2019—2020 学年第 2 学期期中考试参考答案

微积分-I (2)

1. 题目选项为

   A. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处存在偏导数且可微.

   B. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处存在偏导数但不可微.

   C. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不存在偏导数但可微.

   D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不存在偏导数也不可微.

   根据题目条件不妨令

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

由于 f 在 $(0,0)$ 连续, 故利用 (1) 和极限四则运算可得

$$f(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2) = 0.$$

于是就有

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}.$$

由于二重极限 (1) 存在, 故对任意 $\epsilon>0$ 都存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{f(\Delta x,y)}{(\Delta x)^2+y^2} - A\right| \leqslant \epsilon$$

对所有满足 $0<\sqrt{(\Delta x)^2+y^2}\leqslant\delta$ 的点 $(\Delta x,y)$ 都成立. 现取

$$\delta_1 := \frac{\min\{\delta,\epsilon\}}{1+|A|},$$

则
$$\left|\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2}-A\right|\leqslant\epsilon$$
对所有 $0<|\Delta x|\leqslant\delta_1$ 都成立. 不妨假设 $0<\epsilon\leqslant 1$, 则
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}\right| &= \left|\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2}\right|\cdot|\Delta x|\\ &\leqslant \left|\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2}-A\right|\cdot|\Delta x|+|A|\cdot|\Delta x|\\ &\leqslant (\epsilon+|A|)\,|\Delta x|\leqslant(1+|A|)\,|\Delta x|\ \leqslant\epsilon,\end{aligned}$$
对所有 $0<|\Delta x|\leqslant\delta_1$ 都成立. 这就说明
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}=0.$$
同理可求得 $f_y(0,0)=0$.

我们断言 f 在 $(0,0)$ 处可微. 这是因为
$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=f(\Delta x,\Delta y).$$
此外, 根据 (1) 可知, 当 Δx, $\Delta y\to 0$ 时, $f(\Delta x,\Delta y)$ 是 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量. 这就证明 f 在 $(0,0)$ 处是可微的. 正确答案为 A 选项.

注 1. 不能直接由二重极限 (1) 存在就得到下面的累次极限也存在
$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{f(\Delta x,y)}{(\Delta x)^2+y^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2}.$$
因为上面的等式还要求成立
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(\Delta x,y)}{(\Delta x)^2+y^2}=\frac{f(\Delta x,0)}{(\Delta x)^2},\quad \Delta x\neq 0.$$

2. 题目选项为

$A.\quad f_x=\dfrac{y^z}{x},\quad f_y=y^zx^{y^z}\ln y\cdot\ln x,\quad f_z=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x.$

$B.\quad f_x=\dfrac{y^z}{x}x^{y^z},\quad f_y=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x,\quad f_z=y^zx^{y^z}\ln y\cdot\ln x.$

$C.\quad f_x=\dfrac{y^z}{x}x^{y^z},\quad f_y=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x,\quad f_z=y^zx^{y^z}\ln y.$

$D.\quad f_x=\dfrac{y^z}{x}x^{y^z}\ln x,\quad f_y=zy^{z-1}x^{y^z},\quad f_z=y^zx^{y^z}\ln y\cdot\ln x.$

首先对 f 取对数得

$$\ln f = y^z \ln x.$$

然后经直接计算有

$$f_x = \frac{y^z}{x} x^{y^z},$$
$$f_y = z y^{z-1} x^{y^z} \ln x,$$
$$f_z = y^z x^{y^z} \ln y \cdot \ln x.$$

正确答案为 B 选项.

3. 题目选项为

$$A.\quad f_u(1,1) + f_{uu}(1,1) + f_{vu}(1,1)$$
$$B.\quad f_u(1,0) + f_{uu}(1,0) + f_{uv}(1,0)$$
$$C.\quad f_v(1,1) + f_{uu}(1,1) + f_{uv}(1,1)$$
$$D.\quad f_u(1,1) + f_v(1,1) + f_{vu}(1,1)$$

令 $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = yg(x)$, 则 $z = f(u,v)$. 由链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y f_u + y g'(x) f_v.$$

进一步地就有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(y f_u + y g'(x) f_v) = f_u + y\frac{\partial f_u}{\partial y} + g'(x) f_v + y g'(x) \frac{\partial f_v}{\partial y} \\
&= f_u + y\left(f_{uu}\frac{\partial u}{\partial y} + f_{uv}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + g'(x) f_v + y g'(x)\left(f_{vu}\frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= f_u + g'(x) f_v + y\left(x f_{uu} + g(x) f_{uv}\right) + y g'(x)\left(x f_{vu} + g(x) f_{vv}\right).
\end{aligned}$$

根据题目所给条件可知 $g(1) = 1$, $g'(1) = 0$ 且 $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = 1$. 又由于 f 具有二阶连续偏导数, 故 $f_{uv}(1,1) = f_{vu}(1,1)$ 且

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=1,y=1} &= f_u(1,1) + f_{uu}(1,1) + f_{uv}(1,1) \\
&= f_u(1,1) + f_{uu}(1,1) + f_{vu}(1,1).
\end{aligned}$$

正确答案为 A 选项.

