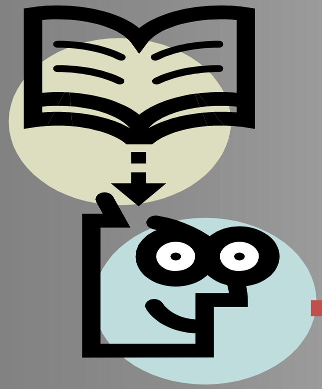
线性代数
Linear Algebra

四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第五章 特征值与特征向量

第二节 矩阵的相似对角化



xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、相似矩阵与相似变换的定义

二、相似矩阵的性质

三、矩阵的相似对角化

一、矩阵相似对角化的定义

定义

设 A、B 均为 $n\times n$的矩阵，若存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=B$$

则称A 与B相似，或A相似于B，记为$A\sim B$。

注意： 把$P^{-1}AP$看成对A作的运算，称为对A施行的相似变换，可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵

二、相似矩阵的性质

性质1 相似关系是等价关系.

(1) 反身性，即对每个矩阵$\boldsymbol{A}$，都有$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$.

(2) 对称性，即若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则有$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(3) 传递性，即若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$且$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

性质2 若$A\sim B$，$A^m\sim B^m$，m为自然数。

证明：

$$B^m=\left(P^{-1}AP\right)^m$$

$$=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP$$

$$=P^{-1}A^mP$$

更一般地，若$A\sim B$，$f(x)$是x的多项式，则$f(A)\sim f(B)$.

性质3 $\boxed{\text{若}A\sim B\text{，且}A\text{、}B\text{可逆，则}A^{-1}\sim B^{-1}.}$

性质4 $\boxed{\text{若}A\sim B\text{，则}|A|=|B|.}$

性质5 $\boxed{\text{若}A\sim B\text{，则}A\text{和}B\text{有相同的特征值.}}$

证明： 设$A\sim B$，即存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，

$$\left|\lambda E-B\right|=\left|\lambda E-P^{-1}AP\right|=\left|P^{-1}(\lambda E-A)P\right|$$
$$=\left|P^{-1}\right|\left|\lambda E-A\right|\left|P\right|=\left|\lambda E-A\right|,$$

即A的特征多项式与B的特征多项式相同，当然特征值也相同。

注：有相同特征值的矩阵不一定相似

如$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$的特征值相同，即$\lambda=2$(二重)，但$A$与$B$不相似.

事实上，B是数乘矩阵，可以和所有的二阶矩阵交换，

对任意二阶可逆阵P, $P^{-1}BP = BP^{-1}P = B$,

B只能与自身相似，所以A与B不相似.

性质6 若$A\sim B$，则$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$.

性质7 若$A\sim B$，则$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$.

二、相似矩阵的性质

性质1 相似关系是等价关系.

性质2 若A~B，$f(x)$是x的多项式，则$f(A)$ ~$f(B)$. $A^m \sim B^m$

性质3 若A~B，且A、B可逆，则A^{-1}~B^{-1}.

性质4 若A~B，则$|A|= |B|$.

性质5 若A~B，则A和B有相同的特征值.

性质6 若A~B，则tr$A$=tr$B$.

性质7 若A~B，则R(A)=R(B).

例1

设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & x & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$与$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & y & \\ & & 10 \end{pmatrix}$相似，求 x, y.

分析： 相似矩阵具有相同的迹$\Rightarrow$

$$2+x+5=1+y+10$$

相似矩阵具有相同的行列式$\Rightarrow$

$$|A|=10y$$

例2 设A为n阶方阵，且存在n阶可逆阵P

使得 $$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即 $$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则有 $|A| = |\Lambda|$

$$R(A) = R(\Lambda)$$

A的特征值与Λ的特征值相同即 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

三、矩阵的相似对角化

定义 对 n 阶方阵 A，若A相似于对角矩阵，则称A可（相似）对角化（diagonalization）. 即存在可逆矩 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，Λ为对角矩阵。

其中$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

问题：由于对角阵具有很好的性质，那么对于任意一个方阵，是否都可以对角化？如果可以对角化，如何对角化？

方阵可对角化判定定理

定理1

n阶矩阵A相似于对角矩阵的充分必要条件为A有n个线性无关的特征向量。

证明： **必要性：** A相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

用P左乘上式的两端，得 $AP=Pdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

$$AP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

将P按列分块，则$P=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$，由于$P$可逆，

所以$X_1, X_2, \cdots, X_n$线性无关，且有

$$A\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

由分块矩阵乘法法则，得

$$\begin{pmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$$

于是 $AX_1 = \lambda_1 X_1, \cdots, AX_n = \lambda_n X_n$

即$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A分别对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的$n$个线性无关的特征向量。

