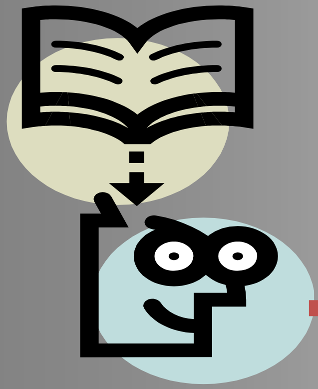
四川大学
SICHUAN UNIVERSITY

第二章 矩阵代数

第二节 矩阵代数运算



xuexue_zhou@scu.edu.cn

一、同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

二、矩阵的线性运算

矩阵的加法

定义：设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

二、矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算

负矩阵

称矩阵

$$-1\mathbf{A} = (-a_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{bmatrix}$$

为A的负矩阵，记作$-A$。

矩阵线性运算的性质

$$(1)\ \ A+B=B+A;$$

$$(2)\ \ (A+B)+C=A+(B+C);$$

$$(3)\ \ A+0=A;$$

$$(4)\ \ A+(-A)=0;$$

$$(5)\ \ 1A=A;$$

矩阵线性运算的性质

(6) $k(lA) = (kl)A$;

(7) $k(A+B) = kA + kB$;

(8) $(k+l)A = kA + lA$;

(9) $0A = 0, (-1)A = -A, k0 = 0$;

(10) 若$kA = 0$，则$k = 0$,或者$A = 0$.

例　设矩阵 A、B、C 满足等式 $3(A+C)=2(B-C)$，

其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，求 C .

解　由等式可得　$5C=2B-3A$

$$=\begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times2 & 2\times4 \\ 2\times1 & 2\times(-3) & 2\times5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3\times2 & 3\times3 & 3\times6 \\ 3\times(-1) & 3\times3 & 3\times5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 5 & -15 & -5 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 设$A=(a_{ij})_{2\times3}$, E_{ij}表示第i行第j列元素为1，其余元素为0的2×3矩阵($i=1,2;\ j=1,2,3$),

如$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$等，则$A$可表示为:

$$A=(a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{13}E_{13})+(a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+a_{23}E_{23})$$

$$=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}E_{1j}+\sum_{j=1}^{3}a_{2j}E_{2j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}E_{ij};$$

或

$$A=(a_{11}E_{11}+a_{21}E_{21})+(a_{12}E_{12}+a_{22}E_{22})+(a_{13}E_{13}+a_{23}E_{23})$$

$$=\sum_{i=1}^{2}a_{i1}E_{i1}+\sum_{i=1}^{2}a_{i2}E_{i2}+\sum_{i=1}^{2}a_{i3}E_{i3}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}E_{ij}.$$

线性运算是同型矩阵间最基本的运算。

线性组合

如果矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{A}_i$,则称$\boldsymbol{B}$可由矩阵$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$线性表示，或称$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$的一个线性组合.

n元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$,则方程组可表示为

向量形式：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$;

小结

矩阵的线性运算

与向量线性运算的定义完全一致！

矩阵的线性运算的性质

与向量线性运算的性质完全相同！

三、矩阵的乘法运算

引例: 某地区有四个工厂I、II、III、IV, 生产甲乙丙3种产品, 矩阵A表示一年中各工厂生产各种产品的数量, 矩阵B表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元),C表示各工厂的总收入及总利润。

$$A=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right]\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array}\end{array} \quad B=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{array}\right]\begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{单位价格} & \text{单位利润} \end{array}\end{array} \quad C=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{array}\right]\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array}\end{array}$$

$$\boxed{c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}}$$

定义：矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ ，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

注意1：矩阵的乘法规则——左行乘右列

由矩阵乘法的定义

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$=(a_{i1},\quad a_{i2}\quad ,\cdots\quad ,a_{in})\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$=A$的第i行乘B的第j列$(i=1,2\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,m)$.

注意2

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ？

当左矩阵的列数=右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。

乘积矩阵C的行数＝左矩阵的行数，
乘积矩阵C的列数＝右矩阵的列数.

从方程角度看矩阵的乘法

情形一　多元线性方程

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5$$

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

注意　左侧的行向量与右侧的列向量乘积实际上是向量的**数量积 (scalar product)或内积（inner product）**.

