Exercice 1. Méthode du simplexe à 2 phases
Résoudre complètement le PL suivant avec la méthode à 2 phases :

$$\begin{aligned} \max \ & -x+y \\ 3x+2y &= 6 \\ x+y-e_1 &= 1 \\ x,y,e_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution : On pourrait choisir $(x,y,e_1)=(2,0,1)$ comme base initiale "évidente" pour l'algorithme du simplexe mais on choisit d'illustrer la méthode à 2 phases. On introduit donc des variables artificielles a_1, a_2 pour trouver une base initiale dans l'algorithme du simplexe (en minimisant a_1+a_2 pour forcer $a_1=a_2=0$), puis on fait un 2ème simplexe à partir de cette base.
Phase 1 : trouver une base initiale

$$\min \ a_1+a_2$$

$$3x+2y+a_1=6$$

$$x+y-e_1+a_2=1$$

$$x,y,e_1,a_2,a_1\geq 0$$

On choisit donc a_2 et a_1 comme variables en base :

$$\min \ (1-x-y+e_1)+(6-3x-2y)=7-4x-3y+e_1$$

$$a_1=6-3x-2y$$

$$a_2=1-x-y+e_1$$

On choisit de faire rentrer une variable avec un coefficient négatif (car on souhaite minimiser) dans la fonction objective, par exemple x.
$a_2=1-x-y+e_1\geq 0$ implique $x\leq 1$ et $a_1=6-3x-2y\geq 0$ implique $x\leq 3$. On sort donc a_2 :

$$\min \ 7-4(1-a_2-y+e_1)-3y+e_1=3+4a_2+y-3e_1$$

$$a_1=6-3(1-a_2-y+e_1)-2y=3+3a_2+y-3e_1$$

$$x=1-a_2-y+e_1$$

On rentre ensuite e_1 et on sort a_1 :

$$\min \ 3+4a_2+y-3(1+a_2-\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}y)=a_2+a_1$$

$$e_1=1+a_2-\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}y$$

$$x=1-a_2-y+(1+a_2-\frac{1}{3}a_1+y)=2-\frac{1}{3}a_1$$

On retrouve donc bien $(x,y,e_1,a_2,a_1)=(2,0,1,0,0)$ qui donne une solution admissible du PL initial. Phase 2 :
D'après la phase 1, on prend x, e_1 en base et y hors base :

$$\max \ -(3-\frac{2}{3}y)+y=-3+\frac{5}{3}y$$

$$x=2-\frac{2}{3}y$$

$$e_1=-1+x+y=-1+(2-\frac{2}{3}y)+y=1+\frac{1}{3}y$$

On fait rentrer y et sortir x :

$$\max \ -3+\frac{5}{3}(3-\frac{3}{2}x)=2-\frac{5}{2}x$$

$$y=3-\frac{3}{2}x$$

$$e_1=1+\frac{1}{3}(3-\frac{3}{2}x)=2-\frac{1}{2}x$$

On a donc trouvé l'optimum $\boxed{2}$ atteint pour $\boxed{(x,y,e_1)=(0,3,1)}$.

Exercice 2. Modélisation et simplexe
On considère un boulanger qui possède 3 types de farines : farine de blé, farine d'avoine et de seigle.
Il peut produire 2 types de baguettes qui demandent différentes quantités de farine :

	Blé	Avoine	Seigle	Prix
Baguette 1	100g	100g	100g	1,5€
Baguette 2	200g	50g	0g	2€
Stock	10kg	4kg	3kg	

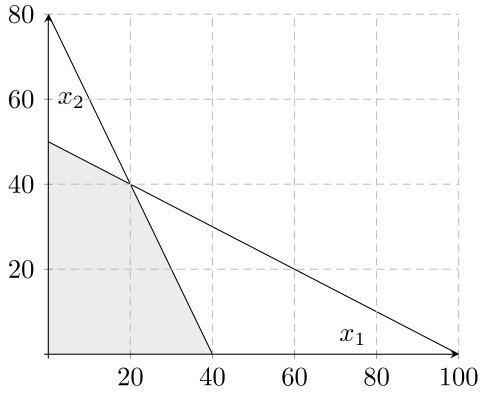
1. Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire en nombres entiers (PLNE).

