四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国．成都　邮编 610064
E—mail: Nic2601@scuu.edu.cn
Tel: (028)5412720　Fax: (028)5412125

微积分Ⅱ(A)卷答案

一、(3'×5)　1. $\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+\ln|t|-5t+C$　　2. $\frac{a}{4(1+a)}-\frac{\arctan 2a}{8(1+a)}$

3. 0　　4. $\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}$　　5. $x=Cy^3+\frac{1}{2}y^2$

二、(3'×5)　1. C.　2. D.　3. A.　4. C.　5. D

三、(8'×4)

1. 由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，设 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$　(2')

则 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$　(2')

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=0$　(2')

故得　$2I=\frac{\pi}{2}$.　$I=\frac{\pi}{4}$　(2')

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u' e^y+f_x'$　(3')

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}(f_u'\cdot e^y+f_x')$　(1')

$=e^y\frac{\partial f_u'}{\partial y}+f_u'e^y+\frac{\partial f_x'}{\partial y}$　(1')

$=e^y(f_{uu}''xe^y+f_{uy}'')+e^yf_u'+(f_{xu}''xe^y+f_{xy}'')$　(2')

$=xe^{2y}f_{uu}''+e^yf_{uy}''+e^yf_u'+xe^yf_{xu}''+f_{xy}''$　(1')

3. 解: $r^2-6r+5=0$. 得 $r_1=2$, $r_2=3$.

齐方程通解为 $Y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ ----(2')

这里 $P_m(x)=3x+1$, $\lambda=0$. 不是特征方程的根.

设非齐方程特解为 $y^*=b_0x+b_1 \Rightarrow b_0=1;\ b_1=2$ ---(2')

得非齐方程通解为: $y=y^*+Y=x+2+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ ---(1')

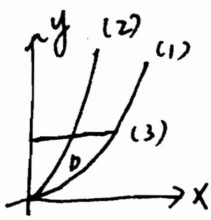
代入初始条件: 有. $y'=1+2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$

$$\begin{cases}2+c_1+c_2=1\\ 1+2c_1+3c_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=-3\\ c_2=2\end{cases}$$ ---(2')

得非齐次二阶线性微分方程的特解为:

$$y=x+2-3e^{2x}+2e^{3x}$$ ---(1')

4.



$$\iint\limits_D (x+y)\,d\sigma=\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx$$ ---(3')

$$=\int_0^1\left(yx+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy$$ ----(2')

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}y\right)dy=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}+1}y^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{16}y^2\right)\Big|_0^1$$ ---(2')

$$=\frac{1}{5}+\frac{3}{16}=\frac{31}{80}$$ ---(1')

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国．成都　邮编 610064
E—mail: Nic2601@scuu.edu.cn
Tel: (028)5412720　Fax: (028)5412125

四．$(8'\times 3)$ 1. 两边求导：$e^{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\sin x^2}{|x|}\cdot 2x=0$ ····$(3')$

$\Rightarrow e^{y^2}\frac{dy}{dx}=-2\,\mathrm{sgn}\frac{1}{x}\cdot\sin x^2\ (3')\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2\,\mathrm{sgn}\frac{1}{x}\cdot\sin x^2\cdot e^{-y^2}\ (2')$

2．(1) 解方程组 $\begin{cases}2+p(x)+2x=0\\ \frac{2}{x^3}+p(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=f(x)\end{cases}$ 得

$\varphi(x)=-\frac{1}{x}\cdot f(x)=\frac{3}{x^3}$ ----$(3')$

(2). 原方程为 $y''-\frac{1}{x}y'=\frac{3}{x^3}$

显见 $y_1=1$，$y_2=x^2$ 是原方程对应齐次方程的两个线性无关的特解． ----$(3')$

又 $y^*=\frac{1}{x}$ 是原方程的一个特解．由解的结构得通解为：

$$y=C_1+C_2x^2+\frac{1}{x}\qquad ---(2')$$

3. $I=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)\,dx=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\cdot\pi\rho^2 f(\xi,\eta)$ ----$(5')$

$=f(0,0)$ ···$(3')$

五(7′)证明：$D:\begin{cases}a\le y\le b\\ y\le x\le b\end{cases}$

$I=\int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)\,dx$ ------$(3')$

$=\int_a^b f(y)\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\Big|_y^b\right]dy$ ----$(2')$

$=\int_a^b f(y)\cdot\frac{1}{n-1}(b-y)^{n-1}dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)\,dy$ $(2')$

地址：中国．成都　邮编 610064
E—mail: Nic2601@scuu.edu.cn
Tel: (028)5412720　Fax: (028)5412125

六．(7′×1) 即求 $S=2(xy+yz+xz)$ 在条件 $xyz=2$ 下的极值。作拉格朗日函数 ····(1′)

$$F(x,y,z)=2(xy+yz+xy)+\lambda(xyz-2) \quad \cdots\cdots(2')$$

$$\begin{cases} F_x=2(y+z)+\lambda yz=0 \\ F_y=2(x+z)+\lambda xz=0 \\ F_z=2(x+y)+\lambda xy=0 \\ xyz=2 \end{cases} \quad \cdots\cdots(3')$$

可得 $x=y=z$ 时用料最省．即 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$ 时．···(1′)