UFR de Mathématiques

OPTIMISATION

LICENCE MIASHS Semestre 6

2021–2022

Table des matières

1 Introduction : cadre général et exemples de modélisation

On va s'interesser au problème suivant :

$$\begin{array}{ll} (P) & \min f(x) \\ & \text{s.c.} \quad g(x) = 0 \\ & \qquad\;\; h(x) \leq 0 \\ & \qquad\;\; x \in \Omega \end{array}$$

avec

- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- $f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, la *fonction objectif*
- $g \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle, $g = (g_1, \dots, g_p)^T$;
  $g(x) = 0$ sont les p *contraintes d'égalité*
- $h \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle, $h = (h_1, \dots, h_q)^T$;
  $h(x) \leq 0$ sont les q *contraintes d'inégalité*

Remarque : Le problème

$$\begin{array}{ll} (P) & \max f(x) \\ & \text{s.c.} \quad g(x) = 0 \\ & \qquad\;\; h(x) \leq 0 \\ & \qquad\;\; x \in \Omega \end{array}$$

est équivalent au problème

$$\begin{array}{ll} (P) & \min -f(x) \\ & \text{s.c.} \quad g(x) = 0 \\ & \qquad\;\; h(x) \leq 0 \\ & \qquad\;\; x \in \Omega \end{array}$$

On ne considèrera donc, sans perte de généralité, que des problèmes de minimisation. On note également que pour $1 \leq k \leq q$, l'inégalité $h_k(x) \geq 0$ est équivalent à l'inégalité $-h_k(x) \leq 0$.

1.1 Définitions

On définit *l'ensemble des points admissible* (ou en bref *l'ensemble admissible*)

$$\mathcal{A} := \{x \in \Omega \ : \ g(x) = 0, h(x) \leq 0\},$$

et on dit que x est un *point admissible* si $x \in \mathcal{A}$. La valeur $\inf(P)$, définie par

$$\inf(P) := \inf\{f(x) \ : \ x \in \mathcal{A}\} = \inf_{x \in \mathcal{A}} f(x),$$

est la *valeur optimale* du problème (P). Cette valeur peut être égale à $-\infty$ et par convention on dit que $\inf(P) = +\infty$ si $\mathcal{A} = \emptyset$. On dit que le problème (P) a une solution s'il existe $x^* \in \mathcal{A}$ tq $f(x^*) = \inf(P)$.

Remarque : Le problème (P) peut ne pas avoir de solution. D'autre côté, si (P) a une solution, cette solution n'est pas forcement unique.

On dit que

- $\bar{x}$ est un *minimum global* de (P) ssi

$$\bar{x} \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{A} \; : \; f(\bar{x}) \leq f(x).$$

- $\bar{x}$ est un *minimum local* de (P) ssi

$$\bar{x} \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \exists r > 0 \text{ tq } \forall x \in B(\bar{x}, r) \cap \mathcal{A} \; : \; f(\bar{x}) \leq f(x),$$

  où $B(\bar{x}, r) = \{x \in \Omega \; : \| \; x - \bar{x} \; \| \leq r\}$.

- une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points admissible est dite une *suite minimisante* ssi

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf(P).$$

Remarque : Dans le cas plus général d'un problème d'optimisation (minimisation ou maximisation) on parle d'un *optimum* local ou global.

1.2 Existence de solution

Avant de proposer des algorithmes pour trouver une solution, il faut s'assurer qu'elle existe.

Théorème 1 (Existence). *Si f est continue sur l'ensemble admissible $\mathcal{A}$ et si l'ensemble $K(x_0) := \{x \in \mathcal{A} \; : \; f(x) \leq f(x_0)\}$ est compact pour un $x_0 \in \mathcal{A}$, alors il existe au moins une solution de (P).*

Démonstration. D'abord on note que $\mathcal{A}$ est non vide (car $x_0 \in \mathcal{A}$) et qu'ils existent des suites minimisantes $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (P) contenues dans $K(x_0)$ ($\forall k \in \mathbb{N} \; : \; f(x_k) \leq f(x_0)$). On peut donc extraire une sous-suite $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x^*. C'est encore une suite minimisante, donc

$$\lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = \inf(P).$$

Comme $K(x_0)$ est compact, on a $x^* \in K(x_0) \subset \mathcal{A}$. De plus puisque f est continue sur $\mathcal{A}$, on a aussi

$$\lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = f(x^*).$$

On en déduit que x^* est une solution de (P). ■

Corollaire 1 *Il existe au moins une solution dès que l'ensemble admissible $\mathcal{A}$ est compact non vide et f est continue sur $\mathcal{A}$.*

Corollaire 2 *Soit f une fonction* coercive *sur $\mathbb{R}^n$; c'est-à-dire*

$$f(x) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad \| \; x \; \| \to +\infty.$$

Si $\mathcal{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (mais pas forcement borné) et f est continue sur $\mathcal{A}$, alors il existe au moins une solution de (P)

1.3 Caractérisation de la solution optimale : multiplicateurs de Lagrange

Soit donné le problème d'optimisation (P) sur un ensemble admissible non vide $\mathcal{A}$, et à valeur optimale $\inf(P) = p^*$. On définit alors le *Lagrangien* $L : \Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ associé par

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x),$$

avec domaine dom $L = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Les λ_i et μ_j sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange* associées aux contraintes d'égalité $g_i(x) = 0$ et contraintes d'inégalité $h_j(x) \leq 0$. L'idée principale dans la duality de Lagrange est donc á prendre en compte les contraintes dans le problème d'optimisation (P) en augmentant la fonction objectif par une somme pondérée des fonctions de contraintes.

Puis on définit la *fonction dual de Lagrange* par la valeur minimale du Lagrangien sur $\mathcal{A}$:

$$D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{A}} L(x, \lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{A}} \left(f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x) \right).$$

Quand le Lagrangien n'est pas bornée inférieure en x, la fonction dual prend la valeur $-\infty$.

1.3.1 Bornes inférieures sur la valeur optimale

La fonction dual donne des bornes inférieurs sur la valeur optimale p^* du problème d'optimisation (P) : Pour tout $\mu \leq 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^p$ on a $D(\lambda, \mu) \leq p^*$. En effet, pour tout $\bar{x} \in \mathcal{A}$ on a $g_i(\bar{x}) = 0$ et $h_j(\bar{x}) \leq 0$. En result on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(\bar{x}) \geq 0,$$

car $\mu_j h_j(\bar{x}) \geq 0$ quand $\mu_j \leq 0$, donc

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) = f(\bar{x}) - \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(\bar{x}) \right) \leq f(\bar{x}).$$

On en déduit que

$$D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{A}} L(x, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq f(\bar{x}).$$

Enfin, puisque $D(\lambda, \mu) \leq f(\bar{x})$ pour tout point admissible $\bar{x} \in \mathcal{A}$, on en déduit que $D(\lambda, \mu) \leq p^*$.

1.3.2 Le problème dual de Lagrange

Pour toute paire (λ, μ) la fonction dual donne une borne inférieure sur la valeur optimale p^* du problème (P). La borne inférieure depend donc des paramètres λ et μ, et alors on peut se poser la question : Quelle est la meilleure borne inférieure ?

Considerons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} (D) & \max D(\lambda, \mu) \\ & \text{s.c.} \quad \mu \leq 0 \end{array}$$

Ce problème-ci est appelé *le problème dual* associé au problème (P). Dans ce contexte, le problème (P) lui-même est appelé *le problème primal.* Soit d^* la valeur optimale du problème (D), alors par définition d^* est la meilleure borne inférieure sur la valeur optimale p^* du problème (P). En particulier on a la propriété importante $d^* \leq p^*$, appelée *la dualité faible*, et on appele la différence $p^* - d^*$ *l'écart optimal de dualité.* Dans le cas particulier ou $d^* = p^*$ (donc $p^* - d^* = 0$) on parle de *la dualité forte.*

1.3.3 KKT conditions d'optimalité

On suppose desormais que la fonction objectif f et les fonctions des contraintes g_i, $i = 1, \ldots, p$ et h_j, $j = 1, \ldots, q$ sont dérivable. Soient x^* et (λ^*, μ^*) les solutions optimales du problème primal (P) et du problème dual (D) associé, dont l'écart optimal de dualité vaut 0. Comme x^* minimise $L(x, \lambda^*, \mu^*)$ sur Ω, il faut que sont gradient s'annule en x^* :

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0.$$

On result on obtient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \mu_j^* \leq 0, \ j = 1, \ldots, q \\ \mu_j^* h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \ldots, q \end{array} \right. ,$$

appelées *les conditions KKT* (Karush-Kuhn-Tucker).

Rémarques

1. En ajoutant la condition $x^* \in \mathcal{A}$ on obtient *le système KKT* ;

2. Comme l'écart optimal de dualité vaut 0, il faut que

$$\begin{aligned} d^* = p^* \quad & \Leftrightarrow \quad G(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*) \\ & \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* h_j(x^*) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* h_j(x^*) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \mu_j^* h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \ldots, q \ ; \end{aligned}$$

3. Les conditions $h_j(x^*) \leq 0$, $\mu_j^* \leq 0$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour $j = 1, \ldots, q$ resulteront à 2^q systèmes KKT à résoudre, car pour tout j compris entre 1 et q il y a deux possibilités : soit $h_j(x^*) < 0$ et alors il faut que $\mu_j^* = 0$, soit $h_j(x^*) = 0$ et alors $\mu_j^* \leq 0$ (ne pas forcement strictement inférieur).

Pour résumer, pour tout probléme d'optimisation à dualité forte dont les fonctions f, g_i, $i = 1, \ldots, p$ et h_j, $j = 1, \ldots, q$ sont dérivables, il faut que les solutions optimales x^* et (λ^*, μ^*) vérifient les conditions KKT (conditions nécessaires d'optimalité (CNO)).

1.4 Problèmes convexes

Définition 1 *Un problème d'optimisation est dit convexe lorsque l'ensemble admissible $\mathcal{A}$ est convexe et la fonction objectif f est convexe. Il est strictement convexe si f est strictement convexe.*

Théorème 2 *a) Si (P) est un problème d'optimisation convexe, tout minimum local est un minimum global. De plus l'ensemble des solutions optimales est un convexe.*

b) Si (P) est un problème d'optimisation strictement convexe, alors il admet au plus une solution optimale.

Démonstration.

a) Soit $x \in \mathcal{A}$ un minimum local et supposons qu'il existe $y \in \mathcal{A}$ tq $f(y) < f(x)$. Par convexité $[x - t(x-y)] \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in]0,1[$ et

$$f\left(x - t(x-y)\right) \leq t f(y) + (1-t) f(x) < f(x).$$

Or x étant minimum local il existe $t \in]0,1[$ tq

$$f\left(x - t(x-y)\right) \geq f(x),$$

ce qui est absurde. Donc tout minimum local est un minimum global.

