四川大学2018级高等数学(1)-2上期半期考试试题参考解答

1．(12分)求空间曲线C:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\x^2+y^2=2y\end{cases}$在点$P(1,1,\sqrt{2})$处的切线方程和法平面方程.

解：球面$x^2+y^2+z^2=4$在点P处的法向量$\vec{n}_1=(2x,2y,2z)\big|_P=2(1,1,\sqrt{2})$； (2)

曲面$x^2+y^2=2y$在点P处的法向量$\vec{n}_2=(2x,2y-2,0)\big|_P=2(1,0,0)$； (4)

曲线C在点P处的切向量$\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 1 & \sqrt{2}\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,\sqrt{2},-1)=(0,\sqrt{2},-1)$ (8)

所求切线方程：$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{-1}$ (10)

所求法平面方程：$y+\sqrt{2}z-3=0$ (12)

2．(12分)设$\vec{n}$是函数$w=x^2+2y^2-2z^2$在点$P(1,1,1)$处的梯度向量，求函数$u=\ln(xy^2z^3)$

在点$P(1,1,1)$处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

解：函数$w=x^2+2y^2-2z^2$在点$P(1,1,1)$处的梯度向量

$\vec{n}=(2x,4y,-4z)\big|_P=2(1,2,-2)\Rightarrow\vec{n}^0=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)$ (4)

函数$u=\ln(xy^2z^3)$在点$P(1,1,1)$处梯度向量为$(u_x,u_y,u_z)\big|_P=(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y},\dfrac{3}{z})\Big|_P=(1,2,3)$ (8)

所求方向导数：$\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)\bullet(1,2,3)=-\dfrac{1}{3}$ (12)

3．(12分)设$z=f(xy,yg(x))$,其中f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导，且$g(1)=1,\ g'(1)=0$，求

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1,y=1}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1,y=1}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))\bullet y+f_2'(xy,yg(x))\bullet y\bullet g'(x)=y[f_1'(xy,yg(x))+g'(x)f_2'(xy,yg(x))]$ (4)

将条件代入可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1,y=1}=f_1'(1,1)$ (6)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,yg(x))+g'(x)f_2'(xy,yg(x))$$

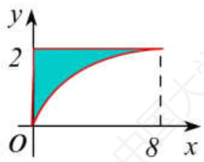
$$+y\{xf_{11}''(xy,yg(x))+g(x)f_{12}''(xy,yg(x))$$

$$+g'(x)[xf_{21}''(xy,yg(x))+g(x)f_{22}''(xy,y)]\} \qquad (10)$$

将条件代入可得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$ (12)

4．(12 分)计算 $\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sin\frac{x}{y}dy$.

解：交换积分次序，可得



(3)

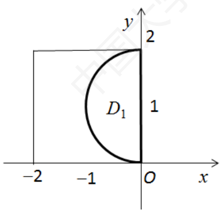
$$\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sin\frac{x}{y}dy=\int_0^2 dy\int_0^{y^3}\sin\frac{x}{y}dx \qquad (6)$$

$$=-\int_0^2 y\cos\frac{x}{y}\Big|_0^{y^3}dy \qquad (9)$$

$$=\int_0^2(y-y\cos y^2)dy=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}\sin y^2\Big|_0^2=2-\frac{1}{2}\sin 4 \qquad (12)$$

5．(13 分)计算 $I=\iint\limits_D ydxdy$, 其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2, x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成.

解：



(3)

$$\iint\limits_{D\cup D_1} ydxdy=\bar{y}\times S=1\times 4=4 \qquad (5)$$

$$\iint\limits_{D_1} ydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta \qquad (9)$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt=\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad (12)$$

所以 $I=4-\frac{\pi}{2}$ (13)

6．(13 分)计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$，其中$\Omega$由 $z=xy, y=x, z=0, x=1$ 围成.

解：积分区域Ω分解为：$\begin{cases}0\le z\le xy\\0\le y\le x\\0\le x\le 1\end{cases}$ (4)

$$I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz \qquad (6)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364} \qquad (13)$$

7．(13 分)求函数 $f(x,y)=x^2-4xy-2y^2+y^3$ 的极值，并判定是极大值还是极小值.

解：求函数偏导函数和二阶偏导函数：

$f_x(x,y)=2x-4y$，$f_y(x,y)=-4x-4y+3y^2$， (2)

$f_{xx}(x,y)=2$，$f_{xy}(x,y)=-4$，$f_{yy}(x,y)=-4+6y$ (4)

求驻点，解方程组$\begin{cases}2x-4y=0\\-4x-4y+3y^2=0\end{cases}$ 得$(0,0)$和$(8,4)$. (6)

对$(0,0)$有 $A=f_{xx}(x,y)=2>0$，$B=f_{xy}(x,y)=-4$，$C=f_{yy}(x,y)=-4$，

于是 $B^2-AC=24>0$，所以$(0,0)$是函数的极小值点，极小值为0. (10)

对$(8,4)$有 $A=f_{xx}(x,y)=2>0$，$B=f_{xy}(x,y)=-4$，$C=f_{yy}(x,y)=20$，

于是 $B^2-AC=-24<0$，$(8,4)$不是函数的极值点. (13)

8．(13 分)设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论函数 $f(x,y)$ 在原点 $O(0,0)$处

(1)偏导存在性；(2)连续性；(3)沿方向 $\vec{n}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的方向导数的存在性，若存在计算出结果.

解：(1)偏导存在性；

因为 $f(x,0)=0$，所以 $f_x(0,0)=0$；同理 $f_y(0,0)=0$； (4)

(2)连续性：取路径$\begin{cases} y = kx^2 \\ x \to 0 \end{cases}$，故 $\lim\limits_{\substack{y=kx^2 \\ x\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$，

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$不存在，从而不连续. **(9)**

(3)因为函数 $f(x,y)$在 $O(0,0)$处不连续，从而不可微，只能用定义讨论方向导数.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(0,0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(\frac{1}{2}\rho,\frac{\sqrt{3}}{2}\rho)-f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{16}\rho^4+\frac{3}{4}\rho^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad (13)$$