UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2018–2019

Corrigé DS 1$^{\text{er}}$ mars 2019

Exercice 1 Problème de modélisation :
Petroco est une entreprise qui fabrique trois types d'essence : E_1, E_2 et E_3. Chacun de ces trois types est produit par trois types de pétrole brut : P_1, P_2 et P_3. Le prix de vente de chacun des trois types d'essence et le prix d'achat de chacun des trois types de pétrole brut sont donnés dans le tableau suivant :

	prix de vente (en euros par baril)		prix d'achat (en euros par baril)
E_1	210	P_1	135
E_2	180	P_2	105
E_3	150	P_3	75

Les propriétés dans lesquelles les trois mélanges se différencient sont leur indice d'octane et leur teneur en soufre. Il faut que E_1 ait un indice d'octane d'au moins 10 et ne contient pas plus de 1% de soufre ; E_2 ait un indice d'octane d'au moins 8 et ne contient pas plus de 2% de soufre ; E_3 ait un indice d'octane d'au moins 6 et ne contient pas plus de 1% de soufre. L'indice d'octane et le teneur en soufre de chacun des trois types de pétrole brut sont donnés dans le tableau suivant :

	P_1	P_2	P_3
indice d'octane	12	6	8
teneur en soufre	0.5%	2.0%	3.0%

Le coût de production pour la conversion du pétrole brut en essence est 12 euros par baril, et la raffinerie de Petroco responsable de ce processus peut traiter un maximum de 14000 barils de pétrole par jour. Afin de répondre à la demande des distributeurs qui achètent de l'essence à Petroco, il faut que Petroco produit au moins 3000 barils de E_1, 2000 barils de E_2 et 1000 barils de E_3 par jour. En outre, Petroco a la possibilité d'augmenter cette demande par le biais de la publicité. Une étude de marché a montré que, pour chaque 100 euros dépensés par jour en publicité pour l'un des trois types d'essence, la demande pour ce type augmente d'un baril par jour. De plus, il faut que toute l'essence soit vendue le jour de sa production ; il n'y a donc pas d'essence en stock. Enfin, Petroco peut acheter jusqu'à 5000 barils de chaque type de pétrole brut par jour. Quel problème d'optimisation doit-on résoudre pour maximiser le profit quotidien ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Corrigé :

Les variables :

$$\begin{array}{ll} x_{ij},\ i,j = 1,2,3 & \text{nombre de barils de } P_i \text{ utilisé pour produire } E_j \\ y_j,\ j = 1,2,3 & \text{montant (en euros) dépensé en publicité pour } E_j \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{l} \text{nombre de barils de } P_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \\ \text{nombre de barils de } E_j = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}. \end{array}$$

La fonction objectif :

$$\begin{aligned} \text{le profit quotidien} \ = \ & \text{les recettes de la vente} \ - \ \text{les coûts d'achat du pétrole brut} \\ & - \ \text{le coût de production} \ - \ \text{les dépenses en publicité} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x,y) \ = \ & 210(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 180(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 150(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\ & -135(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 105(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 75(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & -12(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & -(y_1 + y_2 + y_3) \\ = \ & 63x_{11} + 33x_{12} + 3x_{13} + 93x_{21} + 63x_{22} + 33x_{23} + 123x_{31} + 93x_{32} + 63x_{33} - y_1 - y_2 - y_3 \end{aligned}$$

Les contraintes :

1. If faut que toutes les variables soient positives, donc

$$x_{ij} \geq 0,\ i,j = 1,2,3 \text{ et } y_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

2. Il faut que Petroco produit au moins 3000 barils de E_1 et que tous les barils de E_1 (la demande obtenue par publicité y compris) soient vendus le jour de sa production, donc

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000 + 0,01y_1.$$

   De façon similaire il faut que

$$\begin{array}{l} x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000 + 0,01y_2, \text{ et} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000 + 0,01y_3. \end{array}$$

3. Petroco peut acheter jusqu'à 5000 barils de chaque type de pétrole brut par jour, donc

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq 5000,\ i = 1,2,3.$$

4. La raffinerie de Petroco peut traiter un maximum de 14000 barils de pétrole par jour, donc

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 14000.$$

5. Il faut que E_1 ait un indice d'octane d'au moins 10, donc

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10(x_{11} + x_{21} + x_{31}).$$

