① $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = f[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)]$. ($\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$)

↳ 极限运算 lim 与连续函数符号 f 可交换顺序. Eg. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}$

⇒ 连续函数的复合是连续的. $= e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]}$

② 严格单调增加(或严格单调减少)的连续函数的反函数也是连续的.

③ 基本初等函数在其定义域上是连续的.

↳ 一切初等函数在有定义的区间内都是连续的.

非整个定义域!!!

复习: 连续的定义: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

↳ 条件 1) 在 x_0 处有极限

2) 在 x_0 处有定义

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eg.

求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x} \to g(x)$

定义域: $\arctan x \neq 0 \Rightarrow x\neq 0.$
$\ln(2-x) \Rightarrow x<2.$
$\Rightarrow \{x \mid x<0$ 或 $0<x<2\}$

$g(x)$ 在 $x=1$ 处有定义, $g(x)$ 为初等函数, 具有连续性.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1) = 1.$

在闭区间上连续的性质.

①有界性：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界.

②最值性：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 必定可取到最大值和最小值.

③零点定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ε，使 $f(\varepsilon)=0$.

④介值性：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，M 与 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，C 是 M、m 间任意数，(即 $m<C<M$)，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ε，使 $f(\varepsilon)=C$.

$\Rightarrow$ 幂指函数求极限.　　$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Eg. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)} = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}} = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^{6}$.

$\Rightarrow$ 利用 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ 转换，及等价无穷小的转换.

test.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}e^{\sin^2 x} = 1.$$

$\leftarrow \begin{cases} \text{连续.} \\ \text{有定义.} \end{cases}$

函数值

$$\lim_{x\to 0}(x^2+2x+5)^{\cos^2 x} = 5.$$

$\leftarrow \begin{cases} \text{连续.} \\ \text{有定义.} \end{cases}$

函数值