下期

2012-2013 微积分(I)-2 期中考试试卷参考答案

一、填空题 1. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$；2. $x^2+y^2=(2z+3)^2+(z+1)^2$；3. $8dx+8dy$；4. $\frac{14}{15}$；5. $(1,0,1)$

二、选择题　BBDAD

三、计算题

1. 解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-\sin(xy)}{y^3\tan^3 x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(xy)^3}{3!}}{y^3x^3}=\frac{1}{6}.$

2. 解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+ye^{xy}f_2'.$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(f_1'+ye^{xy}f_2')=y[yf_{11}''+ye^{xy}f_{12}'']$

$$+ye^{xy}[yf_{21}''+ye^{xy}f_{22}'']+y^2e^{xy}f_2'.$$

3. 解 由对称性可知 $\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}[\ln(1+r^2)]\big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

四、解答题

1. 解　曲线在点 $(1,-5,1)$ 处的法平面的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,2)$. 直线的方向向量 $\vec{s}=(4,-3,-2)\times(1,-1,-1)=(1,1,-1)$. 设直线与平面的夹角为 φ，方向向量与法向量的夹角为 θ，则有 $\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{1}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

2. 解 曲面 $z=2x^2+y^2$ 上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(4x_0,2y_0,-1)$，平面的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(4,2,-1)$. 由平行可得 $\frac{4x_0}{4}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}$，故 $x_0=1, y_0=1, z_0=3$，即 $\overrightarrow{n_1}=(4,2,-1)$. 所以切平面方程为 $4(x-1)+2(y-1)-(z-3)=0$，即 $4x+2y-z-3=0$.

3. 解 上式两端同时对 y 求导，有 $\begin{cases}F_1'(1-\frac{dx}{dy})+F_2'(1-\frac{dz}{dy})=0\\ G_1'(\frac{dx}{dy}\cdot y+x)+G_2'\frac{dz}{dy}\frac{1}{y}-\frac{z}{y^2}=0\end{cases}$,

即$\begin{cases} F_1'\dfrac{dx}{dy}+F_2'\dfrac{dz}{dy}=F_1'+F_2' \\ yG_1'\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y}G_2'\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{z}{y^2}G_2'-xG_1' \end{cases}$，解之得$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\begin{vmatrix} F_1'+F_2' & F_2' \\ \dfrac{z}{y^2}G_2'-xG_1' & \dfrac{1}{y}G_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_1' & F_2' \\ yG_1' & \dfrac{1}{y}G_2' \end{vmatrix}}$

4. 解 因为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y,z)}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma=2x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2y(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(x-y).$

作 L-函数$L(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$.

令$\begin{cases} L_x=1+4\lambda x=0 \\ L_y=1+4\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ L_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$，解之得$x=\pm\dfrac{1}{2},y=\mp\dfrac{1}{2},z=0$，所以当$x=\dfrac{1}{2},y=-\dfrac{1}{2},z=0$时

方向导数最大，且最大值为$\sqrt{2}$.

五、证明题

1. 证明 对x求偏导可得$\dfrac{z-\dfrac{\partial z}{\partial x}x}{z^2}=\varphi'(-\dfrac{y}{z^2})\dfrac{\partial z}{\partial x}$，故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x-y\varphi'}$，同理$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-z\varphi'}{x-y\varphi'}$.

所以$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{zx}{x-y\varphi'}+\dfrac{-zy\varphi'}{x-y\varphi'}=z$.

2. 证明 因为$A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，由题设可知$AC-B^2<0$，故$u(x,y)$在 D 内无极值. 而由闭区间上连续函数的性质可知，$u(x,y)$的最值都在 D 的边界上取得.