# Fiche de TD de révision

**Exercice 1.**
Soit $\theta$ un réel strictement positif fixé et $X$ une variable aléatoire de densité

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} \text{ si } x \in [0,\theta] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}\left(X < \frac{\theta}{4}\right)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ puis $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de $\theta$.

**Exercice 2.**

1. Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Quelle est la densité de $X$? En déduire une expression de $\mathbb{P}(X > 1)$.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ ? Quelle est sa densité de probabilité?
3. Exprimer $\mathbb{P}(X > 1)$ en fonction de la fonction de répartition de $Z$.
4. Combien valent l'espérance et la variance de $X$ et de $Z$?
5. Calculer $\mathbb{E}(Z^3)$ et $\mathbb{E}(Z^4)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(X^4)$.

**Exercice 3. Deux lois sans mémoire**

1. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer la fonction de répartition de $X$.
   (b) Pour $j$ et $k$ dans $\mathbb{N}^*$, comparer $\mathbb{P}(X > j)$ et $\mathbb{P}(X > j + k|X > k)$. Que remarque-t-on? *On dit donc que la géométrique est sans mémoire.*
2. Le temps d'utilisation d'une ampoule avant qu'elle grille est une variable aléatoire $T$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $a = 0.005$ (jours$^{-1}$).
   (a) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et sa fonction de répartition.
   (b) Pour $s,t \in \mathbb{R}_+$, calculer $\mathbb{P}(T > t)$ que l'ampoule soit encore allumée au bout de $t$ jours, et la probabilité $\mathbb{P}(T > t+s|T > s)$ que l'ampoule dure encore $t$ jours de plus si on constate au bout de $s$ jours qu'elle est toujours allumé. Que remarque-ton?

(c) On allume l'ampoule, on contrôle une fois par jour si elle est toujours allumée, et on note $Z = 1$ si on trouve l'ampoule grillée au soir du premier jour, $Z = 2$ si cela se produit au soir du deuxième jour, etc. Déterminer la loi de $Z$.

**Exercice 4.**

Dans tout cet exercice, $\theta > 0$ est un paramètre fixé. On appelle loi de Fréchet($\theta$) la loi qui a pour densité

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition $F_\theta$ de la loi de Fréchet($\theta$).
2. Si $X$ suit la loi de Fréchet($\theta$), quelle est la loi de $\frac{1}{X}$?
3. Prouver que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi de Fréchet($\theta$), alors la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ suit la loi Fréchet($n\theta$). En déduire que $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $nX_1$.
4. On vient de prouver que les lois de Fréchet ont la propriété de *max-stabilité*: $\max(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $nX_1$ si les $X_i$ sont indépendantes de même loi de Fréchet. Est-il vrai que toutes les lois de probabilité ont cette propriété?
5. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et toutes de loi de Fréchet($\theta$), la suite des moyennes empiriques $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge-t-elle presque surement? (Si oui, préciser la limite).