# 2018-2019 微积分 1-2 半期试题参考解答

**1.(10分)** 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{\frac{\ln\frac{\sin xy}{xy}}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{\frac{\sin xy-xy}{x^3y}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{\frac{-\frac{1}{6}(xy)^3}{x^3y}}=e^{-\frac{2}{3}}$.

**2.(10分)** 设函数 $u=f(z)$ 可微，方程 $z=y+x\varphi(z)$ 可确定 $z$ 是 $x,y$ 的函数，$\varphi(z)$ 可微，试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解：令 $F(x,y,z)=y+x\varphi(z)-z$，则 $F'_x=\varphi(z)$，$F'_y=1$，$F'_z=\varphi'(z)-1$. 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{1}{\varphi'(z)-1},$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-\varphi(z)f'(z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

**3.(12分)** 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数的存在性及可微性.

解：(1)因为 $0\le|f(x,y)|\le\dfrac{\pi}{2}|xy|\to 0$，$(x,y)\to(0,0)$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，连续.

(2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

(3)因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.而

$$0\le\left|\frac{xy\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\le\frac{\pi}{2}|y|\to 0,(x,y)\to(0,0).$$

所以可微.

**4.(10分)** 求曲面 $\Sigma$：$x^2+2y^2+z^2=13$ 到平面 $\pi$: $2x+4y+z=20$ 的最短距离.

解：曲面上任意点 $M(x,y,z)$ 到平面的距离为 $d=\dfrac{|2x+4y+z-20|}{\sqrt{21}}$.

作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(2x+4y+z-20)^2+\lambda(x^2+2y^2+z^2-13)$.

令$\begin{cases} L'_x = 4(2x+4y+z-20)+2\lambda x = 0 \\ L'_y = 8(2x+4y+z-20)+4\lambda y = 0 \\ L'_z = 2(2x+4y+z-20)+2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda = x^2+2y^2+z^2-13 = 0 \end{cases}$，解之得$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$.

当$x=2, y=2, z=1$时，$d=\dfrac{7}{\sqrt{21}}$；当$x=-2, y=-2, z=-1$时，$d=\dfrac{33}{\sqrt{21}}$，故最短距离为$\dfrac{7}{\sqrt{21}}$.

**5.(12分)计算$I=\int_L (e^x\sin y - y - y^3)dx + (e^x\cos y + x)dy$，其中$L$为从点$O(0,0)$沿$y=\sqrt{2x-x^2}$至点$A(2,0)$的上半圆周.**

解：作辅助有向曲线$\overline{AO}$，设$L$与$\overline{AO}$围成的区域为$D$，令

$$P=e^x\sin y - y - y^3, Q=e^x\cos y + x,$$

则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2+3y^2$.由格林公式

$$原式=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}} \quad =-\iint_D (2+3y^2)dxdy+0$$

$$原式=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}} \quad =-\iint_D (2+3y^2)dxdy+0=-\pi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin^2\theta rdr=-\frac{11}{8}\pi.$$

**6.(10分)计算$I=\iint_\Sigma (x+y+z)^2 dS$，其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=0$与$z=1$之间的部分.**

解：$\Sigma$在$Oxy$面上的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，而$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{2}$，由对称性，

$$I=\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{D_{xy}} 2(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2 rdr=\sqrt{2}\pi.$$

**7.(12分)计算$I=\iint\limits_\Sigma (x+1)\,dy\,dz+(x^2y+z^4)\,dz\,dx+(xy^3+y^2z)\,dx\,dy$，其中有向曲面$\Sigma$为$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的上侧.**

**解：添加辅助有向曲面$\Sigma_1: z=1, (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，取下侧. 设$\Sigma$与$\Sigma_1$所围成的闭区域为$\Omega$，其中**

$$P=x+1, Q=x^2y+z^4, R=xy^3+y^2z, \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+x^2+y^2.\ 由高斯公式，$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1} \quad =-\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)dv-\iint_{\Sigma_1}(xy^3+y^2z)\,dx\,dy$$

中国大学MOOC

$$=-\iint_{D_{xy}} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1}(1+x^2+y^2)dz+\iint_{D_{xy}} y^2dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(1-(x^2+y^2)^2)dxdy+\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^4)rdr+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr$$

$$=-\frac{5}{12}\pi.$$

**8.(12分)求曲线积分 $I=\int_L(1+z)dx+(2+x)dy+(3+y)dz$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=3\end{cases}$，从 $z$ 轴正向看去取逆时针方向.**

**解：设$L$所围成的平面区域为$\Sigma$，取上侧，则其上任一点的单位法矢量**

$$n^0=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

**由斯托克斯公式，**

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 1+z & 2+x & 3+y\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}3dS=\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\,dxdy\ =3\pi.$$

**9.(12分)设函数 $\varphi(x,y)$ 有连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\,dx+\varphi(x,y)dy$ 与路径无关，且对任意 $t$，有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,dx+\varphi(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,dx+\varphi(x,y)dy$，求 $\varphi(x,y)$.**

**解：由题意，有 $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$，所以 $\varphi(x,y)=x^2+g(y)$. 同时**

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,dx+\varphi(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,0)}2xy\,dx+\int_{(t,0)}^{(t,1)}(x^2+g(y))dy=0+\int_0^1(t^2+g(y))dy=t^2+\int_0^1 g(y)dy.$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,dx+\varphi(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,0)}2xy\,dx+\int_{(1,0)}^{(1,t)}(x^2+g(y))dy=\int_0^t(1+g(y))dy\ .$$

**故 $\int_0^t(1+g(y))dy=t^2+\int_0^1 g(y)dy$，两边同时对 $t$ 求导，得 $1+g(t)=2t$，所以 $g(y)=2y-1$，因此**

$$\varphi(x,y)=x^2+2y-1.$$