Programmation linéaire en nombre entiers

Quentin Fortier

November 8, 2021

Programmation linéaire en nombre entiers

Définition

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et les arêtes de 1 à p. La **matrice d'incidence** de G est une matrice M de taille $n \times p$ telle que $M_{i,j}$ est égale à 1 si le sommet i est une extremité de l'arête j, 0 sinon.

On peut donc réécrire le PL des couplages :

$\max \sum_{e \in E} x_e$	$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$
$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$	$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$
$\forall e \in E, \ x_e \geq 0$	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$

Programmation linéaire en nombre entiers

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

$\rightarrow$ Algorithme pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti : résoudre le PL (avec l'algo. du simplexe ou de l'ellipsoïde) et obtenir un sommet du polytope qui est à coordonnées entières.

Exemple avec Binder

Dual du PL des couplages

:

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$	$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$
$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$	$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$
: $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$	$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$	$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$
$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$	$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$
: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$

$\mathbf{M}^T$ est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.
Ces variables correspondent à une couverture par sommets.

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x\in\mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T\mathbf{x} \qquad \Big| \qquad \min_{y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n \qquad \Big| \qquad \mathbf{M}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

: $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p \qquad \Big| \qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

$\mathbf{M}^T$ est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.
Ces variables correspondent à une couverture par sommets.D'après le théorème de dualité forte :

Théorème de König

Dans un graphe biparti, la taille maximum d'un couplage est égal à la taille minimum d'une couverture par sommets.

Approximation

Lorsque l'optimum du PL relaxé est atteint en un sommet qui n'est pas entier, on peut arrondir ses coordonnées pour espérer obtenir une **approximation** de l'optimum du PLNE.

Approximation : vertex-cover

On considère à nouveau le PL relaxé de la couverture de sommets, mais dans un graphe pas forcément biparti :

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Exercice

Montrer que l'optimum n'est pas forcément atteint en des valeurs entières.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq c^*$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u,v\} \in E$$

$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq c^*$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$y_u + y_v \geq 1,\ \forall \{u, v\} \in E$$
$$y_u \geq 0,\ \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V,\ y_v \geq \frac{1}{2}\}$.
Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \leq c^*$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Donc $\boxed{|C| \leq 2c^*}$: ceci donne une **2-approximation**.