

四川大学期末考试答案

(2015——2016 学年第 1 学期) A 卷

课程号: 201074030

课程名称: 微积分(II) -1

一、(3×6=18 分) 填空题

1、 $\lim_{t \rightarrow 0} (1 - \sin t)^{1/t} = \underline{\quad\quad\quad} e^{-1} \underline{\quad\quad\quad}$ 。

2、 $\ln(x^2 + 1)$ 的带有皮亚诺余项的 4 阶麦克劳林展式为 $\underline{\quad\quad\quad} x^2 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4) \underline{\quad\quad\quad}$ 。

3、设 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, 则 $f^{(n)}(x) = \underline{\quad\quad\quad} \frac{1}{2} \left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \right] \underline{\quad\quad\quad}$ 。

4、 $f(x) = \begin{cases} (1 + \frac{1}{|x|})^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 的间断点 $x = 0$ 是 第二类(无穷) 间断点(填间断点类型)。

5、若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在单侧导数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} = \underline{\quad\quad\quad} f'_+(0) \underline{\quad\quad\quad}$ 。

6、若 $\tan y = xy + x$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $y'(x) = \underline{\quad\quad\quad} y' = \frac{y+1}{\sec^2 y - x}, x \neq \sec^2 y \underline{\quad\quad\quad}$ 。

二、(4×3=12 分) 计算题

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{e^x - x - 1}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{e^x - x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{e^x - 1} \underline{\quad\quad\quad} \text{②}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{x}$

$= 1 \underline{\quad\quad\quad} \text{②}$

2、 $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

解: $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

$= 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} \underline{\quad\quad\quad} \text{②}$

$$= 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x}$$

$$= (\arctan \sqrt{x})^2 + C \text{ -----} \textcircled{2}$$

$$3、 \int \frac{2+xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$\text{解: } \int \frac{2+xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1+e^x}} d(1+e^x) \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + \int 2xd\sqrt{1+e^x}$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + 2x\sqrt{1+e^x} - \int 2\sqrt{1+e^x} dx \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + 2x\sqrt{1+e^x} - \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx - \int \frac{2e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$= 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + C \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$\text{三、 (10 分) 已知 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\ln x - ax + 2}{1 + \cos \pi x} = b, \text{ 求 } a, b \text{。}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} 2\ln x - ax + 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ -----} \textcircled{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\ln x - 2x + 2}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{- \pi x \sin \pi x} \text{ -----} \textcircled{3}$$

$$= - \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{\sin \pi x} \text{ -----} \textcircled{3}$$

$$= - \frac{2}{\pi^2} \text{ -----} \textcircled{2}$$

$$\text{四、 (12 分) 已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x}, & x > 0 \\ x^2 + bx + c, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处一阶连续可导, 求 (1) } b, c \text{ 的值;}$$

(2) 求 $f'(x)$; (3) 问 $f(x)$ 二阶可导吗?

$$\text{解: (1) } c = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + bx + c = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1, \text{ -----} \textcircled{2}$$

$$b = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{2} = 1, \quad \text{---②}$$

$$(2) \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)e^x + x \sin x + \cos x}{x^2}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{-----③}$$

$$(3) \quad f_+^{(2)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)e^x + x \sin x + \cos x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \quad \text{-----②}$$

$$f_-^{(2)}(0) = (2x + 1)' = 2 \quad \text{-----②}$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不二阶可导。-----①

五、 (12 分) 分析函数 $f(x) = x \ln x - ax + 1$, $a \in \mathbf{R}$ 的零点情况。

$$\text{解: } x \ln x - ax + 1 = 0 \Rightarrow a = \ln x + \frac{1}{x}, \quad \text{-----②}$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \text{ 定义域为 } x > 0 \quad \text{-----②}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \quad x=1 \text{ 是唯一驻点, 且为最小值点,}$$

$$\text{最小值为 } g(1) = 1. \quad \text{-----③}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \text{ 从而有} \quad \text{-----②}$$

$$(1) \quad a > 1, \text{ 有两个互异的零点; } \quad \text{-----①}$$

$$(2) \quad a < 1, \text{ 无零点; } \quad \text{-----①}$$

$$(3) \quad a = 1, \text{ 一个零点; } \quad \text{-----①}$$

六、 (10 分) 若 m, n 为大于 1 的正整数, 分析 $f(x) = (x-a)^m(b-x)^n$, ($a < b$) 的极大值点的个数、极小值点的个数。

$$\text{解: } f(x) = (x-a)^m(b-x)^n = (-1)^n(x-a)^m(x-b)^n$$

根据 Rolle 中值定理知, 存在 $a < \xi < b$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 故

$$f'(x) = (-1)^n(m+n)(x-a)^{m-1}(x-\xi)(x-b)^{n-1}, \text{-----} \textcircled{2}$$

