

四川大学期中考试试卷

(2015—2016 年第一学期)

科目：微积分 (II) -1 课程号：201074030 考试时间：90 分钟

注：请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。(试题的求解过程中不能使用洛必达法则和泰勒展式。)

一、(8 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} \cdot \left[\frac{3}{x} \right]$, $[\bullet]$ 为取整函数。

二、(8 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + \sin x)^x - 3^x}{(\arcsin x)^2}$ 。

三、(8 分) 求 $y(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot (1+\sin x)^2}{(e^x+1)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x^2}}$ 的一阶导数 $y'(x)$ 。

四、(8 分) 判断函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导。

五、(8 分) 方程组 $\begin{cases} tx^3 + y^3 = e^t \\ x^5 + y^2 = t^2 \end{cases}$ 在 $t=0$ 的邻域内确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$ 。

六、(10 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin \frac{1}{n^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0)$ 的敛散性。

七、(10 分) 讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ 的间断点及其类型。

八、(10 分) 确定 a, b 的值使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \pi x}{x^2 + ax + b}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 2, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ 在 $1/2$ 上连续。

九、(10 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处可导, 且 $f(0)=1, f(1)=2, f'(0)=3, f'(1)=4$ 。

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln 2 \right]$

十、(10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) = \ln 2$, 且对任意的 x, y 有

$f(x+y) = f(x)f(y)$, 求 $f(x)$ 。

十一、(10 分) 求证当 $n > 1$ 时方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n ,

并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。