

Branch and Bound

Quentin Fortier

December 8, 2021

Recherche arborescente

Considérons le problème du sac à dos avec une capacité de 10 et les objets suivants :

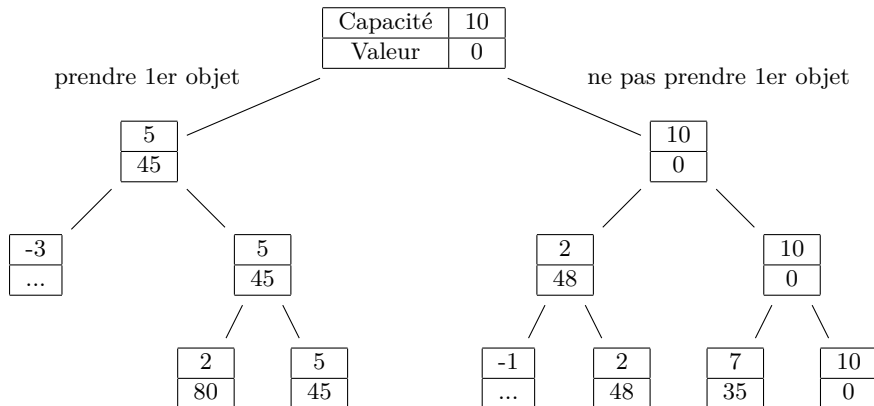
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Pour le résoudre, on peut faire une **recherche arborescente** : explorer toutes les possibilités.

Recherche arborescente

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Arbre des possibilités :



Branch and Bound

On peut améliorer cette recherche exhaustive de différentes façons.

Branch and Bound

On peut améliorer cette recherche exhaustive de différentes façons.

Branch and Bound

- Conserver en mémoire la meilleure solution vue jusqu'à présent.
- Avant de visiter un noeud : calculer un majorant sur la valeur maximale atteignable depuis ce noeud.
- Si ce majorant est inférieur à la meilleure solution : ne pas le visiter.

Branch and Bound

On peut améliorer cette recherche exhaustive de différentes façons.

Branch and Bound

- Conserver en mémoire la meilleure solution vue jusqu'à présent.
- Avant de visiter un noeud : calculer un majorant sur la valeur maximale atteignable depuis ce noeud.
- Si ce majorant est inférieur à la meilleure solution : ne pas le visiter.

Intérêt : Diminuer la taille de l'arbre de recherche donc gagner en rapidité.

Branch and Bound : Sac à dos

Idée de majorant pour le sac à dos :

Branch and Bound : Sac à dos

Idée de majorant pour le sac à dos : la valeur totale qu'on obtiendrait en prenant tous les objets restants.

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|-----|---------|
| 10 | 128 | ← Borne |
| 0 | | |

Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | |
|----|-----|
| 10 | 128 |
| 0 | |

← Borne

| | |
|----|-----|
| 5 | 128 |
| 45 | |

Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | |
|----|-----|
| 10 | 128 |
| 0 | |

← Borne

| | |
|----|-----|
| 5 | 128 |
| 45 | |

| | |
|-----|-----|
| -3 | ... |
| ... | |

Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|-----|---------|
| 10 | 128 | ← Borne |
| 0 | | |

| | |
|----|-----|
| 5 | 128 |
| 45 | |

| | |
|-----|-----|
| -3 | ... |
| ... | |

| | |
|----|----|
| 5 | 80 |
| 45 | |

Meilleure solution : $-\infty$

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|-----|---------|
| 10 | 128 | ← Borne |
| 0 | | |

| | |
|----|-----|
| 5 | 128 |
| 45 | |

| | |
|-----|-----|
| -3 | ... |
| ... | |

| | |
|----|----|
| 5 | 80 |
| 45 | |

| | |
|----|----|
| 2 | 80 |
| 80 | |

Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|-----|---------|
| 10 | 128 | ← Borne |
| 0 | | |

