 等分，ξ_i 取每个区间的右端点，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.\quad(\text{此时 } a=0,\ b=1).$$

② 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(x)$ 不恒为 0.
若 $f(\frac{1}{n})=0\ (n=1,2,\cdots)$ 证明：(1). $f(0)=0$，(2). $f'_+(0)=0$.

(1). 由连续性：$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=0.$

海涅定理：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\ f(x_0)=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$

由罗尔定理.

在区间 $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ 上，$\exists\,\xi_n\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$，使 $f'(\xi_n)=0\ (n=1,2,\cdots)$.

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0.$

故 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0.$ （海涅定理）

小结：对定义的理解.

↳题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2}{n}\pi}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$.

原式 $=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}i} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$.

原式 $=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n}) = 2\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x)dx = 2\,\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = -1$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

原式 $<\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right] = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{2}{\pi}$.

原式 $>\frac{1}{n+1}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right] = \boxed{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{2}{\pi}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$$

故原式 $=\frac{2}{\pi}$.　　$\Rightarrow$ 夹逼定理的利用.