一、**1.** 6. **2.** $f(\arctan x)$. **3.** $\dfrac{2+t^2}{2t}$ 或 $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2}t$

4. $\left(-1,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$、$\left(-3,\frac{10}{\mathrm{e}^3}\right)$.（注：若只写了 x 轴坐标，即写成 -1、-3，则给 2 分；若只写对一个拐点，则给 1 分）

5. $y=3x+3$.（注：若仅常数项算错，但 x 项系数正确，可给 1 分）

二、**1** B **2** C **3** A **4** D **5** B

三、**1.** 我们有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\sin x-2x}{x^3} &&（1\text{ 分}）\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x+\cos x-2}{3x^2} &&（2\text{ 分}）\\&=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x+\cos x-1}{3x^2} &&（1\text{ 分}）\end{aligned}$$

以下有两种做法：

方法 1：

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2} &&（1\text{ 分}）\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} &&（2\text{ 分}）\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6} &&（1\text{ 分}）\end{aligned}$$

方法 2：

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x\sec^2x-\sin x}{6x} &&（2\text{ 分}）\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(2\sec^3x-1)}{6x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sec^3x-1}{6} &&（1\text{ 分}）\\&=\frac{2\sec^3 0-1}{6}=\frac{1}{6} &&（1\text{ 分}）\end{aligned}$$

2. 方程两端关于 x 求导得：

$$\ln x+1+y+xy'+3y^2y'=0 \qquad（2\text{ 分}）$$

于是 $y'=-\dfrac{\ln x+1+y}{x+3y^2}$.（1 分） $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{1}{2}$.（1 分）

$$\begin{aligned}y''&=-\frac{\left(\frac{1}{x}+y'\right)(x+3y^2)-(\ln x+1+y)(1+6yy')}{(x+3y^2)^2} &&（1\text{ 分}）\\&=-\frac{\frac{3y^2}{x}-\ln x-y+(x-6y\ln x-6y-3y^2)y'}{(x+3y^2)^2} &&（1\text{ 分}）\end{aligned}$$

将 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ y'=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 代入上式得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(1,1)} = -\frac{3}{8} \qquad (2\text{ 分})$$

3. 令

$$\frac{2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \qquad (1\text{ 分})$$

通分后得：

$$2x+3 = A(x^2+1) + x(Bx+C) = (A+B)x^2 + Cx + A. \quad (1\text{ 分})$$

比较系数得：$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} A=3 \\ B=-3 \\ C=2 \end{cases}$ （1 分）于是

$$\frac{2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-3x+2}{x^2+1}. \qquad (1\text{ 分})$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x && (1\text{ 分}) \\ &= 3\ln|x| - \tfrac{3}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C. && (3\text{ 分}) \end{aligned}$$

注：最后结果中，每算对一项给 1 分。

四、1. 我们有

$$\begin{aligned} \text{原式} &\overset{t=\sin t}{=\!=\!=} \int \sin t\cos t \cdot t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t && (2\text{ 分}) \\ &= -\int t\cos^2 t\,\mathrm{d}\cos t = -\frac{1}{3}\int t\,\mathrm{d}\cos^3 t && (1\text{ 分}) \\ &= -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t && (1\text{ 分}) \\ &= -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}\sin t && (2\text{ 分}) \\ &= -\tfrac{1}{3}t\cos^3 t + \tfrac{1}{3}\sin t - \tfrac{1}{9}\sin^3 t + C && (1\text{ 分}) \\ &= -\tfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arcsin x + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^3 + C && (1\text{ 分}) \end{aligned}$$

2. 当 $x \neq 0$ 时，$f(x) = \frac{\sin x}{x}$. 于是

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}. \qquad (2\text{ 分})$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-h}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{2}=0\,. \qquad \text{（2 分）}$$

于是

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，

$$f''(x)=\frac{(x\cos x-\sin x)'\cdot x^2-(x\cos x-\sin x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}\,. \qquad \text{（2 分）}$$

当 $x=0$ 时，

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cos h-\sin h}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cos h-\sin h}{h^3}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-h\sin h-\cos h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin h}{3h}=-\frac{1}{3}\,. \qquad \text{（2 分）}$$