   Solution : Soit x_1 et x_2 les quantités de baguettes 1 et 2 à produire. On exprime toutes les quantités en centaines de grammes. Le problème se modélise sous la forme suivante, où chaque contrainte correspond à une contrainte sur l'utilisation d'un type de farine :

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} \ & 1.5x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2 &\leq 100 \\ x_1+0.5x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\leq 30 \\ x_1,x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. Dessiner l'ensemble des solutions admissibles du problème relaxé (où les variables sont réelles au lieu d'être entières).

   Solution :



Graphiquement, on obtient un optimum pour $\boxed{(x_1, x_2) = (20, 40)}$.

3. Quel est le lien entre l'optimum du PLNE et l'optimum du PL relaxé ?

Solution : On remarque que le polytope des solutions admissibles est entier (tous les sommets sont à coordonnées entières). Comme l'optimum du relaxé est obtenu en un sommet du polytope, on en déduit que l'optimum du PLNE est égal à l'optimum du PL relaxé.

4. Résoudre le PLNE par l'algorithme du simplexe.

Solution :

$$\max\ 1.5x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$
$$x_1 + 0.5x_2 \leq 40$$
$$x_1 \leq 30$$

On introduit des variables d'écarts e_1, e_2, e_3 :

$$\max\ 1.5x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + 2x_2 + e_1 = 100$$
$$x_1 + 0.5x_2 + e_2 = 40$$
$$x_1 + e_3 = 30$$

On choisit e_1, e_2, e_3 comme variables dans la base initiale (qui correspond au sommet $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 100, 40, 30)$:

$$\max\ 1.5x_1 + 2x_2$$
$$e_1 = 100 - x_1 - 2x_2$$
$$e_2 = 40 - x_1 - 0.5x_2$$
$$e_3 = 30 - x_1$$

On rentre x_1 et on sort e_3 :

$$\max\ 1.5(30 - e_3) + 2x_2 = 45 - 1.5e_3 + 2x_2$$
$$e_1 = 100 - (30 - e_3) - 2x_2 = 70 + e_3 - 2x_2$$
$$e_2 = 40 - (30 - e_3) - 0.5x_2 = 10 + e_3 - 0.5x_2$$
$$x_1 = 30 - e_3$$

On rentre x_2 et on sort e_2 :

$$\max\ 45 - 1.5e_3 + 2(20 + 2e_3 - 2e_2) = 85 + 2.5e_3 - 4e_2$$
$$e_1 = 70 + e_3 - 2(20 + 2e_3 - 2e_2) = 30 - 3e_3 + 4e_2$$
$$x_2 = 20 + 2e_3 - 2e_2$$
$$x_1 = 30 - e_3$$

On rentre e_3 et on sort e_1 :

$$\max\ 85 + 2.5(10 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2) - 4e_2 = 110 - \frac{2.5}{3}e_1 + \frac{2.5}{3}e_2$$
$$e_3 = 10 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2$$
$$x_2 = 20 + 2(10 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2) - 2e_2 = 40 - \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2$$
$$x_1 = 30 - (10 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2) = 20 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2$$

On rentre e_2 et on sort e_1 :

$$\max\ 110 - \frac{2.5}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2$$
$$e_3 = 10 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{4}{3}e_2$$
$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}e_1 + \frac{8}{3}e_2$$
$$x_1 = 20 + \frac{1}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2$$

On a donc trouvé l'optimum $\boxed{\text{110 euros}}$ obtenu pour $\boxed{(x_1, x_2) = (20, 40)}$ (ce qu'on avait déjà obtenu graphiquement).

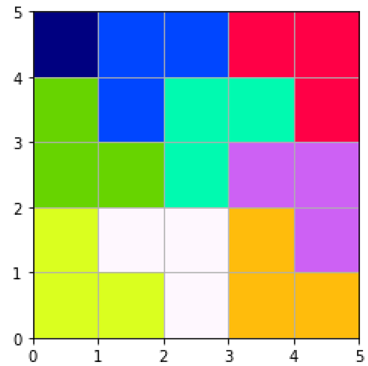
5. Écrire le dual de ce PL. Interprétation économique : supposons qu'un investisseur veuille acheter tout le stock de farine du boulanger. Quel est le prix d'achat minimum que le boulanger pourrait accepter ?

