高等数学第一学期中考试试题(物理类)参考答案

1．计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$　　　**(2)** $\lim\limits_{x\to\infty}x(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x})$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{\frac{1}{2}x^2}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x})\ \xrightarrow{t=\frac{1}{x}}\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\frac{1}{(1+t)^2}}\dfrac{1}{(1+t)^2}==\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{(1+t)^2+1}=\dfrac{1}{2}$

2.求下列函数的导数：

(1) 已知 $y=x^{\sin x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

解：(1) $y=x^{\sin x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}=e^{\sin x\ln x}-\dfrac{1}{2}\ln(e^x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(e^x+1)$

$$\frac{dy}{dx}=(e^{\sin x\ln x})'-\frac{1}{2}(\ln(e^x-1))'+\frac{1}{2}(\ln(e^x+1))'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})-\frac{e^x}{2(e^x-1)}+\frac{e^x}{2(e^x+1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\sin 1-\frac{e}{2(e-1)}+\frac{e}{2(e+1)}=\sin 1-\frac{e}{e^2-1}$$

(2) 已知 $y=e^x+x$，求二阶导数 $\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=0}$

解：对等式两边对 y 求导，$1=e^x\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{dx}{dy}\to\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+y-x}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{1}{1+y-x})=-\frac{1-\frac{dx}{dy}}{(1+y-x)^2}$$

当 x=0 时，y=1，代入上面式子可得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}$，$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，$\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=0}=-\dfrac{1}{8}$

3．设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=e^{2t}-2e^t+3\\ y=3e^{4t}-4e^{3t}+7\end{cases}$ 所确定的函数，计算 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：由方程组的第一个方程对 t 求导可得：$\dfrac{dx}{dt}=2(e^{2t}-e^t)$；

由方程组的第二个方程对 t 求导可得：$\dfrac{dy}{dt}=12(e^{4t}-e^{3t})$；

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{12(e^{4t}-e^{3t})}{2(e^{2t}-e^{t})}=6e^{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2(e^{2t}-e^{t})}\frac{d}{dt}(6e^{2t})=\frac{6e^{t}}{e^{t}-1}$$

4．把函数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$ 展开成 $a_0+a_1x+R_1(x)$ 的形式，其中 $R_1(x)$ 为拉格朗日型余项.

解：对函数 $f(x)=(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 逐次求导：

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+2x)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x+x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2x)^2+(1+x+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}(1+x+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

则 $\quad f(0)=1,\ f'(0)=\dfrac{1}{2}$

那么 $\quad \sqrt{1+x+x^2}=1+x+R_1(x)$

其中 $R_1(x)=\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2=\dfrac{3}{4}(1+\theta x+\theta^2x^2)^{-\frac{3}{2}}x^2$

5．确定常数 a 和 b，使得函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{axe^x-\sin x}{x}, & x<0\\ \arctan x+b(x-1)^3, & x\ge 0\end{cases}$ 在 x=0 处可导，并研究导函数 $f'(x)$ 在 x=0 处的连续性.

解：由于函数可导必连续，于是 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{axe^x-\sin x}{x}=a-1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\arctan x+b(x-1)^3=-b\Rightarrow a+b=1$.

由于函数可导，于是，而

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{axe^x-\sin x}{x}+b}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{axe^x-\sin x+bx}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{ae^x + axe^x - \cos x + b}{2x} == \lim_{x\to 0^-} \frac{2ae^x + axe^x + \sin x}{2} = a$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x + b(x-1)^3 + b}{x} = \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{1+x^2} - 3b(x-1)^2) = 1 - 3b$$

所以 $a+3b=1$， 所以 $a=1, b=0$.

利用求导公式计算，可得

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} [e^x - \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}] = 1 - \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{2x} = 1 = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 = f'(0)$$

所以导函数 $f'(x)$ 在 x=0 连续.

6. 设 $0 < x_0 < 1, x_{n+1} = x_n(2-x_n)$，利用单调有界原理证明极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出该极限.

证明：已知 $x_0 \in (0,1)$，若 $x_n \in (0,1) \Rightarrow x_{n+1} = x_n(2-x_n) = 1-(x_n-1)^2 \in (0,1)$，所以数列$\{x_n\}$有界；

因为 $x_{n+1} - x_n = x_n(2-x_n) - x_n = x_n(1-x_n) > 0$，数列$\{x_n\}$单调增加，

根据单调有界原理，极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 由递推式可得 $a = a(2-a)$，显然 $a>0$，可得 $a=1$.因此 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

7．证明：方程 $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x = 1$ (n 是大于等于 2 的整数) 在(0,1)内必有唯一的实根 a_n，并计算 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

证明：设 $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$，它在[0,1]连续， $f(0)=-1$, $f(1)= n-1>0$, 根据零点定理，原方程在(0,1)内至少存在一个实根.

又 $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 2x + 1 > 0$， 函数在(0,1)内单调增加，所以原方程在(0,1)内必有唯一的实根，记为 a_n.

由 $a_n^{\ n} + a_n^{\ n-1} + ... + a_n^{\ 2} + a_n = 1$

$a_{n+1}^{\ n+1} + a_{n+1}^{\ n} + ... + a_{n+1}^{\ 2} + a_{n+1} = 1$

可得数列$\{a_n\}$单调减少，而 $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow 0 < x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，根据单调有界原理数

列$\{a_n\}$有极限，设极限为 a. 又原方程有 $\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$，两边取极限，得 $\dfrac{a(1-0)}{1-a}=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

8．设函数 $f(x)$在$[0,1]$上可微，且 $f'_+(0)>0,\ f'_-(1)>0,\ f(0)=f(1)=0,$ 试证明导函数 $f'(x)$ 在$(0,1)$内至少有两个零点.

证明：$\because\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}>0$，

由极限的保号性知，存在δ_1(不妨设 $\delta_1<\dfrac{1}{2}$)，对任意 $x\in(0,\delta_1)$，均有 $\dfrac{f(x)}{x}>0$.

特别地，取 $x_1\in(0,\delta_1)$，使 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}>0$，$\therefore$得 $f(x_1)>0$；

同理，由 $f'_-(1)>0,$ 得 $x_1\in(1-\delta_2,1)$($\delta_2<\dfrac{1}{2}$))，

使得 $\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2-1}>0$，从而得 $f(x_2)<0$；

又$\because f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，$\therefore$由介值定理知，至少有一点$\xi\in[x_1,x_2]$使得 $f(\xi)=A$;

$\because f(x)$在$[0,\xi],[\xi,1]$上连续，在 $(0,\xi),(\xi,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(\xi)=f(1)=0$，

$\therefore$由罗尔中值定理知，至少有一点 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,1)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，结论成立.