收敛数列的性质

① 唯一性：若数列极限存在，则极限是唯一的.

② 有界性：若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则 $\{x_n\}$ 有界. $\Leftrightarrow \exists M>0, \forall n\in N$, 有 $|x_n|\le M$.

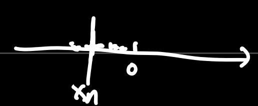
③ 保序性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, 且 $a>b$, 则 $\exists N\in N, \forall n>N$. 有 $x_n>y_n$.

推论1：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 且 $a>b\ (a<b) \Rightarrow \exists N\in N, \forall n>N$, 有 $x_n>b$ (或 $x_n<b$).

推论2：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, 且 $\exists N\in N, \forall n>N$ 时，有 $x_n\ge y_n \Rightarrow a\ge b$.

推论3：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 且 $a<0$ (或 $a>0$) $\Rightarrow \exists N\in N, \forall n>N$, 有 $x_n<0$ ($x_n>0$).

(保号性)

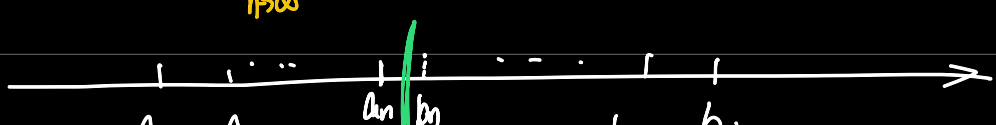


子数列的收敛性

① 子数列收敛的继承性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则 $\{x_n\}$ 的任何子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

可用于判断一个数列不收敛.

② 区间套定理：设区间列 $[a_n, b_n]$ 是一区间套，则存在唯一点 ξ 属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\xi$.



a_1 a_2 b_2 ...

若能够在 a_n、b_n 中找到 x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.（夹逼定理）

区间套：设有闭区间列 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$, $\cdots$

(1). 区间列中每一区间都包含在前一区间内. $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$

(2). 区间长度收缩为0，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

③ 致密性定理：任一有界数列必有收敛的子数列.