Mesures et Intégrale

Charles Vin

2021

On note Ω un ensemble

1 Tribus

Définition 1.1. Une tribu (ou σ -algèbre), $\mathcal{F}$ sur Ω est un ensemble de parties de Ω tel que :
- $\varnothing \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}, A^C \in \mathcal{F}$ (stabilité par passage au complémentaire)
- Pour toute suite $A_1, A_2, \dots$ d'éléments de $\mathcal{F}$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

Note. Quand $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.
$\mathcal{F}$ est l'ensemble des événements dont on sait dire après l'expérience "oui,il s'est produit" ou "non, il ne s'est pas produit". La tribu représente donc "l'information disponible".

Remarque.
- Une tribu est stable pas union finie : $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \varnothing \cup \dots \cup \varnothing \cup \dots$
- Une tribu est stable par intersection dénombrable ou finie car l'intersection est le complémentaire de l'union des complémentaires : $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = (\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^C)^C$

Théorème 1.1. *Un intersection de tribus sur Ω est une tribus sur Ω*

Preuve. Prenons les F_i toutes tribus sur Ω avec $i \in I (I = N, I = [...], I = [0, 1])$
- $\varnothing \in \bigcap_{i \in I} F_i \Leftrightarrow \forall i \in I \varnothing \in F_i$: Vrai car les F_i sont des tributs
- Stabilité par passage au complémentaire : Prenons $A \in \bigcap_{i \in I} F_i, \forall i \in I, A \in F_i$ donc $A^C \in F_i$ car F_i est une tribut
- Stabilité par union dénombrable : prenons une suite d'éléments $(A_n)_{n \in N}$ dans $\bigcap_{i \in I} F_i$: $\forall i \in I$ tous les A_n sont dans F_i donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in F_i$ donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \bigcap_{i \in I} F_i$

$\square$

Echelle des éléments, ensembles, etc
- Eléments : $w \in \Omega, w \in a$
- Ensembles : $\Omega, A \subset \Omega, A \in F, \Omega in F$
- Ensemble d'ensembles : $\mathcal{F}, P(\Omega)$

Définition 1.2 (Tribut engendrée)**.** La tribu **engendrée** par une famille $(A_j) j \in J$ de parties de Ω est la plus petite tribut contenant tous les A_j. C'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent tout les A_j.

Dans le cas ou $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{R}^d$

Définition 1.3 (Tribut borélienne)**.** La tribut borélienne sur $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles. C'est la tribu engendrée par les intervalles. Et on la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La tribus borélienne sur $\mathbb{R}^d$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^d$ qui contient tous les pavés $]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \dots \times]a_d, b_d]$. C'est la tribut engendrée par les pavés, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.2. *$\mathcal{B}(R)$ est la plus petite tribu sur R contenant*
- *Tout les $] - \infty; a]$ avec $a \in R$*

Ou
- *Tous les $]a; b]$ avec $a < b$ réels*

Ou

- *Tous les $[a;b]$ avec $a < b$ réels*

Ou

- *Tous les ouverts de R*

2 Mesures

A partir d'ici, l'ensemble Ω est muni d'une tribu $\mathcal{F}$.

Définition 2.1 (Mesure)**.** Une **mesure** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mu : \mathcal{F} \mapsto [0; +\infty]$ qui est nulle en $\varnothing$ et $\sigma -$ additive :

- $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$
- $\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$ pour toute **suite** $A_1, A_2, \ldots,$ d'éléments de $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints ($A_n \cap A_m \neq \varnothing, n \neq m$)

Si en plus $\mu(\Omega) = 1$ la mesure s'appelle une **probabilité**.

On dit que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable ou espace probabilisable. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, ou espace probabilisé si $\mu(\Omega) = 1$.

Les éléments de la tribu sont appelés **parties mesurable**, ou événements si la mesure est une probabilité.

Si $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{R}^d$, les éléments de la tribu sont appelés **boréliens**.

Remarque. Les mesures sont des applications à valeurs dans $[0; +\infty]$. On peut donc :

- Les multipliers par une constante positive : $c\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty], A \mapsto c\mu(A)$ est encore une mesure si $c \in R_+^*$
- Les additionner : $\mu + \nu : \mathcal{F} \to [0; +\infty], A \mapsto \mu(A) + \nu(A)$ mesure si μ et ν mesures. Pareil avec un somme de mesure.

Théorème 2.1 ((admis))**.** *Pour toute fonction F croissante continue à droite sur $\mathbb{R}$, il existe une unique mesure μ_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \leq b, \mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$.*

Remarque. $\mu_F = \mu_{F+c}$ pour toute constante c.