| | |
|----|-----|
| 5 | 128 |
| 45 | |

| | |
|-----|-----|
| -3 | ... |
| ... | |

| | |
|----|----|
| 5 | 80 |
| 45 | |

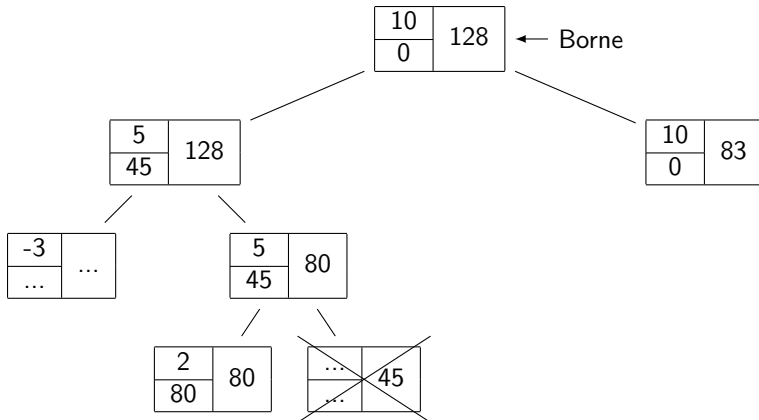
| | |
|----|----|
| 2 | 80 |
| 80 | |

| | |
|-----|----|
| ... | 45 |
| ... | |

Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

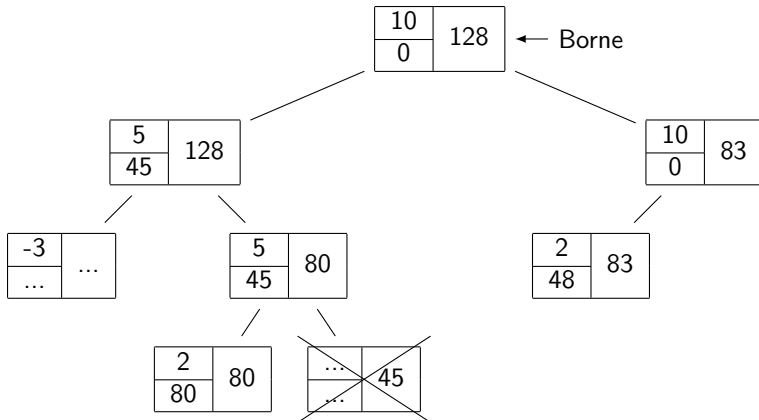
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

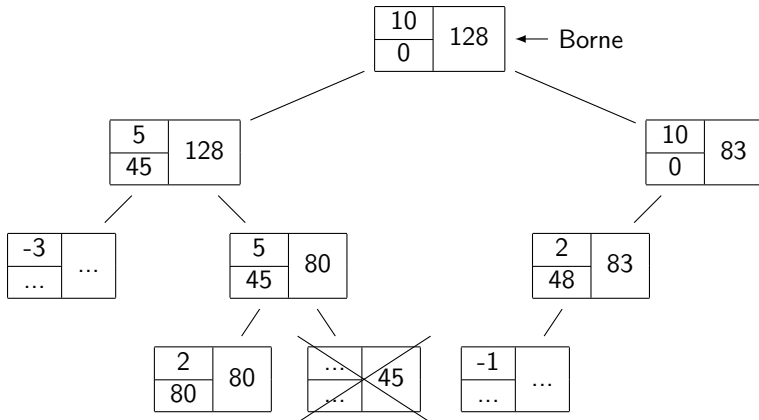
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

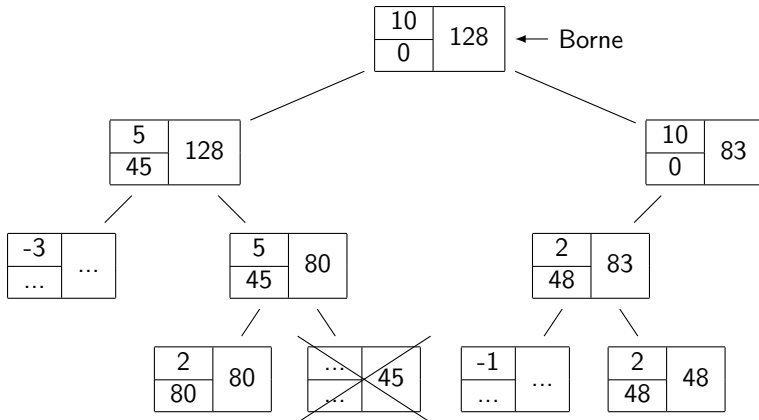
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

