线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第五节 基和维数

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、空间基的定义与构造

二、空间维数的定义

三、坐标与坐标变换

一、基的定义与构造

基的定义　R^n的非零子空间H的线性无关生成集称为H的基（basis）。

由定义，若H中的向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$是$H$的一组基，则

(1)$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$线性无关；

(2) H中的每个向量都可由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$线性表出。

***H*的基就是*H*的极大无关组**

例1　可逆n阶方阵的n个列向量构成R^n的基。

证明：设可逆方阵$A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$，其列向量组线性无关。

对R^n中的任意向量β，由性质4.2.5，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$线性相关。

由例4.2.7知，β可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出，

因此$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$R^n$的基。

特殊地，n阶单位阵的列向量组$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$称为$R^n$的标准基。

定理 设$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}\subset R^n$，$H=span\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}$，如果$H\neq\{0\}$,则$S$的极大无关组就是$H$的基。

证明： 根据定义，作为向量组，生成集S和子空间H的是等价的，

又S的极大无关组T和S等价， 则T和H等价，H的向量都可以被T线性表示，

又T是线性无关的，T是H中的向量组，

所以T是H的一组基。

生成集的极大无关组就是生成集生成的子空间的基。

下面考虑A的零空间和列空间的基。

例3 $A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}$，求$NulA$的一组基。

解： 利用初等行变换可化A为行最简形：

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

该最简形对应的通解方程组为：

$$\begin{cases}x_1 & -2x_2 & & -x_4 & +3x_5 & =0\\ & & x_3 & +2x_4 & -2x_5 & =0\\ & & & & 0 & =0\end{cases}.$$

取x_2,x_4,x_5为自由变量，则解为：

$$x_1=2x_2+x_4-3x_5,\quad x_3=-2x_4+2x_5.$$

一般解的参数向量形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\alpha + x_4\beta + x_5\gamma.$$

$NulA$的基中向量个数=自由变量的个数

上式说明$NulA = span\{\alpha, \beta, \gamma\}$。

同时，α, β, γ的构造方式保证其线性无关性。

因此，$\{\alpha, \beta, \gamma\}$是$NulA$的基。

以上例子说明将$Ax = 0$的解写成参数形式的过程同时可以确定$NulA$的一组基。

例2 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&3&3&2&-9\\-2&-2&2&-8&2\\2&3&0&7&1\\3&4&-1&11&-8\end{bmatrix}$，求$colA$的基。

解： $\begin{bmatrix}1&3&3&2&-9\\-2&-2&2&-8&2\\2&3&0&7&1\\3&4&-1&11&-8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-3&5&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

因此A的主元列是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$，也是$colA$的基。

A的主元列构成$colA$的一组基。

同一子空间的基不唯一，但基中所含向量个数相同。

二、空间维数的定义

维数的定义 R^n 的非零子空间 H 的任一组基中所含向量的个数称为 H 的维数 $\dim H$。

子空间H的维数=向量组H的秩=H的生成集的秩

例4： 零空间 $\{0\}$ 的维数规定为 0。空间 R^n 的维数是 n。

例5： $NulA$ 的维数是方程组 $Ax = 0$ 中自由变量的个数；

$ColA$ 的维数是 A 的主元列的数目。

定理　若H是R^n的子空间，$\dim H = p$。则H中任意p个线性无关的向量构成H的一组基，且基能以唯一方式线性表出H中的向量；

定理　若H是向量组，$\mathrm{r}(H) = p$。则H中任意p个线性无关的向量构成H的极大无关组，且基能以唯一方式线性表出H中的向量；

三、坐标与坐标变换

坐标的定义 设$B=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p\}$是子空间$H$的一组基。$H$中的任一向量$x$，称$x$在基$B$唯一线性表示下的系数为$x$在基$B$下的坐标，记为$X$。

即设 $$x=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\dots+c_p\beta_p=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_p\end{pmatrix}$$

则$X=(c_1,c_2,\cdots,c_p)^T$。

注：基向量组可以建立一个H中的坐标系统。

例6 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$是$R^2$的一组基，$x\in R^2$的坐标为$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$，则

$$x=(-2)\beta_1+3\beta_2=(-2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}.$$

