Chaîne de Markov sur un espace d'états fini

Charles Vin

2021

Note. Il faut des bonne intuition, pas des grosse Définition on vas donc commencer pas un petit exemple pour développer l'intuition.

Exemple 0.1. On a deux bocaux, numéros 1 et numéros 2. On pose un grain de sable dans un bocal. Il saute toute les secondes en suivant les règle suivante

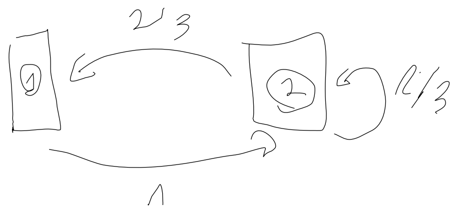

Figure 1 – Chaine de Markov

— Il démare en 1
— Si il est en 1 il vas en 2
— Si il est en deux il vas en 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et donc $\frac{1}{3}$ d'aller en 2.

Questions :

— Sur un longue durée, il passera la moité du temps en 1 ? Plus de la moitié du temps en 2 ? Combien ?
— On met 1 litre de sable en 1. Tous les grains sautent au hasard comme ci-dessus. Au bout d'un temps long, les volumes dans chaque bocal se stabilise ? Avec 1/2 litre dans chaque bocal ? Plus que 1/2 litre dans 2 ? Combien ? (même valeur qu'à la question précédente)

1 Rapides rappels de probabilités conditionnelles

(ω, F, P) espace probabilisé

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ si } P(A) \neq 0 \\ P(A \cap B) &= P(B|A)P(A) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(C|B \cap A)P(B|A)P(A) \\ P(D \cap C \cap B \cap A) &= P(D|C \cap B \cap A)P(C|B \cap A)P(B|A)P(A) \\ &\text{ect (formules des conditionnemens)} \end{aligned}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) \text{ avec } K \in N^* \text{ ou } K = \infty \text{ et } (A_i)_i \text{ partition de } \omega$$

2 Chaîne de Markov et matrice de transition

Une variable aléatoire représente une quantité qui dépend du hasard.

Un processus stochastique (aléatoire dans un vocabulaire plus simple mdr) représente une quantité qui dépend du hasard et **du temps**. Il a la propriété de Markov si son évolution future ne dépend que de son état présent, actuel (et pas des étapes du passé).

Définition 2.1 (Propriété de Markov)**.** Une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \in N}$ sur (ω, F, P) à valeurs dans l'ensemble fini E est une chaine de Markov si

$$\forall n \in N, \forall e_0, e_1, ..., e_{n+1} \in E \text{ tel que } P(X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n) > 0.$$

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, ..., X_0 = e_0) = P(X_{n+1} = e_{n+1} | x_n = e_n).$$

Note. Ici n représente le temps. La propriété de Markov dit bien que la proba du future ne dépend pas du passé

Ceci s'appelle la **propriété de Markov**. E est **l'espace d'états**. Dans ce cours, on suppose E fini. Ici on le munis de la tribut de les partie de E : $P(E)$

Exemple 2.1. Les deux bocaux

- $E = 1, 2$ ensemble des bocaux = espace d'états
- X_n : Position du grain de sable à l'instant n
- $X_0 = 1$: On démare dans 1
- $P(X_1 = 2) = 1$
- $P(X_2 = 1 | X_1 = 2) = \dfrac{2}{3}, P(X_2 = 2 | X_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$
- $P(X_4 = 2 | X_3 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1) = \dfrac{1}{3} = P(X_= 2 | X_3 = 2)$

Exemple 2.2 (Marche aléatoire réfléchie dans $\{-N, ..., N\}$
)**.** Espace d'état : $\{-N, -N+1, ..., N-1, N\} \to 2N+1$ position possible. A chaque pas, on tire à pile ou face si on va à gauche ou à droite en partant d'une position initiale $X_0 = 0$ ou $X_0 = e_0$ fixé.

