Simulation

Charles Vin

2021

1 Rappel

Y'a le word océane si je paume mes feuille. Je vais résumer ici :

- Loi de X : $P_X(B) = P(X \in B)$
- Fonction de répartion et ses propriété : $F_x(t) = P(X \leq t)$ "Avoir la répartion des choses" exemple : quel proportion de la population à un revenu inférieur à t"
  - Croissante
  - Caractérise la loi
  - Continue à droite avec une limite à gauche en tout point (cadlag) $\lim_{x \to a^+} F_X(a) = F_X(a)$
  - Toute fonction cadlag de lim 0 en -inf et 1 en +inf est une fonction de répartion d'une var.

  Exemple dans mon cours papier mdr je sais pas si je le retrouverai le moment venu
- Discète == dénombrable = on peut définir une suite
- Densité == Fonction de répartion continue
- Densité $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$
  - N'est pas unique
  - == dérivé de la fonction de répartion
- Quand on cherche $P(X = x)$ on regarde les sauts de la fonction de répartion sinon c'est toujours égal à 0 comme c'est $\int_x^x f_X(y)dy$
-

Je reprend tout le cours à fonc à partir d'ici

2 Simulation par inversion de la fonction de répartion

2.1 Cas simple :

On veux simuler une va X. Sa fonction de répartion est **continue, strictement croissante**

$$F_X : R \to]0,1[$$
$$: t \to F_X(t)$$

Comme continue, stric. croissante $\to$ Bijective (one to one) : F_X^{-1} $:]0,1[$ C'est la **fonction quantile**. Par exemple :

$$F_X^{-1}(\frac{1}{4}) \Leftrightarrow_{Premierquantile} F_X(t) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(X \leq t) = \frac{1}{4}.$$

Médiane (quantile à 50 pourcent)

$$F_X^{-1}(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow P(X \leq t) = \frac{1}{2}.$$

$F_X^{-1}(\alpha)$ est le quantile d'ordre α de X.

Que donne la fonction quantile pour un quantile tiré au hasard ?
Quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$ avec $U \sim Univ(0,1)$? Calculons sa fonction de répartion

$$P(F_X^{-1}(U) \leq t) =_{\text{On applique} F_X()} P(U \leq F_X(t)).$$
$$= F_U(F_X(t)) \in [0,1] = F_X(t), \forall t \in R.$$

F_X^{-1} et X ont les mêmes loi car même fonction de répartition

Théorème 2.1. *Si $I \sim Unif(]0,1[)$ alors $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X.*

Exemple 2.1 (Simulation de la loi de Cauchy (0,1)). Soit $X \sim Cau(0,1)$ de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in R, F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}[\arctan x]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\pi}(\arctan t - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\arctan t}{\pi + \frac{1}{2}}.$$

$F_X($ est continue strictement croissante car arctan l'est

$$\forall \alpha \in]0,1[, F_X(t) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\arctan t}{\pi} + \frac{1}{2} = \alpha \Leftrightarrow \arctan t = \pi(\alpha - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow t = tan(\pi(\alpha - \frac{1}{2})) = F_X^{-}1(\alpha).$$

Si $U \sim Unif(]0,1[)$ alors $\tan(\pi(U - \frac{1}{2})) \sim Cau(0,1)$

2.2 Cas Général : fonction de répartition quelconque

Définition 2.1 (La fonction quantile). La **fonction quantile** de la v.a de X (aussi appelée pseudo-inverse de la fonction croissante F_X) est la fonction :

$$\begin{aligned} F_x^{-}1 :&]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & \alpha \mapsto F_X^{-}1(\alpha) = \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Si F_X est bijective i.e continue strictement croissante, $F_X^{-}1$ est bien la réciproque de F_X :

$$\forall \alpha \in]0,1[, F_X(F_X^{-}1(\alpha)) = \alpha.$$

$$\text{et } \forall t \in R, F_X^{-}1(F_X(t)) = t.$$

Si F_X n'est pas bijective, il y a des α et des t pour lesquels ces inégalités ne sont plus vraies et $F_X^{-}1$ n'est pas la réciproque de F_X, mais la fonction quantile $F_X^{-}1$ reste bien définie sur]0,1[.

