Tests statistiques

Charles Vin

Date

1 Introduction

Un test est un mécanisme qui permet de trancher entre deux hypothèse en se basant sur une réalisation de votre échantillon.

2 Généralité sur les tests paramétriques

Exemple 2.1 (Exemple du traitement)**.** Un médicament couramment utilisé est connu pour guérir 30% des malades. Un nouveau traitement est expérimenté sur 10 patients. On observe 7 guérison. Peut-on résonnement affirmer que le nouveau traitement est meilleurs ?
$\theta_0 = 0.3$ probabilité de guérrison de l'ancient traitement
$\theta = ?$ probabilité de guerison du nouveau traitement
Modélisation :

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si le patient ni est gueri avec le nouveau traitement} \\ \hfill 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_\theta(x_i = 1) = \theta$$

$$X_i \sim \mathcal{B}(\theta), \theta \in]0, 1[$$

2 hypothèse sont en compétition à propos de θ :
- H_0 appelée **hypothèse nulle** ou **fondamentale** : "le nouveau traitement n'est pas meilleur" $\theta = 0.3$
- H_1 appelée **hypothèse alternative** : "le nouveau traitement est meilleur" $\theta > 0.3$

On considère un échantillon de taille n patients $X_1, \ldots, X_n$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \text{ nombre de patients guéris du nouveau traitement.}$$

Règle de décision :
- Si $S_n \geq k$ on décide H_1 : le nouveau traitement meilleur
- Si $S_n < k$ on ne rejette pas H_0 : le nouveau traitement n'est pas meilleur

k est appelé **seuil critique**.
On a deux ensemble
- $\mathcal{R} = \{(X_1, \ldots, X_n), \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\}$ = zone de rejet du test = **Région critique**
- $\bar{\mathcal{R}} = \{(X_1, \ldots, X_n), \sum_{i=1}^{n} X_i < k\}$ = zone d'acceptation de H_0 = **Région d'acceptation**

Deux types d'erreurs apparaissent :
- **Erreur de 1ère espèce** consiste à rejeter H_0 alors que H_0 est vrais (rejeter à tort $H_0 \to$ décider à tort que le nouveau traitement est meilleur)
- **Erreur de 2ème espèce** consiste à ne pas rejeter H_0 alors que H_0 est fausse (accepter à tort H_0)

Risque :
- **Risque de 1ère espèce** est la probabilité de commettre l'erreur de 1ère espèce = probabilité de rejeter à tort H_0

$$P_{H_0}(S_n \geq k) = \text{ probabilité de rejeter H0 alors que H0 vraie} = \mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k).$$

	Conclusion du test	
	Rejet de H_0	Non-rejet de H_0
$\theta = \theta_0$ (H_0 vraie)	Erreur de première espèce	Pas d'erreur
$\theta < \theta_0$ (H_0 vraie)	Pas d'erreur	Erreur de 2ème espèce

— **Risque de 2ème espèce** est la probabilité de commettre l'erreur de deuxième espèce.

$$P_{H_1}(S_n < k) = P_\theta(S_n < k) \text{ avec } \theta > 0.3.$$

Le plus souvent, on ne peut pas la calculer car elle dépend de θ inconnu ($\theta > 0.3$).
Pour trouver le seuil k, on le choisit de telle sorte que $\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k)$ petite (k assez grand) et $\mathbb{P}_\theta(S_n < k)$ pas trop grande.
Comme on ne peut pas diminuer les 2 risques à la fois (varient en sens inverse)
Compromis On fixe une probabilité **maximale** acceptable pour le risque de première espèce. En générale, on choisit $\alpha = 5\%, 10\%, \ldots$
Ce risque maximal est appelé **niveau du test**. On impose

$$\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k) \leq \alpha.$$

Si H_0 est vraie ($\theta = 0.3 = \theta$) $S_n \sim \mathcal{B}(10, 0.3)$ on va chercher k tel que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k) \leq 0.05 \\
&\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq 3) = 1 - \mathbb{P}_{0.3}(S_n \leq 2) \\
&\qquad = 1 - (\mathbb{P}_{0.3}(S_n = 0) + \mathbb{P}_{0.3}(S_n = 1) + \mathbb{P}_{0.3}(S_n = 2)) \\
&\qquad = 62\%
\end{aligned}$$

En choisissant le risque de rejeter à tort H_0 est de 62%.

Note. voir le diapo y'a du matériel en plus pour comprendre + L'histograme

Figure 1 – Histogramme de $\mathcal{B}(10, 0.3)$

On prend $k = 6$ car $\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq 6) \approx 0.0473 < 5\%$ (le plus proche possible du niveau) car

$$\begin{aligned}
k \text{ tq } &\mathbb{P}_{0.3}(S_n \geq k) \leq 0.05 \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}_{0.3}(S_n < k) \leq 0.05 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}_{0.3}(S_n \leq k-1) \geq 0.95
\end{aligned}$$

$k - 1$ est le plus petit entier c tel que

$$\mathbb{P}_{0.3}(Sn \leq c) \geq 0.95.$$

D'après les tables, $k - 1 = 6 \Leftrightarrow k = 6$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{0.3}(Sn \leq 5) = 0.9527 \\
\mathbb{P}_{0.3}(Sn \leq 6) = 0.9894
\end{aligned}$$

Règle de décision

— Si $S_n \geq 6$ alors on rejette H_0, on declare que le nouveau traitement est meilleur.
— Si $S_n < 6$, on ne rejette pas H_0 , on décide H_0.

Dans l'exemple on a observé 7 guérisons sur les 10 patients suivis. Comme $7 \in \mathcal{R}(7 > 6)$, on rejette H_0.

Le nouveau traitement peut être pire, on teste

$$H_0 : \theta < \theta_0.$$

$$H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 = 0.3.$$

On choisit le seuil k tq $P_\theta(S_n \geq k) \leq \alpha, \forall \theta \leq \theta_0 \Leftrightarrow \sup_{\theta \leq \theta_0} P(S_n \geq k) \leq \alpha$.
On montre que $\theta \mapsto P_\theta(S_n \geq k)$ est croissante en θ ! (on verra en TD) $\Rightarrow \sup_{\theta \leq \theta_0} P(S_n \geq k) = P_{\theta_0}(S_n \geq k)$.