Exemple 2.1 ((**Important**)Mesure sur $R, \mathcal{B}(R)$)**.** .

- Mesure de Dirac en $x \in R$: δ_x

$$\begin{aligned} \delta_x : B(R) &\to [0; +\infty] \\ B \mapsto \delta_x(B) &= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_x(]a; b]) &= \begin{cases} 1 \text{ si } a < x \leq b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

- **Mesure de Lebesgue** :

$$\lambda = \mu_F \text{ où } F : R \to R, x \mapsto x.$$

la mesure des intervalles est leur longueur :

$$\mu(]a, b]) = b - a.$$

- Mesure de Lebesgue sur $[0; 1]$: $\lambda_{[0;1]} = \mu_F =$

$$F : t \mapsto t\mathbb{1}_{[0;1]}(t) + \mathbb{1}_{t>1}(t).$$

$$\lambda_{[0;1]}(]a; b]) = F(b) - F(a) = \begin{cases} b - 0 \text{ si } a \leq 0 \leq b \leq 1 \\ -a \text{ si } 0 + b \leq a \leq b \leq 1 \\ -a \text{ si } 0 + 1 \leq a \leq 1 \leq b \\ 1 \text{ si } a \leq 0 \leq 1 \leq b \end{cases}.$$

— $\mathcal{U}nif([\alpha,\beta]) = \frac{1}{\beta-\alpha}\lambda_{[\alpha,\beta]}$
— Si F croissante et continue à droite avec $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ alors μ_F est la mesure de probabilité de fonction de répartion F

Exemple 2.2 (Mesure sur $(N, P(N))$)**.** .

— **Mesure de comptage** sur N :

$$\mu = \sum_{n\in N} \delta_n, .$$

$$\forall A \in P(N), (\sum_{n\in N} \delta_n)(A) = Card(A).$$

Pour tout les entiers je regarde si l'entier est dans A et à la fin j'additionne. On obtient le $Card(A)$.
— Binomiales :

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\delta_k \text{ avec } n \in N^*, p \in [0;1] \text{ fixés.}$$

$$\forall j \in N, \mu(\{j\}) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \notin \{0 \dots n\} \\ \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \text{ si } j \in \{0 \dots n\} \end{cases}.$$

$$\mu = Bin(n,p) \text{ probabilité.}$$

— Poisson

$$\mu = Pois(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^- a\frac{a^k}{k!}\delta_k.$$

— Bernouilli :

$$\mu = Ber(p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1 \text{ probabilité.}$$

Les mesures sur $(N, P(N))$ peuvent aussi être considérées comme des mesures sur $(R, B(R))$ qui ne chargent que N (c'est à dire pour lesquelles $\mu(R \setminus N) = 0$) car $N \in Bor(R)$: il suffit de poser $\forall A \in Bor(R), \mu(A) = \mu(A \cap N)$

Exemple 2.3 (Lebesgue sur $\mathcal{R}^d$)**.** .

— égale au volume : $\lambda_d(]a_1; a_2] \times \dots \times]a_d; b_d]) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$
— **Invariante par translation** :

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \forall B \in Bor(R^d), \lambda_d(B+z)\lambda_d(\{x+z; x \in B\}) = \lambda_d(B).$$

— Transformation linéaire bijective : Si $T : R^d \to R^d$ linéaire bijective, alors

$$\forall B \in Bor(R^d), \lambda_d(T(B)) = |\det T|\, \lambda_d(B).$$

<u>Nouveau cours du 04/10</u> (en distanciel)

3 Fonctions mesurables

Cadre : A partir d'ici, on se place sur $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ espace mesuré. On veut construire l'intégrale de $f : \Omega \to R$ à partir de la mesure μ.

Rappel :$A \in \mathcal{F}$ s'appelle partie mesurable de Ω.

Définition 3.1. La fonction $f : \Omega \to R$ est $\mathcal{F}$ **-mesurable** si

$$\forall B \in Bor(R), f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{w \in \Omega, f(w) \in B\} = \{f \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Définition analogue : si f est à valeurs dans $R = [-\infty; +\infty]$ ou dans R^d

Remarque. Au lieu de $\mathcal{F}$ -mesurable, on devrait dire "mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\mathbb{R}, Bor(R))$ ". Mais sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ est toujours muni de la tribu borélienne.

