一阶微分方程.

① 可分离变量.

1> $\frac{dy}{dx}=F(x,y)=f(x)g(y)$.　　$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$

↳ $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$　$(g(y)\neq 0)$　　$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$.

2> 齐次型.

Ⅰ $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$.　令 $y=ux$.　$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.

↳ $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\Rightarrow\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$.

Ⅱ $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$.

↳ 1°. $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$. 令 $x=X+h$, $y=Y+k\Rightarrow dx=dX$　$dy=dY$

$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y+\boxed{a_1h+b_1k+c_1}}{a_2X+b_2Y+\boxed{a_2h+b_2k+c_2}}$　令 $\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$

↳ $\begin{cases}h=\\k=\end{cases}$

即 $\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=\varphi(\frac{Y}{X})$

2°. $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}$$

$\boxed{令 h=a_1x+b_1y.}$

$$\frac{dh}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dh}{dx} = a + b\frac{h+c_1}{\lambda h+c_2} = f(x)\cdot g(h)$$

② 一阶线性微分方程.

1) 齐次型：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

2) 非齐次型：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

③ 伯努利微分方程.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0、1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x)-y^{1-n}P(x)}{y^{-n}}$$

两边同除 y^n $\Rightarrow$ $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$. 令 $z=y^{1-n}$.

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{Q(x)-y^{1-n}P(x)}{y^{-n}} = (1-n)\left[Q(x)-z(P(x))\right]$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

高阶微分方程.

也是解.

① 叠加原理: y_1, y_2 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解 $\Rightarrow$ $y=C_1y_1+C_2y_2$

② 线性无关性: 若 y_1, y_2 线性无关, 则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程的通解.

可推广 n 维

③ 二阶非齐次通解: $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$. 通解 = 齐次通解 + 特解.

④ $y_k(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)$ 的特解.

↳ $y=\sum_{k=1}^{m} y_k$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ 的特解.

③ 常系数的微分方程.

i) 齐次型. ⇒ 求特征方程的特征根.

$y''+py'+qy=0 \Rightarrow r^2+pr+q=0$. 特征根 r_1, r_2.

Ⅰ $r_1 \neq r_2$ (实根) $\Leftrightarrow \Delta>0$ $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

Ⅱ $r_1=r_2$ $\Leftrightarrow \Delta=0$ $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

Ⅲ $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ $\Leftrightarrow \Delta<0$ $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

II> 非齐次型.

$$y''+py'+qy=f(x) \begin{cases} \nearrow \text{齐次通解.} \\ \searrow \text{特解.} \end{cases}$$

① $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$.　　$P_m(x)$为m次多项式.

设特解 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$

$$(y^*)'=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$(y^*)''=e^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)].$$

↳ $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$　★

(i). λ不是特征根 $(\lambda^2+p\lambda+q\neq 0)$. $\Rightarrow Q_m(x)$为m次多项式.

(ii). λ是单根. $\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p\neq 0 \Rightarrow y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$.

(iii). λ是重根. $\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p=0 \Rightarrow y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

② $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

讨论 $\lambda+i\omega$为特征方程的k重根 $\begin{cases} \nearrow \text{不是. } k=0. \\ \searrow \text{是. } k=1. \end{cases}$

↳特解: $y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x+\tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$　$m=\max\{l,n\}$.