于是

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3} & x\neq 0\\ -\frac{1}{3} & x=0\end{cases}$$

五、1. 设切点坐标为 $\left(x_0,\ \frac{1}{x_0^2}+1\right)$. 因 $y'=-\frac{2}{x^3}$，于是切线方程为

$$y-\frac{1}{x_0^2}-1=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0) \quad\Longrightarrow\quad y=-\frac{2}{x_0^3}x+\frac{3}{x_0^2}+1\,. \qquad \text{（2 分）}$$

切线在 x 轴上的截距为：$\frac{3}{2}x_0+\frac{1}{2}x_0^3$；在 y 轴上的截距为：$\frac{3}{x_0^2}+1$.（1 分） 于是此直角三角形面积为：

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x_0+\frac{1}{2}x_0^3\right)\cdot\left(\frac{3}{x_0^2}+1\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x_0}+6x_0+x_0^3\right). \qquad \text{（1 分）}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x_0}=\frac{1}{4}\left(-\frac{9}{x_0^2}+6+3x_0^2\right)=\frac{3}{4x_0^2}(x_0^2+3)(x_0-1)(x_0+1)\,. \qquad \text{（2 分）}$$

令 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x_0}=0$，求得驻点：$x_0=1$. 注意到当 $x_0>1$ 时，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x_0}>0$；当 $x_0<1$ 时，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x_0}<0$. 于是取得最小值时的切点坐标为 $(1,2)$.（1 分） 此时 $A_{\min}=4$.（1 分）

2. 注意到 $x=0$ 不是此方程的跟，所以原方程可以变形为

$$a=\frac{x^3+4}{x^2}=x+\frac{4}{x^2}\,. \qquad \text{（1 分）}$$

令 $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$. 则

$$f'(x) = 1 - 8x^{-3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}. \qquad (2\text{ 分})$$

注意到 $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$. 于是当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时，$f'(x) > 0$;而当 $0 < x < 2$ 时，$f'(x) < 0$.（1 分） 即 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调增加，而在区间 $(0, 2)$ 上单调减少。（1 分） 注意到

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \qquad f(2) = 3, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \quad (1\text{ 分})$$

（由此可画出函数 $y = f(x)$ 的草图。）于是当 $a < 3$ 时，方程有唯一实根；当 $a = 3$ 时，方程有两个实根；当 $a > 3$ 时，方程有三个实根。（2 分）

六、1. 对 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上运用拉格朗日中值定理得：$\exists \xi_1 \in (0,1)$，使得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi_1)(1-0) \quad\Longrightarrow\quad f'(\xi_1) = 1\,; \qquad (2\text{ 分})$$

对 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上运用拉格朗日中值定理得：$\exists \xi_2 \in (1,2)$，使得

$$f(2) - f(1) = f'(\xi_1)(2-1) \quad\Longrightarrow\quad f'(\xi_2) = 1\,. \qquad (2\text{ 分})$$

注意到 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$. 对 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上运用罗尔定理得：$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,2)$，使得 $f''(\xi) = 0$.（3 分）

2. 证法 1 令 $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 - x^2$. 则 $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x$，$f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$.（1 分）

由均值不等式得：$f''(x) \geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x}} - 2 = 0$，其中等号当且仅当 $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}$，即 $x = 0$ 时成立。（2 分）

于是函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加；即当 $x > 0$ 时，$f'(x) > f'(0) = 0$；当 $x < 0$ 时，$f'(x) < f'(0) = 0$.（1 分）

于是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少，在 $[0, \infty)$ 上单调增加。由此可知 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值点。（2 分）

因此 $f(x) \geqslant f(0) = 0$. 即 $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2 + x^2$.（1 分）

证法 2 函数 e^x 在 $x = 0$ 处的 3 阶麦克劳林公式为

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{4!}x^4 \quad (0 < \theta < 1) \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}\mathrm{e}^{\theta x}x^4 \\
&\geqslant 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \qquad (3\text{ 分})
\end{aligned}$$

在上面的不等式中做代换 $x \to -x$ 可得：

$$\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 \qquad (2\text{ 分})$$

两个不等式两端分别相加得：

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2 + x^2\,. \qquad (2\text{ 分})$$