Note (Cas particulier). Si $f : R \to R$ est $Bor(R)$ - mesurable, i.e $\Omega = R$ et $\mathcal{F} = Bor(R)$, alors on dit que f est **borélienne** : $\forall B \in Bor(R), f^{-}1(B) \in Bor(R)$

Exemple 3.1. Les fonctions continues par morceau sont boréliennes

Théorème 3.1. — *Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{F}$-mesurable. $\mathbb{1}_A : \Omega \to R$*

$$\mathbb{1}_A^{-}1(B \in Bor(R)) = \begin{cases} A \text{ si } 1 \in B \text{ et } 0 \notin B \\ A^C \text{ si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ \Omega \text{ si } 1 \in B \text{ et } 1 \in B \\ \varnothing \text{ si } 1 \in B \text{ et } 1 \notin B \end{cases}.$$

— *(admis) La somme, le produit, ou la limite simple de fonction F-mesurable est F-mesurable*
— *La composé d'une fonction F-mesurable et d'une fonction Borélienne est F-mesurable :*

$$\Omega \longrightarrow R \longrightarrow^g R.$$

$$\begin{aligned} \forall B \in R, (g \circ f)^{-}1(B) = \{w \in \Omega, & g(f(w)) \in B\} \\ & f(w) \in g^{-}1(B) \\ & w \in f^{-}1(g^{-}1(B)) \end{aligned}$$

$$\forall B \in R, (g \circ f)^{-}1(B) = f^{-}1(g^{-}1(B) \in Bor(R)) \in \mathcal{F} \text{ (f est F mesurable)}.$$

— *$f : \Omega \to R$ ou $f : \Omega \to \bar{R}$ est F-mesurable dès lors que*

$$\forall b \in R, f^{-}1(]-\infty; b[) \in \mathcal{F}.$$

ou

$$\forall a < b \in R, f^{-}1(]a; b]) \in \mathcal{F}.$$

ou

$$\forall a < b \in R, f^{-}1(]a; b[) \in \mathcal{F}.$$

ou

$$\forall b \in R, f^{-}1(]-\infty; b[) \in \mathcal{F}.$$

Vocabulaire :
Si μ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (i.e. $\mu(\Omega) = 1$), on la note plutôt P.
La fonction f est plutôt notée $X : \Omega \to R$ est au lieu de dire "fonction F-Mesurable" on dit "variable aléatoire".

Intuition probabiliste :
$X : \omega \to R$ est un nombre issu d'une expérience aléatoire.
X est F-mesurable signifie que si on a toute l'information contenu dans F (si pour chaque A de F, on sait après l'expérience si A est réalisé ou non) alors on connait la valeur prise pas X.

Note. La tribus représente toutes les questions dont on a des réponses. La mesure dit si on peut obtenir une réponse (ou répond je sais plus), si l'événement est observable. Comme un jeu de devinette

4 Intégration

Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (pas forcément la mesure de Lebesgue)

4.1 Intégrale de Lebesgue des fonctions étagées

Définition 4.1. $\forall A \in \mathcal{F}, \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$. On note aussi : $\int_\Omega \mathbb{1}_A(w) d\mu(w)$

Définition 4.2. Une fonction étagée est une fonction $\mathcal{F}$ -mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Elle peut toujours s'écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ où les } a_i \in R \text{ et les } A_i \text{ des parties mesurables}(A_i \in \mathcal{F}).$$

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \text{ Si ceci n'est pas une forme indéterminée (sinon, f n'est pas intégrable).}$$

Remarque (On vérifie l'unicité de ce que donne la def de Lebesgue). Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ a-t-on plusieurs valeurs de l'intégrale pour la même fonction.

Exemple 4.1.

$$\begin{aligned} f &= 2\mathbb{1}_{[-1;1]} + 3\mathbb{1}_{[0;4]} \text{ (écriture avec des Ai)} \\ &= 2\mathbb{1}_{[-1;0[} + 5\mathbb{1}_{[0;1]} + 3\mathbb{1}_{]1;2[} + 3\mathbb{1}_{[3;4]} \text{ (écriture avec des Bj)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_R f d\lambda &= 2\lambda([-1;1])3\lambda([0;4]) = 16 \\ &= 2 * 1 + 5 * 1 + 3 * 1 + 3 * 1 + 3 * 1 = 16 \end{aligned}$$

Quitte à redécouper les A_i on peut imposer qu'ils forment une partition de Ω . Idem pour les B_j. $A_i = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (A_i \cap B_j)$ car (B_j) partition. (schéma dans le cours distanciel mais en vrais osef je pense)

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j).$$

si $A_i \cap B_j = \varnothing$ alors $\mu(A_i \cap B_j) = 0$
si $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ alors, pour $w \in A_i \cap B_j, f(w) = a_i = b_j$ $\mu(A_i \cap B_j) =$

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j (\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j))_{=\mu(B_j)}.$$

4.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives

Définition 4.3. Pour $f : \Omega \to [0; +\infty]$ F-mesurable, l'intégrale de f est le suprémum de toutes les intégrales de fonctions étagées inférieures à f :

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i), 0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \leq f\} = \sup\{\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu, 0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \leq f\}.$$

On peut avoir $\int_\Omega f d\mu = +\infty$.

