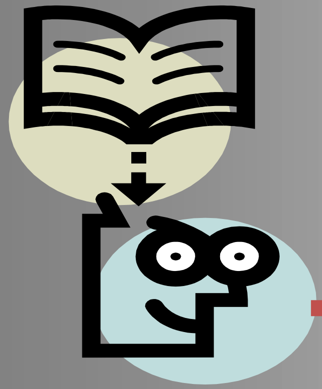
线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第一、二节 向量的相关性



xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

线性无关线性相关的：

一、定义

二、判别方法

三、性质

向量组的线性相关和线性无关，它们是线性代数中重要的基本概念，是研究线性方程组理论的基础！

定义4 数域P上全体n维行向量构成的集合$P^{1\times n}$，对于向量加法、P中的数与向量的数乘，构成数域P上的n 维行向量空间;

类似地可定义数域P上的n维列向量空间$P^{n\times 1}$;

用符号P^n表示$P^{1\times n}$或$P^{n\times 1}$，称为n维向量空间.

定义5　设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$及向量$\beta$满足关系：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, \qquad k_i \in P.$$

则称β为向量组(I)的一个**线性组合**，或称β可由向量组(I)**线性表示**。其中k_1，k_2，$\cdots, k_r$称为β在该线性组合下的**组合系数**。

问题:

如何判断向量β能否由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示？

或者说，

β能否写成向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个线性组合形式？

如果能，β在该线性组合下的组合系数是多少？

判断β能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，根据定义就是判断向量方程

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s \tag{1}$$

有无解。

当P^n为列向量空间时，(1)表示的线性方程组的增广矩阵为

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s \quad \beta)$$

当P^n为行向量空间时，由(4.4)两端取转置，得

$$\beta^T = x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + \cdots + x_s\alpha_s^T$$

注：这里，β^T为列向量，相应方程的增广矩阵为

$$\left(\alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \cdots \quad \alpha_s^T \quad \beta^T\right)$$

例1.

$$\text{设}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}.$$

问:

β能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出?

即β能否表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合?

若能，求出此线性组合下组合系数。

解: 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&1&4\\2&3&0\end{pmatrix}$,

$$\tilde{A}=(A\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$Ax=\beta$的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-3x_3+2\\x_2=2x_3-1\\0=0\end{cases}$$

由此解得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3C+2\\2C-1\\C\end{pmatrix}$

则有$\beta=(-3c+2)\alpha_1+(2c-1)\alpha_2+c\alpha_3$,

组合系数分别为: $-3c+2,2c-1,c$，其中c为任意常数。

例2. P^n中零向量可由任意向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,

$$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s=0$$

反之，从$0=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i$不一定能得到$k_1,k_2,\cdots.k_s$全为0的结论。

注：此例结论虽简单，而其结论却能引出向量组理论中的两个重要的基本概念：

线性相关和线性无关

定义6 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$是$P^n$中的向量组,若存在不全为0的数$k_i\in \mathrm{P}(i=1,2,\cdots,s)$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则称向量组(I)线性相关； 如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$必有$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,**则称向量组(I)线性无关。**

问题：如何判断向量组的线性相关性?

判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性相关性方法:

1. 判断方程组$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$有无非零解:
   - 有非零解, 向量组线性相关；
   - 只有零解，向量组线性无关。

2. 判断$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 有时可使用反证法。

基本向量组

例3. P^n中基本向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$(1)线性无关，且任一$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可由(1)线性表出。

证明: 考虑$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$, 即

$$k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,0,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,0,\cdots,1)$$

进一步有

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0)$$

由$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 故$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关。

又由

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

知α可由(1)线性表出。

例4. 设$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\end{bmatrix}$

(1) 判断$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3(I)$的线性相关性;

(2) 判断$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4(II)$的线性相关性;

(3) 问α_4能否由(I)线性表示。

解：考虑

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \tag{1}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0 \tag{2}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4 \tag{3}$$

由(1),(2)确定的齐次线性方程组,其系数矩阵分别为

$$A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3), B = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)$$

由(3)确定的增广矩阵也是B，故只需将B做初等行变换化简为$Jordan$阶梯型矩阵，可同时求出（1），(2),（3）的解。

$$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -3\\ 1 & 0 & 3 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 7 & 14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=C$$

由此可知，方程(1)的同解方程为

$$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

故向量组(I)线性无关.