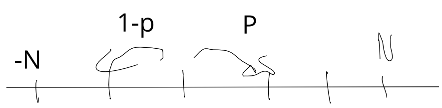

Figure 2 –

$p \in]0, 1[$ proba d'aller à droite fixée, X_n position après n pas

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n, ..., X_0 = e_0) = \begin{cases} p \text{ si } e_n = -N, ..., N-1 \\ 0 \text{ si } e_n = \qquad N \end{cases}$$

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n, ..., X_0 = e_0) = \begin{cases} 1-p \text{ si } e_n = -N+1, -N+2..., N \\ \quad 0 \text{ si } e_n = \qquad -N \end{cases}$$

fin de chaine :

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = N, X_{x-n} = e_{n-1}, ..., X_0 = e_0) = p$$
$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = -N, ..., X_0 = e_0) = 1 - p$$

Note. J4AI PAS COMPRIS

Exemple 2.3 (Problème de la ruine du joueur)**.** On joue à pile ou face contre un adversaire. On gagne 1€ si on fait pile (proba $p \in]0, 1[$). On perd 1€ si on fait face. On commence avec k € et notre adversaire à $N - k$. Le jeu s'arrête quand l'un n'a plus d'argent.
Quelle est la probabilité que l'on finisse ruiné ?

— On a bien une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, ..., N\}$.
— X_n : La fortune du joueur à l'instant n. $X_0 = k$
— $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = N) = 1$: Le jeu s'arrete lorsque l'un des joueurs est ruiné.
— $P(X_{n+1} = e + 1|X_n = e) = p$ si $e \in \{1, 2, ..., N - 1\}$
— $P(X_{n-1} = e - 1|X_n = e) = 1 - p$ si $e \in \{1, 2, ..., N - 1\}$

Définition 2.2 (Chaine de Markov homogène)**.** On dit que la chaine de Markov $(X_n)_{n \in N}$ est **homogène** si

$$\forall n \in N, \forall e, e' \in E, P(X_{n+1} = e'|X_n = e) = P(X_1 = e'|X_0 = e).$$

Note. aka quand les proba sur les flèches du graph ne change pas avec le temps. Si c'est la même proba qu'au début

Dans ce cas, la probabilité de transition de e vers e' est :

$$\pi(e, e') = P(X_{n+1} = e'|X_n = e).$$

Elle ne dépend pas de n.

En numérotant les états $E = e_1, e_2, ..., e_{card(E)}$ on fabrique la **matrice de transition** qui à la ligne i colonne j la probabilité $\pi(e_i, e_j)$ d'aller en e_j quand on est en e_i. On peut aussi représenter les probabilités de transition sur un graphe

Exemple 2.4 (bocaux)**.** $E = \{1, 2\}, \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Note. Proba d'aller en 1 depuis 1 = 0, proba d'aller en 2 depuis 1 = 1, proba d'aller en 1 depuis 2 = 2/3, proba d'aller en 2 depuis 2 = 1/3

Démonstration.

$$\begin{aligned}\forall e \in E, \sum_{e' \in E} \pi(e, e') = \sum_{e' \in E} P(X_1 = e'|X_0 = e) &= P(\bigcup_{e' \in E} \{X_1 = e'\}|X_0 = e) \\ &= P(X_1 \in E|X_0 = e) \\ &= P(\omega|x_0 = e) = 1\end{aligned}$$