(1) 若 m, n 为偶数, 则 $x=a, b$ 为 2 个极小值点, $x=\xi$ 为 1 个极大值点。

----- $\textcircled{2}$

(2) 若 m, n 为奇数, 则 $x=\xi$ 为唯一的极大值点。----- $\textcircled{2}$

(3) 若 m 为偶数, n 为奇数, 则 $x=a$ 为 1 个极小值点, $x=\xi$ 为 1 个极大值点。

----- $\textcircled{2}$

(4) 若 m 为奇数, n 为偶数, 则 $x=b$ 为 1 个极小值点, $x=\xi$ 为 1 个极大值点。

----- $\textcircled{2}$

七、 (10 分) 已知 $t > 0, m > 0$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{m} = 1$, 求证: $1 < t^{\frac{1}{t}} \bullet m^{\frac{1}{m}} \leq 2$ 。

证: 等价于: $1 > \frac{1}{t} \bullet \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2}$ ----- $\textcircled{1}$

令 $f(x) = x^x(1-x)^{1-x} > 0, 0 < x < 1$ 。----- $\textcircled{1}$

$g(x) = \ln f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), 0 < x < 1$, ----- $\textcircled{2}$

$g'(x) = \ln \frac{x}{1-x}, g''(x) = \frac{1}{x(1-x)} > 0, 0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ 为唯一驻点, 且为最小值点, 故

$f(x) = x^x(1-x)^{1-x} > f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, 0 < x < 1$, ----- $\textcircled{3}$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$, 故 $f(x) < 1$ ----- $\textcircled{2}$

令 $x = \frac{1}{t}$, 结论得证。----- $\textcircled{1}$

八、 (8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $ab \geq 0$, 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\frac{b^2 f(a) - a^2 f(b)}{b^2 - a^2} = f(\xi) - \frac{\xi}{2} f'(\xi)。$$

解: (1) 若 $ab \neq 0$,

则构造函数 $g_1(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$ ----- $\textcircled{3}$

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{\xi^2 f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}}{-2\frac{1}{\xi^3}} = f(\xi) - \frac{\xi}{2} f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\frac{b^2 f(a) - a^2 f(b)}{b^2 - a^2} = f(\xi) - \frac{\xi}{2} f'(\xi) \text{。} \text{-----} \textcircled{3}$$

(2) 当 $a=0$ 或 $b=0$ ，取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$ ，则结论显然成立。----- $\textcircled{2}$

九、 (8分) 已知函数列 $f_n(x) = n^3 x + \ln x$ ，(1) 求证，对任意的 $n \in N^+$ ，存在唯一的

$\xi_n \in (0, \frac{1}{n^2})$ ，使 $f_n(\xi_n) = 0$ ；(2) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln \xi_n}{n^3}$ 收敛；(3) 证明：数列 $\{\xi_n\}$ 单调递减。

解：(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$ ， $f_n(\frac{1}{n^2}) = n - 2\ln n > 0$ ，故存在唯一的 $\xi_n \in (0, \frac{1}{n^2})$ ，使 $f_n(\xi_n) = 0$ 。

----- $\textcircled{3}$

(2) $\xi_n \in (0, \frac{1}{n^2})$ ，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$ 收敛，也即级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln \xi_n}{n^3}$ 收敛。-----

$\textcircled{2}$

(3) $f_n(\xi_n) = n^3 \xi_n + \ln \xi_n = 0$ ， $f_{n+1}(\xi_{n+1}) = (n+1)^3 \xi_{n+1} + \ln \xi_{n+1} = 0$ 可以推出

$$\frac{\ln \xi_{n+1}}{\ln \xi_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} \Rightarrow \frac{\ln \xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{\ln \xi_n}{\xi_n} \text{，} \text{-----} \textcircled{1}$$

因为 $\ln \xi_n < 0$ ，有 $\frac{\ln \xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} < \frac{\ln \xi_n}{\xi_n}$ ，----- $\textcircled{1}$

由于函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，可知 $0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \frac{1}{n^2}$ ， $\{\xi_n\}$ 单调递减。

----- $\textcircled{1}$