小测验 1 答案

姓名______________　　序号______

1、 （10）求数列极限：$a_n=\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+2}+\cdots+\frac{n}{3n^2+n}$.

解：

$$a_n\le\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+1}+\cdots+\frac{n}{3n^2+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(3n^2+1)},\qquad (3')$$

$$a_n\ge\frac{1}{3n^2+n}+\frac{2}{3n^2+n}+\cdots+\frac{n}{3n^2+n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(3n^2+n)},\qquad (3')$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(3n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(3n^2+n)}=\frac{1}{6},\qquad (2')$$

故由夹逼定理，有 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{6}$.　(2′)

2、 （12）求函数极限（三选一）

a) $\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$；

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{x^3}$；

c) $\lim_{x\to+\infty}x^2[lnarctan(x+2)-lnarctanx]$.

解：

a) 因为

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{\ln\left[e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{2}+x^2\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]\right\},\qquad (3')$$

令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{2}+x^2\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}\right)=\lim_{t\to0}\frac{-t+2\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{2t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-1+\frac{1}{1+\frac{t}{2}}}{4t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{2-2-t}{2+t}}{4t}=-\frac{1}{8},\qquad (6')$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{8}}.\qquad (3')$$

b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{tanx-sinx}{x^3\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{sinx(1-cosx)}{x^3}\cdot\frac{1}{cosx\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx\left(\sqrt{1+tanx}+\sqrt{1+sinx}\right)}=\frac{1}{4}.\qquad(12')$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[lnarctan(x+2)-lnarctanx]=\lim_{x\to+\infty}x^2ln\frac{\arctan(x+2)}{arctanx}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{\arctan(x+2)}{arctanx}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\arctan(x+2)-arctanx}{arctanx}$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+2)-arctanx]$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+2)-arctanx}{\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(2+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$
$$=\frac{2x^3(x+1)}{[1+(2+x)^2](1+x^2)}=\frac{4}{\pi}.\qquad(12')$$

3、 （18）$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^3-3t^2+1\\y=2t^4-4t^3+2\end{cases}$($t$为参数)决定，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dt}=8t^3-12t^2=4t^2(2t-3),(3')\ \frac{dx}{dt}=3t^2-6t,(3')$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^2(2t-3)}{3t(t-2)}=\frac{4t(2t-3)}{3(t-2)}.\qquad(3')$$

因为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}},\qquad(3')$$

而

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4}{3}\frac{(4t-3)(t-2)-t(2t-3)}{(t-2)^2}=\frac{8(t-1)(t-3)}{3(t-2)^2},\qquad(3')$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8(t-1)(t-3)}{9t(t-2)^3}.\qquad(3')$$

4、 (20) 设函数$f(x)=\begin{cases}(2x+1)e^{sinx}, x>0\\ ax+b, \quad\quad\quad x\le 0\end{cases}$在$\mathbb{R}$上可导,

a) 求a,b;

b) 讨论$f(x)$在$x=0$处的二阶可导性.

解:

a) 由$f(x)$在$\mathbb{R}$上可导，知$f(x)$连续，且$f'(x)$存在。从而有

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0), f'_+(0)=f'_-(0). \quad (2')$$

因为

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(2x+1)e^{sinx}=1, f(0)=b,$$

所以$b=1$; (3′)

又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{(2x+1)e^{sinx}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}=3, \quad (3')$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{ax+1-1}{x}=a, \quad (2')$$

所以$a=3$. (1′)

b) 由 a)知$f'(x)=\begin{cases}[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}, x>0\\ \quad\quad 3, \quad\quad\quad\quad x\le 0\end{cases}$, (2′)

当$x=0$时,

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{[(2x+1)cosx+2]e^{sinx}-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\{[(2x+1)cosx+2]cosx+2cosx-(2x+1)sinx\}e^{sinx}=5, \quad (5')$$

$$f''_-(0)=0. \quad (1')$$

所以$f''_+(0)\ne f''_-(0)$，从而$f(x)$在$x=0$处的二阶导数不存在。 (1′)

5、 (20) 讨论方程$lnx=kx$的根的个数.

解:

当$k=0$时，方程显然只有一个实根$x=1$. (2′)

当$k>0$时，令

$$f(x)=lnx-kx(k>0). \quad (1')$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k, \quad (1')$$

令$f'(x)=0$得驻点为

$$x=\frac{1}{k}(k>0). \quad (2')$$

由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线始终呈凸状.

当$x \in \left(0,\dfrac{1}{k}\right)$时，$f'(x) > 0$；当$x \in \left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$时，$f'(x) < 0$. (3′)

所以

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = ln\frac{1}{k} - 1 \qquad (2')$$

为最大值.

故当$k > \dfrac{1}{e}$时,$f\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$,此时方程无根;

当 $0 < \mathrm{k} < \dfrac{1}{e}$时,$f\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$,

而

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad (2')$$

因此，此时方程有两个实根，分别位于$\left(0,\frac{1}{k}\right)$和$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$内; (2′)

当$-\infty < k < 0$时，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0$,

因此，方程有且仅有一个实根位于$(0,1)$内. (5′)

6、 **(20)** 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.证明:

a) 存在$\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi) = \xi$;

b) 对任意实数λ，必存在$\eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1$.

证明:

a) 令$F(x) = f(x) - x$(3′)，则$F(x)$在$[0,1]$连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, F(1) = -1 < 0,$$

由连续函数零点定理，必存在$\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi) = \xi$. (5′)

b) 令$G(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$(5′)，则$G(0) = G(\xi) = 0$(2′)，应用罗尔定理，必存在$\eta \in (0,\xi)$，

使得

$$G'(\eta) = -\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta) - \eta] + e^{-\lambda\eta}[f'(\eta) - 1] = 0,$$

于是成立

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1. \qquad (5')$$

证毕

小测验 2 答案 （前三章）

姓名________________ 序号________

1. $(10')$求数列极限：$x_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}(a > 0)$.

解： 当$a = 1$时，$x_n = 0, \lim_{n\to\infty} x_n = 0;$ $(2')$

当$a > 1$时，$a^n \to +\infty, n \to \infty$，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = 1;$ $(4')$

当$0 < a < 1$时，$a^{-n} \to +\infty, n \to \infty$，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = -1.$ $(4')$

2. $(16')$求函数极限（四选二）：

1) $\lim_{x\to 0}(2sinx + cosx)^{\frac{1}{x}}$; $(8')$

2) $\lim_{x\to 0+} \frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})}$; $(8')$

3) $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$; $(8')$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{3sinx + x^2 cos\frac{1}{x}}{(1+cosx)\ln(1+x)}$. $(8')$

解：

1) $\lim_{x\to 0}(2sinx + cosx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1 + 2sinx + cosx - 1)^{\frac{1}{2sinx+cosx-1}\cdot\frac{2sinx+cosx-1}{x}} =$

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{2sinx+cosx-1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2sinx+cosx-1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2sinx}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}} = e^2.$ $(8')$

或者

$\lim_{x\to 0}(2sinx + cosx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(2sinx+cosx)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2sinx+cosx)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2cosx-sinx}{2sinx+cosx}} = e^2.$

2) $\lim_{x\to 0+} \frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-cosx}{x(1-cos\sqrt{x})(1+\sqrt{cosx})} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\cdot(1+\sqrt{cosx})} = \frac{1}{2}.$ $(8')$

3) $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{100x}{-x\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-x} =$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{100}{-\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)} = -50.$ $(8')$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{3sinx + x^2 cos\frac{1}{x}}{(1+cosx)\ln(1+x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{3sinx + x^2 cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3sinx}{x} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} xcos\frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$ $(8')$

3. $(16')$设函数$y = f(x)$由方程$y - x = e^{x(1-y)}$确定，求$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$.

解： 由题有$f(0) - 0 = e^{0(1-f(0))}$，即$y|_{x=0} = f(0) = 1$ $(3')$. 所以$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) =$ $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0).$ $(4')$

方程左右两边对x求导，有$y' - 1 = (1 - y - xy')e^{x(1-y)}$ $(5')$,

所以$f'(0) = y'|_{x=0,y=1} = 1.$ (4′)

4. (20′)函数$f(x) = (x^3+1)^{10} arctanx$，求$f^{(10)}(-1)$.

