一. 1. 原式$=\frac{d}{dx}\int_{\cos 3x}^{1} t^{\frac{1}{3}}dt=-(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}\cdot(\cos 3x)'=3\sin 3x(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}$

2. 令 $u=\sqrt{e^t-1}$，则 $t=\ln(u^2+1)$，$dt=\frac{2udu}{u^2+1}$

$\therefore \frac{\pi}{6}=\int_{x}^{2\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\int_{\sqrt{e^x-1}}^{\sqrt{3}}\frac{2du}{u^2+1}=2\left[\arctan u\right]_{\sqrt{e^x-1}}^{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\pi}{3}-2\arctan\sqrt{e^x-1}$

$\therefore \arctan\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sqrt{e^x-1}=\tan\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow x=\ln 2$

3. 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t\,dt$

$\int_{-1}^{1}(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-1)\cos^2 t\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$

4. $\because \int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int\ln x\,d\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}d\ln x=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$

$\therefore \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\left[\frac{\ln x+1}{x}\right]_{1}^{+\infty}=1$.

5. $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_{0^+}^{1}$

注意到 $\lim_{x\to 0^+}x\ln x\;\overset{\text{令 }t=-\ln x,\ x=e^{-t}}{=\!=\!=\!=}\;-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\;\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=\!=}\;-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$

$\therefore$ 原式 $=-1$

二. 1. C

$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$　　A. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 是

B. $-\cos^2 x = -\frac{1+\cos 2x}{2}$ 是　　C. 不是　　D. 是

2. B

$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$

$\therefore \int f(x)\,dx = \int (-\cos x + C_1)\,dx = -\sin x + C_1 x + C_2$

$\therefore 1-\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，此时 $C_1 = 0$，$C_2 = 1$.

3. B

可积的一个必要条件是连续，
一个充分条件是有界.　　即：~~有界~~ 连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 有界

4. $\frac{4}{1-x^2} f(x) = 2f(x)f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

$\therefore f(x) = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$，$\therefore f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

选 C.

5. A. 被积函数 $e^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的周期函数.

$\therefore F(x)$ 为常数，且

$F(x) = F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = \int_{-\pi}^{0} e^{\sin t}\sin t\,dt + \int_{0}^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$

而 $\int_{-\pi}^{0} e^{\sin t}\sin t\,dt \xlongequal{令u=-t} \int_{\pi}^{0} e^{-\sin u}(-\sin u)(-du)$

$= -\int_0^{\pi} e^{-\sin u}\sin u\,du = -\int_0^{\pi} e^{-\sin t}\sin t\,dt$

$\therefore F(x) = -\int_0^{\pi} e^{-\sin t}\sin t\,dt + \int_0^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$

$= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t})\sin t\,dt > 0$

学院　　　　班级　　　　学号　　　　学生姓名　　　　任课教师：

装订线内不要答题

四川大学期中考试试卷

（2006 ——2007 学年 第 二 学期）

科目：《大学数学》（微积分）

适用专业年级：数学二各专业 2006 级本科生

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

考 试 须 知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

得分	

一、 填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\frac{d}{dx}\left(\int_{\cos 3x} x^{\frac{1}{3}}dx\right)=$ $3\sin 3x\,(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}$.

2. 如果 $\int_x^{2\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\frac{\pi}{6}$，则 $x=$ $\ln 2$.

3. $\int_{-1}^{1}(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx=$ $-\frac{\pi}{2}$.

4. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$ 1.

5. $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=$ -1.

得分	

二、 选择题 （每题 3 分，共 15 分）

1. 下列函数中，不是$\sin 2x$的原函数的是 （ C ）

$A.\ \sin^2 x$ $B.\ -\cos^2 x$ $C.\ \frac{1}{2}\sin 2x$ $D.\ -\frac{1}{2}\cos 2x$

2. 若$f(x)$的导数是$\sin x$，则$f(x)$的一个原函数为 （ B ）

$A.\ 1+\sin x$ $B.\ 1-\sin x$

$C.\ 1-\cos x$ $D.\ 1+\cos x$

3. 下列函数中，在$[-1,1]$上可积的是 （ B ）

$A.\ f(x)=\frac{1}{3x-2}$ $B.\ f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$C.\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $D.\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4. 设$\frac{4}{1-x^2}f(x)=\frac{d}{dx}[f(x)]^2$，$f(x)$不恒为零且$f(0)=0$，则$f(x)=$ （ C ）

$A.\ \frac{1+x}{1-x}$ $B.\ \frac{1-x}{1+x}$

$C.\ \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ $D.\ \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

5. 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$，则$F(x)$为 （ A ）

A. 正常数 B. 负常数

C. 恒为零 D. 不是常数

得分	

三、 计算题 （每题 7 分，共 28 分）

1. $\int e^{2x}(1+\tan x)^2 dx$

$= \int e^{2x}(1+2\tan x+\tan^2 x)dx$

$= \int e^{2x}(2\tan x+\sec^2 x)dx$

$= 2\int e^{2x}\tan x\, dx + \int e^{2x}\sec^2 x\, dx$

$= 2\int e^{2x}\tan x\, dx + \int e^{2x} d\tan x$

$= 2\int e^{2x}\tan x\, dx + e^{2x}\tan x - \int \tan x\, d e^{2x}$

$= e^{2x}\tan x + C$

2. $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}dx$

注意到：$\frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}$

令 $t = 1+\cos x$，则 $dt = -\sin x\, dx$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-(t-1)^2 = -t(t-2)$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2(t-2)}dt = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{4t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4(t-2)}\right)$

