一. 1. $f(f(x))=\begin{cases} x^4 & x\geq 0 \\ (x^3+1)^2 & -1\leq x<0 \\ (x^3+1)^3+1 & x<-1 \end{cases}$

2. $\frac{1}{2}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\times 3}{2^2}\times\frac{2\times 4}{3^2}\times\cdots\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

3. $y=5x-3$

4. 24

解：取对数得：

$3=\lim\limits_{x\to 2}\frac{a\ln\frac{x}{2}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{a}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{a}{2x^2}=\frac{a}{8}$.

5. $x^x(\ln x+1)$.

二. 1. (C)

解：函数 $y=f(x_0+|x|)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+|h|)-f(x_0)}{h}$ 存在.

$\because \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+|h|)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$,

$\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+|h|)-f(x_0)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=-f'(x_0)$

$\therefore$ 上述命题 $\Longleftrightarrow f'(x_0)=-f'(x_0)\Longleftrightarrow f'(x_0)=0$

2. (C)

解：(A) $1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2$

(B) $\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2$

(C) $\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)\sim x\cdot(-\frac{1}{2}x^2)=-\frac{1}{2}x^3$

(D) $e^x-e^{-x}=e^{-x}\cdot(e^{2x}-1)\sim 1\cdot 2x=2x$

3. (A)

4. (B)

解：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cancel{= \lim\limits_{n\to\infty}(}$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e}$

5. (D)

$x\to 0^+$, $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$,

(A) $f(x)\to 1$, (B) $f(x)\to 1$,

(C) $f(x)\to 1$ (D) $f(x)\to 0$.

$x\to 0^-$, $2^{\frac{1}{x}} \to 0$

(A) $f(x)\to 1$, (B) $f(x)\to\infty$

(C) $f(x)\to 1$ (D) $f(x)\to 1$

三. 1. 令 $x=0$ 得 $y(0)=1$.

对方程两端关于 x 求导得：

$$e^{xy}(y+xy') + \cos(x^2y)(2xy+x^2y') = y'$$

在上式中令 $x=0$ 得 $y'(0)=1$

2. $x'_t = 12t^3+3t^2$, $y'_t = 3t^2 f'(t^3)$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(t^3)}{4t+1}$ $\quad \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{3t^2(4t+1)f'(t^3) - 4f'(t^3)}{(4t+1)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2(4t+1)f'(t^3) - 4f'(t^3)}{3t^2(4t+1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = \frac{f'(1)}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = \frac{15f''(1) - 4f'(1)}{375} = \frac{34}{375}$$

3. 同济版

记 $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

则 $\ln A = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{\ln x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} - \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} - \frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1$$

于是 原式 $= A = e^{-1}$.

川大版. $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\therefore$ 原式 $= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

4. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} n^3\left((n+1)^2-n^2\right)\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}$，$\left(n^2<\xi<(n+1)^2\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2n+1)}{1+\xi^2}$$

$\because$ $\dfrac{n^3(2n+1)}{1+(n+1)^4} < \dfrac{n^3(2n+1)}{1+\xi^2} < \dfrac{n^3(2n+1)}{1+n^4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2n+1)}{1+(n+1)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2n+1)}{1+n^4} = 2.$$

$\therefore$ 原式 $= 2$.

Ⅳ 1. $\ln f(x) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln\cos xy}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos xy}\cdot(-\sin xy)\cdot x}{2y}$

$$= -\frac{x}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\tan xy}{y} = -\frac{x}{2}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{y} = -\frac{x^2}{2}.$$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\ln F(x) = f(x)\ln x$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = f'(x)\ln x + f(x)\cdot\frac{1}{x}\ \cancel{= e^{-\frac{x^2}{2}}\ln x}$$

$$= -xe^{-\frac{x^2}{2}}\ln x + e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-x\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

$$\therefore F'(x) = x^{e^{-\frac{x^2}{2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-x\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

~~2. $f'(x) = 2x^3 - \frac{2}{x^3}$~~

~~(1) 若 $a\le 0$，则 $f'(x)\le 0$，$f(x)$ 单调减.~~

~~(2) 若 $a>0$，当 $0<x$~~

2. 同济版. $f'(x)=2a^3-\frac{2}{x^3}$

(1) $a\le 0$, 则 $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上 $\uparrow$

(2) $0<a<\frac{1}{2}$. 则当 $2\le x<\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)<0$,

当 $x>\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0$. 于是 $f(x)$ 在 $[2,\frac{1}{a}]$ 上 $\searrow$,

在 $[\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $\nearrow$.

(3) $a\ge\frac{1}{2}$, 此时, $f'(x)\ge 16-\frac{2}{x^3}>0$ ($x>2$时).

于是 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上 $\nearrow$.

综上所述, $a\le 0$ 或 $a\ge\frac{1}{2}$

川大版. (1) 当 $1-2\lambda>1$, 即 $\lambda<0$ 时, 绝对收敛.

(2) 当 $0<1-2\lambda\le 1$, 即 $0\le\lambda<\frac{1}{2}$ 时, 条件收敛.

(3) 当 $1-2\lambda\le 0$, 即 $\lambda\ge\frac{1}{2}$ 时, 发散.

3. $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\sin^2 x}-a}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$ 存在

$\Rightarrow a=1$. 于是.

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{3}x^2}=3.$$

$f(0)=b$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\arctan cx}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{cx}{x}=c.$$

于是 $b=c=3$.

五 1. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\varphi(a+h)\cdot|h|-0}{h}=\dfrac{\varphi(a+h)|h|}{h}$.

于是 $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\varphi(a+h)|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\varphi(a+h)=A$.

$f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\varphi(a+h)|h|}{h}=-\lim\limits_{h\to 0^-}\varphi(a+h)=-A$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=a$ 可导 $\Longleftrightarrow f'_+(a)=f'_-(a)\Longleftrightarrow A=0$.

2. 令 $g(x)=e^{-\frac{3x^2}{2}}f(x)$, 则

$g'(x)=-3xe^{-\frac{3x^2}{2}}f(x)+e^{-\frac{3x^2}{2}}f'(x)$

$=e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(f'(x)-3xf(x)\right)$

由 $g(a)=g(b)=0$ 得. $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-3\xi f(\xi)=0$