UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2016–2017

Devoir surveillé 3 mars 2017
Durée : 2 heures

<u>**Exercice 1**</u> On considère la fonction

$$f(x) = \prod_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{1-x_i} \text{ dans } \mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \ : \ x_i > 1, \ i = 1, \ldots, 2n+1\}.$$

1. Soient
$$y = \left(\frac{1}{1-x_1}, \ldots, \frac{1}{1-x_{2n+1}} \right)^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$$
et
$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{(1-x_1)^2}, \ldots, \frac{1}{(1-x_{2n+1})^2} \right) \in \mathcal{S}_{2n+1}(\mathbb{R}).$$
Montrer que le gradient de f peut s'ecrire sous la forme $\nabla f(x) = -f(x) \times y^T$. Puis montrer que la matrice hessienne peut s'écrire sous la forme $\nabla^2 f(x) = f(x) \times [yy^T + D]$.

2. Montrer que f est concave sur dom(f). *(Remarque : Notez que pour tout $x \in$ dom(f), $f(x) < 0$.)*

3. On choisit maintenant $\alpha < 0$. Montrer que l'ensemble $E_\alpha = \{x \in \ \mathrm{dom}(f) \ : \ f(x) \geq \alpha\}$ est un convexe.

<u>**Exercice 2**</u> Problème de modélisation :

Une entreprise sidérurgique a reçu une commande de 110 tonnes d'acier. L'acier doit contenir au moins 3,5 tonnes de nickel, au plus 3 tonnes de carbone et exactement 4 tonnes de manganèse. L'entreprise est certifiée pour 800 euros par tonne et peut utiliser 4 différents types d'alliages pour composer l'acier, dont la composition chimique et le coût par tonne est donnée dans le tableau suivant :

	alliage 1	alliage 2	alliage 3	alliage 4
nickel	6%	3%	2%	1%
carbone	3%	2%	5%	6%
manganèse	8%	3%	2%	1%
coût par tonne	480 euros	400 euros	320 euros	240 euros

L'entreprise veut savoir quel mélange des 4 alliages donne un profit maximum. Quel problème d'optimisation doit-on résoudre ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Exercice 3 On considère le problème (P) $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ où

$$f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2 + 5, \quad x = (x_1, x_2)^T.$$

1. Définir $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c.$$

2. Montrer que (P) est un problème strictement convexe.
3. Montrer que (P) admet une et une seule solution optimale.
4. Calculer la solution optimale et la valeur optimale.

Exercice 4 On veut déterminer le point de l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (y \leqslant x^2 + 2x + 2) \wedge (y \geqslant 2x + 2)\}$$

qui est le plus proche de $(2, 2)^T$.

1. Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme suivante

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ s.c. & y - x^2 - 2x - 2 \leqslant 0 \\ & 2x + 2 - y \leqslant 0 \end{array}$$

2. Montrer que les contraintes sont qualifiées au point $(1, 5)^T$. Puis montrer que les contraintes ne sont pas qualifiées au point $(0, 2)^T$.
3. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).
4. Montrer que les conditions KKT sont vérifiées pour le point $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)^T$.
5. Montrer que (P) admet au moins une solution optimale.
6. Déterminer la solution optimale, sachant que les contraintes sont qualifiées au tout point admissible sauf le point $(0, 2)^T$, et que le système KKT n'admet qu'une seule solution. Vérifier votre reponse à l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble admissible.