四川大学 2015 级高等数学(I)上期半期考试试题参考答案

1.利用数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$.

证明：对任意给定的正数ε，要使$\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{7}{4(4n-1)}\right|<\varepsilon$，只要

$$n>\frac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}，\therefore 取\ N=\left[\frac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}\right],$$

则对任意给定的$\varepsilon>0$，当$n>N$时，就有$\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|<\varepsilon$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+3n}{4n-1}=\frac{3}{4}$$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq -1,0,1\\ 0, & x=\pm 1\end{cases}$，求函数 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型. 若为可去间断点，试补充或修改定义后使其为连续点.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

又因　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=1$;　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=-1$.

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类不可去间断点(跳跃间断点). $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，但是

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

$f(x)$ 在 $x=-1$ 处有定义，而且 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{2}$, 但是 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)\neq f(-1)=0$,

故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，若令 $f(-1)=1/2$, 则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$；

解：　(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{(e^x-1)\sim x}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$.

解： (2)令 $f(x)=(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}(\frac{\tan t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2t-\tan t}{2t^2\tan t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2t-\tan t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\sin t\cos t}{2t^3\cos^2t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1-\cos 2t}{6t^2}}\overset{(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}}{==}e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2t^2}{6t^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$

4．计算极限： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2})x^4+o(x^4)}{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2)))x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

5．已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geq0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数,试确定参数 a,b,c 的值.

解： $\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数　　$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

从而有 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0^-}(ax^2+bx+c)=0$　　$\therefore c=0$

又 $\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导　　$\therefore f'_+(0)=f'_-(0)$

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^2+bx}{x}=b$

$\therefore b=1$，且 $f'_+(0)=f'_-(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2ax+1, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ 1\quad, & x=0\end{cases}$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导　　$\therefore f''_{+}(0)=f''_{-}(0)$

而 $f''_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$

$f''_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{(2ax+1)-1}{x}=2a$

$\therefore 2a=-1$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$

6．求方程 $\sin y=\ln(x+y)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: 方程两边同时对 x 求导,得　$\cos y\cdot y'=\dfrac{1}{x+y}(1+y')$

解得　$y'=\dfrac{1}{(x+y)\cos y-1}$

$$\therefore y''=-\frac{(1+y')\cos y+(x+y)(-\sin y)\cdot y'}{[(x+y)\cos y-1]^2}=-\frac{(x+y)\cos^2 y-(x+y)\sin y}{[(x+y)\cos y-1]^3}$$

7．求参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{t}{2})=\frac{d}{dt}(\frac{t}{2})\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t}$$

8．求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

解: $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore\quad y^{(n)}=(\dfrac{1}{x-2})^{(n)}-(\dfrac{1}{x-1})^{(n)}$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

9．已知 $f(x),g(x)$ 可导，写出 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ 的求导公式，并证明该公式.

证明：略

10．设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0, 1)内可导，且 $f(1)=0$．求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明：构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$

根据题意 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=1\cdot f(1)=0$，

$F(0)=0\cdot f(0)=0$，从而由罗尔中值定理得：存在 $\xi\in(0,1)$，使

$F'(\xi)=f'(\xi)\xi+f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.