2014-2015 年第一学期微积分 I 期末试题 A 参考答案

一、求极限（本题共 12 分，每小题 6 分）

1. **解** $n\cdot\dfrac{2n}{5n^2+n\ln 2}<\dfrac{2n}{5n^2+\ln 2}+\dfrac{2n}{5n^2+2\ln 2}+\cdots+\dfrac{2n}{5n^2+n\ln 2}<n\cdot\dfrac{2n}{5n^2+\ln 2}$．（2 分）

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{2n}{5n^2+n\ln 2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{5n^2+n\ln 2}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{2}{5+\dfrac{\ln 2}{n}}=\dfrac{2}{5}$，

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2n}{5n^2+\ln 2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{5n^2+\ln 2}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2}{5+\dfrac{\ln 2}{n^2}}=\frac{2}{5},$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{5n^2+\ln 2}+\dfrac{2n}{5n^2+2\ln 2}+\cdots+\dfrac{2n}{5n^2+n\ln 2}\right)=\dfrac{2}{5}$．（6 分）

2. **解** 由洛必达法则及等价无穷小替换可得

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\csc x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\csc x)}{\ln x}}$（2 分）$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x\csc x\cot x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{x\cos x}{\sin x}}=e^{-1}$．（6 分）

二、求导数与微分（本题共 12 分，每小题 6 分）

1. **解** $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+4\ln|2-x|-5\ln|x+7|$，（2 分）

两边对 x 求导得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+7}$，

故有 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}(2-x)^4}{(x+7)^5}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+7}\right)$

所以 $\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}(2-x)^4}{(x+7)^5}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+7}\right)\mathrm{d}x$．（6 分）

2. **解** $y'=f'[\ln(x^2+2)]\dfrac{2x}{x^2+2}=\dfrac{2xf'[\ln(x^2+2)]}{x^2+2}$（2 分）

$$y''=\frac{\{2f'[\ln(x^2+2)]+f''[\ln(x^2+2)]\dfrac{4x^2}{x^2+2}\}(x^2+2)-4x^2f'[\ln(x^2+2)]}{(x^2+2)^2}$$

$=\dfrac{(4-2x^2)f'[\ln(x^2+2)]+4x^2f''[\ln(x^2+2)]}{(x^2+2)^2}$．（6 分）

三、求积分（本题共 12 分，每小题 6 分）

1. **解** 由奇偶函数积分的性质有

$$\int_{-4}^{4}[\cos(\sqrt{|x|}-1)+x^4\sin x]\mathrm{d}x=\int_{-4}^{4}\cos(\sqrt{|x|}-1)\mathrm{d}x+\int_{-4}^{4}x^4\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^4\cos(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x.\text{（2 分）}$$

令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，当 $x=0$ 时，$t=0$，当 $x=4$ 时，$t=2$，故有

$$\int_{-4}^{4}[\cos(\sqrt{|x|}-1)+x^4\sin x]\mathrm{d}x=2\int_0^4\cos(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x=4\int_0^2 t\cos(t-1)\mathrm{d}t=4\int_0^2 t\mathrm{d}\sin(t-1)$$

$$=[4t\sin(t-1)]_0^2-4\int_0^2\sin(t-1)\mathrm{d}t=8\sin 1+[4\cos(t-1)]_0^2=8\sin 1.\text{（6 分）}$$

2. **解** $$\int\frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\sin t}\int\frac{\sin^4 t}{\cos^3 t}\cdot\cos t\mathrm{d}t\text{（2 分）}$$

$$=\int\frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\sec^2 t\mathrm{d}t-2\int\mathrm{d}t+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\tan t-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin t+C.\text{（6 分）}$$

四、（10 分）**解** $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，令 $f'(x)=0$，有 $\tan x=-1$，得 $x=n\pi-\dfrac{\pi}{4}$.（4 分）

$f''(x)=2e^x\cos x$，由于 $\cos\left(n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=(-1)^n\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以有 $f''\left(n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=(-1)^n\sqrt{2}e^{n\pi-\frac{\pi}{4}}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.（6 分）

当 $n=2k+1$ 时，$f''\left(n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，所以函数在 $x=2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi$ 处取得极大值

$f_{极大}\left(2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{3}{4}\pi}$；当 $n=2k$ 时，$f''\left(n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，所以函数在 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}$

处取得极小值 $f_{极小}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.（10 分）

五、（10 分）**解** 将曲线方程 $x^2+2xy+y^2-4x-5y+3=0$ 对 x 求导得

$2x+2y+2xy'+2yy'-4-5y'=0$，解得 $y'=\dfrac{2x+2y-4}{5-2x-2y}$.（4 分）

由于切线平行于直线 $2x+3y=0$，故其斜率 $y'=\dfrac{2x+2y-4}{5-2x-2y}=-\dfrac{2}{3}$，即有 $x+y=1$.