On obtient $P_{\theta_0} \leq 0.05$. On obtient la même zone de rejet que dans le test $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$

— Si $S_n \geq 6$, on décide H_1
— Si $S_n < 6$, on décide H_0

Généralisation
$X_1, \ldots, X_n$ iid. de loi $P_\theta, \theta \in \Theta$. On suppose que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ avec $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. On veut tester

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

H_0 = hypothèse fondamentale, H_1 hypothèse alternative (qye l'on veut montrer)

Exemple 2.2 (du traitement)**.**

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = 0.3 \\ &\Theta_0 = \{0.3\} \\ H_0 &: \theta \leq 0.3 \\ &\Theta_0 = [0.03] \\ H_1 &: \theta > 0.3 \\ &\Theta_1 =]0.3, 1] \\ H_1 &: \theta > 0.3 \\ &\Theta_1 =]0.3, 1] \end{aligned}$$

COnstruire le test au niveau α reveint à construire une région de rejet $\mathcal{R}$ fonction de l'échantillon

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta[\mathcal{R}] \leq \alpha.$$

$P_\theta[\mathcal{R}]$ = risque de rejeter à tort H_0
Règle de décision
— Si $w \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ se réalise), on décide H_1
— Si $w \notin \mathcal{R}$ ($\bar{\mathcal{R}}$ se réalise), on décide H_0
On une utilise une **statistique de test** dont on connaît (souvent) la loi sous H_0.

Exemple 2.3 (du traitement)**.** $H_0 : \theta = 0.3, H_1 : \theta > 0.3$
— Statistique de test : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, \theta)$

— Sous H_0 (vraie), $\theta = 0.3, S_n \sim \mathcal{B}(n, 0.3)$

— Sous H_1 (vraie), $\theta > 0.3, S_n \sim \mathcal{B}(n\theta), \theta > 0.3$

La région de rejet est

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{S_{10} \geq 6\} \\ &= \{(X_1, \ldots, X_10) tq, \sum_{i=1}^{10} X_i \geq 6\} \\ &= \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ &= [6, 10] \end{aligned}$$

Terminologie
$H_0 : \theta \in \Theta_0, H_1 : \theta \in \Theta_1$
— $\alpha(\theta) = P_\theta(\mathcal{R}), \forall \theta \in \Theta_0$ = risque de première espèce
— $\beta(\theta) = P_\theta(\bar{\mathcal{R}}), \theta \in \Theta_1$ = risque de 2ème espèce
— $\alpha_0 = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\mathcal{R})$ est la taille du rest (risque maximal de rejeter à tort H_0)
— $\gamma(\theta) = P_\theta(\mathcal{R}), \theta \in \Theta_1 = 1 - \beta(\theta)$ = Probabilité de conclure H_1 et que H_1 vrais (proba deprendre la bonne décision)

Exemple 2.4 (du traitement)**.** $H_0 : \theta \leq 0.3, H_1 : \theta > 0.3, \mathcal{R} = \{S_{10} \geq 6\}$

— Taille du test : $\alpha^* = \sup_{\theta \leq 0.3} P_\theta(S_{10} \geq 6) = P_{0.3}(S_{10} \geq 6) = 4.73\% < \alpha = 5\%$(niveau du test)
— Le risque de 2ème espèce : $\beta(\theta) = P_\theta(S_{10} \leq 5), \theta > 0.3$ (fonction dépendant de θ)

— La puissance du test : $\gamma(\theta) = P_\theta(S_{10} \geq 6), \theta > 0.3$ (proba de décider H_1 alors que H_1 vraie)

Remarque. Un test de niveau α fixé est d'autant meilleur que sa puissance est grande (on ne se trombe pas en décidant H_1)

$$\begin{aligned}\gamma(0.9) = P_{0.9}(S_{10} \geq 6) = 1 - P_{0.9}(S_{10} \leq 5) &= 0.99 \text{fonction de répartition d'une } \mathcal{B}(10, 0.9) \\ &= \sum_{k=6}^{10} P_{0.9}(S_{10} = k)\end{aligned}$$

Le test conduit à detecter H_1 lorsque $\theta = 0.9$ dans 99% des cas.
$\gamma(0.4) = P_{0.4}(S_{10} \geq 6) = 0.166$ avec $S_{10} \sim \mathcal{B}(10, 0.4)$ Le test conduit à detecter H_1 lorsque $\theta = 0.4$ seulement dans 16% des cas. $\beta(0.4) = 1 - \gamma(0.4) = 0.84$

Définition 2.1. — On dit qu'on effectue un **test d'hypothèse simple** contre **une hypothèse simple** lorsque $\Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}$ avec θ_0, θ_1 connus
— On dit qu'on effectue un **test d'hypothèse multiple** contre **un hypothèse multiple** lorsque $\Theta_0 =]-\infty, \theta_0], \Theta_1 =]\theta_0, +\infty[$
  — $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$ **test unilatéral avec région de rejet à droite**
  — $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contre $H_1 : \theta < \theta_0$ **test unilatéral avec région de rejet à gauche**
  — $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta \neq \theta_0$ **test bilatérale**

Exemple 2.5. Si on veut savoir si le candidat A aura la majorité absolue à une election, on test $H_0 : p \leq 0.5, H_1 : p > 0.5$. C'est un test d'hypothèse multiple contre une hypothèse multiple.

Quelle est la valeur du niveau pour laquelle la décision du test est modifié
— Si $\alpha = 10\%, \mathcal{R} = \{S_{10} \geq 6\}$ comme on observe 7 guérisons on rejette H_0
— Si $\alpha = 5\%, \mathcal{R} = \{S_{10} \geq 6\}$
— Si $\alpha = 1\%, \mathcal{R} = \{S_{10} \geq 0.6\}$ On observe 7 guerisons, on ne rejette pas H_0

Définition 2.2. On appelle degré de signification d'un test ou p-valeur ou probabilité critique, la plus petite valeur de α pour laquelle on rejette H_0. On note α^*
— Si $\alpha^* < \alpha$ on rejette H_0
— Si $\alpha^* \geq \alpha$ on ne rejette pas H_0
α^* mesure la crédibilité de H_0 par rapport aux données

<u>Nouveau cours du 09/11</u>

Remarque. La zone de rejet dépend du niveau α fixé

Exemple 2.6. $H_0 : \theta = 0.3$ contre $H_1 : \theta > 0.3$.