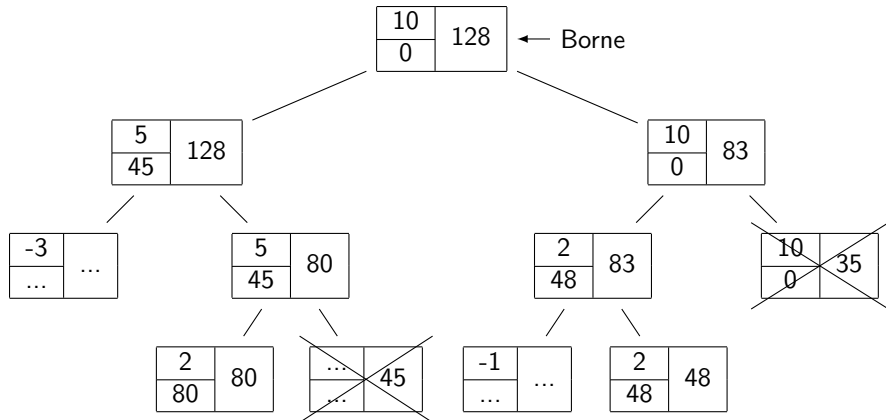
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Meilleure solution : 80

Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

Relaxer le problème : **sac à dos fractionnaire** (où on peut prendre une fraction $x \in [0, 1]$ d'un objet).

Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

Relaxer le problème : **sac à dos fractionnaire** (où on peut prendre une fraction $x \in [0, 1]$ d'un objet).

Comme une solution du sac à dos est aussi solution du sac à dos fractionnaire, l'optimum du sac à dos fractionnaire est un majorant de l'optimum du sac à dos.

Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

Relaxer le problème : **sac à dos fractionnaire** (où on peut prendre une fraction $x \in [0, 1]$ d'un objet).

Comme une solution du sac à dos est aussi solution du sac à dos fractionnaire, l'optimum du sac à dos fractionnaire est un majorant de l'optimum du sac à dos.

Exercice

Donner un algorithme glouton pour résoudre le sac à dos fractionnaire.
Complexité?

Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|----|---------|
| 10 | 92 | ← Borne |
| 0 | | |

Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

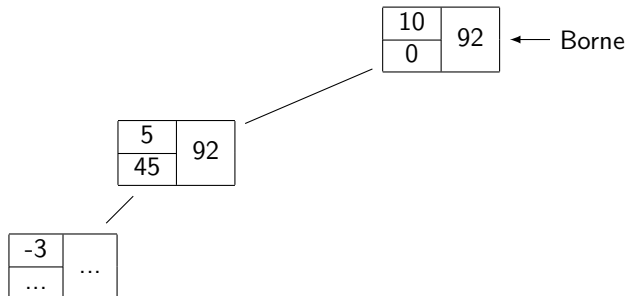
| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

| | | |
|----|----|---------|
| 10 | 92 | ← Borne |
| 0 | | |

| | |
|----|----|
| 5 | 92 |
| 45 | |

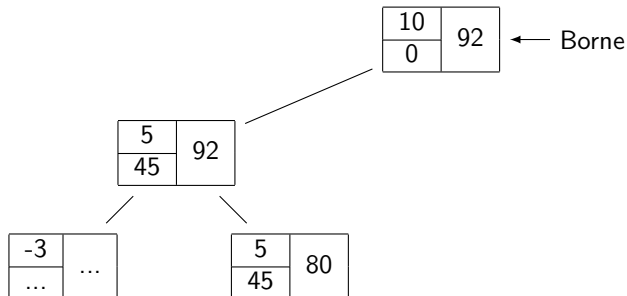
Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



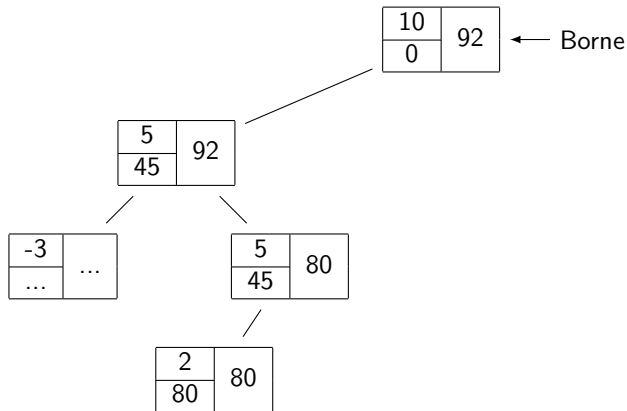
Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



