① 特殊的二阶微分方程.

I. $y''=f(x,y')$ 型. (两个 y)

Eg. $y''=1+y'^2$. $\boxed{令\ y'=p(x),\quad y''=p'(x).}$

即 $p'=1+p^2 \Rightarrow \dfrac{dp}{1+p^2}=dx$

$\Rightarrow \arctan p = x+C_1$

$\Rightarrow y'=p=\tan(x+C_1)$.

$\Rightarrow y=\int \tan(x+C_1)\,dx = -\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$.

II. $y''=f(y,y')$ 型. (三个 y)

Eg. $yy''+y'^2=0$. $\boxed{令\ y'=p(y).\quad y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}p}$

即 $y\dfrac{dp}{dy}p+p^2=0 \Rightarrow \dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dy}{y}$

$\Rightarrow \ln|p|=-\ln|y\frac{1}{C_1}|$

$\Rightarrow p=C_1\frac{1}{y}$.

故 $y\,dy=C_1dx$

$\Rightarrow y^2=2(C_1x+C_2)$.