— Si on fixe $\alpha = 10\%, \mathcal{R} = \{S_n \geq k\}$ avec k tq $P_{0.3}(\mathcal{R}) = P_{0.3}(S_n \geq k) \leq 10\%$
Si H_0 est vraie, $\theta = 0.3$ et $S_n \sim \mathcal{B}(n, 0.3), n = 10$
$P_{0.3}(S_n \leq k - 1) \geq 0.9$
D'après la table de $\mathcal{B}(10, 0.3)$ on obtient $k - 1 = 5$ d'où $k = 6$ d'où $\mathcal{R} = \{S_n \geq 6\}$ et $7 \in \mathbb{R}$ on rejette H_0
— Si $\alpha = 1\%, \mathcal{R} = \{S_n \geq k\}$ on cherche k tq $P_{0.3}(S_n \leq k - 1) \geq 0.99$ donc $k - 1 = 7 \Rightarrow k = 8, \mathcal{R} = \{S_n \geq 8\}$. On observe $s_n = 7 \in \bar{\mathcal{R}}$ on ne rejette pas H_0

Définition 2.3. On appelle p-valeur (probabilité critique ou degré de signification) le plus petit niveau α^* pour lequel on rejette H_0 au vu des observations
— Si $\alpha^* < \alpha$, on rejette H_0
— Si $\alpha^* > \alpha$, on ne rejette pas H_0
α^* mesure le degré de crédibilité de H_0

Exemple 2.7. Dans l'exemple α^* est entre 10% et 1%.

$$\begin{aligned}\alpha^* &= P_{0.3}(S_n \geq 7) \\ &= P_{0.3}(S_n \leq 6) \text{ avec } S_n \sim \mathcal{B}(10, 0.3) \\ &= 1 - 0.9894 = 1.1\%\end{aligned}$$

Si on accepte un risque de première espèce d'au moins 1.1%

2.1 Exemple de test de niveau asymptotique

On dispose de $n = 900$ individus

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la i eme personne votre pour A} \\ \hfill 0 \text{ sinon} \end{cases}, X_i \sim B(\theta), \theta = P(X_i = 1).$$

On test $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ A ne gagne pas. Et $H_1 : \theta > \frac{1}{2}$. On prend comme statistique du test $S_{900} = \sum_{i=1}^{900} X_i$ (nombre d'individus votant pour A) ou $F_900 = \frac{S_{900}}{900}$ (fréquence empirique des votants).
On rejette H_0 lorsque $S_n \geq k$ (Sn est assez grand) (on ne peut pas prendre 450 car sinon le risque de l'erreur de première espèce est très grand (0.5), il faut prendre une marge de sécurité $450 + c = k$)
Pour trouver k, on fixe $\alpha = 5\%$ par exemple et je contrôle

$$\sup_{\theta \leq 1/2} P_\theta(S_n \geq k) \leq \alpha = \text{ taille du test avec dedans la proba de rejeter H.}$$

L'application $\theta \mapsto P_\theta(S_n \geq k)$ est croissante en θ, donc

$$\sup_{\theta \leq 1/2} P_\theta(S_n \geq k) = P_{1/2}(S_n \geq k) \leq \alpha = 5\%$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(900, 0.5)$$

D'après le TCL,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \approx \mathcal{N}(0,1) Z = \qquad \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Donc :

$$P_{1/2}(Z \geq \frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}}) \approx 5\%$$
$$P_{1/2}(Z \geq \frac{k - 450}{\sqrt{225}}) \approx 5\%$$
$$P_{1/2}(Z < \frac{k - 450}{\sqrt{225}}) \approx 0.95\% = P(Z \leq 1.645)$$

D'après les tables de $\mathcal{N}(0,1)$

$$\frac{k - 450}{15} \approx 1.645$$
$$k = 450 + 1.645 * 15 \approx 475$$

CCL : règle de décision :
- Si $S_n \geq 475$, on décide H_1 (A va gagner)
- Si $S_n < 475$, on décide H_0 (A ne va pas gagner)

Comme on a observé, $s_n = S_n(w) = 486$ personnes et $486 \in \mathbb{R}$, on rejette H_0 (A va gagner). Que vaut la p-valeur du test ?

$$\alpha^* = P_{1/2}(S_n \geq 486), S_n \sim \mathcal{B}(900, 1/2).$$

Il manque peut être des morceau $\rightarrow$ demander à ID

Nouveau cours du 16/11

En utilisant le TCL

$$\alpha^* = P_{0.5}(S_n \geq 486)$$
$$= P_{0.5}(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \geq \frac{486 - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}})$$

Avec $E(S_n) = 900 * 0.5 = 450$ et $Var(S_n) = 900 * 0.5 * 0.5 = 225$

$$\begin{aligned}\alpha^* &= P_{0.5}(Z \geq \frac{486 - 450}{\sqrt{225}}) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &= P_{0.5}(Z \geq 2.4) \\ &= 1 - P(Z < 2.4) \\ &= 1 - 0.9918 = 0.82\% \text{ (très faible)}\end{aligned}$$

On rejette H_0 (A va gagner)

Démarche d'un test statistique

- Choix de H_0 et H_1
- Choix d'un risque α
- Choix d'une statistique de test S_T et de sa loi sous H_0
- Détermination de la région critique ou régionn de rejet $\mathcal{R}$
- Conclusion : observation de la réalisation de S_T sur l'échantillon
  - Si $w \in \mathcal{R}$ alors Rejet de H_0
  - Si $w \notin \mathcal{R}$ alors Non rejet de H_0

3 Exemple : Test de conformité de la moyenne

Test sur la moyenne avec variance **connue**.

Contexte : $x_1, ..., x_n$ des réalisation de $X_1, ..., X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 connu$. Soit m_0 une valeur fixée connue, on veut tester : $H_0 : m = m_0, H_1 : m \neq m_0$

On décide H_1 si $\left|\bar{X_n} - m_0 \geq c\right|$ Pour trouver c, on fixe le niveau α de telle sorte que

$$P_{H_0}(\left|\bar{X_n} - m_0\right| \geq c) \leq \alpha.$$

Si H_0 est vraie, $m = m_0$ et $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(m_0, \sigma/n)$ et

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X_n} - m_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \Leftrightarrow Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X_n} - m_0}{\sqrt{\sigma}} &\sim \mathcal{N}(0,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{m_0}(\sqrt{n}\frac{\left|\bar{X_n} - m_0\right|}{\sqrt{\sigma}} \geq \frac{\sqrt{n} * c}{\sigma}) \approx \alpha \\ P_{m_0}(|Z| \leq \frac{\sqrt{n} * c}{\sigma}) \approx 1 - \alpha\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}c}{\sigma} &= z_{1-\alpha/2} = \text{ le quantile=valeur dans la table} \\ \Leftrightarrow c &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\end{aligned}$$

