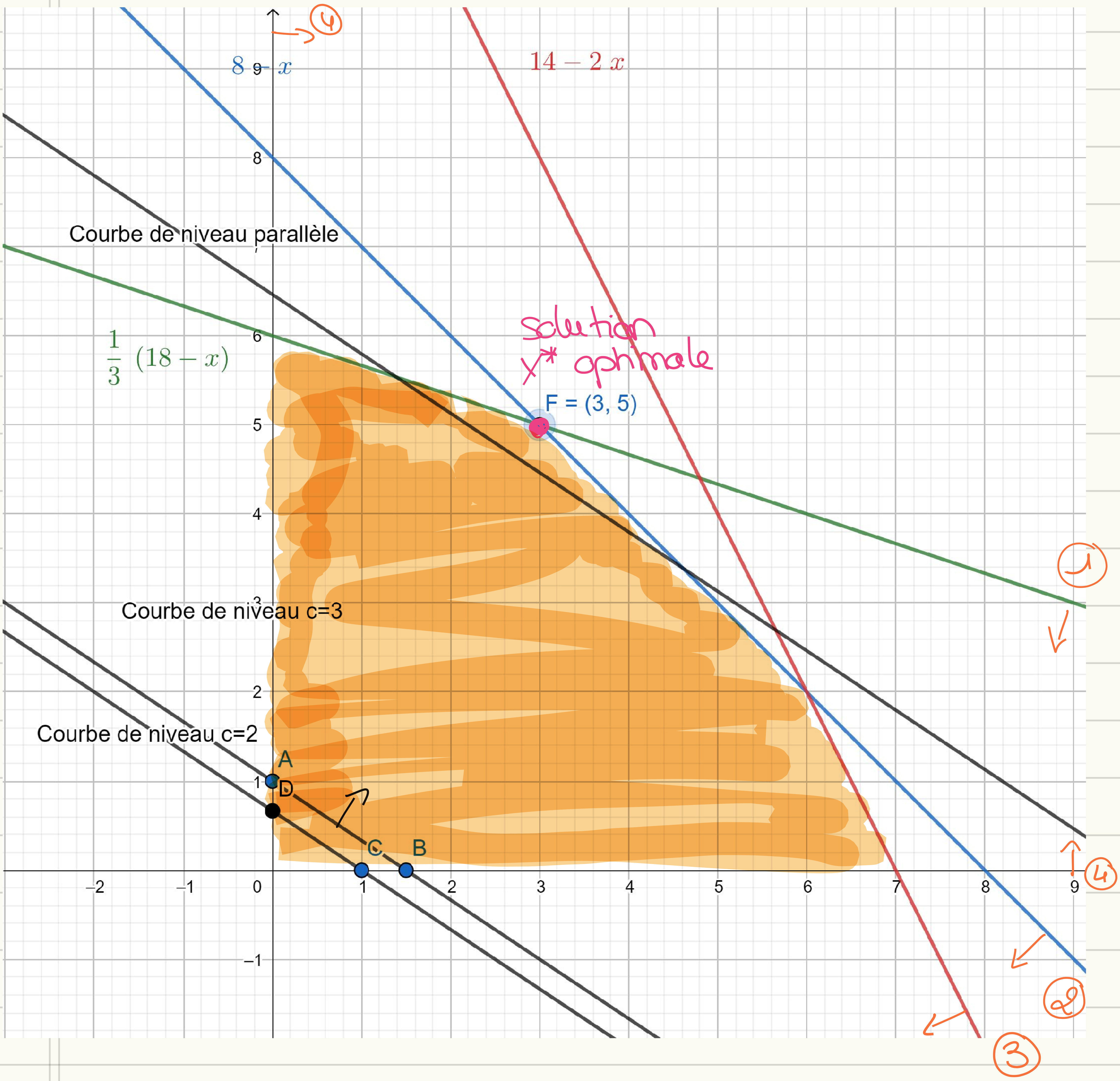
Dupas Jessica
Vin Charles

TP : Optimisation

Exercice 1 :

1. max $2x_1 + 3x_2 = \text{cste}$

$$\text{s.c} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 8 & (2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$



X^* est la solution optimale
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ x_1 = 8 - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (8 - x_2) + 3x_2 = 18 \\ x_1 = 8 - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 2x_2 = 18 \\ x_1 = 8 - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{18 - 8}{2} = 5 \\ x_1 = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

La solution optimale est $X^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
Ainsi, la valeur optimale est :

$$2x_1^* + 3x_2^* = 2 \times 3 + 3 \times 5 = 6 + 15$$
$$= 21$$

2. Ecrivons le problème (P) sous forme standard :

* Pour le rentrer, dans scilab, le problème de maximisation deviendra un problème de minimisation

$$(P_S) \quad \min \; -2X_1 - 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

$$\text{s.c} \begin{cases} X_1 + 3X_2 + X_3 = 18 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 8 \\ 2X_1 + X_2 + X_5 = 14 \\ X_i \geq 0 \;, \; i \in [\![1,5]\!] \end{cases}$$

3. a) Sans donner de base initiale

```
SIMPLEX: Solution optimale en 0 iterations

  -21.

  "La valeur de la solution est"

   3.0000000
   5.
   0.
   0.
   3.0000000

  "La solution x est"
```

On remarque que la valeur optimale est -21 et non 21 comme dans la résolution graphique. Cela est dû au changement passant de maximisation à minimisation.

