Corrigé détaillé de l'exercice 17

<u>Exercice 17</u> Soient

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T, \quad f^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

- $\mathcal{B}_1 = \{2, 4\} \Rightarrow A^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:
  On a
  - dét$A^{\mathcal{B}_1} = 1 \neq 0$, donc $A^{\mathcal{B}_1}$ est inversible, or
  - $$(A^{\mathcal{B}_1})^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  donc $\mathcal{B}_1$ n'est pas réalisable.

- $\mathcal{B}_2 = \{1, 2\} \Rightarrow A^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$:
  On a
  - dét$A^{\mathcal{B}_2} = 6 \neq 0$, donc $A^{\mathcal{B}_2}$ est inversible, et
  - $$(A^{\mathcal{B}_2})^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 19/6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  donc $\mathcal{B}_2$ est réalisable et non-dégénérée (car $(A^{\mathcal{B}_2})^{-1} b > 0$).
  Puis on a $\mathcal{H}_2 = \{3, 4\} \Rightarrow A^{\mathcal{H}_2} = I$ et

  $$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_2} &= f^T_{\mathcal{H}_2} - f^T_{\mathcal{B}_2} (A^{\mathcal{B}_2})^{-1} A^{\mathcal{H}_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \not\geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  donc $\mathcal{B}_2$ ne satisfait pas les CSO.

- $\mathcal{B}_3 = \{1, 3\} \Rightarrow A^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$:
  On a
  - dét$A^{\mathcal{B}_3} = 5 \neq 0$, donc $A^{\mathcal{B}_3}$ est inversible, et
  - $$(A^{\mathcal{B}_3})^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 19/5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{B}_3$ est réalisable et non-dégénérée (car $(A^{\mathcal{B}_3})^{-1}b > 0$).
Puis on a $\mathcal{H}_3 = \{2,4\} \Rightarrow A^{\mathcal{H}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_3} &= f_{\mathcal{H}_3}^T - f_{\mathcal{B}_3}^T (A^{\mathcal{B}_3})^{-1} A^{\mathcal{H}_3} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 & 2/5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}_3$ satisfait les CSO. La solution optimale est

$$x = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 19/5 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \text{donc} \quad (x_1, x_2) = (1/5, 0),$$

et la valeur optimale vaut $2 \times 1/5 + 2 \times 0 = 2/5$.