Visualisation graphique :

La où F_X est continue strictement croissante :

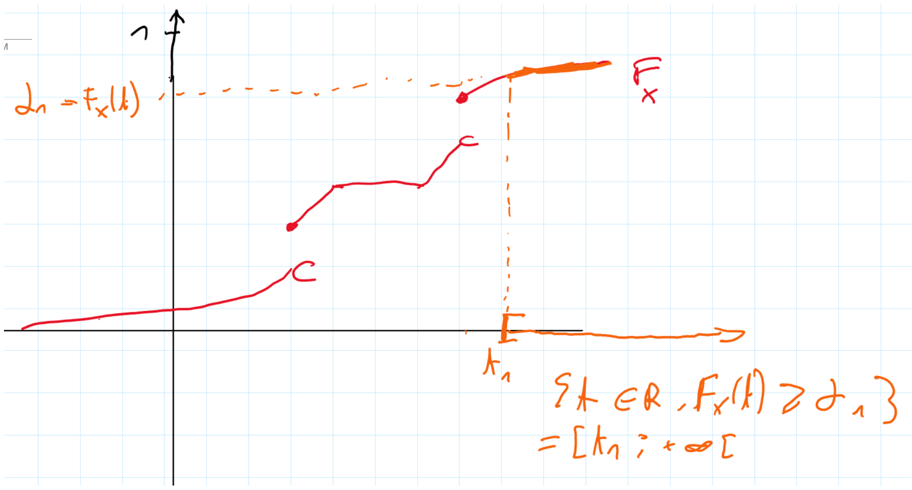

Figure 1 – La où F_X est continue strictement croissante

$$F_X^{-}1(\alpha_1) = inf(t \in R, F_X(t) \geq \alpha_1) = inf([t_1; +\infty[) = t_1.$$

Ici : $F_X^{1}(F_X(t_1)) = t_1$ et $F_X(F_X^{-}1(\alpha_1)) = \alpha 1$

Là où F_X n'est strictement croissante (plateau)

$$F_X^{-}1(\alpha_2) = \inf(t \in R, F_X(t) \geq \alpha_2) = t_2' < t_2.$$

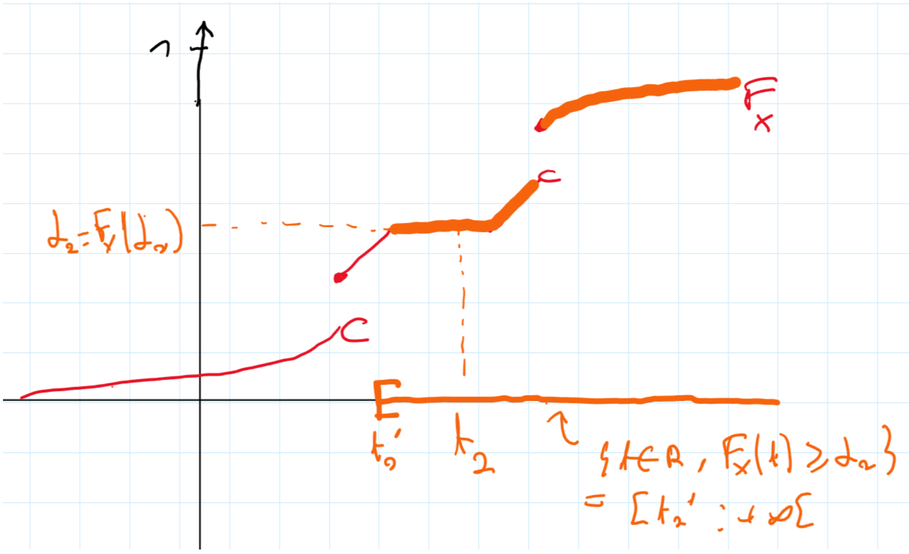

Figure 2 – Là où F_X n'est strictement croissante (plateau)