Ensuite, soit $S(P)$ l'ensemble des solutions optimales de (P) et $x', x'' \in S(P)$ tq $x' \neq x''$. Par convexité $[tx' + (1-t)x''] \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in [0,1]$ et

$$f\left(tx' + (1-t)x''\right) \leq t f(x') + (1-t) f(x'') = \inf(P),$$

car $f(x') = f(x'') = \inf(P)$. Or $f\left(tx' + (1-t)x''\right) \geq \inf(P)$, donc $f\left(tx' + (1-t)x''\right) = \inf(P)$ ce qui implique que $\forall t \in [0,1]$, $[tx' + (1-t)x''] \in S(P)$.

b) Supposons $x', x'' \in S(P)$ tq $x' \neq x''$. Alors le point milieu du segment $[x', x'']$, $x^* = \frac{1}{2}(x' + x'')$ est encore admissible et

$$f(x^*) < \frac{1}{2}\left(f(x') + f(x'')\right) = \inf(P),$$

(car f est strictement convexe) ce qui est absurde. ■

Théorème 3 *Soit (P) est un problème d'optimisation convexe dont les fonctions f, g_i, $i = 1, \ldots, p$ et h_j, $j = 1, \ldots, q$ sont dérivables. Si $x^* \in \mathcal{A}$ et $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ vérifient les conditions KKT, alors x^* est solution optimale de (P) (conditions suffisantes d'optimalité (CSO)).*

1.5 Projection sur un convexe

La distance d'un point $x_0 \in \Omega$ à un ensemble fermé $C \subset \Omega$, en norme $\|\cdot\|$, est définie par

$$\mathrm{dist}(x_0, C) = \inf\{\|x_0 - x\|, x \in C\}.$$

L'infimum est toujours atteint et on appelle n'import quel point $z \in C$ le plus proche de x_0, vérifiant $\|x_0 - z\| = \mathrm{dist}(x_0, C)$ *la projection de x_0 sur C*.

En général, il peut y avoir plus d'une projection de x_0 sur C.

Exemple 1 *Considerons le bord du carré unitair dans $\mathbb{R}^2$: $C = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty = 1\}$. Pour $x_0 = 0$, les points $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont tous le plus proche à x_0 en norme 1, et à distance dist$(x_0, C) = 1$. La même affirmation vaut pour la norme 2. Or en norme ¡¡infini¿¿ tout point de C est à une distance de x_0 qui vaut 1.*

Dans certains cas particuliers, nous pouvons établir que la projection d'un point sur un ensemble est unique ; p.ex. quand C un convexe fermé non vide de l'ouvert Ω, et la norme est strictement convexe (p. ex. la norme euclidienne). Réciproquement, si pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe une et une seule projection de x_0 sur C, alors C est un convexe fermé de Ω.

On note par $P_C : \Omega \to \Omega$ n'import quelle fonction telle que $P_C(x_0)$ est une projection de x_0 sur C ; i.e. pour tout $x_0 \in \Omega$,

$$P_C(x_0) \in C, \quad \|x_0 - P_C(x_0)\| = \mathrm{dist}(x_0, C).$$

Autrement dit on a

$$P_C(x_0) = \mathrm{argmin}\{\|x - x_0\|, x \in C\}.$$

Quand C est un convexe on peut calculer la projection $P_C(x_0)$ et la distance $\mathrm{dist}(x_0, C)$ en resolvant un problème convexe. On représent l'ensemble C par un ensemble des égalités lineaires $Ax = b$ et des inégalitées convexe $h_j(x) \le 0$, $j = 1, \ldots, q$ et on trouvera la projection de x_0 sur C et la distance $\mathrm{dist}(x_0, C)$ en resolvant le problème

$$\begin{array}{lll} (P) & \min \|x - x_0\| & \\ & \text{s.c.} & Ax = b \\ & & h(x) \le 0 \\ & & x \in \Omega \end{array}$$

Projection euclidienne sur un polyèdre On trouvera la projection de x_0 sur un polyèdre décrit par les inégalités lineaires $Ax \le b$ en resolvant le problème

$$\begin{array}{lll} (P) & \min \|x - x_0\|_2^2 & \\ & \text{s.c.} & Ax \le b \\ & & x \in \Omega \end{array}$$

Certains cas particuliers ont des solutions analytiques simples :

1. La projection euclidienne de x_0 sur l'hyperplan $C = \{x, a^T x = b\}$ est donnée par

$$P_C(x_0) = x_0 + (b - a^T x)a/\|a\|_2^2.$$

2. La projection euclidienne de x_0 sur le demi-espace $C = \{x, a^T x \leq b\}$ est donnée par

$$P_C(x_0) = \begin{cases} x_0 + (b - a^T x)a/\|a\|_2^2 & \text{si } a^T x_0 > b \\ x_0 & \text{si } a^T x_0 \leq b \end{cases}.$$

3. La projection euclidienne de x_0 sur le rectangle $C = \{x, \ell \leq x \leq u\}$, avec $\ell < u$, est donnée par

$$P_C(x_0)_k = \begin{cases} \ell_k & \text{si } (x_0)_k \leq \ell_k \\ (x_0)_k & \text{si } \ell_k \leq (x_0)_k \leq u_k \\ u_k & \text{si } (x_0)_k \geq u_k \end{cases}.$$

1.6 Exemples de modélisation

Exercice 1 **Choix d'emprunts**

Monsieur Martin, directeur d'une chaine de magasins de vêtements, désire ouvrir trois nouvelles boutiques: une à Nantes, une à Lille et une à Strasbourg. L'ouverture de chaque nouvelle boutique lui coûtera respectivement 250 000 euros, 100 000 euros et 170 000 euros. Pour financer ses projets, il fait appel à trois différentes banques. En fonction de l'emplacement de ces boutiques et des risques évalués, chaque banque décide de financer au plus 300 000 euros sur 8 ans et propose des taux différents suivant les boutiques (voir tableau). Déterminez le montant à emprunter à chaque banque pour financer chaque boutique de façon à minimiser les dépenses totales de M.Martin.

Taux des banques en pourcentage

	Boutique de Nantes	Boutique de Lille	Boutique de Strasbourg
Banque 1	5	6.5	6.1
Banque 2	5.2	6.2	6.2
Banque 3	5.5	5.8	6.5

Exercice 2 **Campagne publicitaire**

La PME Pronuovo lance un nouveau produit sur un marché régional et désire en faire la campagne publicitaire sur plusieurs médias à la fois. Elle s'adresse à une société de publicité Régional Pub, spécialisée dans ce type de campagne régionale et lui confie cette tâche pour un budget global de 250 000 euros. Cette dernière connait bien le marché et l'impact de diffusion d'une publicité dans une revue locale ou à la radio, ou d'un spot publicitaire télévisé sur la chaine régionale. Elle propose de s'attaquer au marché pendant deux mois par six médias différents. Pour chacun des médias, elle connait le coût de diffusion et le nombre de personnes sur lequel ce média a un impact. Un indice de qualité de perception de la campagne est également connu pour chaque média.

La société impose aussi un nombre maximal d'utilisations de chaque média (par exemple, pas plus de huit diffusions d'un spot télévisé). Le tableau suivant regroupe ces informations. La société qui lance le produit souhaite que l'impact de la campagne publicitaire atteigne au moins un million de personnes. Quels seront les médias choisis, et dans quelles proportions pour que l'indice de qualité de perception soit maximal?

N	Type	Clients	Cout Unit Util	Util max	Ind Qu Perception
1	journal hebdo	120000	1500	4 semaines	3
2	Revue mensuelle	15000	8000	2 mois	7
3	Revue hebdo	20000	12000	8 semaines	8
4	Spot radio	60000	9000	60 diff sur 2 mois	2
5	Affichage	30000	24000	4 panneaux sur 2 mois	6
6	Spot TV	90000	51000	8 diff sur 2 mois	9

Exercice 3 **Gestion de portefeuille financier**

Un conseiller financier doit choisir pour un club d'investissement un certain nombre d'actions dans lesquelles investir. Le club souhaite investir 100 000 euros dans six actions différentes. Le conseiller lui indique le retour d'investissement (taux de retour) qu'il peut espérer pour une période de 6 mois. Le tableau suivant donne pour chaque action son nom, sa catégorie (T: technologique; N: non technologique) et le taux de retour espéré. Le club impose certaines contraintes au conseiller. Il veut investir au moins 5 000 euros et au plus 40 000 euros dans chaque action. Le club d'investissement désire investir la moitié de son capital dans des actions françaises et au plus 30 pour cent dans des valeurs technologiques. Comment doit se répartir le capital entre chaque action pour espérer le meilleur retour sur investissement?

N	Nom	Catégorie	Retour (pourcentage)
1	Dash Associates (UK)	T	5.3
2	Ilog France (F)	T	6.2
3	France Telecom (F)	T	5.1
4	General Motors (USA)	N	4.9
5	Elf (F)	N	6.5
6	BNP (F)	N	3.4

Exercices supplémentaires

Exercice 4 Donner un modèle mathématique sous forme d'un problème d'optimisation linéaire pour les deux problèmes suivants. Commencer par définir les variables qui interviennent.

1. Paul est propriétaire d'une oliveraie et chaque année au mois de novembre, il produit de l'huile d'olive qu'il vend à ses amis. Il verse l'huile dans des contenants de deux formats: 1 litre et 3 litres. Cette année il en a produit au moins 60 litres. Au cours des années antérieures il a observé que le premier format est au moins trois fois plus demandé que le second. Cependant il ne veut pas dépasser les 60 contenants. Il vend son huile 8 euros le contenant de 1 litre et 20 euros le contenant de 3 litres. Quel est le nombre de contenants

de chaque format qui lui permet de réaliser un profit maximal?

2. Louis organise samedi une opération “Lavage de voiture” pour récolter des fonds pour aider à payer à sa classe un voyage de fin d’année à Londres. Dix élèves sont prêts à travailler un maximum de 7 heures chacun. Pour un lavage partiel (extérieur) d’une voiture, il faut compter 35 minutes et pour un lavage complet (extérieur et intérieur) il faut 70 minutes. Ils demandent 5 euros pour un lavage extérieur et 8 euros pour un lavage complet. On prévoit que le nombre de lavages complets ne sera pas supérieur au nombre de lavages partiels. On espère au moins 60 clients et on ne dépassera pas 90 clients. Combien de lavages de chaque sorte devra-t-on faire pour maximiser les profits si les dépenses de la journée s’élèvent à 35 euros?

<u>Exercice 5</u> Donner un modèle mathématique sous forme d’un problème d’optimisation pour les deux problèmes suivants. Commencer par définir les variables qui interviennent.

1. Un atelier peut fabriquer deux types d’articles - des écharpes et des bonnets - sur une machine donnée disponible 100 heures par mois compte tenu des heures de réglage et entretien. Les bonnets sont fabriqués à une cadence de 50 articles par heure, et les écharpes à la cadence de 25 par heure. La capacité d’absorption du marché étant limitée, on ne peut écouler par mois plus de 3000 écharpes ni plus de 2000 bonnets. En raison d’un système de prix régressifs consentis aux clients, le prix de chaque article décroit légèrement avec la quantité vendue: ainsi un bonnet rapporte $10(1 - x_1/6000)$ euros lorsque l’on vend x_1 bonnets et une écharpe $7(1 - x_2/4000)$ lorsque l’on vend x_2. Quel est le plan de fabrication optimal pour cet atelier de façon à maximiser les gains?

2. On désire déterminer la composition, à coût minimal, d’un aliment pour bétail qui est obtenu en mélengeant au plus trois produits bruts: orge, arachide, sésame. L’aliment ainsi conditionné doit comporter au moins 22% de protéines et 2.6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué dans le tableau ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l’orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts:

produit brut	orge	arachide	sésame	pourcentage requis
% de protéines	12%	52%	42%	22%
% de graisses	2%	2%	10%	2.6%
coût par tonne	25	41	39	

Indiquer le problème d’optimisation à résoudre.

<u>Exercice 6</u> Problème de modélisation: Fabrication d’un acier spécial.

L’entreprise Massi a reçu une commande de cinq tonnes d’acier destiné à la fabrication de coques de bateau. Cet acier doit avoir les caractéristiques particulières données dans le tableau suivant

élément chimique	Pourcentage minimal	Pourcentage maximal
Carbone (C)	2	3
Cuivre (Cu)	0.4	0.6
Manganèse (Mn)	1.2	1.65

Pour fabriquer cet acier, Massi dispose de sept matières premières dont les caractéristiques, les quantités disponibles et les coûts d'achat sont donnés dans le tableau suivant:

Matière première	C%	Cu %	Mn %	Stocks disponibles (Kg)	Coûts (euros/kg)
Alliage de fer 1	2.5	0	1.3	4000	1.20
Alliage de fer 2	3	0	0.8	3000	1.50
Alliage de fer 3	0	0.3	0	6000	0.90
Alliage de cuivre 1	0	90	0	5000	1.30
Alliage de cuivre 2	0	96	4	2000	1.45
Alliage d'aluminium 1	0	0.4	1.2	3000	1.20
Alliage d'aluminium 2	0	0.6	0	2500	1

On veut déterminer la composition de l'acier à fabriquer pour minimiser les coûts de production. Quel problème d'optimisation doit on résoudre?

