线性代数
Linear Algebra

四川大學
SICHUAN UNIVERSITY

第三章 行列式

第一节 方阵的行列式

xuexue_zhou@scu.edu.cn

主要内容

一、低阶方阵的行列式的定义与计算

二、n阶行列式的定义（一）

一（一）、一阶方阵的行列式

一阶方阵 $A=(a)$　　定义 $|A|=a.$

一（二）、二阶方阵的行列式

用消元法解二元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$

类似地，消去 x_1，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

二阶行列式的定义

由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$a_{11}\ a_{12}$$
$$a_{21}\ a_{22} \qquad (4)$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（4）所确定的二阶行列式，并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad x_1 = \frac{D_1}{D},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

即 当系数行列式 $D \neq 0$时, 二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意 分母都为原方程组的系数行列式.

小结

二阶行列式的计算 ——$\boxed{\text{对角线法则}}$

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

当系数行列式 $D\neq 0$时, 解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$ $x_2 = \dfrac{D_2}{D}$.

问题 三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

的解是否有类似的表示形式？

一（三）、三阶方阵的行列式

定义　设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (5)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (6)$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

（6）式称为数表（5）所确定的**三阶行列式**.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

列标

行标

三阶行列式的计算　　**对角线法则**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

说明　对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 + \boxed{a_{13}}x_3 = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 + \boxed{a_{23}}x_3 = \boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1 + \boxed{a_{32}}x_2 + \boxed{a_{33}}x_3 = \boxed{b_3}; \end{cases}$$

记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \boxed{b_2,} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \boxed{b_3;} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\boxed{b_3}; \end{cases}$$

得 $$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\boxed{b_2}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\boxed{b_3}; \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \boxed{b_2,} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \boxed{b_3;} \end{cases}$$

得 $$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \boxed{b_2,} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \boxed{b_3;} \end{cases} \Rightarrow D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例1　求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解　方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

小结

二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的.

二阶与三阶行列式的计算 ——$\boxed{\text{对角线法则}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

二、n 阶行列式的定义

形式上 由 n^2 个数组成的n行n列的正方形数表

用记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示

称为一个n阶行列式。

问题：n阶行列式的值如何定义？

二阶，三阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

二阶行列式为2!单项式的和，每项都是位于不同行、不同列，

三阶行列式包括3!单项式的和，每一项都是位于不同行 、不同列

三阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

三阶行列式包括3!单项式的和

每个单项式的一般形式可记为： $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$

其中 $i_1 i_2 i_3$ 取遍1, 2, 3的所有全排列

即 $\underbrace{123,\quad 231,\quad 312,}_{+}\quad \underbrace{321,\quad 213,\quad 132}_{-}$。

二（一）、排列与逆序

问题： 把$1,2,3,\cdots n$排成一列，共有几种不同的排法？

定义 把n个数$1,2,3,\cdots n$排成一列，组成的有序数组

$$i_1 i_2 i_3 \cdots\cdots i_{n-1} i_n$$

称为一个 n 级排列.

$123\cdots\cdots n$ 为一个 n 级自然排列

例如 3124 为一个 4 级排列 共有 $4!=24$个

1234 为一个 4 级自然排列

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个自然次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为自然次序.

定义 在一个排列 $\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中，

逆序

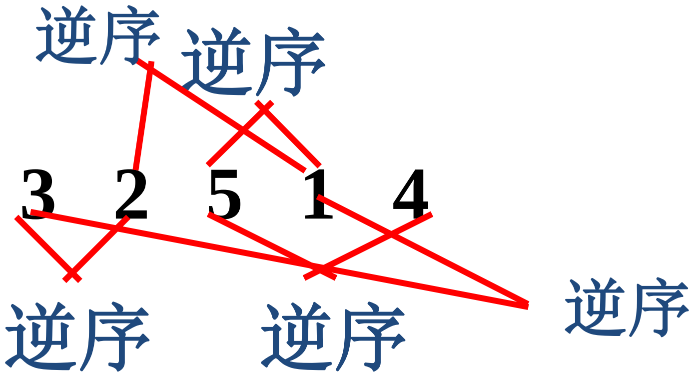
3 2 5 1 4

逆序

定义　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

记为 $\tau\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$

例如　排列32514 中，



故此排列的逆序数为 5.　即　$\tau(32514)=5$

定义　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

记为 $\tau\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\tau = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 3 + 4 + 4 + 5$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解

$$\underbrace{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 3}^{n-1}21}_{(n-2)}$$

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

小结

排列： 把n个数$1, 2, 3, \cdots n$排成一列，组成的有序数组

$$i_1 i_2 i_3 \cdots\cdots i_{n-1} i_n$$

称为一个 n 级排列.