Remarque. Quand $(\Omega, \mathcal{F}) = (R, Bor(R))$ et $\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue. $\int_\Omega f d\lambda$ est l'aire sous le graphe.

<u>Nouveau cours du 11/10</u>

Remarque. Dans le cas ou μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, l'intégrale de Lebegue est la somme d'une série

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f d(\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \\ &= \sup\{\sum_{k=0}^{n} f(k), \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \mathbb{1}_{x=k} \leq f\} \end{aligned}$$

(LA mesure de comptage prend uniquement les entiers et leur donne un poids de un) (on nous a appris que d'un coté il y a les séries et de l'autre les séries, non c'est là même chose, avec les même Théorème a partir du moment ou on sait manipuler les intégrales de Lebesgue)

1) intégrale d'une fonction étagé, fini de valeur 2) intégrale d'une fonction positive

4.3 Intégrale de lebesgue des fonctions mesurables de signe quelconque

Note. On vas séparer la fonction en deux morceau, une partie positive et une partie négative. Puis intégrer séparement des deux cotés

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathcal{F}$-mesurable.

- Sa partie positive $f_+ = max(f, 0) = f\mathbb{1}_{f \geq O} \geq 0$
- Sa partie négative $f_- = max(-f, 0) = -f\mathbb{1}_{f \leq O} \geq 0$
- $f = f_+ - f_-$

f_- est la symétrie de la partie négative de f par l'axe des abscise.
Son intégrale de Lebegue par rapport à μ :

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f d\mu.$$

On se retrouve avec intégrale de fonction positives, définie précédemment. Si ceci n'est pas une forme indéterminée (pas $(+\infty)$ ou $(-\infty)$). Sinon elle n'existe pas

Définition 4.4 (Fonction intégrable). $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable si f est $\mathcal{F}$ -mesurable et si $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$ i.e. $\int_\Omega f_+ d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega f_- d\mu < +\infty$ car $|f| = f_+ + f_-$

Note. La valeur absolu force la convergence des deux terme un a un. Attention, on peut avoir une fonction non intégrable mais néanmoins définie par Lebesgue (tant qu'il y a pas de forme indéterminé)

Si f intégrable, alors $\int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu$ n'est pas une forme indéterminé

4.3.1 Notation des intégrale de lebesgue

- $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f(w) d\mu(w) = \int f d\mu$
- Quand μ est une mesure de probabilité : $\mu = P$, la fonction mesurable est une v.a. $f = X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega X(w) dP(w) = \int_\Omega X dP = E(X).$$

- Si $A \in \mathcal{F}$, $\int_A f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu = \int_\Omega f(w) \mathbb{1}_A(w) d\mu(w)$

4.3.2 Propriété de l'intégrale de Lebegue (admises)

Note. Garder en tête la construction de l'intégrale de Lebegue :

- D'abord avec les fonctions étagé
- Puis en prenant le sup pour les fonctions positives
- Puis avec les partie négative et positive

Soit f et g de $\Omega \to R$, mesurables, positives ou intégrables.

- Positivité : Si $f \geq 0$ alors $\int_\Omega f d\mu \geq 0$ car

  Preuve : $\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n (a_i)_{\geq 0} * (\mu(A_i))_{\geq 0}, 0 \leq \sum_{i)1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \leq f\} \geq 0$ □

- Linéarité

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$$
$$\int_\Omega (cf) d\mu = c \int_\Omega f d\mu$$

  et donc si $f \leq g$ alors $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$ car $g - f \geq 0$ donc $\int (g-f) d\mu \geq 0 \Leftrightarrow \int f d\mu - \int g d\mu \geq 0$

- $\left|\int_\Omega f d\mu\right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$ (valeur absolu de la somme est inférieur ou égale à la somme des valeurs absolu = Inégalité triangulaire) car