Finalement la région de rejet est

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\left|\bar{X_n} - m_0\right| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n} z_{1-\alpha/2}}\} \\ &= \{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\bar{X_n} - m_0\right| \geq z_{1-\alpha/2}\} \\ &= \{|Z| \geq z_{1-\alpha/2}\}\end{aligned}$$

Exemple 3.1 (Poids de vaches). X_i poids de la ième vache, $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = 10^2 kg$ (connue), $m = E(X_i)$ =poids moyen d'une vache inconnu,

H_0 : $m = 87.6kg$ le régime n'a pas d'influence sur les poids.
H_1 :$\neq 87.6kg$ le régime a une influence sur le poids des vaches
On va prendre en comme statistique de test :

$$Z = \sqrt{5}\frac{\bar{X}_5 - 87.6}{\sqrt{10}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Si on fixe le niveau $\alpha = 5\%$

$$\mathcal{R} = \{|Z| \geq z_{1-\alpha/2=0.975}\} = \{|Z| \geq 1.96\}.$$

On observe

$$\bar{X}_5(w) = \frac{83 + 81 + 84 + 80 + 85}{5} = 82.5.$$

La statistique de test observée est

$$Z(w) = \sqrt{5}\frac{82.5 - 87.6}{\sqrt{10}} = -3.53.$$

et $Z(w) \in \mathcal{R}$, on rejette H_0 : le régime a une influence sur le poids des bêtes

Remarque.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{|Z| \geq 1.96\} \\
&= \{\sqrt{5}\frac{|\bar{X}_5 - 87.6|}{\sqrt{10}} \geq 1.96\} \\
&= \{|\bar{X}_5 - 87.6| \geq \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}1.96\} \\
\bar{\mathcal{R}} &= \{|\bar{X}_5 - 87.6| < \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}1.96\}(\text{acceptation de } H_0) \\
&= \{\bar{X}_5 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}1.96 \leq 87.6 \leq \bar{X}_5 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\}
\end{aligned}$$

Remarque. Faire ce test bilateral au niveau α revient à se demander si $m_0 \in IC_{1-\alpha}(m)$ où $IC_{1-\alpha}(m) = [\bar{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
Car on teste : $H_0 : m \leq m_0, H_1 : m > m_0$. Si H_1 est vrais, $\bar{X}_n$ a tendance a prendre de grandes valeurs que sous H_0. $\rightarrow$ On rejette H_0 lorsque $\bar{X}_n \geq c$.
Pour trouver la constance c, on fixe α tq $\sup_{m \leq m_0} P_m(\bar{X}_n \geq c) \approx \alpha$.
L'application $m \mapsto P_m(\bar{X}_n \geq c)$ est croissante en m, donc le sup est atteint lorsque $m = m_0$

$$\begin{aligned}
P_{m_0}(\bar{X}_n \geq c) \approx \alpha \\
P_{m_0}(\bar{X}_n < c) \approx 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Si H_0 est vraie ($m = m_0$), $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m_0, \sigma^2/n), Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Finalement

$$\begin{aligned}
P_{m_0}(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{c - m_0}{\sigma}) \approx 1 - \alpha \\
P_{m_0}(Z \leq z_{1-\alpha/2}) \\
\Rightarrow \sqrt{n}\frac{c - m_0}{\sigma} = z_{1-\alpha} \Leftrightarrow c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Car on teste : $H_0 : m \leq m_0, H_1 : m > m_0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{\bar{X}_n \leq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha}\} \\
&= \{\sqrt{n}\frac{X_n \bar{-} m_0}{\sigma} \leq z_{1-\alpha}\} \\
&= \{Z \leq z_{1-\alpha}\}
\end{aligned}$$

<u>Nouveau cours du 23/11</u>

4 Test du rapport de vraissemblance

On dispose de $X_1, \dots, X_n$ iid. de loi $P_\theta, \theta \in \Theta$. On souhaite tester $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta = \theta_1$.

Exemple 4.1. De la pièce de monnaie : une équilibré une 30% de chance

Soit $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le ième lancer donne Pile} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$, $X_i \sim \mathcal{B}(\theta), S_n = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(10, \theta)$

$$P_{0.3}(S_{10} = 4) = 20\%$$
$$P_{0.5}(S_{10} = 4) = 20.5\%$$

Il vaut mieux parier sur la pièce équilibrée ($\theta = 0.5$).

Dans un test, $H_0 : \theta 0.3$ contre $H_1 : \theta = 0.5$. On accepte H_1 (la pièce est équilibré) lorsque

$$rv : \frac{P_{0.5}(S_{10} = 4)}{P_{0.3}(S_{10} = 4)} >> 1.$$

Autrement dit, on va chercher k tq $rv \geq k > 1$ avec k choisit tq $P_{0.3}(\mathcal{R}) \leq \alpha$.

Rappel : Si $X_1, \dots, X_n$ iid. P_θ la vraisemblance est

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i) \text{ si les Xi sont discret} \\ \prod_{i=1}^{n} f(x_i \\ \theta) \text{ si la loi des Xi est continue} \end{cases}.$$

Définition 4.1 (Test du rapport de vraisemblance)**.** Dans le test d'hypothèse simple : $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta = \theta_1$ On appelle statistique du **test du rapport de vraisemblance**

$$V(X_1, \dots, X_n) = \frac{L(X_1, \dots, X_n, \theta_1)}{L(X_1, \dots, X_n, \theta_0)}.$$

Par convention :

$$V(X_1, \dots, X_n) = +\infty \text{ si } L(X_1, \dots, X_n, \theta_0) = 0$$
$$V(X_1, \dots, X_n) = 0 \text{ si } L(X_1, \dots, X_n, \theta_0) = L(X_1, \dots, X_n, \theta_1) = 0$$

Si H_1 est vraie ($\theta = \theta_1$), $V(X_1, \dots, X_n)$ a tendance à être grand que sous H_0 (» 1).
Si H_0 est vraie ($\theta = \theta_0$), $V(X_1, \dots, X_n)$ a tendance à être petit que sous H_1 (« 1).