逆序： 在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$中，若数 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

逆序数： 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

对一个排列

$$i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$$

如果仅交换两个数 i_t和i_s 的位置，其他数位置不变

得到另一个排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$$

这样的变换称为一个对换

例如　$3124 \to 3421$ 是一个对换

$3124 \to 3412$ 是一个对换吗？

排列的性质

定理1： 一次对换改变排列的奇偶性。

例如 $3124 \longrightarrow 3421$

3124 为偶排列　　3421为奇排列

证明思路： 先证相邻对换，再证一般对换。

定理2：任意一个n阶排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都可经一系列对换变成自然排列，

变成自然序排列，且对换的次数 s 与 $\tau(k_1,k_2,\cdots k_n)$ 同奇偶。

定理3：$n \geq 2$时，n个数的所有排列中，奇偶排列各占一半，即$\frac{n!}{2}$.

n阶行列式

三阶行列式的特点

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

特点

（1）三阶行列式共有 6 项，即 $3!$ 项.

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

三阶行列式包括3!单项式的和

每个单项式的一般形式可记为: $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$

其中$i_1i_2i_3$取遍1、2、3的所有排列。

即 $\underbrace{123,\quad 231,\quad 312,}_{+}\quad \underbrace{321,\quad 213,\quad 132。}_{-}$

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$\tau(312) = 1 + 1 = 2,$$ 偶排列 $+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$\tau(132) = 1 + 0 = 1,$$ 奇排列 $-$负号,

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{3!} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

二（二）、n 阶行列式的定义（一）

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,\ n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.

n 阶行列式的定义说明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

1、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

2、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n个元素的乘积;

3、 一阶行列式 $|a|=a$

4、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$.

符号定理:

令 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是n阶行列式中的任一项，则项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$的符号等于

$$\boxed{(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}}$$

证明： 由行列式定义可知，确定项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ (1) 的符号，

需要把各元素的次序进行调动，使其行标成自然排列。

为此，我们先来研究若交换项（1）中某两个元素的位置时，其行标和列标排列逆序数的奇偶性如何变化。

对换任意两元素，相当于项（1）的元素行标排列及列标排列同时经过一次对换。

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \longrightarrow a_{i_nj_n}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_1j_1}$$

设对换前行标排列的逆序数为s，列标排列的逆序数为t。

设经过一次对换后行标排列的逆序数为 s'

列标排列的逆序数为 t'

由定理知，对换改变排列逆序数的奇偶性

所以， $s'-s$ 是奇数

$t'-t$ 也是奇数

所以 $(s'-s)+(t'-t)$ 是偶数，

即 $(s'+t')-(s+t)$ 是偶数，

所以 $s'+t'$ 与 $s+t$ 同时为奇数或同时为偶数。

即，交换项（1）中任意两个元素的位置后，其行标和列标所构成的排列的逆序数之和的奇偶性不变。

另一方面，经过若干次对换项（1）中元素的次序，总可以把项（1）变为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

所以 $(-1)^{s+t}=(-1)^{s'+t'}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$

$$=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

$$=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

得证。

n 阶行列式的定义等价形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

等价形式1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_1p_1}a_{q_2p_2}\cdots a_{q_np_n}.$$

等价形式2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

例3： 若 $a_{13}a_{2i}a_{32}a_{4k}$ 为四阶行列式的项，

试确定i与k，使该项带正号.

解 由$a_{13}a_{2i}a_{32}a_{4k}$ i,k 可取 1,4

若$i=1,k=4$ 符号为$(-1)^{\tau(3124)}$

$\tau(3124)=2$ 符号为正 即 $i=1,k=4$

练习 试确定i与k，使项 $a_{i2}a_{31}a_{43}a_{k4}$ 带负号

例4 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 求 x^3 的系数.

分析

$f(x)$是由4阶行列式的值给出的关于x的多项式，由行列式的定义：每一项都是不同行不同列的4个数的乘积：

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

要求x^3系数，先找出含x^3的项，

例5

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 求 x^3 的系数.

解 含 x^3 的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{\tau(1243)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = x^3 - 2x^3 = -x^3$$

故 x^3 的系数为-1.

例6 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解 分析

展开式中项的一般形式是 $(-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$.

$$p_n = n,\ p_{n-1} = n-1,\ p_{n-3} = n-3, \cdots p_2 = 2, p_1 = 1,$$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例7

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot4\cdot5\cdot8=160.$$

同理可得**下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, **对角行列式**

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

练习 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

形如

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

小结

n 阶行列式的定义等价形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

等价形式1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_1p_1}a_{q_2p_2}\cdots a_{q_np_n}.$$

等价形式2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$