Preuve : $\left|\int_\Omega f d\mu\right| = \left|\int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu\right| \leq \left|\int_\Omega f_+ d\mu\right| + \left|\int_\Omega f_- d\mu\right| = \int_\Omega (f_+ + f_-) d\mu = \int_\Omega |f| \, d\mu$ □

— Inégalité de Markov : si $f \geq 0$ alors $\forall t > 0, \mu(\{w \in \Omega, f(w) \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f d\mu$

Preuve : f est suppérieur ou égale à t là où elle est supérieur ou égale à t et supérieure ou égale à 0 égale

$$f \geq t \mathbb{1}_{f \geq t} \Leftrightarrow \int_\Omega f d\mu \geq \int_\Omega t \mathbb{1}_{f \geq t} d\mu = t\mu(f \geq t).$$

□

— Inégalité de Hôlder : $\forall p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\int_\Omega |f * g| \, d\mu \leq (\int_\Omega |f^p| \, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |g|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $p = q = 2$ c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$

— Inégalité de Jensen : pour P mesure de probabilité, si X est une v.a. intégrable et φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)) \Leftrightarrow \varphi(\int_\Omega X(w) dP(w)) \leq \int_\Omega \varphi(X(w)) dP(w).$$

Rappel : φ est convexe si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0; 1], \lambda\varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b) \geq \varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$
$$\int \varphi(x) d\mu(x) \geq \varphi(\int x d\mu(x)) \text{ avec } \mu = \lambda\delta_a + (1 - \lambda)\delta_b$$
$$E(\phi(X)) \geq \varphi(E(X))$$

Remarque. La construction de l'intégrale de Lebegue ne fait pas appel à des primitives. On peut utiliser des primitives uniquement quand on intègre par rapport à la mesure de Lebegues

— Si f a une intégrale de Riemann sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alors f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ et les intégrales coïncident :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_\mathbb{R} f(x) \mathbb{1}_{[a,b]}(x) d\lambda(x).$$

— Idem si f a une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $[a; +\infty[,]-\infty; +\infty[$ ou $]a, b[$

Exemple 4.2. $\int_{R^+} x^2 e^{-x} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ car cette intégrale de Riemann est absolument convergente

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = [x^2 * (-e^{-x})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x(-e^{-x}) dx = 2 \int_0^{+\infty} dx = 2 * 1 = 2 \text{ espérance loi exp}$$

Exemple 4.3.

$$\int_\mathbb{R} \mathbb{1}_\mathbb{Q} d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\mathbb{Q}) = \lambda(\{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$$
$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(\{\frac{k}{n}\}) = 0$$

$\int_\mathbb{R} \mathbb{1}_\mathbb{Q} d\lambda = 0$, $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ n'est pas Riemann intégrable.

4.3.3 Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi)

On peut échanger limite et intégrale pour les suites croissantes de fonction mesurables positives.

$$\forall w \in \Omega, 0 \leq f_1(w) \leq f_2(w) \leq \dots \Rightarrow \int_\Omega (\lim_{n\to\infty} f_n(w))d\mu(w) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(w)d\mu(w).$$

Exemple 4.4. Pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n - k^2}{k^{n+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k) \text{ avec } f_n(k) = \frac{k^n - k^2}{k^{n+2}} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^n} \\ &= \int_{\mathbb{N}^*} f_n d\mu \end{aligned}$$

<u>Nouveau cours du 18/10</u>

Croissance de la suite de fonction : $f_{n+1}(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^{n+1}} \geq f_n(k) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^n}$ car $\frac{1}{k^{n+1}} \leq \frac{1}{k^n}$ car $k^n \leq k^{n+1} \forall 1 \leq k$ donc la suite $(f_n)_n$ est croissante.

Décroissance des fonctions (osef pour le théorème mais cool parce suite croissante de fonction décroissante wtf) : on pose

$$\begin{aligned} f_n : [1; +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

Dérivé :

$$f_n'(x) = \frac{-2}{x^3} - \frac{-n}{x_n + 1} = \frac{nx^3 - 2x^{n+1}}{x^3 x^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} &\frac{nx^3 - 2x^{n+1}}{x^3 x^{n+1}} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &nx^3 \leq 2x^{n+1} \\ \Leftrightarrow &\frac{n}{2} \leq x^{n-2} \\ \Leftrightarrow &\frac{n^{\frac{1}{n-1}}}{2} \leq x \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2} e^{\frac{1}{n-2}\ln(n)} \leq x \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone

$$\int_\mathbb{N} \lim_{n\to\infty} f_n(k)d\mu(k) = \lim_{n\to\infty} f_n(k)d\mu(k).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^n}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^n}) = \text{ 0 si k=1 } = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Exemple 4.5 (avec des intégrale de Lebesgue)**.** Trouvons la limite des u_n avec $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x}} dx \\ &= \int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x}} d\lambda(x) \text{ car intégrale de Riemann absolument convergente} \end{aligned}$$

