Exercice 1. Méthode du simplexe à 2 phases
Résoudre complètement le PL suivant avec la méthode à 2 phases :

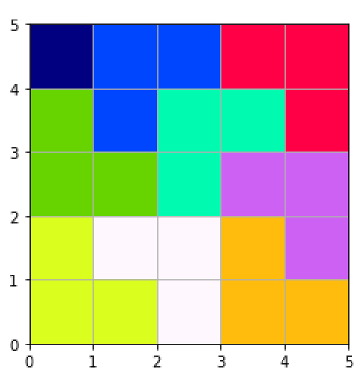
$$\begin{aligned} \max \quad & -x+y \\ x+y-e_1 &= 1 \\ 3x+2y &= 6 \\ x,y,e_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 2. Modélisation et simplexe
On considère un boulanger qui possède 3 types de farines : farine de blé, farine d'avoine et de seigle.
Il peut produire 2 types de baguettes qui demandent différentes quantités de farine :

	Blé	Avoine	Seigle	Prix
Baguette 1	100g	100g	100g	1,5€
Baguette 2	200g	50g	0g	2€
Stock	10kg	4kg	3kg	

1. Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire en nombres entiers (PLNE).
2. Dessiner l'ensemble des solutions admissibles du problème relaxé (où les variables sont réelles au lieu d'être entières).
3. Quel est le lien entre l'optimum du PLNE et l'optimum du PL relaxé ?
4. Résoudre le PLNE par l'algorithme du simplexe.
5. Écrire le dual de ce PL. Interprétation économique : supposons qu'un investisseur veuille acheter tout le stock de farine du boulanger. Quel est le prix d'achat minimum que le boulanger pourrait accepter ?

Exercice 3. Pavage
On considère une grille $n \times p$ que l'on souhaite paver (c'est-à-dire recouvrir sans chevaucher) avec un maximum de "L". Par exemple, un carré 5×5 peut-être être pavé avec 8 "L" :



Dans cet exemple, il n'y a qu'une case qui n'est pas recouverte (celle en haut à gauche).

1. Est-ce que le pavage de l'exemple est optimal?
2. Modéliser ce problème sous forme d'un PLNE P.
3. (Travail à faire à la maison) Résoudre P avec `python-mip`.
4. Écrire le dual P' de P et l'interpréter géométriquement.
5. Quelle est la valeur optimum du dual de l'exemple? Et du dual relaxé?
6. Quel est l'optimum du relaxé de l'exemple?

Exercice 4. Modélisations
En utilisant des variables binaires (0 ou 1), modéliser les problèmes suivants sous forme de programme linéaire :

1. **Sac à dos** : On a des objets de poids p_1, ..., p_n et de valeurs v_1, ..., v_n. On veut en mettre un maximum dans un sac à dos de capacité C.
2. **Coloriage de graphe** : On veut connaître le nombre minimum de couleurs pour colorier les sommets d'un graphe de façon à ce que 2 sommets adjacents soient de couleur différente.
3. **Warehouse location** : Une chaîne de restaurants veut ouvrir un certain nombre de restaurants parmi un ensemble P d'emplacements possibles, de manière à satisfaire au mieux un ensemble C de clients. On note $t_{p,c}$ le temps de transport entre la position $p \in P$ et le client $c \in C$. Une ouverture sur une position $p \in P$ coûte c_p euros. On veut choisir à quels emplacements ouvrir des restaurants de façon à minimiser la somme des coûts d'ouverture plus la somme des temps de déplacements de chaque client au restaurant le plus proche.

Exercice 5. Big M
La fameuse technique du « Big M » consiste à introduire une grosse constante pour modéliser une contrainte linéaire.

1. Supposons que l'on ait deux variables entières $x, y \geq 0$. Transformer la contrainte (non-linéaire) $x = 0 \implies y = 0$ en une contrainte linéaire en introduisant une grosse constante M.
2. Faire de même pour $x \neq y$.