大学数学(II)微积分-1期末试题参考答案　(2007-2008学年)

一. 1. 0　2. $(2, 2e^{-2})$　3. $-2008\times 2007\times 2^{2008}$　4. $y=2x+1$　5. 0

二. A A D B C

三. 1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}} = \sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}$

2. $y' = 3f^2(g^2(\sin x))\cdot f'(g^2(\sin x))\cdot 2g(\sin x)\cdot g'(\sin x)\cos x$

$dy = 6f^2(g^2(\sin x))\, g(\sin x)\cos x\, f'(g^2(\sin x))\, g'(\sin x)\, dx$

3. $\frac{dx}{dt}=2t+1$, $e^y\frac{dx}{dt}+xe^y\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}=2\cos t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{2\cos t-e^y\frac{dx}{dt}}{xe^y+1}$

又 $t=0$ 时, 有 $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=1$, $\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{2-1}{1}=1$

四 1.(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{r\cos t}{-r\sin t}=-\cot t$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(-\cot t)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{r}\csc^3 t$

(2) $K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{r}|\csc^3 t|}{(1+\cot^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}$　$\therefore K$ 恒为常数

四 2. (1) 要使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 必须 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=a$　$\because f(0)=0$

又 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$　$\therefore a=f'(0)$

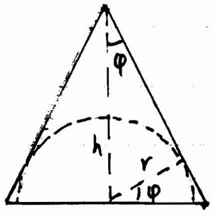
(2) $\because f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=g(0)$,

$\therefore g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\overset{L'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{f''(0)}{2}$

五 1. 可设切点为 (t, t^3)，则切线方程为 $y-t^3=3t^2(x-t)$，又过 $(0,1)$

∴ $1-t^3=-3t^3 \Rightarrow t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 代入有切线方程为 $y=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x+1$

2.



设圆锥半顶角为 φ，则高 $h=\frac{r}{\sin\varphi}$ 底半径 $R=\frac{r}{\cos\varphi}$

体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi r^3\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi\sin\varphi}$

等价于求 $u=\cos^2\varphi\sin\varphi$ 的最大值.

$$u'=-2\cos\varphi\sin^2\varphi+\cos^3\varphi=0 \Rightarrow \varphi_0=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\varphi_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad V_{min}=\frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3$$

六、1. $\frac{\sin x}{x}>\frac{x}{\tan x} \Longleftrightarrow \sin x\tan x>x^2 \Longleftrightarrow \sin^{\frac{1}{2}}x\tan^{\frac{1}{2}}x>x$

令 $f(x)=\sin^{\frac{1}{2}}x\tan^{\frac{1}{2}}x-x$，$f'(x)=\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}}x\cos x\tan^{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2}\sin^{\frac{1}{2}}x\tan^{-\frac{1}{2}}x\cdot\sec^2x-1$

$$=\frac{1}{2}(\cos^{\frac{1}{2}}x+\cos^{-\frac{3}{2}}x)-1 \qquad x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-1>0 \qquad (a^2+b^2\geqslant 2ab)$$

∴ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单增，又 $f(0)=0$ ∴ $f(x)>0$ 原式得证.

六、2. 依题意 $f(x)$ 和 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件

$$∴ \frac{f(b)-f(a)}{\ln(b)-\ln(a)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

$$\Longleftrightarrow f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)(\ln b-\ln a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a} \quad \#$$

六、证明题

1、 证明：

即证 $\sin x\tan x > x^2$ ....1 分

令 $f(x)=\sqrt{\sin x}\sqrt{\tan x}-x$ ....1 分

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x\sqrt{\tan x}+\sqrt{\sin x}\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\sec^2 x-1$$ ....2 分

$$=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{2\cos x\sqrt{\cos x}}-1$$ ....1 分

$$\ge\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-1>0$$ ....1 分

所以 $f(x)$ 单调增加，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)>f(0)=0$，

那么 $\sqrt{\sin x}\sqrt{\tan x}-x>0$，故 $\sin x\tan x>x^2$， ....1 分

故原不等式成立。

2、证明：

令 $g(x)=\ln x$， ....1 分

易见 $f(x)$， $g(x)$ 在[a , b]上都连续，在（a , b）上都可导， ....1 分

且 $g(x)=1/x$ 在（a , b）上恒不为零（因为 a>0）， ....1 分

由柯西中值定理， ....1 分

$$\exists\xi\in(a,b),\text{使得}\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$$ ....2 分

即 $f(b)-f(a)=\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}(\ln b-\ln a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$ ....1 分