

Programmation linéaire en nombre entiers

Quentin Fortier

November 17, 2021

Programmation linéaire en nombre entiers

Un Programme Linéaire en Nombre Entier (PLNE) a la particularité d'avoir des variables entières plutôt que réelles :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

De très nombreux problèmes de combinatoire peuvent se mettre sous la forme de PLNE.

Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme polynomial pour résoudre un PLNE quelconque.

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Il n'existe pas d'algorithme polynomial pour résoudre un PLNE quelconque.

On peut essayer de se ramener à un PL, en faisant une **relaxation**, c'est à dire en considérant le même problème mais avec des variables réelles.

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Considérons ce PLNE :

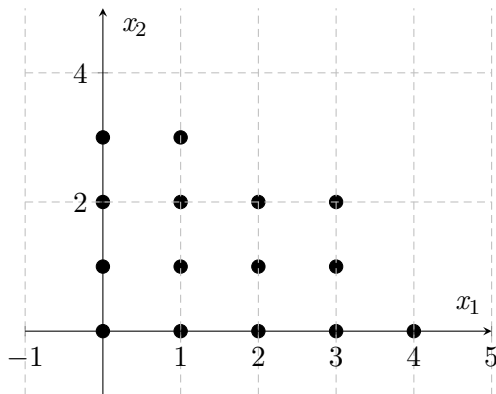
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$



Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Relaxation :

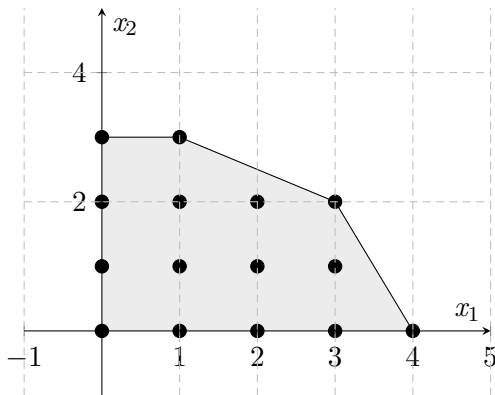
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Relaxation :

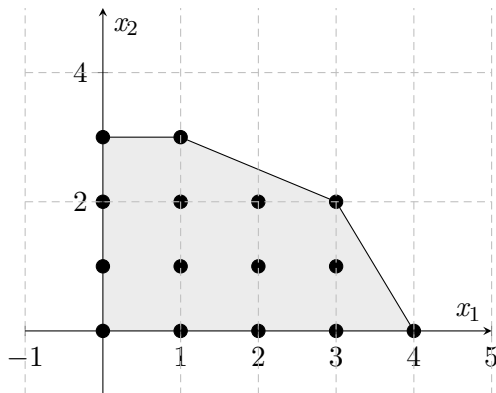
$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Comme **les sommets sont à coordonnées entières**, on peut résoudre la relaxation pour obtenir la solution optimale du PLNE.

Exercice

Donner un exemple de PLNE dont l'optimum est différent de l'optimum de la relaxation

Exercice

Donner un exemple de PLNE dont l'optimum est différent de l'optimum de la relaxation

$$\max x$$

$$x \leq 0.5$$

$$x \in \mathbb{N}$$

Définition

Une matrice A est **totalement unimodulaire** (TU) si toutes les sous-matrices carrées de M ont un déterminant égal à 0, 1 ou -1

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Définition

Une matrice A est **totalelement unimodulaire** (TU) si toutes les sous-matrices carrées de M ont un déterminant égal à 0, 1 ou -1

Soit P le polyèdre défini par le PL :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Théorème

Si A est TU alors les sommets de P sont entiers (i.e. à coordonnées entières).

Programmation linéaire en nombre entiers : relaxation

Théorème

Si A est TU alors les sommets de P sont entiers (i.e. à coordonnées entières).

Preuve : Un sommet de P est obtenu lorsque n inégalités deviennent des égalités, i.e.

quand une sous matrice \tilde{A} de taille $n \times n$ vérifie $\tilde{A}X = \tilde{b}$.

D'après les règles de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(\tilde{A}_i)}{\det(\tilde{A})}$$

Comme $\det(\tilde{A}) = \pm 1$, $\boxed{x_i \in \mathbb{N}}$.

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Définition

Une **couverture par sommets** (*vertex cover*) de G est un ensemble de sommets telle que toute arête soit adjacente à un de ces sommets

Exemple : matching et vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition

Un **couplage** (*matching*) de G est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes (sans extrémité en commun)

Définition

Une **couverture par sommets** (*vertex cover*) de G est un ensemble de sommets telle que toute arête soit adjacente à un de ces sommets

Théorème

Si $M \subseteq E$ est un couplage et $C \subseteq V$ une couverture par sommets :

$$|M| \leq |C|$$

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0, 1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0, 1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \quad x_e \in \{0, 1\} \quad (*)$$

Exemple : matching et vertex cover

On définit des variables $x_e \in \{0, 1\}$ indiquant si une arête e est sélectionnée dans un matching.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \quad x_e \in \{0, 1\} \quad (*)$$

On relaxe $(*)$ en $x_e \geq 0$ (i.e. $x_e \in \mathbb{R}^+$).

Exemple : matching et vertex cover

Définition

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et les arêtes de 1 à p . La **matrice d'incidence** de G est une matrice M de taille $n \times p$ telle que $M_{i,j}$ est égale à 1 si le sommet i est une extrémité de l'arête j , 0 sinon.

On peut donc réécrire le PL relaxé des couplages :

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \quad x_e \geq 0$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$M\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

Exemple : matching et vertex cover

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

Exemple : matching et vertex cover

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

→ Algorithme pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti : résoudre le PL (avec l'algo. du simplexe ou de l'ellipsoïde) et obtenir un sommet du polytope qui est à coordonnées entières.

Exemple avec Binder

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets.

Exemple : matching et vertex cover

Dual du PL des couplages :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets. D'après le théorème de dualité forte :

Théorème de König

Dans un graphe biparti, la taille maximum d'un couplage est égal à la taille minimum d'une couverture par sommets.

Approximation

Lorsque l'optimum du PL relaxé est atteint en un sommet qui n'est pas entier, on peut arrondir ses coordonnées pour espérer obtenir une **approximation** de l'optimum du PLNE.

Approximation : vertex-cover

On considère à nouveau le PL relaxé de la couverture de sommets, mais dans un graphe pas forcément biparti :

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Exercice

Montrer que l'optimum n'est pas forcément atteint en des valeurs entières.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $$\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Donc $|C| \leq 2c^*$: ceci donne une **2-approximation**.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Soit y^* une solution optimale et $C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}$.

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

$|C| \leq 2c^*$: ceci donne une **2-approximation**.

Exemple avec Binder