Ici : $F_X^1(F_X(t_2)) < t_2$ et $F_X(F_X^-1(\alpha_2)) = \alpha 2$

Là où F_X est discontinue (saut)

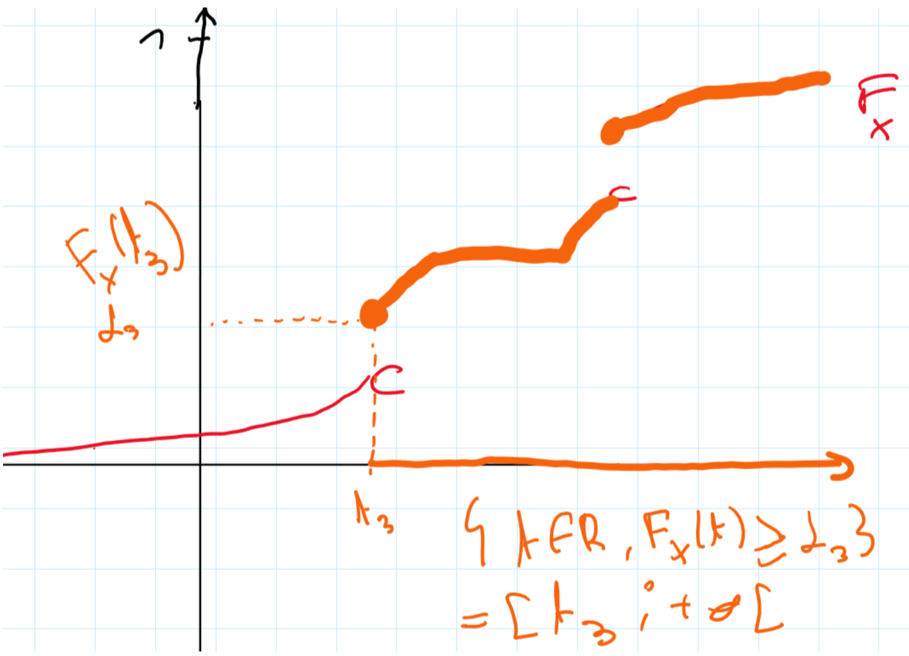

Figure 3 – Là où F_X est discontinue (saut)

$$F_X^-1(\alpha_3) = \inf(t \in R, F_X(t) \geq \alpha_3) = t_3.$$

Ici : $F_X^1(F_X(t_3)) < t_3$ et $F_X(F_X^-1(\alpha_3)) > \alpha 3$

On a toujours

$$\forall t \in R, F_X^-1(F_X(t)) \leq t.$$

et $\forall \alpha \in]0;1[, F_X(F_X^-1(\alpha)) \geq \alpha.$

Mais ces inégalité peuvent être strictes en certain t ou α.

La fonction quantile :