De façon similaire il faut que

$$\begin{aligned} &12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32}), \text{ et} \\ &12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6(x_{13} + x_{23} + x_{33}). \end{aligned}$$

6. Il faut que E_1 ne contient pas plus de 1% de soufre, donc

$$\frac{0,5x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 1 \Leftrightarrow 0,5x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} \leq (x_{11} + x_{21} + x_{31}).$$

De façon similaire il faut que

$$\begin{aligned} &0,5x_{12} + 2x_{22} + 3x_{32} \leq 2(x_{12} + x_{22} + x_{32}), \text{ et} \\ &0,5x_{13} + 2x_{23} + 3x_{33} \leq (x_{13} + x_{23} + x_{33}). \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation :

$$\begin{array}{ll} \min & (y_1 + y_2 + y_3) - (63x_{11} + 33x_{12} + 3x_{13} + 93x_{21} + 63x_{22} + 33x_{23} + 123x_{31} + 93x_{32} + 63x_{33}) \\ \text{s.c.} & \left(\sum_{i=1}^{3} x_{i1}\right) - 0,01y_1 - 3000 = 0 \\ & \left(\sum_{i=1}^{3} x_{i2}\right) - 0,01y_2 - 2000 = 0 \\ & \left(\sum_{i=1}^{3} x_{i3}\right) - 0,01y_3 - 1000 = 0 \\ & \left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right) - 5000 \leq 0, \ i = 1,2,3 \\ & \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right) - 14000 \leq 0 \\ & -2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{31} \leq 0 \\ & -4x_{12} + 2x_{22} \leq 0 \\ & -6x_{13} - 2x_{33} \leq 0 \\ & -0,5x_{11} + x_{21} + 2x_{31} \leq 0 \\ & -1,5x_{12} + x_{32} \leq 0 \\ & -0,5x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \leq 0 \\ & -x_{ij} \leq 0 \text{ et } -y_j \leq 0 \text{ pour } i,j = 1,2,3. \end{array}$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ un convexe, où $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe aussi.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathcal{B} \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\}$ est un convexe.

Corrigé :
D'abord on note que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Soient $x_1 \in \mathcal{C}$, $x_2 \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$ quelconques, et soit $z = tx_1 + (1-t)x_2$. Alors on a :

1. $z \in \mathcal{B}$, car $\mathcal{B}$ est un convexe ;
2. pour $i = 1,2$:
$$x_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists y_i \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \ ;$$
3. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \text{ et } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall t \in [0,1] : t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$
car $\mathcal{A}$ est un convexe.

On en déduit que pour $z = tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathcal{B}$ il existe $y = ty_1 + (1-t)y_2 \in \mathbb{R}$ tq
$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$
En result $z \in \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est un convexe. ■

On considère la fonction $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par $f = g \circ h$ avec $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction concave de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{C}$ et $h : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{A}$.

2. Montrer que $\nabla^2 f(x) = [\nabla h(x)]^T \cdot \nabla^2 g(h(x)) \cdot \nabla h(x)$, et en déduire que f est concave. Justifier vos calculs pour $\nabla^2 f(x)$ en indiquant à chaque étape la taille des vecteurs/matrices qui interviennent.

Corrigé :
D'abord on calcule le gradient de f :
$$\nabla f(x) = \nabla g \circ h(x) = \nabla g(h(x)) \cdot \nabla h(x)$$
où $\nabla g(\cdot) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $\nabla h(\cdot) \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$, donc on a bien $\nabla f(\cdot) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ (c-à.d., $\nabla f(\cdot)$ est bien un vecteur ligne de longeur $n+1$).
Puis on calcule la matrice hessienne de f :
$$\nabla^2 f(x) = \nabla([\nabla f(x)]^T) = \nabla \left([\nabla h(x)]^T \cdot [\nabla g(h(x))]^T \right).$$
Notez que :

