TD7

Tuesday, November 30, 2021 2:45 PM

Exemple d'application de la methode delta (Exo 1)

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $E(X_1)=\frac{1}{\lambda}$, $Var(X_1)=\frac{1}{\lambda^2}$

D'après le TCL appliqué à la suite de v.a $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid admettant un moment d'ordre 2

$$\frac{\sqrt{n}}{1/\lambda}\left(\frac{1}{n}\sum X_i-\frac{1}{\lambda}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$$

c'est à dire :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum X_i-\frac{1}{\lambda}\right)\longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Estimateur de λ. $T_n=\frac{1}{\overline{X}_n}$

$$g(x)=\frac{1}{x},\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

et ainsi $g'\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-\lambda^2\neq 0$

CCL : D'après la methode Δ

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n}-\frac{1}{1/\lambda}\right)\longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\times\lambda^4\right)=\mathcal{N}(0,\lambda^2)$$

Exercice 1 :

I) 1er cas

1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid $\sim \mathcal{E}(\theta)$

$$L(x_1,\dots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) \qquad -\theta x_1 - \theta x_2$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{1}_{x_i > 0} = \theta^n e^{\sum_{i=1}^{n} -\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta S_n}$$

↳ Toujours mais pour des $x_i \sim \mathcal{E}(\theta)$

$$l(x_1,\dots,x_n,\theta) = n\ln(\theta) - \theta S_n$$

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - S_n \le 0$$

$$\iff \frac{n}{\theta} \le S_n \iff \boxed{\frac{n}{S_n} \le \theta}$$

θ	0	$\frac{n}{S_n}$	$+\infty$
	$+$		$-$
	↗		↘

La vraisemblance est max lorsque $\boxed{\frac{n}{S_n} = \theta}$

2) Estimateur de $\frac{1}{\theta}$ est $\frac{S_n}{n} = \overline{X_n}$

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{\theta}$$

iid admet un ~~variance~~ moment d'1

$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{\theta}$ sans biais

Fortement consistant

4) Estimateur de la variance :

$$\overline{V_n} = \frac{1}{\overline{X_n}^2} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{\lambda^2}$$

$x \longmapsto x^2$ continue

Fortement consistant

option 2 :
$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})^2$
Fortement consistant
Sans biais
→ mais horrible à calculer à la main
puis me appliquer.

TCL $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid

intermède

intervalle

a calculer numériquement puis une application numérique

$$\sqrt{n}\,\frac{X_n-\frac{1}{\theta}}{\sqrt{V_n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$P\left(-1{,}89 \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n}-\frac{1}{\theta}}{\sqrt{V_n}} \le 1{,}89\right) \simeq 0{,}94$$

$$P\left(\overline{X_n}-\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}1{,}89 \le \frac{1}{\theta} \le \overline{X_n}+\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}1{,}89\right) \simeq 0{,}94$$

5) $g(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=-\frac{1}{x^2} \neq 0 \ \forall x$

$$\sqrt{n}\left(g(\overline{X_n})-g\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0,\sigma^2 g'\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}}+\frac{1}{(1/\lambda)^2}\right)) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\times\left(\frac{-1}{(1/\lambda)^2}\right)^2\right)$$

$$=\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\lambda^2}\times\lambda^4\right)$$

$$=\mathcal{N}\left(0,\cancel{\frac{1}{\lambda^2}}\right)\ \theta$$

$\longrightarrow$ Voir début cours

Δ on obtient

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n}-\frac{1}{\theta}\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0,\frac{1}{\theta^2}\right)$$

$g(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{-1}{x}\neq 0$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}}-\theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\theta^2)$$

$$\frac{1}{\theta^2}\times\theta^4$$

Hors cours / programme ! Une version avec automatisation

Hors cours / programme ! Une version avec automaturisation

Comme $\overline{X_n} \longrightarrow \frac{1}{\theta}$

$\overline{X_n} \times \sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}} - \theta\right)$ a la même limite

que $\frac{1}{\theta}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}} - \theta\right)$

