Fiche 1 Chaines de Markov

Ex 1.

Considérons la matrice de transition définie sur $E = \{1, 2, 3\}$ par

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Dessiner le graphe de transition.

2) Cette chaine de Markov est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

3) Tous les états sont-ils récurrents ? Si oui, comment peut-on modifier π pour qu'ils ne le soient pas tous ?

4) La répartition à l'instant n a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini ? Laquelle ?

Ex 2. Restaurant qui ne durera pas

La situation financière d'un restaurant évolue chaque année. Elle peut être dans décrite par trois états : 0 (faillite), 1 (au bord de la faillite) et 2 (solvable). La matrice de transition est :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

1) Cette chaine de Markov est-elle irréductible ?

2) Si le restaurant est actuellement solvable, dans combien d'années en moyenne fera-t-il faillite ? Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas faillite ?

3) En fait, l'oncle du propriétaire est très riche et injecte du cash dès que l'état 0 est atteint, pour revenir à l'état solvable. La nouvelle matrice de transition est alors

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle chaine de Markov est-elle irréductible ? apériodique ? Combien d'années y a-t-il en moyenne entre les injections de cash ?

Ex 3. Etats absorbants et trajectoires

On considère une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Tracer le graphe des transitions.

2) Un état est absorbant si, quand on y est, la probabilité d'en sortir est nulle. Un état absorbant est-il récurrent ou transient ? Quels sont les états absorbants de cette chaine ? Les autres états sont-ils récurrents ou transients ?

3) Calculer en fonction de la loi initiale μ_0 les probabilités des trajectoires suivantes

— $\{X_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad X_n = 3\}$

— $\{X_0 = 1\ ,\ X_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 2 \quad X_n = 4\}$

— $\{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_0 = 1 \text{ si } n \text{ est pair et } X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair }\}$

4) Calculer la distribution à l'instant $n = 1$ puis à l'instant $n = 2$ lorsque la distribution est uniforme à l'instant initial. Même question pour la distribution initale $\mu_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

5) Est-il vrai qu'en temps long on finit toujours par atteindre un état absorbant ? Expliciter cette affirmation et la justifier.

Ex 4. Gestion de stock

Dans une entreprise, la demande d'une marchandise pendant la journée n est notée D_n, et la quantité de cette marchandise en stock à la fin de la journée n est notée X_n. Le gestionnaire de l'entrepot a fixé un niveau maximal de stock S. Dès que $X_n = 0$, on réapprovisionne. Le réapprovisionnement se fait en 24h et remet le stock au niveau S. Tant que $X_n > 0$ on ne fait pas de réapprovisionnement.

1) Trouver une relation entre X_n, D_{n+1} et X_{n+1}. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov sous une condition qu'on précisera. A quelle condition cette chaine est-elle homogène ?

2) On suppose $S = 2$ et les D_n i.i.d. de loi donnée par

$$P(D_1 = 0) = 0,5 \quad P(D_1 = 1) = 0,4 \quad P(D_1 = 2) = 0,1$$

Quel est le niveau moyen du stock sur une longue période ?

Ex 5. Stationnarité et réversibilité

Pour les chaines de matrice de transition suivantes, dessiner le graphe, déterminer si la chaine est irréductible, quels états sont récurrents ou transients, quelle est la période de chaque état, et chercher une probabilité réversible puis une probabilité invariante.

$$1)\quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 6. Etudier la chaine de Markov homogène à 5 états de matrice de transition

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 7. La ruine du joueur

Un joueur joue à pile ou face contre un adversaire. La pièce a une probabilité p de faire pile. Si elle fait pile, le joueur reçoit un euro de son adversaire. Si elle fait face, il donne un euro à l'adversaire. Au début, le joueur possède k euros et son adversaire $N - k$ euros. Les fortunes des deux personnes évoluent ainsi jusqu'à ce que l'un des deux ait gagné tout l'argent de son adversaire, après quoi elles cessent d'évoluer : on n'est pas autorisé à risquer de s'endetter.

Chaque lancer dure une minute. On note X_n la fortune du joueur après n minutes de jeu.

1) Quelle chaine de Markov modélise ce jeu ? Donner son graphe et sa matrice de transition. Est-elle irréductible ? Apériodique ?

2) On note R l'évènement *le joueur finit ruiné* et r_k la probabilité qu'il finisse ruiné quand il démarre avec une fortune initial k. Exprimer R à partir des X_n. Combien valent r_0 et r_N ? Etablir une relation entre r_k, r_{k+1} et r_{k-1}.

3) En utilisant les différences $r'_k = r_{k+1} - r_k$, exprimer r_k en tant que fonction de k, N et p.

4) Trouver sans calcul la probabilité g_k que l'adversaire de fortune initiale $N-k$ finisse ruiné. Montrer que le jeu se termine en temps fini, presque surement.

5) Quelle est la limite de la probabilité de ruine quand on se rapproche de la situation typique du joueur de casino : p proche de $\frac{1}{2}$ avec $p < \frac{1}{2}$ et N presque infiniment plus grand que k ?

6) La roulette est un dispositif où une bille s'arrête au hasard sur une case, dans un cerle de 37 cases numérotées de 0 à 36. Il y a 18 cases rouges et 18 cases noires, le zéro étant vert. Un joueur double sa mise s'il a joué la bonne couleur et la perd sinon.

