Espace vectoriels normés

Charles Vin

2021

1 Normes

Cadre : $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriels (e.v.) sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.
- $E = \mathbb{R}^n$
- $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} fonctions\}$
- $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$
- $E =$ ensemble des suites à valeur dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1. Une **norme** sur l'e.v E est une application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : &E \to [0; +\infty[\\ &x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

telle que $\forall x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

$(E, \|\|)$ est un espace vectoriel normé (e.v.n.)

Conséquence : Un e.v.n. $(E, \|\|)$ est un espace métrique pour la distance $E \times E \to [0; +\infty[, (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x_y\|$. En particulier $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x_y\|$

Exemple 1.2.
- $x \mapsto |x|$ norme sur $\mathbb{R} \to$ distance usuelle
- Sur $\mathbb{R}^n$
  - $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |p|^p)^{1/p}$ norme pour $p \geq 1$ (distance d_p)
  - $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ norme (distance d_∞)
- Sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$ e.v des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$
  - $\|f\|_p = (\int_{[a,b]} |f(x)|^p \, d\lambda(x))^{1/p}$ norme L^p pour $p \geq 1$
  - $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$ norme de la convergence uniforme

Attention : même sur un e.v. il y a des distances qui ne viennent pas d'une norme. Par exemple sur $E = \mathbb{R}^2$ la distance grossière $d(x, y) = \mathbb{1}_{x \neq y}$

Définition 1.2 (normes équivalente)**.** Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont **équivalente** s'il existe des constantes strictement positives a et b telles que

$$\forall x \in E, a \|x\| \leq \|x\|' \leq b \|x\| .$$

ou (moins important mais ce retrouve rapidement)

$$\forall x \in E, \frac{1}{b} \|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{a} \|x\|' .$$

Note. Les normes peuvent être vu comme des temps de déplacement. On peut aller 2 fois plus vite, cela donne deux normes différente, mais avec les mêmes propriétés, il peut même aller entre a et b fois plus vite, ce qui redonne l'inégalité ici.

Proposition 1.1. *Deux normes équivalentes induisent sur E deux distances qui donnent les mêmes voisinages, les mêmes voisinages, les mêmes fermés, les mêmes intérieurs et adhérences, les mêmes bornés, les mêmes suites convergences.*

Idée de preuve : $\|x-y\| < r \Rightarrow \|x-y\|' < b_r$ donc $B_{\|\|}(x,r) \subset B_{\|\|'}(x,b_r)$
$\|x-y\|' < r' \Rightarrow \|x-y\| < \frac{1}{a}r'$ donc $B_{\|\|'}(x,r') \subset B_{\|\|}(x,\frac{r'}{a})$
donc si A est voisinage de x pour l'une des normes il l'est pour l'autre. □

Théorème 1.2 ((admis))**.** *Si E est un e.v.n de dimension finie*
- *Toutes les normes sur E sont équivalentes*
- *Toutes les parties fermées bornées de E sont compactes*

2 Espaces de Banach

Définition 2.1 (Espace de Banach)**.** Un **espace de Banach** est un e.v.n complet. (toutes les suites de Cauchy convergent, pour la distance induite par la normes)

Exemple 2.1 (d'espace de Banach (admis))**.** .

- $(\mathbb{R}^n, \|\|)$ (pour n'importe quelle norme...)
- $C^0([a,b],\mathbb{R})$ est un Banach pour $\|\|_\infty$ (mais pas pour $\|\|_p$)

2.1 Pourquoi les Banach sont confortables ?

Dans un Banach la convergence normale (convergence absolue pour la norme) implique la convergence :

$$\text{Si } \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| \, (\in \mathbb{R}) < +\infty \text{ alors } \sum_{k=1}^{+\infty} x_k (\in E) \text{ existe}$$

Preuve :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq n_\epsilon, \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon$$
$$\|S_m - S_n\| \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon$$

$(S_n)_n$ est de Cauchy donc $(S_n)_n$ converge car $(E,\|\|)$ est complet. □

3 Produit scalaire, espace de Hilbert

Définition 3.1 (Produit scalaire)**.** Un **produit scalaire** sur l'e.v. E est une application

$$< \cdot,\cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto < \cdot,\cdot >$$

