Rappels sur la loi normale

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant des lois normales de moyennes $m_1, , \dots, \sigma^2$ et de variance $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

Propriété 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de moyennes $m_1, \dots, m_n$ et de variance $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Alors toute combinaison linéaire des X_i suit une loi normale. Plus précisément, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors

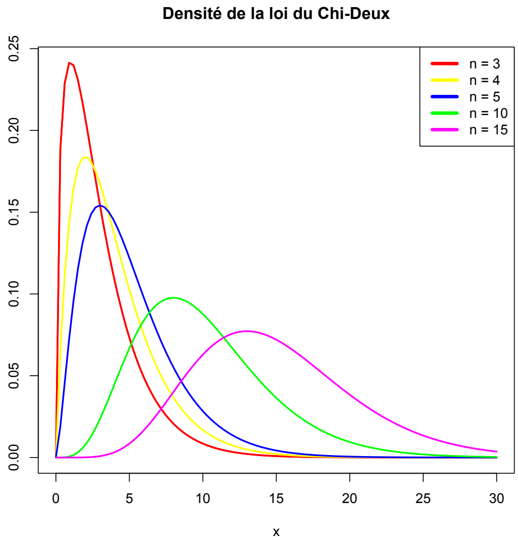
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \textit{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \quad \textit{et} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_i^2 .$$

Définition 7

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée et réduite. Alors la variable aléatoire

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

suit une ***loi du Khi-deux à n degrés de liberté****. On note $Z_n \rightsquigarrow \chi^2(n)$.*

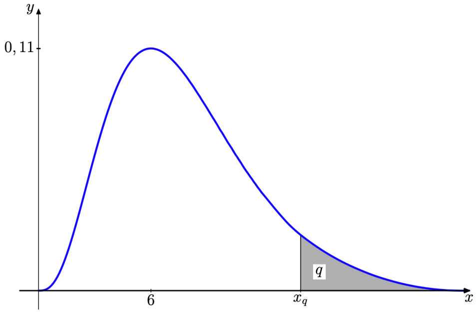


Remarque

La densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$

Fonction de répartition

Soit X une v.a. distribuée suivant la loi de χ^2 à d degrés de liberté. La table donne les valeurs de $\mathbb{P}(X > x_q) = q$.



Si $X \rightsquigarrow \chi^2(d)$, la table donne les quantiles d'ordre $1 - q$, donc les valeurs $x_q = \chi^2_{d;1-q}$ telles que :

$$\mathbb{P}(X \leq \chi^2_{d;1-\alpha}) = 1 - q$$

Table des valeurs du réel x_q tel que $P(X_d > x_q) = q$, pour X_d de loi $\chi^2(d)$

d \ q	0,999	0,995	0,990	0,975	0,95	0,90	0,50	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,002	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,024	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,091	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750	20,515
6	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,124
9	1,152	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264
12	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	32,909
13	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252
17	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790
18	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312
19	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820
20	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315
21	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797
22	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268
23	7,529	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728
24	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559	51,179
25	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620
26	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052
27	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	55,476
28	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892
29	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301
30	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703

Si $X \rightsquigarrow \chi^2(10)$ alors $\mathbb{P}(X > 18.307) = 0.05$ signifie $\chi^2_{10,0.95} = 18.307$.

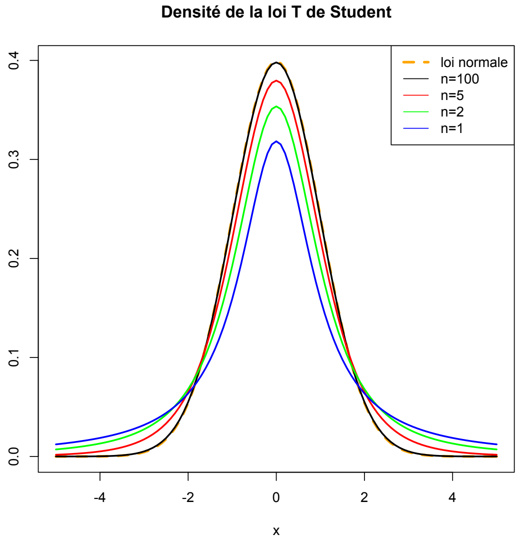
Loi de Student

Définition 8

Soient Z et U des variables aléatoires indépendantes telles que $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $U \rightsquigarrow \chi^2(n)$, alors la variable aléatoire

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}}$$

suit une ***loi de Student à n degrés de liberté****. On note $T \rightsquigarrow T(n)$.*


Densité de la loi T de Student
loi normale
n=100
n=5
n=2
n=1
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-2
0
2
4
x

Propriété 2

Soit T_n une variable aléatoire suivant une loi de Student à n degrés de liberté. Si $n \geq 2$, alors :

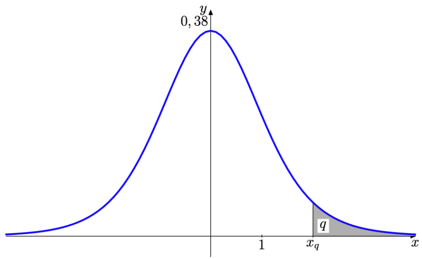
1. *T_n admet un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(T_n) = 0$.*
2. *La loi de Student est symétrique en 0.*
3. *On a la convergence en loi*

$$T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Quand le degré de liberté n est grand, on peut approcher la loi de Student par une loi normale centrée et réduite.

Fonction de répartition

Soit U une v.a. distribuée suivant la loi de Student à d degrés de liberté. La table donne les valeurs des réels x_q telles que $\mathbb{P}(U > x_q) = q$.



Si $U \rightsquigarrow T(d)$, la table donne les quantiles d'ordre $1 - q$, donc les valeurs $t_{d;1-q}$ telles que :

$$\mathbb{P}(U \leq t_{d;1-q}) = 1 - q$$

Table des valeurs x_q telles que $P(U_d > x_q) = q$, pour U_d de loi de Student à d degrés de liberté

d \ q	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626

Si $U \rightsquigarrow T(8)$, alors $\mathbb{P}(U > 1.860) = 0.05$, signifie $t_{8,0.95} = 1.860$

Théorème 1 (Théorème de Student)

Soient $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d avec* $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. *On pose* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *et* $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$.

1. *La moyenne* $\overline{X}_n$ *et la variance empirique* S_n^2 *sont indépendantes.*
2. $\overline{X}_n$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
3. $(n-1)\dfrac{S_n^2}{\sigma^2}$ *suit la loi du Khi-deux à* $n-1$ *degrés de liberté.*

Corollaire 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d avec* $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. *La v.a.* $T = \dfrac{\sqrt{n}}{S_n}\left(\overline{X}_n - m\right)$ *suit la loi de Student à* $n-1$ *degrés de liberté.*