Un joueur possède 10 euros et veut essayer d'en gagner 10 de plus en jouant à la roulette. Calculer sa probabilté de réussir pour chacune des deux statégies suivantes :

— Il mise ses 10 euros en une seule fois sur le rouge ou le noir.

— Il mise un euro à la fois sur le rouge ou le noir et persévère jusqu'à ce que sa fortune atteigne 20 euros ou qu'il soit ruiné.

Ex 8. Fiabilité d'une machine (examen décembre 2018)

On modélise le fonctionnement d'une machine. Pour simplifier, on considérera qu'on observe la machine à chaque heure et qu'elle a trois états possibles : 1 (bon état), 2 (mauvais état) et 3 (en panne). Le passage d'un état donné à l'état une heure après se fait de la façon suivante :

— quand la machine est en bon état, il y a 9 chances sur 10 qu'elle le reste, et 1 chance sur 10 qu'elle devienne en mauvais état ;

— quand elle est en mauvais état, il y a 3 chances sur 5 qu'elle le reste, 1 chance sur 5 pour qu'elle tombe en panne, et 1 chance sur 5 pour qu'un technicien s'en aperçoive et la répare. La réparation remet la machine en bon état.

— quand la machine tombe en panne, un technicien vient immédiatement la réparer. Une heure après, elle redémarre en bon état.

On note X_n l'état de la machine au bout de n heures.

1) Dessiner le graphe de la chaine de Markov représentant les états de la machine, et écrire sa matrice de transition.

2) Ce matin, la machine a démarré en bon état. Quelle est la probabilité que trois heures après elle soit en bon état ?

3) La chaine est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

4) A-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

5) Quelle est la probabilité qu'à un moment quelconque, longtemps après la mise en service de la machine, elle soit en bon état ? (justifier)

6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion du temps est perdue pour cause de panne ? (justifier)

Ex 9. Abreuvoir automatique (deuxième session, juin 2019)

Un élevage est équipé d'un abreuvoir automatique qui ne peut être utilisé que par un animal à la fois. On suppose qu'à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne. Si un animal qui arrive trouve l'abreuvoir libre, il boit pendant une minute et s'en va, sinon il attend. On suppose qu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente, c'est-à-dire qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire et s'en va (de même, si deux animaux arrivent en même temps et qu'il y a déjà une bête en attente, un seul des deux arrivants fait la queue et l'autre renonce).

On note X_n le nombre d'animaux au temps n à l'abreuvoir (en attente ou en train de boire). A l'instant 0 (mise en service de l'abreuvoir) on a $X_0 = 0$.

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Tracer le graphe correspondant et donner la matrice de transition π.

2) A l'instant 0, l'abreuvoir est inutilisé. Calculer la probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k. Au bout de combien de temps, en moyenne, commence-t-il à être utilisé ?

3) Sachant qu'à l'instant 0 il n'y aucun animal à l'abreuvoir, calculer la probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre.

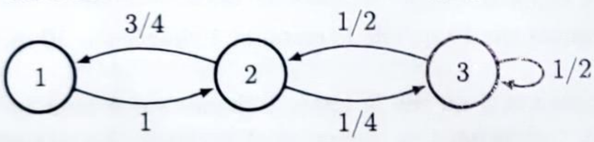
4) Si à l'instant 10 il y a deux bêtes en attente, calculer la probabilité que la situation soit la même à l'instant 15 et que l'abreuvoir soit resté inutilisé au moins une minute entre-temps.

5) X_n a-t-elle une loi limite quand n devient grand ? Si oui, la calculer. Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle (et la limite) de la suite des π^n ?

6) L'éleveur est prêt à investir dans un second abreuvoir si, plus de la moitié du temps, il y a deux animaux en attente. Il reste un long moment à coté de l'abreuvoir après sa mise en service et observe la proportion de temps où deux animaux attendent. Que constate-t-il ? Doit-il installer un deuxième abreuvoir ?

Ex 10. Puissances de matrice et convergence de chaine

On étudie une chaine de Markov de graphe de transition



1) Déterminer sa matrice de transition π. La chaine est-elle irréductible ? Calculer les périodes des états.

2) La chaine a-t-elle une probabilité invariante ? Laquelle ?

3) Factoriser le polynôme caractéristique $\Pi(X)$ de π et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

4) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \pi^n$?

Ex 11. Existence d'une probabilité invariante

Soit π une matrice de transition sur un espace d'état E fini. On peut supposer sans perte de généralité que $E = \{1, 2, \cdots, N\}$. On note π' la transposée de π.

1) Montrer que π' admet 1 pour valeur propre.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de π, son module est inférieur ou égal à 1. On écrira $\pi v = \lambda v$ et on considérera la composante de module maximal du vecteur propre v.

3) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de module 1 de π' et si v est un vecteur propre associé, montrer que $w = (|v_1|, \cdots, |v_N|)$ est un vecteur propre de π' associé à la valeur propre 1. On provera d'abord que les $a_i = \sum_{j=1}^{N} \pi'(i,j)w_j - w_i$ sont positifs, puis que leur somme est nulle.

4) On a prouvé que toute chaine de Markov sur un espace d'états fini admet une probabilité invariante. Pourquoi ?