Exercice 7 Rosas et Jasmine sont deux qualités de parfum commercialisées par la société Goodsmell. La matière première de base nécessaire pour leur production peut être achetée dans une autre entreprise chimique à 200 euros par litre. Avant que cette matière puisse être utilisée, elle doit préalablement subir un certain nombre d'opérations au laboratoire de Goodsmell, ce qui nécessite 2 heures de travail par litre de cette substance. A partir d'un litre de matière première, on peut produire 20 cl Rosas $N°1$ et 24 cl Jasmine $N°1$. Le prix de vente de ces parfums est de l'ordre de 120 euros et 100 euros par cl pour respectivement Rosas et Jasmine. Grâce à une heure de travail supplémentaire au laboratoire et un coût supplémentaire de 50 euros, 1 cl de Rosas peut être converti en 1 cl de parfum plus exclusif Rosas $N°2$, qui peut alors être vendu à 350 euros par cl. De façon analogue, on peut en une demi-heure de travail et un coût supplémentaire de 50 euros convertir 1 cl de Jasmine en 1 cl de Jasmine $N°2$, qui peut alors être vendu à 250 euros par cl. Par an, Goodsmell dispose de 6000 heures de travail au laboratoire et peut acheter au plus 2000 litres de matière première. Goodsmell souhaite savoir le planning de production qui procure un gain annuel maximal, sous l'hypothèse que le coût des heures de travail au laboratoire est un coût fixe et que toute la production sera effectivement vendue.

Quel problème d'optimisation doit-on résoudre ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

2 Programmation linéaire

Un problème de *programmation linéaire* (P_L) s'écrit

$$P_L \left\{ \begin{array}{ll} \max & \langle f, x \rangle \\ s.c. & Ax = b \\ & Cx \leq d \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} f \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{p \times n},\ C \in \mathbb{R}^{q \times n} \\ b \in \mathbb{R}^p,\ d \in \mathbb{R}^q \end{array}$$

L'ensemble des solutions admissibles $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b,\ Cx \leq d\}$ est un polyèdre, donc un ensemble convexe fermé. La fonction objectif est linéaire, donc continue et à la fois convexe et concave. Donc c'est un problème convexe. En particulier on a :

Existence de solution : La fonction objectif $F(x) = \langle f, x \rangle$ est continue, donc il existe une solution si

(i) $\mathcal{A}$ est borné non vide

(ii) F est bornée supérieurement sur $\mathcal{A}$.

2.1 Motivation et exemples

2.1.1 Problème de production

Exemple 2 *Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 à partir de 3 matières premières M_1, M_2 et M_3. La composition d'une unité de chaque produit est décrite dans le tableau suivant*

Caractéristiques de la production

	M_1	M_2	M_3
P_1	1	1	2
P_2	3	1	1

On dispose de quantités limitées de matières premières : $18(M_1)$, $8(M_2)$ *et* $14(M_3)$. *Donner le plan optimal de production, c'est-à-dire le plan qui maximise les bénéfices à la vente (maximisation des gains) tout en respectant les contraintes en ressources.*

On pose c_i = bénéfice à la vente pour une unité de produit $i \in \{1, 2\}$. On définit les variables (qui permettront de prendre la décision) x_i = quantité de produit P_i, $i \in \{1, 2\}$. Le problème devient

$$\max(c_1 x_1 + c_2 x_2)$$
$$s.c. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 3 *Une raffinerie distille 2 types de pétroles brut B_1 et B_2 pour fournir 3 types d'essences E_1, E_2 et E_3 à un distributeur d'essences dont les demandes sont* $0.5(E_1)$, $0.4(E_2)$ *et* $0.6(E_3)$.

Les quantités d'essences obtenues par la distillation d'une unité de brut sont données dans le tableau suivant

	E_1	E_2	E_3
B_1	0.1	0.1	0.3
B_2	0.5	0.2	0.3

Les coûts unitaires des brut sont $20(B_1)$ *et* $25(B_2)$. *Donner le plan optimal de distillation, c'est-à-dire le plan qui minimise les coûts avec satisfaction des demandes.*

On définit les variables x_i = *quantité distillée de brut* B_i, $i \in \{1, 2\}$. *Le problème devient*

$$\min(20x_1 + 25x_2)$$
$$s.c. \begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.2 Problème de transport

Exemple 4 *Une usine possède 2 entrepôts* E_1 *et* E_2 *situés dans des lieux géographiques différents où est stockée un produit en quantité limitée. Elle doit approvisionner 3 magasins* M_1, M_2 *et* M_3 *situés dans des lieux géographiques différents. L'usine recherche un plan de transport optimal, c'est-à-dire un plan tel que*

- *la demande de chaque magasin est satisfaite ;*
- *le stock de chaque entrepôt n'est pas dépassé ;*
- *le coût total de transport est minimum.*

Les demandes des magasins sont : $3(M_1)$, $5(M_2)$ *et* $2(M_3)$. *Les disponibilités des entrepôts sont :* $4(E_1)$ *et* $6(E_2)$. *Les coûts unitaires de transport sont donnés dans le tableau suivant*

	M_1	M_2	M_3
E_1	5	1	1
E_2	2	6	9

On définit les variables x_{ij} = *quantité transportée de l'entrepôt* $i \in \{1, 2\}$ *vers le magasin* $j \in \{1, 2, 3\}$. *On peut représenter le problème par un graphe*

$$* \quad M_1 \quad (3)$$
$$(4) \quad E_1 \quad *$$
$$* \quad M_2 \quad (5)$$
$$(6) \quad E_2 \quad *$$
$$* \quad M_3 \quad (2)$$

Le problème se modélise par

$$\min(5x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23})$$
$$s.c. \begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 3 \\ x_{12} + x_{22} \geq 5 \\ x_{13} + x_{23} \geq 2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 4 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 6 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que les inégalités peuvent être remplacés par des égalités car la somme des quantités demandées est égale à la somme des quantités disponibles.

2.2 Polyèdres et simplexes

Définition 2 *Un* polyèdre *est une intersection de demiplans* $H(A_k, b_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A_k x \leq b_k\}$. *On peut donc l'écrire sous plusieurs formes :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Cx \leq c\} \\ \mathcal{P} &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Bx \leq b, \ -Bx \leq -b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Bx = b\} \\ \mathcal{P} &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ Cx \leq d\} \quad \textit{(cas plus général)} \end{aligned}$$

Un simplexe *est un polyèdre borné. Un* sommet du polyèdre *est un point x qui ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe de deux points distincts du polyèdre.*

Théorème 4 (Sommet du polyèdre). *Un point x est un sommet du polyèdre $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : Ax \leq b\}$ ssi la matrice des contraintes saturées (actives) au point x est de rang n.*

Démonstration. x^* n'est pas un sommet

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \exists x_1, x_2 \in \mathcal{P}, \ x_1 \neq x_2, \ \exists \theta \in]0,1[\, : \ x^* = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 = x_2 + \theta(x_1 - x_2) \\ &\Leftrightarrow \ \exists u \neq 0 \ : \ x^* + u \in \mathcal{P} \text{ et } x^* - u \in \mathcal{P} \\ &\Leftrightarrow \ \exists u \neq 0 \ : \ \begin{cases} Ax^* + Au \leq b \\ Ax^* - Au \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au \leq b - Ax^* \\ Au \geq Ax^* - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \ \exists u \neq 0 \ : \ |Au| \leq |b - Ax^*|. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que

$$\{\exists u \neq 0 \ : \ |Au| \leq |b - Ax^*|\} \Leftrightarrow \{ \text{ le rang de la matrice des contraintes saturées est } < n\}.$$

($\Rightarrow$) Soit A_M la matrices des contraintes saturées en x^*. Alors $A_M u = 0$. Or $u \neq 0$, donc A_M ne peut pas avoir rang n.

($\Leftarrow$) Soit $u^* \neq 0$ tel que $A_M u^* = 0$. Alors $A_M(x^* + u^*) = b_M$ et pour toutes les autres contraintes on a $A_L x^* < b_L$. Soit $c_L = |b_L - A_L x^*|$ et $\theta = \min_{\ell \in L} c_L$. Alors $\theta \leq |b_L - A_L x^*|$. Il suffit maintenant de considérer $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha |A_L u^*| < \theta$ et on prend $u = \alpha u^*$. ■

Si le polyèdre est défini par

- $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b, \ A \in \mathbb{R}^{p\times n}, \ p \geq n\}$, il peut avoir au plus $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ sommets ;
- $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ Cx \leq d, \ A \in \mathbb{R}^{p\times n}, \ C \in \mathbb{R}^{q\times n}, \ p \leq n, \ q \geq n-p\}$, il peut avoir au plus $\begin{pmatrix} q \\ n-p \end{pmatrix}$ sommets.

Théorème 5 *Tout simplexe non vide de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses sommets.*

Si l'ensemble admissible d'un problème linéaire est un simplexe, la valeur optimale v est finie et l'ensemble des solutions optimales s'écrit

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ Cx \leq d, \ \langle f, x\rangle = v\}.$$

$\mathcal{S}$ est donc un simplexe et ces sommets sont également des sommets de $\mathcal{P}$, car si un sommet x de $\mathcal{S}$ s'écrit comme $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$, alors

$$v = \langle f, x\rangle = t\langle f, x_1\rangle + (1-t)\langle f, x_2\rangle \Rightarrow \langle f, x_1\rangle = \langle f, x_2\rangle = \langle f, x\rangle \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathcal{S}$$

ce qui est absurde car x est un sommet. D'après le théorème précédent, l'ensemble des solutions optimales est donc l'enveloppe convexe des sommets de $\mathcal{P}$ qu'il contient.

2.3 Théorème fondamental

Théorème 6 *Si le problème (P_L) admets des solutions et si la matrice des contraintes est de rang n, alors au moins une des solutions est un sommet de l'ensemble admissible.*

Démonstration. Soit x^* une solution qui sature un nombre maximum de contraintes. On montre par absurde que alors la matrice des contraintes saturées au point x^* est de rang n (donc que x^* est un sommet). Supposons que la matrice des contraintes saturées au point x^* est de rang $r < n$, et donc que le noyau de cette matrice contient un vecteur $u \neq 0$. Alors pour $t > 0$ suffisamment petit, $x^* + tu$ et $x^* - tu$ restent admissibles, et

$$\langle f, x^*\rangle = \frac{1}{2}\langle f, x^* + tu\rangle + \frac{1}{2}\langle f, x^* - tu\rangle.$$

Or $\langle f, x^* + tu\rangle \leq \langle f, x^*\rangle$ et $\langle f, x^* - tu\rangle \leq \langle f, x^*\rangle$. Il faut donc que $x^* + tu$ et $x^* - tu$ soient encore solutions optimales. Comme la matrice des contraintes C est de rang n, $u \notin \ \mathrm{Ker}(C)$, donc $\exists \ell$ tel que $C_\ell u \neq 0$. On peut supposer que $C_\ell u > 0$. Pour t suffisamment grand $x^* + tu$ ne sera plus admissible. Soit t^* la valeur maximale pour laquelle $x^* + t^* u$ reste admissible. On trouve alors une solution de (P_L) qui sature une contrainte de plus que x^*, ce qui est absurde. ■

Dans le cas où la matrice des contraintes est de rang n, il suffit donc de chercher une solution parmi les sommets : on calcule la valeur de $F(x) = \langle f, x\rangle$ dans les sommets de $\mathcal{P}$ et on retient celui où la valeur est maximale.

