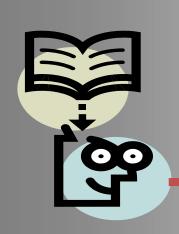






第二爷行列式的主要性质



# 主要内容



- 一、可逆矩阵判别定理
- 二、方阵乘积的行列式
- 三、可逆矩阵逆的行列式

### 一、方阵可逆的判别定理



# n阶方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ .

#### 证明:

方阵A可经有限次初等行变换化为阶梯形U,

存在初等阵 $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 使得

$$U = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

由于初等阵的行列式不为零,:  $A \neq 0 \Leftrightarrow U \neq 0$ 

如果A不可逆,A的主元列数小于列数,U有一零行,

$$|\boldsymbol{U}| = 0 \Longrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0.$$

如果A可逆,A的主元列数等于列数,U的主对角线上元都不为零,

$$|U| \neq 0$$
,从而 $|A| \neq 0$ 。

$$\therefore A$$
可逆  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ .

## 二、方阵乘积的行列式



# 设A,B均为n阶方阵,|AB| = |A||B|.

证明

若B不可逆、等价于方程组BX = 0有无穷多解.

而其解是方程组ABX = 0的解,所以AB不可逆.

$$\therefore |\mathbf{A}\mathbf{B}| = 0 = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

若B可逆,则 $B = P_k P_{k-1} \cdots P_1$ .

$$\therefore |AB| = |AP_kP_{k-1}\cdots P_1| = |A||P_k||P_{k-1}|\cdots |P_1| = |A||B|.$$





## 可逆矩阵的判别方法

设A、B为同阶方阵,若AB = E,则方阵A和B都可逆,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}, \ \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$$

### 可逆方阵逆的行列式

$$\left| \boldsymbol{A}^{-1} \right| = \left| \boldsymbol{A} \right|^{-1}$$

### n阶方阵行列式的运算规律



### $(A B \neq R)$ (A B $\neq R$ )

$$|A^T| = |A|$$

$$(2) |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

(3) 
$$|AB| = |A||B| = |BA|$$
 (4)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 

$$\left| A^{-1} \right| = \left| A \right|^{-1}$$

$$|A^n| = |A|^n$$

## 小结



### 一、可逆矩阵的常用判别方法

1、充要条件

n阶方阵A可逆当且仅当A的主元列数等于n。

2、判别定理

n阶方阵A可逆当且仅当  $|A| \neq 0$ 

3、推论

设A、B为同阶方阵,若AB = E,则方阵A和B都可逆,

且
$$A^{-1} = B$$
, $B^{-1} = A$ 



### 二、方阵乘积的行列式

# 设A,B均为n阶方阵,|AB| = |A||B|.

## 三、可逆方阵逆的行列式

$$\left| \boldsymbol{A}^{-1} \right| = \left| \boldsymbol{A} \right|^{-1}$$

### n阶方阵行列式的运算规律

 $(A B \in \mathbb{R})$ 

(1) 
$$\left|A^{T}\right| = \left|A\right|$$
 (2)  $\left|\lambda A\right| = \lambda^{n} \left|A\right|$ 

(3) 
$$|AB| = |A||B| = |BA|$$
 (4)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 

$$\left|A^{n}\right| = \left|A\right|^{n}$$



### 一、可逆矩阵的常用判别方法

#### 1、充要条件

n阶方阵A可逆当且仅当A的主元列数等于n。

#### 2、判别定理

n阶方阵A可逆当且仅当  $|A| \neq 0$ 

#### 3、推论

设A、B为同阶方阵,若AB = E,则方阵A和B都可逆,

且
$$A^{-1} = B$$
, $B^{-1} = A$ 



### 二、方阵乘积的行列式

# 设A,B均为n阶方阵,|AB| = |A||B|.

## 三、可逆方阵逆的行列式

$$\left| \boldsymbol{A}^{-1} \right| = \left| \boldsymbol{A} \right|^{-1}$$

### n阶方阵行列式的运算规律

 $(A B \in \mathbb{R})$ 

(1) 
$$\left|A^{T}\right| = \left|A\right|$$
 (2)  $\left|\lambda A\right| = \lambda^{n} \left|A\right|$ 

(3) 
$$|AB| = |A||B| = |BA|$$
 (4)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 

$$\left|A^{n}\right| = \left|A\right|^{n}$$