一. 1. B　2. A　3. C　4. D　5. B

解:

2. $e^{ax^2-x^3}-1 \sim ax^2-x^3 \sim \begin{cases} ax^2, & a\neq 0. \\ -x^3 & a=0 \end{cases}$

$$1-\cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}\Big/\frac{1}{1+t^2} = 2t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = (2t)'\Big/\frac{1}{1+t^2} = 2(1+t^2)$$

注意当 $x=0$ 时, $t=0$. 于是

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 2(1+t^2)\Big|_{t=0} = 2$$

二. 1. e^2

注意到 $\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{2n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right)^2 \Big/ \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^2$

2. $x=0$　(跳跃间断点)

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{1}{x}\to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$, $\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \to 1$

当 $x\to 0^-$ 时, $\frac{1}{x}\to -\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to 0$, $\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \to -1$

3. $f(c)=-2$, 因 $f(1)=0$

$$\left.\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}(bx+c) = b+c \\ f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}(\ln x+a) = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=b+c=0$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{b(1+h)+c-(b+c)}{h}=b$$

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)+a-a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

$\Longrightarrow a=0,\ b=1,\ c=-1$

4. $f'(1)=6$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((1+h)^3-1)g(1+h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)g(1+h)=3g(1)=6$$

5 $f^{(10)}(1)=\frac{71}{e}$

$$f^{(10)}(x)=C_{10}^{0}(e^{-x})^{(10)}(x^2)^{(0)}+C_{10}^{1}(e^{-x})^{(9)}(x^2)^{(1)}$$

$$+C_{10}^{2}(e^{-x})^{(8)}(x^2)^{(2)}$$

$$=e^{-x}\cdot x^2+10\cdot(-e^{-x})\cdot 2x+45\cdot e^{-x}\cdot 2$$

$$=(x^2-20x+90)e^{-x}$$

$$f^{(10)}(1)=71e^{-1}$$

三. 1. 当 $x\to 0$ 时,

$$e-e^{\cos x}=-e(e^{\cos x-1}-1)\sim -e(\cos x-1)$$

$$=e(1-\cos x)\sim e\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{e}{2}x^2$$

$\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2$, $\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{e}{2}x^2/\frac{1}{2}x^2=e$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\cancel{x}-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)}{\ln x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$\underline{\underline{\text{洛比达法则}}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(-x^2+2x+1)}{(x-1)(x^2+1)}$

$= -1$ $\quad\therefore$ 原式 $= e^{-1}$

3. 方程两端对 x 求导得:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2yy')$$

解之得 $y' = \frac{y-2x}{2y+x}$ 注意到 $y(0)=2$

于是 $y'(0) = \left.\frac{y-2x}{2y+x}\right|_{\substack{x=0\\y=2}} = \frac{1}{2}$

$$y'' = \frac{(y'-2)(2y+x)-(y-2x)(2y'+1)}{(2y+x)^2} = \frac{5xy'-5y}{(2y+x)^2}$$

$$y''(0) = \left.\frac{5xy'-5y}{(2y+x)^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2\\y'=\frac{1}{2}}} = -\frac{5}{8}$$

四 1. (1) 垂直渐近线 $x=1$

(2) 斜渐近线: $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1$

于是斜渐近线为 $y=x+1$.

(2) $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

令 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$ 得：$x>2$

于是单调递增的凹区间为 $[2,+\infty)$

2. $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$

$f(x)=e^x-x-1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{120}x^3+o(x^3)$

$=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\frac{g'''(0)}{6}x^3+o(x^3)$

$\therefore g''(0)=\frac{1}{12}$

五 1. 设切点为 $P(t,\frac{1}{t^2})$，则切线为 $y-\frac{1}{t^2}=-\frac{2}{t^3}(x-t)$

即 $y=-\frac{2}{t^3}x+\frac{3}{t^2}$. 它与 x 轴的截距为 $\frac{3}{2}t$，与 y 轴的截距为 $\frac{3}{t^2}$. 于是线段长度为

$$d=\sqrt{\frac{9}{4}t^2+\frac{9}{t^4}}=\frac{3}{2}\sqrt{u}$$

其中 $u=t^2+\frac{4}{t^4}$，$\frac{du}{dt}=2t-\frac{16}{t^5}$

令 $\frac{du}{dt}=0$ 得 $t=\sqrt{2}$. 于是 P 的坐标为 $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$

2. 方程变为 $\frac{\ln x}{x}=a$，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

于是 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调增加，在 $[e,+\infty)$ 上单调减少.

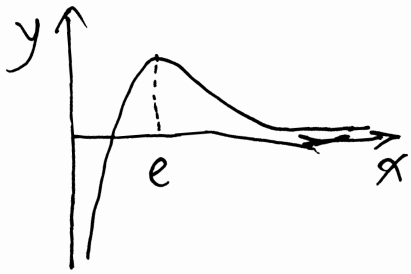
$x=e$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(e)=\frac{1}{e}$. 注意到

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

~~于是当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，方程有两根；当 $a=\frac{1}{e}$ 时方程有一根.~~

~~当 $a>\frac{1}{e}$ 时，无根.~~

此函数的图像为



于是当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，方程有两个根；

当 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程有唯一根 $x=e$；

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程没有根.

六. 1. 令 $g(x)=e^{-nx}f(x)$，则 $g(a)=g(b)=0$. 于是由罗尔定理知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $g'(\xi)=0$. 即

$$nf(\xi)=f'(\xi).$$

2. 记 $f_n(x)=x^n+nx-1$. 则 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加. 又因 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^n}+1-1=\frac{1}{n^2}>0$. 所以方程有唯一正数根 x_n 且 $x_n<\frac{1}{n}$. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛.

七. 对 $x=\frac{1}{2}$，$x_0=0$ 应用泰勒中值定理得：$\exists\,\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$ 使得：

$$f(\tfrac{1}{2})=f(0)+f'(0)(\tfrac{1}{2}-0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(\tfrac{1}{2}-0)^2=\frac{1}{8}f''(\xi_1)$$

又对 $x=\frac{1}{2}$，$x_0=1$ 应用泰勒中值定理得：$\exists\,\xi_2\in(\frac{1}{2},1)$，使得

$$f(\tfrac{1}{2})=f(1)+f'(1)(\tfrac{1}{2}-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(\tfrac{1}{2}-1)^2=1+\frac{1}{8}f''(\xi_2)$$

(1) 若 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1)=8f(\frac{1}{2})>4$，取 $\xi=\xi_1$. 则 $|f''(\xi)|>4$. (2) 若 $f(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_2)=8(f(\frac{1}{2})-1)<-4$. 取 $\xi=\xi_2$，则 $|f''(\xi)|>4$.