

Programmation linéaire en nombre entiers

Quentin Fortier

November 8, 2021

Définition

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et les arêtes de 1 à p . La **matrice d'incidence** de G est une matrice M de taille $n \times p$ telle que $M_{i,j}$ est égale à 1 si le sommet i est une extrémité de l'arête j , 0 sinon.

On peut donc réécrire le PL des couplages :

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \quad x_e \geq 0$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

→ Algorithme pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti : résoudre le PL (avec l'algo. du simplexe ou de l'ellipsoïde) et obtenir un sommet du polytope qui est à coordonnées entières.

Exemple avec Binder

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

:

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets.

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets. D'après le théorème de dualité forte :

Théorème de König

Dans un graphe biparti, la taille maximum d'un couplage est égal à la taille minimum d'une couverture par sommets.

Approximation

Lorsque l'optimum du PL relaxé est atteint en un sommet qui n'est pas entier, on peut arrondir ses coordonnées pour espérer obtenir une **approximation** de l'optimum du PLNE.

Approximation : vertex-cover

On considère à nouveau le PL relaxé de la couverture de sommets, mais dans un graphe pas forcément biparti :

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

Exercice

Montrer que l'optimum n'est pas forcément atteint en des valeurs entières.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

On calcule une solution optimale y^* et on considère

$$C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}.$$

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

On calcule une solution optimale y^* et on considère

$$C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}.$$

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

On calcule une solution optimale y^* et on considère

$$C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}.$$

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

On calcule une solution optimale y^* et on considère

$$C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}.$$

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$

Approximation : vertex-cover

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_u + y_v \geq 1, \forall \{u, v\} \in E$$

$$y_u \geq 0, \forall u \in V$$

On calcule une solution optimale y^* et on considère

$$C = \{v \in V, y_v \geq \frac{1}{2}\}.$$

Soit c^* la plus petite taille d'un *vertex-cover*.

- C est un *vertex-cover*

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq c^*$

- $\sum_{i=1}^n y_i^* \geq \frac{1}{2}|C|$