□

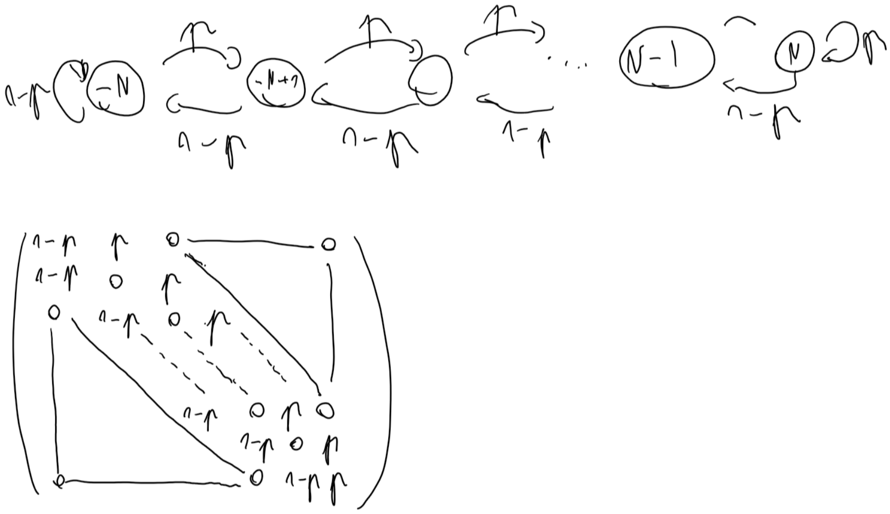

Figure 3 – Matrice de transition de la marche aléatoire

Exemple 2.5 (Matrice de transition de la marche aléatoire)**.** Voir Figure 3.

Exemple 2.6 (Matrice de transition de la ruine du joueur)**.** Voir Figure 4.

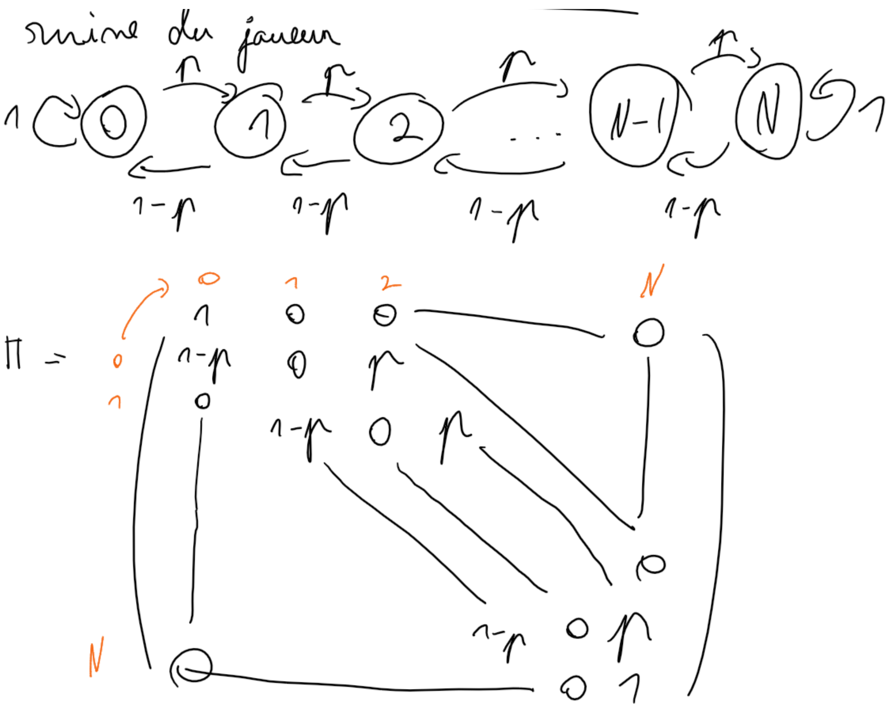

Figure 4 – Matrice de transition de la ruine du joueur

3 Trajectoire et évolution en loi

A partir d'ici, on a $(X_n)_{n \in N}$ chaine de Markov homogène de matrice de transition π .
Pour chaque $\omega \in \Omega$, la suite $X_0(\omega), X_1(\omega), ...$, s'appelle une trajectoire.

Théorème 3.1.

$$\begin{aligned} \forall n \in N, \forall e_0, e_1, ..., e_n \in E \\ P(X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n) &= P(X_0 = e_0)\pi(e_0, e_1)\pi(e_1, e_2)...\pi(e_{n-1}, e_n) \\ &= P(X_0 = e_0)\prod_{i=1}^{n} \pi(e_{i-1}, e_i) \end{aligned}$$

Note. On fait comme en proba discrète : on multiplie les probas

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(X_n = e_n, x_{n-1} = e_{n-1}, ...X_0 = e_0) &= P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_[n-1, ..., X_0 = e_0]) \\ &\rightarrow P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_{n-1}) = \pi(e_{n-1}, e_n) \\ &= P(X_{n-1} = e_{n-1} | X_{n-2} = e_{n-2}, ..., X_0 = e_0) \\ &\rightarrow P(X_{n-1} = e_{n-1} | X_{n-2} = e_{n-2}) = \pi(e_{n-2, e_{n-1}}) \\ &= ... \\ &= P(X_1 = e_1 | X_0 = e_0)P(X_0 = e_0) \rightarrow \pi(e_0, e_1)P(X_0 = e_0) \end{aligned}$$

Note. J'ai pas giga bien écrit la preuve pas le time mais t'as capté.