充分性：设A有n个线性无关的特征向量$X_1,X_2,\cdots,X_n$，

则由这n个特征向量构成的矩阵$P=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$可逆，

且 $$\begin{pmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{pmatrix}$$

即 $$A\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是有 $$P^{-1}AP = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

定理1

n阶矩阵A相似于对角矩阵的充分必要条件为A有n个线性无关的特征向量。

说明： 由定理1的证明可知：

1. 当$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$时，$diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的$n$个主对角元素是$A$的$n$个特征值；

2. 可逆矩阵P的n个列向量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A分别属于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的线性无关特征向量。

我们知道$(\lambda_j E - A)X = 0$的基础解系是A的属于特征值λ_j的线性无关特征向量.

问题：不同特征值的线性无关特征向量是否构成线性无关组？

定理2 n阶方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关。

若n阶矩阵有m个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，其对应的特征向量分别为 $X_1,X_2,\cdots X_m$，则向量组 $X_1,X_2,\cdots X_m$ 线性无关。

推论 若n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可对角化。

说明：如果 A的特征方程有重根，此时不一定有n个线性无关的特征向量，从而矩阵A 不一定能对角化，但如果能找到 n 个线性无关的特征向量，A 还是能对角化.

定理3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶矩阵$A$的不同的特征值，而

$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1i_1}$是$A$属于$\lambda_1$的线性无关的特征向量；

$X_{21},X_{22},\cdots,X_{2i_2}$是$A$属于$\lambda_2$的线性无关的特征向量；

…………………………………

$X_{m1},X_{m2},\cdots,X_{mi_m}$是$A$属于$\lambda_m$的线性无关的特征向量；

则 $X_{11},X_{12},\cdots,X_{1i_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2i_2},\cdots,X_{m1},X_{m2},\cdots,X_{mi_m}$线性无关。

问题：不同特征值的线性无关特征向量是否构成线性无关组？

不同特征值的线性无关特征向量一定构成线性无关组

将方阵化为对角矩阵的步骤：

1、求 A 的全部互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ；

2、对每一个特征值λ_i，解出其特征方程$(\lambda_i E - A)X = 0$的一个基础解系 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{it_i}$ ；

3、计算$T = \sum_{i=1}^{m} t_i$，则得A的T个线性无关的特征向量，若$T < n$，则表示A找不到n个线性无关的特征向量，从而不可对角化；若$T = n$，则A可对角化(由定理1).

4、若可对角化，令$P = (X_{11} \cdots X_{1t_1}, X_{21} \cdots X_{2t_2}, \cdots, X_{m1} \cdots X_{mt_m})$，则$P$可逆且有 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1 \cdots \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_2, \cdots \lambda_m \cdots \lambda_m)$.

例2

设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，问$A$能否对角化？若能，则求出可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵。

解： A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+(\lambda-1)r_3}\begin{vmatrix}0&-(\lambda-1)&(\lambda-1)(\lambda-2)-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-(\lambda-1)&(\lambda-1)(\lambda-2)-1\\\lambda-1&-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

解得 A的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$互异，$A$可对角化。

求出可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵

对于$\lambda_1=0$，解齐次线性方程组$(0E-A)X=0$，

$$0E-A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3−2个向量

令自由未知量 $x_3=1$，代入同解方程组$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，

得 基础解系

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(1E-A)X=0$,

$$1E-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3-2个向量。

令自由未知量 $x_2=1$，代入 同解方程组$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$，

得 基础解系

$$X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=3$，解齐次线性方程组$(3E-A)X=0$，

$$3E-A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3-2个向量

令自由未知量 $x_3=2$，代入　同解方程组$\begin{cases}2x_1=x_3\\2x_2=x_3\end{cases}$，

得 基础解系

$$X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

令 $P=\left(X_1,X_2,X_3\right)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

则P可逆，并且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

注：又令$P'=(X_3,X_1,X_2)$,则$P'^{-1}AP'=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

即 矩阵P中的列向量要和对角矩阵中的特征值相对应！

例3

设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}$，试问$A$能否对角化？若能，则求出可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角形矩阵。

