Exo 10 $\quad f^T = (2,1,3,1,2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

① $B = \{1,3,4\} \rightarrow A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A^B) = -1 \neq 0$ donc A^B est inversible

$$(A^B)^{-1} b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > 0$$

donc B est réalisable et non-dégénéré

② * $x_B = (A^B)^{-1} b - \tilde{T}^N x_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (A^B)^{-1} A^N \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

donc $\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_5 \\ x_3 = 1 - 3x_2 + 3x_5 \\ x_4 = 2 + x_2 - x_5 \end{cases}$

* $f^T x = f_B^T (A^B)^{-1} b + c^N x_N = (2,3,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (f_N^T - f_B^T \tilde{T}^N)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$$= 11 + \left\{(1,2) - (2,3,1)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= 11 + \{(1,2) - (8,-2)\}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = 11 - 7x_2 + 4x_5$$

③

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	0	3	3
x_3	0	3	1	0	-3	1
x_4	0	-1	0	1	1	2
	0	-7	0	0	4	11

$l = 5$

$\begin{pmatrix} 3/3 \\ \cancel{1/(-3)} \\ 2/1 \end{pmatrix} \leftarrow k = 1$, $\not> 0$

donc $B_1 = \{5,3,4\}$

B_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	1/3	0	0	0	1	1
x_3	1	3	1	0	0	4
x_4	-1/3	-1	0	1	0	1
	-4/3	-7	0	0	0	15

$'x_5' = 'x_1'/3$

$'x_3' = 'x_3' - (-3)'x_5'$
$= 'x_3' + 3'x_5'$

$'x_4' = 'x_4' - 1 \times 'x_5'$
$= 'x_4' - 'x_5'$

$Z = Z + 4'x_5'$

$'c' = 'c' - 4'x_5'$

B_1 satisfait la CSO, donc la solution optimale est
$x = (0,0,4,1,1)^T$

et la valeur optimale vaut 15