Comme $\frac{1}{\theta}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}} - \theta\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\overline{X_n}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}} - \theta\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Solution 2 :

$$\frac{1}{\theta}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}} - \theta\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\theta\overline{X_n}} - 1\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) = Z'$$

Pour $a = 1,89$, on a $P(-a \leq Z' \leq a) = 0,94$

$$-1,89 \leq \sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X_n}\theta} - 1\right) \leq 1,89$$

$$\overline{X_n} - \frac{1,89\,\overline{X_n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\theta} \leq \overline{X_n} + \frac{1,89\,\overline{X_n}}{\sqrt{n}}$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ ↘

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{X_n} + \frac{1,89\,\overline{X_n}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{1}{\overline{X_n} - \frac{1,89\,\overline{X_n}}{\sqrt{n}}}$$

IT nove

II $2^{\text{ème}}$ cas

$$Y_i = \mathbb{1}_{X_i > 2} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 2 \\ 0 & \text{si } X_i \leq 2 \end{cases} \sim \mathcal{B}(P(X_i > 2))$$

$$P(X_i > 2) = \int_2^{+\infty} \theta e^{-\theta x}\, dx = \left[-e^{-\theta x}\right]_2^{+\infty}$$

$$= -0 + e^{-2\theta}$$

$$Y_i \sim \mathcal{B}(e^{-2\theta})$$ ✓

2) $E(Y_i) = e^{-2\theta}$

3) $L(Y_1, \dots, Y_n, e^{-2\theta})$

$$= \prod_{i=1}^{n} (e^{-2\theta})^{x_i} (1 - e^{-2\theta})^{1 - x_i}$$

$$= (e^{-2\theta})^{S_n} (1 - e^{-2\theta})^{n - S_n}$$ ✓

$$\ell = S_n \ln(e^{-2\theta}) + (n - S_n) \ln(1 - e^{-2\theta})$$

→ Simplifier la formule

$$\frac{d\ell}{\partial\theta} = \frac{-2S_n}{e^{-2\theta}} + \frac{2(n - S_n)}{1 - e^{-2\theta}}$$

$$= \frac{2e^{-2\theta}(n - S_n) - 2(1 - e^{-2\theta}) S_n}{e^{-2\theta}(1 - e^{-2\theta})}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \iff 2e^{-2\theta}(n - S_n) - 2(1 - e^{-2\theta})S_n = 0$$

$$\iff 2e^{-2\theta}n - \cancel{2e^{-2\theta}S_n} - 2S_n + \cancel{2S_n e^{-2\theta}} = 0$$

$$\iff 2e^{-2\theta}n - 2S_n = 0$$

$$\iff ne^{-2\theta} = S_n \iff e^{-2\theta} = \frac{S_n}{n}$$

$$\iff -2\theta = \ln(\overline{X}_n)$$

$$\iff \theta = -\frac{1}{2}\ln(\overline{X}_n) = \hat{\theta}_n$$

ln continue

$$\overline{X}_n \longrightarrow e^{-2\theta}$$

$$\ln(\overline{X}_n) \longrightarrow -2\theta$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\overline{X}_n) \longrightarrow \theta \quad \text{Fortement consistant}$$

$$V_n = \overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)$$

6) $$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - e^{-2\theta}\right)}{\sqrt{V_n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\overline{X}_n - \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} 1{,}89 \leq e^{-2\theta} \leq \overline{X}_n + \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}$$

$\ln \nearrow$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\overline{X}_n - \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} 1{,}89\right) \geq \theta \geq -\frac{1}{2}\ln\left(\overline{X}_n + \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} 1{,}89\right)$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\overline{X}_n + \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} 1{,}89\right) \leq \theta \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\overline{X}_n - \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} 1{,}89\right)\right) \simeq 0{,}94$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\bar{X}_n + \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}1{,}89\right) \leq \theta \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\bar{X}_n - \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}1{,}89\right)\right) \simeq 0{,}94$$

