Statistiques décisionnelles : TD 2

Pour appliquer le test de Kolomogorov-Smirnov, il faut aller lire la documentation de `ks.test` avec la commande `? ks.test`. Attention, `ks.test` donne la valeur de la statistique de test D ainsi que la p-valeur. Les exemples donnés ici peuvent tous être traités à la main.
Exemple de commande : $X = c(2.92, 2.62, 2.19, 2.65, 2.68, 2.89, 2.86, 2.65, 2.49, 2.62)$ ks.test(X,"punif") Pour tester l'adéquation à la loi uniforme sur $[2, 3]$ on pourra au choix faire

- ks.test(X-2,"punif")
- F=function(t)
  (t-2)*(t>2)*(t<3)+(t>=3)
  ks.test(X,"f")
- Où aller chercher dans la documentation de ks.test pour trouver comment spécifier les paramètres de la loi uniforme.

Enfin, les fonctions de répartion des lois classiques sont de la forme p+nom de la variable, comme pnorm, punif ou pexp.

Exercice 1. *On dispose de* 10 *résultats de simulation de la loi uniforme sur* $[0, 1]$ *(obtenus par* `runif(10)` *en R par exemple) :*

$$0,134 \quad 0,628 \quad 0,789 \quad 0,905 \quad 0,250 \quad 0,563 \quad 0,790 \quad 0,470 \quad 0,724 \quad 0,569.$$

Étudiez si cet échantillon conduit à rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle le tirage a bien eu lieu selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. *Quel test choisissez-vous ? et pourquoi ?*

Exercice 2. *Testez, au niveau* 90% *si la variable aléatoire* X *suit une loi normale* $\mathcal{N}(2, 1)$ *connaissant l'observation suivante d'un* 20*-échantillon :*

$$0,3 \quad 0,7 \quad 0,9 \quad 1,2 \quad 1,4 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 1,5 \quad 1,6 \quad 1,9$$

$$2,0 \quad 2,1 \quad 2,1 \quad 2,3 \quad 2,5 \quad 2,6 \quad 2,7 \quad 3,0 \quad 3,8 \quad 3,9$$

Quel test veut-on appliquer ? Que doit-on calculer ? Comment peut-on calculer les valeurs prises par la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(1, 2)$ *à partir de la table de la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *?*

Exercice 3. *Testez, au niveau* 90% *si la variable aléatoire* X *suit une loi de Cauchy en connaissant l'observation suivante d'un* 8*-échantillon :*

$$9.2 \quad -0.90 \quad 55.1 \quad 2.10 \quad -1.5 \quad 5.7 \quad 4.3 \quad -1.1.$$

Pour rappel, la loi de Cauchy a pour densité et pour fonction de répartition

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \text{et } F_C(x) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x).$$

Reprendre l'exercice en testant, toujours au niveau 90% *si ces données pouvaient provenir d'une loi normale* $\mathcal{N}(0, 4)$.

Exercice 4. *On observe* 10 *valeurs prises par des variables aléatoires i.i.d.*

$$2.92 \quad 2.62 \quad 2.19 \quad 2.65 \quad 2.68 \quad 2.89 \quad 2.86 \quad 2.65 \quad 2.49 \quad 2.62$$

1. *Ces données sont-elles cohérentes avec un tirage selon la loi uniforme sur* $[2, 3]$ *?*
2. *Au vu de la fonction de répartition empirique, on pense que ces données pourraient avoir la même loi que* $2 + Z$ *où* Z *est une variable aléatoire de densité* $f(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$*. Cette hypothèse est-elle crédible si on souhaite se tromper moins de* 5% *du temps ?*