①定理1：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$，若函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，在$[a,+\infty)$上有界，则广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

②定理2：（比较审敛定理）设函数$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续。

1. 若$0\leq f(x)\leq g(x)$ $(a\leq x<+\infty)$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)$收敛
2. 若$0\leq g(x)\leq f(x)$ $(a\leq x<+\infty)$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)$发散

$\Rightarrow$ 大收小发。

③定理3：（比较审敛法1）设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$，

1. 若$\exists M>0$，$p>1$，使$f(x)\leq\frac{M}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。 收敛（大收）
2. 若$\exists N>0$，使$f(x)\geq\frac{N}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。 发散（小发）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}=\begin{cases}收敛 & p>1\\ 发散 & p<1\end{cases}$

x^p与$f(x)$为同阶无穷小

④定理4：（极限审敛法1）设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$，

1. 若$\exists p>1$，使$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$存在，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。
2. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$（或$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$），则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

引：$\hookrightarrow$ 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

$\hookrightarrow$ 满足本条件的广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$称为绝对收敛。

---

⑤定理5：（比较审敛法2）设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=+\infty$。

1. 若$\exists M>0$，$q<1$，使$f(x)\leq\frac{M}{(x-a)^q}$ $(a<x\leq b)$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛。
2. 若$\exists N>0$，$q\geq 1$，使$f(x)\geq\frac{N}{(x-a)^q}$ $(a<x\leq b)$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

⑥定理6：（极限审敛法2）设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，

$\lim f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\ldots$

1). 若∃ $0<q<1$，使 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)$ 存在，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

2). 若∃ $q\geq 1$，使 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=d>0$（或 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=+\infty$）则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

↳ $\lim\int_0^1 \frac{1}{x^P} = \begin{cases} \text{发散} & P\geq 1 \\ \text{收敛} & 0<P<1 \end{cases}$

定义4：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$. 称为Γ函数.

特点：1)积分区间为无穷；

2)当 $s-1<0$ 时，被积函数在 $x=0$ 的右邻域内无界.

↳ 设 $I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$，$I_2=\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$

比较审敛法2.

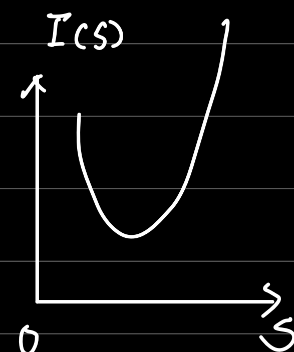
(1). 当 $s\geq 1$ 时，I_1 是常义积分；

当 $0<s<1$ 时，因为 $e^{-x}\cdot x^{s-1}=\frac{1}{x^{1-s}}\cdot\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x^{1-s}}$ 而 $1-s<0$，⇒ I_1 收敛.

(2). 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot(e^{-x}x^{s-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0$. ⇒ I_2 收敛.

极限审敛法1.

↳ $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ 对 $s>0$ 均收敛.



⇒重要性质：

1). 递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. $(s>0)$.

2). 当 $s\to+0$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty$.

3). 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ $(0<s<1)$.

4). 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 中，代换 $x=u^2$. 有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du$.

→ $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$

$\Gamma(1-s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-s}dx$

⇒ $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot x^{-1}dx$