$= -\frac{1}{8}\ln|t| - \frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\ln|t-2| + C$

$= \frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{1}{4(1+\cos x)} + C$

3. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

$= \int_0^1 (e^x-1)^4 d(e^x-1)$

$= \left[\frac{1}{5}(e^x-1)^5\right]_0^1$

$= \frac{1}{5}(e-1)^5$

4. $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}\,dx$

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$　　令 $t=\pi-x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\sin t}\,(-dt)$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,dx$

$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\cos t}\,(-dt)$　　令 $t = \frac{\pi}{2} - x$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2})}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,dt$

$= 2\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\sqrt{2}(-\sqrt{2}+1)$

$= 4\sqrt{2}-4 = 4(\sqrt{2}-1)$

得分	

四、 解答题 （每题8分，共16分）

1．设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$, 求 $\int\varphi(x)dx$.

解：$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ 由 $f(\varphi(x))=\ln x \Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$

$\Rightarrow \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

$\therefore \int\varphi(x)dx=\int dx+2\int\frac{dx}{x-1}=x+2\ln|x-1|+C$

2. 求函数 $F(x)=\int_0^x\frac{(3t+1)}{t^2-t+1}dt$ 在[0，1]上的最大、最小值.

解：$\int\frac{3t+1}{t^2-t+1}dt=\int\frac{3t-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt+\int\frac{\frac{5}{2}}{t^2-t+1}dt$

$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1}+\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}dt$

$=\frac{3}{2}\ln|t^2-t+1|+\frac{5}{\sqrt3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt3}$

$\therefore F(x)=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{5}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{5\pi}{6\sqrt3}$

而 $F'(x)=\frac{3x+1}{x^2-x+1}>0$，$\forall x\in[0,1]$．$\therefore F(x)$在$[0,1]$上严格递增.

$\therefore$ 最小值为 $F(0)=0$

最大值为 $F(1)=\frac{5\pi}{3\sqrt3}$.

得分	

五、 证明题 （10分）

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，证明：$f(x)$ 恒为 0

证：$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$

$\frac{d}{dx}(e^{-x}f(x)) = e^{-x}(-f(x)+f'(x)) = 0$

$\therefore e^{-x}f(x)=C$ 为常数，即 $f(x)=Ce^{x}$

又 $\because f(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ $\therefore C=0$

即 $f(x)=0$.

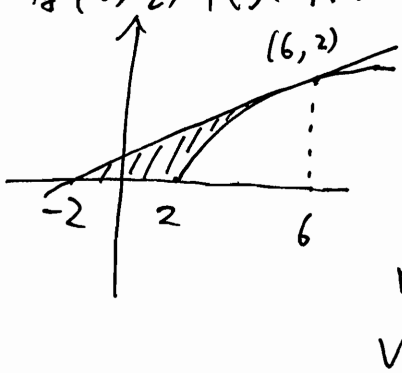
得分	

六、 应用题 （每题 8 分，共 16 分）

1．过点 $P(0,1/2)$ 作曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述曲线及 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$，设切点为 $(y_0^2+2,\ y_0)$，则此切线为 $y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-y_0^2-2)$

将 $(0,\frac{1}{2})$ 代入得：$y_0^2-y_0-2=0 \Rightarrow y_0=2$ ∴切线为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$



直线段 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ $(-2\le x\le 6)$ 绕 x 轴体积为

$$V_1=\pi\int_{-2}^{6}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)^2dx=\pi\left[\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{-2}^{6}=\frac{32}{3}\pi$$

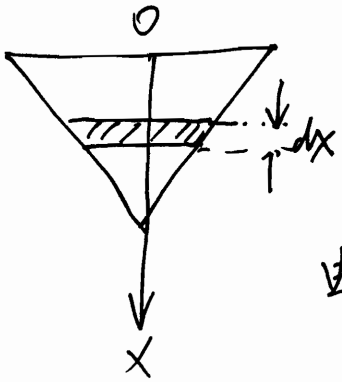
曲线段 $y=\sqrt{x-2}$ $(2\le x\le 6)$ 绕 x 轴体积为

$$V_2=\pi\int_{2}^{6}(\sqrt{x-2})^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{6}=8\pi$$

∴所求体积为

$V=V_1-V_2=\frac{8}{3}\pi$

2. 设有底为 6 米，高为 2 米的等腰三角形闸板铅直倒置于水中（设水比重为 1）底与水面平齐，求水对它的压力。



解: $dA = (6-3x)dx$

$p = \rho g x$

$\therefore dP = p\,dA = \rho g x(6-3x)dx$

由题中假设 水的比重 $\rho g = 1$.

$\therefore dP = x(6-3x)dx$

$P = \int_0^2 x(6-3x)dx$

$= [3x^2 - x^3]_0^2$

$= 4$