UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2016–2017

Devoir surveillé 3 mars 2017
Corrigée

Exercice 1 On considère la fonction

$$f(x) = \prod_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i} \text{ dans } \mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \ : \ x_i > 1,\ i = 1, \ldots, 2n+1\}.$$

1. Soient

$$y = \left(\frac{1}{1-x_1}, \ldots, \frac{1}{1-x_{2n+1}}\right)^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

et

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{(1-x_1)^2}, \ldots, \frac{1}{(1-x_{2n+1})^2}\right) \in \mathcal{S}_{2n+1}(\mathbb{R}).$$

Montrer que le gradient de f peut s'ecrire sous la forme $\nabla f(x) = f(x) \times y^T$. Puis montrer que la matrice hessienne peut s'écrire sous la forme $\nabla^2 f(x) = f(x) \times [yy^T + D]$.
Corrigée : Pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\prod_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i}\right)\frac{1}{1-x_j}\right\} \\
&= \left(\prod_{i=1, i\neq j}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{1-x_i}\right) = \left(\prod_{i=1, i\neq j}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i}\right)\frac{1}{(1-x_j)^2} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i}\right)\frac{1}{(1-x_j)} = f(x) \times \frac{1}{(1-x_j)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\nabla f(x) = f(x) \times \left(\frac{1}{1-x_1}, \frac{1}{1-x_2}, \ldots, \frac{1}{1-x_{2n+1}}\right) = f(x) \times y^T.$$

Puis on a

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x) &= \nabla\{[\nabla f(x)]^T\} = \nabla\{[f(x) \times y^T]^T\} = \nabla\{f(x) \times y\} \\
&= y \times \nabla f(x) + f(x) \times \nabla y = f(x) \times [yy^T + \nabla y]
\end{aligned}$$

où

$$\nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_{2n+1}}\right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{(1-x_1)^2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(1-x_2)^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(1-x_{2n+1})^2} \end{pmatrix}\right) = D.$$

2. Montrer que f est concave sur dom(f). *(Remarque : Notez que pour tout $x \in$ dom(f), $f(x) < 0$.)*
   Corrigée : Pour tout $x \in \text{dom}(f)$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$ on a

   $$z^T \nabla^2 f(x) z = f(x) \times z^T [yy^T + D] z = f(x) \times [(z^T y)^2 + z^T D z]$$

   où $(z^T y)^2 \geqslant 0$, $z^T D z \geqslant 0$ (avec égalité ssi $z = 0$ car D est définie positive) et $f(x) < 0$. On en déduit que

   $$\forall x \in \text{dom}(f), \forall z \in \mathbb{R}^{2n+1} : z^T \nabla^2 f(x) z \leqslant 0,$$

   donc $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie négative pour tout $x \in \text{dom}(f)$. D'après Théorème 1a, f est concave sur son domaine.

3. On choisit maintenant $\alpha < 0$. Montrer que l'ensemble $E_\alpha = \{x \in \text{dom}(f) \ : \ f(x) \geq \alpha\}$ est un convexe.
   Corrigée : Pour tout $x, y \in E_\alpha$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a

   $$\begin{array}{rcll} f((1-t)x + ty) & \geqslant & (1-t)f(x) + tf(y) & \text{car } f \text{ est concave} \\ & \geqslant & (1-t)\alpha + t\alpha & \text{car } x, y \in E_\alpha, t \geqslant 0 \text{ et } (1-t) \geqslant 0 \\ & = & \alpha. & \end{array}$$

   On en déduit que

   $$\forall x, y \in E_\alpha, \forall t \in [0, 1] : [(1-t)x + ty] \in E_\alpha,$$

   donc E_α est un convexe.