例7 R^n中的向量x在单位向量组构成的标准基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$下的坐标即为x。

$$\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot e_1+6\cdot e_2.$$

例8 在R^3中，求向量$\alpha=(1,7,3)^T$在基$\beta_1=(2,0,-1)^T$，$\beta_2=(1,3,2)^T,\beta_3=(2,1,1)^T$下的坐标。

解： 设α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\alpha=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \text{或}\qquad \begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}.$$

对增广矩阵作初等行变换

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\0&3&1&7\\-1&2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\0&3&1&7\\0&5&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\0&3&1&7\\0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

其解为

$$x_1=1,x_2=3,x_3=-2,$$

所求坐标为

$$(x_1,x_2,x_3)^T=(1,3,-2)^T.$$

子空间的基不唯一，且同一向量在不同基下的坐标是不同的。下面研究随着基的改变，向量坐标的变化规律。

过渡矩阵的定义 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，则基$(II)$可由基$(I)$线性表出，即

$$\begin{cases}\eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \qquad\cdots\cdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n\end{cases},$$

或

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

称$A=(a_{ij})_{n\times n}$是由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵，其中A的第$j$列是$\eta_j$在基$(I)$下的坐标。

定理 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，且$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$。若$\alpha\in R^n$在基$(I)$和基$(II)$下的坐标分别为$X,Y$，则

（1）过渡矩阵是可逆矩阵，且

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A^{-1};$$

（2）$X=AY,\quad Y=A^{-1}X$。

证： 基(I)可由基(II)线性表出，设为

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

由条件有

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A]B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(AB),$$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)^{-1}=AB$$

故$AB=E$，于是A可逆，且$B=A^{-1}$.

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Y=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)AY$$

由坐标的唯一性，有$X=AY$,进而$Y=A^{-1}X$.

例9 考虑R^2中的两组基：

$$(I)\ \ \varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\quad (II)\ \ \eta_1=\begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix},$$

求基（I）到基（II）的过渡矩阵。

解： 设基(I)到基(II)的过渡矩阵为A，则有

$$(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)A.$$

于是问题归结为解矩阵方程

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\-4 & -5\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-9 & -5\\1 & -1\end{bmatrix}.$$

易求得

$$A=\begin{bmatrix}6 & 4\\-5 & -3\end{bmatrix}.$$

例10　　求向量 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解法1：　　由向量坐标的定义，可设：

$$\alpha = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3$$

得方程组　$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_3 \end{cases}$

解方程组即可 $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 1$

解法2：　　由自然基到基β_1,β_2,β_3的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{求得}\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

利用坐标变换公式，则基β_1,β_2,β_3的坐标为

$$Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

得分	

2、已知$\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,2)$和$\beta_1=(1,0,1)$，$\beta_2=(0,1,1)$，$\beta_3=(1,1,4)$是R^3空间的两组基，求两组基之间的过渡矩阵.

主要内容

一、空间基的定义与构造

H的基就是H的极大无关组

极大无关组具有的相应性质基也具有

生成集的极大无关组就是生成集生成的子空间的基。

$NulA$的基中向量个数=自由变量的个数

A的列极大无关组构成$colA$的一组基。

基不唯一，但同一空间的不同基所含向量个数相同。

二、空间维数的定义

子空间H的维数=向量组H的秩=H的生成组的秩

若dim$H$=p，则H中任意p个线性无关的向量构成H的一组基，任意$p+1$个向量线性相关。

三、坐标与坐标变换

坐标的定义 设$B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p\}$是子空间$H$的一组基。$H$中的任一向量$x$，称$x$在基$B$唯一线性表示下的系数为$x$在基$B$下的坐标，记为$X$。

即设 $$x=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\ldots+c_p\beta_p=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_p\end{pmatrix}$$

则$X=(c_1,c_2,\cdots,c_p)^T$。

过渡矩阵的定义 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，则基$(II)$可由基$(I)$线性表出，即

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases},$$

或

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

称$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$是由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵，其中A的第$j$列是$\eta_j$在基$(I)$下的坐标。

定理 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n(I)$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n(II)$是$n$维向量空间$R^n$的两组基，且$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$。若$\alpha\in R^n$在基$(I)$和基$(II)$下的坐标分别为$X,Y$，则

（1）过渡矩阵是可逆矩阵，且

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A^{-1};$$

（2）$X=AY,\quad Y=A^{-1}X$。