□

Cours du 9/14/2021
La loi à l'instant n (la loi de X_n) est :

$$\begin{aligned} \mu_n &= (P(X_n = e_1), P(X_n = e_n, ...P(X_n = e_{CardE}))) \\ &= \mu_n(e_1), \mu_n(e_2) \end{aligned}$$

Quand E est fini $\mu_n = (P(X_n p e_i))_{i \in E}$ forme un vecteur ligne.

Théorème 3.2. $\forall n \in N, \mu_{n+1} = \mu_n \pi$ *et* $\mu_n = \mu_0 \pi^n$

Note. μ_{n+1} dit comment on passe de l'état n à n+1

. La i ème coordonnée du vecteur ligne $\mu_n \pi$ est :

$$(\mu_n)(e_i) = \sum_{e \in E} \mu_n(e)\pi(e, e_i) = \sum_{e \in E} P(X_n = e)P(X_{n+1} = e_i | X_n = e) = P(X_{n+1} = e_i) = \mu_{n+1}(e_i).$$

□

Exemple 3.1. Exemple des deux bocaux

— $\mu_0 = (1, 0)$
— $\mu_1 = (0, 1) = \mu_0 \pi$
— $\mu_2 = (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
— $\mu_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\frac{2}{9}, \frac{7}{9})$
— $\mu_4 = \mu_3 \pi = \mu_0 \pi^4 = (\frac{2}{9}, \frac{7}{9})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\frac{14}{27}, \frac{13}{27})$

Remarque. $P(X_{n+k} = e' | X_n = e) = \pi^k(e, e')$ est le coeff ligne e colonne e' de π^k.

. Si la propriété est vraie pour $k - 1$. On vas faire une récurence.

$\Omega = \bigcup_{x \in E} \{X_{n+k-1} = x =\}$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+k} = e' | X_n = e) &= \sum_{x \in E} P(X_{n+k} = e', X_{n+k-1} = x | X_n = e) \\
&= \sum_{x \in E} \frac{P(X_{n+k} = e', X_{n+k-1} = x, X_n = e)}{P(X_{n+k-1} = x, X_n = e)} * \frac{P(X_{n+k-1} n X_n = e)}{P(X_n = e)} \\
&= \sum_{x \in E} P(X_{n+k} = e' | X_{n+k-1} = x, X_n = e) P(X_{n+k-1} = x | X_n = e) \\
&= \sum_{x \in E} \pi(x, e') \text{ (par la prop de Markov) } * \pi^{k-1}(e, x) \text{ (par hypothèse de récurence)}
\end{aligned}$$

□

Note. BRO WTF

4 Récurence, transience, périodicité

Définition 4.1. L'état e' est **accessible** depuis l'état e si la chaine a une probabilité strictement positive d'aller en e' quand elle est en e (en une ou plusieurs étapes).

$$\exists k \in N, \pi^k(e, e') > 0.$$

ou

$$\exists k \in N, \exists e_1, e_2, ...e_{k-1}, \pi(e, e_1)\pi(e_1, e_2), ..., \pi(e_{k-2}, e_{k-1})\pi(e_{k-1}, e') > 0.$$

Note. Il existe un chemin en k étape pour aller de e à e' strictement positive.
ou Il existe un chemin tel que on a une probabilité strictement positive de faire le premier chemin, ect, jusqu'au dernier