Dans la suite on va se restreindre aux problèmes de programmation linéaire mis sous forme standard

$$(P_L)_s \quad \begin{array}{rl} \min / \max & f^T x \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{p\times n} \text{ de rang } p.$$

Rémarques

(i) Si la matrice A est de rang $r < p$ et l'ensemble est non vide, quelques lignes sont combinaison linéaire des autres et on peut les supprimer ;

(ii) Dans ce cas la matrice des contraintes est toujours de rang n car elle est

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} ;$$

(iii) Tout problème linéaire peut s'écrire sous la forme si dessus.

- Il suffit de rajouter des variables dites *d'écart* aux contraintes d'inégalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx \leq d \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Cx + Iy = d \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. .$$

- S'il n'y a pas de contraintes de positivité on peut aussi remplacer $x = x' - x''$ avec $x', x'' \geq 0$.

Pour trouver les sommets du polyèdre il faudra alors que n contraintes soient saturées et donc annuler $n-p$ composantes de x que l'on raporte dans le système $Ax = b$ pour obtenir un système résiduel de taille p. L'algorithme du simplexe va permettre de se déplacer d'un sommet à l'autre d'une façon intelligente pour trouver une solution en un nombre fini d'étapes.

2.4 Algorithme du simplexe (G. Dantzig, 1947)

Le problème est écrit sous forme standard et l'idée est d'explorer les sommets d'une façon "intelligente". Pour ce problème les sommets sont caracterisés comme suivant : à chaque sommet on associe une partition de $\{1, \ldots, n\}$ en $\mathcal{B} = \{i_1, \ldots, i_p\}$ (variables de base) et $\mathcal{H} = \{i_{p+1}, \ldots, i_n\}$ (variables hors base) tel que $\mathcal{B} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ et $\mathcal{B} \cup \mathcal{H} = \{1, \ldots, n\}$. Alors x est un sommet du polyèdre ssi il existe une partition $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ telle que

- la matrice $A^{\mathcal{B}}$ est inversible (sousmatrice de A de taille $p \times p$ à colonnes de A d'indice dans $\mathcal{B}$) ;
- $x_{\mathcal{H}} = 0$ (composantes de x d'indice dans $\mathcal{H}$) ;
- $x_{\mathcal{B}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1} b \geq 0$
  $\Leftrightarrow x$ est une solution de base admissible $x(\mathcal{B})$.

L'algorithme va ainsi passer d'une solution de base réalisable (admissible) à une autre solution de base réalisable : $x(\mathcal{B}_i) \to x(\mathcal{B}_{i+1})$ avec

- $\mathcal{B}_{i+1}$ ne diffère de $\mathcal{B}_i$ que par une indice (une indice sort de la base et une nouvelle rentre) ;

- $f^T x(\mathcal{B}_{i+1}) \leq f^T x(\mathcal{B}_i)$ pour un problème de minimisation (respectivement $f^T x(\mathcal{B}_{i+1}) \geq f^T x(\mathcal{B}_i)$ pour un problème de maximisation).

L'idée est d'augmenter la valeur d'une variable hors base - la *variable (r)entrante* - de façon à diminuer/augmenter (si on minimise/maximise) la valeur de la fonction objectif le plus possible.

- On choisit la variable entrante qui permet de décroitre/augmenter le plus rapidement possible la fonction objectif.

- On l'augmente tant que les autres variables restent positives (admissibilité) et donc jusqu'à ce qu'une devienne nulle - la *variable sortante*.

Soit $x(\mathcal{B}) = (x_{\mathcal{B}}^T \;\; x_{\mathcal{H}}^T)^T$. Alors on exprime les variables de base en fonction des variables hors base :

$$Ax(\mathcal{B}) = b \Leftrightarrow A^{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}} + A^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}} = b \Leftrightarrow x_{\mathcal{B}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1} b - (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}}.$$

Au point courant la solution de base est

$$\begin{cases} x_{\mathcal{B}_i} = (A^{\mathcal{B}_i})^{-1} b \\ x_{\mathcal{H}_i} = 0 \end{cases}$$

Puis on exprime les coûts en fonction des variables hors base :

$$f^T x(\mathcal{B}) = f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} b + [f_{\mathcal{H}}^T - f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}}] x_{\mathcal{H}}.$$

- Pour choisir la variable entrante : On prend celle qui correspond à la coordonnée minimale/maximale du vecteur $f_{\mathcal{H}_i}^T - f_{\mathcal{B}_i}^T (A^{\mathcal{B}_i})^{-1} A^{\mathcal{H}_i}$. On remarque que si toutes les composantes sont positives/negatives on ne pourra pas diminuer/augmenter la fonction $\Rightarrow$ on est à la solution optimale (C.S.O. : Condition Suffisante d'Optimalité).

- Pour choisir la variable sortante : Soit $j \in \mathcal{H}_i$ la variable entrante. Les variables de base vont donc changer de la façon suivante :

  $$x_{\mathcal{B}_i}(t) = (A^{\mathcal{B}_i})^{-1} b - t z^j, \quad z^j = (A^{\mathcal{B}_i})^{-1} A^j.$$

  Pour qu'elles continuent admissibles il faut que

  $$(A^{\mathcal{B}_i})^{-1} b - t z^j \geq 0 \Leftrightarrow \forall k \; tq \; z_k^j > 0 \; : \; t \leq \frac{((A^{\mathcal{B}_i})^{-1} b)_k}{z_k^j}.$$

  La plus grand valeur de t pour laquelle cette condition est satisfaite, notons-la t_i, entraine qu'une des variables de base, disons x_s avec $s \in \mathcal{B}_i$ devient nulle. Donc

  $$t_i = \min \left\{ \frac{((A^{\mathcal{B}_i})^{-1} b)_k}{z_k^j}, \; z_k^j > 0 \right\},$$

  la variable sortante est

  $$s = \text{ArgMin} \left\{ \frac{((A^{\mathcal{B}})^{-1} b)_k}{z_k^j}, \; z_k^j > 0 \right\},$$

  et $\mathcal{B}_{i+1} = \mathcal{B}_i \setminus \{s\} \cup \{j\}$.

2.5 Mise en œuvre de l'algorithme du simplexe

Détaillons une étape de la méthode du simplexe pour résoudre

$$\begin{array}{ll} \min / \max & f^T x = \sum_{j=1}^n f_j x_j \\ s.c. & \begin{array}{ll} Ax = b & A \in \mathbb{R}^{p\times n} \\ x \geq 0 & rang(A) = p \end{array} \end{array}$$

- On dispose d'une base réalisable $\mathcal{B} = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ et d'une solution de base

$$x(\mathcal{B}) : \begin{cases} x_{\mathcal{B}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1} b \geq 0 \\ x_{\mathcal{H}} = 0 \end{cases}$$

- On construit un tableau où on exprime les variables de base $x_{\mathcal{B}}$ en fonction des variables hors base $x_{\mathcal{H}}$ et la fonction objectif aussi en fonction des variables hors base

$$\begin{array}{l} Ax(\mathcal{B}) = A^{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}} + A^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}} = b \Leftrightarrow x_{\mathcal{B}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1} b - (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}} \\ Z = f^T x = f_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + f_{\mathcal{H}}^T x_{\mathcal{H}} = f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} b + (f_{\mathcal{H}}^T - f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}}) x_{\mathcal{H}}. \end{array}$$

  Ici $-(A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}} =$ *système réduit* et $(f_{\mathcal{H}}^T - f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}}) x_{\mathcal{H}} =$ *coûts réduits.*

La structure de l'algorithme sera

initialisation de la base $\mathcal{B}$
tester la base $\mathcal{B}$
Tant que *critère d'arrêt* $=$ *faux* faire
 $*$ choisir la variable entrante ℓ
 $*$ choisir la variable sortant k
 $*$ mise à jour la base et le tableau correspondant
 $*$ tester la nouvelle base

2.5.1 Tester la base $\mathcal{B}$

On pose $c^{\mathcal{H}} = f_{\mathcal{H}}^T - f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}}$ vecteur ligne. Alors la fonction objectif s'écrit $Z = f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} b + c^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}}$.

Dans la solution de base actuelle ($Z = f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} b$ car $x_{\mathcal{H}} = 0$) :

(i) si $\forall i \in \mathcal{H}$, $c^i \geq 0$ (respectivement $c^i \leq 0$) alors la solution actuelle est minimale (respectivement maximale), donc la base $\mathcal{B}$ est optimale $\rightarrow$ STOP ;

(ii) si $\exists i \in \mathcal{H}$ tel que $c^i < 0$ (respectivement $c^i > 0$), alors en augmentant la valeur de $x_i = 0$ à $x_i = \theta > 0$ on peut diminuer (respectivement augmenter) encore la fonction objectif, et on va procéder à un changement de base.

2.5.2 Choix de la variable entrante

On va choisir la variable $\ell \in \mathcal{H}$ telle que

$$c^\ell = \min\{c^i,\ i \in \mathcal{H}\} \quad \text{(respect. max)}.$$

S'il y a plusieurs indices pour le minimum (respect. maximum), on choisira le plus petit indice. C'est celle qui correspond à la plus grande diminuation (respect. augmentation) par unité (*règle du plus grand gain marginal*).

Alors la variable x_ℓ passe de $x_\ell = 0$ à $x_\ell = \theta$ avec θ le plus grand possible de façon à ce que les variables de base restent positives

$$x_{\mathcal{B}}(\theta) = (A^{\mathcal{B}})^{-1}b - \theta \left[(A^{\mathcal{B}})^{-1}A^{\mathcal{H}}\right]^\ell \geq 0.$$

2.5.3 Choix de la variable sortante

On pose $T = (A^{\mathcal{B}})^{-1}A^{\mathcal{H}}$ et alors on cherche la plus grande valeur θ telle que $(A^{\mathcal{B}})^{-1}b - \theta T^\ell \geq 0$.

a) Si toutes les composantes de T^ℓ sont négatives, alors $\forall \theta > 0$, $x_{\mathcal{B}}(\theta) \geq 0$ et donc $Z(\theta) = f_{\mathcal{B}}^T(A^{\mathcal{B}})^{-1}b + \theta c^\ell$ prend des valeurs aussi petites (respect. grandes) que l'on veut. Le mininimum (respect. maximum) est donc $-\infty$ (respect. $+\infty$) et le problème ne possède pas de solution optimale finie.

b) S'il existe au moins une composante positive de T^ℓ, on définit l'ensemble $\mathcal{I}(\ell) = \{i \in \mathcal{B}\ :\ T_i^\ell > 0\}$. Alors on doit avoir

$$\forall i \in \mathcal{I}(\ell)\ :\ \theta \leq \frac{\big((A^{\mathcal{B}})^{-1}b\big)_i}{T_i^\ell},$$

donc

$$\theta_\ell = \min_{i \in \mathcal{I}(\ell)} \left\{ \frac{\big((A^{\mathcal{B}})^{-1}b\big)_i}{T_i^\ell} \right\} = \frac{\big((A^{\mathcal{B}})^{-1}b\big)_k}{T_k^\ell}.$$

Pour cette valeur de θ on aura $x_k = 0$ et donc c'est la variable k qui sera la variable sortante. S'il y en a plusieurs on prendra le plus petit indice.

Remarque : Au lieu de déterminer la variable entrante par le règle du plus grand gain marginal, on peut choisir le plus petit indice ℓ tel que

$$\theta_\ell c^\ell = \min\{\theta_j c^j \text{ pour } c_j < 0\} \quad (\textit{choix du plus grand gain})$$

(respect. $\theta_\ell c^\ell = \max\{\theta_j c^j \text{ pour } c_j > 0\}$).

