一、 **1.** $y=\mathrm{e}x$. **2.** $-\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)$. **3.** $\sin x$.

4. $y=\pm\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$（注：若仅写了一条渐近线，则扣一分）.

5. $-(2x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}+C$（注：若少写了 C，则扣一分）.

二、 **1** B **2** D **3** C **4** B **5** A

三、 **1.** 解法 1 注意到 $\tan x^2\sim x^2$，于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}.$$

对于第一个极限，因 $x\sim\sin x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-\sin x}{\sin^3 x}\overset{\text{令}}{\underset{t=\sin x}{=\!=}}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\overset{\text{代换}}{\underset{t\to x}{=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}.$$

将上式代回原式得：

$$\text{原式}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\overset{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}{=\!=\!=}2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

解法 2 我们有

$$\begin{aligned}\text{原式}&\overset{\tan x^2\sim x^2}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-x}{x^3}\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sin x\cdot\cos x-1}{3x^2}\\
&\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\sin x\cdot\cos^2 x-\cos\sin x\cdot\sin x}{6x}\\
&\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{\begin{array}{r}-\cos\sin x\cdot\cos^3 x+\sin\sin x\cdot 2\cos x\sin x\\+\sin\sin x\cdot\cos x\sin x-\cos\sin x\cdot\cos x\end{array}}{6}\\
&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. 令 $u=\mathrm{e}^t$，则 $\begin{cases}x=\arctan u,\\ y=\ln u+u.\end{cases}$ 于是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{1+u^2}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{u}+1$. 于是

$$\begin{aligned}y'&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\Big(\frac{1}{u}+1\Big)\Big/\frac{1}{1+u^2}=u^2+u+1+\frac{1}{u},\\
\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}u}&=2u+1-\frac{1}{u^2},\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}u}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\Big(2u+1-\frac{1}{u^2}\Big)\Big/\frac{1}{1+u^2}=2u^3+u^2+2u-\frac{1}{u^2}.\end{aligned}$$

注意到当 $t=0$ 时，$u=1$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{u=1}=4,\qquad\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{u=1}=4.$$

3. 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. 于是

$$\text{原式}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^4}-1}}=-\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{4}\int(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-t^4)$$

$$=\frac{1}{2}(1-t^4)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{x^4}\Big)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{\sqrt{x^4-1}}{2x^2}+C\,.$$

4. $\text{原式}=-\displaystyle\int\arctan x\,\mathrm{d}\frac{1}{x-1}=-\frac{\arctan x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}$.（2 分）

令 $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Mx+N}{x^2+1}$.（1 分）化简比较系数得：$A=\frac{1}{2}$、$M=N=-\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}\,.\quad（2\text{ 分}）$$

$$\text{原式}=-\frac{\arctan x}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\arctan x}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C\,.\quad（3\text{ 分}）$$

四、 1. 首先考虑连续性

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax+bx^2)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax+bx^2}{x}=a,\qquad（1\text{ 分}）$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.\qquad（1\text{ 分}）$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知：$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$. 即 $a=c=1$.（1 分）

其次考虑可导性

$$f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{\ln(1+h+bh^2)}{h}-1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\ln(1+h+bh^2)-h}{h^2}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{1+2bh}{1+h+bh^2}-1}{2h}=\lim_{h\to0^-}\frac{2b-1-bh}{2(1+h+bh^2)}=\frac{2b-1}{2}\,.\quad（2\text{ 分}）$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{\arctan\sqrt{h}}{\sqrt{h}}-1}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\arctan\sqrt{h}-\sqrt{h}}{h^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{1+(\sqrt{h})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{h}}-\frac{1}{2\sqrt{h}}}{\frac{3}{2}\sqrt{h}}=\lim_{h\to0^+}-\frac{1}{3(1+h)}=-\frac{1}{3}\,.\quad（2\text{ 分}）$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知：$f'_-(0)=f'_+(0)$. 即 $b=\frac{1}{6}$.（1 分）

2. 交点个数等于方程 $3x^2+ax-1=4x\ln x$ 的根的个数。即

$$a=\frac{4x\ln x-3x^2+1}{x}=4\ln x-3x+\frac{1}{x}\xlongequal{\text{记为}}f(x)\,.$$

则 $f'(x)=\dfrac{4}{x}-3-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x^2}$. 令 $f'(x)=0$ 得：$x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=1$. 根据导数符号知：$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调减少，在区间 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上单调增加。于是 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 处有极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-4\ln 3+2$；在 $x=1$ 处有极大值 $f(1)=-2$.

又注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. 于是

☞ 当 $a>-2$ 或 $a<-4\ln 3+2$ 时，有一个交点；

☞ 当 $a=-2$ 或 $-4\ln 3+2$ 时，有两个交点；

☞ 当 $-4\ln 3+2<a<-2$ 时，有三个交点。

3. 漏斗底面半径为 $r=\dfrac{R\varphi}{2\pi}=Rt$，这里 $t:=\dfrac{\varphi}{2\pi}\in(0,1)$；高为 $h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{1-t^2}$. 于是体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot(Rt)^2\cdot R\sqrt{1-t^2}=\frac{\pi}{3}R^3t^2\sqrt{1-t^2};$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi R^3t}{3\sqrt{1-t^2}}(2-3t^2).$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 得唯一驻点 $t=\sqrt{\frac{2}{3}}$，此时 $\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

五、 1. 令 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}$. 于是

$$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}=-\big(f(n+1)-f(n)\big)=-f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2},$$

这里 $\xi\in(n,n+1)$. 于是 $\dfrac{1}{1+(n+1)^2}<\dfrac{1}{1+\xi^2}<\dfrac{1}{1+n^2}$. 代入上式即可证明所要求的不等式。

注：若对 $f(x)=\arctan x$ 利用中值定理，则基本不能成功证明；但可以给予 2 至 3 分。

2. 令 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-\cos x-2x$. 则 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+\sin x-2$，$f''(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x$.

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f''(x)>1-\sin x+\cos x\geqslant\cos x\geqslant 0$；当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，因 $\frac{\pi}{2}>1$，于是 $f''(x)>\mathrm{e}-\sin x+\cos x>2-\sin x+\cos x>0$.

总之，当 $x>0$ 时，都有 $f''(x)>0$. 于是 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增。 即当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$. 于是 $f(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上单调递增。 即当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$. 由此可证明不等式。