2005-2006 第一学期大学数学(II)微积分-1 试题答案

一、填空题(3*5)　1、$\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$　2、$\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$　3、$\dfrac{4}{\pi}-1$　4、3　5、1

二、选择题(3*5)　1、**C**　2、**B**　3、**C**　4、**D**　5、**A**

三、计算题(8*4)

1、原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{2x}$ **(3')** $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16\cos 4x}{2}$ **(6')** $=8$ **(8')**

(或) $=\lim\limits_{x\to 0}8(\dfrac{\sin 4x}{4x})$ **(6')** $=8$ **(8')**

2、令 $u=\sqrt{1+\ln x}$, **(1')**

则 $\ln x=u^2-1,\ x=e^{u^2-1},\ dx=e^{u^2-1}2udu$. **(2')**

原式 $=\int\dfrac{1}{e^{u^2-1}(u-1)}e^{u^2-1}2udu=2\int\dfrac{u}{u-1}du$ **(4')**

$=2\int(1+\dfrac{1}{u-1})du$ **(5')**

$=2(u+\ln|u-1|)+C$ **(7')**每个积分 1 分

$=2(\sqrt{1+\ln x}+\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|)+C$. **(8')** 没有 C 扣一分

3、$\int_{-2}^{2}xf(x)dx=\int_{-2}^{0}x(1+x^2)dx+\int_{0}^{2}xe^2dx$, **(2')**

$\int_{-2}^{0}x(1+x^2)dx=(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4)\Big|_{-2}^{0}$ **(3')**=6, **(4')**

$\int_0^2 xe^x dx=\int_0^2 xde^x$ **(5')** $=xe^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx$ **(6')** $=e^x(x-1)\Big|_0^2=e^2+1$, **(7')**

所以 $\int_{-2}^{2}xf(x)dx=e^2-5$.**(8')**

4、将 $x=0$ 代入隐函数方程得 $y+1=0$,即 $y\big|_{x=0}=-1$ **(1')**,

式子两边对 x 求导,得 $e^y+xe^y y'+y'=0$ **(3')**,

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-e^y}{xe^y+1}$,即可得 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$. **(5')**

再继续对 x 求导,有 $e^y y'+e^y y'+xe^y y'y'+xe^y y''+y''=0$ **(7')**,

解得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2e^y y'+xe^y y'y'}{xe^y+1}$,即可得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=-e^{-1}}}=2e^{-2}=\dfrac{2}{e^2}$ **(8')**

四、解答题(8*3)

1、(1) 当 $x\to 0$ 时, x 是无穷小, $\arctan\dfrac{1}{x}$ 是有界量, **(2')**

因而 $\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$. $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 **(4')**

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$. **(7')**

左导数与右导数不相等，在 $x=0$ 处 $f(x)$ 的导数不存在。在 $x=0$ 处 $f(x)$ 不可导. **(8')**

2、由题设知$\frac{dy}{dx}=\frac{x-3}{x^2-4x+5}$ **(1'),** $y=\int\frac{x-3}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-4)-1}{x^2-4x+5}dx$. **(2')**

$y=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}-\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}$ **(4')**

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)-\arctan(x-2)+C$. **(6')**

将已知点$(3,0)$代入得$\frac{1}{2}\ln(9-12+5)-\frac{\pi}{4}+C=0$.解得$C=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln2$ **(7')**

所求曲线为$\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)-\arctan(x-2)+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln2$ **(8')**.

3、设锅炉的底半径为r，高为h.则$\pi r^2h=50$,即$h=\frac{50}{\pi r^2}$. **(1')**

将锅炉的表面积写为半径r的函数,$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{100}{r}$. **(3')**

对该式求关于r的导数$S'=4\pi r-\frac{100}{r^2}=\frac{4}{r^2}(\pi r^3-25)$. **(5')**

求解$S'=0$得$r=\sqrt[3]{25/\pi}$，则$h=2\sqrt[3]{25/\pi}$. **(6')**

$S''\big|_{r=\sqrt[3]{25/\pi}}=(4\pi+\frac{200}{r^3})\Big|_{r=\sqrt[3]{25/\pi}}=12\pi>0$. **(7')**

当$r=\sqrt[3]{25/\pi}$时S有最小值,高h与半径r比值为$h:r=2:1$时，用料最省. **(8')**

五、证明题(7*2)

1、构造函数$g(x)=f(x)\sin2x$， **(2')**

则$g(0)=f(0)\sin0=0,g(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})\sin\pi=0$,**(3')**

$g'(x)=f'(x)\sin2x+2f(x)\cos2x$. **(4')**

由题设知$g(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续,在$(0,\frac{\pi}{2})$可导.由罗尔定理知$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$使得$g'(\xi)=0$. **(6')**

即$g'(\xi)=f'(\xi)\sin2\xi+2f(\xi)\cos2\xi$. **(7')**

2、令$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{1}{2}(x-a)[f(a)+f(x)]$. **(2')**

因$\varphi'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(a)+f(x))-\frac{1}{2}(x-a)f'(x)$ **(3')**,则$\varphi'(a)=0$. **(4')**

又$\varphi''(x)=f'(x)-\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}(x-a)f''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f''(x)>0,(x>a)$. **(5')**

故$\varphi'(x)$递增,有$\varphi'(x)>\varphi'(a)=0$,故$\varphi(x)$递增. **(6')**

对$x>a$有$\varphi(x)>\varphi(a)=0$,即$\int_a^x f(t)dt\geq\frac{1}{2}(x-a)[f(a)+f(x)]$. **(7')**