2006年度数二（1）(B）期末考试题答案和评分标准

一、填空题 (每小题 3 分)

1. $-3/2$　　2. $-1/8$　　3. xe^x　　4. (0,0),(2/3,11/27)　　5. -1

二、选择题(每小题 3 分)

1. ***D***　　2. ***C***　　3. ***B***　　4. ***A***　　5. ***D***

以下解答只是多种解法中的一种方法之一.某个步骤后的圆圈中的数字表示完成该步骤的得分. 不同的解法的步骤分可参考评定.

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

第 1 题. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x^2-x-6\right|-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x^2-x-6)-4}{x^2-4}$ ②$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x+1)}{x+2}$ ④ $=-\dfrac{3}{4}$ ②

第 2 题. $y'=2^{f(x)}\ln 2f'(x)$，②

$y''=\ln 2\left[2^{f(x)}\ln 2f'(x)f'(x)+2^{f(x)}f''(x)\right]=2^{f(x)}\ln 2\left[\ln 2(f'(x))^2+f''(x)\right]$ ⑥

第 3 题. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2+2\cos x-2}{x^4}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x^2-2\sin x}{4x^3}$ ②

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x^2-2x^2\sin x^2-2\cos x}{3x^2}$

$\overset{L}{=}\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\sin x^2-2(2x\sin x^2+2x^3\cos x^2)+2\sin x}{2x}$ ②

$=\dfrac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-6x\sin x^2-4x^3\cos x^2+2\sin x}{x}$　$=\dfrac{1}{12}$

$=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\left[-3(\sin x^2+2x^2\cos x^2)-2(3x^2\cos x^2-2x^4\sin x^2)+2\cos x\right]=\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{1}{3}$ ④

$\dfrac{1}{12}$

四、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

第 1 题. $f(0)=ae^{0}+be^{-0}=a+b$ ①

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1\Rightarrow a+b=1$$ ①

当Δx>0 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-(a+b)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x+3x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2}$$ ②

当Δx<0 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}-(a+b)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[a\dfrac{e^{x}-1}{x}-b\dfrac{e^{-x}-1}{-x}\right]a-b$ ②

由$\begin{cases}a+b=1\\ a-b=-1/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1/4\\ b=3/4\end{cases}$ ②

第 2 题. 设$f(x)=xe^{-x}-a$，则$f'(x)=e^{-x}(1-x)$ ②

当 x<1 时 $f(x)$单增：当 x>1 时 $f(x)$单降. 故 $f(1)=e^{-1}-a=\dfrac{1}{e}-a=\max f(x)$. ②

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-a$ ①

$$\Rightarrow\begin{cases}f(1)<0\text{即}a>\frac{1}{e}\text{时, 无根}\\ f(0)=0\text{即}a=\frac{1}{e}\text{时,单根}\\ f(0)>0\text{即}0<a<\frac{1}{e}\text{时,两个根}\end{cases}$$ ③

五、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

第 1 题 $t=0\Rightarrow x=0, y=-1$ ②

$\begin{cases}x'+(1-2t)=0\\ e^{y}+te^{y}y'+y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=2t-1\\ y'=-\dfrac{e^{y}}{1+te^{y}}\end{cases}$ ② $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{y}}{(2t-1)(1+te^{y})}\Bigg|_{t=0}=e^{-1}$ ②

切线方程: $y+1=e^{-1}x$ or $x-ey-e=0$ 法线方程: $y+1=-ex$ or $ex+y+1=0$ ②

第 2 题 设此切点坐标为 (x_0, y_0) 则 $y_0 = x_0^2$，且切线为 $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$ 或

$y = 2x_0x - 2x_0^2 + y_0 = 2x_0x - x_0^2$ ②

令 y=0 得切线在 x 轴上的交点坐标为 $x_1 = \frac{x_0}{2}$；

令 x=8 得切线在直线 x=8 上的交点坐标为 $y_2 = 16x_0 - x_0{}^2$ ②

则三角形面积为 $S(x_0) = \frac{1}{2}(8 - x_1)y_2 = \frac{x_0}{4}(16 - x_0)^2$ ②

令 $S'(x_0) = \frac{(16 - x_0)}{4}(16 - 3x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{16}{3}$ 时，S 最大. ②

六、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

第 1 题 令 $F(x) = xf(x) \Rightarrow F(a) = af(a), F(b) = bf(b)$ ②

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$上连续，在（a, b）上可导，由中值定理， 存在 $a < \xi < b$ 使

$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$ ③

$F'(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow F'(\xi) = f(\xi) + \xi f'(\xi)$

$\therefore$存在 $a < \xi < b$ 使 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$ ②

第 2 题 令 $F(x) = 1 + x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2}$，则 $F(0) = 0$. ②

$$F'(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

又： $= \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ③

$= \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > 0$

故 $F(x)$是单增的. $\therefore$ $F(x) > 0 \Rightarrow 1 + \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > \sqrt{1 + x^2}$ ②