La solution X^* est cohérente avec la résolution graphique.

X_3^* et X_4^* valent 0, ce qui indique que les contraintes 1 et 2 sont saturées.

- En donnant une base initiale (base triviale)

```
SIMPLEX: Solution optimale en 2 iterations.

 -21.

 "La valeur de la solution est"

  3.0000000
  5.
  0.
  0.
  3.0000000

 "La solution x est"
```

Les sorties de ce second algorithme sont identique au premier (sans base initiale)

Exercice 2 :

1. Variables qui interviennent :

   P_i = quantité du i-ème produit, $i \in [\![1,5]\!]$

   Objectif :

   maximiser $3P_1 + 4P_2 + P_3 + 7P_4 + 2P_5$

   Contraintes :

   - quantité maximale disponible du matériel M_1 :

     $$P_1 + P_2 + 2P_4 \leq 8$$

   - quantité maximale disponible du matériel M_2 :

     $$P_1 + 2P_3 \leq 4$$

- quantité maximale disponible du matériel M_3 :

$$2P_2 + P_5 \leq 9$$

- quantité maximale disponible du matériel M_4 :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \leq 16$$

Problème à résoudre :

$$(P) \quad \max \; 3P_1 + 4P_2 + P_3 + 7P_4 + 2P_5$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} P_1 + P_2 + 2P_4 \leq 8 \\ P_1 + 2P_3 \leq 4 \\ 2P_2 + P_5 \leq 9 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \leq 16 \\ P_i \geq 0, \; i \in [\![1, 5]\!] \end{cases}$$

Sous forme standard

$$(P_S) \quad \min \; -3P_1 - 4P_2 - P_3 - 7P_4 - 2P_5$$

$$\text{s.c} \begin{cases} P_1 + P_2 + 2P_4 + P_6 = 8 \\ P_1 + 2P_3 + P_7 = 4 \\ 2P_2 + P_5 + P_8 = 9 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_9 = 16 \\ P_i \geq 0, \; i \in [\![1, 9]\!] \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$f = (-3, -4, -1, -7, -2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Choix trivial

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. a) Sans donner une base initiale

```
SIMPLEX: Solution optimale en 2 iterations.

 -48.

 "La valeur de la solution est"

  0.
  0.
  2.
  4.
  9.
  0.
  0.
  0.
  1.

 "La solution x est"
```

La valeur optimale semble être 48
Et la solution optimale est :

$$x^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) En donnant la base initiale

```
SIMPLEX: Solution optimale en 3 iterations.

 -48.

 "La valeur de la solution est"

  0.
  0.
  2.
  4.
  9.
  0.
  0.
  0.
  1.

 "La solution x est"
```

Les résultats concordent avec ou sans base initiale

Exercice 3 :

1) Modélisation en programme linéaire :

Variables qui interviennent :

x_{1_i} : la i-ème matière première de l'aliment sous forme de granulés

x_{2_i} : la i-ème matière première de l'aliment sous forme de farine

avec $i \in [\![1,3]\!]$

où $i = 1$ correspond à l'avoine

$i = 2$ correspond au maïs

$i = 3$ correspond à la mélasse

Objectif :

minimiser le coût total

$$x_{1_1}(0,8+1,5+0,3+2,5)$$
$$+ x_{1_2}(1+1,5+0,3+2,5)$$
$$+ x_{1_3}(0,75+0,3+2,5)$$
$$+ x_{2_1}(0,8+1,5+0,3+1)$$
$$+ x_{2_2}(1+1,5+0,3+1)$$
$$+ x_{2_3}(0,75+0,3+1)$$

$$= 5,1x_{1_1} + 5,3x_{1_2} + 3,55x_{1_3} + 3,6x_{2_1} + 3,8x_{2_2} + 2,05x_{2_3}$$

Contraintes :

1 • Teneur souhaitée en protéines par les aliments en granulés : (en %)

$$13{,}6X_{11} + 4{,}1X_{12} + 5X_{13} \geq 9{,}5(X_{11} + X_{12} + X_{13})$$

2 • Teneur souhaitée en protéines pour les aliments en farine : (en %)

$$13{,}6X_{21} + 4{,}1X_{22} + 5X_{22} \geq 9{,}5(X_{21} + X_{22} + X_{23})$$

3 • Teneur souhaitée en lipides pour les aliments en granulés : (en %)

$$7{,}1X_{11} + 2{,}4X_{12} + 0{,}3X_{13} \geq 2(X_{11} + X_{12} + X_{13})$$

4 • Teneur souhaitée en lipides pour les aliments en farine : (en %)