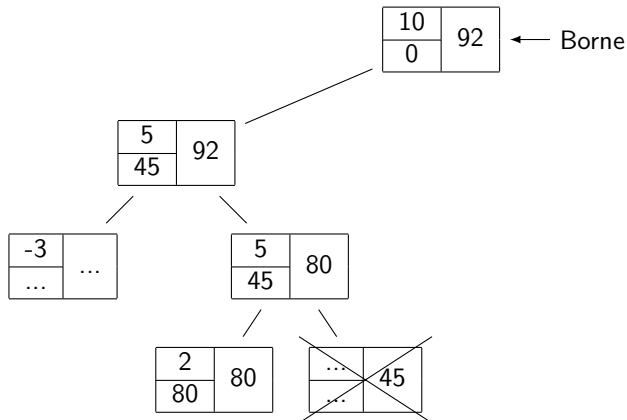
Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



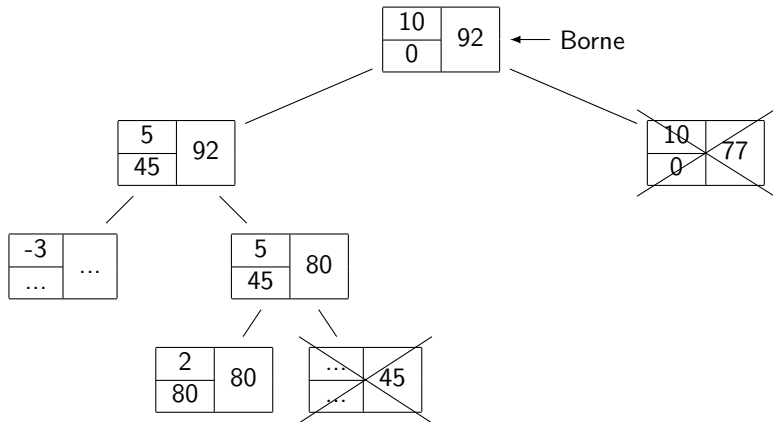
Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Branch and Bound : Relaxation du sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |



Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

- 1 On résout (avec l'algo. du simplexe) la relaxation du PLNE, ce qui donne une solution $\mathbf{x} = \mathbf{v}$.

Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

- ① On résout (avec l'algo. du simplexe) la relaxation du PLNE, ce qui donne une solution $\mathbf{x} = \mathbf{v}$.
- ② Si l'optimum du relaxé est moins bon que la meilleure solution : arrêter la recherche.

Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

- ① On résout (avec l'algo. du simplexe) la relaxation du PLNE, ce qui donne une solution $\mathbf{x} = \mathbf{v}$.
- ② Si l'optimum du relaxé est moins bon que la meilleure solution : arrêter la recherche.
- ③ Si \mathbf{v} est entier, on a résolu le PLNE : mettre à jour la meilleure solution déjà obtenue.

Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

- ① On résout (avec l'algo. du simplexe) la relaxation du PLNE, ce qui donne une solution $\mathbf{x} = \mathbf{v}$.
- ② Si l'optimum du relaxé est moins bon que la meilleure solution : arrêter la recherche.
- ③ Si \mathbf{v} est entier, on a résolu le PLNE : mettre à jour la meilleure solution déjà obtenue.
- ④ Sinon, soit v_i une coordonnée non entière de \mathbf{v} .

Branch and Bound en PLNE

On peut généraliser à n'importe quel PLNE à résoudre :

- ❶ On résout (avec l'algo. du simplexe) la relaxation du PLNE, ce qui donne une solution $\mathbf{x} = \mathbf{v}$.
- ❷ Si l'optimum du relaxé est moins bon que la meilleure solution : arrêter la recherche.
- ❸ Si \mathbf{v} est entier, on a résolu le PLNE : mettre à jour la meilleure solution déjà obtenue.
- ❹ Sinon, soit v_i une coordonnée non entière de \mathbf{v} .
On résout récursivement 2 nouveaux PLNE :
 - En ajoutant la contrainte $x_i \leq \lfloor v_i \rfloor$
 - En ajoutant la contrainte $x_i \geq \lceil v_i \rceil$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

$$\begin{array}{l} \max 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{array}$$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Optimum relaxé : 92
 $x_1 = 1, x_2 = 0.25, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Optimum relaxé : 92
 $x_1 = 1, x_2 = 0.25, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

$$x_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Optimum relaxé : 92
 $x_1 = 1, x_2 = 0.25, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

$$x_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Optimum relaxé : **80**
 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Optimum relaxé : 92
 $x_1 = 1, x_2 = 0.25, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_2 \geq 1$$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Optimum relaxé : **80**
 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Optimum relaxé : 71.3
 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}$

