数列极限与函数极限的关系.

海涅定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0$，$f(x_n)$ 有定义，且 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

↳ 用途：用来判断函数极限不存在.

① 找一个 $\{x_n\}$：$x_n\neq x_0$，且 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

② 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ ★

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$.

$x_{n+1}=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$n\to\infty$

$\Updownarrow$

$x\to 0$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

函数极限的运算法则.

① 若 $\lim g(x)$ 存在，$\lim f(x)$ 不存在，$\lim(g(x)+f(x))$ 极限存在？(×).

设 $\lim(g(x)+f(x))$ 存在，且 $g(x)=[g(x)+f(x)]-f(x)$. → $g(x)$ 存在 $\lim$，与题设不符！

存在 $\lim$　存在 $\lim$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

无穷项!!就不能用极限的运算法则!

③ $\lim[g(x)\cdot f(x)]=\lim g(x)\cdot\lim f(x)$. $\lim[c\cdot f(x)]=c\lim f(x)$.

$\lim[g(x)+f(x)]=\lim g(x)+\lim f(x)$. $\lim f(x)^n=[\lim f(x)]^n$.

($f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在).

④

对于n次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. 有 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$.

⑤ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-2)}{x^2-x+1}$

$=\frac{-3}{3}$

$=-1$.

⑥

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的极限.

原式.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

夹逼准则.

$\forall M>0$, 当 $|x|>M$ 时

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $g(x)\le f(x)\le h(x)$, 且 $\lim\limits_{\cancel{x\to x_0}\ x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{\cancel{x\to x_0}\ x\to\infty}h(x)=A$.

则 $\lim\limits_{\cancel{x\to x_0}\ x\to\infty}f(x)=A$.

两个重要的极限.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$