注意：试题的求解过程中不能使用洛必达法则和泰勒展示。

一、(8 分)计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\left[\frac{3}{x}\right]$，$[\bullet]$为取整函数。

解：令 $\left[\frac{3}{x}\right]=\frac{3}{x}-\varepsilon(x)$，$0<\varepsilon(x)<1$，故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\left[\frac{3}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot(\frac{3}{x}-\varepsilon(x))=1-\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\varepsilon(x)=1。$$

二、(8 分)计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+\sin x)^x-3^x}{(\arcsin x)^2}$。

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+\sin x)^x-3^x}{(\arcsin x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{1}{3}\sin x)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+\frac{1}{3}\sin x)}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\frac{1}{3}\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

三、(8 分)求 $y(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+\sin x)^2}{(e^x+1)^2\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}$ 的一阶导数 $y'(x)$。

解：$\ln y(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2\ln(1+\sin x)-2\ln(e^x+1)-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2\cos x}{1+\sin x}-\frac{2e^x}{e^x-1}+\frac{2x}{3(1-x^2)},$$

$$y'=\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+\sin x)^2}{(e^x+1)^2\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}\cdot[\frac{x}{1+x^2}+\frac{2\cos x}{1+\sin x}-\frac{2e^x}{e^x-1}+\frac{2x}{3(1-x^2)}]$$

四、(8 分)判断函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导。

解：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}}{x}$$ 极限不存在，故不可导。

五、(8 分)方程组 $\begin{cases}tx^3+y^3=e^t\\ x^5+y^2=t^2\end{cases}$ 在 $t=0$ 邻域内确定了函数 $y=y(x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

解：$\begin{cases}0x^3(0)+y^3(0)=e^0\\ x^5(0)+y^2(0)=0^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(0)=1\\ x(0)=-1\end{cases}$

$\begin{cases}x^3+3tx^2x'+3y^2y'=e^t\\ 5x^4x'+2yy'=2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1+3y'(0)=1\\ 5x'(0)+2y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'(0)=2/3\\ x'(0)=-4/15\end{cases}$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{y'(0)}{x'(0)}=-\dfrac{5}{2}$。

六、(10 分)判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\sin\dfrac{1}{n^{\beta}},(\alpha,\beta>0)$的敛散性。

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\sin\dfrac{1}{n^{\beta}},(\alpha,\beta>0)$是正项级数。

（1） 因为$n^{\alpha}\sin\dfrac{1}{n^{\beta}}\le\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$，故当$\beta-\alpha>1$时级数收敛。

（2） $\beta-\alpha\le 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\sin\dfrac{1}{n^{\beta}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-\beta}$不为零，故级数发散。

$0<\beta-\alpha<1$时，总存在$0<p<1$，使得$\alpha-\beta+p=0$，故

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}\sin\dfrac{1}{n^{\beta}}}{\dfrac{1}{n^{p}}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-\beta+p}=1$，故级数发散。

七、(10 分)讨论函数$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$的间断点及其类型。

解： $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1+1\right)}$

$=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}}$

$=e^{\frac{x}{\sin x}}$

$x=k\pi(k=\pm1,\cdots)$为第二类间断点。

若$x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$为可去间断点。

八、(10 分) 确定 a,b 的值使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x}{x^2+ax+b}, x\neq\dfrac{1}{2}\\ 2, x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

解：$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cos\pi x}{x^2+ax+b}=2\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x^2+ax+b=0\Rightarrow\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}a+b=0\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}-2b$。

$$2=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi x}{x^2-(\frac{1}{2}+2b)x+b}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\pi x)}{(x-\frac{1}{2})(x-2b)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\pi(\frac{1}{2}-x)}{(x-\frac{1}{2})(x-2b)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-\pi}{(x-2b)}\Rightarrow$$

$b=\dfrac{\pi+1}{4},a=-\dfrac{2+\pi}{2}$。

九、(10 分)已知 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处可导，且 $f(0)=1,f(1)=2$，$f'(0)=3,f'(1)=4$。

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln f(\frac{1}{n})-\ln f(1+\frac{1}{n})+\ln 2]$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln f(\frac{1}{n})-\ln f(1+\frac{1}{n})+\ln 2]$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{\ln f(\frac{1}{n})-\ln f(0)}{f(\frac{1}{n})-f(0)}\cdot\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}-\frac{\ln f(1+\frac{1}{n})-\ln f(1)}{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}\cdot\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{\frac{1}{n}}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{\ln f(\frac{1}{n})-\ln f(0)}{f(\frac{1}{n})-f(0)}\cdot\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}-\frac{\ln f(1+\frac{1}{n})-\ln f(1)}{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}\cdot\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{\frac{1}{n}}]$$

$$=\frac{1}{f(0)}\cdot f'(0)-\frac{1}{f(1)}\cdot f'(1)$$

$$=1$$

十、(10 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\ln 2$，且对任意的 x,y 有

$f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$。

解：因 $f'(0)=\ln 2$，知至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)\neq 0$，

从而有 $f(x_0+0)=f(x_0)f(0)\Rightarrow f(0)=1$，

考虑 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\ln 2$

令 $F(x)=2^{-x}f(x)$，有

$F'(x)=-2^{-x}\ln 2 f(x)+2^{-x}f'(x)=0$，故 $F(x)=2^{-x}f(x)=C=2^0 f(0)=1$，

得到 $f(x)=2^x$。

十一、 (10 分)求证当 $n>1$ 时方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：令 $F(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$，易知 $F(0)=-1$，$F(1)=n-1>0$，故在 $(0,1)$ 内必有一实根 x_n。

又 $F'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0, x\in(0,1)$，故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调增加，从而有唯一零点。

比较 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n=1$，$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}^2+x_{n+1}=1$ 可知

$x_{n+1}^{n+1}+(x_{n+1}^n-x_n^n)+\cdots+(x_{n+1}^2-x_n^2)+(x_{n+1}-x_n)=0$，因为 $0<x_n<1$，可知 $\{x_n\}$ 单调递减，从而必有极限 $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n=1\Rightarrow\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1\Rightarrow\dfrac{c}{1-c}=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$。