2.5.4 Changement de base et mise à jour du tableau

Soit donné le tableau suivant correspondant à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & & \dots & & & x_\ell & \dots & x_n & \\
\hline
x_{i_1} & & & & & & & | & & & \\
\vdots & & & & \tilde{\mathbf{T}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1}A & & & | & & & \\
x_k & - & - & - & - & - & - & * & & & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (A^{\mathcal{B}})^{-1}b \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
x_{i_p} & & & & & & & & & & \\
\hline
 & \multicolumn{9}{c|}{\mathbf{c} = f^T - f^T_{\mathcal{B}}(A^{\mathcal{B}})^{-1}A} & \mathbf{Z} = f^T_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}
\end{array}$$

$* =$ élément pivot

La matrice $\tilde{T}$ contient la matrice T dans les colonnes correspondantes aux variables hors base et la matrice identité dans les colonnes correspondantes aux variables de base. Le vecteur ligne c contient le vecteur ligne $c^{\mathcal{H}}$ dans les places correspondants aux variables horse base et des zéros dans les places correspondants aux variables de base.

Une fois fixées ℓ et k, la mise à jour de ce tableau pour construire le tableau correspondant à la nouvelle base $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{k\} \cup \{\ell\}$ se fait de la façon suivante :

- La ligne pivot (c'est-à-dire, la ligne correspondante à la variable k qui sort) est divisée par l'élément pivot $\tilde{T}_{k\ell} =$'$*$' ;
- Pour toutes les autres lignes $i \in \mathcal{B}$ on l'additionne avec la ligne pivot multipliée par $-\tilde{T}_{i\ell}$. De cette façon on obtiendra le k-ème vecteur de base canonique dans la colonne ℓ ;
- On procéde de la même façon pour la ligne des coûts réduits (le vecteur ligne $\mathbf{c}$) : on l'additionne avec la ligne pivot multipliée par $-c_\ell$.

Sachant que

- $x_k - \theta\tilde{T}_{k\ell} = 0 \Leftrightarrow x_\ell = \theta = x_k/\tilde{T}_{k\ell}$ et pour tout $i \in \mathcal{B} \setminus \{k\}$, $x_i \leftarrow x_i - \theta\tilde{T}_{i\ell}$, on en déduit que le vecteur $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ dans la dernière colonne est remplacer par le vecteur $\mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = (x_{i_1}, \dots, x_{k-1}, x_\ell, x_{k+1}, \dots, x_{i_p})^T$ (il faut donc remplacer dans le nouveau tableau 'x_k' par 'x_ℓ' dans la colonne à gauche) ;
- l'additionne ne change pas les colonnes correspondantes aux variables de base sauf celle correspondante à la variable sortante, on en déduit que la matrice $(A^{\mathcal{B}})^{-1}A$ est remplacer par la matrice $(A^{\mathcal{B}'})^{-1}A$, et que le vecteur ligne $f^T - f^T_{\mathcal{B}}(A^{\mathcal{B}})^{-1}A$ est remplacer par $f^T - f^T_{\mathcal{B}'}(A^{\mathcal{B}'})^{-1}A$.

Le nouveau tableau est donc bien le tableau correspondant à la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

2.5.5 Exemple

Considérons le problème

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ & \quad x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ s.c. & \quad x_1 + x_2 \geq 8 \\ & \quad 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

D'abord on rajout les variables d'écarts x_3, x_4 et x_5 aux contraintes d'inégalités afin de mettre le problème sous forme standard :

$$\begin{array}{lcccccccccl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 18 \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & = & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & & & x_5 & = & 14 \\ & x_i \geq 0, & & i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

ce qui est équivalent au problème

$$\begin{array}{lcccccccccl} \min & -2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 18 \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & = & 8 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & & & x_5 & = & 14 \\ & x_i \geq 0, & & i = 1, \ldots, 5 \end{array}.$$

Dans la suite on considera le problème de minimisation. Donc $n = 5$, $p = 3$, $f = (-2, -3, 0, 0, 0)^T$, $b = (18, 8, 14)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0) Initialisation :
Base de départ evidente $\mathcal{B}_0 = \{3, 4, 5\}$, solution de base $X_0 := x(\mathcal{B}_0) = (0, 0, 18, 8, 14)^T$, $A^{\mathcal{B}_0} = I \Rightarrow (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} = I$.

Ecriture de $x_{\mathcal{B}_0}$ en fonction des variables hors base :

$$x_{\mathcal{B}_0} = (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} b - (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} A^{\mathcal{H}_0} x_{\mathcal{H}_0} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 14 - 2x_1 - x_2 \end{array} \right. .$$

Ecriture de la valeur de la fonction objectif :

$$Z = f_{\mathcal{B}_0}^T (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} b + c^{\mathcal{H}_0} x_{\mathcal{H}_0} = f_{\mathcal{B}_0}^T (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} b + (f_{\mathcal{H}_0}^T - f_{\mathcal{B}_0}^T (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} A^{\mathcal{H}_0}) x_{\mathcal{H}_0}$$
$$= 0 + [(-2,-3) - (0,0)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1 - 3x_2.$$

1) Tester la base $\mathcal{B}_0$:
On calcule le vecteur des coûts réduits

$$c^{\mathcal{H}_0} = f_{\mathcal{H}_0}^T - f_{\mathcal{B}_0}^T (A^{\mathcal{B}_0})^{-1} A^{\mathcal{H}_0} = (-2,-3).$$

Comme pour tout $i \in \mathcal{H}_0$, $c^i < 0$, on peut améliorer la solution courante en diminuant la fonction objectif. On va donc faire le changement de base.

Etape 1

2) Choix de la variable entrante :
On choisit la variable correspondant à la plus forte diminuation $c^2 = -3$ qui va passer à une valeur $x_2 = \theta > 0$ (donc $\ell = 2$). En remplaçant (x_1, x_2) par $(0, \theta)$ on obtient

$$x_{\mathcal{B}_0}(\theta) = \begin{pmatrix} 18 - 3\theta \\ 8 - \theta \\ 14 - \theta \end{pmatrix}.$$

3) Choix de la variable sortante :
Pour que $x_{\mathcal{B}_0}(\theta)$ soit admissible il faut que

$$\begin{cases} 18 - 3\theta \geq 0 \\ 8 - \theta \geq 0 \\ 14 - \theta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \leq 6 \\ \theta \leq 8 \\ \theta \leq 14 \end{cases}$$

donc $\theta = \min(6, 8, 14) = 6$ et pour cette valeur $x_3 = 0$, donc $k = 3$.

4) Changement de base :
Le tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	**3**	1	0	0	18
x_4	1	1	0	1	0	8
x_5	2	1	0	0	1	14
	-2	-3	0	0	0	0

Dans le tableau on voit bien que c^i est minimal pour $i = 2 = \ell$. En divisant les composants de la derniére colonne $(18, 8, 14)^T$ par les composants de la colonne correspondante à x_2, on obtient $(18/3, 8/1, 14/1) = (6, 8, 14)$. La première ligne est donc la ligne pivot. En divisant cette ligne par l'élément pivot 3, on obtient

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1/3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{6}$
x_4	1	$\mathbf{1}$	0	1	0	8
x_5	2	$\mathbf{1}$	0	0	1	14
	-2	-3	0	0	0	0

Puis on adapted les autres lignes : $x_4 \leftarrow x_4 - 1 \cdot x_2$ et $x_5 \leftarrow x_5 - 1 \cdot x_2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	0	6
$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{2/3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-1/3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{5/3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-1/3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}$
	-2	$\mathbf{-3}$	0	0	0	0

Enfin on calcule $c^{\mathcal{H}_1}$ $(c \leftarrow c - (-3) \cdot x_2)$ et la nouvelle valeur de la fonction objectif $Z = f^T x(\mathcal{B}_1) = (-2, -3, 0, 0, 0) \cdot (0, 6, 0, 2, 8)^T$. Le tableau correspondant à la nouvelle base $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{2, 4, 5\}$ devient donc

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	0	6
x_4	$2/3$	0	$-1/3$	1	0	2
x_5	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	8
	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-18}$

La nouvelle solution est donc $X_1 := x(\mathcal{B}_1) = (0, 6, 0, 2, 8)^T \geq 0$.

Ecriture de $x_{\mathcal{B}_1}$ en fonction des variables hors base :

$$x_{\mathcal{B}_1} = (A^{\mathcal{B}_1})^{-1} b - (A^{\mathcal{B}_1})^{-1} A^{\mathcal{H}_1} x_{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecriture de la valeur de la fonction objectif :

$$Z = f_{\mathcal{B}_1}^T (A^{\mathcal{B}_1})^{-1} b + c^{\mathcal{H}_1} x_{\mathcal{H}_1} = -18 + (-1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_1 + x_3 - 18.$$

1) Tester la base $\mathcal{B}_1$:
D'après le tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_1$, $c^{\mathcal{H}_1} = (-1, 1)$. Comme il existe $i \in \mathcal{H}_1$ tel que $c^i < 0$, on peut encore améliorer la solution courante en diminuant la fonction objectif. On va donc de nouveau faire le changement de base.

Etape 2

2) Choix de la variable entrante :
   On déduit du tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_1$ que $\ell = 1$ car $\min(-1, 0, 1, 0, 0) = -1 = c^1$.

3) Choix de la variable sortante :
   On déduit du tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_1$ que $k = 4$ car $\min\left(\frac{6}{1/3}, \frac{2}{2/3}, \frac{8}{5/3}\right) = \min\left(18, 3, \frac{24}{5}\right) = 3$.

4) Changement de base :
   La nouvelle base devient $\mathcal{B}_2 = \{2, 1, 5\}$ et le tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_2$ devient

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1/2	−1/2	0	5
x_1	1	0	−1/2	3/2	0	3
x_5	0	0	1/2	−5/2	1	3
	0	0	1/2	3/2	0	−21

   La nouvelle solution est donc $X_2 := x(\mathcal{B}_2) = (3, 5, 0, 0, 3)^T \geq 0$.

   Ecriture de $x_{\mathcal{B}_2} = (x_2, x_1, x_5)^T$ en fonction des variables hors base :

$$x_{\mathcal{B}_2} = (A^{\mathcal{B}_2})^{-1}b - (A^{\mathcal{B}_2})^{-1}A^{\mathcal{H}_2}x_{\mathcal{H}_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

   Ecriture de la valeur de la fonction objectif :

$$Z = f_{\mathcal{B}_2}^T(A^{\mathcal{B}_2})^{-1}b + c^{\mathcal{H}_2}x_{\mathcal{H}_2} = -21 + (1/2, 3/2)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3/2 + 3x_4/2 - 21.$$

1) Tester la base $\mathcal{B}_2$:
   D'après le tableau correspondant à la base $\mathcal{B}_2$, $c^{\mathcal{H}_2} = (1/2, 3/2)$. Comme $\forall i \in \mathcal{H}_2$, $c^i \geq 0$, la solution actuelle $X_2 = (3, 5, 0, 0, 3)^T$ est minimale et la valeur optimale est $f^T X_2 = -21$.

La solution optimale du problème (1) est donc $(x_1, x_2) = (3, 5)$ et la valeur maximale est 21.

2.6 Convergence de l'algorithme

Définition 3 *Un sommet est dit* non dégénéré *si toutes les variables de base sont strictement positive. Dans ce cas il y a exactement n contraintes saturées.*

La matrice A étant de rang p, la matrice carrée $A^{\mathcal{B}_{i+1}}$ obtenue en remplaçant la colonne correspondante à la variable sortante en $A^{\mathcal{B}_i}$ par celle de la variable entrante est toujours inversible. La matrice $\tilde{T} = (A^{\mathcal{B}_i})^{-1}A$ est donc bien définie en chaque étape et de rang p.