4. 题目选项为

$$A.\quad \frac{2y}{F_v^3(1+y^2)^3}\Big[(1+y^2)F_uF_v^2+x(F_v^2F_{uu}+F_u^2F_{vv}-2F_uF_vF_{uv})\Big]$$

$$B.\quad -\frac{2y}{F_v^3(1+y^2)^3}\Big[(1+y^2)F_uF_v^2+F_v^2F_{uu}+F_u^2F_{vv}-2F_uF_vF_{uv}\Big]$$

$$C.\quad -\frac{2y}{F_v^3(1+y^2)^3}\Big[(1+y^2)F_uF_v^2+x(F_v^2F_{uu}+F_u^2F_{vv}-2F_uF_vF_{uv})\Big]$$

$$D.\quad \frac{2y}{F_v^3(1+y^2)^3}\Big[(1+y^2)F_uF_v+x(F_v^2F_{uu}+F_u^2F_{vv}-2F_uF_vF_{uv})\Big]$$

根据题目条件可知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F\left(\frac{x}{1+y^2},\, x+y-z\right)=0 \tag{2}$$

确定. 令 $u(x,y)=x/(1+y^2)$, $v(x,y)=x+y-z$. 在 (2) 两边对 y 求偏导得到

$$-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}F_u+\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_v=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}\cdot\frac{F_u}{F_v}.$$

同理可求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{F_u}{F_v}.$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_u}{\partial y}&=F_{uu}\frac{\partial u}{\partial y}+F_{uv}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}F_{uu}+F_{uv}\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=-\frac{2xyF_{uu}}{(1+y^2)^2}+\frac{2xyF_{uv}}{(1+y^2)^2}\cdot\frac{F_u}{F_v},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_v}{\partial y}&=F_{vu}\frac{\partial u}{\partial y}+F_{vv}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}F_{vu}+F_{vv}\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=-\frac{2xyF_{vu}}{(1+y^2)^2}+\frac{2xyF_{vv}}{(1+y^2)^2}\cdot\frac{F_u}{F_v}.\end{aligned}$$

下面计算二阶偏导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{F_u}{F_v}\right) \\
&= -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{F_u}{F_v} + \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{F_v^2}\left(F_v \frac{\partial F_u}{\partial y} - F_u \frac{\partial F_v}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{F_u}{F_v} - \frac{2xy}{(1+y^2)^3} \cdot \frac{F_v F_{uu} - F_u F_{vu}}{F_v^2} \\
&\qquad + \frac{2xy}{(1+y^2)^3} \cdot \frac{F_u\left(F_v F_{uv} - F_u F_{vv}\right)}{F_v^3}.
\end{aligned}
$$

由于 $F(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 故 $F_{uv} = F_{vu}$. 经整理得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{F_u}{F_v} - \frac{2xy}{(1+y^2)^3} \cdot \frac{F_v^2 F_{uu} + F_u^2 F_{vv} - 2F_u F_v F_{uv}}{F_v^3} \\
&= \frac{2y}{F_v^3 (1+y^2)^3}\left[x(2F_u F_v F_{uv} - F_v^2 F_{uu} - F_u^2 F_{vv}) - (1+y^2) F_u F_v^2\right].
\end{aligned}
$$

正确答案为 C 选项.

5. 题目选项为

$A.\quad \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 150, \quad \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -90.$

$B.\quad \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 115, \quad \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -75.$

$C.\quad \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 105, \quad \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -55.$

$D.\quad \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 125, \quad \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -75.$

解法一: 令 $d(x, y) = \sqrt{(x-6)^2 + (y+8)^2}$, 则 $f(x, y) = d^2(x, y) - 100$. 因此只需要讨论 $d(x, y)$ 在区域 D 上的最值即可. 如图 1 所示, $d(x, y)$ 表示点 $A(6, -8)$ 到圆盘 D 上某点 (x, y) 的距离. 据此不难发现最长和最短距离分别在 $Q(-3, 4)$ 和 $P(3, -4)$ 处取得, 即

$$
5 \leqslant d(x, y) \leqslant 15, \quad (x, y) \in D.
$$

从而可知 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值分别为 125 和 -75. 正确答案为 D 选项.