方程组(2)的同解方程为$CX=0$，即

$$\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

令$x_4=k$,则有

$$x_1=-k, x_2=k, x_3=-2k,$$

因此，若取$k\neq 0$，则(2)有非零解，故向量组(II)线性相关。

最后,方程组(3)的同解方程为

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=2 \end{cases}$$

也就是说

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,$$

故α_4可由(I)线性表出。

例5.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta(II)$线性相关,则$\beta$可由$(I)$唯一线性表出。

证明: (II)线性相关,故存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s,k$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0$$

现证$k\neq 0.$

若$k=0$,则$k_1,\cdots,k_r$不全为0，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

由此推出(I)线性相关,这与(I)线性无关矛盾，故$k\neq 0$,所以

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k}\alpha_s$$

下证唯一性.

设

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s,$$

$$\beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_s\alpha_s,$$

两式相减可得：

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_s - \mu_s)\alpha_s = 0,$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，得:

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \cdots, \lambda_s = \mu_s,$$

唯一性得证。

小结：一、线性表示及其判别

定义

设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$及向量$\beta$满足关系：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, \qquad k_i \in P.$$

则称β为向量组(I)的一个**线性组合**，或称β可由向量组(I)**线性表示**。其中k_1，k_2，$\cdots,k_r$称为β在该线性组合下的**组合系数**。

判断

判断β能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，根据定义就是判断向量方程

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s$$

有无解。

小结：二、线性相（无）关的定义及其判断

定义

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$是$P^n$中的向量组,若存在不全为0的数$k_i\in \mathrm{P}(i=1,2,\cdots,s)$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则称向量组(I)线性相关；如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$必有$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,**则称向量组(I)线性无关。**

判断

判断方程组$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$有无非零解:

- 有非零解,向量组线性相关；
- 只有零解，向量组线性无关。

三、向量组线性相关与线性无关的6个性质

性质1 (1) 一个向量α线性相关的充要条件是$\alpha = 0$;

(2) 两个向量线性相关当且仅当其中至少有一个向量是另一个向量的倍数（或两个向量线性无关当且仅当不共线）.

证明：(1) 必要性，设α线性相关,存在$k \neq 0$，使$k\alpha = 0$，故$\alpha = 0$;

充分性，设$\alpha = 0$,则$1\alpha = 0$,故α线性相关。

(2) 必要性，若α,β线性相关，则存在数c,d不全为零，使得

$$c\alpha + d\beta = 0.$$

若$c \neq 0$,则$\alpha = -\frac{d}{c}\beta$；若$d \neq 0$,则$\beta = -\frac{c}{d}\alpha.$

充分性，不妨设$\alpha = k\beta$,则$(-1)\alpha + k\beta = 0. -1, k$不全为零，因此$\alpha,\beta$线性相关.

性质2 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>1)(I)$线性相关的充分必要条件是$(I)$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表示。

证明：必要性,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$线性相关,则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots.k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

必有一个$k_i\neq 0$,于是

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}\alpha_s,$$

即α_i可由其余$s-1$个向量线性表示.

充分性,若

$$\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s,$$

即

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+(-1)\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

而$k_1,\cdots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\cdots.k_s$不全为0,故$(I)$线性相关。

性质3 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(I)$的一部分线性相关，则$(I)$线性相关。

证明：不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t(t<s)$线性相关，即存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0,$$

故存在不全为0的数$k_1,\cdots,k_t,0,\cdots,0$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+0\alpha_{t+1}+\cdots+0\alpha_s=0,$$

于是(I)线性相关.

性质3等价于：
线性无关向量组中任何一部分向量线性无关.

性质4 设向量$\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\end{bmatrix}(j=1,2,3)(I)$线性无关，分别在$\alpha_j$的后面添加一个分量

得$\beta_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\\a_{4j}\end{bmatrix}(j=1,2,3)$, 则$\beta_1,\beta_2,\beta_3(II)$也线性无关.

证明：如果k_1,k_2,k_3满足$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，

即：$\begin{bmatrix}k_1a_{11}+k_2a_{12}+k_3a_{13}\\k_1a_{21}+k_2a_{22}+k_3a_{23}\\k_1a_{31}+k_2a_{32}+k_3a_{33}\\k_1a_{41}+k_2a_{42}+k_3a_{43}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$,

比较前三个分量得$\begin{cases}k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+k_3a_{i3}=0,\\ i=1,2,3\end{cases}$ 即：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,

由(I)线性无关得$k_1=k_2=k_3=0$, 且此解满足方程组的第(4)个方程，

说明方程组有且只有0解，故向量组(II)线性无关.

