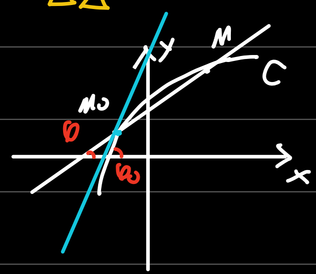
① 切线的定义：

设曲线C，在M_0外另取C上一点M，作割线M_0M，当M沿曲线C趋于点M时，若M_0M绕点M_0旋转而趋向于唯一的直线M_0T，

称M_0T为曲线C在点M_0处的切线.



切线斜率：$k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

② 导数的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在x_0的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $y=f(x)$在x_0处可导；并把这个极限称为$y=f(x)$在x_0处的导数.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

也可记为 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

也可写作 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ / $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

⇒ PS:

$f'(x_0)$存在 $\xrightarrow{\text{充分条件}}$ $y=f(x)$在$x=x_0$处切线存在.

只是一个记号，表明特殊情况.

曲线切线可⊥x轴，$f'(x_0)\to\infty$

（$y=x^{\frac{1}{3}}$在(0,0)不可导，切线为y轴）.

$y=f(x_0)$在x_0处可导 $\xrightarrow{\text{充分条件}}$ $y=f(x)$在x_0处连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0^{\frac{1}{3}}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^{\frac{2}{3}})}=\infty$$

故不可导.

可导一定连续；连续不一定可导.

已知 $\lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$. $\lim\Delta y=\lim\left(\Delta x\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim\Delta x\cdot A=0$.

即 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 函数连续. $\longrightarrow$ 连续的定义!!!!!

③ 基本初等函数求导公式.

I. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

$(\text{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}$.

III. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

$(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$.

IV. $(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$.

$(\csc x)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$.

④ 导数的几何意义.

$y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处可导，其切线斜率为 $f'(x_0)$.

切线 l: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线 l: $y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

Eg. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1+x)}{2x}=-1$. 且 $f'(x)$ 存在. 求 $f'(1)$.

解: $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{f(1)-f(1-x)}{-x}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{-x}=-1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{-x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{-x}=-2$. 即 $f'(1)=-2$.

☆ Eg. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

即证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在. 此处 $f(0)$ 未知, 找 $f(0)$. 析:

① $f(0)$? $\Rightarrow$ $x=0$ 处连续 $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在. 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

$\downarrow$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. ②

$f(x)=\dfrac{f(x)}{x}\cdot x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 运用条件! ③

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在. ④

证明完毕.

导数的四则运算.

若 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 在 x 处可导.

1). $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$

2). $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

3). $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x) \neq 0)$

Eg. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续. 求 $f'(a)$

错解: $f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$. $f'(a)=\varphi(a)$ X X X.

四则运算: $x-a$、$\varphi(x)$ 可导! $\boxed{\varphi(x)\text{连续, 但不一定可导!!}}$

$\Rightarrow$ 正解(定义运算): $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$

Eg. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$ 求 $f'(0)$.

法一: 导数定义: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)}{\cancel{x}}=(-99)!$

法二：四则运算： $f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+x[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$.

$f'(0)=(-1)\times(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-99)+0=(-99)!$

Eg. 求 $(x^x)'$ $(x>0)$.

$y=x^x=e^{x\ln x}$

外：$y=e^u$，内：$u=x\ln x$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^u(\ln x+1)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$.

⇒ 反函数与导数

如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内严格单调，对每一个 y 均可导且 $f'(y)\neq0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x\mid x=f(y), y\in I_y\}$ 内对每一个 x 均可导，且 $(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}$.

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

若 $f(4)=5$ 已知点 $(4,5)$

$f'(4)=2$. $\Rightarrow {f^{-1}}'(5)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{2}$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\cot' y} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Eg.

求 $y = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$ 的导数.

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+1+x^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x + \frac{1}{4}\left\{\left[\ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\right]' - \left[\ln\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]'\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x}{2+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\sqrt{1+x^2}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{2+x^2} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)}_{\frac{-2}{x^2}}}_{-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}\,x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x}{2+x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{-2}{(2+x^2)x}$$

$$= \frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}} .$$