Propriétés :
- Bilinéaire :

$$\forall x \in E, y \mapsto < x,y > \text{ linéaire} \qquad \forall y \in E, x \mapsto < x,y > \text{ linéaire}$$

- Symétrie : $\forall x,y \in E, < x,y >=< y,x >$
- Définie positives : $\forall x \in E, < x,x >\geq 0 et < x,x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.1 Inégalité de Cauchu-Schawarz

Définition 3.2 (Inégalité de Cauchu-Schawarz)**.** Si $(E, < \cdot,\cdot >)$ est un espace préhilbertien

$\forall x,y \in E, |< x,y >| \leq \sqrt{< x,x >}\sqrt{< y,y >}$
avec égalité si x et y sont liés ($\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}, \alpha x + \beta y = 0$)

Preuve :
$$0 \leq < x + \lambda y, x + \lambda y > = < x, x > +2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > .$$
Equation du second degrés de discriminant négatif (car équation positive) : $4 < x, y >^2 -4 < x, x >< y, y > \leq 0$ □

Corollaire. *Tout espace préhilbertien est un e.v.n pour la norme* $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ *(et on retrouve la forme habituelle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Preuve : A faire seul, pas trop dur, il faut utiliser Cauchy-Schwarz pour l'inégalité triangulaire. □

Définition 3.3 (Espace de Hilbert)**.** Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien $(E, < \cdot, \cdot >)$ qui est complet pour la norme $\|\cdot\| = \sqrt{< \cdot, \cdot >}$ (i.e. qui est un Banach)

Résumé de tous nos espaces

(E, d) espace métrique → Si les suite de cauchy convergent → (E, d) Espace métrique complet
$\Downarrow d(x, y) = \|x - y\|$
$(E, \|\cdot\|)$ e.v.n → Si les suite de cauchy convergent → Espace de Banach
$\Downarrow \|x\| = \sqrt{< x, x >}$
$(E, < \cdot, \cdot >)$ préhilbertien → Si les suite de cauchy convergent → Espace de Hilbert

4 Application linéaires

Rappel : f linéaire de l'e.v. E vers l'e.v E' si
$$\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Proposition 4.1. *Pour f linéaire de E vers $(E', \|\|')$ les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *f est continue sur E*
2. *f est continue en un point x de E*
3. *f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}_{\|\|}(0, 1)$*
4. *Il existe une constante K telle que $\forall x \in E, \|f(x)\|' \leq K \|x\|$*
5. *f est lipschitzienne*

Idée de preuve : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$

$$\|f(x) - f(y)\|' = \|f(x - y)\|' = \left\| \|x - y\| f(\frac{x - y}{\|x - y\|}) \right\|' \text{ car } x - y = \|x - y\| \frac{x - y}{\|x - y\|} (= 1)$$
$$| \|x - y\| | \left\| f(\frac{x - y}{\|x - y\|}) \right\|'$$
$$\leq \|x - y\| \sup\{\|f(u)\|', u \in E \text{ tel que } \|u\| \leq 1\}$$
$$\leq \|x - y\| \sup_{\bar{B}_{\|\|}(0,1) \|f\|'} \text{(le sup = constante de lipschitz)}$$

□

Corollaire. *Si f est une application linéaire sur un e.v.n. de dimension finie, alors f est continue*

Preuve : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ base de l'e.v. et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\|f(x)\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|' \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|' \text{(la somme représente la constante de lipschitz)}$$

□

Théorème 4.2 (de Riesz (admis))**.** *Si $(E, <\cdot, \cdot>)$ est un espace de Hilbert, toute forme (application à valeur dans $\mathbb{R}$) linéaire continue sur E est le produit scalaire avec un vecteur de E fixé :*

$$\forall f : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire continue}, \exists x_f \in E, f : \begin{aligned} &E \to \mathbb{R} \\ &y \mapsto f(y) = < x_f, y > m \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} &E \to E^* = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire continues}\} \\ &x \mapsto \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto < x, y > \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une bijection.