Programmation linéaire : dualité

Quentin Fortier

November 17, 2021

Dualité

$$\mathbf{z} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Pour obtenir un minorant de $\mathbf{z}$, il suffit de trouver une solution admissible.

Dualité

$$\mathbf{z} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Pour obtenir un minorant de $\mathbf{z}$, il suffit de trouver une solution admissible.
Comment obtenir un majorant ?

Dualité

$$
\begin{aligned}
z = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad & 4x + 5y \\
2x + y &\leq 8 \\
x + 2y &\leq 7 \\
y &\leq 3 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Comment majorer z ?

Dualité

$$z = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad 4x + 5y$$

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 8 \\ x + 2y &\leq 7 \qquad (*) \\ y &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Comment majorer z ?

$$4x + 5y \leq 5 \times (2x + y) \leq 5 \times 8 = 40$$

Dualité

$$\begin{aligned} z = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad & 4x + 5y \\ 2x + y &\leq 8 \quad (*) \\ x + 2y &\leq 7 \quad (*) \\ y &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Comment majorer z ?

$$4x + 5y \leq 5 \times (2x + y) \leq 5 \times 8 = 40$$

$$4x + 5y = (2x + y) + 2(x + 2y) \leq 8 + 2 \times 7 = 22$$

Ceci prouve que $(x, y) = (3, 2)$, qui donne $4x + 5y = 22$, est une solution optimale.

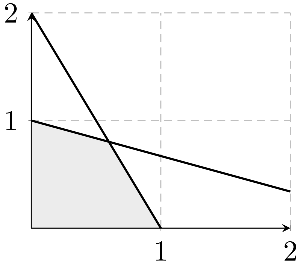
Dualité

Primal	**Dual**
$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$	$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p} \mathbf{b^T y}$
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A^T y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Dualité

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad x_1 + x_2$$

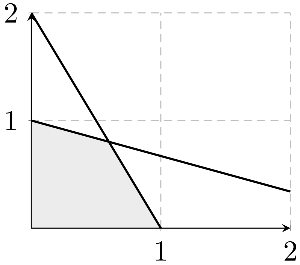
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Dualité

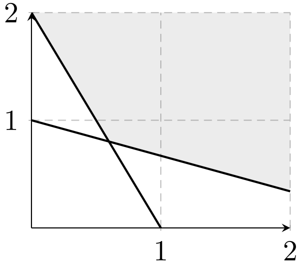
$$\max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \quad x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\min_{y_1,y_2\in\mathbb{R}} \quad 3y_1 + 2y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Théorème de dualité

Primal

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \ (1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dual

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^p} \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{y} \ \geq \ \mathbf{c} \ (2)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Théorème de dualité faible

Soit $\mathbf{x}$ une solution admissible d'un PL primal et $\mathbf{y}$ une solution admissible du PL dual. Alors :

$$\mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{y}$$

Théorème de dualité

Primal

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \ (1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dual

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^p} \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{y} \ \geq \ \mathbf{c} \ (2)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Théorème de dualité faible

Soit $\mathbf{x}$ une solution admissible d'un PL primal et $\mathbf{y}$ une solution admissible du PL dual. Alors :

$$\mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{y}$$

Preuve :

$$\mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x} \overset{(2)}{\leq} (\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{y})^\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{(1)}{\leq} \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathbf{T}\mathbf{y}$$

Théorème de dualité

Primal	Dual
$\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$	$\min\limits_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^p} \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Théorème de dualité forte

Soient $\mathbf{x}$ solution admissible du primal et $\mathbf{y}$ du dual vérifiant $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$.
Alors :

- $\mathbf{x}$ est une solution optimale du primal
- $\mathbf{y}$ est une solution optimale du dual

Preuve : similaire au théorème max flow $-$ min cut.

Complementary slackness

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des solutions optimales du primal et dual : $\mathbf{c^T x} = \mathbf{b^T y}$.
Donc les inégalités suivantes sont des égalités :

$$\mathbf{c^T x} \leq (\mathbf{A^T y})^\mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{y^T A x} \leq \mathbf{y^T b} = \mathbf{b^T y}$$

$$\mathbf{c^T x} = \sum_i c_i x_i$$

$$(\mathbf{A^T y})^\mathbf{T} \mathbf{x} = \sum_i (\sum_j A_{i,j} y_j) x_i$$

Complementary slackness

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des solutions optimales du primal et dual : $\mathbf{c^T x} = \mathbf{b^T y}$.
Donc les inégalités suivantes sont des égalités :

$$\mathbf{c^T x} \leq (\mathbf{A^T y})^\mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{y^T A x} \leq \mathbf{y^T b} = \mathbf{b^T y}$$

$$\mathbf{c^T x} = \sum_i c_i x_i$$

$$(\mathbf{A^T y})^\mathbf{T} \mathbf{x} = \sum_i (\sum_j A_{i,j} y_j) x_i$$

Donc, pour tout i :

$$\boxed{x_i = 0} \text{ ou } \boxed{c_i = \sum_j A_{i,j} y_j}$$

Complementary slackness

Théorème des écarts complémentaires (Complementary slackness)

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ sont des solutions optimales du primal et dual alors :

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $x_i = 0$ ou la $i$ème contrainte du dual est *tight*
- $\forall 1 \leq j \leq p$, $y_j = 0$ ou la $j$ème contrainte du primal est *tight*

Complementary slackness : application

Si on a une solution optimale du primal, on peut en déduire une solution optimale du dual en utilisant les écarts complémentaires (sans avoir besoin de réutiliser l'algorithme du simplexe).

Exercice

Trouver le dual du PL suivant et en donner une solution optimale sachant que $(x_1, x_2) = (3, 2)$ est une solution optimale du primal :

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$