1. la fonction h est affine, donc à la fois convexe est concave. D'après Thm 1a) du cours il faut que $\nabla^2 h(x)$ est à la fois SDP et SDN. On en déduit que $\nabla^2 h(x) = 0$ (voir Exos 1.4 et 3.3 du Chapitre 1) ;

2. $[\nabla g(\cdot)]^T$ est une fonction de $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, il faut donc que $\nabla([\nabla g(\cdot)]^T) = \nabla^2 g(\cdot) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

3. $[\nabla g(h(\cdot))]^T = ([\nabla g]^T \circ h)(\cdot)$ est une fonction composée de $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$, il faut donc que $\nabla([\nabla g]^T \circ h)(\cdot) \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$. En result
$$\nabla([\nabla g(h(x))]^T) = \nabla^2 g(h(x)) \cdot \nabla h(x).$$

4. comme $[\nabla f(\cdot)]^T$ est une fonction de $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, il faut que $\nabla([\nabla f(\cdot)]^T) = \nabla^2 f(\cdot) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

On en déduit que

$$\nabla^2 f(x) = \nabla \left([\nabla h(x)]^T \cdot [\nabla g(h(x))]^T\right) = 0 + [\nabla h(x)]^T \cdot \nabla([\nabla g(h(x))]^T) = [\nabla h(x)]^T \cdot \nabla^2 g(h(x)) \cdot \nabla h(x).$$

Finalement, pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a
$$z^T \nabla^2 f(x) z = z^T [\nabla h(x)]^T \cdot \nabla^2 g(h(x)) \cdot \nabla h(x) z = v^T \nabla^2 g(w) v,$$
où $v = \nabla h(x) z \in \mathbb{R}^n$ et $w = h(x) \in \mathcal{C}$. Puisque g est une fonction concave de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{C}$, $\nabla^2 g(y)$ est SDN pour tout $y \in \mathcal{C}$ d'après Thm 1a) du cours. En result, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y \in \mathcal{C}$, $v^T \nabla^2 g(w) v \leq 0$. On en déduit que $\forall z \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\forall x \in \mathcal{A}$, $z^T \nabla^2 f(x) z \leq 0$, donc $\nabla^2 f(x)$ est SDN pour tout $x \in \mathcal{A}$ et alors f est concave d'après Thm 1a) du cours.

Exercice 3 On considère le problème (P) $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ où $f(x) = (2x_1 - x_2)^2$.

1. Montrer que $\tilde{x} = (0,0)^T$ est un minimum local de f.

   Corrigé :
   On a
   $$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4(2x_1 - x_2) & -2(2x_1 - x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\tilde{x}) = (0,0),$$
   donc $\tilde{x}$ est un point critique de f. Puis on a
   $$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$
   et $\nabla^2 f(\tilde{x})$ est SDP, mais ne pas DP ($\mathrm{Spec}\,(\nabla^2 f(\tilde{x})) = \{0, 10\}$). Donc on ne peut pas actionner les conditions suffisantes d'optimalité. Or on remarque que $\forall r > 0$ et $\forall y \in \ \mathrm{B}(\tilde{x}, r)$ on a $f(y) \geq 0 = f(\tilde{x})$, donc par définition $\tilde{x}$ est bien un minimum local de f.

2. Montrer que l'on ne peut pas actionner Corollaire 2 du cours pour démontrer l'existence d'une solution optimale.

   Corrigé :
   Soit $g(x_1) = f(x_1, 2x_1)$. Alors $\forall x_1 \in \mathbb{R} : g(x_1) = 0$ et en particulier, $\lim_{x_1 \to \infty} g(x_1) = 0 \neq +\infty$. On en déduit que f n'est pas coercive sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $\tilde{x}$ est bien une solution optimale de (P). Cette solution optimale est-elle unique ? Justifier votre réponse.

   Corrigé :
   $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq 0 = f(\tilde{x})$. Par définition $\tilde{x}$ est bien un minimum global de f, donc une solution optimale de (P). Or cette solution optimale n'est pas unique car pour tout $\hat{x}$ appartenant à la droite $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$ on a $f(\hat{x}) = 0 = f(\tilde{x})$.
   Remarque : Notez qu'il s'agit ici d'un problème convexe. Alors d'après Thm 3a) du cours, tout minimum local est un minimum global, et de plus, l'ensemble des solutions optimales (la droite D) est un convexe.