解： A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-5&2\\2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$$

A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$(二重)， $\lambda_3=3$。

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解方程组$(1E-A)X=0$，

$$E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-4&2\\2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}}$$

秩为1，基础解系含3－1个向量

令自由未知量 x_2，x_3分别取(1, 0), (0, 1)，代入

同解方程组

$$x_1=2x_2-x_3\ ,$$

得 基础解系

$$X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=3$，解齐次线性方程组$(3E-A)X=0$,

$$3E-A=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}}$$

秩为2，基础解系含3-2个向量。

令自由未知量 $x_3=1$，代入同解方程组$\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\end{cases}$，

得 基础解系

$$X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$令P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$则\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

说明：此例中A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$(二重)， $\lambda_3=3$

但也找到了3个线性无关的特征向量，所以，A也可对角化。

例4 判断实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 能否化为对角阵？

解 A的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$(二重)，$\lambda_3=2$

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(1E-A)X=0$,

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(1E-A)X=0$,

$$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

$R(E-A)=2$，基础解系含$3-2=1$个向量

对于$\lambda_3=1$，解齐次线性方程组$(2E-A)X=0$,

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(2E-A)=2$,

基础解系含$3-2=1$个向量

A最多才能找到2个线性无关的特征向量

$\therefore A$不能对角化.

方阵可对角化的判定定理

定理4 设λ_0为n阶矩阵A的k重特征值，则属于λ_0的A的线性无关的特征向量最多只有k个.

定理5 n阶矩阵A可对角化的充分必要条件是：对于A的每个k_i重特征值λ_i，A有k_i个线性无关的特征向量（与重根的重数相同）.

推论 n阶矩阵A可对角化的充分必要条件是：对于A的每个k_i重特征值λ_i，特征矩阵$\lambda_i E - A$的秩为$n-k_i$。

例5

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 A^n

解：A为例1中的矩阵，

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0.$$

由例1，分别对应于特征值0、1、3

的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$。

令$P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}=\Lambda$

$\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$,

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -3 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+3^n & -3+3^n & 2\times 3^n\\ -3+3^n & 3+3^n & 2\times 3^n\\ 2\times 3^n & 2\times 3^n & 4\times 3^n\end{pmatrix}。$$

练习

判断下列方阵能否化为对角阵？若能求出可逆阵P及对角阵Λ

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

思考题

判断下列两矩阵A,B是否相似.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

例6 已知三阶方阵A的特征值分别为$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = -2$，$\lambda_3 = 1$

对应的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{求 } A$$

解： 令 $P = (p_1, p_2, p_3)$， 则P可逆，且 $P^{-1}AP = \Lambda$

其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore\ A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}}$$

$$(P\ E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)$$

P^{-1}

$$\boxed{A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

小结

一、矩阵相似对角化的定义

定义

设 A、B 均为 $n\times n$的矩阵，若存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=B$$

则称A 与B相似，或A相似于B，记为$A\sim B$。

二、相似矩阵的性质

性质1 相似关系是等价关系.

性质2 若$A \sim B$，$f(x)$是x的多项式，则$f(A) \sim f(B)$. $A^m \sim B^m$

性质3 若$A \sim B$，且A、B可逆，则$A^{-1} \sim B^{-1}$.

性质4 若$A \sim B$，则$|A| = |B|$.

性质5 若$A \sim B$，则A和B有相同的特征值.

性质6 若$A \sim B$，则$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.

性质7 若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

三、矩阵的相似对角化

定义

对 n 阶方阵 A，若 A 相似于对角矩阵，则称 A 可（相似）对角化 (diagonalization)．即存在可逆矩 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，Λ 为对角矩阵。

$$其中\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

将方阵化为对角矩阵的步骤：

1、 求 A 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ ；

2、对每一个特征值λ_i,解出其特征方程$(\lambda_i E-A)X=0$的一个基础解系 $X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{it_i}$ ；

3、计算$T=\sum_{i=1}^{m} t_i$, 则得A的T个线性无关的特征向量，若$T<n$, 则表示A找不到n个线性无关的特征向量，从而不可对角化；若$T=n$,则A可对角化(由定理1).

4、若可对角化， 令$P=(X_{11}\cdots X_{1t_1},X_{21}\cdots X_{2t_2},\cdots,X_{m1}\cdots X_{mt_m})$ ，则P可逆 且有 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1\cdots\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_2,\cdots\lambda_m\cdots\lambda_m)$.