一.[微分中值定理]

⇒ 1个中值ξ的问题.

① 已知 $f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导,且$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证明: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

析: $\Leftarrow$ $f(\xi)\cdot g''(\xi)-g(\xi)\cdot f''(\xi)=0 \Leftarrow \begin{cases}\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\\ \varphi'(\xi)=0.\end{cases}$

令$\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$. 由 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

故$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$. 即 $f(\xi)\cdot g''(\xi)-g(\xi)\cdot f''(\xi)=0$.

又$g''(\xi)$、$f''(\xi)\neq 0$, 故 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

小结: 构造所需式.

② 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 且 $\begin{cases}f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0\\ f(a)\cdot f(b)>0\end{cases}$.

证明: $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

析: $\Leftarrow f'(\xi)-f(\xi)=0 \Leftarrow \begin{cases}\varphi(x)=f(x)e^{-x}\cdot f(a)\\ \varphi'(\xi)=e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0.\end{cases}$

设 $\varphi(x)=f(a)\cdot f(x)e^{-x}$, 又 $\begin{cases}\varphi(a)=f^2(a)e^{-a}>0.\\ \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot e^{-\frac{a+b}{2}}<0.\\ \varphi(b)=f(a)\cdot f(b)\cdot e^{-b}>0.\end{cases}$

故$\exists\,\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, 使 $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$.(零点定理)

故 $\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $\varphi'(\xi)=0$.　　　　(罗尔定理)

即 $f'(\xi)=f(\xi)$.

小结：构造所需式.

⇒ 2个中值 ξ、η 的问题.

③ 设 $0\le a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，
证明：在 (a,b) 内 $\exists\,\xi、\eta$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$.

析：拉格朗日中值：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

↳ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$ (消去一个变量)

⇒ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\eta-\dfrac{a+b}{2}f'(\eta)=0$. (化为一般式)

设 $F(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta^2-\dfrac{a+b}{2}f(\eta)$.

由 $F(a)=\dfrac{1}{2}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a^2-\dfrac{a+b}{2}f(a)=\dfrac{a^2f(b)-b^2f(a)}{2(b-a)}=F(b)$.

故 $\exists\,\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$，即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\eta-\dfrac{a+b}{2}f'(\eta)=0$.

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

故 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

即 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

小结：利用拉格朗日中值定理进行消元.

④ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=1$.
证明：$\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

析：$\Leftarrow$ $\underbrace{e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]}_{\varphi(x)=e^{x}f(x)\text{ 的导数}}=e^{\xi}$. $\Rightarrow$ $g(x)=e^{x}$ $g'(\xi)=e^{\xi}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$.

$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\leftarrow\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}$

设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$，故 $\exists\ \eta\in(a,b)$，（拉格朗日中值）.

使 $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(\eta)\Rightarrow\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$.

又设 $g(x)=e^{x}$，故 $\exists\ \xi\in(a,b)$（拉格朗日中值）.

使 $\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}$.

故 $e^{\xi}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]\Rightarrow e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

↳ 构造练习：

① $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$

常数&减号.

$\Leftarrow \quad f'(\xi)-1 \; -\lambda[f(\xi)-\xi]=0$

导数关系.

$F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x].$

② 已知 $a_1-\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{a_n}{2n-1}=0.$

求证 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有一实根.

$F(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x.$ 见cosx想sinx.

$F'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x.$

且 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$. $\Rightarrow \exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $F'(\xi)=0$.

即 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$. 至少有一个实根.

③ $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$

设 $F(x)=xf(x)$. $\quad F'(x)=f(x)+xf'(x).$

$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$

$\hookrightarrow \frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$

③ $x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1-\xi) e^{\xi} (x_1 - x_2)$.

$$\Leftarrow \quad \frac{\frac{e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = (1-\xi)e^{\xi}.$$

$$F(x) = \frac{e^x}{x},\ g(x) = \frac{1}{x}. \quad \Rightarrow \frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$= (1-\xi)e^{\xi}.$$

④ $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$.

$\Leftarrow$ $f'(\xi) = \dfrac{e^b-e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta} \cdot f'(\eta)$ 分离变量.

$\Leftarrow$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{e^b-e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta} \cdot f'(\eta)$ 拉格朗日中值.

$\Leftarrow$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a} = \dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$. 柯西中值.

设 $\varphi(x) = e^x$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$.

二. [泰勒公式]

① 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]-\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

展开到同阶无穷小

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$= -\frac{1}{12}.$$

小结：泰勒展开时，展开到同阶无穷小.

⇒ 泰勒定理证明不等式.

关键：展开的 x_0 的选取.

- 若证明结果不含一阶导，取 x_0 为已知一阶导点 / 隐含一阶导已知点.
- 若是积分不等式，取 $x_0=\frac{a+b}{2}$. 积分后可把含 $f'(x_0)$ 的消去.

$$\left(\int_a^b f'(x_0)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0\right)$$

③ 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

析：含 $f''(x)$ 2阶导 不含一阶，考虑泰勒 已知一阶导.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x^2).$$

取 $x=\frac{a+b}{2}$，$x_0=a、b$.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(b)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

即 $\left|f(a)-f(b)\right| = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left|\frac{f''(a)}{2}-\frac{f''(b)}{2}\right|$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}$.

故 $\left|f(a)-f(b)\right| \le \frac{(b-a)^2}{4}\cdot|f''(\xi)|$

④ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最小值为 -1. 证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\ge 8$.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最小值 $f(a)=-1$. $\Rightarrow f'(a)=0$.

一阶皮亚诺

在 $x_0=a$ 处泰勒展开：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$.

令 $x=0,1$. $\Rightarrow\ 0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2$. $\quad 0<\xi_1<a$. ①

$\Rightarrow\ 0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2$. $\quad a<\xi_2<1$. ②

若 $0<a<\frac{1}{2}$，由 ①：$f''(\xi_1)<8$；若 $\frac{1}{2}\le a<1$，由 ②：$f''(\xi_2)\le 8$

故 $f''(\xi)\le 8$.

泰勒公式：

① $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

② $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$

③ $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

④ $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$

⑤ $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

⑥ $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x^2}{2!}+f''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

↳ 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$. 试求：$f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$ 的值.

由 $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2) \Rightarrow xf(x)=f(0)x+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2}x^3$

$+o(x^3)$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{2}$.

故 $f(0)=-1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=\frac{4}{3}$.

小结：不能使用洛必达!! $\sin x$全三阶项!!!