Exercice 2 Problème de modélisation :

Une entreprise sidérurgique a reçu une commande de 110 tonnes d'acier. L'acier doit contenir au moins 3,5 tonnes de nickel, au plus 3 tonnes de carbone et exactement 4 tonnes de manganèse. L'entreprise est certifiée pour 800 euros par tonne et peut utiliser 4 différents types d'alliages pour composer l'acier, dont la composition chimique et le coût par tonne est donnée dans le tableau suivant :

	alliage 1	alliage 2	alliage 3	alliage 4
nickel	6%	3%	2%	1%
carbone	3%	2%	5%	6%
manganèse	8%	3%	2%	1%
coût par tonne	480 euros	400 euros	320 euros	240 euros

L'entreprise veut savoir quel mélange des 4 alliages donne un profit maximum. Quel problème d'optimisation doit-on résoudre ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Corrigée :

- Les variables :

$$x_j = \text{quantité [tonnes] d'alliage } j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

- Le but :
  Maximiser le profit = les revenus − les coûts, donc

$$\max 800(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (480x_1 + 400x_2 + 320x_3 + 240x_4)$$
$$\Leftrightarrow \max 320x_1 + 400x_2 + 480x_3 + 560x_4.$$

  Ou encore (sachant que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 110$)

$$\max 88000 - (480x_1 + 400x_2 + 320x_3 + 240x_4)$$
$$\Leftrightarrow \max -(480x_1 + 400x_2 + 320x_3 + 240x_4)$$
$$\Leftrightarrow \min 480x_1 + 400x_2 + 320x_3 + 240x_4$$

- Les contraintes :

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 110 & \text{[la commande]} \\
0,06x_1 + 0,03x_2 + 0,02x_3 + 0,01x_4 \geqslant 3,5 & \text{[nickel]} \\
0,03x_1 + 0,02x_2 + 0,05x_3 + 0,06x_4 \leqslant 3 & \text{[carbone]} \\
0,08x_1 + 0,03x_2 + 0,02x_3 + 0,01x_4 = 4 & \text{[manganèse]} \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 & \text{[positivité des quantités].}
\end{array}$$

Exercice 3 On considère le problème (P) $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ où

$$f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2 + 5, \quad x = (x_1, x_2)^T.$$

1. Définir $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c.$$

Corrigée :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = 5.$$

2. Montrer que (P) est un problème strictement convexe.
Corrigée : On a

- $\nabla^2 f(x) = A$, et
- $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) - 9 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{5 + \sqrt{18}, 5 - \sqrt{18}\right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$, donc A est définie positive.

D'après Théorème 1b, f est strictement convexe. Étant donné que $\mathbb{R}^2$ est un convexe, on en déduit que (P) est un problème strictement convexe.

3. Montrer que (P) admet une et une seule solution optimale.
Corrigée : D'après la question précédente et Théorème 3b, (P) admet au plus une solution optimale. Or $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ (donc f est coercive) et $\mathbb{R}^2$ est un fermé. D'après Corollaire 2 il existe donc au moins une solution de (P). On en déduit que (P) admet une et une seule solution optimale.

4. Calculer la solution optimale et la valeur optimale.
Corrigée : On a

$$\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^{*T}A - b^T = 0 \Leftrightarrow x^* = A^{-1}b$$

donc

$$x^* = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}.$$

Puis notez que $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^T A - b^T\right)x - \frac{1}{2}b^T x + c$ et que $(x^{*T}A - b^T) = 0$, donc

$$f(x^*) = -\frac{1}{2}b^T x^* + c = -\frac{1}{2}(-1, 1)\begin{pmatrix} -5/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} + 5 = -\frac{5}{14} + \frac{1}{14} + 5 = -\frac{2}{7} + 5 = \frac{33}{7}.$$

Exercice 4 On veut déterminer le point de l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (y \leqslant x^2 + 2x + 2) \wedge (y \geqslant 2x + 2)\}$$

qui est le plus proche de $(2,2)^T$.

1. Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme suivante

$$(P) \begin{array}{ll} \min & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ s.c. & y - x^2 - 2x - 2 \leqslant 0 \\ & 2x + 2 - y \leqslant 0 \end{array}$$

   Corrigée : Soient $X = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ et $X_0 = (2,2)^T$. Alors la distance entre X et X_0 est définie par $d(X, X_0) = \|X - X_0\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$. Or pour tout $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, $(x-2)^2 + (y-2)^2 \geqslant 0$, donc $d(X, X_0)$ est minimale ssi $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ est minimale. En fin $X \in \mathcal{E}$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leqslant x^2 + 2x + 2 \\ y \geqslant 2x + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x^2 - 2x - 2 \leqslant 0 \\ 2x + 2 - y \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

