Chapitre II

Test du rapport de vraisemblance

Plan

On considère le modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$.

Objectif

Construire un test sur θ à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\theta$:
$H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$

Exemple 11

Une personne possède deux pièces : l'une est équilibrée, l'autre pièce donne "pile" avec une probabilité de 30%*. Elle choisit une de ces deux pièces, et on effectue 10 lancers. Elle obtient 4 fois pile. Comment déterminer quelle pièce a été utilisée ?*

$H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$

Définition 9

La statistique de test du rapport de vraisemblance est défini par

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \frac{L(X_1, \ldots, X_n, \theta_1)}{L(X_1, \ldots, X_n, \theta_0)}$$

Définition 10

Au niveau α, la zone de rejet est de la forme

$$\mathcal{R} = \{V(X_1, \ldots, X_n) \geq v_\alpha\}, \quad v_\alpha > 1$$

On reprend l'exemple des pièces truquées :

Exemple 12

On teste $H_0 : \theta = \theta_0 = 0.3$ *contre* $H_1 : \theta = \theta_1 = 0.5$.
La statistique du RV vaut

$$V(X_1, \dots, X_{10}) = \frac{\theta_1^{S_{10}}(1-\theta_1)^{10-S_{10}}}{\theta_0^{S_{10}}(1-\theta_0)^{10-S_{10}}}$$

La région de rejet vaut

$$\mathcal{R} = \{V(X_1, \dots, X_{10}) \geq v\} = \{S_{10} \geq k_\alpha\}$$

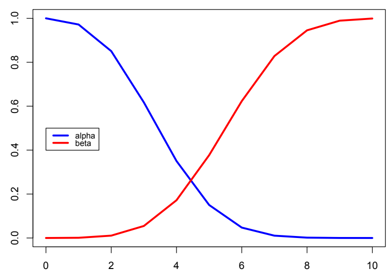
Pour $\alpha = 5\%$, *on prend* $k_\alpha = 6$ *et* $\mathcal{R} = \{S_{10} \geq 6\}$

Approche de Neyman Pearson

Idée

- Choisir les ensembles qui minimisent les risques α et β.
- Les risques α et β varient généralement en sens inverse : une diminution de l'un provoque une augmentation de l'autre.

Considérons l'exemple des pièces truquées : $H_0 : \theta = 0.3$ contre $H_1 : \theta = 0.5$. On a $\alpha = \mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k)$ et $\beta = \mathbb{P}_{0.5}(S_n \leq k - 1)$ où k est un seuil.



Approche de Neyman Pearson

- On fixe tout d'abord le risque maximal de première espèce ou niveau du test $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta (\mathcal{R})$, en général $\alpha = 5\%$, 10%, ...

La procédure de Neyman et Pearson consiste à chercher parmi toutes les régions critiques possibles, celle qui minimise le risque de seconde espèce ou encore qui maximise la puissance du test.

Théorème 2 (Neyman-Pearson)

Pour ***deux hypothèses simples*** *($H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$), le test du rapport de vraisemblance de taille α est* ***plus puissant*** *que tout autre test de niveau α.*

Démonstration.

□

Définition 11 (Test sans biais)

Un test est ***sans biais*** *si sa puissance est strictement supérieure à sa taille, i.e.*

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\mathcal{R}) > \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{R})$$

Propriété 3

Le test du rapport de vraisemblance est ***sans biais.***

Démonstration.

Exemple de test sur la moyenne

On considère un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ avec $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m inconnu et σ^2 connue. Soit m_0 une valeur donnée, on souhaite tester

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : m = m_1 \quad \text{avec} \quad m_1 > m_0$$

Statistique de test du RV

$$V(X_1, \dots, X_n) = e^{\frac{n}{2\sigma^2}\left(m_0^2 - m_1^2 + 2(m_1 - m_0)\overline{X}_n\right)}$$

Région de rejet

$$\mathcal{R} = \left\{\overline{X}_n \geq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right\} = \left\{\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma} \geq z_{1-\alpha}\right\}$$

où $z_{1-\alpha}$ désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple 13

On se propose de tester la qualité d'un lot important de pièces mécaniques. Soit X une caractéristique aléatoire de ces pièces dont la loi de probabilité est une $\mathcal{N}(m, 16)$. A la suite d'erreurs survenant lors de la fabrication de ces pièces, on ignore si m est égale à 20 ou $m = 22$. On doit néanmoins prendre une décision. Pour cela, on prélève dans un lot un échantillon aléatoire de 25 pièces. Quelle décision doit-on prendre ?