Branch and Bound en PLNE : Sac à dos

| | | | |
|--------|----|----|----|
| Poids | 5 | 8 | 3 |
| Valeur | 45 | 48 | 35 |

Optimum relaxé : 92
 $x_1 = 1, x_2 = 0.25, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_2 \geq 1$$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Optimum relaxé : **80**
 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$$\begin{aligned} \max & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\ & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Optimum relaxé : 71.3
 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}$

Branch and Bound en PLNE : 2ème exemple

Exercice

Résoudre le PLNE suivant par Branch & Bound (en résolvant les PL relaxés graphiquement) :

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Branch and Bound en PLNE : 2ème exemple

Branch and bound est très utilisé par les solveurs pour résoudre des PLNE :

<https://www.coin-or.org/Cbc/cbcuserguide.html>

Coupes (cutting planes)

Soit P un PLNE d'optimum $\text{Opt}(P)$ et P' sa relaxation d'optimum $\text{Opt}(P')$.

Définition

L'**integrality gap** est défini par $\frac{\text{Opt}(P')}{\text{Opt}(P)}$.

Si il est égal à 1, on peut utiliser la relaxation pour résoudre P .

Coupes (cutting planes)

Soit P un PLNE d'optimum $\text{Opt}(P)$ et P' sa relaxation d'optimum $\text{Opt}(P')$.

Définition

L'**integrality gap** est défini par $\frac{\text{Opt}(P')}{\text{Opt}(P)}$.

S'il est égal à 1, on peut utiliser la relaxation pour résoudre P .

Idee des *cutting planes* : ajouter des contraintes à P sans changer les solutions entières (donc sans changer $\text{Opt}(P)$) mais en rapprochant le *gap* de 1.

Coupes (cutting planes) : Gomory cut

Idée des *Gomory cut* :

- 1 Appliquer l'algo. du simplexe sur P'

Coupes (cutting planes) : Gomory cut

Idée des *Gomory cut* :

- 1 Appliquer l'algo. du simplexe sur P'
- 2 L'algo. termine sur un sommet vérifiant n égalités

Coupes (cutting planes) : Gomory cut

Idée des *Gomory cut* :

- 1 Appliquer l'algo. du simplexe sur P'
- 2 L'algo. termine sur un sommet vérifiant n égalités
- 3 Supposons que l'une de ces égalités, disons $x_1 + \sum_{k=n+1} a_k x_k = b_1$,
donne $x_1 = b_1 \notin \mathbb{N}$

Coupes (cutting planes) : Gomory cut

Idée des *Gomory cut* :

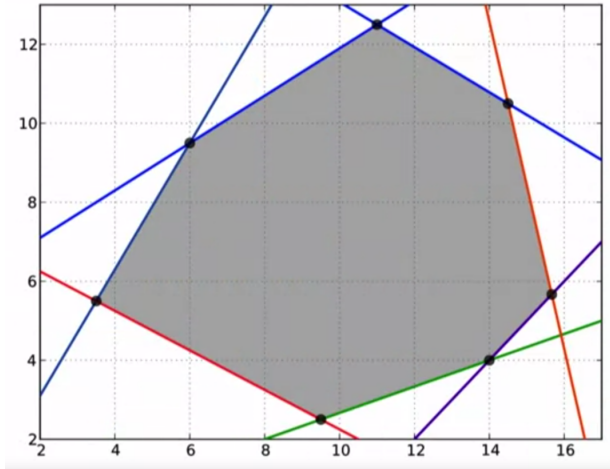
- ➊ Appliquer l'algo. du simplexe sur P'
- ➋ L'algo. termine sur un sommet vérifiant n égalités
- ➌ Supposons que l'une de ces égalités, disons $x_1 + \sum_{k=n+1} a_k x_k = b_1$,
donne $x_1 = b_1 \notin \mathbb{N}$
- ➍ On ajoute la contrainte $x_1 + \sum_{k=n+1} \lfloor a_k \rfloor x_k \leq \lfloor b_1 \rfloor$ à P .