（6 分）

求解方程组 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-4x-5y+3=0, \\ x+y=1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$ 故得切点坐标为 $(1,0)$，切线方程为 $y-0=-\frac{2}{3}(x-1)$，整理得 $2x+3y-2=0$.（10 分）

六、**解** 令 $x-t=u$，则 $t=0$ 时，$u=x$，$t=x$ 时，$u=0$，故有

$$f(x)=-\frac{1}{8}\int_x^0 h(u)(x-u)^2\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\int_0^x h(u)(x-u)^2\mathrm{d}u$$

$$=\frac{x^2}{8}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u-\frac{x}{4}\int_0^x h(u)u\mathrm{d}u+\frac{1}{8}\int_0^x h(u)u^2\mathrm{d}u.\text{（3 分）}$$

因而 $f'(x)=\frac{x}{4}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u+\frac{x^2}{8}h(x)-\frac{1}{4}\int_0^x h(u)u\mathrm{d}u-\frac{x^2}{4}h(x)+\frac{x^2}{8}h(x)$

$$=\frac{x}{4}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int_0^x h(u)u\mathrm{d}u\text{，（6 分）}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u+\frac{x}{4}h(x)-\frac{x}{4}h(x)=\frac{1}{4}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u\text{，}\quad f'''(x)=\frac{1}{4}h(x).\text{（8 分）}$$

所以 $f''(1)=\frac{1}{4}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u=\frac{3}{4}$，$f'''(1)=\frac{1}{4}h(1)=\frac{3}{2}$.（10 分）

七、**解** （1）设切点为 $(x_0,y_0)(y_0=\ln x_0)$，则切线方程为 $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

由切线过原点 $(0,0)$，得 $y_0=1, x_0=e$，所以该切线方程为 $y=\frac{x}{e}$.（2 分）

从而图形 D 的面积为 $A=\int_0^1(e^y-ey)\mathrm{d}y=\frac{e}{2}-1$.（4 分）

（2）切线 $y=\frac{x}{e}$、x 轴与直线 $x=e$ 所围三角形绕 $x=e$ 旋转所得圆锥体体积为 $V_1=\frac{1}{3}\pi e^2$.（5 分） 而曲线 $y=\ln x$、x 轴与直线 $x=e$ 所围曲边三角形绕 $x=e$ 的旋转体体积为 $V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2\mathrm{d}y=\pi(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2})$，（9 分）

（或者 $V_2=\int_1^e 2\pi(e-x)\ln x\mathrm{d}x=\pi(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2})$.（9 分））

因此，所求旋转体体积为 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.（10 分）

八、**解** 设 $a_n=2n-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1$，所以幂级数的收敛半径 $R=1$. 由于 $x-1=\pm1$ 时级数均发散，所以幂级数的收敛区间为 $(0,2)$.（2 分）

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)(x-1)^{2n}$，则

$$S(x)=(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(x-1)^{2n-2}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(x-1)^{2n}.$$（4 分）

令 $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(x-1)^{2n}$，逐项积分可得

$$\int_1^x h(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_1^x(x-1)^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n+1}$$

$$=(x-1)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}\right]=(x-1)\left[\frac{1}{1-(x-1)^2}\right]=\frac{x-1}{2x-x^2}.$$（8 分）

从而有 $h(x)=\left(\dfrac{x-1}{2x-x^2}\right)'=\dfrac{x^2-2x+2}{(2x-x^2)^2}$，（9 分）

$$S(x)=(x-1)^2h(x)'=\frac{(x-1)^2(x^2-2x+2)}{(2x-x^2)^2}.$$（10 分）

九、证　$F(-x)=\int_0^{-x}(-x+t)f(t)\mathrm{d}t\underline{\underline{令u=-t}}-\int_0^x(-x-u)f(-u)\mathrm{d}u$

$=\int_0^x(x+u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x+t)f(-t)\mathrm{d}t$.（4 分）

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(-x)=\int_0^x(x+t)f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x+t)f(t)\mathrm{d}t=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数.（6 分）（2）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^x(x+t)f(-t)\mathrm{d}t=-\int_0^x(x+t)f(t)\mathrm{d}t=-F(x)$，所以 $F(x)$ 为奇函数.（8 分）

十、解　（1）$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1}.$$（2 分）

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$，设其前 n 项的部分和为 S_n，则

$S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$，故得 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+2}}{n}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.（3 分）

（2）在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 内 $\tan^n x\geq 0$，所以 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\geq 0$，而 $a_n+a_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$，故有

$a_n\leq\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$.（5 分）由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.（6 分）