小测验 4 定积分和空间解析几何

一、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. (6‘)

解： 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$,

令

$$\frac{1}{x}=t,$$

则

$$原式=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t}{2}=\frac{1}{2}.$$

二、求广义积分 $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}(\alpha\ge0)$. (6‘)

解： 令

$$\frac{1}{x}=t,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha+1-1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)},$$

所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}arctant|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

三、求定积分 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(sinx)\,dx$. (6‘)

解： 令$x=2t$, 则$dx=2dt$. 当$x=0$ 时, $t=0$; $x=\frac{\pi}{2}$时, $t=\frac{\pi}{4}$. 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(sinx)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(sin2t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2sintcost)\,dt$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln2dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(sint)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(cost)\,dt\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}ln2+2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(sint)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(cost)\,dt\right).$$

对$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(cost)\,dt$，令$u=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(cost)\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(sinu)\,du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(sint)\,dt.$$

所以，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)\,dx=\frac{\pi}{2}ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)\,dx,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)\,dx=-\frac{\pi}{2}ln2.$$

四、1. 计算星形线$x=acos^3t,y=asin^3t(a>0)$的全长;(6')

2. 把该星形线所围成的图形绕x轴旋转，计算所得到的旋转体的体积.(6')

解： 1）由对称性，只需计算星形线位于第一象限部分的弧长，用参数式弧长公式，这里$x=0$对应$t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$对应$t=0$，所求弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[3acos^2t(-sint)]^2+[3asin^2t(cost)]^2}dt$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} sintcostdt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} sintd(sint)=6asin^2t|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

2）由对称性，只需计算星形线位于第一象限的部分绕x轴旋转的体积再两倍即可。这时$x=0$对应$t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$对应$t=0$.所以所求体积为

$$V=2\int_0^a \pi y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2sin^6t\cdot 3acos^2t(-sint)dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^7t(1-sin^2t)dt$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^7t-sin^9t)dt=6\pi a^3\left(\frac{6\times4\times2}{7\times5\times3\times1}-\frac{8\times6\times4\times2}{9\times7\times5\times3\times1}\right)$$

$$=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

五、求直线l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi$: $x-y+2z-1=0$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转一周所成曲面的方程。(10‘)

解：

1) 将直线l改为一般式

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$$

则过l的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0, \text{即} x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

因为它与平面π垂直，所以得$1-(\lambda-1)+2\lambda=0$,解得$\lambda=-2$.回代到平面束方程中得到经过直线l且垂直于平面π的平面方程为$x-3y-2z+1=0$.于是l_0的方程为

$$l_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$$

2) 将l_0化为$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$于是$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$$

即$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.