从方程角度看矩阵的乘法

情形二　多元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可以表示为： $AX=b.$

线性方程组的
矩阵形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

一般形式

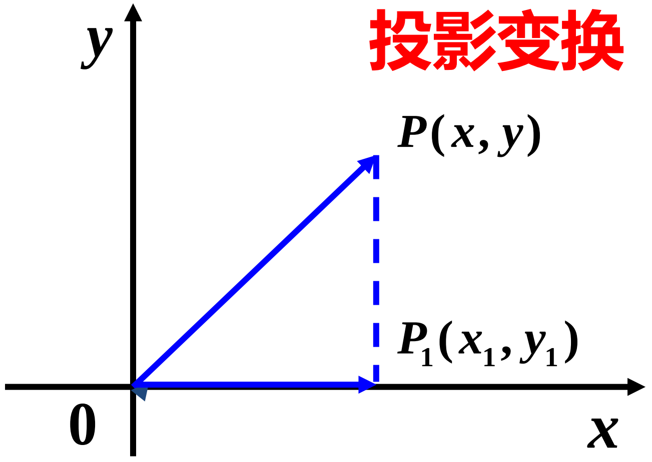
$$AX = \beta$$

矩阵形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

向量形式

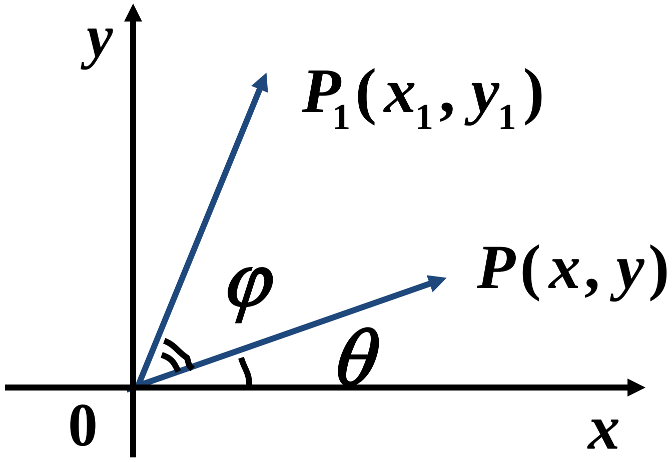
例



投影变换

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{对应}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{对应}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

求 AB, BA, AC

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, AC=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过观察，我们发现：

(1)两个非零矩阵的乘积可以为零；

(2)$AB \neq BA$，因此矩阵乘法不满足交换律；

(3)$AB = AC$，但$B \neq C$，因此矩阵乘法不满足消去律；

注意3：矩阵乘法与数的乘法的区别

➢在数的乘法中，若 $ab=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

在矩阵乘法中,若 $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

两个非零矩阵乘积可能为O。

➢在数的乘法中，$ab=ba$ （交换律成立）

在矩阵乘法中，$AB \neq BA$ （交换律不成立）

➢在数的乘法中，若 $ac=ad$，且 $a\neq 0 \Rightarrow c=d$ （消去律成立）

在矩阵乘法中，若 $AC=AD$，且 $A\neq O \not\Rightarrow C=D$ （消去律不成立）

练习：计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

解：$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times2 \\ 3\times1 & 3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

例　计算下列矩阵的乘积.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

矩阵乘法的运算规律

(1) **乘法结合律** $(AB)C = A(BC)$

(2) **数乘和乘法的结合律和交换律**

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$ (其中 λ 是数)

(3) **乘法对加法的分配律**

左分配律：$A(B+C) = AB + AC$

右分配律：$(B+C)A = BA + CA$

(4) 零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数0，即

$$\mathbf{0}_{s\times m}A_{m\times n}=\mathbf{0}_{s\times n} \qquad A_{m\times n}\mathbf{0}_{n\times t}=\mathbf{0}_{m\times t}$$

(5) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_{m}A_{m\times n}=A_{m\times n}E_{n}=A$$

推论： 矩阵乘法不一定满足交换律，但是λE与任何同阶方阵都是可交换的.

(6) **矩阵的幂** 若 A 是 n 阶**方阵**，定义

$$A^0 = E_n, \quad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然 $A^k A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式是否成立?

