Cours

Charles Vin

Date

Nouveau cours de la rentrée

...

Nouveau cours du 17/01

Rappel :

$$(P) \min f(x)$$
$$S.C \left\{ g(x) = 0 h(x) \leq 0 x \in \Omega \; \mathcal{A} = \{x \in \Omega : g(x) = 0, h(x) \leq 0\} \right.$$

Convexité

— Un ensemble E est un convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall t \in 0, 1 tx + (1-t)y \in E.$$

— Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ défini sur un convexe E. Alors f est une fonction convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0,1] : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

0.1 Problème convexes

(P) est un problème convexe si f est une fonction convexe et $\mathcal{A}$ est un convexe.
En plus si f est une fonction strictement convexe alors (P) est un problème strictement convexe.

Théorème 0.1. *Si (P) est un problème convexe et si $x^*, (\lambda^*, mu^*)$ vérifient les conditions KKT, alors X^* est solution optimale de (P).*

Théorème 0.2. *Tout minimum locale de (P) est également minimum globales de (P). En plus l'ensemble des minimums globales est un convexe.*

Théorème 0.3. *Si (P) est un problème strictement convexe et (P) admet une solution optimale, alors cette solution optimale est unique.*

1 Programmation linéaire

problème linéaire (peut s'écrire avec des matrices)

$$(P) \min C^T x \text{ (ou bien } < c, x >)$$
$$S.C \begin{cases} Ax = b \\ Cx \leq d \\ x \in \Omega \end{cases}$$

Exemple 1.1 (exemple 2.1.1.2)**.**

$$(P) \min c_1 x_1 + c_2 x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique $c_1 = 3, c_2 = 8$ traduire les contraintes en droite, les dessiner trouver la zone admissible.
On défini les courbes de niveau.

$$\begin{aligned} C_k &= \{x \in \mathcal{A} : f(x) = k\} \\ &= \{x_1, x_2 \in \mathcal{A} : 3x_1 + 8x_2 = k\} \end{aligned}$$

On a fait un truc avec ces courbe de niveau pour dire que c'était croissant puis on a choisis de prendre l'intersection de deux des équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \ 8 \\ x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 10((II) - (I)) \\ 2x_1 = 6(3(I) - (II)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases} \text{solution optimale.}$$

Valeur optimale : $9 + 40 = 49$

Exemple 1.2.

$$c_1 = c_2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \ 8 \\ 3x_2 + X_1 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \ 8 - x_1 \\ x_2 = \ \frac{18 - x_1}{3} \\ x_2 \leq 14 - 2x_1 \end{cases}$$

$$C_k = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : 3x_1 + 3x_2 = k\}$$

étape que j'ai pas compris lol + un dessin au tableau

Solution optimales $S = \{(x_1, 8 - x_1 : 3 \leq x_1 \leq 6)\} = \{(8 - x_2, x_2) : 2 \leq X_2 \leq 5\}$

Exemple 1.3 (numéros 3)**.**

$$\min 20x_1 + 25x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 2x_2 + X_1 \geq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$C_k = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : 3x_1 + 3x_2 = k\} \Leftrightarrow C_100 = \{20x_1 + 25x_2 = 100\} = \{$la courbe entre (0,4) et (5,0)$\}$
On dessine cette courbe
La fonction à min est décroissante car ...
Donc on suis les courbes parallèle à celle de Ck jusqu'a arriver au minimum

Solution optimales $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$, Valeur Optimale $= 50$

Définition 1.1.

