

四川大学期末考试试卷 (A 卷)

(2015—2016 年第一学期)

科目: 微积分 (I) -1 课程号: 201138040 考试时间: 120 分钟

注: 请将答案写在答题纸规定的方框内, 否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分, 共 21 分)

1. 1; 2. 4; 3. (1,2); 4. $x - \arctan x + C$; 5. $\frac{\pi}{2}$; 6. 0; 7. $a \geq e$

二、计算题 (每小题 9 分, 共 45 分)

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = e$$

2. 由方程 $ye^{xy} = 1 - x$ 确定函数 $y = y(x)$, 计算 $y''(0)$.

解: 方程 $ye^{xy} = 1 - x$ 两边对 x 求导:

$$y'e^{xy} + ye^{xy}(xy' + y) = -1$$

$$(y' + xyy' + y^2)e^{xy} = -1 \quad (1)$$

令 $x = 0$, 由原方程得 $y(0) = 1$, 代入上式, 得到 $y'(0) = -2$

(1)式两边再对 x 求导:

$$(y'' + yy' + xy'^2 + xyy'' + 2yy')e^{xy} + (y' + xyy' + y^2)e^{xy}(xy' + y) = 0$$

将 $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ 代入上式, 得到: $y''(0) = 7$

3. 计算不定积分 $\int \ln(1 + \sqrt{x}) dx$.

解: 令 $t = \ln(1 + \sqrt{x}) \rightarrow x = (e^t - 1)^2 \rightarrow dx = 2(e^t - 1)e^t dt$

$$\int \ln(1 + \sqrt{x}) dx = 2 \int t(e^{2t} - e^t) dt = 2 \int t d\left(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t\right)$$

$$= 2t\left(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t\right) - 2 \int \left(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t\right) dt = t(e^{2t} - 2e^t) - \int (e^{2t} - 2e^t) dt$$

$$= t(e^{2t} - 2e^t) - (\frac{1}{2}e^{2t} - 2e^t) + C = (t - \frac{1}{2})e^{2t} + 2(1-t)e^t + C$$

$$= [\ln(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2}](1 + \sqrt{x})^2 + 2[1 - \ln(1 + \sqrt{x})](1 + \sqrt{x}) + C$$

4. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - 1 \end{aligned}$$

5. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的所有渐近线.

解: (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow \infty$, 所以 $x = 0$ (y 轴) 是函数的垂直渐近线;

(2) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 所以 $y = 0$ (x 轴) 是函数的水平渐近线;

(3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{e^x} = 0$$

所以 $y = x$ 是函数的斜渐近线.

三、解答题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$ 的

收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{2n-1} dx = 2 \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \right) dx \\ &= 2 \int_0^x \frac{x}{1-x^2} dx = - \int_0^x \frac{1}{1-x^2} d(1-x^2) = -\ln(1-x^2) \end{aligned}$$

2. 已知曲线 $y = x^2$ 与 $y = ax$ ($0 < a < 1$) 所围成图形的面积为 S_1 , 曲线 $y = x^2$, $y = ax$ 与 $x = 1$ 所围成图形的面积为 S_2 , 确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出 $S_1 + S_2$ 的最小值.

解: (1) 曲线 $y = x^2$ 与 $y = ax$ 所围成图形的面积为 S_1

$$S_1 = \int_0^a (ax - x^2) dx = \left(\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{1}{6} a^3$$

(2) 曲线 $y = x^2$, $y = ax$ 与 $x = 1$ 所围成图形的面积为 S_2

$$S_2 = \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} ax^2 \right) \Big|_a^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} a^3$$

$$\text{所以 } T = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} a^3$$

(3) 求最大值: 两边对 a 求导数: $T' = -\frac{1}{2} + a^2 = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0 < a < 1)$

由于 $T'' = 2a \Big|_{a=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} > 0$, T 在 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极小值, 由于只有一个极小值, 故为最小值, 这

$$\text{时 } (S_1 + S_2)_{\max} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}.$$

四、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛.

证明: 根据不等式 $\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} (a_n^2 + \frac{1}{n^2})$,

由已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f''(\xi) + 2f'(\xi) = 0$.

证明: 由已知 $f(0) = f(1) = 0$, 根据罗尔定理, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta) = 0$.

令 $\varphi(x) = x^2 f'(x)$, 根据条件有 $\varphi(0) = \varphi(\eta) = 0$, 再利用罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\text{即 } \xi^2 f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) = 0 \quad \text{或} \quad \xi f''(\xi) + 2f'(\xi) = 0$$