解： 由题$f(x) = (x+1)^{10} g(x)$，其中$g(x) = (x^2 - x + 1)^{10} arctanx$. (3′)

由莱布尼兹公式，有

$$f^{(10)}(x) = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} [(x+1)^{10}]^{(k)} g^{(n-k)}(x) = C_{10}^{10} [(x+1)^{10}]^{(10)} g(x) = 10!\, g(x), \text{(8′)}$$

又$g(-1) = (1+1+1)^{10} \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} 3^{10}$ (3′),所以$f^{(10)}(-1) = -10!\, 3^{10} \cdot \frac{\pi}{4}$. (3′)

5. (18′)已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0) = 0, f(1) = 1$.证明:
   1) 存在$\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi) = 1 - \xi$;
   2) 存在两个不同的点$c_1, c_2 \in (0,1)$,使得$f'(c_1) f'(c_2) = 1$.

证明：

1) 令$F(x) = f(x) - 1 + x$ (4′)，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0) = -1 < 0, F(1) = 1 > 0$,

由介值定理知，存在$\xi \in (0,1)$,使得$F(\xi) = f(\xi) - 1 + \xi = 0$,即$f(\xi) = 1 - \xi$. (4′)

2) 在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上对$f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点

$c_1 \in (0,\xi), c_2 \in (\xi,1)$，使得$f'(c_1) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi - 0}$ (3′), $f'(c_2) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$. (3′)

于是$f'(c_1) f'(c_2) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1-\xi} = 1$. (4′)

证毕

6. (20′)试确定A, B, C的值，使得$e^{2x}(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$.

解： 由泰勒展开，$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ (4′)，代入已知等式得

$$\left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right](1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

整理得

$$1 + (2+B)x + (2+2B+C)x^2 + \left(\frac{4}{3} + 2B + 2C\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3), \text{(4′)}$$

比较两边同幂次函数得

$$\begin{cases} 2 + B = A, \\ 2 + 2B + C = 0, \\ \dfrac{4}{3} + 2B + 2C = 0. \end{cases} \text{(6′)}$$

解得

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{3}, \\ B = -\dfrac{4}{3}, \\ C = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \text{(6′)}$$

附加题：$(20')$设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$.证明：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ,使$f'''(\xi)=3$.

证明：由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(x)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,\eta\text{介于 0 与}x\text{之间}.$$

将$x=-1$和$x=1$分别代入上式中，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0;\ (4')$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1.(4')$$

两式相减，可得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.(3')$$

设M和m分别是$f'''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]$上的最大值与最小值，显然有

$$m\le f'''(\eta_1),f'''(\eta_2)\le M,$$

则

$$m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M.(4')$$

由连续函数介值定理知，至少存在一点$\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$,使得

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.(5')$$

证毕

小测验 3 不定积分 答案

姓名：________________序号：________

1. $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8-4x^4-12}dx$ **(6′)**

解：

$$原式=\frac{1}{4}\int \frac{x^8 d(x^4)}{x^8-4x^4-12} \overset{t=x^4}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{4}\int \frac{t^2}{t^2-4t-12}dt=\frac{1}{4}\int \frac{t^2-4t-12+4t+12}{t^2-4t-12}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int dt+\int \frac{4t+12}{(t-6)(t+2)}dt\right)=\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\int \left(\frac{\frac{9}{2}}{t-6}-\frac{\frac{1}{2}}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}t+\frac{9}{8}\ln|t-6|-\frac{1}{8}\ln|t+2|+C=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x^4-6)^9}{x^4+2}\right|+C.$$

2. $\displaystyle\int e^{sinx}\cdot\frac{xcos^3x-sinx}{cos^2x}dx$ **(6′)**

解：

$$原式=\int x\cdot e^{sinx}cosxdx-\int e^{sinx}\cdot\frac{sinx}{cos^2x}dx=\int xd\left(e^{sinx}\right)+\int e^{sinx}\cdot\frac{1}{cos^2x}d(cosx)$$

$$=xe^{sinx}-\int e^{sinx}dx-\int e^{sinx}d\left(\frac{1}{cosx}\right)$$

$$=xe^{sinx}-\int e^{sinx}dx-e^{sinx}\cdot\frac{1}{cosx}+\int \frac{1}{cosx}d\left(e^{sinx}\right)$$

$$=xe^{sinx}-\int e^{sinx}dx-e^{sinx}\cdot\frac{1}{cosx}+\int e^{sinx}dx=xe^{sinx}-\frac{e^{sinx}}{cosx}+C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ **(6′)**

解：

设 $$x=sint\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $$dx=costdt,\sqrt{1-x^2}=cost,$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{dt}{1+sin^2t}=\int \frac{dt}{2sin^2t+cos^2t}=\int \frac{dt}{cos^2t(2tan^2t+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}tant)}{\left(\sqrt{2}tant\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}tant\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

4. $\int \frac{sinxcosx}{sinx+cosx}dx$ **(6′)**

解：

$$原式=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2sinxcosx+1-1}{sinx+cosx}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(sinx+cosx)^2}{sinx+cosx}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{sinx+cosx}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(sinx+cosx)dx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}(sinx-cosx)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

5. $\int \max\{1,x^2\}dx$ **(8′)**

解： 当$|x|\le 1$时，

$$\int \max\{1,x^2\}dx=\int dx=x+C_1,$$

当$x>1$时，

$$\int \max\{1,x^2\}dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_2,$$

当$x<-1$时，

$$\int \max\{1,x^2\}dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_3,$$

设$F(x)$是满足$F(1)=1$的原函数，则上面的讨论知

$$F(x)=\begin{cases}x+C_1,-1\le x\le 1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_2,x>1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3,x<-1,\end{cases}$$

其中C_1,C_2,C_3为常数.由于

$$1=F(1)=\lim_{x\to 1+0}F(x),$$

有

$$1=1+C_1=\frac{1}{3}+C_2,$$

故$C_1=0,C_2=\frac{2}{3}$;

又$F(-1)=\lim_{x\to -1-0}F(x)$,

$$-1=-\frac{1}{3}+C_3,$$

故$C_3=-\frac{2}{3}$.

从而

$$F(x)=\begin{cases} x,-1\le x\le 1, \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3},x>1, \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3},x<-1. \end{cases}$$

因此

$$\int \max\{1,x^2\}dx=F(x)+C=\begin{cases} x+C, & |x|\le 1, \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}sgnx+C, & |x|\le 1. \end{cases}$$

6. 设$f(x^2-1)=ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且$f[\varphi(x)]=lnx$，求$\int \varphi(x)dx$.**(8′)**

解：

设$x^2-1=t$，则$x^2=t+1$，代入$f(x^2-1)=ln\frac{x^2}{x^2-2}$中得$f(t)=ln\frac{t+1}{t-1}$.

