微积分（I）-2 (A)　　参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $z^2+x^2=y-1$.　　2. $8dx+4dy$.　　3. $\frac{1}{3}$.　　4. 0.

5. $y=-\ln\cos x+1$.　　6. $y=-2x^2+2x+1$.

二、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1. 1. 已知 $z=(x+1)^y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y(x+1)^{y-1}$ ……………………………………………………3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x+1)^{y-1}+y(x+1)^{y-1}\ln(x+1)$ ……………………………………5 分

2. 设方程 $\ln x-\ln z+\frac{z}{y}=0$ 确定的二元函数 $z=z(x,y)$，计算 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$.

解：(1) $\frac{1}{x}-\frac{z_x}{z}+\frac{z_x}{y}=0\to z_x=\frac{yz}{(y-z)x}$ ……………………………………3 分

$-\frac{z_y}{z}+\frac{yz_y-z}{y^2}=0\to z_y=-\frac{z^2}{(y-z)y}$ ……………………………………3 分

(2) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=x\frac{yz}{(y-z)x}-y\frac{z^2}{(y-z)y}-z=0$ ……………………2 分

$\to x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

3. 空间区域Ω由 $z=x^2+y^2, z=4$ 围成，计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,dxdydz$.

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\,dr\int_{r^2}^4(r^2+z^2)dz$ ……………………2 分

$=\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,dv$

2

$=2\pi\int_0^2 r(4r^2+\frac{64}{3}-r^4-\frac{1}{3}r^6)dr$ ……………………………………2 分

$=\frac{224}{3}\pi$ ……………………………………………………………2 分

4. 曲面$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$在$0\le z\le 4$的部分，指向外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$.

解：补充平面区域Σ_1：$z=4,\ x^2+y^2\le 16$，方向向上

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{\Omega} dv-\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy \text{......3 分}$$

$$=3\pi\int_0^4 z^2dz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 16} 4dxdy \text{......3 分}$$

$$=64\pi-64\pi=0 \text{......2 分}$$

5. 求微分方程$y''-2y'+y=e^x$的通解.

齐次方程的特征方程和特征根：$r^2-2r+1=0\to r_1=1, r_2=1$......2 分

齐次方程的通解：$y=(c_1+c_2x)e^x$，c_1,c_2为任意实数......2 分

设非齐次方程的特解$y^*=Ax^2e^x$，代入方程得到$y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^x$......2 分

从而非齐次方程通解：$y=(c_1+c_2x)e^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$......2 分

三、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 已知曲线积分$\int_L\left[x^3+y^2\sin x\right]dx+\left[\varphi(x)y-y^3\right]dy$与路径无关，且$\varphi(0)=1,\varphi(x)$具有一阶连续导数. (1) 求$\varphi(x)$的解析表达式； (2)若有向曲线$L$由$y=\cos(\dfrac{\pi x}{2})$从(1,0)到(0,1)确定,计算该曲线积分.

解：(1)由于$\dfrac{\partial P}{\partial x}=2y\sin x,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\varphi'(x)y\to\varphi'(x)=2\sin x\to\varphi(x)=-2\cos x+C$，......3 分

$\because\quad \varphi(0)=1\to C=3\qquad \therefore \varphi(x)=-2\cos x+3$......2 分

(2) $\int_1^0 x^3dxt+\int_0^1(y-y^3)dy=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=0$......3 分

2．设曲线方程 $y=f(x)$), $f(x)$ 具有一阶连续导数，曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率等于 $\dfrac{2y+x+1}{x}$，且通过点(1, 0)，求此曲线方程的解析表达式.

解：(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y+x+1}{x}$, ……………………………………1 分

$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{x+1}{x}$ ……………………………………1 分

$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}[\int\dfrac{x+1}{x}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$ ……………………………………2 分

$y=Cx^2-x-\dfrac{1}{2}$ ……………………………………2 分

(2)由于曲线过点(1, 0)，代入得到 $C=\dfrac{3}{2}$，从而非齐次方程通解：$y=\dfrac{3}{2}x^2-x-\dfrac{1}{2}$ ……………2 分

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

1．设二元函数 $z=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}y^3-6x^2+8y^2$，向量 $\vec{l}=(1,1)$, (1) 设 P 点坐标为 (x,y)，求 $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_P$；(2) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_P$ 的极值与极值点的坐标.

解答：(1) $z'_x=x^2-12x, z'_y=2y^2+16y$ ……………………………………2 分

$\to\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^2-12x+2y^2+16y)\ x=0,y=0$ ……………………………………1 分

(2) 由 $\begin{cases}f_x=2x-12\\ f_y=4y+16\end{cases}\to\begin{cases}A=f_{xx}=2\\ B=f_{xy}=0\\ C=f_{yy}=4\end{cases}$ ……………………………………2 分

驻点为(6,-4)，$AC-B^2=8>0, A=2>0$，取得极小值 $\to\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_P\Big|_{(6,-4)}=-34\sqrt{2}$ ……………………2 分

2．求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面积与体积.

解答：(1) 体积 $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(r-r^2)dr=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………3 分

（2）表面积 $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy=\sqrt{2}\pi+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$……………………4 分

五、证明题(每小题 6 分，共 12 分)

1. 函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f_u+f_v=0$，若方程 $z=f\left(x+z,y+z\right)$ 确定二元函数 $z=z(x,y)$ 求证：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

证明: (1) 根据已知 $f_u+f_v=0\Rightarrow\begin{cases}f_{uu}+f_{uv}=0\\ f_{uv}+f_{vv}=0\end{cases}$……………………………………………………2 分

(2) $z_x=f_u(1+z_x)+z_xf_v=f_u$……………………………………………………………………2 分

$z_{xx}=f_{uu}(1+z_x)+z_xf_{uv}=f_{uu}$，$z_{xy}=f_{uu}z_y+(1+z_y)f_{uv}=f_{uv}$……………………………………1 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}+f_{uv}=0$$……………………………………………………………1 分

2. 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，证明：

$$\int_0^1 dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^2 f(t)dt.$$

证明：$\int_0^1 dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\int_0^1 dt\int_t^1 dv\int_t^v f(t)du=\int_0^1 f(t)dt\int_t^1(v-t)dv$ ....3 分

$=\int_0^1 f(t)(\frac{1}{2}v^2-tv)dt=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^2 f(t)dt$ ....3 分

六、附加题(共 8 分，附加题得分可记入总分，超过 100 分以 100 分记)

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续，但不可微.

解：(1)由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\theta=0=f(0,0)$，函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)连续........................3 分

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0, f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ ....2 分

(3) $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\rho}\xrightarrow{\Delta y=k\Delta x}\dfrac{k}{1+k^2}$ 不存在，故不可微. ....3 分