Plan

Test de conformité de la moyenne

Exemple 7

A la suite d'un traitement (régime alimentaire) sur une variété de vaches, on prélève un échantillon de 5 individus et on les pèse. On obtient les poids suivants (en kg) :

$$83, \ 81, \ 84, \ 80, \ 85.$$

On suppose que les x_i sont des réalisations de variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale. On sait que le poids moyen de cette variété de vaches est de 87.6 kg avec un écart-type de $\sqrt{10}$ kg. Le régime alimentaire a-t-il eu un impact sur le poids moyen ?

Test de conformité de la moyenne

Contexte : On considère $x_1, \ldots, x_n$ des réalisations de v.a. i.i.d $X_1, \ldots, X_n$ avec $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m inconnu et σ^2 connue.
Soit m_0 une valeur donnée, on souhaite tester

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : m \neq m_0$$

Construction de la statistique de test :

On a la statistique

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}$$

Sous H_0,

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Test de conformité de la moyenne

Pour trouver la valeur critique c, on fixe $\alpha \in]0,1[$ avec

$$\mathbb{P}_{m_0}\left(|\overline{X}_n - m_0| \geq c\right) = \alpha$$

Zone de rejet

La zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{|Z| \geq z_{1-\alpha/2}\},$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Règle de décision

- ☛ Si $Z(\omega) \in \mathcal{R}$, on rejette H_0
- ☛ Si $Z(\omega) \notin \mathcal{R}$, on ne rejette pas H_0.

Test de conformité de la moyenne

Remarque 4

Faire ce test revient à vérifier que m_0 est dans l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$,

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Si $m_0 \in IC_{1-\alpha}(m)$, on rejette pas H_0 et inversement.

Exemple 8

Reprenons l'exemple des poids des vaches.

Test de $H_0 : m \leq m_0$ contre $H_1 : m > m_0$

Zone de rejet

La zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{Z \geq z_{1-\alpha}\},$$

où $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Règle de décision

- ☛ Si $Z(\omega) \in \mathcal{R}$, on rejette H_0
- ☛ Si $Z(\omega) \notin \mathcal{R}$, on ne rejette pas H_0.

Résumé

Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec σ^2 connu. Si $m = m_0$, on a

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Région de rejet :** $\mathcal{R}$
$m \leq m_0$	$m > m_0$	$\{Z \geq z_{1-\alpha}\}$
$m \geq m_0$	$m < m_0$	$\{Z \leq -z_{1-\alpha}\}$
$m = m_0$	$m \neq m_0$	$\left\{\lvert Z\rvert \geq z_{1-\alpha/2}\right\}$

Exemple 9 (On reprend l'exemple des vaches.)

Un biologiste affirme que le régime augmente le poids des vaches. On souhaite tester cette affirmation avec un risque de 5%*. Donner les hypothèses du test et la zone de rejet du test.*