7) $$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - e^{-2\theta}\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(x)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \neq 0$$

$$V_n^2 \, g'(e^{-2\theta})^2 = V_n^2 \times \left(-\frac{1}{2e^{-2\theta}}\right)^2 = V_n^2 \frac{1}{4e^{-4\theta^2}}$$

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(e^{-2\theta})\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{V_n^2}{4e^{-4\theta^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{V_n\frac{1}{2e^{-2\theta}}}\left(-\frac{1}{2}\ln(\bar{X}_n) - \theta\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

✓ correction rapide mais j'ai bon

Jour TD

pas de suite oubli de IC

$$P\left(-a \leq \frac{\sqrt{n}}{\left(\frac{V_n}{2e^{-2\theta}}\right)}\left(-\frac{1}{2}\ln(\bar{X}_n) - \theta\right) \leq a\right)$$

$$\phi(a) = 0{,}94 \Leftrightarrow a \simeq 1{,}89$$

$$P\left(\theta \in \left[-\frac{1}{2}\ln(\bar{X}_n) \pm \frac{2e^{-2\theta}}{V_n}\sqrt{n} \times 1{,}89\right]\right) \simeq 0{,}94$$

dépend de θ ⚠

quelle fct g considérer ?

$\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e^{-2\theta}(1-e^{-2\theta})}}\left(\overline{Y}_n - e^{-2\theta}\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

alors $\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - e^{-2\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^{-2\theta}(1-e^{-2\theta})\right)$

$$\sqrt{n}\left(g(\overline{Y}_n) - g(e^{-2\theta})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \ ?? \ )$$

$g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} \neq 0$ si $x \neq 0$

Ainsi d'après la méthode Δ :

$$\sqrt{n}\left(g(\overline{Y}_n - g(e^{-2\theta})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,$$

$$e^{-2\theta}(1-e^{-2\theta}) \times g'(e^{-2\theta})^2$$

$g'(e^{-2\theta}) = \frac{1}{2e^{-2\theta}}$ $\quad g'(e^{-2\theta})^2 = \frac{1}{4e^{-4\theta}} = \frac{e^{4\theta}}{4}$

$$e^{-2\theta}(1-e^{-2\theta})\frac{e^{4\theta}}{4} = \frac{e^{2\theta}}{4}(1-e^{-2\theta}) = \frac{e^{2\theta}-1}{4}$$

Ainsi

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{e^{2\theta}-1}{4}\right)$$

C-a-d

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e^{-2\theta}-1}}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

D'après thm de Slutsky

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e^{2\hat{\theta}_n}-1}}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Ici on a utilisé Slutsky avec

$$\sqrt{e^{2\hat{\theta}_n}-1} \xrightarrow{p.s} \sqrt{e^{2\theta}-1}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2\hat{\theta}_n}-1}} \xrightarrow{p.s} \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta}-1}}$$

Donc $$\frac{1}{\sqrt{e^{2\hat{\theta}_n}-1}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta}-1}}$$

aussi $$\frac{\sqrt{e^{2\theta}-1}}{\sqrt{e^{2\hat{\theta}_n}-1}} \xrightarrow{P} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \\ W_n \xrightarrow{P} a \end{array}\right\} \longrightarrow Z_n W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

$$Z_n = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e^{2\theta}-1}} (\bar{Y}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$W_n = \frac{\sqrt{e^{2\theta}-1}}{\sqrt{e^{2\hat\theta_n}-1}} \xrightarrow{P} 1$$

$$Z_n W_n = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{e^{2\hat\theta_n}-1}} (\hat\theta_n - \theta) \longrightarrow 1 \times Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi : après quelque étape

$$\theta \in \left[\hat\theta_n \pm \frac{1{,}89 \sqrt{e^{2\hat\theta_n}-1}}{2\sqrt{n}} \right]$$

Exercice 2 :

