线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第三章 行列式

第一节 方阵的行列式

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、余子式和代数余子式

二、n阶行列式的定义（二）

三、行列式展开定理

n 阶行列式的定义（一）

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.

n 阶行列式的定义说明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

1、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

2、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

3、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$.

n 阶行列式的定义等价形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

等价形式1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_1p_1}a_{q_2p_2}\cdots a_{q_np_n}.$$

等价形式2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

二、三阶行列式的特点

二阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\left|a_{22}\right| - a_{12}\left|a_{21}\right|$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}\left|a_{22}\right| + a_{12}(-1)^{1+2}\left|a_{21}\right|$$

二阶行列式的特点：二阶行列式可用一阶行列式表示.

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的特点：三阶行列式可用二阶行列式表示.

余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一代数余子式.

一个元素的余子式及代数余子式与该元素的大小没有关系，只与该元素的位置有关系.

练习

$$\text{设}\quad D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

求出第二列各个元素的代数余子式

解

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-(-4\times 5-2\times 4)=28$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-12$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}=4$$

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

三阶行列式

行列式按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

n阶行列式按第一行进行展开

把n!项按照含a_{11}、…、a_{1n}进行分类

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\,.}$$

$$=(-1)^0a_{11}M_{11}+(-1)^1a_{12}M_{12}$$

$$+(-1)^2a_{13}M_{13}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+3}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

二、n 阶行列式的定义（二）

一个 n阶方阵A的行列式, 记为$|A|$，是一个与A对应的数量， 它可如下递归定义：

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{当} n = 1\text{时} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当} n > 1\text{时} \end{cases}$$

其中$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为$A$的元素$a_{ij}$对应的代数余子式.

……行列式按第一行展开

定理3.1.1　行列式展开定理

设A为n阶方阵,$n\geq 2$,则A的行列式可以按照任意行或列展开

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

行列式按行（列）展开定理

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \underline{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 i 行展开

或 $$D = \underline{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 j 列展开

行列式展开定理重要意义在于：n阶行列式可将为低阶行列式来计算其值。

计算行列式的常用方法之一 ------- “降阶法”

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+5}\, 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + (-2) r_1} -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

小结

n 阶行列式的定义（二）

一个 n阶方阵A的行列式, 记为$|A|$，是一个与A对应的数量， 它可如下递归定义:

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{当}n = 1\text{时} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当}n > 1\text{时} \end{cases}$$

其中$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为$A$的元素$a_{ij}$对应的代数余子式.

……行列式按第一行展开

行列式按行（列）展开定理

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \underline{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 i 行展开

或 $$D = \underline{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

行列式D按第 j 列展开