期末考试试题 *A* 解答

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 函数 $z=\ln(2+x^2+y^2)$ 在 x=2，y=1 时的全微分为__ $dz=\frac{4}{7}dx+\frac{2}{7}dy$ __

2. 已知曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点 M 处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$，则 M 的坐标是____

$$M(1,-1,-1),\quad M(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$$

3. 二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2-2\sin x+3y+4\right)d\sigma$ 的值等于__ $\frac{\pi}{4}a^4+4\pi a^2$ __

4. 设 L 为连接(1,0), (0,1)两点的线段，曲线积分 $\int_L(x+y)ds$ 的值等于___ $\sqrt{2}$ ____

5. 设 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$ 的值等于__ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\ln 2$ __

6. 微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解是______ $y=xe^{Cx+1}$ ______

二、计算题 (每小题 8 分，共 48 分)

1. 设 $z^5-xz^4+yz^3=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

解： 设 $F(x,y,z)=z^5-xz^4+yz^3-1$，则有：当 $x=0, y=0$ 时 $z=1$

$$F'_x=-z^4,\quad F'_y=z^3,\quad F'_z=5z^4-4xz^3+3yz^2$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z^4}{5z^4-4xz^3+3yz^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{-z^3}{5z^4-4xz^3+3yz^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{z^4}{5z^4-4xz^3+3yz^2}\right)'_y$$
$$=\frac{4z^3\frac{\partial z}{\partial y}(5z^4-4xz^3+3yz^2)-z^4(20z^3\frac{\partial z}{\partial y}-12xz^2\frac{\partial z}{\partial y}+3z^2+6yz\frac{\partial z}{\partial y})}{(5z^4-4xz^3+3yz^2)^2}$$

故
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{3}{25}$$

2.设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=\frac{\pi}{4},y=2}$.

解： 令 $u=2x-y,v=y\sin x$， 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2f_u'+y\cos xf_v'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(2f_u'+y\cos xf_v')}{\partial y}$$

$$=2(\frac{\partial f_u'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_u'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+f_v'\cos x+y\cos x(\frac{\partial f_v'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_v'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=2(-f_{uu}''+f_{uv}''\sin x)+f_v'\cos x+y\cos x(-f_{vu}''+f_{vv}''\sin x)$$

$$=-2f_{uu}''+(2\sin x-y\cos x)f_{uv}''+y\cos x\sin xf_{vv}''+f_v'\cos x$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=\frac{\pi}{4},y=2}=-2f_{uu}''+f_{vv}''+\frac{\sqrt{2}}{2}f_v'$$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$，其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$， $x^2+y^2+z^2\le 2Rz\ (R>0)$ 所围成的闭区域.

解：利用柱坐标， $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}dr\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2rdz$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left[\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)^3\right]rdr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left[2\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-4R^3+3R^2\sqrt{R^2-r^2}+3Rr^2\right]rdr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{31}{80}R^5-\frac{3}{2}R^5+\frac{7}{8}R^5+\frac{27}{64}R^5\right]$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

4. 利用格林公式计算积分 $\oint_L(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 顶点为 $(0,0),(2,0),(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

解：设 L 围的区域为 **D:** $0\le x\le 2,0\le y\le 2$， $\because P=x^2-xy^3$ $\quad$ $Q=y^2-2xy$

$$\therefore\frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2y+3xy^2$$

原式= $\iint_D(-2y+3xy^2)dxdy=\int_0^2dx\int_0^2(-2y+3xy^2)dy$

$$=\int_0^2(-y^2+xy^3)\Big|_0^2dx=\int_0^2(-4+8x)dx=(-4x+4x^2)\Big|_0^2=8.$$

5. 计算 $I=\iint\limits_S (y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$,其中 S **为抛物面** $z=2-x^2-y^2$ **位于** $z\ge 0$ **内的部分的上侧.**

解：设 S_0 为平面：$x^2+y^2\le 2, z=0$ 方向向下，Ω 为 $S+S_0$ 围的立体，

Ω 在 xOy 上投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2, z=0$，

用极坐标表示：$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}$

利用高斯公式得

$$\oiint\limits_{S+S_0}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(-1-1-1)dv$$

$$=-3\int_0^2 dz\iint\limits_{z^2-y^2\le 2-z}dxdy=-3\int_0^2\pi(2-z)dz=-6\pi$$

$$\iint\limits_{S_0}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=\iint\limits_{S_0}x^2dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2dxdy=-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr=-\pi$$

故 $I=(\oiint\limits_{S+S_0}-\iint\limits_{S_0})(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=-6\pi-(-\pi)=-5\pi$

6. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解.

