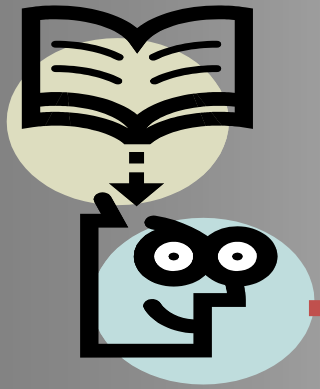
四川大學
SICHUAN UNIVERSITY

第六章 二次型

第一节 二次型的基本概念



xuexue_zhou@scu.edu.cn

本节主要内容

一、二次型及其标准型的概念

二、二次型的矩阵表示方法

三、化二次型为标准型

一、二次型及其标准形的概念

二次型的定义

含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型。

注：只含有平方项的二次型

$$f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$$

称为二次型的标准形（或法式）。

二、二次型的矩阵表示方法

对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取$a_{ji}=a_{ij}$，则

$$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i,$$

于是

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$
\begin{aligned}
f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
& + \cdots \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
= {} & (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$= \boldsymbol{X^T A X}$，其中$\boldsymbol{A = A^T}$.

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}，其中\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$$

在二次型的矩阵表示中，

- 任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；
- 反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型。

这样，**二次型**与**对称矩阵**之间存在**一一对应**的关系。

对称矩阵A叫做二次型f的矩阵；

f叫做对称矩阵A的二次型；

对称矩阵A的秩叫做二次型f的秩。

例1. 求三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

的秩。

解： $a_{11}=1,\ a_{22}=0,\ a_{33}=1,$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{2+0}{2},a_{13}=a_{31}=\frac{-2+0}{2},a_{23}=a_{32}=\frac{0+0}{2},$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3.$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)$的秩为3.

三、化二次型为标准型

对于二次型，我们讨论的主要问题是：

寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形。

设

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记$C = (c_{ij})$, 若C可逆，则上述关系称为可逆线性变换。

可记作$X = CY$，其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$X=CY$，将其代入 $f=X^TAX$,有

$$f=X^TAX=(CY)^TA(CY)=Y^T\left(C^TAC\right)Y.$$

定理1 对二次型$f=X^TAX$，$\left(A^T=A\right)$作可逆线性变换$X=CY$，则化成新变量下的二次型$g=Y^TBY$，其中$B=C^TAC$,且B是二次型g 的矩阵。

证明： $\because A=A^T B=C^TAC$

$\therefore B^T=\left(C^TAC\right)^T=C^TA^TC=B$

即B为对称矩阵。

又 $\because A\neq O$,且$A\cong B$

$\therefore B\neq O$

$\therefore B$是二次型g 的矩阵。

说明:

1. 二次型经可逆变换$X=CY$后,其秩不变,但f的矩阵由A变为$B=C^TAC$。

2. 要使二次型f经可逆变换$X=CY$变成标准形,就是要使

$$Y^TC^TACY=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使C^TAC成为对角矩阵。

定理1

对二次型$f = X^T AX$，$(A^T = A)$作可逆线性变换$X = CY$，则化成新变量下的二次型$g = Y^T BY$，其中$B = C^T AC$，且B是二次型g 的矩阵。

合同的定义

设A,B为n阶方阵，若存在可逆阵C，使得

$$B = C^T AC$$

则称A与B合同，记为$A \simeq B$。

注：要使二次型$f = X^T AX$经可逆变换$X = CY$变成标准形，就是要使

$$A \simeq diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$$