Exercice 4 On veut déterminer le point de l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| \leq 8,\ x_2 \leq x_1^3 - 8,\ x_1 \leq 2\}$ qui est le plus éloigné du point $p = (4, -8)^T$.

1. Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & -(x_1-4)^2 - (x_2+8)^2 \\ \text{s.c.} & x_1^2 + x_2^2 - 64 \leq 0 \\ & x_2 - x_1^3 + 8 \leq 0 \\ & x_1 - 2 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Corrigé :
Soit $d(x, p)$ la distance entre le point $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ et le point fixe $p = (4, -8)^T$. Alors

$$d(x,p) = \sqrt{(x_1-4)^2 + (x_2+8)^2}.$$

Étant donné que $d(x,p) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a que la valeur de $d(x,p)$ est maximale ssi la valeur de $-[d(x,p)]^2 = -(x_1-4)^2 - (x_2+8)^2$ est minimale. Finalement, il faut que $x \in \mathcal{A}$; c-à.d.

$$\begin{array}{l} \| x \| \leq 8 \Leftrightarrow h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 64 \leq 0 \\ x_2 \leq x_1^3 - 8 \Leftrightarrow h_2(x) = x_2 - x_1^3 + 8 \leq 0 \\ x_1 \leq 2 \Leftrightarrow h_3(x) = x_1 - 2 \leq 0. \end{array}$$

2. Vérifier si les contraintes sont qualifiées en $x^{(1)} = (0, -8)^T$ et en $x^{(2)} = (2, -2\sqrt{15})^T$, et en déduire s'ils sont des candidats à optimum de (P). *(Remarque : On admet que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ ne vérifient pas les conditions KKT.)*

Corrigé :

(a) D'abord on note que $h_1(x^{(1)}) = h_2(x^{(1)}) = 0$ et $h_3(x^{(1)}) = -2 < 0$, donc $x^{(1)}$ est un point admissible. D'après Fiacco les constraintes sont qualifiées en $x^{(1)}$ si les gradients de toutes les contraintes saturées en $x^{(1)}$ sont linéairement indépendants. On a $\nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2)$, donc $\nabla h_1(x^{(1)}) = (0, -16)$, et $\nabla h_2(x) = (-3x_1^2, 1)$, donc $\nabla h_2(x^{(1)}) = (0, 1)$. Or, pour $z_2 = 16z_1$ et $z_1 \in \mathbb{R}^*$ quelconque on a,

$$z_1 \nabla h_1(x^{(1)}) + z_2 \nabla h_2(x^{(1)}) = z_1(0, -16) + 16z_1(0, 1) = z_1(0, 0) = (0, 0).$$

On en déduit que les gradients de toutes les contraintes saturées en $x^{(1)}$ ne sont pas linéairement indépendants. En result les contraintes ne sont pas qualifiées en $x^{(1)}$, donc $x^{(1)}$ est un candidat à optimum de (P).

(b) D'abord on note que $h_1(x^{(2)}) = h_3(x^{(2)}) = 0$ et $h_2(x^{(2)}) = -2\sqrt{15} < 0$, donc $x^{(2)}$ est un point admissible. D'après Fiacco les constraintes sont qualifiées en $x^{(2)}$ si les gradients de toutes les contraintes saturées en $x^{(2)}$ sont linéairement indépendants.

On a $\nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2)$, donc $\nabla h_1(x^{(2)}) = (4, -4\sqrt{15})$, et $\nabla h_3(x) = (1, 0)$, donc $\nabla h_3(x^{(2)}) = (1, 0)$. Pour tout $(z_1, z_3)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ on a

$$z_1 \nabla h_1(x^{(2)}) + z_3 \nabla h_3(x^{(2)}) = (4z_1 + z_3, -4z_1\sqrt{15}) \neq (0, 0).$$

On en déduit que les gradients de toutes les contraintes saturées en $x^{(2)}$ sont linéairement indépendants. En result les contraintes sont qualifiées en $x^{(2)}$, donc $x^{(2)}$ n'est pas un candidat à optimum de (P).

3. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).

   Corrigé :
   D'abord on définie la fonction de Lagrange :

$$L(x, \mu) = f(x) - \sum_{j=1}^{3} \mu_j h_j(x) = -(x_1-4)^2 - (x_2+8)^2 - \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 64) - \mu_2(x_2 - x_1^3 + 8) - \mu_3(x_1 - 2).$$

   Les conditions KKT sont :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \mu) = \nabla f(x) - \sum_{j=1}^{3} \mu_j \nabla h_j(x) = 0 \\ \mu \leq 0 \\ \mu_j h_j(x) = 0, \ j = 1, 2, 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x_1 - 4) - 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 x_1^2 - \mu_3 = 0 \\ -2(x_2 + 8) - 2\mu_1 x_2 - \mu_2 = 0 \\ \mu_j \leq 0, \ j = 1, 2, 3 \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 64) = 0 \\ \mu_2(x_2 - x_1^3 + 8) = 0 \\ \mu_3(x_1 - 2) = 0. \end{cases}$$

4. Vérifier si les conditions KKT sont vérifiées pour $x^{(3)} = (1, -7)^T$ et pour $x^{(4)} = (2, 0)$, et en déduire s'ils sont des candidats à optimum de (P). *(Remarque : On admet que les contraintes sont qualifiées en $x^{(3)}$ et en $x^{(4)}$.)*

   Corrigé :

   (a) Pour $x = x^{(3)}$ les conditions KKT deviennent

$$\begin{cases} 6 - 2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -2 + 14\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_j \leq 0, \ j = 1, 2, 3 \\ -14\mu_1 = 0 \\ 0 \cdot \mu_2 = 0 \\ -\mu_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 3\mu_2 = 0 \\ -2 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \leq 0 \\ \mu_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \mu = (0, -2, 0)^T \leq 0.$$

On en déduit que $x^{(3)}$ vérifie les conditions KKT. Comme $h_1(x^{(3)}) = -14 < 0$, $h_2(x^{(3)}) = 0$ et $h_3(x^{(3)}) = -1 < 0$, $x^{(3)}$ est un point admissible, donc un candidat à optimum de (P).

(b) Pour $x = x^{(4)}$ les conditions KKT deviennent

$$\begin{cases} 4 - 4\mu_1 + 12\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -16 - \mu_2 = 0 \\ \mu_j \leq 0,\ j = 1, 2, 3 \\ -60\mu_1 = 0 \\ 0 \cdot \mu_2 = 0 \\ 0 \cdot \mu_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 12\mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -16 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 \leq 0 \\ \mu_3 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \mu = (0, -16, -188)^T \leq 0.$$

On en déduit que $x^{(4)}$ vérifie les conditions KKT. Comme $h_1(x^{(4)}) = -60 < 0$ et $h_2(x^{(4)}) = h_3(x^{(4)}) = 0$, $x^{(4)}$ est un point admissible, donc un candidat à optimum de (P).

5. Montrer que (P) possède au moins une solution optimale.

Corrigé :
L'ensemble admissible est borné (car inclu dans la boule centré à l'origine et de rayon 8) et fermé (car les fonctions h_j, $j = 1, 2, 3$ sont continues), donc compact. De plus la fonction objectif est continue sur l'ensemble admissible. D'après Corollaire 1 du cours il existe donc au moins une solution optimale.

6. On admet que tous les candidats à optimum appartiennent à l'ensemble $\{x^{(j)}\}_{j=1}^4$. Déterminer le point de l'ensemble $\mathcal{A}$ le plus éloigné du point p et sa distance au point p. Justifier vos réponses.

Corrigé :
D'après les questions précédentes il y a trois candidats à optimum : $x^{(1)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$. On a

$$f(x^{(4)}) = -68 \ < \ f(x^{(1)}) = -16 \ < \ f(x^{(3)}) = -10.$$

On en déduit que la solution optimale est $x = x^{(4)} = (2, 0)^T$, et sa distance au point p vaut $\sqrt{-f(x^{(4)})} = 4\sqrt{17}$.