Au niveau α, la zone de rejet

$$\mathcal{R} = \{V(X_1, \dots, X_n) \geq V_\alpha\}, V_\alpha > 1.$$

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie :

Exemple 4.2 (Pièce de monnaie)**.** $H_0 : \theta = 0.3, H_1 : \theta = 0.5$. La statistique de RV est

$$V(X_1, \dots, X_{10}) = \frac{\theta_1^{S_{10}}(1-\theta_1)^{10-S_{10}}}{\theta_0^{S_{10}}(1-\theta_0)^{10-S_{10}}}.$$

Car $L(x_1, \dots, x_10, \theta) = \prod_{i=1}^{10} P_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{10} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, x_i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} V(X_1, \dots, X_n) &= (\frac{\theta_1}{\theta_0})^{S_{10}}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})^{10}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})^{S_{10}} \\ &= (\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)})^{S_{10}}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})^{10} \end{aligned}$$

La zone de rejet est

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{V(X_1, \dots, X_n) \geq V_\alpha\} \\ &= \{(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)})^{S_{10}} \geq C_\alpha\} \\ &= \{(\frac{\cancel{0.5} * 0.7}{0.3 \ \cancel{0.5}})^{S_{10}} \geq C_\alpha\} \\ &= \{S_{10} \log(\frac{0.7}{0.3}) \geq \log(C_\alpha)\} \\ &= \{S_{10} \geq k_\alpha\} \text{ (zone de rejet du test)} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 5\%$, on a trouvé $k_\alpha = 6$ (lecture de la table $\mathcal{B}(10, 0.3)$)

Théorème 4.1 (Neyman - Pearson)**.** *Pour deux hypothèses simple $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta = \theta_1$ le test de RV de zone de rejet $\mathcal{R} = \{V(X_1, \dots, X_n) \geq V_\alpha\}$ est plus puissant que n'importe quel test de niveau α*

Remarque. La zone de rejet $\{V(X_1, \dots, X_n) \geq V_\alpha\}$ sera optimal (on obtient un test où le risque β est minimal pour α fixé.)

Exemple 4.3 (Test sur la moyenne)**.** $X_1, \dots, X_n$ iid. $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, m inconnu, σ^2 connu. $H_0 : m = m_0, H_1, m = m_1$, m_0, m_1 connu

La vraisemblance s'écrit

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, m) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, m) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - m)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} \end{aligned}$$

Statistique du RV :

$$\begin{aligned} V(X_1, \dots, X_n) = \frac{L(X_1, \dots, X_n, m_1)}{L(X_1, \dots, X_n, m_0)} &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2}}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2}} \\ &= \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^n (X_i - m_1)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - m_0)^2)) \\ &= \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2m_1\sum_{i=1}^n X_i + nm_1^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2m_0\sum_{i=1}^n X_i - nm_0^2)) \\ &= \exp(-\frac{-2nm_1\bar{X_n} + 2m_0 n\bar{X_n} + n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2}) \\ &= \exp(\frac{n}{2\sigma^2}(-m_1^2 + m_0^2 + 2(m_1 - m_0)\bar{X_n})) \\ &= \exp(\frac{n}{2\sigma^2}(2\bar{X_n}(m_1 - m_0)) + m_0^2 + m_1^2) \\ \mathcal{R} &= \{V(X_1, \dots, X_n) \geq V_\alpha\} \\ &= \{e^{\frac{n}{2\sigma^2}(-m_1^2 + m_0^2 + 2(m_1 - m_0)\bar{X_n})} \geq V_\alpha\} \text{ (fonction croissante de)} \bar{X_n} \text{ lorsque } m_1 > m_0 \\ \mathcal{R} &= \{\bar{X_n} \geq C_\alpha\} \text{ si } m_1 < m_0 \text{ on change le sens de l'inégalité} \end{aligned}$$

Pour trouver la constante C_α, on a

$$P_{m_0}(\bar{X_n} \geq C_\alpha) \approx \alpha.$$

— Si H_0 est vraie $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$
— Si H_1 est vraie $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\begin{aligned} P_{m_0}(\bar{X_n} \geq C_\alpha) &= P(\sqrt{n}\frac{\bar{X_n} - m_0}{\sigma} \geq \sqrt{n}\frac{C_\alpha - m_0}{\sigma}) \approx \alpha \\ &= P(Z \leq \sqrt{n}\frac{C_\alpha - m_0}{\sigma}) \approx 1 - \alpha (= \phi(z_{1-\alpha})) \\ \sqrt{n}\frac{C_\alpha - m_0}{\sigma} &= z_{1-\alpha} \\ C_\alpha &= m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathcal{R} = \{\bar{X_n} \geq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\} = \{\sqrt{n}\frac{\bar{X_n} - m_0}{\sigma} \geq Z_{1-\alpha}\}.$$

Exemple 4.4 (des pièces). X = variable aléatoire, $X \sim \mathcal{N}(m, 16), m = E(X)$ inconnu , $H_0 = m = 20, H_1$: $m = 22$.
Pour un niveau $\alpha = 5\%$, la zone de rejet optimal du test.

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\bar{X_n} \geq 20 + z_{0.95}\frac{4}{\sqrt{25}}\} \\ &= \{\bar{X_n} \geq 20 + 1.645\frac{4}{5}\} \\ &= \{\bar{X_n} \geq 21.316\}\end{aligned}$$

Suite qu'on fait en TD du 26/11

On va utiliser le RV :

$$\begin{aligned}V(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{L(X_1, \ldots, X_n, 22)}{L(X_1, \ldots, X_n, 20)} \\ &= \exp(\frac{n}{2\sigma^2}(20^2 - 22^2 + (22-20)\bar{X_n}))\end{aligned}$$

La zone de rejet du RV est

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{V(X_1, \ldots, X_n) \geq V_\alpha\} \\ &= \{\exp(\frac{n}{2\sigma^2}(20^2 - 22^2 + (22-20)\bar{X_n})) \geq V_\alpha\} \\ &= \{\bar{X_n} \geq C_\alpha\}\end{aligned}$$

Si on fixe le niveau $\alpha = 5\%$ on va chercher C_α tel que $P_{20}(\bar{X_n} \geq C_\alpha) \approx 5\%$
- Si H_0 est vraie ($m = 20$), $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(20, \frac{16}{25})$
- Si H_1 est vraie ($m = 22$), $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(22, \frac{16}{25})$

$$\begin{aligned}&P_{20}(\bar{X_n} \geq C_\alpha) \approx 0.05 \\ &1 - P_{20}(\bar{X_n} < C_\alpha) \approx 0.05 \\ &P_{20}(\bar{X_n} < C_\alpha) \approx 0.95\end{aligned}$$

Or sous H_0, $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(20, \frac{16}{25}), n = 25$

$$\begin{aligned}&\sqrt{25}\frac{\bar{X_n} - 20}{\sqrt{16}} \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &P(\sqrt{25}\frac{\bar{X_n} - 20}{\sqrt{16}} < \sqrt{25}\frac{C_\alpha - 20}{\sqrt{16}}) \\ &5 * \frac{C_\alpha - 20}{4} = 1.645 \\ &C_\alpha = 20 + \frac{4}{5}1.645 = 21.31\end{aligned}$$

