$\frac{0}{0}$型不定式.

①定理1:
- Ⅰ. 当$x\to a$时, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$.
- Ⅱ. $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导, 且$F'(x)\neq 0$.
- Ⅲ. $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

若$x\to a$换为$x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$条件Ⅱ作相应修改.

定理1仍然存在.

②定理2:
- Ⅰ. 当$x\to\infty$时, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$.
- Ⅱ. 当$|x|>N$时, $f'(x)$与$F'(x)$存在, 且$F'(x)\neq 0$.
- Ⅲ. $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

Eg. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot -\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在!

不能用洛必达!

而实际上: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$.

实际上有极限!

$\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在 $\not\Rightarrow$ $\lim \frac{f(x)}{F(x)}$不存在! 只能说明洛必达法则不能用!

Eg. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-e^{2x}}{x^8-\ln x+3e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{e^{2x}}-1}{\frac{x^8}{e^{2x}}-\frac{\ln x}{e^{2x}}+3}=-\dfrac{1}{3}.$

0.　　0.

⇒ 计算更简便.

③ 若 $\lim f(x)=A\neq 0.$

则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot\lim g(x).$

- I. 若 $\lim g(x)$ 存在. 此式成立.
- II. 若 $\lim g(x)$ 不存在. 则 $\lim f(x)\cdot g(x)$ 也不存在.

④ 其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0 \Rightarrow g(x)\cdot\ln f(x).$

$\infty-\infty \xrightarrow{\text{通分}} \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty} \xleftarrow{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow{\text{取对数}} 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

Eg: $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{1}{n}x^n\right)=0.$

⇒ $0\cdot\infty$ 型

令 $x=\dfrac{1}{t}$

Eg: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+t^3}-\sqrt[3]{1+2t+t^3}}{t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{t^2}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}}-\frac{2+3t^2}{3(1+2t+t^3)^{\frac{2}{3}}}}{1}=-\dfrac{2}{3}.$

⇒ $\infty-\infty$ 型

通分,造一个分母!

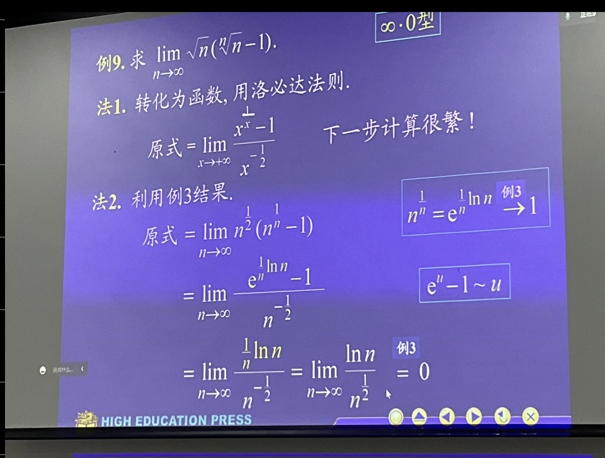
Eg. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}$

⇒ $\infty-\infty$型 通分.　　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0.$

Eg. $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=1$

⇒ 0^0型 搬到e的指数.

$n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=1.$



$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n=0$

故 $e^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\frac{1}{n}\ln n.$