一、**1.** $\frac{7}{3}$. **2.** 4.

3. $a=-5$，$b=-7$（注：若 a,b 中只写对了一个，则仅给一分）

4. $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{9}x^2$. **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$.

二、**1** D **2** B **3** B **4** C **5** A

三、**1.** 方程两端对 x 求导得：

$$\mathrm{e}^{x^2}+y'\sin y^2-\sin(x+y)\cdot(1+y')=0. \qquad（4 分）$$

整理得：$\mathrm{e}^{x^2}-\sin(x+y)+\big(\sin y^2-\sin(x+y)\big)y'=0$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin(x+y)-\mathrm{e}^{x^2}}{\sin y^2-\sin(x+y)}. \qquad（4 分）$$

2. 首先求一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^y f_1'+y\cos xf_2'$，（2 分）$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^y f_1'+\sin xf_2'$.（2 分）其次求二阶偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\big(\mathrm{e}^y f_1'+y\cos xf_2'\big)=\mathrm{e}^y f_1'+\mathrm{e}^y\cdot\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\cos xf_2'+y\cos x\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial y}\\&=\mathrm{e}^y f_1'+\cos xf_2'+\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y f_{11}''+\sin xf_{12}'')+y\cos x(x\mathrm{e}^y f_{21}''+\sin xf_{22}'')\\&=\mathrm{e}^y f_1'+\cos xf_2'+x\mathrm{e}^{2y}f_{11}''+\mathrm{e}^y(\sin x+xy\cos x)f_{12}''+y\sin x\cos xf_{22}''. \qquad（4 分）\end{aligned}$$

3. 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r+2=0$；它有两个不相等的实根：$r_1=1$，$r_2=2$. 又因 2 是特征方程的单根，0 不是特征方程的根。于是可设非齐次方程的一个特解为：

$$y=x(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}+mx+n.$$

代入原方程比较系数得：

$$3a=3,\quad 6a+2b=0,\quad 2b+c=0,\quad 2m=2,\quad 2n-3m=-1.$$

即 $a=1$，$b=-3$，$c=6$，$m=1$，$n=1$. 于是原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x(x^2-3x+6)\mathrm{e}^{2x}+x+1.$$

评分标准：齐次方程通解 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 算对给 3 分；非齐次特解 $y_1^*=x(x^2-3x+6)\mathrm{e}^{2x}$ 算对给 3 分；非齐次特解 $y_2^*=x+1$ 算对给 2 分。

4. 用直线 $y=2x$ 把 D 分成两块；上面一块记为 D_1，下面的记为 D_2.（1 分）因 D_1 关于 y 轴对称，而 $xyf(\cos x+\cos y)$ 是 x 的奇函数；所以 $\iint\limits_{D_1}xyf(\cos x+$

$\cos y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$.（2 分）因 D_2 关于 x 轴对称，而 $xyf(\cos x + \cos y)$ 是 y 的奇函数；所以 $\iint\limits_{D_2} xyf(\cos x + \cos y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$.（2 分）即 $\iint\limits_{D} xyf(\cos x + \cos y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D} x\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D} xyf(\cos x + \cos y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} x\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-2x}^{2} x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} x(2+2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x^2 + \frac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \quad \text{（3 分）}
\end{aligned}
$$

注：对于 $xyf(\cos x + \cos y)$ 的积分计算，必须说明具体的对称性和奇偶性才能给分，直接写等于零（没有过程）不给分。

四、**1.** $y' = \mathrm{e}^x$. 于是长度为 $s = \int_{\frac{1}{2}\ln 3}^{\frac{3}{2}\ln 2} \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.（3 分）令 $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$，则 $x = \frac{1}{2}\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2-1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$. 代入得：

$$
\begin{aligned}
s &= \int_2^3 t\cdot\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \Big(1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[t + \frac{1}{2}\big(\ln(t-1) - \ln(t+1)\big)\Big]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2. \quad \text{（5 分）}
\end{aligned}
$$

