

Programmation linéaire en nombre entiers

Quentin Fortier

November 7, 2021

Définition

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n et les arêtes de 1 à p . La **matrice d'incidence** de G est une matrice M de taille $n \times p$ telle que $M_{i,j}$ est égale à 1 si le sommet i est une extrémité de l'arête j , 0 sinon.

On peut donc réécrire le PL des couplages :

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\forall v \in V, \quad \sum_{\{u,v\} \in E} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, \quad x_e \geq 0$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

Lemme

La matrice d'incidence M d'un graphe **biparti** est TU.

→ Algorithme pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti : résoudre le PL (avec l'algo. du simplexe ou de l'ellipsoïde) et obtenir un sommet du polytope qui est à coordonnées entières.

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

:

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets.

Programmation linéaire en nombre entiers

Dual du PL des couplages

$$\max_{x \in \mathbb{R}^p} \mathbf{1}_p^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n$$

:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_p$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}_n$$

\mathbf{M}^T est TU pour un graphe biparti donc l'optimum du dual est atteint en un des variables entières.

Ces variables correspondent à une couverture par sommets. D'après le théorème de dualité forte :

Théorème de König

Dans un graphe biparti, la taille maximum d'un couplage est égal à la taille minimum d'une couverture par sommets.

Approximation avec relaxation + rounding

Lorsque le dual