Tant que le point courant reste un sommet *non dégénéré*, le sommet change à chaque étape et la fonction objectif décroit strictement. Donc au bout d'un nombre fini d'étapes on atteint la solution (le nombre de sommets étant fini et ne pouvant pas être révisités).

Dans le cas de dégenerescence, un choix astucieuse des variables entrante/sortante permet toujours de garantir la convergence.

2.7 Initialisation

On vient de décrire en détail une étape de l'algorithme du simplexe. Or il faut encore avoir une base admissible de départ $\mathcal{B}_0$. Pour cela on peut faire une *méthode à deux phases*.

Première phase

1. On se ramène au cas $b \geq 0$ (si $b_i < 0$ on multipliera la ligne i de la matrice A par -1).

2. On résout avec l'algorithme du simplexe le problème auxiliaire

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k=1}^{p} y_k \\ s.c. & \begin{array}{l} Ax + y = b \\ x, y \geq 0 \end{array} \end{array} .$$

   Cet algorithme peut être initialisé avec la base $\mathcal{B}_0 = \{n+1, \ldots, n+p\}$ correspondante aux variable y, et donc à solution de base $(x, y) = (0, b)$ réalisable. Si l'ensemble admissible du problème initial est non vide, la solution de ce problème correspondra à $y = 0$ ce qui donne une solution de base réalisable optimale avec des variables de base correspondant à des variables x_i (donc à des colonnes de A).

Deuxième phase

1. Utiliser comme base de départ celle correspondant à la solution du problème auxiliaire de la première phase.

2. Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & f^T x \\ s.c. & \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \end{array} .$$

2.8 Exercices

<u>Exercice 1</u> Résoudre graphiquement le problème de production de l'exemple 2

$$\begin{array}{ll} \max & (c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ \text{s.c.} & x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Considérer les deux cas suivants: $c_1 = 1, c_2 = 4$ et $c_1 = c_2 = 1$.

Exercice 2 Résoudre graphiquement le problème de distillation de l'exemple 3

$$\begin{array}{ll} \min & (20x_1 + 25x_2) \\ \text{s.c.} & x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 3 On considère le problème de transport suivant

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & (5x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23}) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{llllllll} x_{11} & & & +x_{21} & & & = 3 \\ & x_{12} & & & +x_{22} & & = 5 \\ & & x_{13} & & & +x_{23} & = 2 \\ x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 4 \\ & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 6 \\ x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On pose $x = x_{11}$ et $y = x_{12}$.

1. Montrer que (P) est équivalent au problème

$$(P_1) \quad \begin{array}{ll} \min & (11x + 3y + 22) \\ \text{s.c.} & x \leq 3 \\ & y \leq 5 \\ & x + y \geq 2 \\ & x + y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

2. Résoudre graphiquement (P_1) , puis résoudre (P).

Exercice 4 On considère le problème standard

$$\max(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{lllllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = 4 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = 5 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = 4 \\ x_i & \geq 0 & & & & & \end{array} \right.$$

1. Déterminer les points réalisables de (P) de la forme $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta), 0, \theta, 0)^T$.

2. Montrer que $x(1)$ est optimum de (P).

Exercice 5 On considère le problème:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & (2x_1 + 4x_2 + 3x_3) \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{array} .$$

1. Ecrire le problème (P) sous forme standard $(\tilde{P})$.
2. Montrer que pour tout j: $2 \leq j \leq 5$ les bases $\mathcal{B}_j = \{1; j\}$ sont réalisables et dégénérées.
3. Quelles autres bases sont réalisables pour $(\tilde{P})$?
4. Résoudre (P).

Exercice 6 On considère un programme linéaire (P) qui possède des optimums.

1. Montrer que si X_1 et X_2 sont des optimums de (P) alors tous les points de $[X_1, X_2]$ sont des optimums de (P).
2. On suppose que (P) possède un seul optimum $\overline{X}$. Montrer que $\overline{X}$ est une sommet de (P).

Exercice 7 Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal) le problème suivant:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & (5x_1 + 12x_2) \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \\ & x_i \geq 0 \end{array} .$$

Exercice 8 Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal) le problème suivant:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & (-x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4) \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 12 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 18 \\ & x_i \geq 0 \end{array} .$$

Exercice 9 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \max & (3x_1 + x_2 + 2x_3) \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 9 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Pour les bases $\mathcal{B}_1 = \{1,5,6\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1,2,6\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{1,2,3\}$ les mettre en situation de test et vérifier si elles satisfont les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 10 Soit le problème standard

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & (2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5) \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_5 = 7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B} = \{1,3,4\}$ est une base réalisable.
2. Ecrire les contraintes sous forme résolue par rapport aux variables de base et exprimer la fonction objectif en fonction des variables hors base.
3. Résoudre (P).

Exercice 11 Dans deux entreprises E_1 et E_2, on fabrique des produits finis P_1, P_2 et P_3 à l'aide des matières premières M_1, M_2, M_3. Les stocks de matières premières sont les mêmes: 12 unités de M_1, 20 unités de M_2 et 14 unités de M_3. Les processus de fabrication ont les caractéristiques techniques résumées dans le tableau suivant:

	P_1	P_2	P_3
M_1	1	3	1
M_2	2	4	3
M_3	3	1	1

Les bénéfices unitaires réalisés par la vente de la production sont respectivement:

$$E_1 : \quad c_1 = 12, c_2 = 20, c_3 = 8$$

$$E_2 : \quad c_1 = 25/3, c_2 = 25, c_3 = 25/3$$

1. Résoudre le problème de chacune des entreprises. Quel est le système de production le plus rentable?
2. On propose à l'entrepreneur de E_1 le rachat des restes de matière première aux prix unitaires suivants: $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$
   (a) Quelle est la recette lorsque E_1 produit au niveau $\overline{X}_1$ (optimum de (P_1))? Serait-il plus rentable de vendre la totalité du stock?
   (b) Ecrire le programme linéaire (P) qui permet de déterminer la recette optimale.
   (c) Montrer que $\mathcal{B}_0 = \{4,5,6\}$ est une base réalisable de (P). Mettre $\mathcal{B}_0$ en position de test.

(d) Résoudre (P).

Exercices supplémentaires

Exercice 12 On considère le polyèdre défini par les inégalités

$$(\mathcal{P})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 & \leq & 11 \\ x_1+2x_3 & \geq & 1 \\ x_1 & \leq & 2 \\ x_3 & \leq & 3 \\ x_1,x_2,x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Parmi les points suivants

$$P_1=(2,0,0)^T, P_2=(2,0,3)^T, P_3=(1,5,0)^T,$$

trouver ceux qui sont des sommets et déterminer ceux qui sont dégénérés. Justifier les réponses.

Exercice 13 On considère le polyèdre défini par les inégalités

$$(\mathcal{P})\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 & \leq & 13 \\ 3x_2+x_3 & \geq & 3 \\ x_1 & \leq & 2 \\ x_3 & \leq & 3 \\ x_1,x_2,x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Parmi les points suivants

$$P_1=(2,1,0)^T,\ P_2=(2,0,3)^T,\ P_3=(2,1,1)^T,\ P_4=(0,5,3)^T,$$

trouver ceux qui sont des sommets et déterminer ceux qui sont dégénérés. Justifier les réponses.

Exercice 14 Ecrire les programmes linéaires suivants sous forme standard :

1.

$$(P_1)\quad \begin{array}{rl} \max & x_1+5x_2+2x_3 \\ \text{s.c.} & x_1+3x_2\leq 10 \\ & x_1+x_2+x_3\leq 9 \\ & x_2,x_3\geq 0 \\ & x_1\in\mathbb{R} \end{array}$$

2.

$$(P_2)\quad \begin{array}{rl} \max & -x_1+x_2-x_3 \\ \text{s.c.} & 3x_1-3x_2\geq -7 \\ & x_1+2x_2+x_3\leq 9 \\ & x_1\leq 0 \\ & x_2\in\mathbb{R} \\ & x_3\geq 0 \end{array}$$

Exercice 15 En effectuant une phase d'initialisation, déterminer une base admissible de départ $\mathcal{B}_0$ pour le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

Exercice 16

1. En effectuant une phase d'initialisation, déterminer une base admissible de départ $\mathcal{B}_0$ pour le programme linéaire
$$\begin{array}{rl} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$
.

2. Est-ce que la solution de base $x(\mathcal{B}_0)$ est un sommet dégénéré ou non dégénéré ? Justifier votre réponse.

Exercice 17 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -5x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

et les bases $\mathcal{B}_1 = \{2, 4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1, 2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{1, 3\}$. Pour chaque base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 18 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & -5x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

et les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{2, 3\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{1, 4\}$. Pour chaque base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 19 On considère le programme linéaire

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll}
\max & 5x_1 + 12x_2 \\
\text{s.c.} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
& x_i \geq 0, \ i = 1, 2
\end{array}
$$

1. Ecrire le problème (P) sous forme standard $(\tilde{P})$.
2. Résoudre le problème $(\tilde{P})$ par l'algorithme du simplexe.
3. Résoudre graphiquement le problème (P) et comparer le resultat obtenu avec celui obtenu dans la question précédente.

Exercice 20 On considère le programme linéaire

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll}
\min & 5x_1 - 2x_2 \\
\text{s.c.} & x_1 - x_2 \geq 1 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
& 3x_1 + x_2 \geq 9 \\
& x_i \geq 0, \ i = 1, 2
\end{array}
$$

1. Ecrire le problème (P) sous forme standard $(\tilde{P})$.
2. Résoudre le problème $(\tilde{P})$ par l'algorithme du simplexe. Quelle est la valeur optimale?
3. Résoudre graphiquement le problème (P) et comparer le resultat obtenu avec celui obtenu dans la question précédente.

Exercice 21 Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Produire une unité de bien necessite:

- 0.5 heures de machine et 2 heures de main d'oeuvre avec la première technique;
- 1.5 heures de machine et 1.5 heures de main d'oeuvre pour la deuxème technique;
- 2 heures de machine et 0.5 heures de main d'oeuvre pour la troisième technique.

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12h et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15 h. L'entreprise cherche à maximiser ses bénéfices, les marges unitaires étant de 3 euros, 4 euros et 5 euros selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

1. Ecrire le programme linéaire que doit résoudre l'entreprise.

2. Résoudre le problème par la méthode du simplexe.

3. Comment écrire que l'on désire satisfaire une demande d'au moins 10 unités? Cela modifie-t-il la solution précédente?

4. On considère le sommet $x_1 = 96/15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 66/15$, $x_4 = x_5 = 0$.

   (a) Quelle est la base $\mathcal{B}$ correspondante.?

   (b) Ecrire la fonction objectif en fonction des variables hors base.

   (c) Quel est le vecteur des coûts réduits correspondant à cette base?

   (d) Utiliser la condition suffisante d'optimalité pour conclure si ce sommet est optimal.

Exercice 22 Une entreprise envisage le lancement de deux nouveaux types de moteurs. Ces deux modèles, A et B, seront fabriqués essenciellement dans trois ateliers pour lesquels on dispose des renseignements suivants:

	temps opératoire unitaire pour le modèle A	temps opératoire unitaire pour le modèle B	temps disponible (en heures)	Coût de l'heure
Emboutissage	50 mn	40 mn	2500 h	150 euros
Soudure	30 mn	20 mn	1000 h	60 euros
Peinture	20 mn	10 mn	800 h	20 euros

Une étude de marché a par ailleurs révélé que les prix de vente devaient être fixés à 215 euros pour le modèle A et 150 euros pour le modèle B, le marché du modèle A étant saturé avec 1800 articles.

Ecrire le programme linéaire qui permet de déterminer un plan optimal de fabrication de façon à maximiser les bénéfices.