Quand c'est accessible depuis e et e accessible depuis e', on dit que e et e' sont **communiquant**.
Si e et e' communiquant, et e' et e'' communiquent, alors e et e'' communiquent. Donc on peut partitionner E en classes d'éléments qui communiquent entre eux. On dit que la chaine est **irréductible** si tous les états communiquent

Exemple 4.1. Les deux bocaux
Ca se lit sur un graph : est-ce que 1 est accessible depuis 2 ? oui lol . Est-ce que 2 est accessible depuis 1 ? oui aussi $\to$ tout le monde communiquent c'est irréductible

Exemple 4.2. Fil d'attente
3 personnes font la queue à l'ouverture d'un guichet. Le temps qu'on s'occupe d'une personne (2 min), il y a une chance sur deux qu'une autre arrive. On vas faire le graph $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

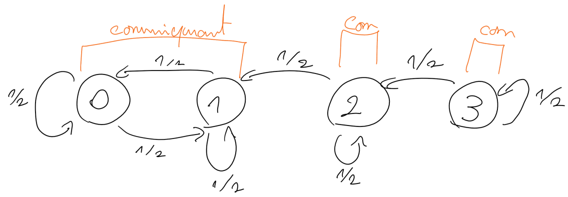

Figure 5 – Fil d'attente

Exemple 4.3. Marche aléatoire
C'est communiquant en 1 noyaux $\rightarrow$ irréductible

Exemple 4.4. Ruine du joueur
O et 1 sont seul, et le reste communique

Exemple 4.5. Voir Figure 6

Figure 6 – Exemple sans nom

Définition 4.2 (Absorbant)**.** Un état est **absorbant** si $P(X_1 = e|X_0 = e) = 1$

Définition 4.3 (Récurrent)**.** Un état $e \in E$ est **récurent** si partant de e , on finit toujours par y revenir :

$$P(\exists n \in N, X_n = e|X_0 = e) = 1.$$

Si un état n'est pas récurrent, on di qu'il est **transient** Voir Figure 7

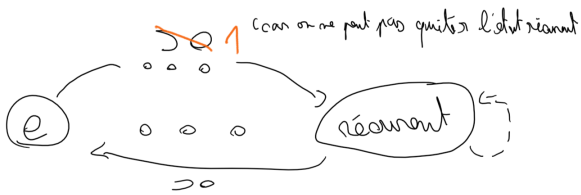

Figure 7 – Graph avec récurence

Théorème 4.1. *Sur ces définitions*

- *Partant d'un état récurrent, on y passe une infinité de fois.*
- *Un état qui communique avec un état récurrent est toujours récurrent.*
- *Un état qui communique avec un état transient est toujours transient.*

Exemple 4.6. Tout nos exemples :
- LEs deux bocaux : Tout le monde est récurent
- Fil d'attente : La classe récurente :
  - La classe O, 1 est récurente
  - La classe 2 et la classe 3 sont transient
- Marche aléatoire : Tout le monde est récurrent
- Ruine du joueur :
  - La classe 0 et la classe 1 sont Récurent et Absorbant
  - La classe 1 à n-1 est transient
- Dans l'exemple sans nom de onenote (voir Figure 6) : Tout le monde es récurent;

Théorème 4.2. *Quand l'espace d'état E est fini, il y a toujours au moins un état récurrent. Donc si la chaine est irréductible, tout les états sont récurrents.*

Note. Si c'est infinie, on peut imaginer quelque chose qui s'en vas loin à l'infinie

Définition 4.4. La période d'un état $e \in E$, c'est le PGCD des temps de retour possible en e .

$$d(e) = PGCD(\{k \geq 1, \pi^k(e,e) > 0\}).$$

Note. Temps de retour possible = On part de e pour aller en e en un nombre k d'étape. On peut faire plein de détour. En combien d'étape je peux faire pour partir de e et renvenir en e

Si $d(e) = 1$, on dit que e est **apériodique**

Théorème 4.3 (Admise)**.** *Les états qui communiquent entre eux ont tous la même période.*

Exemple 4.7. Nos exemples habituel
- Des 2 bocaux :
  - $d(2) = PGCD(\{1, 2, 3, ...\}) = 1$
  - $d(1) = PGCD(\{2, 3, 4, 5, ...\}) = 1$