La zone de rejet du test est

$$\mathcal{R} = \{\bar{X_{25}} \geq 21.31\}.$$

Règle de decision :
- Si $\bar{X_{25}} \geq 21.31$, on décide H_1
- Si $\bar{X_{25}} < 21.31$, on décide H_0

Que vaut la puissance du test?

$$\gamma = P_{22}(\bar{X_{25}} \geq 21.31).$$

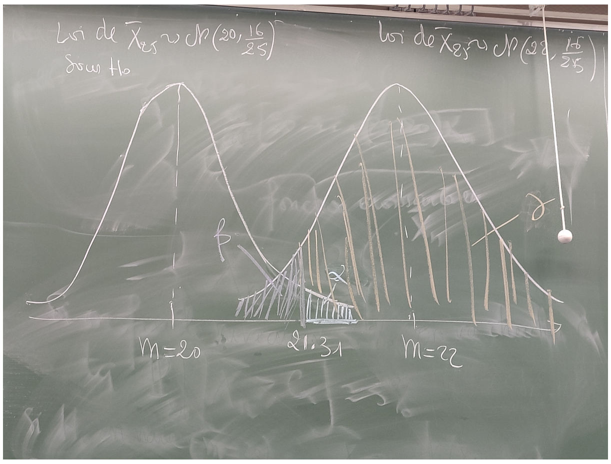
Si H_1 vraie (m=22),$\sqrt{25}\frac{\bar{X_{25}} - 22}{\sqrt{16}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}\gamma &= P(5\frac{\bar{X_{25}} - 22}{4} \geq 5\frac{(21.31 - 22)}{4}) \\ &= 1 - \phi(-0.86) = \phi(0.86) = 80.6\%\end{aligned}$$

Le risque de deuxième espèce β est

$$\beta = 1 - \gamma = 19.5\%.$$

Voir la Figure 4.4



Nouveau cours du 30/11

4.1 Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse multiple

$$
\begin{aligned}
&H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta > \theta_0 \\
\Leftrightarrow &H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1 \text{ ou } \theta_1 > \theta_0
\end{aligned}
$$

Lorsque la zone de rejet du test ne depend pas de la valeur de θ_1 mais uniquement du sens de l'inégalité, le test sera uniformément plus puissant (UPP).

Exemple 4.5 (Application : Test sur la moyenne)**.** $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. σ connue
$H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m > m_0$ avec m_0 fixé
$H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$ avec $m_1 > m_0$
La zone de rejet du test (pour un niveau α)

$$
\mathcal{R} = \{\bar{X_n} \geq m_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}.
$$

La zone de rejet ne dépend pas de la valeur de m_1, cet test est UPP.

Exemple 4.6 (14 du diapo : fromage)**.** On veut tester : $H_0 : m = 30\%$ contre $H_1 : m > 30\%$
On rejette H_0 lorsque $\bar{X_n} \geq c, n = 16$.
Pour trouver la constante c, on fixe le niveau $\alpha = 2\%$ tq

$$
\begin{aligned}
&P_{0.3}(\mathcal{R}) \approx 0.0.2 \\
&P_{0.3}(\bar{X_n} \geq c) \approx 0.0.2
\end{aligned}
$$

Si H_0 vraie ($m = 0.3$) et $\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(0.3, \frac{0.16^2}{16}) \Leftrightarrow \sqrt{16}\frac{\bar{X_n}-0.3}{0.16} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
&P_{0.3}(\sqrt{16}\frac{\bar{X_n}-0.3}{0.16} \geq \sqrt{16}\frac{c-0.3}{0.16}) \approx 0.02 \\
&P(Z < \frac{4(c-0.3)}{0.16}) \approx 0.98 = P(Z \leq 2.055) \\
&c = 0.3 + \frac{0.16}{\sqrt{16}} * 2.055 = 0.3822 \\
&\quad = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} * z_{1-\alpha} \text{ (on retrouve la formule exemple 4.5)} \\
&\mathcal{R} = \{\bar{X_n} \geq 38.22\%\} \text{ test UPP}
\end{aligned}
$$

Que vaut la fonction puissance ?

$$\begin{aligned}\gamma :&]0.3, +\infty[\to [0,1]\\ & m \mapsto P_m(\bar{X_n} \geq 0.3822)\end{aligned}$$

Si H_1 vraie ($m > 30\%$), $\bar{X_n} \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n}) \Leftrightarrow \sqrt{n}\frac{\bar{X_n}-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}\gamma(m) &= P_m(\sqrt{n}\frac{\bar{X_n}-m}{\sigma} \geq \sqrt{n}\frac{0.3822-m}{\sigma})\\ &= 1 - P_m(Z < \sqrt{16}\frac{0.3822-m}{0.16})\\ &= 1 - \phi(\frac{4}{0.16}(0.3822-m) \text{ avec } \phi \text{ fdr de } Z \sim \mathcal{N}(0,1))\end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{aligned}\gamma(0.4) = 1 - \phi(\frac{4}{0.16}(0.3822-0.4)) = 1 - \phi(-0.445)\\ \phi(0.445) = 67\%\end{aligned}$$

Note. La zone de rejet ne vas pas dépendre de m_1 et la taille du test augmente en fonction de m_1. Plus on s'éloigne de m_0, plus la puissance est grande. Il est plus simple de distinguer, différencier deux valeurs éloignées.

4.2 Test d'une hypothèse multiple contre une hypothèse multiple

Généralisation :

$$\begin{aligned}H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad & \text{contre } H_1 : \theta \in \Theta_1\\ \text{Par exemple } H_0 : m \leq 30\% \qquad & \text{contre } H_1 : m > 30\%\end{aligned}$$

Définition 4.2. La statistique de test du RV est

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_1} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(X_1, \ldots, X_n, \theta)}.$$

La zone de rejet du test de RV est

$$\mathcal{R} = \{V(X_1, \ldots, X_n) \geq V_\alpha\} \text{ avec } V_\alpha > 1 \text{ tq } \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha.$$

4.2.1 Test sur le paramètre d'une Bernouilli

$$\begin{aligned}H_0 : p = 0.48, H_1 : p = 0.52 \Leftrightarrow H_0 : p \leq 0.48, H_1 : p > 0.48 \to \mathcal{R} = \{S_n \geq k\}\\ H_0 : p = 0.52, H_1 : p = 0.48 \Leftrightarrow H_0 : p \geq 0.52, H_1 : p < 0.52 \to \mathcal{R} = \{S_n \leq k\}\\ \text{On obtient la même zone de rejet dans tous les cas}\end{aligned}$$

