一、(12 分，每小题 4 分)判断下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$；

解：$n>2$ 时，$\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}$，根据正项级数的比较审敛法可知级数收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}}{1/\sqrt{n}}=1$，根据正项级数的比较审敛法的极限形式，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散可知级数发散。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2}=1$，因为通项不收敛到 0，所以级数发散。

二、(12 分，每小题 4 分)计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]\\
&=\lim_{n\to\infty}[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}]\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}]\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^x+\cos\sqrt{2x}-2}{\sin x}$；

解：

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x+\cos\sqrt{2x}-2}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{\sin x}-\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}-\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}$$
$$=0$$

(3) $\lim_{x\to 0}(1+\log_2(1+x))^{1/x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}(1+\log_2(1+x))^{1/x}$$
$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\log_2(1+x))}$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\log_2(1+x))}$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_2(1+x)}$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{\ln 2}}=e^{\frac{1}{\ln 2}}$$

三、(12 分，每小题 6 分)

(1)利用夹逼定理计算 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$。

解：$1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$，因 $2^{\frac{1}{n}}\to 1$，故 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$。

(2) 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$， $x_{n+1}=\sin x_n$， $n=0,1,2,\cdots$， 证明 $\{x_n\}$收敛，并求极限。

证明：因为 $|\sin x|\le 1$，不妨假设 $x_0\in[0,1]$， $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$， 故 $\{x_n\}$单调递减，

又 $x_0\ge 0$，知 $x_n\ge 0$，故单减有下界， $\{x_n\}$收敛。

类似地，可以证明当 $x_0\in[-1,0]$， $\{x_n\}$也收敛。

设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$， $a=\sin a\Rightarrow a=0$。

四、(12 分，每小题 4 分)

(1)利用导数定义计算 $f(x)=(2x+3)^x$ 的导数 $f'(0)$。

解：

$f'(0)$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+3)^x-1}{x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(2x+3)}-1}{x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(2x+3)}{x}$
$=\ln 3$

(2)已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：

$\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$， $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{t}{2}$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{(t/2)'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$。

(3)已知 $\sqrt{xy}=e^{xy}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：$\sqrt{xy}=e^{xy}\Rightarrow\dfrac{1}{2}(\ln x+\ln y)=xy$

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{y'}{y})=y+xy'\Rightarrow y'=-\dfrac{y}{x},x\neq 0$。

五、(13 分) $f(x)=\lim\limits_{y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{y\ln(1+x^2)}}$，求：(1) $f'(x)$；(2) $x=0$ 为 $f(x)$ 的哪一类间断点？

解：(1)

$f(x)=\lim\limits_{y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{y\ln(1+x^2)}}$
$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{y\ln(1+x^2)}}$
$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{y\ln(1+x^2)}}=e^{x/\ln(1+x^2)},x\neq 0$

$\ln(\ln f(x))=\ln x-\ln(\ln(1+x^2))$,

$\dfrac{1}{\ln f(x)}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\dfrac{2x}{1+x^2}\Rightarrow$

$f'(x)=e^{x/\ln(1+x^2)}(\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{[\ln(1+x^2)]^2}\dfrac{2x^2}{1+x^2})$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0+} e^{x/\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{1/x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0-} e^{x/\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$,

$x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

六、(13 分)已知 $f(x)=\begin{cases} x^3, x\le 0 \\ x^p\sin\dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$，讨论：(1) p 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

(2) p 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？(3) p 为何值时，导函数连续？

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} x^3 = 0 = f(0)$，

当 $p>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x^p \sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$，

故 $p>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(2) $f_-^{'}(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^3}{x} = 0$，

$f_+^{'}(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^p\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{p-1}\sin\dfrac{1}{x} = 0, p>1$，

故 $p>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

(3)

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, x<0 \\ 0, x=0 \\ x^{p-2}(px\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}), x>0 \end{cases},$$

$f^{'}(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} x^{p-2}(px\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}) = 0, p>2$，

所以 $p>2$ 时，导函数连续。

七、(13 分)设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^3+bx^2+x-2}{x^2-1}, x<1 \\ c, x=1 \\ \dfrac{2\ln x}{x-1}, x>1 \end{cases}$，(1) a,b,c 为何值时，$f(x)$ 连续？(2) a,b,c 取何值时，$f(x)$ 有界？

解：(1) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2\ln(x-1+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2=c$，

$\lim\limits_{x\to 1-}ax^3+bx^2+x-2=0\Rightarrow a+b-1=0\Rightarrow a+b=1$，

$$\lim_{x\to 1-}\frac{ax^3+(1-a)x^2+x-2}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{ax^2(x-1)+(x+2)(x-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{ax^2+(x+2)}{x+1}$$
$$=\frac{a+3}{2}=c=2$$

$a=1,b=0,c=2$.

(2) 当 $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{ax^3+bx^2+x-2}{x^2-1}$， $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+x-2}{x^2-1}$ 同时存在时， $f(x)$ 有界。由(1)

知： $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{ax^3+bx^2+x-2}{x^2-1}$ 存在推出 $a+b=1$；

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+x-2}{x^2-1}$ 存在推出 $a=0$，故 $b=1$， c 为任意实数。

八、(13 分)已知 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，(1)证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在；(2)证明：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在无穷多个零点；(3)计算 $f(x)$ 的渐近线。

证明：(1) $x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\pi}\to 0,k\to+\infty,k\in Z^+$，

$f(x_k)=f(\dfrac{1}{2k\pi+\pi})=\dfrac{1}{2k\pi+\pi}+(2k\pi+\pi)\sin(2k\pi+\pi)\to 0,k\to+\infty$，

$\bar{x}_k=\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2}\to 0,k\to+\infty,k\in Z^+$，

$f(\bar{x}_k)=f(\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2})=\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2}+(2k\pi+\pi/2)\sin(2k\pi+\pi/2)\to+\infty,k\to+\infty$，

由于子列的极限不相等，故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

(2)考虑区间 $[\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2},\dfrac{1}{2k\pi-\pi/2}]\subset(0,1),k\in Z^+$，

$$f(\frac{1}{2k\pi+\pi/2})=\frac{1}{2k\pi+\pi/2}+(2k\pi+\pi/2)\sin(2k\pi+\pi/2)=\frac{1}{2k\pi+\pi/2}+(2k\pi+\pi/2)>0$$

$$f(\frac{1}{2k\pi-\pi/2})=\frac{1}{2k\pi-\pi/2}+(2k\pi-\pi/2)\sin(2k\pi-\pi/2)=\frac{1}{2k\pi-\pi/2}-(2k\pi-\pi/2)<0，$$

根据零点存在定理知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2k\pi+\pi/2},\frac{1}{2k\pi-\pi/2}),k\in Z^{+}$ 存在零点，

又由于 $k_1\neq k_2,(\frac{1}{2k_1\pi+\pi/2},\frac{1}{2k_1\pi-\pi/2})\cap(\frac{1}{2k_2\pi+\pi/2},\frac{1}{2k_2\pi-\pi/2})=\phi$，故在 $(0,1)$ 有无穷多个零点。

(3) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0$，

有渐近线 $y=x$。