四川大学半期考试试卷（参考答案）

（2014—2015 年第二学期）

科目：微积分（I）-2　课程号：201138040　考试时间：90 分钟

注：请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

1、（10 分）一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 等距离，求该动点的轨迹方程.

设该动点坐标为 (x,y,z)，则

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2$，

$\therefore -4x-6y-2z+14=-8x-10y-12z+77$，

即 $4x+4y+10z-63=0$，此即为所求轨迹的方程.

注：通常我们略去了验证前述问题中“不在曲面上的点坐标都不满足方程”这一工作，以下同.

参考答案	$4x+4y+10z-63=0$.
对应考点	空间曲线方程

2、（14 分）证明：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点（0,0）处连续，$f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 存在，但在（0,0）处不可微.

证：$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，

又由定义 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{|0\cdot y|}-0}{y-0}=0$，

但 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sqrt{|xy|}-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，故在点 $(0,0)$ 处不可微.

参考答案	证明见解析
对应考点	全微分的定义

3、（12 分）证明由方程组 $\begin{cases}[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2)\\ [z-f(\alpha)]f(\alpha)=\alpha x^2\end{cases}$ 所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

证：$2[z-f(\alpha)][dz-f(\alpha)d\alpha]=2x(y^2-\alpha^2)dx+2x^2(ydy-\alpha d\alpha)$,

于是

$$[z-f(\alpha)]dz=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f(\alpha)\}d\alpha$$
$$=x(y^2-\alpha^2)dx+x^2ydy$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy.$

参考答案	答案见解析.
对应考点	隐函数微分法

4、（14 分）设函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\because \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\dfrac{y}{x^2})=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$； $\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.	
参考答案	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$； $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$； $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.
对应考点	混合偏导数的计算

5、（12 分）求过点（2,3,6）的平面，使此平面在三个坐标轴上的截距是正数，且平面与三个坐标面所围成四面体的体积为最小，并求最小四面体的体积。

设过点 $(2,\ 3,\ 6)$ 的平面方程为 $A(x-2)+B(y-3)+C(z-6)=0$．截距 $\dfrac{2A+3B+6C}{A}$，$\dfrac{2A+3B+6C}{B}$，$\dfrac{2A+3B+6C}{C}$，四面体体积 $V=\dfrac{(2A+3B+6C)^3}{6ABC}$，由 $\begin{cases} V_A=-\dfrac{(2A+3B+6C)^3}{6A^2BC}+\dfrac{6(2A+3B+6C)^2}{6ABC}=0 \\ V_B=-\dfrac{(2A+3B+6C)^3}{6AB^2C}+\dfrac{9(2A+3B+6C)^2}{6ABC}=0 \\ V_C=-\dfrac{(2A+3B+6C)^3}{6ABC^2}+\dfrac{18(2A+3B+6C)^2}{6ABC}=0 \end{cases}$，得 $A:B:C=3:2:1$．平面方程：$3x+2y+z=18$．由于最小四面体的体积必定存在，因此所求平面方程为 $3x+2y+z=18$，最小四面体的体积 $V_{\min}=162$．	
参考答案	平面方程为 $3x+2y+z=18$，最小四面体的体积 $V_{\min}=162$．
对应考点	多元函数的最值

6、（14 分） 设 $f(x,y)$ 是连续函数，

证明 $\int_0^a dy\cdot\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx$ 其中 $a,\ m$ 为常数，且 $a>0$.

证　　等式左端 $=\int_0^a e^{m(a-x)}f(x)dx\int_x^a dy=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx=$ 右端.	
参考答案	答案见解析.
对应考点	交换二次积分次序的步骤

7、（14 分） 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 Ω 是两个球：

$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz\quad(R>0)$ 所围成的闭区域.

利用柱坐标,

$$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2 r dz dr d\theta.$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left\{(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-[R-\sqrt{R^2-r^2}]^3\right\}rdr$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left[2(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-4R^3+3R^2\sqrt{R^2-r^2}+3Rr^2\right]rdr$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[\frac{31}{80}R^5-\frac{3}{2}R^5+\frac{7}{8}R^5+\frac{27}{64}R^5\right]=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

参考答案	$\frac{59}{480}\pi R^5.$
对应考点	柱坐标系下三重积分的计算

8、（10 分） 一立体由两曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$ 所围成，求该立体的体积.

由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$，消去 z 得立体在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2+y^2 \le a^2$，从而立体的体积为

$$V=\iiint_{\Omega} dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{\frac{r^2}{a}}^{2a-r}dz$$

$$=2\pi\int_0^a r(2a-r-\frac{r^2}{a})dr=\frac{5}{6}\pi a^3.$$

参考答案	$\frac{5}{6}\pi a^3$.
对应考点	三重积分的应用