Résumé : diapo tableau qui résume test avec leurs zone de rejet

4.2.2 Test sur la moyenne avec écart type connu

Contexte : $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), \sigma$ connu. On veut tester $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$ avec $m_1 < m_0$ On decide H_1 lorsque $\bar{X_n} < c$. Pour trouver c, on fixe α tq

$$\begin{aligned}&P_{m_0}(\bar{X_n} \leq c) \approx \alpha\\ &P_{m_0}(\sqrt{n}\frac{\bar{X_n}-m_0}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{c-m_0}{\sigma}) \approx \alpha = P(Z \leq z_{1-\alpha})\\ &c = m_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ &\mathcal{R} = \{\bar{X_n} \leq m_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}\end{aligned}$$

La zone de rejet de ce test est la même que pour le test $H_0 : m \geq m_0, H_1 : m < m_0$.
De même lorsque l'on teste $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1, m_1 > m_0$.

La zone de rejet du test est
$$\mathcal{R} = \{\bar{X}_n \geq m_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}.$$
Même zone de rejet que le test de niveau α : $H_0 : m \leq m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$

Cas du test bilatérale : $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$. On rejette H_0 lorsque $\left|\bar{X}_n - m_0\right| \geq c$. On fixe α tq $P_{m_0}(\left|\bar{X}_n - m_0\right| \geq c) \approx \alpha$.

Si H_0 est vraie ($m = m_0$), $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n}) \Leftrightarrow Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$$P(\frac{\left|\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_0)\right|}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}) \approx \alpha.$$
$$P(|Z| < \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}) \approx 1 - \alpha.$$
Donc $c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha}$. La zone de rejet est
$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{\left|\bar{X}_n - m_0\right| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\} \\ &= \{\bar{X}_n \leq m_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} \cup \{\bar{X}_n \geq m_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}\end{aligned}$$

4.2.3 Loi du Khi-Deux

$X_1, \dots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors la v.a. $Z_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ suit la loi du Khi-Deux à n degré de liberté. On note $Z_n \sim \mathcal{X}^2(n)$.

Il existe des tables de la loi du Khi-Deux. Si $X \sim \mathcal{X}^2(d)$, les table donnent la valeur $\mathcal{X}^2_{d,1-\alpha}$ tq
$$P(X \leq \mathcal{X}^2_{d,1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$
$\mathcal{X}^2_{d,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $\mathcal{X}^2(d)$

Exemple 4.7. Si $X \sim \mathcal{X}^2(10)$, alors
$$P(X \leq 18.307) = 0.95$$
$$\mathcal{X}^2_{10,0.95} = 19.307$$
Par lecture dans la table de la loi du Khi-deux

4.2.4 Loi de Student

Définition 4.3 (Loi de Student)**.** Si Z et U sont deux v.a. indépendantes telle que $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $U \sim \mathcal{X}^2(n)$ alors
$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim \mathcal{T}(n) \text{ loi de Student à } n \text{ degrés de liberté.}$$
Proposition 4.2. *Si $T \sim \mathcal{T}(n)$, si $n \geq 2$*
- *T admet un moment d'ordre un $E(T) = 0$*
- *La loi est symétrique en 0*
- *Lorsque n augmente, T se comporte comme une $\mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow T \to^{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$*

$P(|T| \leq t_{d,1-\frac{q}{2}}) = 1 - q$

Exemple 4.8. Si $T \sim \mathcal{T}(8)$.
$$P(T \leq 186_{=t_{q,0.95}}) = 0.95.$$
Quantile d'ordre 0.95 de la loi de Student à 8 ddl.
$$P(|T| \leq 2.306) = 0.95.$$
Quantile d'ordre 0.975 de la loi de Student à 8 ddl.
$$P(T \leq 2.306_{=t_{8,0.975}}) = 0.975.$$

Théorème 4.3 (de Student)**.** *On considère $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$*

1. *$\bar{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes*
2. *$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$*
3. *$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n-1)$*

Corollaire. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors*

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

La va. $T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{S_n}$ suit une loi de Student à $(n-1)$ ddl.

Preuve : En effet :
- D'après 2)$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- D'après 3) $(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^{\in}(n-1)$

Comme les deux variables sont indépendantes (d'après 1), on a

$$\frac{\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - m)}{\cancel{\sigma}}}{\sqrt{\frac{(\cancel{n}-1)S_n^2}{\cancel{\sigma}^2(\cancel{n}-1)}}} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

□

5 Test sur la variance lorsque la moyenne est connue

On a un échantillon **gaussien** $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m connue. Soient σ_0 et σ_1 fixé :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ contre } H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \text{ avec } \sigma_1 < \sigma_0.$$

Rappel : La vraisemblance de l'échantillon

$$L(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}.$$

L'EMV de σ^2 est

$$V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2.$$

Le rapport de vraisemblance

$$\begin{aligned}
V(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{L(X_1, \ldots, X_n, \sigma_1^2)}{L(X_1, \ldots, X_n, \sigma_0^2)} \\
&= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_1^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_0^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}} \\
&= (\frac{\sigma_0}{\sigma_1})^n e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2})\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}
\end{aligned}$$

D'après le Théorème de N.P., la zone de rejet au niveau α est de la forme

$$\mathcal{R} = \{V(X_1, \ldots, X_n) \geq V_\alpha\} = \{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \leq t_\alpha\}.$$

Note. On change le signe car $\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}$ est négatif, donc la fonction est décroissante en nV_n^2

$$\mathcal{R} = \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \leq u_\alpha\} = \{V_n^2 \leq u_\alpha\}.$$

La statistique de test est $V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$. Pour trouver u_α, on fixe le niveau α tq

$$P_{\sigma_0^2}(\mathcal{R}) \leq \alpha$$
$$P_{\sigma_0^2}(V_n^2 \leq u_\alpha) \leq \alpha$$

Si H_0 est vrais : $\frac{nV_n^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - m}{\sigma_0})^2 \sim \mathcal{X}^2(n)$ par définition de la loi du Khi-Deux.
Si H_1 est vrais : $\frac{nV_n^2}{\sigma_1^2} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - m}{\sigma_1})^2 \sim \mathcal{X}^2(n)$ par définition de la loi du Khi-Deux

$$P_{\sigma_0^2}(\frac{nV_n^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{nu_\alpha}{\sigma_0^2}) \approx \alpha \text{ (= fdr de la loi Khi-Deux)}$$

