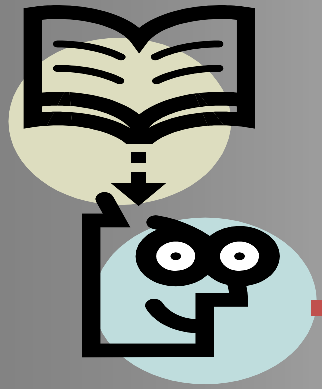
线性代数
Linear Algebra

四川大學
SICHUAN UNIVERSITY

第四章 向量空间

第七节 线性方程组有解的条件及结构

——齐次线性方程组



xuexue_zhou@scu.edu.cn

本节主要内容

一、齐次线性方程组有非零解的条件

二、齐次线性方程组解的性质

三、齐次线性方程组的基础解系

一、齐次线性方程组有非零解的条件

齐次线性方程组:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

矩阵形式： $AX = 0$

向量形式： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

定理1 设A为$s \times n$型矩阵，则齐次线性方程组AX=0有非零解

$\Leftrightarrow r_A < n$

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关

$\overset{s=n}{\Longleftrightarrow} |A| = 0$

二、齐次线性方程组解的性质

性质1 若X_1, X_2是$AX=0$的解，则 $x=k_1X_1+k_2X_2$是$AX=0$的解。

证明： 由题设知：$AX_1=0, AX_2=0,$

从而有， $Ax=A(k_1X_1+k_2X_2)=k_1AX_1+k_2AX_2=0,$

故 $x=k_1X_1+k_2X_2$也是$AX=0$的解。

推论 齐次线性方程组$AX=0$的解$X_1, X_2, \cdots, X_t$的任意线性组合

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$$

也是$AX=0$的解。

注： 由上述性质可知，齐次线性方程组的解集合关于向量的加法、数乘构成一个线性空间，称其为齐次线方程组的**解空间**(space of solution)。

三、齐次线性方程组的基础解系

基础解系定义 齐次线性方程组$AX=0$的解空间的一组基称为该方程组的一个**基础解系**。

注： 由基的定义可知，若$X_1,X_2,\cdots,X_t$ (I)是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则满足：

(1) (I)中每个向量都是$AX=0$的解；

(2) (I)线性无关；

(3) $AX=0$的任意一个解都可以由向量组(I)线性表示。

由上述性质(3)可知：

齐次线性方程组$AX=0$的**解空间**为：

$$S=\{k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t|k_1,k_2,\cdots,k_t\in P\}$$

进一步，称$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$为$AX=0$的通解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数。

定理1 设A是$m \times n$矩阵，$r_A = r < n$，则齐次线性方程组$Ax = 0$存在基础解系，且基础解系含$n - r$个解向量。

注： 求$Ax = 0$的基础解系的问题实际是求A的零空间的一组基。

求$Ax = 0$的任意n-r个线性无关的解是一个它基础解系。

例1： 求下列齐次方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

行最简形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{10}x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{也即} \begin{cases} x_1 = -2x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{10}x_4 \end{cases}$$

，其中x_2, x_4是自由变量。

法1：先求通解，再求基础解系；

令$x_2 = c_1, x_4 = c_2$，则

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \frac{-3}{10}c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad \text{也即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

，其中c_1, c_2是任意常数。

法2：先求基础解系，再求通解。

令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得$\xi_1 = (-2,1,0,0)^T$， 令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得$\xi_2 = (\frac{1}{5}, 0, \frac{-3}{10}, 1)^T$，

则通解为$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (k_1, k_2为任意常数)。

练习1：求下列齐次方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A) = 3 = n$，所以只有零解。

例2 设A为$s \times n$矩阵，B为$n \times m$矩阵，$AB = O$。试证：$r_B \leq n - r_A$(或$r_A + r_B \leq n$)。

分析：$n - r_A$是齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系所含向量的个数，故可将问题转化为齐次线性方程组的解的问题。

证明：设矩阵B与$AB = 0$右端的零矩阵的列分块矩阵分别为

$$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)，\quad 0 = (0,0,\cdots,0),$$

由分块矩阵乘法

$$A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (0,0,\cdots,0),$$

也即

$$A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = (0,0,\cdots,0)，或\quad A\beta_j = 0(j = 1,2,\cdots,m).$$

即$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m(I)$是齐次线性方程组的$AX = 0$的解向量。

若$r_A = n$，则$AX = 0$只有零解，$B = 0$， $r_B = 0 = n - r_A$；

若$r_A = r < n$, 则$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ (II)是$AX = 0$的一个基础解系，

从而，(I)可由(II)线性表出，秩$(I) \leq$秩(II)

而秩$(I) = B$的列秩 $= r_B$，秩$(II) = n - r_A$，

综上，$r_B \leq n - r_A$。

练习： 设A为$n(\geq 2)$阶方阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当}R(A)=n, \\ 1, & \text{当}R(A)=n-1, \\ 0, & \text{当}R(A)<n-1. \end{cases}$$

小结

有非零解的条件： 设A为$s\times n$型矩阵，则齐次线性方程组AX=0有非零解

$\Leftrightarrow\ r_A < n$

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关

$\overset{s=n}{\Longleftrightarrow} |A| = 0$

性质： 齐次线性方程组$AX=0$的解$X_1,X_2,\cdots,X_t$的任意线性组合

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$$

也是$AX=0$的解。

基础解系： 齐次线性方程组$AX=0$的解空间的一组基称为该方程组的一个基础解系。

基础解系向量个数： 设A是$m\times n$矩阵，$r_A=r<n$，则齐次线性方程组$Ax=0$存在基础解系，且基础解系含$n-r$个解向量。

$Ax=0$的任意n-r个线性无关的解是一个它基础解系。

齐次线性方程组$AX=0$的解空间为：

$$S=\{k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t|k_1,k_2,\cdots,k_t\in P\}$$

进一步，称$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$为$AX=0$的通解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$是任意常数。