

0型不定式.

①定理1:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. 当 } x \rightarrow a \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0. \\ \text{II. } f(x) \text{ 与 } F(x) \text{ 在 } \dot{U}(a) \text{ 内可导, 且 } F'(x) \neq 0. \\ \text{III. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在.} \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

若  $x \rightarrow a$  换为  $x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  条件 II 作相应修改.

定理1 仍然存在.

②定理2:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0. \\ \text{II. 当 } |x| > N \text{ 时, } f'(x) \text{ 与 } F'(x) \text{ 存在, 且 } F'(x) \neq 0. \\ \text{III. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在.} \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

Eg.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$  极限不存在!

不能用洛必达!

而实际上:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$

实际上有极限!

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$  不存在  $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)}$  不存在! 只能说明洛必达法则不能用!

$$\text{Eg. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - e^x}{x^3 - \ln x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{e^x} - 1}{\frac{x^3}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x} + 1} = -\frac{1}{3}.$$

0.                      0.

⇒ 计算更简便.

③ 若  $\lim f(x) = A \neq 0$ .

则  $\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot \lim g(x)$ . [ I. 若  $\lim g(x)$  存在, 公式成立.  
II. 若  $\lim g(x)$  不存在, 则  $\lim f(x) \cdot g(x)$  也不存在.

④ 其他未定式:  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$

$0^0, 1^\infty, \infty^0 \Rightarrow g(x) \cdot \ln f(x)$ .



$$\text{Eg: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{-n} x^n \right) = 0.$$

⇒  $0 \cdot \infty$  型

$$\text{令 } x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Eg: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3+2x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+1} - \sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t^2}+1} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+t^3} - \sqrt[3]{1+2t+t^3}}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2t+3t^2}{3(1+2t+t^3)^{\frac{2}{3}}}}{1} = -\frac{1}{3}.$$

⇒  $\infty - \infty$  型

通分, 凑一个分母!

$$\text{Eg. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x}$$

⇒  $\infty - \infty$  型 通分.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

$$\text{Eg. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)} = e^0 = 1$$

⇒  $0^0$  型 化为  $e$  的指数.

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = 1.$$

例9. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ .  $\infty \cdot 0$  型

法1. 转化为函数, 用洛必达法则.

原式 =  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}}$  下一步计算很繁!

法2. 利用例3结果.

原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$   $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow{\text{例3}} 1$

=  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1}{n^{-\frac{1}{2}}}$   $e^u - 1 \sim u$

=  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln n}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{例3}}{=} 0$

HIGH EDUCATION PRESS

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n = 0$   
 故  $e^{\frac{1}{n} \ln n} \sim \frac{1}{n} \ln n$ .