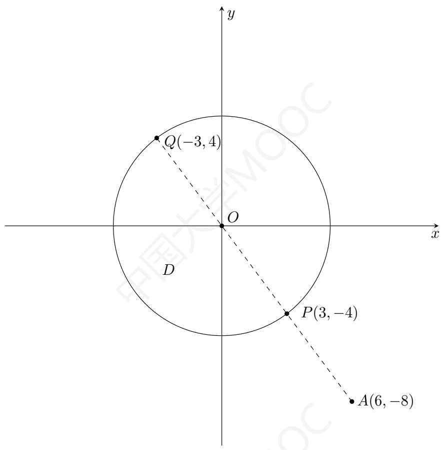

图 1

解法二: 由于 f 在闭区域 D 上连续, 故必有最值. 考虑驻点方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 16 = 0.$$

然而驻点 $(6, -8)$ 并不在 D 的内部. 因此 f 的最值不可能在 D 的内部取到, 而是在 D 的边界上取到. 于是仅需考虑下面带约束条件的极值问题

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \\ &\text{s.t.}\ \ x^2 + y^2 = 25. \end{aligned}$$

引入 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

求偏导数后得到方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 12 - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 16 - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ \lambda = 3 \end{cases}.$$

最后代入 $f(x, y)$ 就有

$$\max_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(-3, 4) = 125, \quad \min_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(3, -4) = -75.$$

正确答案为 D 选项.

6. 题目选项为

$A.\quad \dfrac{44 + 9\pi}{18} a^3$

$B.\quad \dfrac{43}{25} a^3$

$C.\quad \dfrac{7\pi}{2} a^3$

$D.\quad \dfrac{25 + \sqrt{3}\pi}{19} a^3$

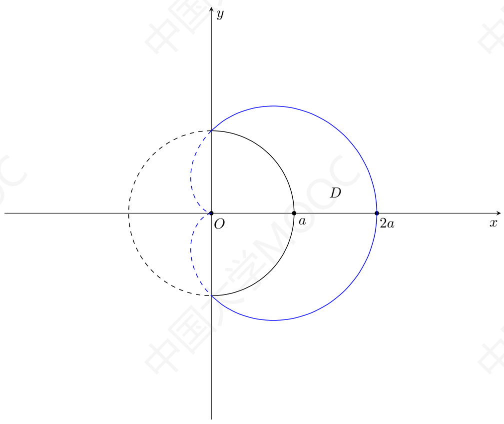

图 2

区域 D 如图 2 所示. 考虑极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad 其中 \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ a \leqslant r \leqslant a(1 + \cos\theta).$$

对应的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

于是就有

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)} r^2\,\mathrm{d}r \overset{\text{对称性}}{=} 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left((1+\cos\theta)^3-1\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(3\cos\theta+\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta + 2a^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(4-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\sin\theta + a^3\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\left(4\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + a^3(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{22}{9}a^3+\frac{\pi}{2}a^3 = \frac{a^3}{18}(44+9\pi).$$

正确答案为 A 选项.

7. 题目选项为

$A.\quad \dfrac{\sin 1-1}{3}$

$B.\quad -\sin 1-\cos 1$

$C.\quad \dfrac{\cos 2}{2}$

$D.\quad -\sin^2(1/2)$

在等式 $f(x)=\int_1^x \sin y^2\,\mathrm{d}y$ 两边对 x 从 0 到 1 积分并交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\mathrm{d}x\int_1^x \sin y^2\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\sin y^2\,\mathrm{d}y \overset{\text{换序}}{=} -\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y \sin y^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 y\sin y^2\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_0^1\sin y^2\,\mathrm{d}y^2 \\ &= \frac{\cos y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\cos 1-1}{2} = -\sin^2(1/2). \end{aligned}$$

正确答案为 D 选项.

8. 题目选项为

$A.\quad \dfrac{48+\sqrt{2}}{19}\pi$

$B.\quad 127\pi$

$C.\quad 336\pi$

$D.\quad \dfrac{13+\sqrt{3}}{5}\pi$

易知 Ω 为旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 以及 $z=8$ 围成的封闭几何体. 我们使用"截面法"计算积分. 对于给定的 $2\leqslant z_0\leqslant 8$, 平面 $z=z_0$ 截 Ω 所得区域为圆盘 $\Omega_{z_0}:=\{(x,y,z_0):x^2+y^2\leqslant 2z_0\}$. 于是使用极坐标变换就得到

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^8\mathrm{d}z\int_{\Omega_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r^3\mathrm{d}\theta=2\pi\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi.
\end{aligned}
$$

正确答案为 C 选项.