Est-ce une suite croissante de fonction positive ? (fonction positive easy)

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \text{ car} \sqrt{\frac{1}{1^2} + x} \geq \sqrt{\frac{1}{2^2} + x} \geq \sqrt{\frac{1}{3^2} + x} \geq \dots.$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Par convergence monotone :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{[0;+infty[} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ (Riemann).}$$

En revenant sur une intégrale de Riemann car absolue convergence de l'intégrale de Riemann. Et avec une changement de variable pour revenir à un truc proche de la gaussienne : $x = \frac{y^2}{2}, dx = ydy$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{y^2}{2}}}{\frac{y}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Théorème 4.1 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonction mesurables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Si la suite de fonction converge simplement et si elle est dominée par une fonction intégrable (qui ne dépend pas de n) alors on peut échanger limite et intégrale. Plus précisément :*

S'il existe

- *f telle que $\forall w \in \Omega, \lim_{n\to\infty} f_n(w) = f(w)$*
- *g telle que $\int_\Omega |g|\, d\mu < +\infty$ (g intégrable)*
- *$\forall w \in \Omega\, |f_n(w)| \leq g(w)$ (g domine les f_n)*

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0 \Leftrightarrow \lim \left|\int_\Omega f_n d\mu\right| - \int_\Omega |f|\, d\mu = 0.$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Rappel : Un négligeable est un ensemble de mesure null : $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{F}$

Exemple 4.6 (de négligeable)**.**

- $\lambda(N) = 0$ pour λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$
- $\{1,2,3,4,5\}^{\mathbb{N}^*}$ (les suite à valeur dans 12345 aka "on obtient jamais de 6") est négligeable dans $\{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}^2}$ muni de $(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \delta_i)^{\otimes\mathbb{N}^*}$ ok traduction : on n'a jamais de 6 dans une infinité de lancers d'un dé équilibré (indépendante) ($\otimes$ = une infinité de fois indépendamment)

Proposition 4.2. *Si $\mu(A) = 0$ alors pour toute fonction f-mesurable $\int_A f d\mu = 0$*

Si $\mu(f \neq g) = 0 \Leftrightarrow \mu(\{w \in \Omega, f(w) \neq g(w)\})$ alors $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu \Leftrightarrow \int_\Omega (f-g) d\mu = \int_\Omega (f-g)\mathbb{1}_{f\neq g} d\mu = 0$

Remarque (**importante**)*.* Le théorème de convergence monotone et celui de convergence dominée restent vrais si leurs hypothèses sont satisfaites à un négligeable près :

- Si $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ sur $\Omega \setminus A$ avec $\mu(A) = 0$
- Ou si $\lim_{n\to\infty} f_n(w) = f(w)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(w)| \leq g(w)$ pour tout $w \in \Omega \setminus A$ avec $\mu(A) = 0$

Alors

$$\int_\Omega f_n d\mu \to_{n\to\infty} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(w) d\mu(w).$$

Exemple 4.7 (de convergence dominée)**.** $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \int_{[0;1]} x^n(1-x)^n d\lambda(x)$ car intégrale de Riemann sur $[0;1]$ fermé borné.

$$\int_{[0;1]} x^n(1-x)^n d\lambda(x) = \int_{[0;1]} |f_n(x)| \leq 1 = g$$
$$f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 = f$$
$$\int_{[0;1]} g d\lambda = 1 \leq +\infty$$

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \int_{[0;1]} x^n(1-x)^n d\lambda(x) \to_{n\to+\infty} \int_{[0;1]} 0 d\lambda(x) = 0.$$

5 Interversion d'intégrales

Définition 5.1 (Mesure σ-finie)**.** La mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est **σ-finie** si Ω est la réunion d'une suite de parties dont la mesure est finie :

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \mu(A_k) < +\infty \text{ et } \Omega = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Exemple 5.1 (de mesure σ-finie)**.**

— La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est σ-finie.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [-k; k] \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda([-k; k]) = 2k < +\infty.$$

— La mesure de comptage μ sur $\mathbb{N}$ est σ-finie :

