Liste des Tests du cours

Charles Vin

2022

Table des matières

1 Template

Conditions

Hypothèse

Statistique de test

Zone de Rejet

Méthode

2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Conditions

1. Les X_i semblent provenir d'une loi à fonction de répartition continue. $\Rightarrow$ on n'a pas plusieurs fois la même valeur (sauf si celle-ci on était arrondi).

2. Fonctionne $\forall n$: même si n est petit, ce test est pertinent
3. Si $n \geq 100$, on fait un test asymptotique.

Hypothèse

— $H_0 =$ les X_i ont pour fdr. F_X
— $H_1 =$ les X_i n'ont pas pour fdr. F_X

Statistique de test

$$
\begin{aligned}
h(F_n, F) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} (\max(\left| \frac{i}{n} - F(X_{(i)}) \right|, \left| \frac{i-1}{n} - F(X_{(i)}) \right|))
\end{aligned}
$$

Zone de Rejet

Si n est petit

La loi de $h(F_n, F)$ est tabulé alors :

$$\mathcal{R} = \{h(F_n, F_X) \leq h_{1-\alpha}\}.$$

avec F_n fonction de réparation empirique, $h_{1-\alpha}$ le quantile à aller chercher dans la table

2.0.1 Si n est grand $n \geq 30$

Attention pas souvenir de l'avoir fait en TD.
On a pas la table de $h(F_n, F)$ mais on sait que

$$\sqrt{n} h_n \to^{\mathcal{L}}_{n\to\infty} W_\infty.$$

Donc on pose la zone de rejet

$$\mathcal{R} = \{h(F_n, F_X) \leq \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}}.$$

avec F_n fonction de réparation empirique, k_α le quantile de W_∞ à aller chercher dans sa table

Méthode

Pour trouver la valeur de $h(F_n, F_X)$: Faire le grand tableau puis trouver le max. Exemple :

i	1	2	3	4	5
$X_{(i)}$	0.3	0.7	0.9	1.2	1.4
$X_{(i)} - 2$	-1.70	-1.30	-1.10	-0.80	-0.60
$F_0(X_{(i)})$	0.04	0.10	0.14	0.21	0.27
$\frac{i}{n}$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
$\lvert\frac{i}{n} - F_0(X_{(i)})\rvert$	0.01	0.00	0.01	0.01	0.02
$\lvert\frac{i-1}{n} - F_0(X_{(i)})\rvert$	0.04	0.05	0.04	0.06	0.07

Table 1 – Ici le max c'est 0.07 à la dernière case

3 Le test du $\mathcal{X}^2$ d'ajustement

Conditions

1. Les X_i sont à valeur dans un ensemble fini (loi discrète). Si a valeur dans $\mathbb{N}$, on fusionne les classes à partir d'un certain rang choisis
2. Test asymptotique : $\forall k \in \{1, \ldots, d\}, np_k^{ref}(1 - p_k^{ref}) \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 20$

Si on ne remplis pas les conditions, on peut fusionner les classes

Hypothèse

$$H_0 = p = p^{ref} \text{ i.e. } \forall k \in \{1, \ldots, d\}, p_k = p_k^{ref}$$
$$H_1 = p \neq p^{ref} \text{ i.e. } \exists k \in \{1, \ldots, d\} : p_k \neq p_k^{ref}$$

Avec p^{ref} un vecteur fixé à tester (par exemple pour un lancé de dé $(\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$)

Statistique de test

$$D(\bar{p_n}, p^{ref}) = n \sum_{k=1}^{d} \frac{(\bar{p_{k,n}} - p_k^{ref})^2}{p_k^{ref}} \to_{n\to\infty}^{\mathcal{L}} \mathcal{X}^2(d-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{d} \frac{(N_{k,n} - np_k^{ref})^2}{np_k^{ref}}$$

avec

— $N_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i x_k}$ (ce qu'il y a dans le tableau de la consigne)

— $\bar{p_{k,n}} = \frac{N_{k,n}}{n}$ les proportions observés

Zone de Rejet

$$\mathcal{R} = \{D(\bar{p_n}, p^{ref}) \geq h_\alpha\}.$$

avec h_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d-1)$

Méthode

1. Etape 0 : On vérifie les conditions
$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, n * p_k \geq 5.$$
C'est la condition de Cochran (1954), il avait testé cas possible en observant l'approximation faites.
2. Etape 1 : On calcule les effectifs et proportions observées : $N_{k,n}$ et $\hat{p}_{k,n}$
3. Etape 2 : Calcul de la statistique de test
$$D = n \sum_{d}^{k=1} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k)^2}{p_k}.$$
4. Etape 3 : Détermination de la zone de rejet au niveau α. On lit h_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d_1)$
5. Etape 4 : Décisions
   — si $D > h_\alpha$, on rejette H_0 (au niveau α).
   — Si $D \leq h_\alpha$ on conserve H_0

Bilan de la méthode

Aspects positifs :

— **Fonctionne pour toutes les lois**

— Facile à faire

Aspects négatifs :

— Problème de consistance. Regrouper les variables par intervalle ruiner l'erreur de seconde espèce.

— Asymptotique

— Dépendant du choix des intervalles. Ce qui n'est pas canonique.

3.1 Le $\mathcal{X}^2$ d'ajustement à une famille paramétrique de loi

Pratiquement comme avant, pas encore fait en TD, mais copier collé du cours quand même

1. Etape 1 : Soit $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ (pour P_θ). On estime **tous** les paramètres de la loi $(p_1^{\hat{\theta}_n}, \dots, p_d^{\hat{\theta}_n})$
2. Etape 2 : On vas tester l'ajustement de $X_1, \dots, X_n$ à $P_{\hat{\theta}_n}$ On calcule les fréquences observées $\hat{p}_{k,n}$.
3. Etape 3 : Vérification des conditions $np_k^{\hat{\theta}_n}$ et possible regroupement en classes

4. Etape 4 : Calcul de la stat de test D
5. Etape 5 : Zone de rejet : lecture de H_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\mathcal{X}^2(d-1-M)$ avec M nombre de paramètre.
6. Etape 6 : Décision
   — $D > h_\alpha$ on rejette H_0
   — $D \leq h_\alpha$ on conserve H_0

4 Le test d'homogénéité de Kolmogorov-Smirnov

Conditions

— Deux échantillons indépendants de variable iid.

Hypothèse

— H_0 : les X_i et Y_i ont la même loi, c'est à dire $F_{X_1} = F_{V_1}$ où F_{X_1}, F_{Y_1} sont continues.
— H_1 les lois sont différentes

Statistique de test

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq t} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{Y_j \leq t} \right|.$$

Zone de Rejet

— Ce test est de taille α, si on utilise la table de $h_{n,m} = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i \leq s} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{V_j \leq s} \right|$.
— Si n et m sont trop grands, on utilise le résultat suivant :
Sous H_0

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} h(F_n, G_n) \rightarrow^{\alpha}_{n,m\rightarrow+\infty} W_\infty \text{ voir KS asymptotique.}$$

On utilise alors comme zone de rejet$\sqrt{\frac{n+m}{nm}} W_\infty$ avec W_∞ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de W_∞.

Méthode