高等数学第一学期中考试试题(非物理类)参考答案

1．判定下列级数的敛散性,并说明理由：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$　　　　**(2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\quad(|a|<e)$

解：(1) 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$收敛

(2) 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}<1$，根据比值判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛.

2．计算下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$　　　　**(2)** $\lim_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x})$

解：(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{\frac{1}{2}x^2}==\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x})\ \xrightarrow{t=\frac{1}{x}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{(1+t)^2}}\frac{1}{(1+t)^2}==\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^2+1}=\frac{1}{2}$

3.求下列函数的导数：

(1) 已知 $y=x^{\sin x}-\ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

解：(1) $y=x^{\sin x}-\ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}=e^{\sin x\ln x}-\frac{1}{2}\ln(e^x-1)+\frac{1}{2}\ln(e^x+1)$

$$\frac{dy}{dx}=(e^{\sin x\ln x})'-\frac{1}{2}(\ln(e^x-1))'+\frac{1}{2}(\ln(e^x+1))'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})-\frac{e^x}{2(e^x-1)}+\frac{e^x}{2(e^x+1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\sin 1-\frac{e}{2(e-1)}+\frac{e}{2(e+1)}=\sin 1-\frac{e}{e^2-1}$$

(2) 已知 $y=e^x+x$，求它的反函数的二阶导数$\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=0}$

解：对等式两边对 y 求导，$1=e^x\frac{dx}{dy}+\frac{dx}{dy}\to\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+y-x}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1+y-x}\right)=-\frac{1-\frac{dx}{dy}}{(1+y-x)^2}$$

当 x=0 时，y=1, 代入上面式子可得 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$， $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$， $\left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=0}=-\frac{1}{8}$

4．设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=e^{2t}-2e^t+3 \\ y=3e^{4t}-4e^{3t}+7 \end{cases}$ 所确定的函数，计算 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解：由方程组的第一个方程对 t 求导可得：$\frac{dx}{dt}=2(e^{2t}-e^t)$；

由方程组的第二个方程对 t 求导可得：$\frac{dy}{dt}=12(e^{4t}-e^{3t})$；

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{12(e^{4t}-e^{3t})}{2(e^{2t}-e^t)}=6e^{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2(e^{2t}-e^t)}\frac{d}{dt}(6e^{2t})=\frac{6e^t}{e^t-1}$$

5．把函数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$ 展开成 $a_0+a_1x+R_1(x)$ 的形式，其中 $R_1(x)$ 为拉格朗日型余项.

解：对函数 $f(x)=(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 逐次求导：

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+2x)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x+x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2x)^2+(1+x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}(1+x+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

则 $f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}$

那么 $\sqrt{1+x+x^2}=1+x+R_1(x)$

其中 $R_1(x)=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=\frac{3}{4}(1+\theta x+\theta^2x^2)^{-\frac{3}{2}}x^2$

6(13 分)．已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{axe^x-\sin x}{x}, & x<0 \\ \arctan x+b(x-1)^3, & x\ge 0 \end{cases}$.

(1) 当函数 $f(x)$在 x=0 处连续时，求 a 和 b 满足的条件；

(2) 当函数 $f(x)$在 x=0 处可导时，求 a 和 b 满足的条件；

(3) 当函数 $f(x)$在 x=0 处可导时，研究导函数 $f'(x)$ 在 x=0 处的连续性.

解：由于函数可导必连续，于是 $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{axe^x-\sin x}{x}=a-1,\lim\limits_{x\to0^+}\arctan x+b(x-1)^3=-b\Rightarrow a+b=1$.

由于函数可导，于是，而

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{axe^x-\sin x}{x}+b}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{axe^x-\sin x+bx}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{ae^x+axe^x-\cos x+b}{2x}==\lim_{x\to0^-}\frac{2ae^x+axe^x+\sin x}{2}=a$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x+b(x-1)^3+b}{x}=\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{1+x^2}-3b(x-1)^2)=1-3b$$

所以 $a+3b=1$，　所以 $a=1,b=0$.

利用求导公式计算，可得

$$f'(x)=\begin{cases}e^x-\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\ge0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}[e^x-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}]=1-\lim_{x\to0^-}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to0^-}\frac{x\sin x}{2x}=1=f'(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x^2}=1=f'(0)$$

所以导函数 $f'(x)$ 在 x=0 连续.

7．证明：方程 $x^n+x^{n-1}+...+x^2+x=1$ (n 是大于等于 2 的整数) 在(0,1)内必有唯一的实根 a_n，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明：设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+...+x^2+x-1$，它在[0,1]连续， $f(0)=-1$, $f(1)=n-1>0$, 根据零点定理，原方程在(0,1)内至少存在一个实根.

又 $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+...+2x+1>0$，　函数在(0,1)内单调增加，所以原方程在(0,1)内必有唯一的实根，记为 a_n.

由 $a_n{}^n+a_n{}^{n-1}+...+a_n{}^2+a_n=1$

$a_{n+1}{}^{n+1}+a_{n+1}{}^n+...+a_{n+1}{}^2+a_{n+1}=1$

可得数列$\{a_n\}$单调减少，而 $x^2+x-1=0\Rightarrow x_2=\dfrac{\sqrt5-1}{2}\Rightarrow0<x_n<\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，根据单调有界原理数列$\{a_n\}$有极限，设极限为 a.　又原方程有 $\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$，两边取极限，得 $\dfrac{a(1-0)}{1-a}=1\Rightarrow a=\dfrac12$

8．设函数 $f(x)$在$[0,1]$上可微，且 $f_+'(0)>0,\ f_-'(1)>0,\ f(0)=f(1)=0,$试证明导函数 $f'(x)$在$(0,1)$内至少有两个零点.

证明：∵ $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}>0$，

由极限的保号性知，存在δ_1(不妨设$\delta_1<\dfrac{1}{2}$)，对任意 $x\in(0,\delta_1)$，均有$\dfrac{f(x)}{x}>0$.

特别地，取 $x_1\in(0,\delta_1)$，使$\dfrac{f(x_1)}{x_1}>0$，∴得 $f(x_1)>0$；

同理，由 $f_-'(1)>0,$得 $x_1\in(1-\delta_2,1)$($\delta_2<\dfrac{1}{2}$))，

使得$\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2-1}>0$，从而得 $f(x_2)<0$；

又∵$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，∴由介值定理知，至少有一点$\xi\in[x_1,x_2]$使得 $f(\xi)=A$;

∵$f(x)$在$[0,\xi],[\xi,1]$上连续，在$(0,\xi),(\xi,1)$内可导，且 $f(0)=f(\xi)=f(1)=0$，

∴由罗尔中值定理知，至少有一点$\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,1)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，结论成立.