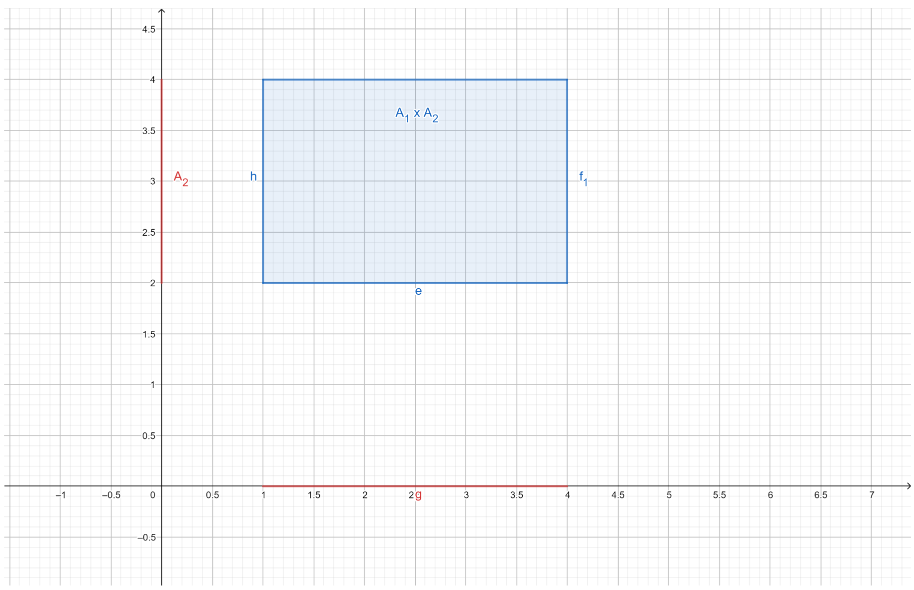
$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [0; k] \cap \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mu([0; k] \cap \mathbb{N}) = k + 1 < +\infty.$$

— toute mesure finie est σ-finie : si

$$\text{Si } \mu(\Omega) < +\infty \text{ alors } A_1 = A_2 = \dots = \Omega \text{ convient .}$$

— Les probabilité sont σ -finies

Définition 5.2. Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ deux espace mesurés.
La tribu produit $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ est la tribu engendrée par les $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $A_2 \in \mathcal{F}_2$



Proposition 5.1. *Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$-mesurable. alors*

$$\forall w_2 \in \Omega_2, f(., w_2) : \Omega_1 \to \mathbb{R}, w_1 \mapsto f(w_1, w_2) \text{ est } \mathcal{F}_1\text{-mesurable}$$
$$\forall w_1 \in \Omega_1, f(w_1, .) : \Omega_2 \to \mathbb{R}, w_2 \mapsto f(w_1, w_2) \text{ est } \mathcal{F}_2\text{-mesurable}$$

5.1 Mesure produit et théorème de Fubini

Soit μ_1 une mesure σ-finie sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et μ_2 une mesure σ-finie sur $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$

— Il existe une unique mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ telle que $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, \forall A_2 \in \mathcal{F}_2, (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$

— Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0;+\infty]$ est $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$mesurable alors

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(w_1,w_2)d(\mu_1\otimes\mu_2)(w_1,w_2) = \int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2} f(w_1,w_2)d\mu_2(w_2))d\mu_1(w_1)$$
$$= \int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1} f(w_1,w_2)d\mu_1(w_1))d\mu_2(w_2)$$

— La même égalité est vraie pour les fonctions $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}$ mesurable de signe quelconque qui satisfont

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(w_1,w_2)|\, d(\mu_1\otimes\mu_2)(w_1,w_2) < +\infty.$$

Deux cas particuliers importants :

1. **Mesure de Lebesgue :** $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(x)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(y)d\lambda(x)$ si f est mesurable positive ou intégrable
2. **Mesure de comptage :** $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} u_{j,k}$ si les $u_{j,k}$ sont positifs ou si $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j,k}| < +\infty$ (intégrabilité)

Nouveau cours du 25/10

Application :

$E(X) = \int_\Omega X(w)dP(w)$ or

$$X(w) = \mathbb{1}_{X(w)>0}\lambda(]0;X(w)[) - \mathbb{1}_{X(w)<0}\lambda(]X(w),0[)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0<x<X(w)}d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{X(w)<x<0}d\lambda(x) \text{ou} \quad = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0<x\leq X(w)}d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{X(w)\leq x<0}d\lambda(x)$$

Donc :

$$E(X) = \int_\Omega X(w)dP(w)$$
$$= \int_\Omega(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0<x<X(w)}d\lambda(x))dP(w) - \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{X(w)<x<0}d\lambda(x)dP(w)$$

