一、填空题

1、0

2、3

3、 $2C_{2009}^{2} \quad (=4034072)$

4、 $y=x+1/e$

5、 $\sqrt[3]{3}$

二、选择题

ABCBB

注：3、例如 $f(x)=\frac{1}{2}x+x^{2}\sin\frac{1}{x},(x\neq 0),f(0)=0,f'(0)=\frac{1}{2}$

三、计算题

1、

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(x^{-2}-\cot^{2}x)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x-x^{2}\cos^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^{3}}\bullet\frac{\sin x+x\cos x}{x}\\
&\because\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}=2\\
&\because\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x-x\sin x}{3x^{2}}=\frac{1}{3}\\
&\therefore \text{原式}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2、

$$\begin{aligned}
&\text{令}u=x^{\sin x},\ln u=\sin x\ln x,\frac{u'}{u}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x},\\
&u'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})\\
&y'=2f(u)f'(u)u'\\
&=2x^{\sin x}f(x^{\sin x})f'(x^{\sin x})(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})
\end{aligned}$$

3、

$$\begin{aligned}
&\text{显然}t=0\text{时},x=-1,y=2;\text{由}x=t^{2}+2t-1,\frac{dx}{dt}=2t+2,\\
&\text{由}te^{y}+y=2,e^{y}+te^{y}\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}=0,\frac{dy}{dt}=\frac{-e^{y}}{te^{y}+1}=-(t+e^{-y})^{-1}\\
&\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}(t+e^{-y})^{-1}(t+1)^{-1},\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=-e^{2},
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left\{-\frac{1}{2}(t+e^{-y})^{-1}(t+1)^{-1}\right\}}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{(1-e^{-y}\frac{dy}{dt})(t+1)+(t+e^{-y})}{4(t+e^{-y})^2(t+1)^3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^4+e^2}{4}$$

四、解答题

1、

显然$a=0$是满足题设要求的取值,当$a\neq 0$时，

$\because x>0$,原方程等价于$ax^3-3x^2+1=0$

令$f(x)=ax^3-3x^2+1$, $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$

若$a<0$, $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调减少, $f(0)=1>0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0$,方程$ax^3-3x^2+1=0$一定有唯一的实根；

若$a>0$,则$f(x)$在$(0,\frac{2}{a})$上单调减少,在$(\frac{2}{a},+\infty)$上单调增加，

方程$ax^3-3x^2+1=0$有唯一的实根只能使$f(\frac{2}{a})=0$,即$a=2$。

综上分析$a\leq 0$,或$a=2$

2、

(1) $\because e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

则$x\neq 0$时,在零的充分小的去心邻域上

$f(x)=\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$, $\therefore a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

（2）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,

$x\neq 0$时$f'(x)=\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$,

$\therefore f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=0.$

五、应用题

1、

$y=ax^2+bx+c, y'=2ax+b, y''=2a$

$y=x+\cos x, y'=1-\sin x, y''=-\cos x$

$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$,由题意，$c=1$

$b=y'(0)=1, |2a|=1$,注意凹向

$a=-1/2, \therefore y=-x^2/2+x+1$

2、

设圆锥的高和底面半径分别是h、r，则

$(h-R)^2+r^2=R^2, \therefore r^2=2Rh-h^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3),$

由$V'=\frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2)=0$得$h=\frac{4}{3}R,$

$V''\Big|_{h=\frac{4}{3}R}=\frac{1}{3}\pi(4R-6h)\Big|_{h=\frac{4}{3}R}=-\frac{4}{3}\pi<0$

$\therefore$当$h=\frac{4}{3}R$时V取最大值,此时$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$

$h:r=\sqrt{2}$

六、证明题

1、

先证$\frac{\sin x}{x}<1$，令$g(x)=\sin x-x$

$g'(x)=\cos x-1<0, \therefore g(x)<g(0)=0$

又令$f(x)=\frac{\sin x}{x}, 0<x\le\frac{\pi}{2},$

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$

$\therefore f(x)=\frac{\sin x}{x}\ge f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$

2、

令$F(x)=f(x)-\frac{s}{s+t}, F(0)<0, F(1)>0$

$\therefore \exists r\in(0,1)$,使得$F(r)=0$，即$f(r)=\frac{s}{s+t}$

在$[0,r]$、$[r,1]$上应用拉格朗日中值定理

$\exists a\in$（$0,r$），$f'(a)=\frac{f(r)-f(0)}{r}=\frac{s}{s+t}\cdot\frac{1}{r}$

$\exists b\in$（$0,r$），$f'(b)=\frac{f(1)-f(r)}{1-r}=\frac{t}{s+t}\cdot\frac{1}{1-r}$

$\therefore$对$\forall s,t>0, \exists$不同的$a,b\in(0,1)$,使得

$\frac{s}{f'(a)}+\frac{t}{f'(b)}=s+t$

对$f(x)$应用上述结论，取$s=1, t=3$

对$g(x)$应用上述结论，取$s=5, t=2000$

即可有

$\frac{1}{f'(a)}+\frac{3}{f'(b)}+\frac{5}{g'(c)}+\frac{2000}{g'(d)}=2009$