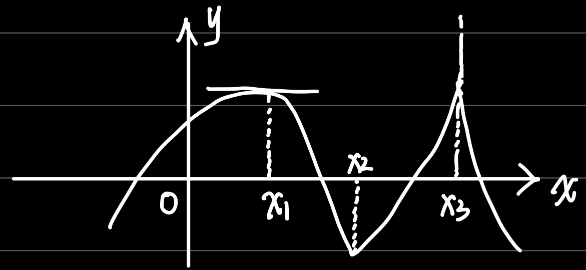
函数的单调性.

① 定义1. 若 $f'(x)$ 在 x_0 处满足 $f'(x_0)=0$，称 x_0 为 $f(x)$ 的驻点.

② 定理1. $f(x)$ 在区间 I 上可导，若 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）时，则 $f(x)$ 在 I 单调递增.（或单调递减）.

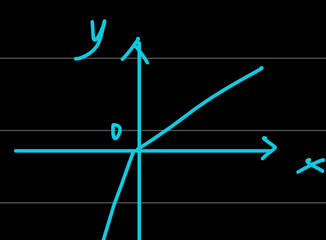


x_1 是 $f(x)$ 的驻点； x_2 处无切线，$f'(x)$ 不存在； x_3 处有切线，切线垂直于 x 轴，从而 $f'(x_3)=\infty$（不存在）.

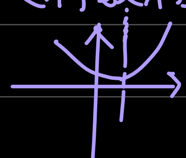
⇒ 驻点未必是单调区间的分界点.

如：$f(x)=x^3$. 求导 $y'=3x^2$. 知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的驻点.
而 $f(x)$ 在 R 上单调递增. 故驻点未必是单调区间的分界点.

⇒ 如果函数在某导数不存在的点上，两边的导数同号，则不改变函数的单调性.

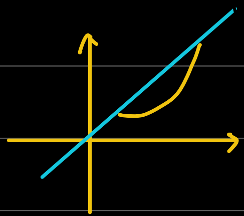


单调区间分界点除函数的驻点外，还有导数不存在的点.

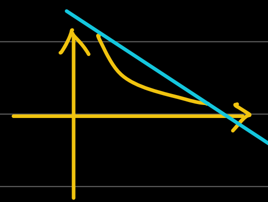


函数的凹凸性与拐点.

① 定义2. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
则称 $f(x)$ 在 I 上是凹的.



上凹

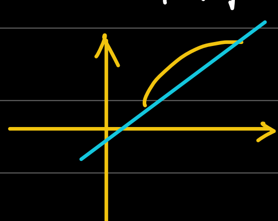


下凹

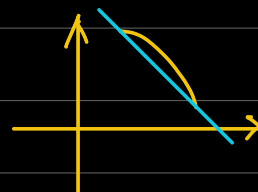
⇒ 凹的曲线 切线倾角α随x的增大而增大. $y''>0$.

设$f(x)$在区间I上连续，若对I上任意两点x_1, x_2，恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

则称$f(x)$在I上是凸的.



上凸



下凸

⇒ 凸的曲线 切线倾角α随x的增大而减小. $y''<0$.

② 定理2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，则

(1). 若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上是凹的.

(2). 若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上是凸的.

→ 把$y=f(x)$的曲线上凹凸性的分界点$(x_0, f(x_0))$，即$f''(x_0)=0$，称为$f(x)$的拐点.

↳ 一般$f(x)$在$[a,x_0]$，$[x_0,b]$为凸(凹)函数，且$f(x)$在x_0处可导，

那么$f(x)$在$[a,b]$上为凸(凹)函数.

对连续函数$y=f(x)$. 若$(x_0, f(x_0))$为拐点.

则可能是 1. $f''(x_0)=0$.

Ⅱ. $f''(x_0)$ 不存在.

Ⅲ. x_0处为函数的分段点.

函数图象的描绘.