任课教师：

微积分一（2）期中考试试卷参考答案

一、 1. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$， 2. $\frac{3xdx+ydy-zdz}{\sqrt{3x^2+y^2-z^2}}$， 3. $4\sqrt{2}$， 4. $\frac{4}{3}\pi a^3$， 5，$\underline{2}$.

二、1.（B ），2. （C）,3.（D）, 4.(C) 5. (A).

三、 解 1. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'\left(x^2-y^2,\ xy\right)+yf_2'\left(x^2-y^2,\ xy\right)$ (5 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-4xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'\left(x^2-y^2,\ xy\right) \text{ (11 分)}$$

2. 解 由 $\begin{cases} x+y+z^2=3 \\ y-z^2=-1 \end{cases}$ 得曲线的参数方程 $\begin{cases} x=4-2z^2 \\ y=-1+z^2 \\ z=z \end{cases}$（4 分），切线的方向为

$(-4z,2z,1)_{z=1}=(-4,2,1)$ （7 分），切线方程为 $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{2}=z-1$（10 分）.

解法 2 方程组对 x 求导，解出 $y'=-\frac{1}{2}, z'=-\frac{1}{4}$，切线的方向为 $(1,y',z')=$

$(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$（7 分），切线的方程 $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{4}}$ （10 分）.

3. 解 用极坐标计算，$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r+r\sin\theta)rdr$，（6 分）

（其中积分限,面积元素各 2 分）$=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}(1+\overset{\sin\theta}{\cos\theta})d\theta=\frac{16}{3}\pi$ （10 分）.

四、(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\overset{\substack{x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta}}{=}\lim\limits_{r\to0}(2r\cos\theta\sin^2\theta)=0=f(0,0)$（3 分），

故 $f(x,y)$ 在（0，0）点连续(6 分)；

（2）解 $f(x,y)$ 在（0，0）点的偏导数用定义，

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$， （3 分）在其他点用公式，

$$f_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)2y^2-2xy^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ （3 分）.}$$

线

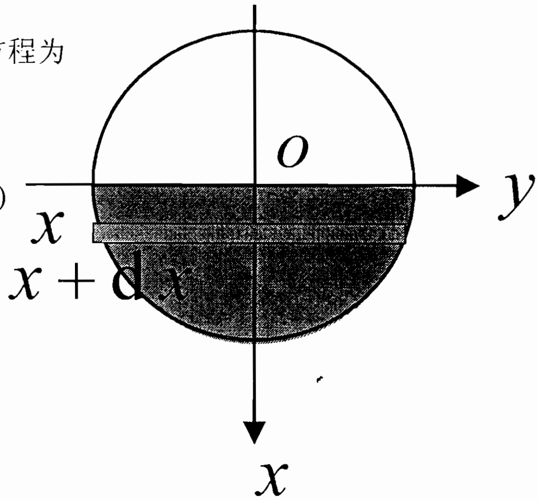
线

订

装

五、应用题（1）解：建立坐标系如图. 半圆的方程为

$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\qquad (0\le x\le R)$



x处小矩形条侧压力元素$dP=2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}dx$(5分)

$P=\int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}dx=\dfrac{2g\rho}{3}R^3$

(10分)

（2）用球面坐标，$dm=\rho dv=zdv$，$m=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$

$=2\pi[\frac{1}{2}\sin^2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot[\frac{r^4}{4}]_0^1=\frac{\pi}{4}$。被积表达式 2 分，定限 4 分，积分 4 分，共 10 分.

六、证明：$d(x,y,x_1,y_1)=|\overrightarrow{MM_1}|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$（2 分），则问题等价于求 $d^2(x,y,x_1,y_1)$在$f(x,y)=0, g(x_1,y_1)=0$时的条件极值.作拉格朗日函数

$$L=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda f(x,y)+\mu g(x_1,y_1)\text{（4 分）}$$

令
$$\begin{cases}L_x\equiv 2(x-x_1)+\lambda f_1(x,y)=0\\ L_y\equiv 2(y-y_1)+\lambda f_2(x,y)=0\\ L_{x_1}\equiv 2(x_1-x)+\mu g_1(x_1,y_1)=0\\ L_{y_1}\equiv 2(y_1-y)+\mu g_2(x_1,y_1)=0\\ f(x,y)=0\\ g(x_1,y_1)=0\end{cases}\qquad\text{（6 分）}$$

由前四个方程可得 $\dfrac{x-x_1}{y-y_1}=\dfrac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)}=\dfrac{g_1'(x_1,y_1)}{g_2'(x_1,y_1)}$.（8 分）