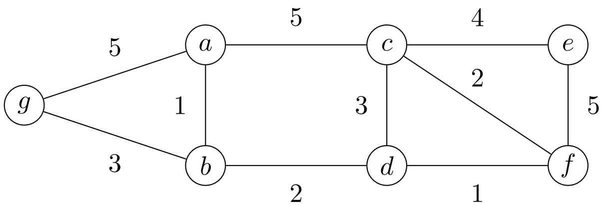
Exercice 1. Kruskal et Prim

Appliquer l'algorithme de Kruskal puis l'algorithme de Prim sur le graphe suivant :



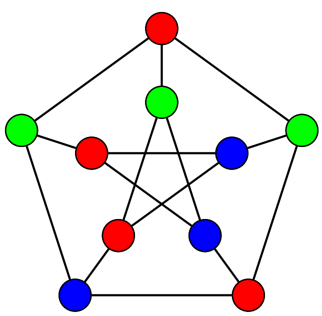
> **Solution** : On trouve dans les 2 cas un arbre couvrant minimum de poids 13
>
> - **Kruskal** : on choisit dans l'ordre les arêtes (a, b), (d, f), (d, b), (c, f), (g, b), (c, e)
> - **Prim**, en partant par exemple de a : (a, b), (b, d), (d, f), (f, c), (b, g), (c, e)

Exercice 2. Coloration de graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une k-**coloration** de G est une fonction $c : V \longmapsto \{0, ..., k-1\}$ vérifiant :

$$\forall \{u, v\} \in E,\ c(u) \neq c(v)$$

1. Trouver une 3-coloration du graphe de Petersen :

   > **Solution** :
   >
   > 

2. Montrer que ce graphe n'est pas 2-coloriable.

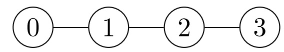
   > **Solution** : Le graphe de Petersen contient plusieurs cycles de longueur 5. On remarque facilement qu'il n'est pas possible de colorier un tel cycle avec 2 couleurs (ni d'ailleurs n'importe quel cycle de longueur impaire).

On appelle le **nombre chromatique** $\chi(G)$ le plus petit k tel que G soit k-coloriable. Par exemple, le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3.

On considère un algorithme glouton de coloriage :

> $C \longleftarrow \emptyset$
> Pour chaque sommet v (dans un ordre quelconque) :
> Si une couleur de C n'est utilisé par aucun voisin de v :
> Donner à v cette couleur
> Sinon :
> Ajouter une nouvelle couleur à C et l'utiliser pour v

3. Montrer sur un exemple simple que le coloriage obtenu n'est pas forcément optimal.

   > **Solution** : Si on colorie un chemin à 4 sommets en commençant par les deux extrêmités, l'algorithme glouton va leur donner la même couleur. Il va ensuite être obligé de donner 2 nouvelles couleurs aux deux autres sommets, ce qui donne 4 couleurs qui n'est pas l'optimum (on peut le colorier avec 2 couleurs).
   >
   > 
   >

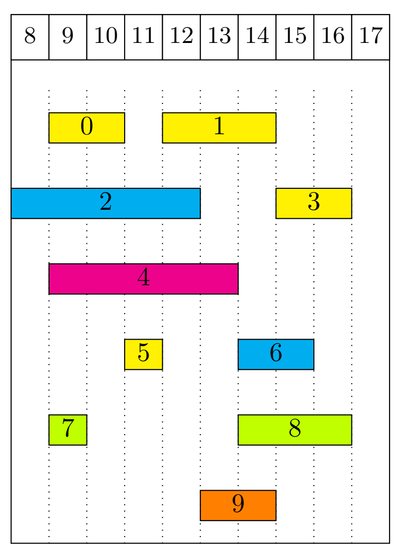
On souhaite créer un emploi du temps pour une journée : chaque cours possède une heure de début et de fin et doit être assigné à une salle. Il ne peut pas y avoir 2 cours en même temps dans la même salle. L'objectif est de minimiser le nombre de salles à utiliser.

4. Modéliser ce problème sous forme de coloriage de graphe.

   > **Solution** : On définit $G = (V, E)$ où
   >
   > - V est l'ensemble des cours (chaque sommet est un intervalle de temps)
   > - E représente les chevauchements de cours (deux sommets sont reliés si les intervalles de temps s'intersectent)

Dans l'algorithme glouton précédent, en considère maintenant les sommets par ordre de début de cours croissant (on regarde d'abord le cours qui se termine le plus tôt).

5. Appliquer ce nouvel algorithme glouton sur le diagramme de Gantt suivant :

   > **Solution** : On trouve qu'un a besoin de 4 salles différentes.
   >
   > 
   >

6. Soit k le nombre maximum de cours se déroulant pendant la même heure. Montrer que le nombre chromatique du graphe de la question 5 est au moins k.

Solution : Il faut colorier chacun de ces cours avec une couleur différente.

7. Montrer que l'algorithme glouton donne un coloriage à k couleurs et est donc optimal.

Solution : Supposons par l'absurde que l'algorithme glouton utilise au moins $k+1$ couleurs et considérons le premier intervalle I pour lequel l'algorithme utilise $k+1$ couleurs.
Soit i l'heure de début de I. Comme l'algorithme utilise $k+1$ couleurs pour I, il existe k intervalles déjà coloriés qui intersectent I. De plus ces intervalles commencent avec i car ils ont été considères avant dans l'algorithme. Donc il y a $k+1$ intervalles qui contiennent i.
Ceci contredit la définition de k.

On dit qu'un graphe est **biparti** s'il ne possède pas de cycle de longueur impaire.

8. Montrer qu'un graphe biparti est 2-coloriable en donnant un algorithme pour trouver un 2-coloriage.

Solution : On fait un parcours en largeur depuis un sommet de départ s quelconque, en donnant la couleur 0 à s, 1 à ses voisins, puis en alternant les couleurs.
Par propriété de parcours en largeur, on colorie en 0 tous les sommets à distance paire de s et en 1 tous les sommets à distance impaire. Ainsi, deux sommets u et v coloriés de la même couleur ne peuvent pas être adjacents : sinon, le chemin composé du chemin de s à u, puis de $\{u, v\}$, puis du chemin de v à s serait de longueur impaire.

Exercice 3. Approximation du TSP

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet (toutes les arêtes possibles existent) pondéré par w vérifiant :

$$\forall, x, y, z \in V,\ w(x, z) \leq w(x, y) + w(y, z)$$

Le problème du voyageur de commerce (TSP) consiste à trouver un cycle de poids minimum w^* visitant tous les sommets exactement une fois.
Soit T un arbre couvrant de poids minimum de G.

1. Montrer que $w(T) \leq w^*$.

Solution : En enlevant une arête au cycle de poids w^*, on obtient un arbre couvrant dont le poids est supérieur à $w(T)$.

On duplique ensuite chaque arête de T pour obtenir T', vérifiant $w(T') = 2w(T) \leq 2w^*$.

2. Comment obtenir un cycle C visitant tous les sommets exactement une fois à partir de T'?

Solution : On considère un cycle qui parcourt les sommets dans un ordre préfixe de parcours en profondeur. Cela revient à utiliser des "shortcuts" vers le prochain sommet non visité lorsqu'on est sur le point de parcourir une arête déjà visitée.

3. Montrer que $w(C) \leq 2w^*$ (c'est une 2-approximation du TSP).

4. **Solution** : Le cycle précédent est de poids inférieur à $w(T')$ d'après l'inégalité triangulaire supposée dans l'énoncé. D'où le résultat.