2. Montrer que les contraintes sont qualifiées au point $(1,5)^T$. Puis montrer que les contraintes ne sont pas qualifiées au point $(0,2)^T$.
   Corrigée : Soient $h_1(x,y) = y - x^2 - 2x - 2$ et $h_2(x,y) = 2x + 2 - y$. Alors

$$\nabla h_1(x,y) = (-2x-2, 1) \quad \text{et} \quad \nabla h_2(x,y) = (2,-1).$$

   Pour $(x,y) = (1,5)$ on a $h_1(1,5) = 0$ et $h_2(1,5) = -1 < 0$. Donc il n'y a qu'une seule contrainte saturée et pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a

$$z\nabla h_1(1,5) = (0,0) \Leftrightarrow z(-4,1) = (0,0) \Leftrightarrow z = 0.$$

   On en déduit que $\nabla h_1(1,5)$ est linéairement indépendent, donc d'après Fiacco les contraintes sont qualifiées au point $(1,5)^T$.
   Puis pour $(x,y) = (0,2)$ on a $h_1(0,2) = 0$ et $h_2(0,2) = 0$. Il y a donc deux contraintes saturées et pour tout $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$ on a

$$z_1\nabla h_1(0,2) + z_2\nabla h_2(0,2) = (0,0) \Leftrightarrow z_1(-2,1) + z_2(2,-1) = (0,0) \Leftrightarrow (z = 0 \vee z_1 = z_2 \neq 0).$$

   On en déduit que $\nabla h_1(0,2)$ et $\nabla h_2(0,2)$ ne sont pas linéairement indépendent. Donc d'après Fiacco les contraintes ne sont pas qualifiées au point $(0,2)^T$.

3. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).
   Corrigée : La fonction de Lagrange est définie par

$$\begin{array}{rcl} L(x,y,\mu_1,\mu_2) & = & f(x,y) - \mu_1 h_1(x,y) - \mu_2 h_2(x,y) \\ & = & (x-2)^2 + (y-2)^2 - \mu_1(y - x^2 - 2x - 2) - \mu_2(2x + 2 - y). \end{array}$$

Les conditions KKT deviennent donc

$$\begin{cases} 2(x-2)+2\mu_1 x+2\mu_1-2\mu_2=0 \\ 2(y-2)-\mu_1+\mu_2=0 \\ \mu_1 \leqslant 0 \\ \mu_2 \leqslant 0 \\ \mu_1(y-x^2-2x-2)=0 \\ \mu_2(2x+2-y)=0 \end{cases}.$$

4. Montrer que les conditions KKT sont vérifiées pour le point $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)^T$.
   Corrigée : Pour $(x,y)=\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$ les conditions KKT deviennent