因此

$$f\big(\varphi(x)\big)=ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=lnx.$$

再由

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=lnx$$

解得

$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1},$$

于是

$$\int \varphi(x)dx=\int \frac{x+1}{x-1}dx=\int \left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)dx=\int \left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx=x+2\ln|x-1|+C.$$

小测验 4 定积分和空间解析几何

一、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. (6‘)

解： 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$,

令

$$\frac{1}{x}=t,$$

则

$$原式=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t}{2}=\frac{1}{2}.$$

二、求广义积分 $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}(\alpha\ge0)$. (6‘)

解： 令

$$\frac{1}{x}=t,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha+1-1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)},$$

所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}arctant|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

三、求定积分 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}ln(sinx)\,dx$. (6‘)

解： 令$x=2t$, 则$dx=2dt$. 当$x=0$ 时, $t=0$; $x=\frac{\pi}{2}$时, $t=\frac{\pi}{4}$. 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln(sinx)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(sin2t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(2sintcost)\,dt$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln2dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(sint)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(cost)\,dt\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}ln2+2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(sint)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(cost)\,dt\right).$$

对$\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(cost)\,dt$，令$u=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}ln(cost)\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(sinu)\,du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(sint)\,dt.$$

所以，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln(sinx)\,dx=\frac{\pi}{2}ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln(sinx)\,dx,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln(sinx)\,dx=-\frac{\pi}{2}ln2.$$

四、1. 计算星形线$x=acos^3t,y=asin^3t(a>0)$的全长;(6')

2. 把该星形线所围成的图形绕x轴旋转，计算所得到的旋转体的体积.(6')

解： 1）由对称性，只需计算星形线位于第一象限部分的弧长，用参数式弧长公式，这里$x=0$对应$t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$对应$t=0$，所求弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3acos^2t(-sint)]^2+[3asin^2t(cost)]^2}dt$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}sintcostdt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}sintd(sint)=6asin^2t|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

2）由对称性，只需计算星形线位于第一象限的部分绕x轴旋转的体积再两倍即可。这时$x=0$对应$t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$对应$t=0$.所以所求体积为

$$V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0a^2sin^6t\cdot 3acos^2t(-sint)dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^7t(1-sin^2t)dt$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^7t-sin^9t)dt=6\pi a^3\left(\frac{6\times4\times2}{7\times5\times3\times1}-\frac{8\times6\times4\times2}{9\times7\times5\times3\times1}\right)$$

$$=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

五、求直线l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi$: $x-y+2z-1=0$上的投影直线l_0的方程，并求l_0绕y轴旋转一周所成曲面的方程。(10‘)

解：

1) 将直线l改为一般式

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0.\end{cases}$$

则过l的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0, \text{即} x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

因为它与平面π垂直，所以得$1-(\lambda-1)+2\lambda=0$,解得$\lambda=-2$.回代到平面束方程中得到经过直线l且垂直于平面π的平面方程为$x-3y-2z+1=0$.于是l_0的方程为

$$l_0:\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\ x-3y-2z+1=0.\end{cases}$$

2) 将l_0化为$\begin{cases}x=2y,\\ z=-\frac{1}{2}(y-1).\end{cases}$于是$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$$

即$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

四川大学期末考试试卷（A 卷）

（2015—2016 年第一学期）

科目：微积分（I）-1　　课程号：201138040　　考试时间：120 分钟

注：请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分，共 21 分)

1．1;　　2．4;　　3．$(1,2)$；　4．$x-\arctan x+C$；5．$\dfrac{\pi}{2}$;　　6．0;　　7．$a\geq e$

二、计算题 (每小题 9 分，共 45 分)

1．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=e$

2．由方程 $ye^{xy}=1-x$ 确定函数 $y=y(x)$，计算 $y''(0)$.

解：方程 $ye^{xy}=1-x$ 两边对 x 求导：

$$y'e^{xy}+ye^{xy}(xy'+y)=-1$$

$$(y'+xyy'+y^2)e^{xy}=-1 \qquad (1)$$

令 $x=0$，由原方程得 $y(0)=1$，代入上式，得到　　$y'(0)=-2$

(1)式两边再对 x 求导：

$$(y''+yy'+xy'^2+xyy''+2yy')e^{xy}+(y'+xyy'+y^2)e^{xy}(xy'+y)=0$$

将 $x=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$ 代入上式，得到：　　$y''(0)=7$

3．计算不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{x})dx$.

解：令 $t=\ln(1+\sqrt{x})\to x=(e^t-1)^2\to dx=2(e^t-1)e^t dt$

$$\int \ln(1+\sqrt{x})dx=2\int t(e^{2t}-e^t)dt=2\int td(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)$$

$$=2t(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)-2\int(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)dt=t(e^{2t}-2e^t)-\int(e^{2t}-2e^t)dt$$

$$=t(e^{2t}-2e^{t})-(\frac{1}{2}e^{2t}-2e^{t})+C=(t-\frac{1}{2})e^{2t}+2(1-t)e^{t}+C$$

$$=[\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}](1+\sqrt{x})^{2}+2[1-\ln(1+\sqrt{x})](1+\sqrt{x})+C$$

4．计算定积分$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解：$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}d\,(1+x^2)+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-1$$

5．求曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的所有渐近线.

解：(1) 当$x\to 0$时，$y\to\infty$，所以$x=0$(y轴)是函数的垂直渐近线；

(2) 当$x\to-\infty$时，$y\to 0$，所以$y=0$(x轴)是函数的水平渐近线；

(3) 当$x\to+\infty$时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x}=0$$

所以$y=x$是函数的斜渐近线.

三、解答题 (每小题 10 分，共 20 分)

1．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解：幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛半径$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛域为$(-1,1)$．当$x\in(-1,1)$时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n-1}dx=2\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1})dx$$

$$=2\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\int_0^x\frac{1}{1-x^2}d(1-x^2)=-\ln(1-x^2)$$

2．已知曲线$y=x^2$与$y=ax$　$(0<a<1)$所围成图形的面积为S_1，曲线$y=x^2$，$y=ax$与$x=1$所围成图形的面积为S_2，确定a的值，使S_1+S_2达到最小，并求出S_1+S_2的最小值.

解：(1) 曲线 $y=x^2$ 与 $y=ax$ 所围成图形的面积为 S_1

$$S_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=(\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^a=\frac{1}{6}a^3$$

(2) 曲线 $y=x^2$， $y=ax$ 与 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2

$$S_2=\int_a^1(x^2-ax)dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2)\Big|_a^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}a^3$$

所以 $T=S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}a^3$

(3) 求最大值：两边对 a 求导数： $T'=-\frac{1}{2}+a^2=0\to a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0<a<1)$

由于 $T''=2a\big|_{a=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}>0$，$T$ 在 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极小值，由于只有一个极小值，故为最小值，这时 $(S_1+S_2)_{\max}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

四、证明题 (每小题 7 分，共 14 分)

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 也收敛.

证明： 根据不等式 $|\frac{a_n}{n}|\le\frac{1}{2}(a_n{}^2+\frac{1}{n^2})$，

由已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n}{n}|$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.

2．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.

证明: 由已知 $f(0)=f(1)=0$,根据罗尔定理，存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=0$.

令 $\varphi(x)=x^2f'(x)$，根据条件有 $\varphi(0)=\varphi(\eta)=0$，再利用罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $\xi^2f''(\xi)+2\xi f'(\xi)=0$ 或 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$

参考解答及评分标准

一、填空题（每题3分，共18分）

1、$(-1,1]$;

2、$y=x-1$;

3、$(2,0)$;

4、$\dfrac{\pi}{2}$;

5、2017;

6、$\dfrac{e+e^{-1}}{2}$.

二、解答题（每题8分，共48分）

1、计算不定积分 $\int(x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{e^x}{1+e^{2x}})dx$;

解：（以下解题步骤每行2分）

原式$=-\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$

$\quad+\int\dfrac{de^x}{1+(e^x)^2}$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\arctan e^x+C$

$=-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\arctan e^x+C=\dfrac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\arctan e^x+C$

2、计算定积分 $\int_0^\pi x\sin^2 xdx$;

解：（以下解题步骤每行2分）

由公式$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$，原式$=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin^2 xdx$

因为π是函数$\sin^2 x$的周期，原式$=\dfrac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

再由定积分的对称性，原式$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

根据$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$的积分公式，原式$=\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{4}$

另解：原式$=\int_0^\pi x\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\int_0^\pi\dfrac{x}{2}dx-\dfrac{1}{4}\int_0^\pi xd\sin 2x$

$=\dfrac{1}{4}x^2\Big|_0^\pi-\dfrac{1}{4}x\sin 2x\Big|_0^\pi+\dfrac{1}{4}\int_0^\pi\sin 2xdx$

$=\dfrac{\pi^2}{4}-0-\dfrac{1}{8}\cos 4x\Big|_0^\pi=\dfrac{\pi^2}{4}$

3、把函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$展开为x的幂级数，并求$f^{(10)}(0)$；

解：（以下解题步骤每行2分）

因为 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$|x|<1$

利用逐项积分，$\ln(1+x)=\int_0^x \dfrac{dt}{1+t}=\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