Coupes (cutting planes) : Gomory cut

Idée des *Gomory cut* :

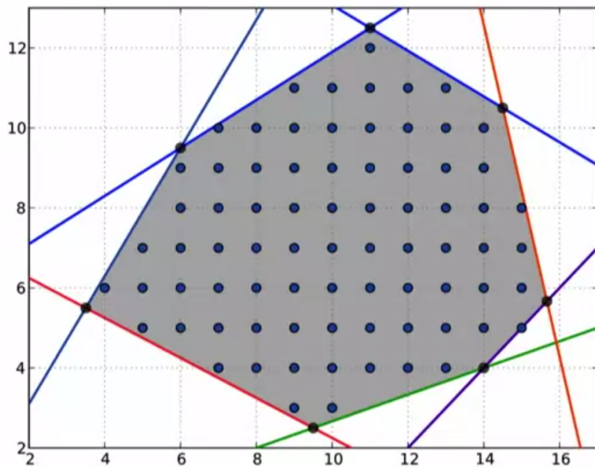
- ➊ Appliquer l'algo. du simplexe sur P'
- ➋ L'algo. termine sur un sommet vérifiant n égalités
- ➌ Supposons que l'une de ces égalités, disons $x_1 + \sum_{k=n+1} a_k x_k = b_1$,
donne $x_1 = b_1 \notin \mathbb{N}$
- ➍ On ajoute la contrainte $x_1 + \sum_{k=n+1} \lfloor a_k \rfloor x_k \leq \lfloor b_1 \rfloor$ à P .
- ➎ On recommence, jusqu'à obtenir une solution entière.

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut



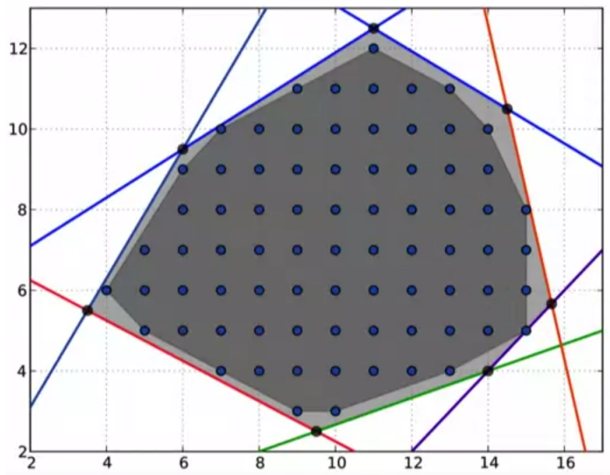
Relaxation P'

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut



Points entiers

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut



Enveloppe convexe de P

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut

Un *polyhedral cut* est une inégalité qui correspond à une face de l'enveloppe convexe de P .

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut

Un *polyhedral cut* est une inégalité qui correspond à une face de l'enveloppe convexe de P .

Définition

Un **stable** (*independent set* dans un graphe est un ensemble de sommets sans aucune arête.

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut

Un *polyhedral cut* est une inégalité qui correspond à une face de l'enveloppe convexe de P .

Définition

Un **stable** (*independent set*) dans un graphe est un ensemble de sommets sans aucune arête.

Exercice

Exprimer la recherche du stable de taille maximum comme PLNE.

Définition

Une **clique** est un ensemble de sommets tous reliés entre eux.

Coupes (cutting planes) : Polyhedral cut

Définition

Une **clique** est un ensemble de sommets tous reliés entre eux.

Exercice

Quel est le lien entre clique et stable? Quelle inégalité peut-on ajouter au PLNE des stables à partir de cliques (on peut montrer que ce sont des *polyhedral cuts*)

Définition

Branch and Cut = Branch and Bound + Cutting plane

Définition

Branch and Cut = Branch and Bound + Cutting plane

Pour résoudre un PLNE :

- 1 Résoudre sa relaxation
- 2 Tant que possible, ajouter des inégalités correspondant à des *cutting planes*
- 3 Faire du Branch and Bound