Modélisation statistique - TD2
Vecteurs aléatoires et vecteurs gaussiens

Exercice 1 *Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note par g et G la fonction de densité et la fonction de répartition de ces variables. On définit*

$$X_1 = \min\{Y_1, Y_2\} \text{ et } X_2 = \max\{Y_1, Y_2\}.$$

1. *Donner la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable X_2.*
2. *Donner la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable X_1.*
3. *Dans cette question, on va rechercher la fonction de répartition, puis la densité de probabilité jointe du couple (X_1, X_2).*
   (a) *Ecrire la probabilité $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ en utilisant les événements suivants, $X_2 \leq x_2$ et $X_1 > x_1$.*
   (b) *En déduire que*
   $$F(x_1, x_2) = \begin{cases} G(x_2)^2 & \text{si } x_2 \leq x_1 \\ G(x_2)^2 - (G(x_2) - G(x_1))^2 & \text{si } x_1 < x_2 \end{cases}$$
   (c) *On rappelle que $f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$. Montrer que*
   $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 \leq x_1 \\ 2g(x_1)g(x_2) & \text{si } x_1 < x_2 \end{cases}$$

Exercice 2 *Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}_3(\mu, \sum)$ avec $\mu^T = (0, 2, 1)$,*

$$\sum = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Quelles sont les lois de X, Y, Z et $-X + 2Z$*
2. *Le vecteur $(X, Y + Z)$ est-il un vecteur gaussien ? Déterminer sa loi.*

Exercice 3 *Soient X et Y deux variables aléatoires iid suivant chacune loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.*

1. *Montrer que $(U, V)^T$ est un couple gaussien.*
2. *Montrer que U et V sont indépendantes.*

Exercice 4 *Soient $\rho \in]-1, 1[$, et $(X, Y)^T$ un vecteur suivant la loi*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

1. *Déterminer la loi de* $(X,Y)^T$.
2. *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $(X, Y - aX)^T$ *est un couple gaussien.*
3. *Déterminer l'unique réel* c *pour lequel* X *et* $Y - cX$ *sont indépendantes.*
4. *Calculer* $V(Y - cX)$, *où* c *désigne le réel déterminé à la question précédente.*

Exercice 5 *Dans cet exercice on utilise le logiciel* ***R***, *et la fonction* `rmvnorm` *du package* `mvtnorm`.

1. *Simuler un couple de variables aléatoires* $(X,Y)^T$ *suivant la loi*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

avec $\mu_x = \mu_y = 0$ *et* $\rho = 1$. *Représentez le nuage de points et les courbes de niveaux de la densité. Vous pourrez vous aider du code suivant :*

```
x=seq(-3,3,0.1)
y=seq(-3,3,0.1)
xy=expand.grid(x,y)
z=dmvnorm(xy,mean=c(0,0), sigma=matrix(c(1,rho,rho,1),ncol=2,byrow=TRUE))
zm=matrix(z,ncol=length(x),nrow=length(y),byrow=TRUE)
contour(x,y,z=t(zm))
```

2. *Modifier successivement la variance, le paramètre* ρ, *et les termes de variance. Observez les changements.*