什么时候成立?

$$\left.\begin{array}{l}(AB)^k = A^k B^k \\ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2\end{array}\right\}$$

A、B可交换时成立

2. 矩阵乘法的运算规律

与数的乘法不同	与数的乘法类似
(1)两个非零矩阵乘积可能为O。 (2)交换律不成立 $AB \neq BA$ (3)消去律不成立 $AC = AD$, 且 $A \neq O \not\Rightarrow C = D$	(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$ (2) 数乘和乘法的结合律和交换律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (其中λ是数) (3) 乘法对加法的分配律 左分配律：$A(B+C) = AB + AC$ 右分配律：$(B+C)A = BA + CA$ (4) 零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数0，即 $0_{s\times m} A_{m\times n} = 0_{s\times n}$ $A_{m\times n} 0_{n\times t} = 0_{m\times t}$ (5) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即 $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$ (6) 矩阵的幂 若 A 是 n 阶方阵，定义 $A^0 = E_n$， $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$ 显然 $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$

例 $f(x)=3x^2+6x-2$是数域P上的多项式，A是P上的n阶方阵，

则$f(x)$在$x=A$的值

$$f(A)=3A^2+6A-2E$$

称为A的一个矩阵多项式。

设多项式 $h(x),g(x)$

$$l(x)=h(x)+g(x),\quad m(x)=h(x)g(x),$$

则$l(A)=h(A)+g(A),m(A)=h(A)g(A).$

一般地，A的矩阵多项式之间可交换.

例 设n阶方阵A满足关系式 $A^2+2A-3E=0$，证明:存在矩阵B使得:

$$(A-2E)B=E.$$

分析 能否找到B为A的某一个多项式矩阵，由于要利用必须利用到关系式

$$A^2+2A-3E=0,$$

不妨假设$B=aA+bE$,其中参数a,b应满足

$$(A-2E)(aA+bE)=E,$$

即$aA^2+(b-2a)A-(2b+1)E=0.$

要利用关系$A^2+2A-3E=0$,于是a,b应满足

$$\frac{a}{1}=\frac{b-2a}{2}=\frac{2b+1}{3},\text{解之得}a=-\frac{1}{5},b=-\frac{4}{5}.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵 X .

解 设$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$满足$AX=XA$,于是

法一 直接用矩阵乘法和相等得到方程组，然后求解。

法二 利用A的特殊性，可改写A为

$$A=E+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则由$(E+B)X=X(E+B)$当且仅当$X+BX=X+XB$.于是$AX=XA$当且仅当$XB=BX$.从而有

$$\begin{pmatrix} 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_{11} & 2x_{12} \\ 0 & 2x_{21} & 2x_{22} \\ 0 & 2x_{31} & 2x_{32} \end{pmatrix}$$

由矩阵的相等得到线性方程组，解之得

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$$,其中x_{11}，x_{12}，x_{13}为任意数.

练习

设矩阵$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$，$a_1,a_2,a_3$互不相同，求与矩阵$A$可交换的矩阵$B$.

解：$\because AB=BA$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_1 & b_{13}a_1 \\ b_{21}a_2 & b_{22}a_2 & b_{23}a_2 \\ b_{31}a_3 & b_{32}a_3 & b_{33}a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_2 & b_{13}a_3 \\ b_{21}a_1 & b_{22}a_2 & b_{23}a_3 \\ b_{31}a_1 & b_{32}a_2 & b_{33}a_3 \end{bmatrix}$$

$b_{12}a_1=b_{12}a_2 \Rightarrow b_{12}=0$

$b_{13}a_1=b_{13}a_3 \Rightarrow b_{13}=0$

类似的，$b_{21}=0; b_{23}=0; b_{31}=0; b_{32}=0.$

所以，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & \\ & & b_{33} \end{bmatrix}$

而$b_{11}a_1=b_{11}a_1 \Rightarrow b_{11}$可以为任意数，

类似的b_{22},b_{33}可以任意数。

例

设$P=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$A=PQ$，求$A^n$.

解

$$A^2=P(QP)Q=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}2\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}=2A,$$

$$A^n=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\2 & -2 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

练习

1. 设$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 求 A－2B

$$\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

求乘积 AB 和 BA.

$$AB=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}6 & 1 & 12\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

3. 设$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, 求 A^n.

$$\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$