Statistique mathématique: TD1

Exercice 1. *Donner la valeur de* $\int f d\mu$ *pour les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et mesures* μ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *suivantes. Pour chacun des exemples, dites si la mesure* μ *est une mesure de probabilité et si elle est discrète, continue ou ni l'un ni l'autre, ou si elle a un nom !*

1. $f(x) = x$, $\mu = \delta_5$
2. $f(x) = 2$, $\mu = 1_{[0,10]}(x)dx$
3. $f(x) = \cos x$, $\mu = 1_{[0,\pi/2]}(x) \cos x dx$
4. $f(x) = x$, $\mu = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{4}{3}1_{]0,1/2]}(x)dx$
5. $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$, $\mu = dx + 3\delta_0$
6. $f(x) = e^x$, $\mu = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$, $p \in]0,1[$
7. $f(x) = 1$, $\mu = \frac{1-e}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}\delta_k + \frac{1}{2}e^{-x}dx$

Pour les variables aléatoires suivantes, écrivez leur loi sous forme de mesure

1. $X = B + (1-B)G$ *où* B *est une variable aléatoire de loi* $\mathcal{B}(1/2)$ *et* G *est une variable aléatoire indépendante de* B *et de loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
2. $X = 1_{Y>0}Z$ *où* Y *et* Z *sont deux variables aléatoires indépendantes de loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
3. $X = X_1 + X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et de loi* $\mathcal{B}(1/2)$.

Exercice 2. *Soit* X *une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre* 2*. Démontrer que*

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice 3. *Donner des exemples de variables aléatoires satisfaisant les propriétés suivantes.*

- *Donner un exemple de variable aléatoire qui ne soit ni à densité, ni discète.*
- *Donner un exemple de variable aléatoire discrète ayant un moment d'ordre* 3 *mais pas de moment d'ordre* 4.
- *Donner un exemple de variable aléatoire à densité ayant une espérance mais pas de second moment.*
- *Démontrer qu'une variable aléatoire bornée admet des moments de tous ordres.*
- *Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers* 0 *mais dont l'espérance est constante égale à* 1.
- *Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité*

Exercice 4. *Le but de cet exercice est de démontrer de nombreuses propriétés des variables exponentielles.*

1. *Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. *Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(\lambda)$ *est* $F(t) = (1 - e^{-\lambda t})1_{t\geq 0}$.
3. *En déduire que si* X *est une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(1)$, *alors* λX *est une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$.

4. *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}(X^k) = k!.$$

5. *En déduire les moments d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.*
6. *Soient X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda_2)$. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.*
7. *En déduire la loi de $\min(X, Y)$.*

Exercice 5. *Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que sa fonction de répartition F_X est croissante, continue à gauche, admet en tout point une limite à droite, et vérifie*

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1.$$

Enfin, montrez que F_X est continue en tout pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Exercice 6. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Calculez, en fonction des fonctions de répartition de X et Y, la fonction de répartition de $\max(X, Y)$.*

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi, donner la fonction de répartition de $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ en fonction de la fonction de répartition de X.

Exercice 7. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.*

1. *Montrer que la variable aléatoire $Z = X/Y$ est bien définie (c'est à dire définie sauf peut-être sur un événement négligeable).*
2. *Déterminer la fonction de répartition de Z. Quelle loi reconnaissez-vous ?*

Exercice 8. *Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux.*

1. *Montrer que*
$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y).$$
2. *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, Z une variable de Rademacher indépendante de X et $Y = ZX$. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.*
3. *Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.*
4. *En tirez-vous un enseignement sur la relation entre covariance et indépendance ?*

Exercice 9. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes. Est-ce que X et Y^2 sont indépendantes ? X et $\cos Y$? Si X est indépendantes de X, que peut-on dire de X ? (calculer sa variance)*

Exercice 10. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.*

1. *Calculez l'espérance et la variance de X_1.*
2. *Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?*
3. *Soit Y_n une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En s'aidant des questions précédentes, calculer l'espérance de Y ? Quelle est la variance de Y ?*