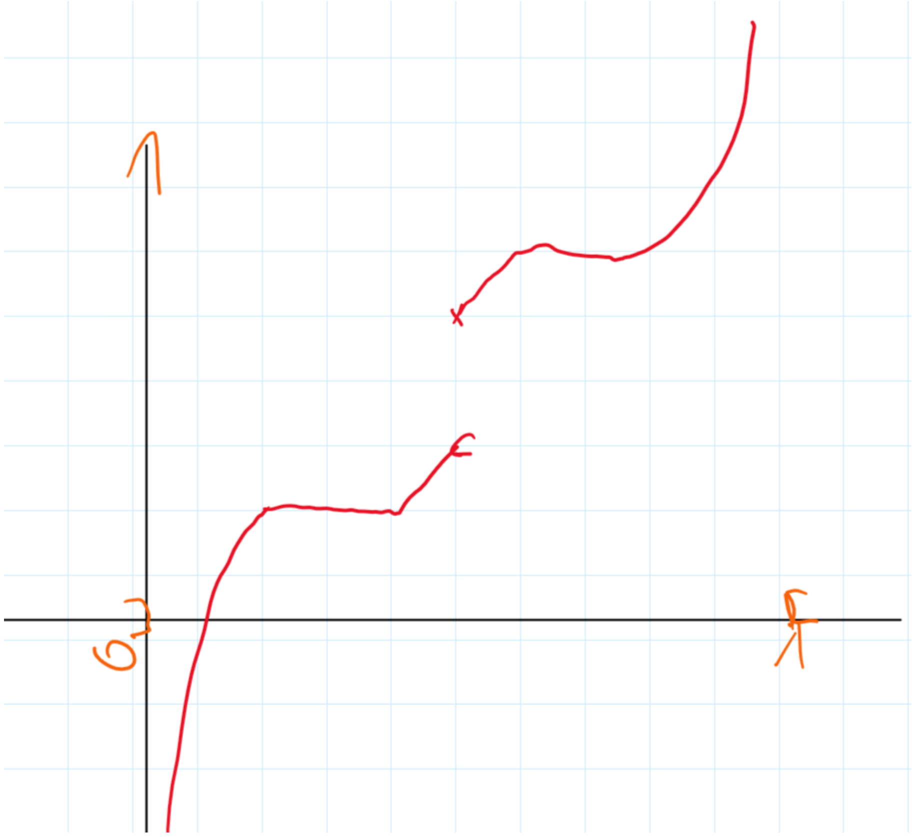

Figure 4 – La fonction quantile

Théorème 2.2. *Pour toute v.a X si $U \sim Unif(]0;1[])$ alors $F_X^{-}1$ a même loi que X. On simule X en prenant le quantile d'une valeur choisie au hasard entre 0 et 1.*

Preuve : On a $F_X^{-}1(\alpha) \leq t \Leftrightarrow \leq F_X(t)$ car si $\alpha \leq F_X(t)$ alors $t \in \{s \in R, F_X(s) \geq \alpha\}$ donc $t \geq \inf\{s \in R, F_X(s) \geq \alpha\} = F_X^{-}1(\alpha)$. La réciproque est vrai aussi (exo).
Si $U \sim Unif(]0,1[)P(F_X^{-}1(U) \leq t) = P(U \leq F_X(t)) = F_X(t)$ car $F_X(t) \in [0,1]$ donc $F_X^{-}1(U)$ et X ont même fonction de répartition. $\square$

Exemple 2.2 (Simulation des lois exponentielles)**.** $X \sim Exp(\lambda)$ si
— X a pour densité : $X \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \not\Vdash_{x>0}()$
— X a pour fonction de répartition $(1 - e^{-\lambda x}) \not\Vdash_{x>0}()$
F_X n'est pas bijective

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in]0;1[, F_X^{-}1 &= \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, F_X(t) \geq x\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, 1 - e^{-\lambda t} \geq x\} \\
&= \inf\{t \in R_*^+, t \geq \frac{\ln(1-\alpha)}{-\lambda}\} = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}
\end{aligned}$$

Si $U \sim Unif(]0;1[)$ alors $\frac{-\ln(1-U)}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$.
On vérifie facilement que $U \sim Unif(]0;1[) \Leftrightarrow 1_U \sim Unif(]0;1[)$
Conclusion : Si

$$U \sim Unif(]0;1[), \frac{-\ln(U)}{\lambda} \sim Exp(\lambda).$$

Exemple 2.3 (du temps d'attente de la personne ponctuelle)**.**

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \quad 0 \\ \frac{t+5}{20} \text{ si } 0 \leq t \leq 15 \\ 1 \text{ si } t \geq \quad 15 \end{cases}.$$

Si $\alpha \in]0; 1/4]$ (on peut prendre le 1/4 ça marche)

$$F_X^- 1(\alpha) = \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\} = \inf\{[0; +\infty[\} = 0.$$

Si $\alpha \in]1/4; 1[$:

$$F_X^- 1(\alpha) = \inf\{t \in R, F_X(t) \geq \alpha\} = \inf\{t \in R, \frac{t+5}{20} \geq \alpha\} = 20\alpha - 5.$$

Voir graph dans le cours de quelqu'un.
Si $U \sim Unif(]0, 1[)$

$$F_X^- 1(U) = (20U - 5)\nVdash_{U>1/4}() = \max(0, 20U - 5) \text{ à même loi que } X.$$