1. Un polyèdre est une intersection de demiplans

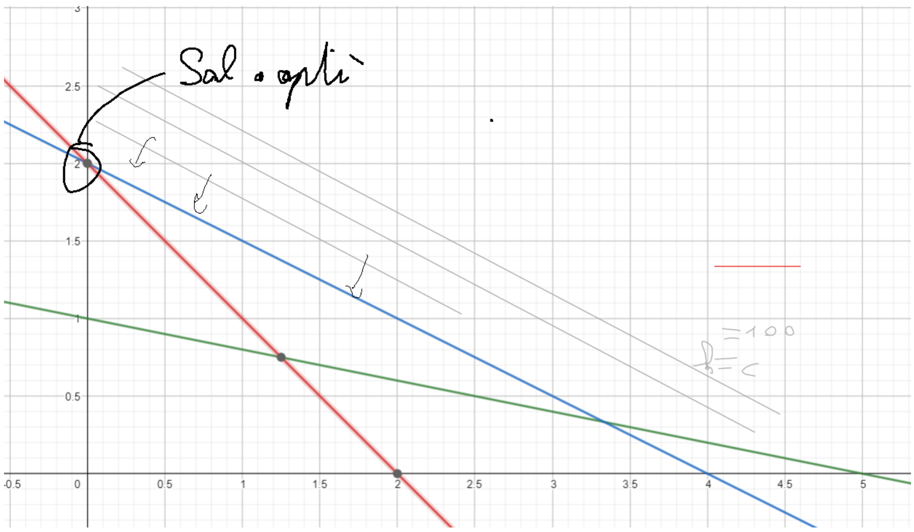
$$H(a_k, b_k) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_k x \leq b_k\}.$$

2. Un simplexe est un polyèdre borné
3. Un sommet est un point du polyèdre qu'on

Nouveau cours du 24/01

Rappel :

1. Une contraintes $h(x) \leq 0$ est saturée (ou «active») au point $x^* \in \mathcal{A}$ si $h(x^*) = 0$.
   Remarque : les contraintes d'égalitées $g(x) = 0$ sont saturées en tout $x \in \mathcal{A}$
2. Une matrice est de rang r si il existe une sous-matrice carrée de taille r dont le déterminant est non-null et pour toute sous-matrice de tailel plus élever le déterminant vaut 0.



Théorème 1.1 (4, p13)**.** *Un point x est un sommet du polyèdre $\mathcal{A}$ si la matrice de contraintes saturées est de rang n.*

Si le nombre de contraintes saturées vaut exactement n alors x est un sommet non-dégénéré. En revanche, si le nombre de contraintes saturées est strictement supérieur à n, alors x est un sommet dégénéré.

Supposons qu'on a p contraintes d'égalité, q contraintes d'inégalités, n variables. Alors le nombre de sommets du polyèdre est limité à $\binom{q}{n-p} = \frac{q!}{(n-p)!(q-n-p)!}$

Exemple 1.4 (Exercice 12, p28)**.**

$$(p)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ -x_1 - 2x_3 \leq -1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_3 \leq 3 \quad , p)0, q=7, n=3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Le nombre de sommets est limité par $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5}{1*2*3} = 35$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_1(2,0,0), \begin{cases} 2 < 11 \\ 2 < -1 \\ 2 = 2 \\ 0 < 3 \\ 2 < 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$m = 3 = n, A_S = \begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,-1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix} \det A_S = 1 \neq 0 \text{ donc } rang(A_S) = 3.$$

On en déduit que P_1 est un sommet non-dégénéré.

Autre Point : $P_2(2,0,3)$

$$P_1(2,0,0), \begin{cases} 11 = & 11 \\ 8 < & -1 \\ 2 = & 2 \\ 3 = & 3 \\ 2 < & 0 \\ 0 = & 0 \\ 3 \leq & 0 \end{cases}$$

Les contraintes saturées sont là ou les trucs sont égales!! On remet ces équations dans la matrice A_S.

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}) = 1 \neq 0 \text{ donc } Rang(A_S) = 3(= n).$$

Donc matrice dégénéré (car y'a un truc avec $3 = n < m$).
Autre Point : $P_3(0,5,3)$

$$P_1(2,0,0), \begin{cases} 11 = & 11 \\ 1 = & -1 \\ 1 < & 2 \\ 0 < & 3 \; m = 3(= n) \\ 1 < & 0 \\ 5 < & 0 \\ 0 = & 0 \end{cases}$$

Les contraintes saturées sont là ou les trucs sont égales!! On remet ces équations dans la matrice A_S.

