2014-2015 学年第一学期微积分（II）-1 期末考试参考答案

一、（8 分）1、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+3n+2}/\dfrac{1}{n^2}=1$，根据比较判别法级数收敛。

2、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\arctan(n)}=\dfrac{2}{\pi}$，根据级数收敛得必要条件，级数发散。

二、（24 分）

1、解：$\ln y=\dfrac{1}{2}(\ln(x+1)+\ln(x^2+1)+\ln(x^3+1))$，

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right),$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right)。$$

2、解：$y+xy'+2yy'=2$，$y'=\dfrac{2-y}{x+2y}$，

当 $y=1$ 时，解出 $x=1$，此时，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-1}{1+2\cdot 1}=\dfrac{1}{3}$。

3、解：注意到 $x<2$，故

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-}\frac{2-x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}。$$

4、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sqrt{1-x^3}-1}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{\frac{x^3}{2}}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}$，令 $t=\sin x$ 有

$=-2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)-t}{t}\quad=\dfrac{1}{3}$。

5、解：$\displaystyle\int(2x+1)(x^2+x+1)^2dx=\int(x^2+x+1)^2d(x^2+x+1)=\frac{(x^2+x+1)^3}{3}+C$。

6、解：（法 1）令 $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},0<t<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\tan^2 t$，

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int td\tan^2 t=t\tan^2 t-\int\tan^2 tdt=t\tan^2 t-\int(\sec^2 t-1)dt$$

$$=t\tan^2 t-\tan t+t+C\quad=(x+1)\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+C。$$

（法 2）令 $t=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},0<t<1\Rightarrow x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int\arcsin t d\frac{t^2}{1-t^2}=\int\arcsin t d\frac{1}{1-t^2}$$

$$=\arcsin t\cdot\frac{1}{1-t^2}-\int\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\arcsin t\cdot\frac{1}{1-t^2}-\int\frac{1/t^2}{1/t^2-1}\cdot\frac{1/t}{\sqrt{1/t^2-1}}dt$$

$$=\arcsin t\cdot\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1/t^2-1)^{3/2}}d(\frac{1}{t^2}-1)$$

$$=\arcsin t\cdot\frac{1}{1-t^2}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C=(x+1)\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+C$$

三、解：定义域：$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=\infty$，$x=1$ 是无穷间断点（第二类间断点）；

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=-\dfrac{3}{2}$，$x=-1$ 是可去间断点（第一类间断点）；

（2）因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=\infty$，故 $x=1$ 为垂直渐近线；$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}/x=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3+1}{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x^2-1}=0$，故有渐近线 $y=x$。

（3）$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0,x=2$，

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；

$x\in(0,1)\cup(1,2)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；

$x\in(2,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；

故 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=-1$；故 $x=2$ 取得极小值 $f(2)=3$。

四、 解：$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\ln(1+6ax)}{x}=6a$，

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos(2ax)+4x^2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos(2ax)}{x\sin x}+\lim_{x\to 0+0}\frac{4x^2}{x\sin x}=2a^2+4,$$

（1） 连续性要求：$6a=6=2a^2+4\Rightarrow a=1$；

（2） 可去间断点要求：$6a=2a^2+4\Rightarrow a=2$。

五、证明：令 $F(x)=e^{\beta x^2/2}f(x),x\in[-1,1]$，

显然：$F(-1)=e^{\beta/2}f(-1)=e^{\beta/2}f(1)=F(1),x\in[-1,1]$，

则根据 rolle 中值定理，$\exists\xi\in(-1,1)$，使得

$$F'(\xi)=\beta\xi e^{\beta\xi^2/2}f(\xi)+e^{\beta\xi^2/2}f'(\xi)=0,$$

也即 $\beta\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$。

六、解：（1） $\int f'(e^{-x})de^{-x}=\int xde^{-x}\Rightarrow$，$f(e^{-x})=xe^{-x}-\int e^{-x}dx=xe^{-x}+e^{-x}+C\Rightarrow$

$f(x)=x(1-\ln x)+C$，由 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(0)=0\Rightarrow f(x)=x(1-\ln x),x>0$。

（2） $f'(x)=-\ln x=0\Rightarrow x=1$；$0<x<1$，$f'(x)>0$，函数单增；

$1<x$，$f'(x)<0$，函数单减；所以函数 $f(1)=1$ 为最大值，

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故 $k>1$ 时，$f(x)-k=0$ 无实数解；

$k=1$ 或 $k\le 0$ 时，$f(x)-k=0$ 有一个解；

$0<k<1$ 时，$f(x)-k=0$ 有两个解。

七、解：令 $F(x)=\ln x-x^{\alpha}\le 0,x>0$，即 $F(x)$ 的最大值不超过 0。

$F'(x)=\dfrac{1}{x}-\alpha x^{\alpha-1}=0,x>0\Rightarrow F(x)$ 有唯一驻点，$x=1/\sqrt[\alpha]{\alpha},\alpha>0$

$\lim\limits_{x\to 0+0}F(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty,$ 故 $F(x)$ 在 $x=1/\sqrt[\alpha]{\alpha},\alpha>0$ 处取得最大值，

且 $F(1/\sqrt[\alpha]{\alpha})=-\dfrac{1}{\alpha}(\ln\alpha+1)\le 0\Rightarrow$

$\ln\alpha+1\ge 0\Rightarrow\alpha\ge\dfrac{1}{e}$，故 α 的最小值为 $\dfrac{1}{e}$。

八、证明：由于函数在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处 $f(x)$ 取得极值，故有 $f'(\frac{a+b}{2})=0$，

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{a-b}{2})^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(\frac{a-b}{2})^3 ①$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{b-a}{2})^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(\frac{b-a}{2})^3 ②$$

②-①得到

$$f(b)-f(a)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}(\frac{b-a}{2})^3$$

根据达西定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$，从而有

$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^3}=\frac{f'''(\xi)}{24}$。(不写 ξ 存在的依据适当扣分)

九、证明：

（1）$F(a)=a-f(a)<0$，

$F(b)=b-f(b)>0$，根据连续函数零点存在定理可知，$F(x)=x-f(x)$ 在 (a,b) 内有零点 α。又因为 $F'(x)=1-f'(x)>0$，故 $F(x)$ 单调，从而零点唯一 α。

（2）由 $a<f(x)<b,\forall x\in[a,b]$，知若 $x_0\in(a,b)$，必有 $x_n\in(a,b)$，不妨假设 $x_0>\alpha$。

根据（1）知 $f(\alpha)=\alpha$，利用 $x_n=f(x_{n-1})$，

根据 lagrange 中值定理可知：

$$x_n-\alpha=f(x_{n-1})-f(\alpha)=f'(\xi_{n-1})(x_{n-1}-\alpha),\xi_{n-1}\in(a,b)\Rightarrow$$

$$|x_n-\alpha|=|f(x_{n-1})-f(\alpha)|=|f'(\xi_{n-1})||x_{n-1}-\alpha|<|x_{n-1}-\alpha|,$$

又因为 $f'(\xi_{n-1})<0$，故 $x_{2k}>\alpha$，且 $\{x_{2k}\}$ 单调递减；$x_{2k+1}<\alpha$，且 $\{x_{2k}\}$ 单调递增。

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\beta$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\gamma$,由递推表达式，有：

$$\beta=f(\gamma)，\gamma=f(\beta)\Rightarrow\beta-\gamma=f(\gamma)-f(\beta)=f'(\xi)(\gamma-\beta)\Rightarrow\beta=\gamma。$$

根据 $F(x)$ 有唯一时零点，则 $\beta=\gamma=\alpha$。