Solution : On définit des variables y_1, y_2, y_3 pour chaque contrainte du PL.

$$\min 100y_1 + 40y_2 + 30y_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1.5$$
$$2y_1 + 1.5y_2 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Interprétation : Si y_i est le prix de rachat de la $i$ème farine, la solution de ce PL dual donne le prix minimum total de rachat de la farine pour que ce soit rentable pour le boulanger (c'est-à-dire qu'il gagne au moins ce qu'il aurait gagné en produisant des baguettes et en les vendant).

Exercice 3. Pavage
On considère une grille $n \times p$ que l'on souhaite paver (c'est-à-dire recouvrir sans chevaucher) avec un maximum de "L". Par exemple, un carré 5×5 peut-être être pavé avec 8 "L" :



Dans cet exemple, il n'y a qu'une case qui n'est pas recouverte (celle en haut à gauche).

1. Est-ce que le pavage de l'exemple est optimal?

   Solution : Oui, car un pavage avec plus de 8 L demanderait au moins $9 \times 3 = 27$ cases différentes, qui est strictement supérieur à la taille de la grille (25).

2. Modéliser ce problème sous forme d'un PLNE P.

   Solution : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des positions possibles d'un L sur la grille, chaque position étant un ensemble de 3 cases (les 3 cases occupées par le L) et chaque case étant un coupe de coordonnées.
   On définit une variable x_ℓ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, qui vaut 1 si la position ℓ est utilisée (c'est-à-dire si un L est placé exactement dans cette position), 0 sinon.

$$\max \sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_\ell$$

$$\forall i, j, \quad \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{L} \\ (i,j) \in \ell}} x_\ell \leq 1$$

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \ x_\ell \in \{0, 1\}$$

3. (Travail à faire à la maison) Résoudre P avec `python-mip`.

   Solution : Voir https://fortierq.github.io/nb/pavage

4. Écrire le PLNE dual P^* de P et l'interpréter géométriquement.

   Solution : On définit une variable duale $y_{i,j}$ pour chaque contrainte de P.

$$\min \sum_{(i,j)} y_{i,j}$$

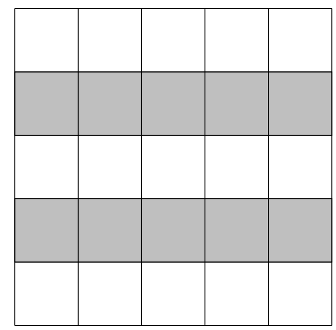
$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \quad \sum_{(i,j) \in \ell} y_{i,j} \geq 1$$

$$\forall (i, j), \ y_{i,j} \in \{0, 1\}$$

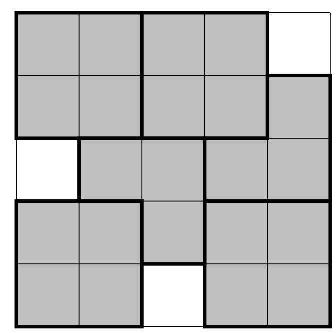
   Interprétation : le dual demande de choisir un nombre minimum de cases (des « pièges ») pour empêcher tout placement de L sur la grille.

5. Quelle est la valeur optimum de P^* sur l'exemple ?

   Solution : Il est possible de choisir 10 pièges de façon à empêcher tout placement de L sur la grille :



   Ceci est optimum car il est nécessaire de poser au moins un piège sur chacun des deux L suivants et deux pièges sur chacun des 4 carrés suivants (sinon, un L pourrait être posé) :



   Il y a donc bien besoin d'au moins $2 + 2 \times 4 = 10$ pièges au minimum.