1) X nombre de lancé pour faire 6

$X \sim \text{Géom}(\theta)$ à justifier (+) mais absolum

$$P(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$$

2) $$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \theta(1-\theta)^{i-1}$$

$$= \theta\left(\sum_{i=1}^{k} (1-\theta)^{i-1}\right) = \theta\left(\frac{1-(1-\theta)^k}{1-(1-\theta)}\right)$$

$$= \theta \left(\sum_{i=1} (1-\theta)^i \right) = \theta \left(\frac{\quad (1-\theta)}{1-(1-\theta)} \right)$$

$$= \theta \left(\frac{1-(1-\theta)^k}{\theta} \right) = 1-(1-\theta)^k$$

3) $P(X \leq t) = \beta \overset{\leq}{=} 1-(1-\theta)^t$

$$\iff 1-\beta \overset{\leq}{=} (1-\theta)^t \qquad \begin{matrix} 1-\beta = 1-(1-(1-\theta)^t) \\ 1-\beta = 1-1+(1-\theta)^t \end{matrix}$$

$$\ln(1-\beta) \overset{\leq}{=} t\ln(1-\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1-\beta)}{\ln(1-\theta)} \overset{\geq}{=} t$$

Inversion de la fct de rep

$$E(X) = \frac{1}{\theta}, \quad Var(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

4) $\frac{1}{\bar{X}_n}$ estimateur f.c de θ

$$L(x_1, \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) \qquad \begin{matrix} (1-\theta)^{x_i-1} \\ \times (1-\theta)^{x_i-1} \\ x_i-1+x_i-1 \end{matrix}$$

$$= \theta^n (1-\theta)^{S_n - n}$$

$$l(x_1, \dots, x_n, \theta) = n\ln(\theta) + (S_n - n)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{dl}{d\theta}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{S_n - n}{1-\theta}$$

$$= \frac{(1-\theta)n - (S_n - n)\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n - \cancel{n\theta} - S_n\theta + \cancel{\theta n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n = S_n\theta = \frac{n}{S_n} = \frac{1}{\overline{X_n}} = EMV$$

6) X adm un m. d. 1 $\longrightarrow$ LFGN

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X_n}} \longrightarrow \frac{1}{\theta}$$

7) $V_n = \overline{X_n}(\overline{X_n} - 1) \xrightarrow{p.s} \theta(\theta - 1)$

Pas pris le temps de chercher $\qquad \theta^2 - \theta$?!!

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{\overline{X_n}(\overline{X_n} - 1)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour la relier au TCL avec autonormalisation il faut proposé un estimateur faiblement consistant de $Var(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$

On pose $V_n = \frac{1 - \hat{\theta}_n}{\hat{\theta}^2} = \frac{1 - \frac{1}{\overline{X_n}}}{(1/\overline{X_n})^2} = \overline{X_n}^2 \left(1 - \frac{1}{\overline{X_n}}\right)$

$$= \overline{X_n}(\overline{X_n} - 1)$$

Comme $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s} \theta$

et que $x \longrightarrow \frac{1-x}{x^2}$ est continue

on a : $V_n = \frac{1-\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_n} \longrightarrow \frac{1-\theta}{\theta^2} = \mathrm{Var}(X)$

D'après le TCL avec autonormalisation appliqué à $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.d moment d'ordre 2 et V_n estimateur fortement donc faiblement consistant de $\mathrm{Var}\,X_1$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}\left(\overline{X_n}-\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X_n}(\overline{X_n}-1)}}\left(\overline{X_n}-\frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Cas Bonus :

$(X_1,\dots,X_n)$ iid $\sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ m,σ inconnus

$\overline{X_n} = 17$, $V_n = 9$ $n = 12$

1) IC pour m, $0{,}98 = 1-\alpha$

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n}-m}{\sqrt{V_n}} \sim t(\underbrace{n-1}_{=11})$$

$\sqrt{V_n}$ $\sim \mathcal{T}(n-1)$

$= 11$

student

$\longrightarrow$ table pour avoir α et $-\alpha$

$\longrightarrow$ IC

2) $(n-1)\dfrac{V_n}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\longrightarrow$ table pour avoir a et b

$\longrightarrow$ IC