Statistique mathématique: TD3

Exercice 1. *On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde le nombre d'obtentions de la face 6. Si on appelle X_n ce nombre, quelle est la loi de X_n ? La fréquence d'obtention de la face 6 est définie par $Y_n = X_n/n$. Quelle est l'espérance de Y_n ? Peut-on majorer la variance de Y_n ?*

Démontrer, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $1/6$.

Exercice 2. *Soit $(X_i)_{i\leq 50}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 20]$. Les X_i modélisent une note aléatoire obtenue à un examen de probabilité. Soit V_{50} le nombre d'étudiants et étudiantes ayant obtenu plus de $10/20$ et T_{50} le nombre d'étudiants et étudiantes ayant obtenu plus de $16/20$.*

1. *Quelle est loi loi de V_{50} ? de T_{50} ?*
2. *Quelles sont les espérances et variances de V_{50} et T_{50} ?*
3. *Donner une majoration de la probabilité que plus de 30 étudiants aient plus de $16/20$?*
4. *Donner un intervalle de confiance à 95% sur le nombre d'étudiants et étudiantes qui valident le cours.*
5. *Si on note n le nombre total d'étudiants, quelles seraient les limites lorsque n tend vers l'infini de la moyenne de la promotion ? Du taux de validation du cours ?*

Bonus : en quoi cette modélisation est critiquable ? Que proposeriez-vous pour l'améliorer ?

Exercice 3. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$. Les X_i modélisent le résultat d'un lancer de dé à 6 faces, équilibré. Soit $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ le plus grand résultat obtenu lors des n premiers lancers.*

Montrer que, presque sûrement, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 6.

Exercice 4. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 20]$. Les X_i modélisent une note aléatoire obtenue à un examen de probabilité. Soit $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ la plus haute note obtenue.*

Montrer que, presque sûrement, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 20.

Exercice 5. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, indépendantes, dont la loi a une densité f sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus de f ne s'annule pas.*

Montrer que $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ diverge presque sûrement vers $+\infty$.

Exercice 6. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.*

1. *Quelle est la loi de $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?*
2. *La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ? presque sûrement ?*
3. *Soit $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? En quel sens ?*
4. *Soit $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{17}$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? En quel sens ?*

Exercice 7. *Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables indépendantes, satisfaisant*

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p > 1/2 \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p.$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. *Les* X_i *modélisent les pas d'un marcheur, qui avancerait ou reculerait d'un pas à chaque seconde, de manière aléatoire et indépendante. La variable aléatoire* S_n *modélise alors la distance du marcheur à* 0*, son point d'origine.*

Montrez que la suite de variables aléatoires S_n *diverge presque sûrement vers* $+\infty$*, c'est à dire*

$$\mathbb{P}(\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, S_n \geq M) = 1.$$

Exercice 8. *On tire une famille i.i.d. de variables aléatoires* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *uniformes sur le cercle unité de* $\mathbb{R}^2$*, et, pour chaque valeur de* i*, on cherche à connaître la longueur de la corde reliant* X_i *au point de coordonnées* $(1, 0)$*.*

Exercice 9. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, qui convergent presque sûrement vers deux variables*X *et* Y*. Montrer que* $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement vers* $X + Y$*.*