Exercice 23 Un commerçant vend des chaussettes sur les marchés. Sa clientèle lui achète des chaussettes de deux types:

- des mi-bas en fil de coton;

- des chaussettes en laine.

Le goût des clients l'amène à proposer deux types de lots:

- un lot à 72 euros comprenant 5 paires de chaussettes en coton et 13 paires en laine;

- un lot à 42 euros comprenant 9 paires de chaussettes en coton et 4 paires en laine.

Il dispose au total de 162 paires de chaussettes en coton et de 169 paires en laine.

Quels lots doit-il présenter pour réaliser une recette maximale ? Modéliser le problème sans le résoudre.

Exercice 24 La Société FRIGOR construit et vend 2 types de réfrigérateurs. le FR1 et le FR2. Ils sont fabriqués à partir de 3 facteurs de production P1, P2, P3 ; P1 (heure machine), P2 (heure main d'oeuvre spécialisée), P3 (heure main d'oeuvre non spécialisée). Le tableau suivant résume le nombre d'unités nécessaires pour la fabrication d'un réfrigérateur FR1 et d'un réfrigérateur FR2 ainsi que leur prix de vente unitaire V.

	P1	P2	P3	V
FR1	48	115	32	2095
FR2	43	120	25	2047

Le deuxième tableau indique le coût unitaire et la capacité hebdomadaire (en heures) pour chaque facteur.

	P1	P2	P3
Coût unitaire	5	12	6
Capacité hebdomadaire	3264	13800	2000

Tout réfrigérateur fabriqué est supposé vendu.

On veut savoir combien de réfrigérateurs de chaque type la société FRIGOR doit-elle fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge. Modéliser ce problème comme un problème d'optimisation avec contraintes.

Exercice 25 On considère le tableau suivant de la méthode du simplexe:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_B
x_4	15	16	17	1	0	0	0	440
x_5	15	18	20	0	1	0	0	415
x_6	6	17	19	0	0	1	0	500
x_7	5	3	16	0	0	0	1	175
	14	37	35	0	0	0	0	

1. Quelles sont les variables de base?

2. Quelle est la variable rentrante?

3. Quelle est la variable sortante?

4. Réaliser la mise à jour de ce tableau correspondante à la première étape de la méthode du simplexe.

Exercice 26 Un atelier de haute couture fabrique deux types de bretelles A et B de luxe. Les approvisionnements ne permettent pas de produire plus de 1000 paires de bretelles par jour quelque soit leur type. La chaîne de montage n'est utilisable que 15 heures par jour et ne peut pas fabriquer les deux types de bretelles en même temps. Les autres données de gestion sont indiquées dans le tableau suivant:

Type de bretelles	Prix de vente en euro par paire	Nombre de paires produites par heure
A	85	124
B	112	60

On note x et y le nombre d'heures consacrées par jour la fabrication de A et B respectivement et on suppose vendue toute la production.

Quel est le programme optimal de production que l'on doit résoudre ? (sans donner la résolution)

Exercice 27 Chaque jour, la CMSG peut faire partir d'une gare des trains rapides et des express.

- Un rapide comporte 2 voitures postales, 3 wagons de 2ème classe, 3 wagons de 1ère classe et 11 wagons couchettes;
- un express comporte 2 voiture postales, 2 wagons de 2ème classe, 1 wagons de 1ère classe et 10 wagons couchettes.

On dispose chaque jour de 18 voitures postales, 20 wagons de 2ème classe, 16 de 1ère classe et 110 de couchettes. De plus on sait que un wagon de 2ème classe contient 58 voyageurs, un wagon de 1ère classe 45 et un wagon de couchettes 35.

Nous voulons savoir combien de rapides et combien d'express faut-il faire partir chaque jour pour que le nombre de voyageurs transportés soit maximum. Modéliser le problème.

Exercice 28 Résoudre par la méthode du simplexe les problèmes suivants:

$$\max(5x_1 + 14x_2)$$

$$(P') \quad \begin{cases} \text{s.c.} & 6x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max(9x_1 + 13x_2)$$

$$(P') \quad \begin{cases} \text{s.c.} & 9x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 29 On considère le polyèdre défini par les inégalités

$$(P)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 8 \\ x_2 + 6x_3 & \leq & 12 \\ x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Parmi les points suivants

$$P_1 = (2,6,0)^T, P_2 = (4,6,0)^T, P_3 = (4,0,2)^T,$$

trouver ceux qui sont des sommets et déterminer ceux qui sont dégénérés. Justifier les réponses.

Exercice 30 Résoudre par la méthode du simplex le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \max & \alpha x_1 + 16x_2 + 12x_3 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 & \leq & 400 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 1600 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases} \end{array}$$

avec $\alpha = 20$. Est-il possible de trouver une valeur de α pour laquelle l'optimum est non borné? Pourquoi?

Exercice 31 Une raffinerie fabrique du butane, de l'essence, du diesel et du fioul à partir de deux pétroles bruts B1 et B2. Pour élaborer tous ces produits, le raffineur a recours à quatre familles de traitement: la distillation, le reformage, la désulfuration et le craquage catalytique. La distillation s'effectue dans une tour et fournit du butane, du naphta, du gazole brut et des résidus.. Ces produits sont stockés dans des réservoirs avant de subir quelques traitements pour pouvoir être utilisés: le naphta doit subir un réformage, le gazole un traitement de désulfuration et les résidus un processus de craquage (on suppose que ses traitements sont faits sans perte de matière). Le raffineur mélange ensuite les différents produits de façon à satisfaire les besoins du marché en butane, essence, diesel et fioul. Le schéma simplifié de la distillerie est donné dans la Figure 1.

Après distillation, le brut B1 fournit 3% de butane, 15% de naphta, 40% de gazole et 15% de résidu. Le brut B2 fournit 5% de butane, 20% de naphta, 35% de gazole et 10% de résidu. L'essence est fabriquée à partir du butane, naphta et résidu; le diesel est obtenu par mélange de gazole et résidu; le fioul contient du gazole et du résidu.

Les règlementations imposent des spécifications pour l'essence (indice d'octane et tension de vapeur) et pour le diesel (pourcentage de soufre). Les spécifications des quatre composants et celles à respecter pour l'essence et le diesel sont résumées dans le tableau suivant

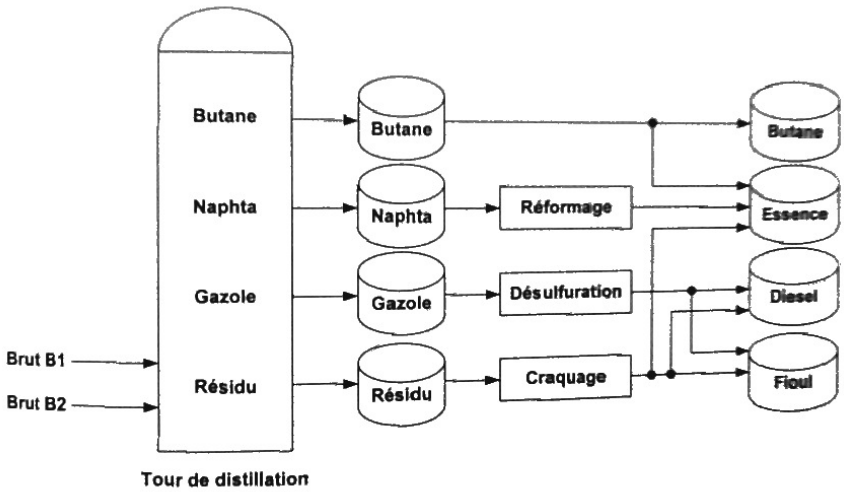

Figure 1: schéma de la raffinerie

Spécification	Butane	Naphta	Gazole	Résidu	Essence	Diesel
indice d'octane	120	100	-	74	$\geq$94	-
Tension de vapeur	60	2,6	-	4,1	$\leq$12,7	-
Soufre en %	-	-	0,3	1,2	-	$\leq$ 0,5

La raffinerie doit produire en un mois au moins 20 000 tonnes de butane, 40 000 tonnes d'essence, 35 000 tonnes de diesel et 50 000 tonnes de fioul. Elle dispose pour cela de 250 000 tonnes de brut B1 et 500 000 tonnes de brut B2 en stock. Les capacités mensuelles de reformage, désulfuration et craquage sont limitées à 30 000, 40 000 et 50 000 tonnes mensuelles. Les coûts de reformage, désulfuration et craquage sont respectivement de 250, 450 et 350 euro par tonne.

Le problème est de déterminer la composition de chaque produit fini (Butane (1), Essence (2), Diesel (3), Fioul (4))de façon à minimiser les coûts de production de la raffinerie pour le mois de planification tout en respectant les contraintes de capacité et les réglementations en vigueur. Aidez-vous de la Figure 1 pour répondre aux questions suivantes.

1. On énumère les produits de distillation- les composants: Butane (1), Naphta (2), Gazole (3) et Résidu (4). On définit les variables suivantes: pour $i = 1, \cdots, 4$ et $j = 1, \cdots, 4$

$$y_{ij} = \text{ quantité du composant } j \text{ dans le produit fini } i$$

   (a) Quelles variables sont nulles et peuvent donc être éliminées?

   (b) Ecrire la fonction objectif à minimiser.

2. Nous allons maintenant traiter les contraintes. Pour cela on introduit deux nouvelles variables

$$x_i = \text{ quantité de pétrole brut } i \text{ consommée, } i = 1, 2$$

   (a) Ecrire les contraintes qui traduisent les limites des stocks, la satisfaction des demandes et les capacités mensuelles de reformatage, désulfuration et craquage.

(b) Ecrire les contraintes qui traduisent les spécifications à respecter pour l'essence et le diesel.

(c) Finalement traduire les contraintes qui garantissent que la quantité totale de composant j utilisée dans les divers mélanges n'excède pas la quantité produite par distillation.

<u>Exercice 32</u> Trouver tous les sommets du polyèdre sous forme standard

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \quad Ax = b, x \geq 0 \right\} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sommets dégénérés.

<u>Exercice 33</u> Résoudre par la méthode du simplex le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 40 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

<u>Exercice 34</u> Comment résoudre le problème

$$\begin{array}{ll} \max & 50x_1 + 25x_2 \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 & \geq & 8 \\ 3x_1 + 4x_2 & \geq & 19 \\ 3x_1 + x_2 & \geq & 7 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

sans effectuer de phase d'initialisation?

<u>Exercice 35</u> Une université américaine dispose d'au plus 5000 places pour des étudiants. Elle recrute des étudiants américains et des étudiants étrangers. L'univerité compte 440 enseignants. L'encadrement est d'au moins un enseignant pour 12 étudiants américains et un enseignant pour 10 étudiants étrangers. L'université possède aussi 2800 places dans des résidences universitaires, elle garantit qu'au moins 40% des étudiants américains et 80% des étrangers trouveront une place dans une résidence. L'université reçoit des subventions de 2000 dollars par étudiant américain et de 3000 dollars par étudiant étranger. Modéliser le problème de maximisation du profit de l'université comme un problème de programmation linéaire.

3 La dualité en programmation linéaire

La dualité est un concept très important en optimisation. Regardons son interprétation économique dans le cadre de l'optimisation linéaire.

3.1 Introduction

Considérons deux classes de problèmes.

3.1.1 Problèmes de production

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}
$$

avec

- $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ vecteur des quantités des produits fabriqués,
- $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ vecteur des quantités de matières premières,
- $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$ matrice des coefficients techniques de production, et
- $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ vecteur des bénéfices unitaires.

Le point de vue de l'entrepreneur est donc de maximiser les bénéfices.

