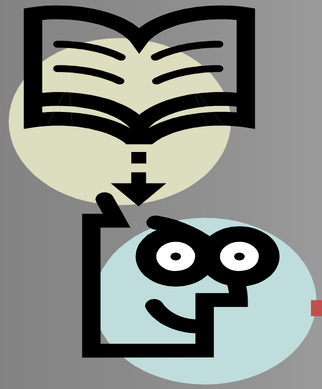
线性代数

Linear Algebra

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换



xuexue_zhou@scu.edu.cn

本节课主要内容：

一、逆矩阵的定义

二、可逆矩阵的运算性质

概念的引入:

1、**数** 在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$ab = ba = 1,$$

则$b = \frac{1}{a}$称为a的**倒数**（或称为a的**逆**）；也可记为 $b = a^{-1}$

2、**矩阵** 在矩阵的运算中，**单位阵 E 相当于数的乘法运算中的1**，

那么，对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 B，有

$$AB = BA = E,$$

则矩阵B 称为A的**逆矩阵**， A 称为**可逆矩阵**.

一、逆矩阵的定义

定义2.3.1 对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,$

$\therefore B$是A的一个逆矩阵.

说明

1. 若A是可逆矩阵，则A必为方阵。

证明： 设$B_{s\times t}$是$A_{m\times n}$的逆矩阵，则

$$(A\ B)_{m\times t} = (B\ A)_{s\times n} = E$$

$$\therefore\ n = s, t = m \quad m = s, t = n \quad \therefore\ m = n = s = t$$

2. 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

证明： 设B、C都是A的逆矩阵，则

$$AB = BA = E,\ AC = CA = E$$

从而$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$

判别矩阵可逆的方法：

方法一： 用定义进行判断

方法二： 设A、B为同阶方阵，若$AB=E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$

注：

判断B是否为A的逆矩阵，只需验证$AB=E$和$BA=E$中的一个即可。

逆矩阵的求法一：定义法

例：　设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解：　设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是 A 的逆矩阵,

则　$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\2b+d=0,\\-a=0,\\-b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\b=-1,\\c=1,\\d=2.\end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}}=\overset{BA}{\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}.$$

二、可逆矩阵的运算性质

性质1 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

性质2 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

性质3 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明：$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $$\left(A_1A_2\cdots A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

注　A可逆，B可逆 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ （$A+B$）可逆

例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可逆，但$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$不可逆

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$可逆，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可逆，但$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{C}^{-1}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})^{-1}$

例

设方程A满足$A^2-5A+6E=0$,证明：$A+7E$可逆,并求$(A+7E)^{-1}$.

证明：由$A^2-5A+6E=0$，得

$$A^2-5A+7\times(-12)E=-90E,$$

$$(A+7E)[-\frac{1}{90}(A-12E)]=E,$$

故$A+7E$可逆，$(A+7E)^{-1}=-\frac{1}{90}(A-12E)$

	矩阵方程	唯一解
A可逆	$AX=B$	$X=A^{-1}B$
A可逆	$XA=B$	$X=BA^{-1}$
A、B都可逆	$AXB=C$	$X=A^{-1}CB^{-1}$

小结

逆矩阵的定义

对矩阵 A，若存在矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的，且矩阵 B 称为 A 的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

说明 1. 若A是可逆矩阵，则 A必为方阵.

2. 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

判别矩阵可逆的方法：

方法一： 用定义进行判断

方法二： 设A、B为同阶方阵，若$AB = E$，则方阵A和B都可逆，且$A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

注：

判断B是否为A的逆矩阵，只需验证$AB = E$和$BA = E$中的一个即可。

可逆矩阵的运算性质

性质1 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

性质2 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

性质3 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$