## ① 等价无穷小的性质.

$\boxed{\text{低阶}+\text{高阶}\sim\text{低阶}}$

(1). 若 $\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\pm\beta(x)\sim\alpha(x)$.

$(x^4 \pm x^6 \sim x^4)$.

(2). $\beta(x)\sim\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x))$.

$1-\cos x \qquad \frac{1}{2}x^2$

$\boxed{\text{同阶}=\text{同阶}+\text{高阶}}$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}=0$.

$\Rightarrow \beta(x)-\alpha(x)=o(\alpha(x))$.

$\Rightarrow \beta(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x))$.

(3). $\alpha(x)\sim\alpha'$，$\beta(x)\sim\beta'$. 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\alpha'}$.

(4). $\boxed{\alpha\sim\beta. \quad \lim\limits_{x\to 0}\alpha\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\beta\cdot\varphi(x).}$

## ② 函数的连续性.

1> 函数连续.

定义 1: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

定义 2: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$

在 $x=x_0$ 处有定义.

定义 3: $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

可取 $x_0$.

2> 在 $x_0$ 连续的条件.

(1). $f(x)$ 在点 $x_0$ 有确定的函数值 $f(x_0)$. $\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

(2). 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有确定的极限值.

(3) 这个极限值就等于$f(x_0)$.

和差化积：

$A+B=x_0+\Delta x$

$A-B=x_0$

$A=\frac{\Delta x}{2}+x_0$

$B=\frac{\Delta x}{2}$.

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$.

证明：$y=\sin x$在$R$上连续.

$\Leftarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(\Delta x+x_0)-x_0]$

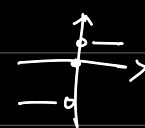
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[2\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+x_0\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\right]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+x_0\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}$

$=0$.

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0]=0$

$y=\sin x$在$R$上连续.



3) 函数的间断点：$f(x)$在$x_0$的$\mathring{U}(x_0,\delta)$有定义 || 在$x_0$处不连续.

→ 左右极限
- 两个都存在：第一类间断点
  - $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$. → 跳跃间断点.
  - $f(x_0^-)=f(x_0^+)$. → 可去间断点.
- 至少有一个不存在：第二类间断点. → $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$有一个为无穷大量.
  - ↳ 无穷间断点.
  - ↳ 振荡型间断点.

Q：

$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 为什么$x=0$不是无穷间断点？

无穷大量：随$x$↑或↓，$f(x)$无限增大/减小.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. ⇐ 不存在 $x=\frac{1}{2n\pi}$, $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n\in N^*)$

且随$x\to 0^+$，$\sin\frac{1}{x}$不断变化.

不是无穷大量.