线性代数
Linear Algebra

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

第三章 行列式

第二节 行列式的主要性质(1)

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、行列式的性质

二、初等行变换对方阵行列式的作用

三、行列式展开定理

一、行列式的性质

性质1 设A为n阶方阵,则$\left|A^T\right|=\left|A\right|$.

证明: 一阶方阵是对称的,则$\left|A^T\right|=\left|A\right|$.

假设结论对k阶方阵都成立.

对$k+1$阶方阵A, 按第一行展开.

$$\left|A\right|=\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

其中M_{1j}为元素a_{1j}的余子式, 为k阶方阵的行列式.

据归纳假设, $M_{1j}^T=M_{1j}$.

$$\left|A\right|=\sum_{j=1}^{k+1}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}^T=\left|A^T\right|.$$

性质1　设A为n阶方阵,则$\left|A^T\right| = |A|$.

证明：

设$A^T = (b_{ij})_{n\times n}$，$A = (a_{ij})_{n\times n}$，即$b_{ij} = a_{ji}\left(i, j = 1,2,\cdots,n\right)$,

$$\left|A^T\right| = \sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} = \sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式$|A|$可表示为 $|A| = \sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$

所以有$\left|A^T\right| = |A|$。

说明　行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots(a_{p_i i}+a'_{p_i i})\cdots a_{p_n n}$$

$$=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_i i}\cdots a_{p_n n}+\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a'_{p_i i}\cdots a_{p_n n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3 行列式交换两行，行列式反号。

证明：

设A为二阶方阵, 且对换变换的初等阵$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$|PA|=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-|A|=|P||A|$$

假设该结论对n-1阶行列式成立，则当A是n阶行列式时：

第i行

第j行

$$\left|P(i,j)A\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} & \cdots & \\ a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(n-1)} \\ & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} & \cdots & \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \end{vmatrix} + \cdots + (-1)a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(n-1)} \\ & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + \cdots + (-1)a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n} = -\left(a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}\right) = -\left|A\right|$$

性质3　行列式交换两行，行列式反号。

证明：

设行列式
$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

是由行列式 $D=|A|=det(a_{ij})$ 变换i,j两行得到的，

即当$k\neq i,j$时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$时， $b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，

于是 $D_1=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=-\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

行运算/对换变换

特别地，用$\mathbf{P}(i,j)$表示初等对换矩阵，则

$$|P(i,j)| = |P(i,j)E| = -|E| = -1$$

所以，对任意对换变换对应的初等阵P，

$$|PA| = -|A| = |P||A|$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有 $D = -D$,

$$\therefore \quad D = 0.$$

性质4

行列式的某一行中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

证明：设$P(i(k))$为单位阵的第i行乘以一非零常数k得到的初等阵.

将$|PA|$按第i行展开, 则

$$|PA| = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$
$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$
$$= k|A|$$

特别地，$|P(i(k))| = |P(i(k))E| = k|E| = k$

行运算*II*数乘变换

对任意数乘变换对应的初等阵P，$|PA| = k|A| = |P||A|$.

推论1 行列式的某一行（列）中所有元素为零，则该行列式等于零.

推论2 设A为n阶方阵，k为数，则 $\left|k\mathbf{A}\right| = k^n \left|\mathbf{A}\right|$.

$$\left| k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质6

把行列式的某一行的各元素乘以同一数然后加到另一行对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \xleftarrow{k\times} & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj}
\end{vmatrix}
$$

证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

注意到初等倍加矩阵$P(i,j(k))$为三角形的,其主对角线上元为 1.

$$\therefore \left|P(i,j(k))\right|=1$$

$\therefore$ 对任意倍加变换对应的初等阵P, $|PA|=|A|=|P||A|$

二、初等行变换对方阵行列式的作用

对任意初等变换对应的初等阵P, $|PA|=|P||A|$

其中$|P|=\begin{cases} -1 & P\text{为对换变换初等阵} \\ k\neq 0 & P\text{为数乘变换初等阵} \\ 1 & P\text{为倍加变换初等阵} \end{cases}$

小结

一、行列式的性质

性质1 设A为n阶方阵,则$\left|A^T\right| = |A|$.

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

即 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则D等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3 行列式交换两行(列)，行列式反号。

推论1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质4 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

推论1 行列式的某一行（列）中所有元素为零，则该行列式等于零.

推论2 设A为n阶方阵，k为数，则 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$.

性质5 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质6 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变.

三、行列式按行（列）展开定理(完整版)

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \underline{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 i 行展开

或 $$D = \underline{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 j 列展开

推论 行列式D中，某一行（列）元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为零。

即当 $i \neq j$ $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots a_{in}A_{jn} = 0$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证　把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $i\neq j$ 时，$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad (i\neq j).$

行列式按行（列）展开定理(完整版)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D\,,\text{当 } i = j, \\ 0\,,\text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D\,,\text{当 } i = j, \\ 0\,,\text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,,\text{当 } i = j, \\ 0\,,\text{当 } i \neq j. \end{cases}$

课堂练习

$$设\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\4&5&2&3\end{bmatrix}$$

请将

1. $\boldsymbol{M}_{31}-2\boldsymbol{M}_{32}+3\boldsymbol{M}_{33}-4\boldsymbol{M}_{34}$
2. $2\mathrm{M}_{13}-3\boldsymbol{M}_{23}+\boldsymbol{M}_{33}-5\boldsymbol{M}_{43}$
3. $\boldsymbol{A}_{21}+2\boldsymbol{A}_{22}+3\boldsymbol{A}_{23}+4\boldsymbol{A}_{24}$

分别用四阶行列式表示，并求值.

单选题

设$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\4&5&2&3\end{bmatrix}$ 请将 $-2M_{41}+3M_{42}-4M_{43}+5M_{44}$ 表示成一个四阶行列式。

A $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\-2&3&-4&5\end{vmatrix}$

B $\begin{vmatrix}1&2&3&-2\\2&3&4&3\\3&1&4&-4\\2&3&4&5\end{vmatrix}$

C $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\2&-3&4&-5\end{vmatrix}$

D $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\2&3&4&5\end{vmatrix}$

单选题

已知某4阶行列式的第2行元素依次是$2, -1, m, 6$，第3行元素的余子式的值依次是$3, 9, -3, -1$，则$m =$ ______

A　3

B　-3

C　7

D　-7

小结

一、行列式的性质

性质1　设A为n阶方阵,则$\left|A^T\right| = |A|$.

说明　行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

即 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则D等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3 行列式交换两行(列)，行列式反号。

推论1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质4 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

推论1 行列式的某一行（列）中所有元素为零，则该行列式等于零.

推论2 设A为n阶方阵，k为数，则 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$.

性质5 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质6 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变.

二、初等行变换对方阵行列式的作用

对任意初等变换对应的初等阵P，$|PA|=|P||A|$

$$\text{其中}|P|=\begin{cases}-1 & P\text{为对换变换初等阵}\\ k\neq 0 & P\text{为数乘变换初等阵}\\ 1 & P\text{为倍加变换初等阵}\end{cases}$$

三、行列式按行（列）展开定理(完整版)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D\text{，当 } i = j, \\ 0\text{，当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D\text{，当 } i = j, \\ 0\text{，当 } i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\text{，当 } i = j, \\ 0\text{，当 } i \neq j. \end{cases}$