Plan

Test d'une hypothèse multiple contre une hypothèse multiple

Pour les tests composés, on désire déterminer un test qui soit optimal (dans le sens de Neyman-Pearson) pour toutes les valeurs possibles du paramètre inconnu, c'est-à-dire que, parmi tous les tests avec une taille égale où inférieure à α, soit le plus puissant pour toutes les valeurs possibles du paramètre inconnu.

Cas d'une hypothèse simple contre une hypothèse multiple

Le test d'hypothèses $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$ revient à tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1' : \theta = \theta_1 \text{ avec } \theta_1 > \theta_0$$

Remarque

Lorsque la zone de rejet dépend seulement du sens de l'inégalité $\theta_1 > \theta_0$ ou $\theta_1 < \theta_0$ mais pas de la valeur de θ_1, le test est dit uniformément plus puissant (UPP).

Test sur la moyenne

Considérons $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. avec $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec σ^2 connu. On souhaite tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m > m_0$.

Région de rejet

$$\mathcal{R} = \left\{ \overline{X}_n \geq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right\}$$

où $z_{1-\alpha}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha$ de $\mathcal{N}(0,1)$

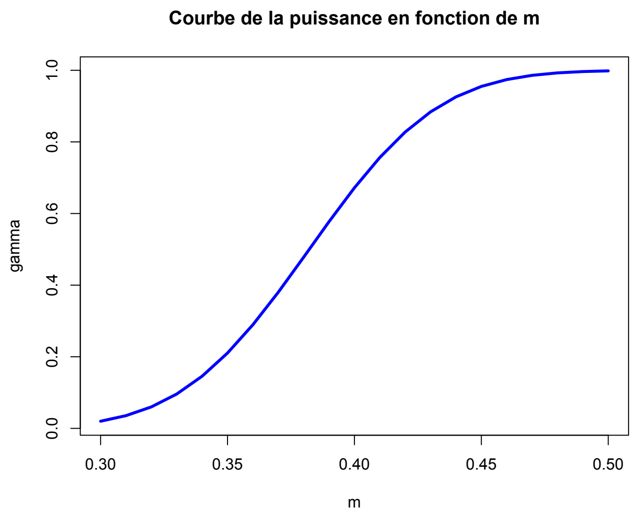
Le test est uniformément plus puissant : La puissance du test est définie pour $m > m_0$ par :

$$\gamma(m) = \phi\left(\frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha} \right)$$

Exemple 14

On dispose de lots de fromages, dont on veut tester la teneur en matière grasse. On sait que la teneur en matière grasse suit une loi normale de moyenne $m_0 = 30\%$ pour les fromages d'un certain type et de moyenne $m > m_0$ pour les autres ; l'écart type étant dans tous les cas 16%. Afin de choisir entre les deux hypothèses,
$H_0 : m = m_0 = 30\%$ contre $H_1 : m > m_0$, on prélève un échantillon aléatoire de 16 fromages. Donner la règle de décision et la fonction puissance du test sachant que le niveau est $\alpha = 0.02$.

Courbe de la puissance du test de l'exemple 14



Généralisation

On souhaite tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$ avec Θ_0 et Θ_1 des hypothèses multiples.
On peut utiliser l'estimateur du maximum de vraisemblance pour prendre une décision.

Définition 12 (Statistique de test)

La statistique de test du rapport de vraisemblance est définie par

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}$$

Région de rejet

$\mathcal{R} = \{V(X_1, \ldots, X_n) \geq v_\alpha\}$ avec $v_\alpha > 1$ choisi pour avoir $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha$.

On peut montrer que ce test est équivalent au test du rapport de vraisemblance maximal dont la statistique de test est définie par

$$\widetilde{V}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}$$