$\therefore f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，$x\in(-1,1]$

因此，$\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=-\dfrac{1}{8}$，$f^{(10)}(0)=-\dfrac{10!}{8}=-453600$

4、判断广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$的敛散性；

解：（以下解题步骤每行1分）

原式$=\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=\infty$，$x=0$是$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$的瑕点

考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^q\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=1$，这里$q=\dfrac{1}{3}$

既然 $q<1$，由定理可知广义积分$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$收敛（*）

考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p-4/3}}{(1+x^{-1})}$，

取$p=\dfrac{4}{3}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=1$

既然 $p>1$，由定理可知广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$收敛（**）

由（*）和（**），原式收敛。

5、设函数$y=y(x)$是由方程组$\begin{cases}x=\int_1^t e^{-u^2}du\\ y^3-\ln(x+t)=1\end{cases}$确定的，求$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$；

解：（以下解题步骤每行2分）

因为$e^{-u^2}>0$，当$x=0$时，必须$t=1$，于是$y^3=1$，$y=1$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-t^2}$，$3y^2\cdot\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{x+t}\cdot(\dfrac{dx}{dt}+1)=0$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{3y^2(x+t)}\cdot(\dfrac{dx}{dt}+1)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1+e^{t^2}}{3y^2(x+t)}$

$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=\dfrac{1+e^{t^2}}{3y^2(x+t)}|_{x=0,y=1,t=1}=\dfrac{1+e}{3}$

6、设连续函数$f(x)$满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{2x} f(3x-t)dt}{(e^x-1)\tan x}$.

解：（以下解题步骤每行1分）

令$u=3x-t$，$du=-dt$

$g(x)=\int_x^{2x} f(3x-t)dt=\int_{2x}^{x} f(u)(-du)=\int_x^{2x} f(u)du$

$g'(x)=f(2x)\cdot(2x)'-f(x)\cdot(x)'=2f(2x)-f(x)$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$，因为$g(0)=0$，可以使用洛必达法则得到：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(2x)-f(x)}{2x}$（这里题设不支持洛必达法则）

因为$f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{2x}=1$

因此，原式$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

三、应用题：(20分）

1、设曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x^2$围成的平面区域为D，

（1）求区域D的面积（4分）；

（2）求区域D绕y轴旋转的旋转体体积（6分）.

解：（以下解题步骤每行2分）

（1）正确画出区域D的图像，区域D的面积$=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$

$=(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}x^3)|_0^1=\dfrac{1}{3}$

（2）$y=x^2$、$y=1$与$x=0$围成区域绕y轴旋转的体积$V_1=\int_0^1 \pi y dy$；

$y=\sqrt{x}$、$y=1$与$x=0$围成区域绕y轴旋转的体积$V_2=\int_0^1 \pi(y^2)^2 dy$

于是，区域D绕y轴旋转的旋转体体积$=V_1-V_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{10}$

另解：由元素法，$dV=2\pi x(\sqrt{x}-x^2)dx$

于是，区域D绕y轴旋转的旋转体体积$=\int_0^1 2\pi x(\sqrt{x}-x^2)dx$

$=2\pi(\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{4}x^4)\big|_0^1=\dfrac{3\pi}{10}$

2、宽度分别为a和b的两条走廊相交成直角，打算将一根细棒经过这两条走廊水平运出，

（1）如果细棒长度为$a+b$，讨论能否水平运出该细棒（3分）；

（2）设细棒紧靠走廊拐角，并与一条走廊的夹角为$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，求细棒最大长度（2分）

（3）当$b = 3\sqrt{3}a$时，求能够水平运出的细棒的最大长度（5分）．

解：（以下解题步骤每行1分）

（1）正确画出走廊的图像，以及如下过程示意图：

将细棒紧贴一条走廊侧边并接触到另一条走廊侧边，

细棒绕走廊拐角旋转90度即可水平运出；

（2）细棒落在走廊内的两段，其长度分别不超过$\dfrac{a}{\sin\theta}$和$\dfrac{b}{\cos\theta}$

于是细棒最大长度 $l = l(\theta) = \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$，$\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

（3）计算 $l'(\theta) = -\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}a + \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}b = b\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\tan^3\theta - \dfrac{a}{b})$

由$l'(\theta) = 0$可得 $\tan^3\theta = \dfrac{a}{b} = (\dfrac{\sqrt{3}}{3})^3$，解得驻点 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

当$\theta \in (0, \dfrac{\pi}{6})$时，$l'(\theta) < 0$；当$\theta \in (\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2})$时，$l'(\theta) > 0$；

$\therefore l(\dfrac{\pi}{6}) = 2a + \dfrac{2b}{\sqrt{3}} = 8a$是$l(\theta)$的极小值，由题意只要细棒长度

不超过$8a$就能通过走廊，故细棒最大长度为$8a$。

注：如果取 $l = l(\theta) = \dfrac{b}{\sin\theta} + \dfrac{a}{\cos\theta}$，$\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，

那么驻点为$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，极小值为$l(\dfrac{\pi}{3}) = 8a$

四、证明题：（每题7分，共14分）

1、设$a_n=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx$，$b_n=(n+1)\dfrac{a_n}{2^n}$，$c_n=(-1)^n\sqrt{a_n}$，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\ln 2$（4分）；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 条件收敛（3分）.

证：（以下证明步骤每行1分）

（1）$a_n=\int_0^1(x^{n-1}-x^n)dx=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$b_n=2^{-n}(n+1)a_n=\dfrac{1}{n}\cdot 2^{-n}$，于是考虑$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\dfrac{dt}{1-t}=\ln\dfrac{1}{1-x}$，$|x|<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=s(\dfrac{1}{2})=\ln 2$

（2）显然$\sqrt{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$单调减少并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$，

由交错级数收敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$收敛

但是，$\sqrt{a_n}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$发散，得证

2、设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，并且$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2017}$，求证：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\xi^{2016}$（3分）；

（2）对任意的正整数n，都存在$\xi_i\in(\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n})$，使得$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i^{2016}$（4分）.

证：（以下证明步骤每行1分）

（1）（对结论积分容易想到）构造辅助函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\dfrac{x^{2017}}{2017}$

因为$F(0)=0$，$F(1)=\int_0^1 f(t)dt-\dfrac{1}{2017}=0$，由罗尔定理，

存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=f(\xi)-\xi^{2016}=0$，得证；

（2）对任意的正整数n，$F(x)$在$[\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}]$上连续可导，$i=0,1,2,\cdots$

由中值定理，存在$\xi_i\in(\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n})$，使得$F(\dfrac{i+1}{n})-F(\dfrac{i}{n})=F'(\xi_i)\cdot\dfrac{1}{n}$

$\because\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(F(\dfrac{i+1}{n})-F(\dfrac{i}{n})\right)=F(1)-F(0)=0$，

$\therefore\sum\limits_{i=0}^{n-1}F'(\xi_i)\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(f(\xi_i)-\xi_i^{2016}\right)=0$，两边乘以$n$即可得证.

2017-2018 微积分(1)-1 期末试题参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $[-1,1]$； 2. $\frac{1}{2}$； 3. $\frac{\pi}{2}$； 4. $2eC_{2018}^{2}$； 5. $-\frac{4}{\pi}$； 6. 2.

二、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1.计算不定积分 $\int [\frac{\ln x}{x} + x(x-1)^{2018}]\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x + \int x(x-1)^{2018}\mathrm{d}x$

$$= \int \ln x\,\mathrm{d}\ln x + \int (x-1+1)(x-1)^{2018}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x + \int [(x-1)^{2019} + (x-1)^{2018}]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2020}(x-1)^{2020} + \frac{1}{2019}(x-1)^{2019} + C.$$

注：两个不定积分每个分别 4 分.