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(A_S) = -1 \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = -2 \neq 0 \text{ donc } Rang(A_S) = 3(= n).$$

Donc P_3 est un sommet non-dégénéré

Théorème 1.2 (6). *Si (P_L) admets des solutions optimales et si la matrice des contraintes est de rang n, alors au moins une des solutions optimales est une sommet de $\mathcal{A}$*

1.1 La forme standard

$$\begin{aligned} &(P_L) \min f^T x \\ &\quad s.c \begin{cases} A_x = & b \\ Cx \leq dx \in \mathbb{R}^n \end{cases} \\ &(P_S) \min f^T x \\ &\quad s.c \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tout problème (P_L) peut s'écrire sous la forme (P_S) car

1. $\max f^T x \Leftrightarrow \min -f^T x$
2. $a^T x \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x + y = b \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x \geq b \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x - y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$

3. $x_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = x_{k_1} - x_{k_2} \\ x_{k_1}, x_{k_2} \geq 0 \end{cases}$

Exemple 1.5 (Exercice 14 page 28)**.**

$$
\begin{aligned}
&(P_L) \max x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
&\quad S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1, x_3 \geq 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \\
&(P_S) \min -(x_1 + 5(x_{2,1} - x_{2,2}) + 2x_3) \\
&\quad S.C \begin{cases} x_1 + 3(x_{21} - x_{22}) + y_1 = 10 \\ x_1 + (x_{21} - x_{22}) + x_3 + y_2 = 9 \\ x_1, x_{22}, x_{21}, x_3 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(P_L) \max -x_1 + x_2 - x_3 \\
&\quad S.C \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \geq 7 \\ x_1 + 2x_1 + x_3 \leq 9 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \\
&(P_S) - x_1' - x_{21} + x_{22} + x_3 \\
&\quad S.C \begin{cases} -3x_1' - 3x_{21} + 3x_{22} - y_1 = -7 \\ -x_1' + 2x_{21} - 2x_{22} + x_3 + y_2 = 9 \\ x_1' \geq 0 \\ x_{21}, x_{22} \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Considérons la partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en

— en $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ (indices des variables de base)

— et $H = \{i_{p+1}, \ldots, i_n\}$ (indices des variables h de base (?))

de facon que $B \cup H = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $B \cap H = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
x &= (x_B, x_H) \\
A &= (A^B, A^H) \\
f^T &= (f_B^T, f_H^T)
\end{aligned}
$$

Si il existe B et H tq

1. (A^B) est inversible
2. $x_B = (A^B)^{-1} b \geq 0$

alors $x(B) = (x_b, x_h)$ est un sommet.

Exemple 1.6 (Exo 17, p 29)**.**

$$\min 2x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 - 1 \quad\quad p = 2, n = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$
$$B_1 = \{2, 4\}, H_1 = \{1, 3\}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_1} = 1 \neq 0 \text{ donc } A^B \text{ est inversible}$$
$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \ngeq 0$$

La base B_1 n'est pas «réalisable» (elle ne correspond à aucun sommet)

Exemple 1.7.

$$B_q = \{1, 2\}, \text{ donc } H_2 = \{3, 4\}$$
$$A^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_2} = 6 \neq 0, \text{ donc } A^{B_2} \text{ est inversible}$$
$$x_{B_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 19/6 \end{pmatrix} > 0$$

Donc B_2 est une base réalisable non-dégénéré. Sommet non-dégénéré $P(\frac{5}{6}, \frac{19}{6}, 0, 0)$

Exemple 1.8.

$$x_{B_3} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 12/5 \end{pmatrix} > 0$$

donc B_3 est une base réalisable non dégénéré.

Nouveau cours du 31/01

2 Algorithme du simplexe

— $B_k = \{i_1, \ldots, i_p\}$ (les indices des variables de base)
— $H_k = \{i_{p+1}, \ldots, i_n\}$ (les indices des variables hors base)

Si A^{B_c} est inversible et si $X_{B_k} = (A^{B_k})^{-1} b \geq 0$ alors $X_{B_k} = (X_{b_k}, X_{H_k})$ avec $X_{H_k} = 0$ est un sommet de l'ensemble $\mathcal{A}$ et on dit que la base B_k est réalisable.

— Si $X_{b_k} > 0$ alors $X(B_k)$ est un sommet non-dégénéré et B_k est uen base non-dégénéré
— Si $X_{b_k} \geq 0$ mais pas strictement positif alors $X(B_k)$ est un sommet dégénéré et B_k est une base dégénéré

Le but est maintenant de construre une suite minimisante $\{B_k\}_{k \geq 0}$ tel que $\forall k, l \in \mathbb{N}$ avec $k < l$: $f(X(B_k)) > f(X(B_l))$.