$$7{,}1X_{21} + 2{,}4X_{22} + 0{,}3X_{23} \geq 2(X_{21} + X_{22} + X_{23})$$

5 • Teneur souhaitée en glucides pour les aliments en granulés : (en %)

$$7X_{11} + 3{,}7X_{12} + 25X_{13} \leq 6(X_{11} + X_{12} + X_{13})$$

6 • Teneur souhaitée en glucides pour les aliments en farine : (en %)

$$7X_{21} + 3{,}7X_{22} + 25X_{23} \leq 6(X_{21} + X_{22} + X_{23})$$

7 • quantité maximale d'avoine (en kg) :

$$X_{11} + X_{21} \leq 11\,900$$

8 • Quantité maximale de maïs (en kg) :

$$X_{12} + X_{22} \leq 23\,500$$

9 • quantité maximale de mélasse (en kg) :

$$X_{13} + X_{23} \leq 750$$

10 • Fabrication minimale de granulés (en kg) :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 9000$$

9 tonnes = 9000 kg

11 • Fabrication minimale de l'aliment en farine (en kg) :

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \geq 12\,000$$

12 tonnes = 12000 kg

Problème linéaire à résoudre :

$$\min\ 5{,}1X_{11} + 5{,}3X_{12} + 3{,}55X_{13} + 3{,}6X_{21} + 3{,}8X_{22} + 2{,}05X_{23}$$

$$(P)\quad \text{s.c}\ \begin{cases} 4{,}1X_{11} - 5{,}4X_{12} - 4{,}5X_{13} \geq 0 \\ 4{,}1X_{21} - 5{,}4X_{22} - 4{,}5X_{23} \geq 0 \\ 5{,}1X_{11} + 0{,}4X_{12} - 1{,}7X_{13} \geq 0 \\ 5{,}1X_{21} + 0{,}4X_{22} - 1{,}7X_{23} \geq 0 \\ X_{11} - 2{,}3X_{12} + 19X_{13} \leq 0 \\ X_{21} - 2{,}3X_{22} + 19X_{23} \leq 0 \\ X_{11} + X_{21} \leq 11900 \\ X_{12} + X_{22} \leq 23500 \\ X_{13} + X_{23} \leq 750 \\ X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 9000 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} \geq 12000 \\ X_{1i} \geq 0,\ i \in [\![1,3]\!] \\ X_{2i} \geq 0,\ i \in [\![1,3]\!] \end{cases}$$

2) Sous forme standard, le problème est :

$$\min\ 5,1X_{11}+5,3X_{12}+3,55X_{13}+3,6X_{21}+3,8X_{22}+2,05X_{23}$$

$$(P_S)\quad \text{s.c}\ \left\{\begin{aligned}
&4,1X_{11}-5,4X_{12}-4,5X_{13}-Y_1=0\\
&4,1X_{21}-5,4X_{22}-4,5X_{23}-Y_2=0\\
&5,1X_{11}+0,4X_{12}-1,7X_{13}-Y_3=0\\
&5,1X_{21}+0,4X_{22}\quad 1,7X_{23}-Y_4=0\\
&X_{11}-2,3X_{12}+19X_{13}+Y_5\quad 0\\
&X_{21}-2,3X_{22}+19X_{23}+Y_6\quad 0\\
&X_{11}+X_{21}+Y_7=11900\\
&X_{12}+X_{22}+Y_8=23500\\
&X_{13}+Y_{23}+Y_9=750\\
&X_{11}+X_{12}+X_{13}-Y_{10}=9000\\
&X_{21}+X_{22}+X_{23}-Y_{11}=12000\\
&X_{1i}\geq 0,\ i\in[\![1,3]\!]\\
&X_{2i}\geq 0,\ i\in[\![1,3]\!]\\
&Y_j\geq 0,\ j\in[\![1,11]\!]
\end{aligned}\right.$$

On obtient :

$$f=(5,1\ 5,3\ 3,55\ 3,6\ 3,8\ 2,05\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$A=\begin{pmatrix}
4,1 & -5,4 & -4,5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4,1 & -5,4 & -4,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
5,1 & 0,4 & -1,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 5,1 & 0,4 & -1,7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -2,3 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2,3 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\11900\\23500\\750\\9000\\12000\end{pmatrix}$$

3) L'algorithme utilisé est celui sans base initiale, puisque nous n'avons pas de choix trivial dans ce problème d'optimisation.

⟹ Sans base initiale.

```
SIMPLEX: Solution optimale en 1 iterations.

  90177.859

 "La valeur de la solution est"

  5098.5555
  3719.5305
  181.91393
  6798.0740
  4959.3741
  242.55191
  0.
  0.
  27181.192
  36241.589
  0.
  0.
  3.3704484
  14821.095
  325.53416
  0.
  0.

 "La solution x est"
```

La valeur optimale est 90177,859

La solution optimale est

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* \\ x_{12}^* \\ x_{13}^* \\ x_{21}^* \\ x_{22}^* \\ x_{23}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5098.55 \\ 3719.53 \\ 181.91 \\ 6798.07 \\ 4959.37 \\ 242.55 \end{pmatrix}$$