2.设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1$， $f(2)=7$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$

$$= [\frac{1}{2}xf'(2x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2} - [\frac{1}{4}f(2x)]_0^1 = 1.$$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}{(e^x-1)\sin x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

4.已知函数 $f(u)$ 可导，$f(0)=0$，且由方程 $f(x^2y)+e^{x+y}=e-x$ 可确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

解 由题意易知，当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两边同时对 x 求导，

$$f'(x^2y)(2xy+x^2\frac{dy}{dx})+e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})=-1$$

解之得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{f'(x^2y)\cdot 2xy+e^{x+y}+1}{f'(x^2y)\cdot x^2+e^{x+y}}$. 故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\left.\frac{f'(x^2y)\cdot 2xy+e^{x+y}+1}{f'(x^2y)\cdot x^2+e^{x+y}}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{e+1}{e}$.

注 可以不解 y' 而直接得到答案.

5.将函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $f^{(2017)}(0)$.

解 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n$$

$$f^{(2017)}(0)=a_{2017}\cdot 2017!=\frac{2}{2017}\cdot 2017! = 2\cdot 2016!$$

注 前一问 6 分，后一问 2 分.

6.判断无穷限广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 1 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}(x^2+1)=\lim\limits_{t\to+\infty}[\frac{-1}{x^2+1}]_0^t=1$

故无穷限广义积分收敛.

解 2 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$

而 $\int_0^1\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x\le\int_0^1 2\mathrm{d}x=2$，$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x\le\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x=1$，

故原无穷限广义积分也收敛.

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设两曲线为 $l_1: y=x^2, l_2: x+y=2$.

(1) 求 l_1 在点 $x=0$ 处的曲率；

(2) 求 l_1 与 l_2 所围成图形的面积；

(3) l_1 与 l_2 围成的图形绕 x 轴旋转一周，求旋转体的体积.

解 (1) $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=0}=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=0}=2.$

(2) 由 $\begin{cases} y=x^2 \\ x+y=2 \end{cases}$，得交点 $(-2,4),(1,1)$. 故 l_1 与 l_2 所围成图形的面积

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x=[2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

(3) l_1 与 l_2 围成的图形绕 x 轴旋转一周，旋转体的体积.

$$V=\pi\int_{-2}^{1}((2-x)^2-x^4)\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{1}(4-4x+x^2-x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\pi[4x-2x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5]_{-2}^{1}=\frac{72}{5}\pi$$

注 分值为 2, 3, 3.

2.讨论方程 $k-e^{-x}x^2=0$ (其中 k 为参数) 有几个实根，并说明理由.

解 设 $f(x)=e^{-x}x^2$，令 $f'(x)=-e^{-x}x^2+2xe^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}=0$，得 $x=0,2$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$，函数单增；当 $x\in(0,2)$ 时， $f'(x)<0$，函数单减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，函数单增.

故 $f(0)=0$ 为极小值； $f(2)=4e^{-2}$ 为极大值.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

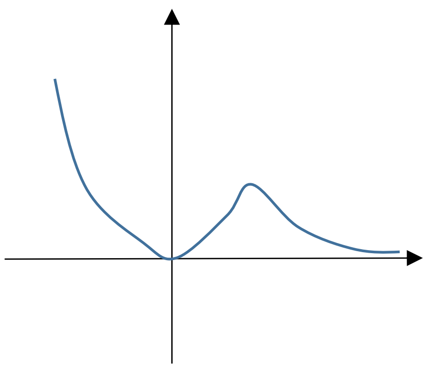
从而当 $k<0$ 时，方程无根；

当 $k=0$ 时，方程有一个根；

当 $0<k<4e^{-2}$ 时，方程有三个根；

当 $k=4e^{-2}$ 时，方程有两个根；

当 $k>4e^{-2}$ 时，方程有一个根.



四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ 收敛.

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2}{\frac{1}{n}}}=e^{-\frac{1}{2}}<1$$

由比值审敛法知，该数项级数收敛.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $|f''(x)|\geq 1$，又 $f(0)=f(1)=0$，(1)设 $|f(x_0)|=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$，证明 $x_0\in(0,1)$；(2) 证明 $|f(x_0)|\geq\frac{1}{8}$.

证明 (1)由于 $|f''(x)|\geq 1$，故 $f(x)$ 不可能为常量，所以 $|f(x_0)|$ 一定大于零，而 $f(0)=f(1)=0$，从而 $x_0\in(0,1)$.

(2) 由(1)知，x_0 为极值点，所以 $f'(x_0)=0$. 将函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处展开，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

故 $0=f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2$，得 $|f(x_0)|=|\frac{f''(\xi_1)}{2}|x_0^2\geq\frac{x_0^2}{2}$ (1)

$0=f(1)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$，得 $|f(x_0)|=|\frac{f''(\xi_2)}{2}|(1-x_0)^2\geq\frac{(1-x_0)^2}{2}$ (2) 由 (1)(2)

$|f(x_0)|\geq\frac{x_0^2+(1-x_0)^2}{2}\geq\frac{1}{2}$.

注：第一问 3 分，第二问 4 分.

2018-2019 微积分(1)-1 期末试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\sqrt{3}$； 2. 3； 3. $\dfrac{2}{\pi}$； 4. 收敛； 5. 0 ； 6. e.

二、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+\dfrac{x^2}{2}}{\sin^3 x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ ……………………….4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………..………….8 分

2.求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+2x+\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\arctan x+\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)+\int\arctan x\,\mathrm{d}\arctan x$ ……………6 分

$=\arctan x+\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$. ……………8 分

3.计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3\sqrt{1+x^6}+\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

解 由奇偶性，原式 $=2\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ （令 $x=\sin t$）

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t$ …………………4 分

$=2I_3=\dfrac{4}{3}$ …………………8 分

4.设方程 $y=1+\displaystyle\int_0^{xy}e^{t^2}\mathrm{d}t$ 可确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$ 的值.

解 由题意易知，当 $x=0$ 时， $y=1$. 方程两边同时对 x 求导，$\dfrac{dy}{dx}=e^{x^2y^2}(y+x\dfrac{dy}{dx})$,

解之得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{x^2y^2}}{1-xe^{x^2y^2}}$. 故 ....6 分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{ye^{x^2y^2}}{1-xe^{x^2y^2}}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=1. \qquad ....8 \text{ 分}$$

5.设常数 $a\in(0,2]$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax$, $x\in[0,a]$, 试求 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上的最小值.

解 令 $f'(x)=x^2-a=0$，解之得 $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$（舍去）.

当 $0<a<1$ 时，$\sqrt{a}>a$，则 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单减，故

$$\min_{x\in[0,a]} f(x)=f(a)=\frac{1}{3}a^3-a^2. \qquad ....6 \text{ 分}$$

当 $1\le a\le 2$ 时，$0<\sqrt{a}\le a$，则 $f(x)$ 在 $[0,\sqrt{a}]$ 上单减，在 $[\sqrt{a},a]$ 上单增，故

$$\min_{x\in[0,a]} f(x)=f(\sqrt{a})=-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}. \qquad ....8 \text{ 分}$$

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设有两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$，（1）求 L_1 与 L_2 的夹角；（2）求经过 L_1 且平行 L_2 的平面方程；（3）求 L_1 与 L_2 之间的最短距离.

解 （1）直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\vec{l_1}(1,-1,1)$, $\vec{l_2}(1,1,2)$, 所以

$$\cos\theta=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}, \theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}. \qquad ....3 \text{ 分}$$

（2）设平面上任意点 $M(x,y,z)$, 则 $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$, 整理得平面方程为

$$3x+y-2z+3=0. \qquad ....7 \text{ 分}$$

（3）设 $M_1(0,1,2)$, $M_2(1,2,0)$, L_1 与 L_2 之间的最短距离为

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{l_1},\vec{l_2}]|}{|\vec{l_1}\times\vec{l_2}|}=\frac{8}{\sqrt{14}}. \qquad ....10 \text{ 分}$$

2.设平面内曲线 $y=\sqrt{2x}$ 和直线 $y=x-4$ 及 x 轴围成的图形为 D，(1) 求 D 的面积；(2) 求 D 绕 x 轴

旋转一周所成立体的体积.