Donc pour trouver u_α

$$\frac{nu_\alpha}{\sigma_0^2} = \mathcal{X}_{n,\alpha}^2 \text{ valeur dans la table}$$
$$\Leftrightarrow u_\alpha = \frac{\sigma_0^2}{n}\mathcal{X}_{n,\alpha}^2$$

La zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{V_n^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n}\mathcal{X}_{n,\alpha}\}$$
$$= \{\frac{V_n^2}{\sigma_0^2} \leq \mathcal{X}_{n,\alpha}^2\}$$

Note. Ca fonctionne aussi avec

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \Leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \leq \sigma_1^2$$

car le sup est atteint en σ_0 ou σ_1

Exemple 5.1. X = contenance d'un flacon, $X \sim \mathcal{N}(100, \sigma^2)$. On veut tester $H_0 : \sigma^2 = 1$ contre $H_1 : \sigma^2 = \frac{1}{4}$.

Au niveau $\alpha = 5\%$, la zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{V_n^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n}\mathcal{X}_{n,0.05}^2\}.$$

On a observé $n = 10, \sum_{i=1}^{n}(X_i - 100)^2 = 3$

$$V_n^2(w) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n}(X_i(w) - 100)^2 = \frac{3}{10} = 0.3.$$

La zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{V_n^2 \leq \frac{3.94}{10}\}$$
$$= \{V_n^2 \leq 0.394\}$$

$V_n^2(w) = 0.3 \in \mathcal{R}$, on decide H_1

Résumé : dans le diapo beau tableau

$V_m \geq c$

H_0	H_1	Région de rejet : $\mathcal{R}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\{\mathcal{K} \geq \mathcal{X}^2_{n,1-\alpha}\}$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\{\mathcal{K} \leq \mathcal{X}^2_{n,\alpha}\}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\{\mathcal{K} \leq \mathcal{X}^2_{n,1-\alpha/2}$ ou $\mathcal{K} \geq \mathcal{X}^2_{n,\alpha/2}\}$

?

6 Test sur la moyenne avec variance inconnu

Contexte : $X_1, \ldots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m et σ^2 inconnus

Pour une valeur m_0 fixée, on veut tester : $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m > m_0$. Sous $H_1, \bar{X}_n$ a tendance à prendre de plus grandes valeur que sous H_0. On décide H_1 lorsque $\bar{X}_n \geq c$. Pour trouver c, on fixe α avec

$$P_{m_0}(\bar{X}_n \geq c) \leq \alpha.$$

Si H_0 est vraie ($m = m_0$) et

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n}) \\
\Leftrightarrow &\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \\
\Leftrightarrow &\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \sim t(n-1) \text{ avec } S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_{m_0}(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{S_n} \geq \sqrt{n}\frac{c - m_0}{S_n}) \approx \alpha \\
\Leftrightarrow &P_{m_0}(T < \sqrt{n}\frac{c - m_0}{S_n}) \approx 1 - \alpha
\end{aligned}$$

D'où$\sqrt{n}\frac{c-m_0}{S_n} = t_{n-1,1-\alpha} \Leftrightarrow c = m_0 + \frac{S_n}{\sqrt{n}t_{n-1,1-\alpha}}$
La zone de rejet est

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{\bar{X}_n \geq m_0 + \frac{S_n}{\sqrt{n}t_{n-1,1-\alpha}}\} \\
&= \{\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{S_n} \geq t_{n-1,1-\alpha}\}
\end{aligned}$$

La zone de rejet est la même pour

$$\begin{aligned}
H_0 : m = m_0 \Leftrightarrow H_0 : m \leq m_0 \\
H_1 : m > m_0 \Leftrightarrow H_1 : m > m_0
\end{aligned}$$

Cas où on test : $H_0 \geq m_0$ contre $H_1 : m < m_0$
Pour un niveau α fixé, la zone de rejet est

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{\bar{X}_n \leq m_0 - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_{n-1,1-\alpha}\} \\
&= \{\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m_0}{S_n} \leq -t_{n-1,1-\alpha}\}
\end{aligned}$$

Cas où on test : $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$
Pour un niveau α fixé, la zone de rejet

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{|\bar{X}_n - m_0| \geq t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\} \\
&= \{\sqrt{n}\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{S_n} \geq t_{n-1,1-\alpha/2}\}
\end{aligned}$$

Résumé :

H_0	H_1	Région de rejet : $\mathcal{R}$
$m \leq m_0$	$m > m_0$	$\{\mathcal{T} \geq t_{n-1,1-\alpha}\}$
$m \geq m_0$	$m < m_0$	$\{\mathcal{T} \leq t_{n-1,1-\alpha}\}$
$m = m_0$	$m \neq m_0$	$\{\lvert\mathcal{T}\rvert \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\}$

Exemple 6.1 (exemple 17 du diapo). $X =$ temps de sommeil, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ m, σ^2 inconnus.

On veut tester : $H_0 : m \geq 7$ contre $H_1 : m < 7$. Pour $\alpha = 5\%$, la zone de rejet est

$$\mathcal{R} = \{\bar{X}_n \leq 7 - t_{n-1,0.95}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\}$$

On a observé : $n = 30, \bar{X}_n(w) = 6.36, S_n(w) =\sqrt{1.85}$. La valeur lue dans la table de $T(29)$ vaut $t_{29,0.95} = 1.699$

$$\mathcal{R} = \{\bar{X}_n \leq 6.58\}$$

Comme $\bar{X}_n(w) = 6.36 \in \mathcal{R}$ on décide H_1.

7 Test sur la variance lorsque m est inconnu

Contexte : On dispose de $X_1, \dots, X_n$ iid. avec $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m et σ^2 inconnu. On veut tester $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Rappel : l'EMV de σ^2 est

$$\begin{aligned} V_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \\ &= \frac{n-1}{n}S_n^2 \text{ avec } S_n^2 \text{ variance empirique corrigée} \end{aligned}$$

Sous $H_0, \sigma^2 = \sigma_0^2, (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \mathcal{X}^2(n-1)$

Sous $H_1, \sigma^2 < \sigma_0^2, (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2} = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2})_{<1}$ prend des valeur plus petites que sous H_0

La zone de rejet est de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{V_n^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n}\mathcal{X}^2_{n-1,\alpha}\} \\ &=\{\frac{nV_n^2}{\sigma_0^2} \leq \mathcal{X}^2_{n-1,\alpha}\} \end{aligned}$$