Optimisation avec contraintes, exos 15 et 16

Exercice 15 D'abord on vérifie la qualification des contraintes en utilisant Fiacco :

$$\begin{cases} h(x) = x^T x - 1 = 0 \\ z\nabla h(x) = 2zx^T = (0,0)^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2zx_1 = 0 \\ 2zx_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ (z = 0) \vee (x_1 = 0) \\ (z = 0) \vee (x_2 = 0) \end{cases}$$

Pour $z \neq 0$ il faut que $x = (0,0)^T$. Or $h(0,0) = -1 \neq 0$. On en déduit que $\nabla h(x)$ est linéairement indépendant en tout point admissible où la contrainte est saturée. Les contraintes sont donc qualifiées en tout point admissible. D'aprés le Théorème KKT, si x^* est solution optimale de (P), alors x^* vérifie les condition KKT. Notez que $\max f(x) = -\min -f(x)$ avec $f(x) = x_1 x_2$, donc la fonction de Lagrange est $L(x,\mu) = -f(x) - \mu h(x) = -x_1x_2 - \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1)$. Du coup le système KKT devient

$$\begin{cases} -x_2 - 2\mu x_1 = 0 \\ -x_1 - 2\mu x_2 = 0 \\ \mu \leqslant 0 \\ \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2\mu x_1 \\ x_1 = -2\mu x_2 \\ \{(\mu = 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0)\} \vee \{(\mu \leqslant 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 = 1)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4\mu^2 x_2 \\ x_1 = -2\mu x_2 \\ \{(\mu = 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0)\} \vee \{(\mu \leqslant 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 = 1)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 = 0) \vee (4\mu^2 = 1) \\ x_1 = -2\mu x_2 \\ \{(\mu = 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0)\} \vee \{(\mu \leqslant 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 = 1)\} \end{cases}$$

Pour $\mu = 0$ on a $x = (0,0)^T$ et $h(0,0) = -1 < 0$. Puis, pour $\{(4\mu^2 = 1) \wedge (\mu \leqslant 0)\} \Leftrightarrow \left(\mu = -\frac{1}{2}\right)$ on a

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

Il y a donc trois candidats à optimum : $(0,0)^T$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Finalement on remarque que l'ensemble admissible est fermé et borné, donc compact, et que $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. D'après Corollaire 1 il existe au moins une solution optimale. Étant donné que

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} > 0 = f(0,0),$$

on en déduit que (P) admet deux solutions optimales : $x^* = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

Exercice 16

1. On a deux contraintes d'inégalités $h_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 8x_2 \leq 0$ et $h_2(x_1, x_2) = 8x_2 - 2x_1^2 \leq 0$. D'après Fiacco-McCormick les contraintes sont qualifiées en un point admissible $x = (x_1, x_2)^T$ si les gradients de toutes les contraintes saturées en x sont linéairement indépendants. Calculons les gradients de h_1 et h_2 :

$$\nabla h_1(x_1, x_2) = (3x_1^2, -8) \quad \text{et} \quad \nabla h_2(x_1, x_2) = (-4x_1, 8).$$

Les contraintes sont certainement qualifiées en x si aucune contrainte est saturée en x. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $\nabla h_1(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ et $\nabla h_2(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, on en déduit que les contraintes sont aussi qualifiées en x s'il n'y a qu'une seule contrainte saturée. Finalement on a

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = 0 \\ h_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \{(0, 0),\ (2, 1)\}.$$

Pour $(x_1, x_2) = (2, 1)$ on a

$$\alpha \nabla h_1(2, 1) + \beta \nabla h_2(2, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0).$$

Les gradients sont donc linéairement indépendent en $(2, 1)$ ce qui implique que les contraintes sont qualifiées en $(2, 1)$. Par contre, pour $(x_1, x_2) = (0, 0)$ on a

$$\nabla h_1(0, 0) + \nabla h_2(0, 0) = (0, 0).$$

Donc les gradients ne sont pas linéairement indépendent en $(0, 0)$. En plus, il n'existe aucun $v = (v_1, v_2)^T$ vérifiant la condition de Mangasarian-Fromovitz :

$$\begin{cases} \nabla h_1(0, 0)v = -8v_2 < 0 \\ \nabla h_2(0, 0)v = 8v_2 < 0 \end{cases},$$

ce qui implique que les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0, 0)$.

2. D'abord on note que le problème (P) est équivalent à

$$(P') \quad - \min_{x_1^3 \leq 8x_2 \leq 2x_1^2} -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2.$$

On applique maintenant le théorème KKT au problème (P') : La fonction objective est $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2$ et les contraintes d'(in-)égalités sont $h_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 8x_2 \leq 0$ et $h_2(x_1, x_2) = 8x_2 - 2x_1^2 \leq 0$. La lagrangienne est donc

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) &= f(x_1, x_2) - \mu_1 h_1(x_1, x_2) - \mu_2 h_2(x_1, x_2) \\ &= -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 - \mu_1(x_1^3 - 8x_2) - \mu_2(8x_2 - 2x_1^2). \end{aligned}$$

Alors les conditions KKT deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1 - 1) - 3\mu_1 x_1^2 + 4\mu_2 x_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_2 - 1) + 8\mu_1 - 8\mu_2 = 0 \\ \mu_1 \leq 0,\ \mu_2 \leq 0 \\ \mu_1 h_1(x_1, x_2) = \mu_1(x_1^3 - 8x_2) = 0 \\ \mu_2 h_2(x_1, x_2) = \mu_2(8x_2 - 2x_1^2) = 0 \end{cases}.$$

3. Pour $(x_1, x_2) = (2, 1)$ on a bien $\mu_1 h_1(2, 1) = 0$ et $\mu_2 h_2(2, 1) = 0$ car $h_1(2, 1) = 0 = h_2(2, 1)$. Il reste donc à démontrer qu'il existe $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$ tels que $\nabla L(2, 1, \mu_1, \mu_2) = (0, 0)$. On a

$$\begin{aligned}
\nabla L(2,1,\mu_1,\mu_2) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} L(2,1,\mu_1,\mu_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(2,1,\mu_1,\mu_2) = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 - 12\mu_1 + 8\mu_2 = 0 \\ 8\mu_1 - 8\mu_2 = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 - 4\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \mu_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = -\frac{1}{2} < 0.
\end{aligned}$$

4. Les candidats à optimum sont $x = (0, 0)^T$ (car les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0, 0)^T$) et $x = (2, 1)^T$ (car c'est le seul point admissible qui satisfait les conditions KKT). Soit $F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$. Alors $F(0, 0) = 2$ et $F(2, 1) = 1 < 2$. La solution optimale est donc $x = (0, 0)^T$ et la valeur optimale est 2. Notez que pour $k > 0$ constante, $F(x_1, x_2) = k^2$ est l'équation cartisienne d'un cercle à centre $(1, 1)$ et rayon k. La solution optimale de (P) est donc le point le plus éloigné du point $(1, 1)$ et la valeur optimale de (P) est la distance en carrée.