2. 令 $u = x^2 + xy + \frac{13}{2}y^2$，则 $f = (x+3y)\mathrm{e}^{-u}$. 于是

$$
f'_x = \mathrm{e}^{-u} - (x+3y)(2x+y)\mathrm{e}^{-u}, \qquad f'_y = 3\mathrm{e}^{-u} - (x+3y)(x+13y)\mathrm{e}^{-u}. \tag{1}
$$

令 $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} (x+3y)(2x+y) = 1, \\ (x+3y)(x+13y) = 3. \end{cases}$ 两式相除得：$\dfrac{2x+y}{x+13y} = \dfrac{1}{3}$，即 $x = 2y$. 代入第一个等式得：$25y^2 = 1$. 于是 $(x,y) = \big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big)$. 而 $u\big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big) = \frac{1}{2}$，$f\big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big) = \pm\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.（4 分）

另一方面，由 (1) 得：$f'_x = \mathrm{e}^{-u} - (2x+y)f$，$f'_y = 3\mathrm{e}^{-u} - (x+13y)f$. 于是

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= -(2x+y)\mathrm{e}^{-u} - 2f - (2x+y)f'_x, \\
f''_{xy} &= -(x+13y)\mathrm{e}^{-u} - f - (2x+y)f'_y, \\
f''_{yy} &= -3(x+13y)\mathrm{e}^{-u} - 13f - (x+13y)f'_y.
\end{aligned}
$$

于是 $A := f''_{xx}\big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big) = \mp 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$B := f''_{xy}\big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big) = \mp 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$C := f''_{yy}\big(\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\big) = \mp 22\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 即 $AC - B^2 = 62\mathrm{e}^{-1} > 0$. 由此可知 f 在 $\big(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\big)$ 处取极大值 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；在 $\big(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\big)$ 处取极小值 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.（4 分）

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^{2n-1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-x^2)^n$ 的收敛区间为：$|-x^2| < R$，即 $(-\sqrt{R}, \sqrt{R})$；于是此级数的收敛半径为 $\sqrt{R}$.（4 分）由“逐项可积不改变收敛半径”

知，幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^n a_n t^{2n-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{2n}x^{2n}$$

的收敛半径也为 $\sqrt{R}$. 于是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}x^{2n-1}=\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$.（4 分）

注：用比值审敛或根值审敛的都算错（因对应的极限不一定存在!），但可根据情况给予 2-4 分。

五、 **1.** (1) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=0\,.$$

(2) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}\,.$$

两极限不相等，所以二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在。即函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不连续。

2. 将积分区域记为 D_t，并记 $a:=f'_x(0,0)$，$b:=f'_y(0,0)$. 由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微知：$f(x,y)=ax+by+g(x,y)$，其中 $g(x,y)=o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$.（2 分）于是

$$\frac{1}{t^3}\iint\limits_{D_t}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{t^3}\iint\limits_{D_t}(ax+by)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{t^3}\iint\limits_{D_t}g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^3}\iint\limits_{D_t}(ax+by)\,\mathrm{d}\sigma&=\frac{1}{t^3}\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t(ax+by)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{t^3}\int_0^t\big(atx+\tfrac{1}{2}bt^2\big)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\quad\text{（2 分）}\end{aligned}\tag{2}$$

另一方面，由二重积分的中值定理知：$\iint\limits_{D_t}g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=t^2g(\xi,\eta)$，其中 (ξ,η) 位于 D_t 内。（2 分）于是

$$\frac{1}{t^3}\iint\limits_{D_t}g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{t}g(\xi,\eta)=\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\cdot\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{t}\,.$$

而 $\left|\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{t}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}t}{t} = \sqrt{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{t}$ 有界。又因 $g(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$，所以 $\dfrac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \to 0$. 由“有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小”知：

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^3} \iint\limits_{D_t} g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0\,. \tag{3}$$

于是由 (2) 和 (3) 可知命题成立。（1 分）