Comme $\forall k, l \in \mathbb{N}$ avec $k \neq l$ on a $B_k \neq B_l$ et puisque le nombre de sommet est fini, cette suite converge vers la solution optimale dans un nombre fini d'itération.

Soit donner la réalisable B_k

$$\begin{aligned}
AX(B_k) = b \Leftrightarrow [A^{B_k}, A^{H_k}] &\begin{pmatrix} X_{B_k}, X_{H_k} \\ = \end{pmatrix} b \\
&\Leftrightarrow A^{B_k} X_{B_k} + A^{H_k} X_{H_k} = b \\
&\Leftrightarrow A^{B_k} X_{b_k} = b - A^{H_k} X_{H_k} \\
&\Leftrightarrow X_{B_k} = (A^{B_k})^{-1} b - (A^{B_k})^{-1} A^{H_k} X_{H_k} \\
&= f_{B_k}^T X_{B_k} + f^T ?^{H_k} X_{H_k} \\
&= f^T (A^{B_k})^{-1} b - f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} A^{H_k} X_{H_k} + f_{H_k}^T X_{H_k} \\
&= f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} b - [f_{B_k}^T (A_{B_k})^{-1} A^{H_k} - f_{H_k}^T] X_{H_k} \\
&= f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} b - C^{H_k} X_{H_k} \text{ (les couts reduits)}
\end{aligned}$$

Si $C^{H_k} \geq 0$ alors $X(B_k)$ est minimum global. Sinon on prend $e = \arg\min(C^{H_k}) \rightarrow X_e$ variable entrente, $e \in H_k, e \notin B_k$ sinon $e \in B_{k+1}, e \notin H_{k+1}$

Déterminer la variable sortante

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, Il faut que

$$\begin{aligned}
(A^{B_k})^{-1} b - [(A^{B_k})^{-1} A^{H_k}]_e t \geq 0 \\
\Leftrightarrow t = \min\{\frac{(A_k)^{-1} b}{[\dots]_e}\} \text{ composant par composant} \\
\arg\min\{\frac{(A^{B_k})^{-1}}{[\dots]_e}\} = s \\
B_{k+1} = (B_k \setminus \{s\}) \cup \{e\}
\end{aligned}$$

Exemple 2.1 (Exercice 17)**.**

$$\min 2x_1 + 2x_2$$

$$S.C. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ X_i \geq 0, i \in [1, 4] \end{cases}$$

$$f^T = (2, 2, 0, 0) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avec $B_1 = \{2, 4\}$ (et alors $H_1 = \{1, 3\}$)

$$A^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_1} = 1 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_1} = (A^{B_1})^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \ngeq 0 \text{ donc } B_1 \text{ n'est pas réalisable.}$$

Avec $B_2 = \{1, 2\}$ (et alors $H_2 = \{3, 4\}$)

$$A^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_2} = 1 + 5 = 6 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_2} = (A^{B_2})^{-1} b = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 19/6 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ donc } B_2 \text{ est une base réalisable non dégénéré.}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
C^{H_2} &= f_{H_2}^T - f_{B_2}^T (A^{B_2})^{-1} A^{H_2} \\
&= (0,0) - (2,2) \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -(2,2) \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= -(12/6, 0) = (-2, 0) \ngeq
\end{aligned}$$

Donc B_2 ne satisfait pas les CSO (condition suffisante d'optimalité)
Avec $B_3 = \{1,3\}$ (et alors $H_2 = \{2,4\}$)

$$A^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \det A^{B_3} = 5 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_3} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 19/5 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ donc } B_3 \text{ est une base réalisable non dégénéré.}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
C^{H_3} &= f_{H_3}^T - f_{B_3}^T (A^{B_3})^{-1} A^{H_3} \\
&= (2,0) - (2,0) \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (2,0) - (0, -2/5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (2,0) - (-2/5, -2/5) = (12/5, 2/5) \geq \text{ donc } B_3 \text{ satisfait les CSOs}
\end{aligned}$$

On en déduit que la solution optimale est $\bar{X} = \left(\begin{smallmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 19/5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Exemple 2.2. Voir one note