08 数 2 期末考试（A）卷答案

一、填空

1. $\frac{\pi}{4e}$

2. $\frac{x}{e^{x+2y}(\ln 2+y)}$

3. $dx-\sqrt{2}dy$

4. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

5. $y^2=x+1$或者$y=\sqrt{x+1}$

二、选择题

1．C

2．A

3．D

4．B

5．A

三、计算

1． $I=\int \arctan e^x de^{-2x}=-\frac{1}{2}\int \arctan e^x de^{-2x}=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\arctan e^x-\int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}]$

$$=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\arctan e^x-\int(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}})de^x]$$

$$=\frac{1}{2}(-e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x)+C\ .$$

2． $\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

$$=\int_{-1}^0 e^t dt+\int_0^1(1+t^2)dt$$

$$=(e^t\Big|_{-1}^{0})+(t+\frac{1}{3}t^3\Big|_{0}^{1})$$

$$=1-\frac{1}{e}+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$

3． $\iint\limits_{D}\left|y-x^2\right|dxdy=\iint\limits_{D_1}\left|y-x^2\right|dxdy+\iint\limits_{D_2}\left|y-x^2\right|dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx+\int_0^1(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}-x^2)dx=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{11}{30}$$

4． 1) 求解齐次方程: $r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-2$

得： $r=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

2) 解非齐次方程， 设特解为 $y^*=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

则: $y^{*\prime}=[2ax^2+(2a+2b)x+b+2c]e^{2x}$

$$y^{*\prime\prime}=[4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b+4c]e^2x$$

代入原方程得:

$$12a=12\Rightarrow a=1$$
$$12b+14a=2\Rightarrow b=-1$$
$$2a+7b+12c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

得通解

$$y=Y+y^*=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+(x^2-x+\frac{1}{2})e^{2x}$$

四、解答题

1．解： 在已知方程两边对 x 求导，得

$$g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$$

而 $g[f(x)]=x$

所以 $xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$

当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=2e^x+xe^x$ ， 又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$ ，所以

$$f(x)=\int_0^x(2e^t+te^t)dt+f(0)=(t+1)e^t\Big|_0^x=(x+1)e^x-1$$

2．解：$\omega(x,y)\overset{令x+t=u}{=}\int_x^{x+y}e^{-y}f(u)du=e^{-y}\int_x^{x+y}f(u)du$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=e^{-y}f(x+y)-e^{-y}f(x)$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=-e^{-y}f(x+y)+e^{-y}f'(x+y)+e^{-y}f(x)$$

3．解：交换积分顺序后，x, y 互换

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$$

$$\therefore 2I=\int_0^1 dy\int_x^1 f(x)f(y)dx+\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2$$

得 $I=\dfrac{A^2}{2}$

五、证明题

证：$左=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy$

$$\le\frac{1}{2}\iint\limits_D[f^2(x)+f^2(y)]dxdy=\frac{1}{2}(\int_a^b dy\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b dx\int_a^b f^2(y)dy)$$

$$=\frac{b-a}{2}(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b f^2(y)dy)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx=右$$

六、应用题

解：$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4x-\frac{1}{x})dx=[2x^2-\ln x]\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{15}{2}-2\ln 2$

旋转体体积为:

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4x)^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{x})^2dx=\frac{16}{3}\pi x^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}+\frac{\pi}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{81}{2}\pi$$