  Elle est donc irréductible et apériodique.
- File d'attente :
  - $d(3) = d(2) = 1$
  - $d(0) = d(1) = 1$
- Marche aléatoire :
  - $d(0) = PGCD(\{2, 4, 6, ..., 2N, 2N + 1, 2N + 2\})$
  - On fait des aller retour basique au début $\rightarrow$ nombre paire
  - Puis quand on arrive au bous, il y a la boucle $\rightarrow$ les nombres impaires arrivent
- Ruine du joueur :
  - $d(0) = d(N) = 1$
  - $d(1) = d(2) = ... = d(N - 1) = 2$
- Exemple sans nom :
  - Période 3
  - $d(0) = PGCD(\{3, 6, 9, 12, ..., \}) = 3$

5 Invariance, réversibilité, convergence, ergodicité

Définition 5.1. La chaine de Markov de matrice de transition π. Elle admet μ comme mesure invariante/stationnaire si $\mu\pi = \mu$

Note. Si $\mu_0\pi = \mu_1$ alors $\mu_1\pi = \mu_2$ ect
μ donne une quantité, il mesure. Pour une mesure invariante, si on prend une photo à un instant t, ça sera la même photo à l'instant t+1.

μ est une mesure **réversible** si

$$\forall e, e' \in E, \mu(e)\mu(e, e') = \mu(e')\pi(e', e).$$

Ce qui va de e à e' = ce qui va de e' à e
Si $\sum_{e \in E} \mu(e) = 1$ on parle de probabilité réversible ou invariante

Exemple 5.1. Nos exemples habituelle :

— Les deux bocaux : Si on est à la répartiton μ. $\mu(1)$ représente la quantité dans le bocal 1, same pour 2.
A l'étape suivante, la quantité qui va de 1 à 2 est $\mu(1)*\pi(1,2)$ et celle qui vas de 2 à 1 est $\mu(2)\pi(2,1)$.

—

Proposition 5.1. *Toute mesure réversible est invariante.*

. Si μ est réversible : $(\mu\pi)(e) = \sum_{x\in E} \mu(x)\pi(x,e) =_{\text{réversibilité}} = \sum_{x\in E} \mu(e)\pi(e,x) = \mu(e)\sum_{x\in E}\pi(e,x) = 1$ □

Remarque. Les lois limites sont invariantes
Si $\mu_n \rightarrow_{n\to+\infty} \mu$, comme $\mu_{n+1} = \mu_n\pi$ donc $\mu = \mu\pi$

Proposition 5.2 (admis)**.** *Une chaine irréductible sur un espace d'état fini admet une unique probabilité invariante.*

Note (Rappel Loi des grands nombres)*.* X_i i.i.d

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow_{n\to+\infty}^{Proba} E(X_1).$$

Convergence en probabilité

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)\right| > \epsilon).$$

COnvergence en loi :

$$V_n \rightarrow_{n\to\infty}^{loi} V_\infty \text{ si } F_{v_n} \rightarrow FV_\infty(t), \forall t \text{ where } F_{V_\infty} \text{ est continue }.$$

On exquive les sauts

Théorème 5.3 (Théorème de convergence en loi (admis))**.** *Une chaine de Markov $(X_n)_{n\in N}$ **homogène irréductible apériodique** sur un espace d'état fini E converge en loi vers son unique probabilité invariante μ au sens où :*
Pour tout état initiale $e_0 \in E$

$$\forall e \in E, \lim_{n\to\infty} P(X_n = e|X_0 = e_0) = \mu(e).$$

Note. Ne dépend pas du point de départ, au bout d'un certain temps la chaine oublie d'ou elle est partie.