Les indicatrices sont positive, d'après Fubini pour les fonction positive

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \mathbb{1}_{x>0}\mathbb{1}_{X(w)>x}dP(w)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \mathbb{1}_{x<0}\mathbb{1}_{X(w)<x}dP(w)d\lambda(x)$$

(On peux sortir les indicatrice dépendant de x et pas de omega)

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x>0}P(X>x)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x<0}P(X<x)d\lambda(x)$$
$$= \int_{]0;+\infty[} P(X>x)d\lambda(x) - \int_{]-\infty;0[} P(X<x)d\lambda(x) \text{ou}$$
$$= \int_{]0;+\infty[} P(X\geq x)d\lambda(x) - \int_{]-\infty;0[} P(X\leq x)d\lambda(x) \text{ (avec "ou" de X(w))}$$
$$E(X) = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x)d\lambda(x) - \int_{-\infty}^0 F_X(x)d\lambda(x) \text{ (si x a une espérance)}$$

6 Mesures Images

Définition 6.1. Si μ mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ application mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F})$. L'application

$$\mu\circ f^{-1} : Bor(\mathbb{R}) \to \mathcal{F} \to [0;+\infty]$$
$$B \mapsto f^{-1}(B) \mapsto \mu(f-1(B))$$

est une mesure sur $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}))$ appelée **mesure image** de μ par f.

Preuve. :

— $\mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$
— Pour $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ deux à deux disjoints

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i) = \{w \in \Omega, \exists i \in \mathbb{N}^*, f(w) \in B_i (\Leftrightarrow w \in f^{-1}(B_i))\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(B_i)$$

Et si $w \in f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j)$ alors $f(w) \in B_i \cap B_j$ donc $i = j$: les $f^{-1}(B_i)$ sont 2 à 2 disjoints

$$\mu(f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f^{-1}(B_i)).$$

$\mu \circ f^{-1}$ est $sigmat$additive

□

Remarque. Si f est une v.a. X et μ une probabilité P

$$\begin{aligned} \mu \circ f^{-1} = P \circ X^{-1} : & Bor(\mathbb{R}) \to [0;1] \\ & B \mapsto P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) \end{aligned}$$

est la loi de X, souvent notée $P_X = P \circ X^-1$

Exemple 6.1. Si X est à valeur dans $\mathbb{N}$:

$$P_X = P \circ X^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\delta_n \text{ sur } (\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R})).$$

Théorème 6.1 (Théorème de transfert)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable sur $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}))$*

$$\int_\Omega h(f(w))d\mu(w) = \int_\mathbb{R} h(w)d(\mu \circ f^{-1})(x).$$

si h est positive ou si $h \circ f$ est μ-intégrable ou si h est $(\mu \circ f^{-1}$-intégrable$)$

Idée de la preuve. :

— Si h indicatrice : $h = \mathbb{1}_B, B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\int_\Omega \mathbb{1}_B(f(w))d\mu(w) = \int_\Omega \mathbb{1}_{f(w)\in B} d\mu(w) = \mu(f^{-1}(B)) = \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_B d(\mu \circ f^{-1}).$$

— Si h étagée : $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i}()$ idem par linéarité des intégrales
— Si h positive : l'écrire comme limite de fonction étagées
— Si h intégrable : $h = h_+ - h_-$

□

6.1 Espérance d'une fonction d'une v.a.

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne

$$E(h(X)) = \int_\Omega h(X(w))dP(w) \underbrace{=}_{\text{th de transfert}} \int_\mathbb{R} h(x)d(P \circ X^{-1})(w) = \int_\mathbb{R} h(x)dP_X(x).$$

Exemple 6.2. Si X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$: $P_X = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)\delta_n = P \circ X^{-1}$

$$E(h(X)) = \int_\mathbb{R} h(x)d(P \circ X^{-1})(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)h(n).$$

Proposition 6.2. *So pour toute fonction h borélienne positive, ou toute fonction h borélienne bornée, on a*

$$E(h(X)) = E(h(Y)) \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi}.$$

Preuve : On vas se ramener à une fonction de répartition qui caractérise la loi.
$\forall t \in \mathbb{R}, h = \mathbb{1}_{]-\infty;t]}$ donne $E(h(X)) = E(\mathbb{1}_{X\leq t}) = P(X \leq t) = F_X(t)$ et la fonction de répartition caractérise la loi : $F_X(t) = F_Y(t), \forall t \in \mathbb{R} \to X$ et Y ont même loi ? □