9. 题目选项为

$A.\quad \dfrac{\pi}{24}(29-16\sqrt{2})$

$B.\quad \dfrac{\pi}{3}(32+16\sqrt{5})$

$C.\quad \dfrac{\pi}{5}(64+48\sqrt{3})$

$D.\quad \dfrac{\pi}{96}$

注意到被积函数出现了齐次项 $x^2+y^2+z^2$, 且积分区域 Ω 适合球坐标变换, 故考虑

$$
\begin{cases}
z=r\cos\varphi,\\
y=r\sin\varphi\sin\theta,\\
x=r\sin\varphi\cos\theta,
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$. 易知 r 的下界为 $1/4$, 而 r 的上界需进一步确定. 如图 3 所示, 考虑 Ω 在 O-yz 平面的投影 D, 即由 $z = |y|$ 以及 $z = 2 - \sqrt{2 - y^2}$ 所围成的区域.

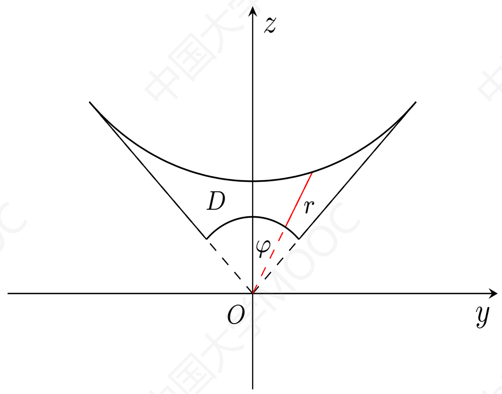

图 3

在 (3) 中取 $\theta = \pi/2$ 可得到 $z = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. 令 y, z 满足 $z = 2 - \sqrt{2 - y^2}$, 则有关系式

$$r\cos\varphi = 2 - \sqrt{2 - r^2\sin^2\varphi} \Longrightarrow r^2 - 4r\cos\varphi + 2 = 0.$$

解之得

$$r = 2\cos\varphi \pm \sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

由于 $r \leqslant \sqrt{2}$, 故取 $r = 2\cos\varphi - \sqrt{2\cos 2\varphi}$. 于是球面坐标变换 (3) 中 r 的范围为

$$1/4 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi - \sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

此外, 变换 (3) 对应的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2\sin\varphi.$$

进一步地, 我们就有

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega \frac{z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_{1/4}^{2\cos\varphi-\sqrt{2\cos 2\varphi}} \frac{r\cos\varphi}{r^3}\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} (2\cos\varphi - \sqrt{2\cos 2\varphi} - 1/4)\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{4\pi}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{3}(\cos 2\varphi)^{3/2}\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\pi}{8}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{24}(29-16\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

正确答案为 A 选项.

10. 题目选项为

$A.\quad 2\pi a^2$

$B.\quad 4\sqrt{2}\pi a^2$

$C.\quad \dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{6}\pi a^2$

$D.\quad \dfrac{7\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{9}\pi a^2$

令 Σ 表示题目中考虑的曲面, 则所求表面积为

$$I = \iint_\Sigma \mathrm{d}S.$$

易知 Σ 由两部分组成: 上底面为锥面 $\Sigma_1 := \{(x,y,z) : z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}\}$, 而下底面为旋转抛物面 $\Sigma_2 := \{(x,y,z) : z = \frac{1}{a}(x^2+y^2)\}$. 因此有

$$I = \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S := I_1 + I_2.$$

我们先计算 Σ_1 的表面积. 不难发现 Σ_1 和 Σ_2 的相交部分为圆

$$\begin{cases} z = a, \\ x^2+y^2 = a^2. \end{cases}$$

故 Σ_1 在 O-xy 平面的投影区域为圆盘 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 而且 Σ_1 的面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这就得到

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi a^2.$$

然后, 我们计算 Σ_2 的表面积. 易知 Σ_2 在 O-xy 平面的投影区域也为圆盘 D. 但 Σ_2 的面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是利用极坐标变换得到

$$\begin{aligned}I_2&=\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S=\frac{1}{a}\iint_D\sqrt{a^2+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{a}\int_0^a\sqrt{a^2+4r^2}\,\mathrm{d}r^2=\frac{\pi}{6a}(a^2+4r^2)^{3/2}\Big|_0^a=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi a^2.\end{aligned}$$

综上可知, 曲面 Σ 的表面积为

$$I=I_1+I_2=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{6}\pi a^2.$$

正确答案为 C 选项.