一、高阶导数.

①定义：一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，把 $y'=f'(x)$ 对 x 的导数为 $y=f(x)$ 的二阶导数. 记作 y''，$\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d^2f}{dx^2}$ 或 $f''(x)$.

↳类似的，n-1阶导数的导数为n阶导数，记作 $y^{(n)}$，$\frac{d^ny}{dx^n}$，$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ 或 $f^{(n)}(x)$.

② 高阶导数.

1). $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$.

2). $[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$.

3). $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

4). $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax+b}$.

⇒ 5). $y=x^u$ (u为常数). → 可能是非整数！故不存在 $P_n^{(n+1)}(x)=0$!!

$(x^u)^{(n)} = u(u-1)\cdots(u-n+1)x^{u-n}$. ⇒ $(x^u)^{(u)} = u!$.

↳ 对于n次多项式 $P_n(x)$，$P_n^{(n+1)}(x)=0$. (n为正整数).

③ $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$ // 设 $f(x)$ 为n阶可导的函数.

④高阶导数运算法则.

莱布尼茨公式.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

$\boxed{\text{其中 } u^{(0)}=u;\ v^{(0)}=v}$

⑤

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 的讨论：$\left[\begin{array}{l} 1.\ m\geq n.\ 假分式. \\ 2.\ m<n.\ 真分式. \end{array}\right.$

Eg.

1) 求 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的n阶导数：$y^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)^{(n)}=2\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

2) 求 $y=\frac{x^3}{1-x}$ 的n阶导数：$y^{(n)}=\left[-(x^2+x+1)+\frac{1}{1-x}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

假分式拆出来!

3) 求 $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 的n阶导数：$y^{(n)}=\left[\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right]^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$

将真分式拆成更简单的真分式.

$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

"二" 隐函数的导数，由参数方程所确定的函数的导数.

显函数：用自变量表示因变量的函数 $y=f(x)$.

⇒ 幂指函数：两边同取对数. $\boxed{y=f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y=g(x)\ln f(x)}$

Eg. 求 $y=x^{x^2} \xRightarrow{取对数} \ln y=x^2\ln x$. 的导数.

求导 ⇒ $\frac{1}{y}y'=2x\ln x+x$.

即 $y'=y(2x\ln x+x)=x^{x^2}(2x\ln x+x)$.

⇒ 多幂积函数：取绝对值后再同取对数. ☆ $\ln|x|=\begin{cases}(\ln x)'=\frac{1}{x} & x>0 \\ [\ln(-x)]'=\frac{1}{x} & x<0.\end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x)=[f_1(x)]^{g_1(x)}\cdot[f_2(x)]^{g_2(x)}\cdots[f_n(x)]^{g_n(x)}\\ \Leftrightarrow\ &\ln f(x)=g_1(x)\ln|f_1(x)|+\cdots+g_n(x)\ln|f_n(x)|\end{aligned}}$$

Eg. 求 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)^2}{(x-2)(x-3)^4}}$ 的导数.

$$\Leftrightarrow \ln|y|=\frac{1}{3}\left(\ln|x|+2\ln|x-1|-\ln|x-2|-4\ln|x-3|\right).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x-3}\right)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x-3)^4}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x-3}\right).$$

三、由参数方程确定的函数的导数.

定理1: 设 $x=\varphi(t)$ 在 t_0 的某邻域内有连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

则参数方程 $\begin{cases}x=\psi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$ 可确定函数 $y=y(x)$.

且 1) $x=\psi(t)$、$y=\varphi(t)$ 在 t_0 处可导 $\Rightarrow$ 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$

2) $\varphi(t_0)\neq0$.

$\Rightarrow$ 一般地: $\boxed{\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}=\dfrac{\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}}$

Eg $\begin{cases}x=3t^2-2t^3+1.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$、$\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$\cup \cdot \ \big| y = t^3 - 3t + 2 .$ $\quad \cdots \ dx \ , \ dx^2 \ , \ dx^3 .$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{6t-6t^2} = -\frac{1}{2}\frac{t+1}{t} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}}{6t-6t^2} = \frac{1}{12}\frac{1}{t^3-t^4}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{12}\frac{3t^2-4t^3}{(t^3-t^4)^2}}{6t-6t^2} = \frac{-\frac{1}{12}\cdot t^2(3-4t)}{6(1-t)^3t^7} = \frac{4t-3}{72(1-t)^3t^5}.$$