各位老师:

很抱歉，这次半期考题，涉及积分敛散性概念较多. 我手头没同济上册，不知道是打了星号的. 我上课也没展开有关敛散性判别的讨论. 另外，因为卷面关系，**选择题的第 1 小题**的格式改变了一下，但没把所有细节都同步调整，结果没答案可选，只好送分啦. ☺ ☻ 其他题目有误者，解答有错者，请交代助教们改过来就是了. 解答仅供参考. 李海

2009 级微积分 II-(2)期中考试参考解答(2010 年春季)

一. 判断题 **(3 分×4=12 分)**: 1. **Yes**; 2. **Yes**; 3. **No**; 4. **Yes**.

二. 填空题 **(3 分×4=12 分)**:

1. $f(\pi/4)$; 2. **1**; 3. **0.2** 4. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{(1-y)^2} f(x,y)dy$

三. 选择题 **(3 分×4=12 分)**: 1. **None**; 2. **A**; 3. **C**; 4. **D**.

四. 计算题 **(7 分×4=28 分)**: 各题解法不唯一. 只要对就给分.

1. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{nk}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{k/n}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$$

2. $$0\le\left|\frac{(x-1)y}{|x-1|+|y|}\right|\le\left|\frac{(x-1)y}{2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|y|}}\right|=\frac{\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|y|}}{2}\to 0$$

3. 设 $F(x, y, u)=x+y+u+xy+u^2-1$ 则由公式法(或直接法，全微分法)

$$F_x=1+y,\ F_y=1+x, F_u=1+2u\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1+y}{1+2u},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1+x}{1+2u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{(1+2u)-2(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}}{(1+2u)^2}=\frac{(1+2u)^2-2(1+y)(1+x)}{(1+2u)^3}$$

4. $$I=\iint_D\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{\ln(1+\rho^2)}{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\ln^2(1+R^2)$$

五. 分析题 **(10 分+8 分=18 分)**: 第 **1** 题:

首先，按定义有: $f(0,0)=0$. $\dfrac{\sin(xy)}{x}=y\dfrac{\sin(xy)}{xy}\xrightarrow{x\to 0}0$. f在(0,0)连续.

其次，$f_x(0,0)=\dfrac{\sin(x0)-0}{x}=0,\ f_y(0,0)=\dfrac{y-0}{y}=1$,故 f 在(0,0)可导.

再者，$\Delta x=0$ 时 $\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}=\dfrac{y-y}{|y|}=0$, $\Delta y=0$ 时 $\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}=\dfrac{\sin(x0)-0}{|x|}=0$,

而当$\Delta x\neq 0$ 且$\Delta y\neq 0$ 时，记$\Delta x=x$，$\Delta y=y$，

$$\left|\frac{\Delta z-dz}{\rho}\right|=\left|\frac{\frac{\sin(xy)}{x}-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}-1\right]\right|\le\left|\frac{\sin(xy)}{xy}-1\right|\to 0$$

所以, f 在(0,0)可微. (也可验证在(0,0)两个偏导数连续，从而可微.)

第 2 题: $u(x)$和 $v(x)$互为反函数，故有: $u[v(x)]=v[u(x)]=x$. 等式两边一起关于 x 求导，则

$$v[u(x)]u'(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)u(x)+\left(x-\frac{1}{x}\right)u'(x)\Rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}=x+\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\Rightarrow\ln u(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C\quad(C=0)$$

$$\Rightarrow u(x)=e^{\frac{x^2}{2}+\ln x}=xe^{\frac{x^2}{2}}\Rightarrow\int_0^1 u(x)dx=\int_0^1 xe^{\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{e}-1$$

五. 应用题 (10 分): 取旋转对称轴为y轴，设旋转抛物面由$y=kx^2$绕y轴而成. 则圆桶的容积减去此旋转体之体积就是桶内水的体积. 此体积除以圆桶的横截面面积就是水的高度h.

$$V_y=\pi\int_0^{kr^2}x^2dy=\pi\int_0^{kr^2}\left(\sqrt{\frac{y}{k}}\right)^2dy=\frac{\pi}{k}\int_0^{kr^2}ydy$$

$$=\frac{\pi}{2k}(kr^2)^2=\frac{1}{2}(\pi r^2)(kr^2)=\frac{1}{2}(\pi r^2)H$$

可见，此旋转抛物锥的体积正好等于圆桶的容积的1/2. 所以$h=H/2$. 因为此结论与k无关(即与抛物线的形状无关)，得: **旋转抛物锥的体积等于同底等高的正圆柱体的二分之一**.

五. 论证题 (8 分): 因为 $u=f(x,y)+f(y,x)$, 所以

$$u''_{xy} = f''_{12}(x,y) + f''_{21}(y,x), \quad u''_{yx} = f''_{21}(x,y) + f''_{12}(y,x)$$

$$\Rightarrow (f''_{xy} = f''_{yx}) \to (u''_{xy} = u''_{yx}) \Rightarrow (u''_{xy} \neq u''_{yx}) \to (f''_{xy} \neq f''_{yx})$$

故**命题 B** 成立.

而**命题 A** 不成立. 一个反例: (或其他函数, 确实构成反例者)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0; \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

因为 $u = f(x, y) + f(y, x) = 0$, 两个混合偏导数都恒为零. 在原点处, $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ 但 $u''_{xy} = u''_{yx}$.