解 (1) 由$\begin{cases} y=\sqrt{2x} \\ y=x-4 \end{cases}$，得交点 $A(8,4)$. 故

$$S(D)=\int_0^4 (4+y-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y=[4y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3]_0^4=\frac{40}{3}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

(2) 直线 $y=x-4$ 与 x 轴的交点为 $(4,0)$，故 D 绕 x 轴旋转一周所成立体的体积

$$V=\pi\int_0^8 (\sqrt{2x})^2\mathrm{d}x-\pi\int_4^8 (x-4)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{3}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\geq 0$，试证明

$$2\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \geq (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设 $g(x)=2\int_a^x t f(t)\mathrm{d}t-(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g(a)=0$，且

$$g'(x)=2xf(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(a+x)f(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)(a\leq\xi\leq x)(\text{中值定理})$$

$$=(x-a)(f(x)-f(\xi))$$

又 $f'(x)\geq 0$， $f(x)$ 单增，所以 $f(x)\geq f(\xi)$，因此 $g'(x)\geq 0$，从而 $g(x)$ 单增，故 $g(b)\geq 0$，原不等式成立. ………………………8 分

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(x)$ 不恒为 0，若 $f(\frac{1}{n})=0(n=1,2,\cdots)$

证明： $(1)f(0)=0$； $(2)f'_+(0)=0$ (

证明 (1) 由连续性， $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=0$. ………………………3 分

(2) 在区间$[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$上，由罗尔中值定理知，存在$\xi_n\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$，使得 $f'(\xi_n)=0(n=1,2,\cdots,)$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$. 又由导函数的连续性， $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)=0$. ……………8 分

2019-2020 学年第 1 学期微积分 1-1 参考答案

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. $\underline{\frac{4}{3}}$ ； 2. $\underline{x=0}$； 3. $\underline{C_n^2 2^{n-1} e^4}$； ，4. $\underline{-\frac{1}{3}(e-1)}$； 5. $\underline{(1,+\infty)}$

二、计算题(每小题8分，共32分)

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$.

解 由等价无穷小，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x^2}=-1.$$

2.设方程 $e^{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\int_1^y\sqrt{4-t^2}dt=1$ 可确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

解 易知当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两边同时对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,y'=0. \qquad (1)$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入(1)式，解之得 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=-1$.

再对(1)式两边同时对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(y'+y'+xy'')+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}(y')^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,y''=0.$$

将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=-1$ 代入上式，解之得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=\dfrac{4}{3}$.

3.计算不定积分 $\int\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$.

解
$$原式=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}(x^2-1)^{-1}=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2-1)x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{4}(\ln(x-1)-2\ln x+\ln(x+1))+C$$

4.计算定积分$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}dx$.

解 原式$=\int_0^2 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx \overset{x=t+1}{=} \int_{-1}^1 (t+1)^2\sqrt{1-t^2}dt$ **(奇偶性)**

$$=2\int_0^1 (t^2+1)\sqrt{1-t^2}dt \overset{t=\sin\theta}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta+1)\cos^2\theta d\theta$$

$$=\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4\theta)d\theta=2(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{5\pi}{8}.$$

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数$g(x)$二阶可导且$g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=1$，并设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

求$f'(0)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 由定义，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-2e^{2x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2+2-2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{2x}}{2x}=-\frac{3}{2}$$ ………6 分

所以$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}, & x\neq 0\\ -3/2 & ,x=0\end{cases}$. **因为**

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2e^{2x}}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{2x}}{x^2}=-\frac{3}{2}$$

所以$f'(x)$在$x=0$处连续. ………………………………10 分

注：若直接使用$\lim\limits_{x\to 0}g''(x)=1$，(1)(2)小问各扣1分.

2.若方程$x^2=ae^x(a\neq 0)$有唯一解，试求a的取值范围.

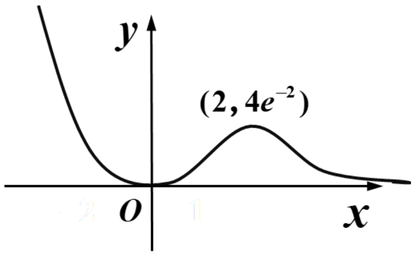
解 由$x^2=ae^x$得,$a=x^2e^{-x}$. 令$f(x)=x^2e^{-x}$，

则当$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=0$时，$x=0$或$x=2$.

列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.



故当$4e^{-2}<a<+\infty$时,有唯一解.

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.设空间中有点$M(1,1,1)$及直线l: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

(1)求经过点M与直线l的平面方程；

(2)求直线l绕z轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

解 (1)设平面上任意点$P(x,y,z)$,则$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,故平面方程为

$$x-z=0 \qquad \text{……………5 分}$$

(2)由$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$得$x=z$, $y=2z+1$,故直线l绕z轴旋转一周所成的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=z^2+(2z+1)^2=5z^2+4z+1 \qquad \text{……………10 分}$$

2.设曲线$y=\sin^4 x(0\le x\le\pi)$与x轴围成的图形为S,(1)求S的面积A;(2)若S绕y轴旋转一周,求旋转体的体积V.

解(1)$A=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2I_4=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi.$ ……………5 分

(2)$V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\pi\cdot\pi\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2I_4=2\pi^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi^3.$ ……………10 分

五、证明题(第一小题6分，第二小题7分，共13分)

1.设函数$f(x)$在区间[0,1]上可导,且$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x f(x)\,\mathrm{d}x$,证明存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明 由积分中值定理知，$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)(\xi\in[0,\frac{1}{3}])$.

作函数$g(x)=x f(x)$,则$g(\eta)=\eta f(\eta)=f(1)=g(1)$,由罗尔定理知存在$\xi\in(\eta,1)$,使得$g'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

2.设有方程$e^x+x^{2n+1}=0$,证明:

(1)对任意正整数n,方程有唯一实根x_n;

(2)极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值.

证明 (1)令 $f_n(x)=e^x+x^{2n+1}$,则 $f_n'(x)=e^x+(2n+1)x^{2n}>0$,故 $f_n(x)$严格单增. 且

$$f_n(-1)=e^{-1}-1<0,\ \ f_n(0)=1>0$$

故由零点存在定理知存在唯一x_n,使得 $f_n(x_n)=0$,即方程有唯一实根$x_n\in(-1,0)$. ……3 分

(2)若$x_{n+1}\ge x_n$,则$0=e^{x_{n+1}}+{x_{n+1}}^{2n+3}\ge e^{x_n}+{x_n}^{2n+3}=e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}\cdot x_n^2>e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=0$,矛盾.

所以$x_{n+1}<x_n$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

由$e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=0$得$e^{x_n}=(-x_n)^{2n+1}$,取对数$x_n=(2n+1)\ln(-x_n)$,即$\frac{1}{2n+1}=\frac{\ln(-x_n)}{x_n}$.

两边同时取极限，有$0=\frac{\ln(-a)}{a}$,所以$a=-1$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. …………7 分

四川大学2020－2021学年微积分(I)-1期末试题参考答案

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. $\underline{-3}$ ；2. $\underline{1}$ ；3. $\underline{3}$ ；4. $\underline{\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C}$；

5. $\underline{y=x+1;\ y=3x-1}$.

二、计算题(每小题8分，共32分)

1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2})\cos x^2}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

解 因为$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$, $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)$,

$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$ ………………….. 3 分

所以当$x\to 0$时, $1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}\sim\frac{1}{8}x^4$, $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4$ ………………….. 6 分

因此，原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4}{-\frac{1}{12}x^4}=-\frac{3}{2}$. ………………….. 8 分

2.设 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3 x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

解 设$A=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x$, 两边同乘$\sin^3 x$并在区间$-\pi,\pi]$上积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}(x^3e^{x^2}+1)\sin^6 x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin^3 x\,\mathrm{d}x \quad \text{……….. 4 分}$$

由奇偶性得

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=4\mathrm{I}_6=4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}.$$

所以 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3 x+\frac{5\pi}{8}$. ……………... 8 分

3.已知 $f''(x)$ 连续，且 $f(0)= f(\pi)=1$，求积分 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x$ 的值.

解 由分部积分公式

$$原式=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}f'(x)$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+[f'(x)\sin x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x]$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$ …………….. 4 分

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}\ f(x)$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-[\cos x\ f(x)|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x]$$ …………….. 6 分

$$=2$$ …………….. 8 分

4. 设 $f(x)=x^2\cos^2 x$，求 $f^{(12)}(0)$.

