线性代数
Linear Algebra

四川大學
SICHUAN UNIVERSITY

# 第四章 向量空间

## 第七节 线性方程组有解的条件及结构

——非齐次线性方程组

xuexue_zhou@scu.edu.cn

# 主要内容

一、非齐次线性方程组有解的条件

二、非齐次线性方程组解的结构

# 一、非齐次线性方程组有解的条件

**非齐次线性方程组：**
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

**矩阵形式：** $Ax = \beta$

**向量形式：** $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

**定理1** 设A为$s \times n$型矩阵，则非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解

$\Leftrightarrow \beta$可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示；

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$\beta$等价；

$\Leftrightarrow r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} = r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}$；

$\Leftrightarrow R(A) = R(\tilde{A})$，其中$\tilde{A} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n\ \beta)$。

# 二、非齐次线性方程组解的结构

**定义** 与非齐次线性方程组$Ax=\beta$的系数矩阵相同的齐次线性方程组$Ax=0$称为$Ax=\beta$的导出组（或对应的齐次线性方程组）。

**定理2** 设A为$s\times n$型矩阵，则非齐次线性方程组$Ax=\beta$

(1) 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})$;

(2) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})=n$;

(3) 有无穷多解$\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})<n$，且通解为$w=p+v_h$，
其中$p$是$Ax=\beta$的一个解，称为**特解**；$\boldsymbol{v_h}$是导出组$Ax=0$的**通解**。
即$\boldsymbol{w=p+k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t}$,其中$\boldsymbol{k_1,\cdots,k_t}$为任意常数，$\boldsymbol{X_1,\cdots,X_t}$为$\boldsymbol{Ax=0}$的一个基础解系。

**证明：** 只证“$Ax=\beta$有无穷多解时，通解为$w=p+v_h$，其中$p$是$Ax=\beta$的一个解，称为特解；$v_h$是导出组$Ax=0$的通解，即$w=p+k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$,其中$k_1,\cdots,k_t$为任意常数，$X_1,\cdots,X_t$为$Ax=0$的一个基础解系”。

$\forall Ax=\beta$的解$w$,则$w-p$为$Ax=0$的解，

即存在数$k_1,\cdots,k_t$,使得$w-p=k_1X_1+\cdots+k_tX_t$,

即存在数$k_1,\cdots,k_t$,使得$w=p+k_1X_1+\cdots+k_tX_t$。

又任给常数$k_1,\cdots,k_t$,令$w=p+k_1X_1+\cdots+k_tX_t$,

$$Aw=A(p+k_1X_1+\cdots+k_tX_t)=Ap+A(k_1X_1+\cdots+k_tX_t)=\beta$$

所以$w=p+k_1X_1+\cdots+k_tX_t$是$Ax=\beta$的解。

综上$w=p+k_1X_1+\cdots+k_tX_t$是$Ax=\beta$的通解。

**例1：** 解非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

**解：** $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**法1：** 令$x_3=c_1, x_4=c_2$（$c_1, c_2$为任意常数），则 $\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}c_1-\frac{13}{7}c_2 \\ x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}c_1+\frac{4}{7}c_2 \\ x_3=\qquad c_1 \\ x_4=\qquad\qquad c_2 \end{cases}$

所以，通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**法2：** 令$x_3 = x_4 = 0$,，得$\eta^* = \begin{pmatrix} {}^{13}/_{7} \\ -{}^{4}/_{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

又原方程组对应的齐次方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以原方程组的通解是$\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$（$k_1, k_2$为任意常数）。

**例2** 设有线性方程组$\begin{cases} x_1 + ax_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2a-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + (a+3)x_3 = b \end{cases}$，

(1) 问$a, b$为何值时，方程组有唯一解，无穷多解，无解；

(2) 当方程组有无穷多解时,求出全部解。

**解：法1：**对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换化简，

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & a & a+3 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix}.$$

当$a \neq 1$且$a \neq -1$时, $r_A = r_{\tilde{A}} = 3$方程组有唯一解;

当$a = 1$时，$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

当$a = 1, b \neq 1$时, $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, 方程组无解;

当$a=1,b=1$时，$r_A=r_{\tilde{A}}=2$方程组有无穷多解；

$$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{全部解为}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

同理，当$a=-1$时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&-2&1&0\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&b-1\end{pmatrix}$

当$a=-1,b\neq1$时，$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3$, 方程组无解；

当$a=-1,b=1$时, $r_A=r_{\tilde{A}}=2$方程组有无穷多解；

$$\tilde{\mathrm{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{全部解为}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{k}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