性质4的推广 n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，在每个向量的相同位置添加$m$个分量，则所得的$n+m$维向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_s$仍然线性无关。

例5: $\varepsilon_1 = (1,0), \varepsilon_2 = (0,1)$线性无关，则$\alpha_1 = (1,0,2,3), \alpha_2 = (0,1,5,5)$线性无关。

例6: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$与$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$线性无关.

确实，因$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$与$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$线性无关，

而α_1，a_2可以看作是由$\varepsilon_1, \varepsilon_2$在相同位置添加分量得到的.

性质5 n个n维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充分必要条件是

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0.$$

证明：由定义$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充要条件是

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0 \tag{1}$$

有非零解。

(1)确定的齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$$

性质5的等价表述 n个n维列向量α_1,α_2，$\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\ \cdots,\alpha_n)\neq 0$$

注： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$个$n$维行向量，根据性质5

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关} \Leftrightarrow \det(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T)=0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=0$$

当$s\neq n$时，s个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$不能构成行列式，只能用其它方法判断其线性相关性

性质6 如果向量组所含向量个数比向量的分量数目更多，则向量组必线性相关。即：如果$m>n$，则R^n中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

证明： 记$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$，则$A$为$n\times m$矩阵。

线性方程组$Ax=0$有n个方程，m个未知量。

若$m>n$，则$Ax=0$一定有非零解，因此A的列线性相关。

向量组线性相关与线性无关的6个性质

性质1 (1) 一个向量α线性相关的充要条件是$\alpha = 0$;

(2) 两个向量线性相关当且仅当其中至少有一个向量是另一个向量的倍数（或两个向量线性无关当且仅当不共线）.

性质2 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s > 1)(I)$线性相关的充分必要条件是$(I)$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表示。

性质3 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (I)$的一部分线性相关，则$(I)$线性相关。

性质4 n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，在每个向量的相同位置添加$m$个分量，则所得的$n+m$维向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots$，$\beta_s$仍然线性无关。

性质5 n个n维列向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关的充分必要条件是

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0.$$

性质6 如果向量组所含向量个数比向量的分量数目更多，则向量组必线性相关。即：如果$m > n$，则R^n中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关。

线性相关的判定定理

m维向量空间的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$AX=0$有非零解，其中$A=(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow |A|=0$，其中$A=(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示

含有零向量的向量组必线性相关

部分线性相关，则全体线性相关

向量组线性相关，则“截短”后仍线性相关

当向量维数n小于向量组向量个数m时一定线性相关.

线性无关的判定定理

m维向量空间的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$AX=0$仅有零解, 其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$,其中$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$

$\Leftrightarrow$ 向量组中任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示

一个非零向量必线性无关

全体线性无关，则部分线性无关

向量组线性无关，则“拉长”后仍线性无关

例7 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$为阶梯形矩阵，对$A$进行列分块 A=$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)$.

则首元所在的列向量$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$构成的向量组线性无关。

证明： $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$可以看作是由

$$\tilde{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \tilde{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\ \tilde{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

在相同位置添加上一分量得到的。由于

$$|(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_3\tilde{\alpha}_4)|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

这推出$\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4$线性无关，从而$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$也线性无关。

例8 向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$是否线性相关？

解：令$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是否线性相关由齐次线性方程组

AX=0是否有非零解决定。

由于AX=0的方程个数3比未知数4少，故AX=0有非零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

线性相关。

例9 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,0,0),\alpha_3=(2,0,1)$是否线性相关？

解：令$A=(\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ \alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

由于$|A|=0$，故$\mathrm{AX}=0$有非零解。

从而，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

例10 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

证明： 考虑

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

整理得：

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+0.\alpha_4=0$$

由题意，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，故有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

其系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，

从而$k_1=k_2=k_3=0$，故所证向量组线性无关。

例11 若向量组α，β，γ线性无关；α,β,δ线性相关，则____.

(A) α必可由β，γ，δ线性表示;

(B) δ必可由α，β，γ线性表示;

(C) β必不可由α，γ，δ线性表示;

(D) δ必不可由α，β，γ线性表示.

分析：

因为α,β也线性无关，由例4，δ可由α,β线性表出，从而δ可由α,β,γ线性表出.

答：B