Université de Lille | Département de Mathématiques | M.Fradon
MIASHS L3 S5 | **Analyse et Probabilités Approfondies** | 2021-2022

Fiche 2 Mesures et intégrales

Ex 1. Tribu, expérience, information

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

2) Une personne lance le dé et nous annonce le résultat tiré. Ecrire la tribu $\mathcal{F}_2$ de tous les évènements observables pour nous.

3) La personne lance le dé et nous annonce seulement "pair" ou "impair". Ecrire la tribu $\mathcal{F}_1$ des évènements observables pour nous.

4) La personne lance le dé et n'annonce rien ! A quelle la tribu $\mathcal{F}_0$ correspond cette fois l'expérience que nous observons ?

5) On dit que $(\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En quoi est-elle croissante ? Qu'est-ce qui augmente, intuitivement, le long de cette suite ? Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que représente la tribu $\mathcal{F}$?

6) La modélisation mathématique des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils sont munis de tribus $\mathcal{F}_t$ indexées par la date et contenant tous les événements observables de l'origine jusqu'à la date t. L'affirmation $\mathcal{F}_{2\text{ janvier }2020} \subset \mathcal{F}_{31\text{ mars }2022}$ est considérée par les quants comme une évidence. Pourquoi ? Quelle capacité (réaliste ?) présuppose ce choix de modélisation ?

Ex 2. Construire sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ la tribu engendrée par $\{2, 4\}$. A quelle expérience et quelle information peut correspondre cette tribu ?

Ex 3. Construire la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par les singletons.

Ex 4. Prouver que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$, et que toutes les parties de $\mathbb{N}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$

Ex 5.

1) Quelles sont les applications mesurables sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu engendrée par $\{2, 4\}$? Et sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu engendrée par $\{2, 4\}$ et $\{1\}$?

2) A quelles informations correspondent ces deux tribus ?

Ex 6.

1) Construire la plus petite tribu sur $\mathbb{N}$ contenant l'ensemble des nombres pairs.

2) Quelles sont les applications mesurables sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu engendrée par l'ensemble des nombres pairs.

3) Même question pour $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Ex 7. **Modèle binomial (Cox-Ross-Rubinstein)**

Sur l'ensemble $\Omega = \{0,1\}^3$ on note U_1, U_2 et U_3 les trois fonction coordonnées : U_k est la fonction qui à ω associe sa $k^{\text{ième}}$ coordonée.

1) Quelle est la plus petite tribu qui rend mesurable la fonction U_1 ? On la note $\sigma(U_1)$.

2) Construire la plus petite tribu $\sigma(U_1, U_2)$ qui rend mesurables à la fois la fonction U_1 et la fonction U_2 ?

3) Quelle est la plus petite tribu $\sigma(U_1, U_2, U_3)$ qui rend mesurables les trois fonction coordonnées ?

4) A quelles informations correspondent ces deux tribus ?

Ex 8.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver les affirmations suivantes :

1) Si $A \subset B$ avec $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

2) Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ sont des parties mesurables, alors $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

Remarque : Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ il n'est pas toujours vrai que $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. Donner un contre-exemple. Expliquer dans quel cas c'est vrai.

3) Pour toute suite A_1,A_2,$\cdots$ de parties mesurables $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$

Ex 9. **"la suite de v.a. converge vers a" est un évènement**

$(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, toutes $\mathcal{F}$-mesurables, et a est un réel fixé. Montrer que $\{\omega \in \Omega \;;\; \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = a\}$ est une partie $\mathcal{F}$-mesurables de Ω.

Ex 10. $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, toutes $\mathcal{F}$-mesurables. Que signifie ici la croissance ? Montrer que la limite simple de cette suite est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable.

Ex 11. **Les disques sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$**

Prouver que le disque unité ouvert est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

Indication : il suffit de montrer qu'un quart du disque est un borélien, et si $x^2 + y^2 < 1$ il existe un entier n tel que $x^2 + y^2 + \frac{1}{2^n} < 1$ et un entier k entre 1 et $2^n - 1$ tel que $\frac{k-1}{2^n} \leq x^2 < \frac{k}{2^n}$.

Ex 12.

On définit la mesure $\mu = \delta_1 + \delta_2$ sur $\mathbb{R}$ (muni, c'est toujours sous-entendu, de la tribu borélienne). Ecrire pour cette mesure :

1) ce qu'est l'intégrale d'une fonction,

2) le plus grand ensemble négligeable possible,

3) l'inégalité de Markov (vérifier qu'elle est triviale ici),

4) l'inégalité de Hölder,

5) l'inégalité de Jensen (attention, piège : contournez-le !).

Ex 13.

Prouver que pour toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions positives mesurables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_\Omega f_n \, d\mu\right) = \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) \, d\mu$$

Ex 14.

Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2} \, dx$.

Ex 15. Les fonctions positives d'intégrale nulle sont presque surement nulles

Soit f une fonction mesurable positive d'intégrale égale à zéro. Prouver que $\mu(\{f > 0\}) = 0$. On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

Ex 16. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $\int_0^1 \frac{n\cos(x)}{1+n^2x^{3/2}} \, dx$.

