小测验 2 答案 （前三章）

姓名________________　　　序号________

1. $(10')$求数列极限：$x_n=\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}(a>0)$.

解： 当$a=1$时，$x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; $(2')$

当$a>1$时，$a^n\to+\infty,n\to\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}}=1$; $(4')$

当$0<a<1$时，$a^{-n}\to+\infty,n\to\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}=-1$. $(4')$

2. $(16')$求函数极限（四选二）：

1) $\lim\limits_{x\to0}(2sinx+cosx)^{\frac{1}{x}}$; $(8')$

2) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})}$; $(8')$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$; $(8')$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3sinx+x^2cos\frac{1}{x}}{(1+cosx)\ln(1+x)}$. $(8')$

解：

1) $\lim\limits_{x\to0}(2sinx+cosx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2sinx+cosx-1)^{\frac{1}{2sinx+cosx-1}\cdot\frac{2sinx+cosx-1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2sinx+cosx-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2sinx+cosx-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2sinx}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{cosx-1}{x}}=e^2$. $(8')$

或者

$\lim\limits_{x\to0}(2sinx+cosx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(2sinx+cosx)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2sinx+cosx)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2cosx-sinx}{2sinx+cosx}}=e^2$.

2) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{1-cosx}{x(1-cos\sqrt{x})(1+\sqrt{cosx})}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\cdot(1+\sqrt{cosx})}=\frac{1}{2}$. $(8')$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{-x\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100}{-\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)}=-50$. $(8')$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3sinx+x^2cos\frac{1}{x}}{(1+cosx)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3sinx+x^2cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3sinx}{x}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}xcos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$. $(8')$

3. $(16')$设函数$y=f(x)$由方程$y-x=e^{x(1-y)}$确定，求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$.

解： 由题有$f(0)-0=e^{0(1-f(0))}$，即$y|_{x=0}=f(0)=1$ $(3')$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)$. $(4')$

方程左右两边对x求导，有$y'-1=(1-y-xy')e^{x(1-y)}$ $(5')$,

所以$f'(0) = y'|_{x=0,y=1} = 1.$(4′)

4. (20′)函数$f(x) = (x^3+1)^{10} arctanx$，求$f^{(10)}(-1)$.

解： 由题$f(x) = (x+1)^{10} g(x)$，其中$g(x) = (x^2-x+1)^{10} arctanx$. (3′)

由莱布尼兹公式，有

$$f^{(10)}(x) = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} [(x+1)^{10}]^{(k)} g^{(n-k)}(x) = C_{10}^{10} [(x+1)^{10}]^{(10)} g(x) = 10!\, g(x), \text{(8′)}$$

又$g(-1) = (1+1+1)^{10} \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} 3^{10}$ (3′),所以$f^{(10)}(-1) = -10!\, 3^{10} \cdot \frac{\pi}{4}$. (3′)

5. (18′)已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$.证明:
   1) 存在$\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi) = 1-\xi$;
   2) 存在两个不同的点$c_1, c_2 \in (0,1)$,使得$f'(c_1) f'(c_2) = 1$.

证明：

1) 令$F(x) = f(x) - 1 + x$ (4′)，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0) = -1 < 0, F(1) = 1 > 0$,

由介值定理知，存在$\xi \in (0,1)$,使得$F(\xi) = f(\xi) - 1 + \xi = 0$,即$f(\xi) = 1 - \xi$. (4′)

2) 在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上对$f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点

$c_1 \in (0,\xi), c_2 \in (\xi,1)$，使得$f'(c_1) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$ (3′), $f'(c_2) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$. (3′)

于是$f'(c_1) f'(c_2) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1-\xi} = 1.$ (4′)

证毕

6. (20′)试确定A, B, C的值，使得$e^{2x}(1+Bx+Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$.

解： 由泰勒展开，$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ (4′)，代入已知等式得

$$\left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

整理得

$1 + (2+B)x + (2+2B+C)x^2 + \left(\frac{4}{3} + 2B + 2C\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$, (4′)

比较两边同幂次函数得

$$\begin{cases} 2+B = A, \\ 2+2B+C = 0, \\ \frac{4}{3} + 2B + 2C = 0. \end{cases} \text{(6′)}$$

解得

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3}, \\ B = -\frac{4}{3}, \\ C = \frac{2}{3}, \end{cases} . \text{(6′)}$$

附加题：$(20')$设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$.证明：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ,使$f'''(\xi)=3$.

证明：由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(x)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3, \eta\text{介于 0 与}x\text{之间.}$$

将$x=-1$和$x=1$分别代入上式中，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}f'''(\eta_1), -1<\eta_1<0; \ (4')$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{6}f'''(\eta_2), 0<\eta_2<1. (4')$$

两式相减，可得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6. (3')$$

设M和m分别是$f'''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上的最大值与最小值，显然有

$$m\le f'''(\eta_1), f'''(\eta_2)\le M,$$

则

$$m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M. (4')$$

由连续函数介值定理知，至少存在一点$\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$,使得

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3. (5')$$

证毕