6. Quel est l'optimum du relaxé $\overline{P^*}$ de P^* ? En déduire l'optimum du relaxé $\overline{P}$ de P.

   Solution : Voici le relaxé de P^* :

$$\min \sum_{(i,j)} y_{i,j}$$

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \quad \sum_{(i,j) \in \ell} y_{i,j} \geq 1$$

$$\forall (i, j), \ 0 \leq y_{i,j} \leq 1$$

   Le relaxé de P^* possède une solution de valeur objective 8 :

	0.5		0.5	
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.5		0.5	
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.5		0.5	

En effet, la somme des $y_{i,j}$ sur n'importe quelle position de L sur la grille vaut au moins 1.
Notons $Opt(Q)$ l'optimum d'un PL Q et utilisons le théorème de dualité :

$$8 = Opt(P) \leq Opt(\overline{P}) \leq Opt(\overline{P^*}) \leq 8$$

On en déduit que :

$$\boxed{Opt(P) = Opt(\overline{P}) = Opt(\overline{P^*}) = 8}$$

Par contre, d'après la question précédente :

$$Opt(P^*) = 10$$

Exercice 4. Modélisations
En utilisant des variables binaires (0 ou 1), modéliser les problèmes suivants sous forme de programme linéaire :

1. **Sac à dos** : On a des objets de poids w_1, ..., w_n et de valeurs v_1, ..., v_n. On veut en mettre un maximum dans un sac à dos de capacité C.

   Solution : Avec $x_i \in \{0, 1\}$ une variable binaire déterminant si l'objet i est mis dans le sac à dos :

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

2. **Coloriage de graphe** : On veut connaître le nombre minimum de couleurs pour colorier les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ de façon à ce que 2 sommets adjacents soient de différentes couleurs.

   Solution : Si n est le nombre de sommets, on remarque que la solution optimale utilise au plus n couleurs (car il est possible d'assigner une couleur différente à chaque sommet pour avoir une solution admissible).
   On utilise donc des variables c_i indiquant si la couleur i est utilisée, ainsi que des variables $x_{v,i}$ indiquant si le sommet v est colorié avec la couleur i :

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$$\forall \{u, v\} \in E, \forall i \in \{1, ..., n\},\ x_{u,i} + x_{v,i} \leq 1 (1)$$

$$\forall v \in V,\ \sum_{i=1}^{n} x_{v,i} = 1 (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

   (1) signifie que deux sommets adjacents ne peuvent pas avoir la même couleur. (2) signifie que à chaque sommet est associé une seule couleur.

3. **Warehouse location** : Une chaîne de restaurants veut ouvrir un certain nombre de restaurants parmi un ensemble P d'emplacements possibles, de manière à satisfaire au mieux un ensemble C de clients. On note $t_{p,c}$ le temps de transport entre la position $p \in P$ et le client $c \in C$. Une ouverture sur une position $p \in P$ coûte c_p euros. On veut choisir à quels emplacements ouvrir des restaurants de façon à minimiser la somme des coûts d'ouverture plus la somme des temps de déplacements de chaque client au restaurant le plus proche.

Exercice 5. Big M
La fameuse technique du « Big M » consiste à introduire une grosse constante M pour modéliser une contrainte linéaire.

1. Montrer qu'il est possible de convertir un « ou » de deux contraintes ($\sum a_{1,i} x_i \leq b_1$ ou $\sum a_{2,i} x_i \leq b_2$, avec $x_i \in \mathbb{N}$) en un PL (utilisant un « et » de plusieurs contraintes). On pourra utiliser un M suffisamment grand pour être supérieur à la somme de toutes les variables et une variable binaire $e \in \{0, 1\}$.

   Solution : On peut traduire $\sum a_{1,i} x_i \leq b_1$ ou $\sum a_{2,i} x_i \leq b_2$ de la façon suivante :

$$\sum a_{1,i} x_i \leq b_1 + eM \ (1)$$

$$\sum a_{2,i} x_i \leq b_2 + (1 - e)M \ (2)$$

$$e \leq 1$$

$$e \in \mathbb{N}$$

   Ainsi, on a soit $e = 0$ et seule la contrainte (1) a besoin d'être vérifiée, soit $e = 1$ et seule la contrainte (2) a besoin d'être vérifiée.

2. Comment peut-on traduire $x \neq y$ (où $x, y \in \mathbb{N}$) en contraintes linéaires ?

   Solution : On utilise $x \neq y \iff (x \leq y - 1 \text{ ou } y \leq x - 1)$ et la question précédente.