解 首先 $f(x)=x^2\cos^2 x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x$， …………….. 2 分

由莱布尼茨公式

$$f^{(12)}(x)=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x)^{(12)}=\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot x^2)^{(12)}$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos 2x)^{(12)}\cdot x^2+C_{12}^1(\cos 2x)^{(11)}\cdot 2x+C_{12}^2(\cos 2x)^{(10)}\cdot 2+0]$$ ……….. 6 分

所以 $$f^{(12)}(0)=\frac{1}{2}\cdot C_{12}^2(\cos 2x)^{(10)}\cdot 2|_{x=0}$$

$$=66\cdot 2^{10}\cdot\cos(2x+10\cdot\frac{\pi}{2})|_{x=0}=-66\cdot 2^{10}.$$ …………….. 8 分

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t f(x^2-t^2)dt}{x^a}=b(b\neq 0)$，求 a,b 的值.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim x$. 因此

$$\int_0^x t f(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$$ ……….. 4 分

所以，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du\sim\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} u\,du=\dfrac{1}{4}x^4$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t f(x^2-t^2)dt}{x^4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=4, b=\dfrac{1}{4}$. …………….. 10 分

2.讨论方程 $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$ (n 为正整数)有几个实根.

解 易知当 $x\leq 0$ 时，$f(x)>0$，无实根. 故就 $x>0$ 讨论即可.

(1) 当 $n=2k-1$ 时，$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots-x^{2k-2}=-\dfrac{1+x^{2k-1}}{1+x}<0$.

$f(x)$ 严格单减，$f(0)=1$，$f(+\infty)=-\infty$，

由零点存在定理知原方程有唯一实根. …………….. 6 分

(2) 当 $n=2k$ 时，令 $f'(x)=-1+x-x^2+\cdots x^{2k-1}=-\dfrac{1-x^{2k}}{1+x}=0$，得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 严格单减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单增.

而 $f(1)=(1-1)+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{2k-2}-\dfrac{1}{2k-1})+\dfrac{1}{2k}>0$，

因此当 $n=2k$ 时原方程无实根. …………….. 10 分

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.求由曲线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$(0 \le t \le 2\pi)$与 x 轴所围成区域的面积.

解 区域的面积 $A = \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x$ …………….. 2 分

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\,\mathrm{d}(t - \sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\mathrm{d}t = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\,\mathrm{d}u$$ ………….. 8 分

$$= 16 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi$$ …………….. 10 分

2.设空间有两点$A(1,1,0)$, $B(0,2,1)$.

(1)求经过AB且与坐标面$z = 0$ 垂直的平面方程；

(2)求经过AB的直线方程；

(3)将直线AB绕z轴旋转一周，求介于面$z = 0$与$z = 2$ 之间的旋转体体积.

解 (1)平面的法矢量$n = (0,0,1)$. 设所求平面上任意一点为$M(x, y, z)$，则

$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, n] = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 即平面方程为$x + y - 2 = 0$. …………….. 3 分

(2)由两点式知经过AB的直线方程为$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$. …………….. 6 分

(3)由直线AB的方程知: $x = 1 - z$, $y = 1 + z$. 故在区间$[0,2]$上任取一点z，做垂直于z轴的截面，面积为

$$A(z) = \pi(x^2 + y^2) = \pi((1-z)^2 + (1+z)^2) = 2\pi(1 + z^2).$$

因此旋转体的体积为

$$V = \int_0^2 A(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^2 2\pi(1 + z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{28}{3}\pi.$$ …………….. 10 分

五、证明题(第1小题6分，第2小题7分，共13分)

1.设函数 $f(x)\in C[0,\pi]$，满足 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1)存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$;

(2)若同时还满足 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$，则存在不同的 $\eta_1,\eta_2\in(0,\pi)$，使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.

证明 (1)令 $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt$，则 $F(0)=0, F(\pi)=0$，由罗尔定理知，在 $(0,\pi)$ 内至少存在 ξ，

使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$. ……………… 3 分

(2)同时

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi}\cos x dF(x)=[\cos xF(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin xF(x)dx=\int_0^{\pi}\sin xF(x)dx$$

由(1)知存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F(\xi)\sin\xi=0$，即 $F(\xi)=0$.

在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别由罗尔定理即得：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点 η_1,η_2，

使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$. ……………… 6 分

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n(a_{n-1}+1)}, n\ge 2$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=\dfrac{1}{e}$.

证明 $$\frac{1}{n!a_n}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!a_{n-1}}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-2)!a_{n-2}}$$

$$=\cdots=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{1!}+1$$ ……………… 3 分

由泰勒公式知 $\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{(n-2)!}+\cdots+\dfrac{1}{1!}+1=e-\dfrac{e^{\xi}}{n!}\to e(n\to\infty)$， ……………… 5 分

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n!a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{1!}+1}=\frac{1}{e}.$$ ……………… 7 分

四川大学期末考试试题（闭卷）

（2015——2016 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201137050 课序号： 课程名称：微积分（I）-1 任课教师： 成绩：
适用专业年级： 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分，共 21 分)

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=($ $)$．

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$，则 $f'(0)=($ $)$．

3．设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f(x)$ 的单调减少的凸区间是( )．

4．$\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=($ $)$．

5．由曲线 $y=\sqrt{x}, x=1, y=0$ 围成的平面区域绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积是( )．

6．将函数 $y=x(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅立叶级数，则展开式中 $\cos 2x$ 项的系数 a_2 是( )．

7．若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$ 发散，则 a 的取值范围是( )．

二、计算题 (每小题 9 分，共 45 分)

1．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

2．由方程 $ye^{xy}=1-x$ 确定函数 $y=y(x)$，计算 $y''(0)$.

3．计算不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{x})dx$.

4．计算定积分 $\int_0^1 \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

5．求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的所有渐近线.

三、解答题 (每小题 10 分，共 20 分)

1．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

2．已知曲线 $y=x^2$ 与 $y=ax \quad (0<a<1)$ 所围成图形的面积为 S_1，曲线 $y=x^2$， $y=ax$ 与 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出 S_1+S_2 的最小值.

四、证明题 (每小题 7 分，共 14 分)

1．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 收敛，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 也收敛.

2．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.

四川大学期末考试试题（闭卷）

（2016——2017 学年第 1 学期）　　A 卷

课程号：201137050　　课序号：　　课程名称：微积分（I）-1　任课教师：　　成绩：
适用专业年级：　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}x^n$ 的收敛域是____________.

2. 函数 $y=\frac{x^3}{x^2+x+1}$ 的斜渐近线是________________________.

3. 函数 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的拐点是____________.

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1}(\tan x\sin x^2+\sqrt{1-x^2})dx=$____________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}a\ln(1+x)+b, x>0\\ 2016+\sin x, x<0\end{cases}$ 处处可导，则 $a+b=$____________.

6. 设 $f(x+2\pi)=f(x)$，$f(x)=e^{\frac{x}{\pi}}\ (-\pi<x<\pi)$，将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，$s(x)$ 是该级数的和函数，则 $s(2017\pi)=$____________.

二、解答题 (每小题 8 分，共 48 分)

1. 计算不定积分 $\int(x\sqrt{1-x^2}+\frac{e^x}{1+e^{2x}})dx$.

2. 计算定积分 $\int_0^{\pi}x\sin^2 xdx$.

3. 把函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数，并求 $f^{(10)}(0)$.

4. 判断广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$的敛散性.

5. 设函数$y=y(x)$是由方程组$\begin{cases} x=\int_1^t e^{-u^2}du \\ y^3-\ln(x+t)=1 \end{cases}$确定的，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

6. 设连续函数$f(x)$满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}f(3x-t)dt}{(e^x-1)\tan x}$.

三、应用题 (每小题 10 分，共 20 分)

1. 设曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x^2$围成的平面区域为D，（1）求区域D的面积（4 分）；

（2）求区域D绕y轴旋转的旋转体体积（6 分）.

