Tentative de résumé du cours de Simulation

Charles Vin

1 La fonction quantile

Fonction quantile = inversion de la fonction de répartition

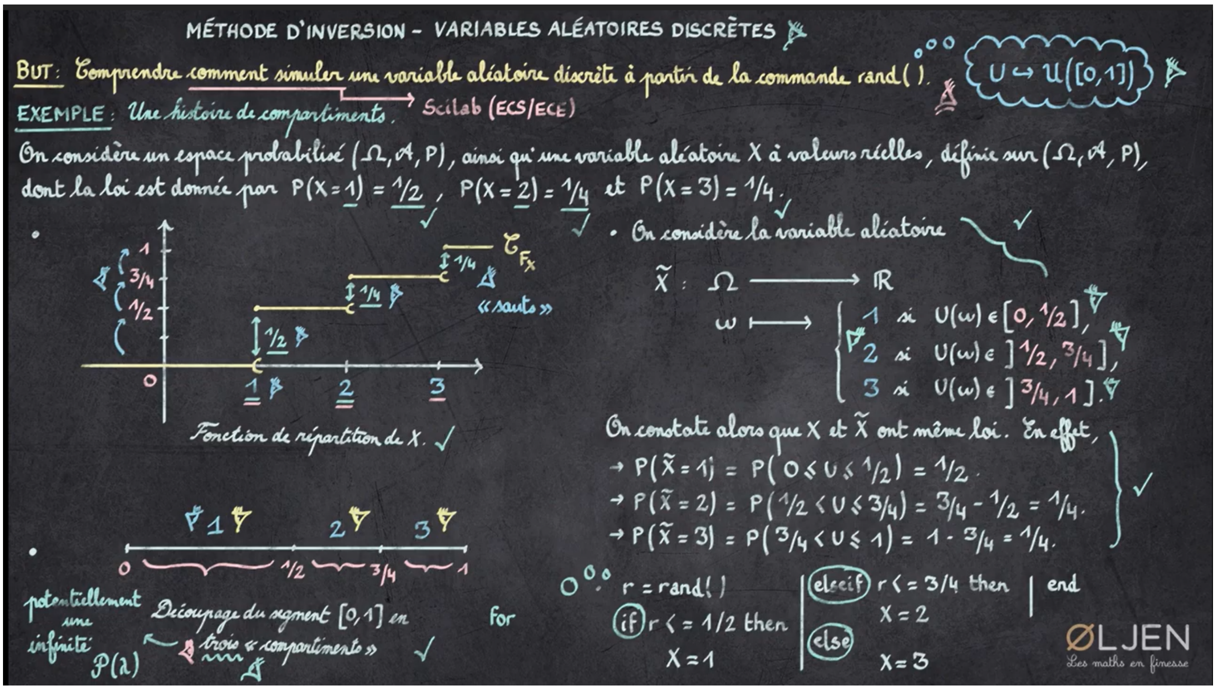

Figure 1 – Pour gerer les sauts des truc discret

Méthode : Je pense que y'a qu'en le faisant que j'arriverai il faut bien comprendre la formule et l'appliquer

$$
\begin{aligned}
F_x^{-}1 :&]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\
&\alpha \mapsto F_X^{-}1(\alpha) = \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\}
\end{aligned}
$$

Graphiquement

— Sur le graphique de la fonction de répartition, on place α sur l'ordonnée.
— On vas faire varier α
— Avec $\alpha \in [...,...]$ sur quelle intervalle $F_X \geq \alpha$
— Puis prendre l'$\inf$, la borne inférieur de cette intervalle

On peut le faire analytiquement aussi quand F_X est continue strictement croissante (=bijective). Typiquement (pour loi $\mathcal{E}xp$)

$$
\begin{aligned}
\forall \alpha \in]0;1[, F_X^{-}1 &= \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, F_X(t) \geq x\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, 1 - e^{-\lambda t} \geq x\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, t \geq \frac{\ln(1-\alpha)}{-\lambda}\} = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

2 Méthode du rejet

f_X densité à simuler, c constante, g_X densité d'une va qu'on sait simuler.

Théorème 1. *Soient f et g deux densité de probabilité, X de densité g , telles qu'il existe une constante c vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq cg(x).$$

Si $c * U_i * g(X_i) < f(X_i)$, X a pour densité f ($U \sim Unif(]0,1[)$).
U_i, X_i tirage des lois

Le nombre de tirage nécessaire pour atteindre la condition précédente suit une loi $Gom(\frac{1}{c})$
Méthode pour les exos :

- J'pense dessiner la courbe c'est pas mal
- Voir qu'on peut majorer easy par une constante + une loi uniforme
- *Exemple pour une densité avec* $max = \frac{1}{2} \Rightarrow c * g = 2 * \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,4]}$
- Pour simuler
  - On tire successivement V1, V2, V3,. . .indépendants tous de même loi que V , ce qui est facile en prenant Vi = ... où les Wi sont i.i.d. de loi uniforme sur]0 ; 1[.
  - On tire aussi successivement U1, U2, U3,. . .de loi uniforme sur]0 ; 1[, indépendants entre eux et indépendants des Vi.
  - On garde le premier Vi tel que
$$c * f_V(V_i) * U_i \leq f(V_i).$$
- Puis simplifier la condition avec les fonctions trouvé (car la loi uniforme tombe toujours dans l'intervalle des indicatrice)
- *text*

3 Simulation particulière de loi spécifiques

Anki