解：由通解公式得

$$y=e^{\int\tan xdx}\left(\int\sec x\cdot e^{-\int\tan xdx}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{\cos x}\left(\int\sec x\cdot\cos xdx+C\right)=\frac{1}{\cos x}(x+C).$$

由 $y\big|_{x=0}=0$，得 $C=0$，故所求特解为 $y=x\sec x$.

三、应用题 **(每小题 10 分，共 20 分)**

1. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到此椭圆的最长和最短距离.

解：设椭圆上点的坐标为 (x,y,z)，则原点到椭圆的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，故距离的平方为

$d^2=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=x^2+y^2$，$x+y+z=1$（约束条件）

作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} L_x=2x-2x\lambda+\mu=0 & (1) \\ L_y=2y-2y\lambda+\mu=0 & (2) \\ L_z=2z+\lambda+\mu=0 & (3) \\ z=x^2+y^2 & (4) \\ x+y+z=1 & (5) \end{cases}$$

（**1**）-（**2**）得： $(x-y)(1-\lambda)=0$ 即 $\lambda=1$或$x=y$

若 $\lambda=1$，带回（**1**）得 $\mu=0$，由（**3**）可得 $z=-\dfrac{1}{2}<0$，这与（**4**）矛盾.

故 $y=x$，由（**4**)，可得 $z=2x^2$，代入（**5**）式 $2x^2+2x-1=0$

解之得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，从而 $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z=2\mp\sqrt{3}$

由问题本身的意义知 $(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3})$ 为最小值点，$(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$ 为最大值点.

因为 $d^2=9\mp5\sqrt{3}$，从而最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

2. 设函数 $\varphi(x)$ 连续， 且满足 $\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt$， 求 $\varphi(x)$.

解： 等式两边对 x 求导得 $\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt$，

再求导得微分方程 $\varphi''(x)=e^x-\varphi(x)$ ， 即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$ ，

微分方程的特征方程为 $r^2+1=0$，

特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，故对应的齐次方程的通解为 $\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，

易知 $\Phi^*(x)=\dfrac{1}{2}e^x$ 是非齐次方程的一个特解，

故非齐次方程的通解为 $\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$.

由所给等式知 $\varphi(0)=1$， $\varphi'(0)=1$， 由此得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$.

因此 $\varphi=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$.

四、分析证明题 **(每小题 7 分，共 14 分)**

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在(0,0)处的可微性.

解：$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$；

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

假设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微，则 $dz=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y=0$

考虑 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\frac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ y=kx}}\frac{\sqrt{|k(\Delta x)^2|}}{\sqrt{(1+k^2)(\Delta x)^2}}=\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}\neq 0$$

$\therefore$ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

2.设 $f(x)\in C[a,b], f(x)>0$，证明 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2$.

证明一：化成二重积分证明，记 $D=[a,b;a,b]$，由不等式 $A^2+B^2\geq 2AB$,有

左边$=\dfrac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{dy}{f(y)}+\int_a^b f(y)dy\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy$$

$$=\iint_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}dxdy$$

$$\geq\iint_D\frac{2f(x)f(y)}{2f(x)f(y)}dxdy$$

$=D$ 的面积$=(b-a)^2$

证明二：记 $F(t)=\int_a^t f(x)dx\int_a^t\dfrac{dx}{f(x)}-(t-a)^2, F(a)=0$,

$$F'(t)=f(t)\int_a^t \frac{dx}{f(x)}+\frac{1}{f(t)}\int_a^t f(x)dx-2(t-a)=\int_a^t\left[\frac{f(t)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(t)}-2\right]dx$$

$\because\quad x\in[a,b],\ f(x)>0\to\dfrac{f(t)}{f(x)}+\dfrac{f(x)}{f(t)}-2\geq 0$，

$\therefore\quad \forall t\in[a,b], F'(t)\geq 0\to F(t)\geq F(a)\to F(b)\geq F(a)$　　结论成立