函数的渐近线.

①定义1：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则 $x\to\infty$ 时，$y=f(x)$ 的曲线无限接近于 $y=A$，
称 $y=A$ 为 $x\to\infty$ 时的水平渐近线.

②定义2：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧的竖直渐近线.

③定义3：若 $y=ax+b\,(a\neq 0)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$.
称 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0 \Rightarrow a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

$\Rightarrow$ 水平渐近线、斜渐近线均为 $x\to\infty$ 时 $y=f(x)$ 的曲线趋势.
从而这两类渐近线一共不超过两条.

$\rightarrow$ 不可能既有水平渐近线，又有斜渐近线.

Eg. 求 $y=\frac{3x^2}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线.

$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$y\to 3$. 故左右均有水平渐近线.
$x\to 1^+$，$y\to+\infty$，$x\to 1^-$，$y\to-\infty$. 故 $x=1$ 时，有竖直渐近线.
$x\to 2^+$，$y\to+\infty$，$x\to 2^-$，$y\to-\infty$. 故 $x=2$ 时，有竖直渐近线.

2 　　　　　　　　5

Eg. 求 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}$.

故 $x=1$、-3 是 y 的竖直渐近线. $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 时, $y\to\infty$. 无水平渐近线.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2-3x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2.$$

故 $y=x-2$ 是斜渐近线.

Eg. $f(x)=\frac{x^3-e^x}{x^2+e^x}$ 的渐近线.

无竖直渐近线. $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to-1$. $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to\infty$.

故 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时, 有 $y=-1$ 水平渐近线.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-e^x}{x^3+e^x\cdot x}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}(-e^x)=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-e^x-x^3-e^{2x}}{x^2+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^x-e^{2x}}{x^2+e^x}=0.$$

故 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时, 有 $y=x$ 斜渐近线.