四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第三章 行列式

第二节 行列式的主要性质

——行列式的计算

xuexue_zhou@scu.edu.cn

行列式的计算

（1）二三阶行列式：对角线法

（2）计算行列式的常用方法之一 —— “降阶法”

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可将为低阶行列式来计算其值。

（3）计算行列式常用方法之二—— 化三角形法

利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i + kr_j}{=} \cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

例1

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1 $$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \end{matrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{r_2+3r_1}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\times(-2) \\
\oplus \\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\xlongequal{r_3-2r_1}
\begin{array}{r}
(-4)\times \\
\\
\oplus \\
\\
\\
\end{array}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\times(-3) \\
\\
\oplus \\
\\
\\
\end{array}
$$

$$\xlongequal[r_5-4r_1]{r_4-3r_1}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2\end{vmatrix}\oplus$$

$$\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2) \oplus$$

$$\overline{\overline{r_5 - 2r_3}} \; - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \; \oplus$$

$$\overline{\overline{r_5 + 4r_4}} \; - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例2

计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将第$2,3,\cdots,n$都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

法二：将第1行的-1倍分别加到第2…n行：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

将第2…n列的1倍分别加到第1列：

$$=\begin{vmatrix} a-(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例3

计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$

箭形行列式

解

$$D \xlongequal[\substack{c_1+(-\frac{1}{3}c_3) \\ \cdots\cdots \\ c_1+(-\frac{1}{n}c_n)}]{c_1+(-\frac{1}{2}c_2)} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

例4

计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

解 **分析** 此行列式的特点是相邻两行对应元素要么差1要么相等.

这类行列式可以考虑依次把上一行的（-1）倍加到下一行去，

依次从第n-1行开始，而不是从第1行开始！

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)}1\times1\times\cdots1\times n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$$

例5 计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & & ⋰ & 0 \\ & & a & & b & & \\ & & c & & d & & \\ 0 & ⋰ & & & & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}_{2n}$$

解

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & b & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ & & a \quad b & & & \\ & & c \quad d & & & \\ & ⋰ & & \ddots & & \\ c & & & & d & \\ 0 & & & & 0 & d \end{vmatrix}_{2n-1}+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & & ⋰ & \\ & & & a \quad b & & \\ & & & c \quad d & & \\ & & ⋰ & & \ddots & \\ 0 & c & & & & d \\ c & 0 & & & & 0 \end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}_{2n-1} +(-1)^{1+2n} b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \\ c & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$= ad\begin{vmatrix} a & & \cdots & \cdots & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & \cdots & \cdots & & d \end{vmatrix}_{2n-2} -(-1)^{2n-1+1} cb\begin{vmatrix} a & & \cdots & \cdots & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & \cdots & \cdots & & d \end{vmatrix}_{2n-2}$$

$$= (ad-cb)D_{2n-2} = (ad-cb)^2 D_{2n-4} \cdots = (ad-cb)^{n-1} D_2 = (ad-cb)^n$$

例6 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

三对角线形行列式

解 按第一行展开

$$D_n=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$$

$$=a^2(D_{n-2}-bD_{n-3})$$

$$\cdots$$

$$=a^{n-2}(D_2-bD_1)$$

$$=a^n$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=a^2+b^2+ab$$

$$D_1=|a+b|=a+b$$

由a，b的对称性可知：$D_n-aD_{n-1}=b^n$

（1）当$a\neq b$时：$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

（2）当$a=b$时：$D_n=a^n+aD_{n-1}$

$$=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n+a^2D_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1=(n+1)a^n$$

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b\\ (n+1)a^n, a=b\end{cases}$$

例7 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

解：将D_n按第一列展开

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot a_n \cdot (-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n \ ,$$

这里 D_{n-1} 与 D_n 有相同的结构，但阶数是 n-1的行列式。

现在, 利用递推关系式计算结果. 对此, 只需反复进行代换, 得

$$D_n = x\left(xD_{n-2} + a_{n-1}\right) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$= x^2\left(xD_{n-3} + a_{n-2}\right) + a_{n-1}x + a_n = \cdots\cdots$$

$$= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \ ,$$

因 $D_1 = \left|x + a_1\right| = x + a_1$

故 $D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

例8

证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证 用数学归纳法

$$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

$\therefore$ 当 $n = 2$ 时（1）式成立.

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \geq i > j \geq 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j).$$

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

例9

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = D_n^T = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = n!\prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例10　利用公式 $|AB|=|A||B|$ 计算行列式

$$|C|=\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dfrac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} \\ \dfrac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \dfrac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} & \dfrac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$$

分析：$C_{ji}=\dfrac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}$

解：
$$C_{ji}=\frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}=1+a_i b_j+a_i^2 b_j^2+\dots+a_i^{n-1}b_j^{n-1}$$

$$=(1\ a_i\ \ a_i^2\ \dots\ a_i^{n-1})\begin{pmatrix}1\\ b_j\\ \vdots\\ b_j^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$|C|=|C^T|=\begin{vmatrix}\frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \dots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n}\\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \dots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \dots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n}\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{bmatrix}\right|$$

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$$

例11

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a-x_1 & a-x_1 & a-x_1 \\ a & x_2-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

可以用倍加变换化其为箭形行列式，然后用展开定理降阶

例12

若A为正交矩阵，则A的行列式为__________。

分块矩阵的行列式

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$

则 $D=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$

$D=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$

例13

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -34 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 15 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 21 & -1 & 12 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 13 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

求 $|A|$.

例14 若n阶正交阵A与B满足$|A|+|B|=0$,证明$|A+B|=0$.

证明:

$$|A+B|=|EA+B|=|BB^TA+B|=|B(B^TA+E)|$$

$$=|B(B^TA+A^TA)|=|B(B^T+A^T)A|=|B||B^T+A^T||A|$$

$$=|B||(B+A)^T||A|=|B||B+A||A|=-|B|^2|B+A|$$

$$=-|B+A|$$

所以$|A+B|=0$.

例15

已知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵, 且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$都可逆.证明$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$可逆.

证 $$|E-BA| = |A^{-1}A-BA| = |(A^{-1}-B)A| = |A^{-1}-B||A|$$

$$= |A||A^{-1}-B| = |AA^{-1}-AB| = |E-AB| \neq 0.$$

$$E-BA = A^{-1}A-BA = A^{-1}A-A^{-1}ABA = A^{-1}(E-AB)A$$

行列式的计算

（1）二三阶行列式：对角线法

（2）计算行列式的常用方法之一 —— “降阶法”

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可将为低阶行列式来计算其值。

（3）计算行列式常用方法之二—— 化三角形法

利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i + kr_j}{=} \cdots\cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i - x_j).$$

分块矩阵的行列式

则 $D = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|$

方阵乘积的行列式

$$|AB| = |A||B|$$