任课教师：　　　　姓名：　　　　学号：　　　　年级：　　　　学院：

装　　　　订　　　　线

四川大学期中考试试卷

（2013—2014 年第一学期）

科目：微积分（I）-1

一	二	三			四		五		六		七	总分
		1	2	3	1	2	1	2	1	2		

注：本套试卷共 7 页，解答请写在试卷相应位置上，否则应标明题号。

得分	

一 、单项选择题（每空 3 分，共 15 分）

1、下列四个级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$，绝对收敛级数共有（　　）个。

A、1　　　　B、2　　　　C、3　　　　D、4

2、当 $x\to 0$ 时，$e^{ax^2-x^3}-1$ 与 $1-\cos 2x$ 为等价无穷小量时，a 的值为（　　）

A、 2　　　　B、$\frac{1}{2}$　　　　C、 1　　　　D、0

3、函数 $f(x)$ 的 $f'(0)$ 存在的充要条件是（　　）

A、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 存在　　　　B、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在

C、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{x}$ 存在　　　　D、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}$ 存在

4、函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}, x>0 \\ x^2, \quad x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 a 的取值范围是（　）

A、$a\le 0$　　B、$0<a<1$　　C、$a=1$　　D、$a>1$

5、参数方程 $\begin{cases} y=\ln(1+t^2) \\ x=\arctan t \end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$（　　）

A、1　　B、2　　C、4　　D、8

得分	

二 、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{2n^2}=$ ______.

2、设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$，则 $f(x)$ 的第一类间断点是 $x=$ ______.

3、设 $f(x)=\begin{cases} \ln x+a, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ bx+c, & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f(c)=$ ______.

4、设 $f(x)=(x^3-1)g(x)$，且 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，当 n 为自然数时，$g(n)=2n$，

则 $f'(1)=$ ______.

5、设 $f(x)=x^2e^{-x}$，则 $f^{(10)}(1)=$ ______

三 、**计算题**（每小题 8 分，共 24 分）

得分	

1\. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$

得分	

2\. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

得分	

3\. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln(x^2+y^2)-\ln 4\quad (y>0)$

确定，求 $y'(0), y''(0)$

四、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

得分	

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$：

（1）求 $f(x)$ 的全部渐近线方程；（2）求 $f(x)$ 的单调递增的凹区间。

得分	

2. 设函数 $f(x)=e^x-x-1$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$，

（1）将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为 5 次泰勒公式，并写出相应的皮亚诺余项；

（2）由（1）判定 $g''(0)$ 存在，并求出 $g''(0)$ 的值。

五、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得分	

1\. 已知曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}\quad(x>0)$，过曲线上一点 $P(x,y)$ 的切线被两坐标轴所截的线段最短，求点 $P(x,y)$ 的坐标。

得分	

2\. 设常数 $a>0$，讨论方程 $\ln x-ax=0$ 实数解的存在性与解的个数。

六、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

得分	

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意自然数 $n>0$，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $nf(\xi)=f'(\xi)$.

得分	

2. 设方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 是大于零的自然数：

（1）证明方程存在唯一正数根 x_n；（2）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛。

得分	

七、选作题（10 分，若总分超过 100 分，按 100 分计）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0, f(1)=1$，

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $|f''(\xi)|\geq 4$.