Conséquence : Pour toute loi initiale $X_0\sigma\mu_0$

$$P(X_n = e) = \sum_{e_0\in E} P(X_n = e|X_0 = e_0)P(X_0 = e_0)$$
$$\longrightarrow_{n\to+\infty} \sum_{e_0\in E} \mu(e)\mu_0(e_0) = \mu(e)$$

Convergence en loi :

$$F_{X_n}(t) = p(X_n \le t) = \sum_{e\le t, e\in E} P(X_n = e) \longrightarrow_{n\to\infty} \sum_{e\le t, e\in E} \mu(e) = F_\mu(t).$$

Théorème 5.4 (Ergodique)**.** *(Loi forte des grands nombres pour les chaines de Markov homogènes irréductible)*
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une chaine de MArkov homogène irréductible de probabilité invariante μ sur l'espace d'état fini E.
Pour toute $f : E \to R$

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \sum_{e\in E} f(e)\mu(e)) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \longrightarrow_{n\to\infty}^{\textit{presques surement}} \sum_{e\in E} f(e)\mu(e).$$

i.e la moyenne en temps converge vers la moyenne en espace (espace des états)
En particulier, pour tout état $e \in E$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{X_k=e} \longrightarrow_{n\to\infty}^{p.s.} \sum_{e'\in E} f(e')\mu(e') = \sum_{e'\in e} \mathbb{1}_{e'=e}\mu(e') = \mu(e).$$

Proposition de temps passé dans l'état e entre les instants 0 et n converge vers la mesure stationnaire prise dans l'état e.

Exemple 5.2 (des deux bocaux)**.** Je cherche si dans mon graph avec les deux bocaux j'ai une mesure stationnaire. Le graph est irréductible et apériodique. Par Théorème il existe une seule valeur stationnaire $mu\pi = \mu$.
$\mu(a,b), a = \mu(1), b = \mu(2), \pi\left(\begin{smallmatrix}0 & 1 & 2/3 & 1/3\end{smallmatrix}\right)$

$$\mu\pi = \mu \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}b = a \\ a + \frac{1}{3}b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{2}{3}b \\ a + b = 1 \text{ car } \mu \text{ est une probabilité} \end{cases}.$$

$$\frac{2}{3}b + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{3}{5}, a = \frac{2}{5}.$$

La probabilité invariante : $\mu = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

Note. Si on revient longtemps plus tard, on a 2/5 de chance que le grain de sable soit dans le bocal 1 et 3/5 pour le bocal 2.
Cela dit aussi pour un seul grain quelle proportion de temps il a passé dans le bocal 1 et 2.

$$\mu(1)\pi(1,2) = \frac{2}{5} * 1.$$
$$\mu(2)\pi(2,1) = \frac{3}{5} * \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

μ est réversible car c'est égal

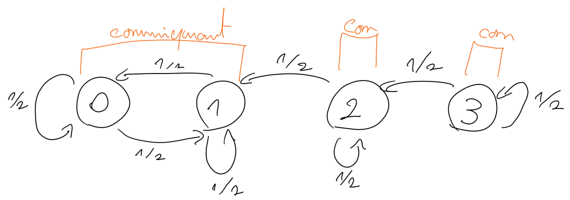

Figure 8 – Fil d'attente

Exemple 5.3 (Fil d'attente)**.** Non irréductible. On cherche μ invariant, un probabilité invariante ? Si oui

$$\mu(a,b,c,d), \pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = b \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = c \\ \frac{1}{2}d = d \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = bc = 0d = 0 \\ a + b + c + d = \quad 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) \text{ invariante}$$

Pour la paire {0,1} : $\mu(0)\pi(0,1) = \dfrac{1}{4} = \mu(1)\pi(1,0)$

Pour la paire {1,2} : $\mu(1)\pi(1,2) = \dfrac{1}{2} * 0 = \mu(2)\pi(2,1) = 0$ Idem pour {1,3}, {0,3}, {2,3}, {0,2}

Exemple 5.4. Exemple sans nom

$$\begin{tikzcd}
-1 \arrow[rr, bend left, "1"] & -2 \arrow[l, bend left, "1"] & 0 \arrow[l, bend left, "1/2"] \arrow[r, bend right, "1/2"'] & 1 \arrow[r, bend right, "1"'] & 2 \arrow[ll, bend right, "1"']
\end{tikzcd}$$

irréductible période 3, $\mu = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}), \mu\pi = \mu$, la période empêche la convergence