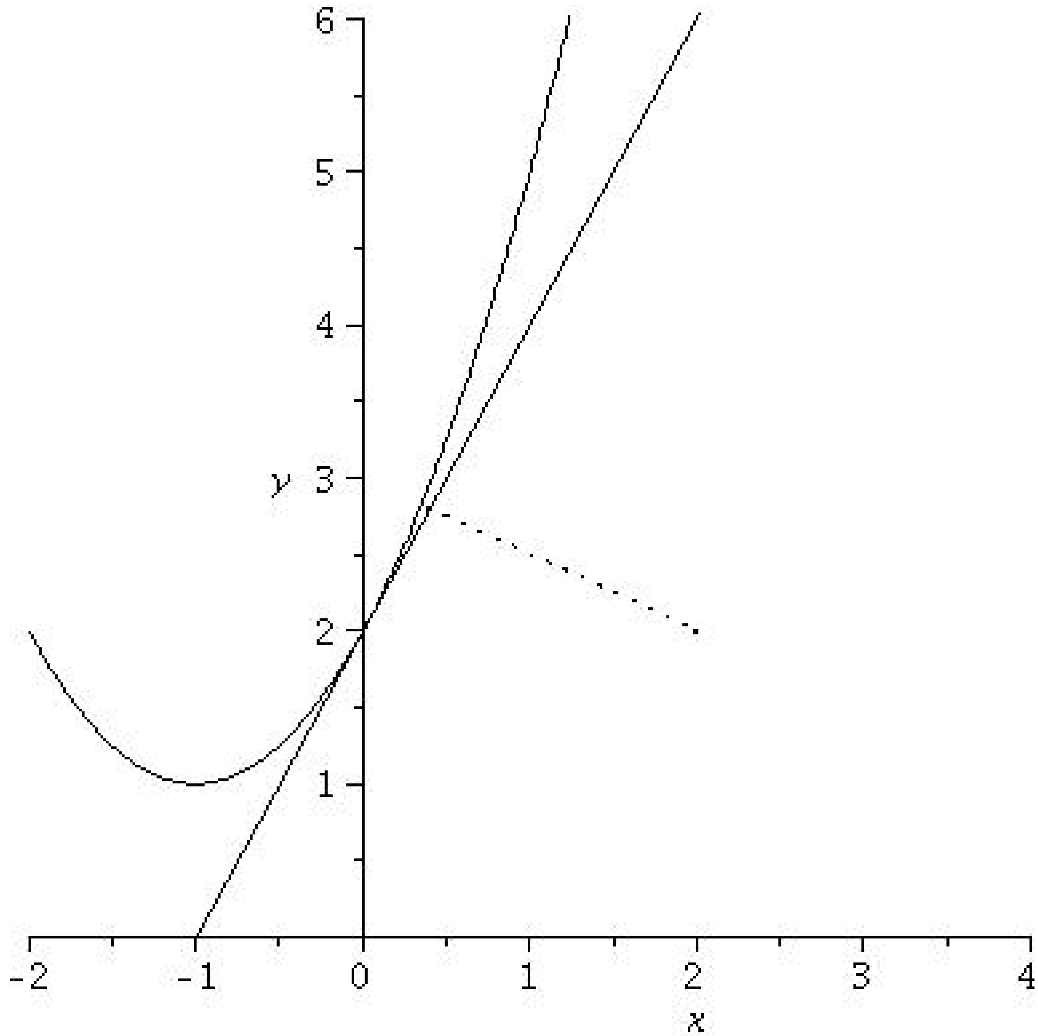
$$\begin{cases} -\frac{8}{5}+\frac{7}{5}\mu_1-\mu_2=0 & (A) \\ \frac{8}{5}-\mu_1+\mu_2=0 & (B) \\ \mu_1 \leqslant 0 & (C) \\ \mu_2 \leqslant 0 & (D) \\ \mu_1 \times \left(-\frac{4}{25}\right)=0 & (E) \\ \mu_2 \times 0 = 0 & (F) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A),(B) \text{ et } (E): & \frac{8}{5}+\mu_2=0 & (A') \\ (C) \text{ et } (E): & \mu_1=0\leqslant 0 & (B') \\ (D) \text{ et } (F): & \mu_2 \leqslant 0 & (C') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A') \text{ et } (C'): & \mu_2=-\frac{8}{5}\leqslant 0 \\ (B'): & \mu_1=0\leqslant 0 \end{cases}.$$

   Donc les conditions KKT sont vérifiées pour le point $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)^T$.

5. Montrer que (P) admet au moins une solution optimale.
   Corrigée : La fonction f est coercive car $f(x)\to+\infty$ quand $\|x\|\to+\infty$. De plus l'ensemble admissible est un fermé car $h_1(x,y)$ et $h_2(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. D'après Corollaire 2 il existe donc au moins une solution de (P).

6. Déterminer la solution optimale, sachant que les contraintes sont qualifiées au tout point admissible sauf le point $(0,2)^T$, et que le système KKT n'admet qu'une seule solution. Vérifier votre reponse à l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble admissible.
   Corrigée : D'après question 2 et question 4 il y a deux candidats à minimum local: $(0,2)^T$ et $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)^T$, et d'après la question 5 il existe au moins une solution optimale. Étant donné que $f\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)=\frac{80}{25}=\frac{16}{5}<\frac{20}{5}=4=f(0,2)$, on en déduit que $X^*=\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)^T$ est l'unique solution optimale de (P). La distance entre X^* et X_0 vaut $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



6
5
4
3
2
1
y
-2
-1
0
1
2
3
4
x