一、【定积分的定义】

① 设 $f(x)$ 是奇函数，除在 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是否连续及奇偶性.

显然 $\varphi(0)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0} f(\xi)x=0.$ $\quad \xi\in(0,x).$

积分中值定理：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ $\quad \xi\in(a,b)$

得积分

故 $\varphi(x)$ 连续.

又 $\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{令t=-u} -\int_0^x f(-t)dt=\int_0^x f(t)dt=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$ 为偶函数.

小结：不要忘记积分中值定理.

② 求 $\varphi(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2dt$ 的导数.

令 $(x-t)=m \Rightarrow dt=-dm.$

原式 $=-\int_x^0 \sin m^2 dm=\int_0^x \sin^2 m\, dm=\sin^2 m.$

使用 $\left[\int_a^x f(t)dt\right]'=f(x)$ 时，注意被积函数中不能含 x!

↳ 可提出（复合求导）或换元.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{0} x\cos t^2\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt\right)$$

提出来复分求导.

$$= \int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt + x\cdot(-1)\cdot\cos x^4\cdot 2x$$

$$= \int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt - 2x^2\cos x^4.$$

二.【变限积分】

① 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$

令 $u=x-t$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t f(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}$$

$\boxed{\text{积分中值定理}}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{f(\xi)x}{f(\xi)x+xf(x)}\quad(\xi\text{在}0,x\text{之间})$$

$$=\frac{1}{2}.$$

小结：积分中值定理在变限积分中的合理运用.

三.[定积分的换元法和分部积分方法].

常用公式：1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

3) $f(x+L) = f(x)$, $(L>0)$.

则 $\int_0^L f(x)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)dx = \int_a^{a+L} f(x)dx$.

4). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n为 \text{ even}). \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (n为大于1的 \text{ odd}) \end{cases}$

① 若 $I = \frac{1}{s}\int_0^{st} f(t+\frac{x}{s})dx$ $(s>0, t>0)$. 问 I 的值是否与 s、t 有关?

令 $u = t+\frac{x}{s} \Rightarrow du = \frac{1}{s}dx$ (看 $\frac{1}{s}$ 为常数). $x=0, u=t$; $x=st, u=2t$.

$$I = \frac{1}{s}\int_t^{2t} f(u)\cdot s\,du = \int_t^{2t} f(u)du.$$

故 I 的值与 t 有关，与 s 无关.

小结：见复杂表达式，常换元 $f(x)$ 中的自变量 x.