Ex 17. Rappeler ce que vaut l'intégrale par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ d'une fonction f positive. A quelle condition une fonction f est-elle intégrable ?

Etudier la convergence de la suite des $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(n!)}{(k!)(n!)+kn}$ en utilisant le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

Ex 18. Gentil petit contre-exemple

Sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, on considère la suite des fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{]0;\frac{1}{n}[}$. La représenter graphiquement. Déterminer sa limite. Comparer la limite des intégrales des f_n et l'intégrale de la limite des f_n. Cette suite de fonction est-elle monotone ? Est-elle dominée ?

Ex 19. Extrait de la preuve que l'intégrale stochastique ne dépend pas de la suite d'approximations choisie

Démontrer que tout suite de variables aléatoires dont la série des moments d'ordre deux converge tend presque surement vers 0. Autrement dit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E(V_n^2) < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad P(\lim_{n\to+\infty} V_n = 0) = 1$$

Indication : Majorer la probabilité que la suite ne tende pas vers 0 en exprimant cet évènement comme unions et intersections des évènements $\{|V_n| \geq 1/k\}$ et en utilisant l'inégalité de Markov.

Ex 20. Points cardinaux

Pour modéliser un déplacement aléatoire, on utilise l'ensemble $\Omega = \{N, S, E, W\}$ des quatre directions : nord, sud, est et ouest. On définit sur Ω

- une fonction f qui quantifie la variation de longitude : $f(N) = f(S) = 0$ et $f(E) = -1$ et $f(W) = 1$
- une fonction g qui mesure la distance parcourue : $g(N) = g(S) = g(E) = g(W) = 1$

1) Soit $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur Ω qui contient $\{N, S\}$. donner la liste des éléments de $\mathcal{F}$.
2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Les fonctions f et g sont-elles $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier)
3) Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de Ω vers $\mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables.

Ex 21. Sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{1\}$ et $\{2,3\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier)

— la fonction f définie sur Ω par $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $f(4) = f(5) = f(6) = 1$
— la fonction g définie sur Ω par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6) = 2$

Ex 22. On rappelle que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}^*$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$.

1) Rappeler pour quels réels α la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

2) En utilisant le théorème de convergence monotone (Beppo Levi), calculer la limite quand n tend vers l'infini de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{n+1}{n}}$

Ex 23. Tribu et fonctions mesurables

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{-2,-1,0\}$ et $\{0,1,2\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier).

— la fonction nulle : $\forall \omega \in \Omega \quad f_0(\omega) = 0$
— la fonction identité : $\forall \omega \in \Omega \quad f_1(\omega) = \omega$
— la fonction signe : $f_2(-2) = -1, \quad f_2(-1) = -1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(2) = 1$

Ex 24. En utilisant le théorème de convergence dominée pour la mesure de Lebesgue, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \, dx$$

Ex 25. Convergence d'intégrales

En utilisant le théorème de convergence monotone pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right) dx$$

Ex 26. Convergence de séries

On rappelle (cf fiche 1 ex 21) que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k$$

Ex 27. On rappelle que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \; d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. Calculer, en justifiant les calculs, la limite quand n tend vers l'infini de la somme de la série $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k}$

Ex 28. Et pour aller plus loin : prouvons le théorème de convergence monotone. . .

Le but de cet exercice est de démontrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors

$$\int_{\Omega} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

1) On définit la fonction $f_\infty = \lim_{n\to+\infty} f_n$ à valeurs dans $[0;+\infty]$. En considérant pour chaque $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $f_\infty^{-1}(]-\infty;t])$, prouver que cette fonction est mesurable.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \; d\mu \leq \int_{\Omega} f_\infty \; d\mu$

3) Pour toute fonction étagée telle que $\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i} \leq f_\infty$ on note

$$E_{n,j} = \left\{ \omega \in \Omega \; ; \; (1 - \frac{1}{j}) \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \leq f_n(\omega) \right\}$$

En remarquant que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a $\int_{\Omega} f_n \; d\mu \geq \int_{\Omega} f_n \mathbf{1}_{E_{n,j}} \; d\mu$ et que la suite des $(E_{n,j})_{n\geq 1}$ est croissante (que vaut leur union ?), prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \; d\mu \geq \int_{\Omega} f_\infty \; d\mu$

Ex 29. . . . et le théorème de convergence dominée

Notre but ici est de démontrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers une limite f_∞ et dominée uniformément par une fonction intégrable g, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} |f_n - f_\infty| \; d\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\Omega} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque $\omega \in \Omega$ on note $g_n(\omega) = \inf\{h_n(\omega), h_{n+1}(\omega), h_{n+2}(\omega), \ldots\}$ où les h_k sont les fonctions définies par $h_k = 2g - |f_\infty - f_k|$. Prouver que g_n est (mesurable et) intégrable.

2) En utilisant le théorème de convergence monotone, déterminer la limite des intégrales des g_n.

3) Déduire de l'inégalité $h_n \geq g_n$ la limite de la suite des intégrales des h_n et conclure.