2. 宽度分别为a和b的两条走廊相交成直角，打算将一根细棒经过这两条走廊水平运出，

（1）如果细棒长度为$a+b$，不通过计算讨论能否水平运出该细棒（3 分）；

（2）设细棒紧靠走廊拐角，并与一条走廊的夹角为$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求细棒的最大长度（2 分）；

（3）当$b=3\sqrt{3}a$时，求能够水平运出的细棒的最大长度（5 分）.

四、证明题 (每小题 7 分，共 14 分)

1. 设$a_n=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx$，$b_n=2^{-n}(n+1)a_n$，$c_n=(-1)^n\sqrt{a_n}$，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\ln 2$（4 分）；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$条件收敛（3 分）.

2. 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，并且$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2017}$，求证：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\xi^{2016}$（3 分）；

（2）对任意的正整数n，都存在$\xi_i\in(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})$，使得$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i^{2016}$（4 分）.

四川大学期末考试试题（闭卷）

（2017——2018 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201137050　　课序号：　　课程名称：微积分 1-1　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：理工　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛域是____________；

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+x)}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ____________；

3. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x^3e^{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=$ ____________；

4. 已知 $f(x)=(x-1)^2e^x$，则 $f^{(2018)}(1)=$____________；

5. 周期为 2π 的周期函数在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，将其展开为傅里叶级数，则展开式中 $\cos x$ 项的系数 $a_1=$ ____________；

6. 设 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=g(x)$，$f(1)=2$，$f'(1)=1$，则 $y=g(1+x^2)$ 在 $x=1$ 处的导数值为____________.

二、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 计算不定积分 $\int(\frac{\ln x}{x}+x(x-1)^{2018})\,\mathrm{d}x$.

2.设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1$， $f(2)=7$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}{(e^x-1)\sin x}$.

4.已知函数 $f(u)$ 可导， $f(0)=0$，且由方程 $f(x^2y)+e^{x+y}=e-x$ 可确定 y 是 x 的函数，求

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

5.将函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成麦克劳林级数，并求 $f^{(2017)}(0)$.

6.判断无穷限广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设两曲线为 $l_1: y=x^2$，$l_2: x+y=2$.

(1) 求 l_1 在点 $x=0$ 处的曲率；

(2) 求 l_1 与 l_2 所围成图形的面积；

(3) l_1 与 l_2 围成的图形绕 x 轴旋转一周，求旋转体的体积.

2.讨论方程 $k-e^{-x}x^2=0$ (其中 k 为参数) 有几个实根，并说明理由.

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ 收敛.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $|f''(x)|\ge 1$，又 $f(0)=f(1)=0$，

(1) 设 $|f(x_0)|=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$，证明 $x_0\in(0,1)$；(2) 证明 $|f(x_0)|\ \ge \dfrac{1}{8}$.

四川大学期末考试试题（闭卷）

（2018——2019 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201137050　　课序号：　　课程名称：微积分（I）-1　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：理工　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间为 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1.已知矢量 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$ ________.

2.已知 $f'(0)=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(-x)}{x}=$ ________.

3.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}]=$ ________.

4.判断广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性(填收敛或发散)________.

5.设 $f(x)=x^2\cos x$，则 $f^{(5)}(0)=$ ________.

6.若 $f(x)=\begin{cases}(1+\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

二、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+\dfrac{x^2}{2}}{\sin^3 x}$.

2.求不定积分 $\int \frac{1+2x+\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

3.计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^3\sqrt{1+x^6}+\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}})\,\mathrm{d}x$.

4.设方程 $y=1+\int_0^{xy}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 可确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 的值.

5.设实数 $a\in(0,2]$，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax$，$x\in[0,a]$，试求 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上的最小值.

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设有两直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ 和 $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$，

（1）求 L_1 与 L_2 的夹角；

（2）求经过 L_1 且平行 L_2 的平面方程；

（3）求 L_1 与 L_2 之间的最短距离.

2.设平面内曲线 $y=\sqrt{2x}$ 和直线 $y=x-4$ 及 x 轴围成的图形为 D，

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所成立体的体积.

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\geq 0$，试证明

$$2\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geq (a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(x)$ 不恒为 0，若 $f(\frac{1}{n})=0\,(n=1,2,\cdots)$

证明： (1) $f(0)=0$； (2) $f'_+(0)=0$.

四川大学期末考试试题（闭卷）A 卷

（2019——2020 学年第 1 学期）

课程号：201137050　　课序号：　　课程名称：微积分-1　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间是120分钟.

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. 设矢量 $a=2i+j, b=i+2j+2k$，则 $\mathrm{Prj}_b a=$ ______.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x-1}{x}}$ 的跳跃间断点是 _____.

3. 设 $f(x)=(x-2)^2e^{2x}$，当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(2)=$ ______.

4. 设 $f(x)=\int_1^x e^{t^3}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 2x f(x)\,\mathrm{d}x=$ ______.

5. 若广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 收敛，则实数 p 的取值范围为 ______.

二、计算题(每小题8分，共32分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$.

2. 设方程 $e^{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\int_1^y\sqrt{4-t^2}\,dt=1$ 可确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

3. 计算不定积分 $\int\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$.

4. 计算定积分 $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,d x$.

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数 $g(x)$ 二阶可导且 $g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=1$，并设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

求 $f'(0)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

2.若方程 $x^2=ae^x(a\neq 0)$ 有唯一解，试求 a 的取值范围.

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.设空间中有点 $M(1,1,1)$ 及直线 l: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

(1)求经过点 M 与直线 l 的平面方程；

(2)求直线 l 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

2.设曲线 $y=\sin^4 x\,(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形为 S，(1)求 S 的面积A；(2)若 S 绕 y 轴旋转一周，求旋转体的体积V.

五、证明题(第一小题6分，第二小题7分，共13分)

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}xf(x)\,\mathrm{d}x$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

2.设有方程 $e^x+x^{2n+1}=0$，证明：

(1)对任意正整数 n，方程有唯一实根 x_n；

(2)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

四川大学期末考试试题（闭卷）

（2020——2021 学年第 1 学期）　A 卷

课程号：201137050　课序号：　课程名称：微积分（I）-1　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题(每小题3分，共15分)

1.设矢量a,b满足$|a+b|=|a-b|$,若$a=(1,2,3)$,$b=(1,4,\lambda)$,则 $\lambda=$_____.

2.广义积分$\int_0^{+\infty}x^5e^{-x^2}\,dx=$ ______.

3.若方程组$\begin{cases}x=te^{-t}\\ \int_1^{y-t}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}u\right)du=t\end{cases}$可确定$y$是$x$的函数$y=y(x)$，则$\frac{dy}{dx}|_{t=0}=$_____.

4.不定积分$\int x^2\arctan x\,dx=$_______.

5. 曲线 $f(x)=2x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的渐近线为______.

二、计算题(每小题8分，共32分)

1.求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2})\cos x^2}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

2.设 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3 x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,dx$，求 $f(x)$.

3.已知 $f''(x)$连续，且 $f(0)=f(\pi)=1$，求积分$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,dx$的值.

4. 设 $f(x)=x^2\cos^2 x$，求 $f^{(12)}(0)$.

试卷编号：

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t f(x^2-t^2)dt}{x^a}=b(b\neq 0)$，求 a,b 的值.

2.讨论方程 $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$ (n为正整数)有几个实根.

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.求由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围成区域的面积.

2.设直角坐标空间中有两点 $A(1,1,0)$，$B(0,2,1)$.

(1)求经过AB且与坐标面 $z=0$ 垂直的平面方程；

(2)求经过AB的直线方程；

(3)将直线 AB绕z轴旋转一周，求介于面 $z=0$与 $z=2$ 之间的旋转体体积.

五、证明题(第1小题6分，第2小题7分，共13分)

1.设函数 $f(x)\in C[0,\pi]$，满足 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1)存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$;

(2)若同时还满足 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$，则在 $(0,\pi)$ 内存在不同的 η_1,η_2，使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.

2. 设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n(a_{n-1}+1)}$，$n\ge 2$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=\dfrac{1}{e}$.