**法2：** $D=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 2a-1 & 3\\ 1 & a & a+3\end{vmatrix}=(a-1)(a+1)$，

当$D\neq 0$，即$a\neq 1$且$a\neq -1$时，方程组有唯一解。

当$a=1$时，$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}$

当$a=1,b\neq 1$时,$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3$,方程组无解;

当$a=1,b=1$时，$r_A=r_{\tilde{A}}=2$方程组有无穷多解;

$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 全部解为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

同理，当$a=-1$时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}$

当$a=-1, b\neq 1$时，$r_A=2\neq r_{\tilde{A}}=3,$方程组无解；

当$a=-1, b=1$时$, r_A=r_{\tilde{A}}=2$方程组有无穷多解；

$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 全部解为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$

**练习1：**设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问$\lambda$取何值时,方程组有解?有无穷多个解?

**解：** $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda+2)$，

当$D \neq 0$，即$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，方程组有唯一解；

当$\lambda = 1$时，$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$方程组有无穷多解；

当$\lambda = -2$时，$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$方程组无解。

**例3** 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为３，已知$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$为该方程组的三个解，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解。

**解：** 因为$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$是$Ax=b$的解，由非齐次方程组解的性质有：

$$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$ 是$Ax=b$的两个解。

从而，$\eta_1-\frac{\eta_2+\eta_3}{2}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$是$Ax=0$的解。

又因为在$Ax=0$中，$R(A)=3<4$。

故$Ax=0$的基础解系只含一个解。

从而，$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$就是$Ax=0$的一个基础解系。

进而，$k\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$($k$为任意常数)就是$Ax=b$的通解。

也即，$c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$($c$为任意常数)是$Ax=b$的通解。

**例4** 已知$\eta^*$为$Ax=b$的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$导出组$Ax=0$的一个基础解系，

证明：1. 向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$线性无关；

2. $Ax=b$有$n-r+1$线性无关的解。

**证明：** 1. 假设向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$线性相关；

因为$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是导出组$Ax=0$的一个基础解系，

故$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$线性无关；

从而，$\eta^*$可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$线性表出，

所以，$\eta^*$也是$Ax=0$的解。

这与$\eta^*$为$Ax=b$的一个特解矛盾，

故原假设不成立，

也即向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$线性无关。

2. 令

$$\eta_1=\xi_1+\eta^*,\eta_2=\xi_2+\eta^*,\cdots,\eta_{n-r}=\xi_{n-r}+\eta^*,$$

由非齐次方程组解的性质可知：

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},\eta^*\text{为}Ax=b\text{的}n-r+1\text{个解。}$$

设$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+k_{n-r+1}\eta^*=0$，即

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+(k_1+\cdots+k_{n-r}+k_{n-r+1})\eta^*=0.$$

由向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r},\eta^*$线性无关可知：

$$k=k_2=\cdots=k_{n-r}=0=k_{n-r+1}.$$

故$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},\eta^*$为$Ax=b$的$n-r+1$个线性无关的解。

# 一、非齐次线性方程组有解的条件

**非齐次线性方程组：**
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

**矩阵形式：** $Ax=\beta$

**向量形式：** $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

**定理1** 设A为$s\times n$型矩阵，则非齐次线性方程组A$x$=$\beta$有解

$\Leftrightarrow$ $\beta$可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示；

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta$等价；

$\Leftrightarrow$ $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta\}$；

$\Leftrightarrow$ $R(A)=R(\tilde{A})$，其中$\tilde{A}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n\ \ \beta)$。

## 二、非齐次线性方程组解的结构

**定义** 与非齐次线性方程组$Ax=\beta$的系数矩阵相同的齐次线性方程组$Ax=0$称为$Ax=\beta$的导出组（或对应的齐次线性方程组）。

**定理2** 设A为$s\times n$型矩阵，则非齐次线性方程组$Ax=\beta$

(1) 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})$；

(2) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})=n$；

(3) 有无穷多解$\Leftrightarrow R(A)=R(\tilde{A})<n$，且通解为$w=p+v_h$，
其中$p$是$Ax=\beta$的一个解，称为**特解**；$\boldsymbol{v_h}$是导出组$Ax=0$的**通解**。
即$\boldsymbol{w=p+k_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t}$,其中$\boldsymbol{k_1,\cdots,k_t}$为任意常数，$\boldsymbol{X_1,\cdots,X_t}$为$\boldsymbol{Ax=0}$的一个基础解系。