Exercice 1 (Opérations arithmétiques en `Python`) On donne les quatre fonctions suivantes programmées en `Python`.
A quel opérateur logique correspondent-elles ? Justifiez la réponse.

```
def f(a,b):
    return a*b
```

```
def g(a,b):
    return abs(a-b)
```

```
def h(a,b):
    return a+b - a*b
```

```
def i(a):
    return 1-a
```

Exercice 2 (Expressions booléennes) Soient `a`, `b` et `c` trois variables booléennes. Pour chacune des expressions booléennes proposées ci-dessous dresser la table de vérité correspondante.

1. `non(a et non b) ou c`
2. `(a ou non(b)) et c`
3. `non(a et b) et (b ou c)`

Exercice 3 (Les opérateurs booléens sont séquentiels) En `Python` les opérateurs `or` et `and` sont séquentiels, ce qui signifie que l'opérande droite n'est évaluée que si l'opérande gauche ne permet pas de trouver le résultat.
Que produit chacune des deux instructions suivantes en `Python` après avoir initialisé la variable `a` à 0 ? Justifiez la réponse.

1. `0 < 1/a and a != 0`
2. `a != 0 and 0 < 1/a`

Exercice 4 (Les lois de De Morgan) Soient `a` et `b` deux variables booléennes.
A l'aide de tables de vérités, démontrez les lois de De Morgan suivantes :

1. `non(a) et non(b) = non(a ou b)`
2. `non(a) ou non(b) = non(a et b)`

Exercice 5 (Implication et équivalence logique) Soient `a` et `b` deux variables booléennes.

1. *L'implication logique* $a \Rightarrow b$ est l'expression booléenne `non(a) ou b`.
   Par exemple, l'affirmation « Si un nombre entier se termine par 4, alors il est pair » est une implication (et elle est vraie).
   (a) Donnez un exemple d'implication vraie.
   (b) Dressez la table de vérité de l'implication logique.
   (c) Écrivez une fonction `Implication` en `Python`.
2. *L'équivalence logique* $a \Leftrightarrow b$ est l'expression booléenne $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow a$.
   Autrement dit, les variables booléennes `a` et `b` ont les mêmes valeurs en même temps. En clair, une équivalence est vraie quand une implication et sa réciproque sont vraies. Par exemple, l'implication réciproque « Si un nombre entier est pair, alors il se termine par 4 » n'est pas vraie. Autrement dit les propositions « Un nombre entier est pair » et « Un nombre entier se termine par 4 » ne sont pas équivalentes.
   Par contre les propositions « Le nombre entier n est pair » et « Le reste de la division euclidiennes de n par 2 vaut 0 » sont équivalentes.
   (a) Donnez un exemple d'équivalence vraie.
   (b) Dressez la table de vérité de l'équivalence logique.
   (c) Écrivez une fonction `Equivalence` en `Python`.
3. (♦) **Tautologie** : vérifier que $[(a \Rightarrow b)$ et $(b \Rightarrow c)] \Rightarrow [a \Rightarrow c]$ est toujours vrai.

Exercice 6 (Demi-addition binaire sur 1 bit) On donne la table de vérité de l'addition de deux bits `A` et `B` :

A	B	R	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

En entrée on donne donc deux bits `A` et `B` et en sortie on récupère deux nouveaux bits : `S` pour la somme et `R` pour la retenue. On obtient un nombre sur deux bits de la forme $(RS)_2$.

1. Quelle est l'expression booléenne correspondant à la colonne `S` (pour somme) ?
2. Quelle est l'expression booléenne correspondant à la colonne `R` (pour retenue) ?
3. Quelles sont les valeurs décimales des nombres binaires $(RS)_2$ obtenus ?

Exercice 7 (Additionneur sur 1 bit) On appelle additionneur le résultat de la l'addition de trois bits `A,B` et `C` où `C` correspond à une retenue entrante : il est composé, comme pour le demi-additionneur, d'une somme `S` et d'une retenue sortante `R`.

1. Compléter la table de vérité de l'additionneur :

A	B	C	R	S
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

2. Quelles sont les valeurs décimales des nombres binaires $(\mathtt{RS})_2$ produits ? Quelle(s) différence(s) avec le demi-additionneur ?
3. Si `C` vaut 0, quelles sont les expressions booléennes en fonction de `A` et `B` permettant d'obtenir `R` et `S` ?
4. Même question si `C` vaut 1

Exercice 8 (◆ Fonctions booléennes)

Définition : Une *fonction booléenne* est une fonction renvoyant 0 ou 1 à partir d'une ou plusieurs variables booléennes.

Exemples :

⋆ Les opérateurs `et`, `ou` et `non` définissent les fonctions booléennes de bases.
  - On peut associer la fonction `et(a,b)` à l'expression `a et b`. Elle prend deux variables en paramètres.
  - On peut associer la fonction `ou(a,b)` à l'expression `a ou b`. Elle prend deux variables en paramètres.
  - La fonction `non(a)` prend une seule variable en paramètre.

⋆ La fonction booléenne `Z(a)` constante égale à 0 a pour table de vérité :

a	Z(a)
1	0
0	0

— Il s'agit d'une fonction à une seule variable booléenne (`a`).
— Elle peut être exprimée à partir des opérateurs logiques `et`, `ou` et `non` par : `a et non(a)`.
— Elle s'écrit donc, à l'aide des fonctions booléennes de base, sous la forme `et(a,non(a))` .

Soit `a` une variable booléenne. On note `U(a)` la fonction booléenne constante égale à 1.

1. Combien de variables prend cette fonction en paramètre ?
2. Dressez sa table de vérité.
3. Exprimez la à l'aide des fonctions booléennes `et`, `ou` et `non`.

Exercice 9 (Enigme logique) Un roi cruel avait pour habitude de proposer le marché suivant à ses condamnés : tout prisonnier doit choisir entre deux cellules. Chaque cellule peut contenir une corde ou une clé (un seul objet par cellule). Si le prisonnier choisit une cellule avec une corde, alors il est pendu. S'il choisit une cellule avec une clé, alors il est libéré. Pour rendre la situation encore plus cruelle, les deux cellules contiennent parfois toutes deux une corde, mais aussi parfois toutes deux une clé et parfois l'une contient une clé et l'autre une corde.
Le roi donne cependant des indications. Voici celles proposése à l'un de ses condamnés :

⋆ Sur la porte de la cellule 1 est inscrit : « l y a une clé dans cette cellule et une corde dans l'autre cellule »
⋆ Sur la porte de la cellule 2 est inscrit : « Il y a une clé dans une des deux cellules et une corde dans l'autre cellule ».

De plus, le roi annonce qu'une seule de ces deux inscriptions est correcte.

1. On note `L1` la proposition « La cellule1 contient une clé » et `L2` la proposition « La cellule 2 contient une clé ». Traduisez chacune des inscriptions des portes à l'aide des opérateurs logiques et des propositions `L1` et `L2`.
2. Dressez les tables de vérité de chacune des inscriptions.
3. Quel choix doit faire le condamné ?