定义：含x, y, 及y'的方程，一般形式为$F(x, y, y')=0$.

一、可分离变量的微分方程.

①定义：在$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$中，若$F(x,y)$可分解为两个连续函数$f(x)$和$g(y)$的乘积，即$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x)g(y).}$ 或$\boxed{M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0.}$

则称该微分方程为可分离变量的微分方程.

分离变量：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx. \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$ (C为任意常数) $(g(y)\neq 0)$

若$g(y)=0$有实根y_0，则$y=y_0$(常函数)也是解.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0 \Rightarrow \int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C$$ (C为任意常数).

1. 若$N_1(x)M_2(y)=0$，即若$N_1(x)=0$有实根x_0，则$x=x_0$(常函数)也是解

2. 若$M_2(y)=0$有实根y_0，则$x=x_0$(常函数)也是解.

Eg：求 $(1+y^2)dx-x(1+x^2)ydy=0$的通解.

分离变量：$\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{y}{1+y^2}dy.$

$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

两边积分：$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\frac{y}{1+y^2}dy$

$A+Ax^2+Bx^2+Cx$

$1 \quad 1 \quad -1 \quad 0$

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+y^2}d(y^2+1)$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C_2=\frac{1}{2}\ln|1+y^2|+C_1$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = 2C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = e^{2C_2} = \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \quad Cx^2 = (1+x^2)(1+y^2).$$ 化至最简.

② 适当变换的微分方程解法.

(一). $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by)}$

令 $z = ax+by$，两边对 x 求导：$\dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$.

由 $\dfrac{dy}{dx} = f(z) \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = a + bf(z) \overset{\text{分离变量}}{\Leftrightarrow} \dfrac{dz}{a+bf(z)} = dx$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{a+bf(z)} + C = x$$

Eg. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} + 1$ 的通解.

令 $z = x-y$，$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z} - 1$

即 $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z\,dz = -dx$

同时积分：$-x = \frac{1}{2}z^2 + C_1 \Leftrightarrow z^2 = -2x + C.$

即 $(x-y)^2 = -2x + C.$

③ 一阶齐次微分方程.

形如 $\boxed{\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$ 的方程称为一阶齐次微分方程、

令 $u=\frac{y}{x}$，$y=ux$. 对 x 求导：$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 又 $\frac{dy}{dx}=\varphi(u)$

故 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$. 分离变量：$\boxed{\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}}$.

$$\Rightarrow \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

Eg. 求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0$ 的通解.

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$. ⇒尽可能换元时不出现分母!

令 $x=uy \Rightarrow \frac{dx}{dy}=u+\sqrt{1+u^2}$，且 $\frac{dx}{dy}=y\frac{du}{dy}+u$

故 $\sqrt{1+u^2}=y\frac{du}{dy} \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dy}{y}$

↳ $\ln y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})+\ln C$.

即 $\frac{y}{C}=u+\sqrt{1+u^2}$. $\Rightarrow \frac{C}{y}=\frac{u-\sqrt{1+u^2}}{u^2-(\sqrt{1+u^2})^2}=-(u-\sqrt{1+u^2})$.

代入：$-\frac{C}{y}=\frac{x}{y}-\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y}}=\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

$\Rightarrow C=\sqrt{x^2+y^2}-x$

$\Rightarrow x^2+2Cx+C^2=x^2+y^2 \Rightarrow \boxed{y^2=2Cx+C^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)}$.

④ 一阶线性微分方程.

在一阶微分方程中，若方程中未知函数和未知函数的导数，都是一次的，则此类方程称为一阶线性微分方程.

↳ 1) 一般形式：$y' + P(x)y = Q(x)$.（式中 $P(x)$，$Q(x)$ 都是 x 的已知连续函数）.

- 一阶线性齐次微分方程：$Q(x)=0$.
- 一阶线性非齐次微分方程：$Q(x)\neq 0$.（不恒为0）.

⇒ (2). 一阶线性齐次微分方程通解.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \text{ 是可分离变量的方程.}$$

$y\neq 0$ 时：$\dfrac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + C_1.$

$$\text{即 } y = e^{-\int P(x)dx + C_1} = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C\text{为任意常数}).$$

(3). 一阶非线性齐次微分方程通解.

定理1：一阶线性非齐次微分方程的特解，等于它的任意一个特解

加上与其相应的一阶線性齐次方程的通解.