Supposons maintenant qu'un racheteur souhaite racheter les restes de matière première $b-Ax$ et il propose un prix unitaire $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$. Alors l'objectif de l'entrepeneur est de maximiser les recettes $R_y(x) = c^T x + y^T(b - Ax)$. C'est un problème de programmation paramétrique (y vecteur des paramètres). Mais le racheteur convoite la totalité du stock de matières premières et donc veut proposer un prix qui dissuade l'entrepreneur de produire. Il doit donc aussi résoudre un problème de programmation linéare $R_y(x) = (c - A^T y)^T x + b^T y$ où $b^T y$ est la recette de l'entrepreneur lorsqu'il ne produit rien. Pour que l'entrepreneur ait intérêt à ne pas produire il suffit que $c - A^T y \leq 0$ car à ce moment-là $R_y(x) \leq b^T y$. Evidemment le racheteur cherche à minimiser le coût du rachat $b^T y$. Donc le problème du racheteur peut s'écrire

$$
(P^*) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}
$$

(P^*) est le *dual de* (P).

3.1.2 Problèmes de fourniture

Un producteur doit fournir un distributeur en certaines quantités de produits en minimisant le coût de production

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

avec

- $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ vecteur des quantités de matières premières mises en jeu,
- $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ vecteur des coûts unitaires des matières premières,
- $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ vecteur des quantités à fournir, et
- $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$ matrice où a_{ij} représente la quantité de produit fini i fournie par transformation d'une unité de matière première j.

Exemple 5 *Une raffinerie distille* 2 *types de pétrole bruts* B_1 *et* B_2 *pour fournir* 3 *types d'essences* E_1*,* E_2 *et* E_3*. La raffinerie doit approvisionner un distributeur d'essences. Elle cherche un plan optimal de distillation tel que*

- *la demande d'essences est satisfaite :* $0.5(E_1)$*,* $0.4(E_2)$ *et* $0.6(E_3)$ *;*
- *le coût des quantités de bruts distillés est minimum, sachant que le coût unitaire est* $20(B_1)$ *et* $25(B_2)$*.*

Les quantités d'essences obtenues par distillation d'une unité de brut sont données par :

	E_1	E_2	E_3
B_1	*0.1*	*0.1*	*0.3*
B_2	*0.5*	*0.2*	*0.3*

Le problème de programmation linéaire devient donc

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & 20x_1 + 25x_2 \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Lorsqu'il transforme les matières premières pour satisfaire les demandes, l'entrepreneur produit un excédent mesuré par $Ax - b$.

Un sous-traitant lui propose soit de racheter l'excédent soit de l'approvisionner en produits finis, en fixant des prix unitaires $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$. Ainsi le coût total pour l'entrepreneur sera

$$\begin{aligned} R_y(x) &= c^T x - y^T(Ax - b) \\ &= (c - A^T y)^T x + b^T y \end{aligned}$$

où $b^T y$ est le coût d'achat de toute la quantité (necessaire à la satisfaction de la demande) chez le sous-traitant. Si le sous-traitant souhaite dissuader l'entrepreneur de transformer, il faut que $c - A^T y \geq 0$ car à ce moment-là $R_y(x) \geq b^T y$ et donc l'entrepreneur a intérêt à s'approvisionner toute la quantité auprès du sous-traitant. Donc pour bien fixes ses prix le sous-traitant doit résoudre un problème de programmation linéaire pour maximiser le produit de sa vente

$$(P^*) \quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ s.c. & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

3.2 Définition du problème dual

Définition 4 *Pour un problème de programmation linéaire sous forme canonique*

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

son dual est défini par

$$(P^*) \quad \begin{array}{rl} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Propriété 1 *Le dual du dual* (P^*) *est* (P).

Démonstration. Pour déterminer le dual de (P^*), il faut le mettre sous la forme canonique

$$\begin{array}{rl} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} -\max & (-b^T y) \\ s.c. & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array} \underset{\text{dual}}{\Longrightarrow} \begin{array}{rl} -\min & (-c^T x) \\ s.c. & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \blacksquare$$

Exemple 6

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.c. & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.c. & \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \underset{dual}{\Longrightarrow}$$

$$(P^*) \quad \begin{array}{rl} \min & -y_1' + 2y_2 + 2y_3 \\ s.c. & \begin{cases} -y_1' + y_2 + 6y_3 \geq 2 \\ -y_1' + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1' \geq 0, \ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{array} \underset{y_1 = -y_1'}{\Leftrightarrow} \begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ s.c. & \begin{cases} y_1 + y_2 + 6y_3 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 \leq 0, \ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Remarque : Une contrainte dans le mauvais sens correspond à une variable duale négative.

Exemple 7

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + 4x_2 + \frac{5}{2}x_3 \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + 4x_2 + \frac{5}{2}x_3 \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \underset{dual}{\Longrightarrow}$$

$$(P^*)\quad \begin{array}{ll} \min & 5y_1 + 2y_2' - 2y_3' \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2' - y_3' \geq 1 \\ 2y_1 + y_2' - y_3' \geq 4 \\ y_1 \geq \frac{5}{2} \\ y_1, y_2', y_3' \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \underset{y_2 = y_2' - y_3'}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} \min & 5y_1 + 2y_2 \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq \frac{5}{2} \\ y_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque : Une contrainte d'égalité correspond à une variable duale non astreinte ($\in \mathbb{R}$).

On peut facilement généraliser et vérifier les résultats du tableau suivant

Primal	$\rightleftarrows$	Dual
MAX		MIN
contrainte i : $\leq$		variable $y_i \geq 0$
contrainte i : $\geq$		variable $y_i \leq 0$
contrainte i : $=$		variable $y_i \in \mathbb{R}$
variable $x_j \geq 0$		contrainte j : $\geq$
variable $x_j \leq 0$		contrainte j : $\leq$
variable $x_j \in \mathbb{R}$		contrainte j : $=$

Cas d'un problème sous forme standard

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \underset{\text{dual}}{\Longrightarrow}$$

$$(P^*)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y' - b^T y'' \\ s.c. & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', y'' \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & b^T (y' - y'') \\ s.c. & A^T (y' - y'') \geq c \\ & y', y'' \geq 0 \end{array} \quad \underset{y = y' - y''}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & y \in \mathbb{R} \end{array}$$

3.3 Propriétés de la dualité

Nous allons déduire les propriétés de la dualité des conditions d'optimalité du Chapitre 3. Considérons le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

On peut l'écrire sous la forme d'un problème de minimisation

$$(P)\qquad \begin{array}{rl} -\min & (-c^T x) \\ s.c. & Ax - b \leq 0 \\ & -x \leq 0 \end{array}$$

qui est un problème convexe et donc s'il y a un optimum local il est global.

Caractérisation de l'optimum par KKT

$$f(x) = -c^T x \Rightarrow \nabla f(x) = -c^T,$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ -x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla h(x) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}.$$

Alors $\bar{x}$ optimum de (P) ssi $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -c^T - (\lambda_1, \dots, \lambda_m)A + (\mu_1, \dots, \mu_n) = 0 \\ \lambda_i \leq 0,\ i = 1, \dots, m \\ \mu_j \leq 0,\ j = 1, \dots, n \\ \lambda_i (A\bar{x} - b)_i = 0,\ i = 1, \dots, m \\ \mu_j \bar{x}_j = 0,\ \ j = 1, \dots, n \end{array} \right. .$$

On pose $\Lambda = -(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ et $\mu = -(\mu_1, \dots, \mu_n)^T$. Alors

$$\begin{array}{ll} (1) & A^T \Lambda - \mu = c \\ (2) & \Lambda \geq 0,\ \mu \geq 0 \\ (3) & \Lambda^T (b - A\bar{x}) = 0,\ \mu^T \bar{x} = 0 \end{array}$$

Λ et μ sont les *multiplicateurs* associés à $\bar{x}$. Comme $\mu = A^T \Lambda - c \geq 0 \Leftrightarrow A^T \Lambda \geq c$, Λ est réalisable pour le problème dual (P^*) de (P). Considérons maintenant y un point réalisable de

$$(P^*)\qquad \begin{array}{rl} \min & b^T y \\ s.c. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

C'est encore un problème convexe et

$$f(y) = b^T y \Rightarrow \nabla f(y) = b^T,$$

$$h(y) = \begin{pmatrix} c - A^T y \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla h(y) = \begin{pmatrix} -A^T \\ -I \end{pmatrix}.$$

Donc $\bar{y}$ est solution optimale de (P^*) ssi $\exists \Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)^T$ et $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_m)^T$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Lambda' + b + \mu' = 0 \\ \Lambda'^T (c - A^T \bar{y}) = 0 \\ -\mu'^T \bar{y} = 0 \\ \Lambda' \leq 0,\ \mu' \leq 0 \end{array} \right.$$

On pose $X_1 = -\Lambda'$ et $X_2 = -\mu'$. Alors on obtient que $\bar{y}$ solution optimale ssi $\exists X_1 \in \mathbb{R}^n$ et $X_2 \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{cases} AX_1 + X_2 = b \\ X_1^T(A^T\bar{y} - c) = 0,\ X_2\bar{y} = 0 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \\ \bar{y} \geq 0,\ A^T\bar{y} \geq c \end{cases}$$

Mais le choix $X_1 = \bar{x}$ et $X_2 = b - A\bar{x}$ satisfait ces conditions pour $\bar{y} = \Lambda$. Donc Λ est une solution optimale du dual. On a ainsi montré le résultat suivant :

Proposition 1 *Si $\bar{x}$ est un optimum de (P) et $(\Lambda, A^T\Lambda - c)$ des multiplicateurs associés à $\bar{x}$, alors Λ est optimum de (P^*) et $(\bar{x}, b - A\bar{x})$ des multiplicateurs associés.*

3.4 Théorème d'existence

Considérons le problème d'optimisation linéaire (P) et sont dual (P^*)

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & \left.\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} (\mathcal{A}) \end{array} \qquad\qquad (P^*) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ s.c. & \left.\begin{array}{l} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}\right\} (\mathcal{A}^*) \end{array}$$

On dit que (P) est *réalisable* si $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Proposition 2 (Inégalité de dualité).

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \forall y \in \mathcal{A}^*\ :\ c^T x \leq b^T y.$$

Démonstration. $\forall y \in \mathcal{A}^*$ on a $y^T A \geq c^T$. Donc $\forall x \in \mathcal{A}$ on a $y^T Ax \geq c^T x$ car $x \geq 0$. En plus, $\forall x \in \mathcal{A}$ on a $Ax \leq b$. Donc $\forall y \in \mathcal{A}^*$ on a $y^T Ax \leq y^T b$ car $y \geq 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathcal{A}$ et $\forall y \in \mathcal{A}^*$, $c^T x \leq y^T Ax \leq y^T b = b^T y$. ■

Corollaire 3 *Si $\bar{x} \in \mathcal{A}$ et $\bar{y} \in \mathcal{A}^*$ vérifient $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, alors $\bar{x}$ est optimum de (P) et $\bar{y}$ est optimum de (P^*).*

Démonstration. Ceci sort immédiatement de l'inégalité de dualité car

$$\forall x \in \mathcal{A}\ :\ c^T x \leq b^T\bar{y} = c^T\bar{x} \Rightarrow \bar{x} \text{ solution optimale de } (P)$$

et

$$\forall y \in \mathcal{A}^*\ :\ b^T\bar{y} = c^T\bar{x} \leq b^T y \Rightarrow \bar{y} \text{ solution optimale de } (P^*) \quad ■$$

Théorème 7 (Existence). *(P) possède des optimums ssi (P) et (P^*) sont réalisables.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que (P) possède un optimum. Alors (P) est réalisable. Si $\bar{x}$ est optimum de (P) alors Λ est multiplicateur associé à $\bar{x}$ est réalisable pour (P^*). Donc (P^*) est réalisable.
($\Leftarrow$) Supposons que (P) est (P^*) sont réalisables, donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont non vides. Soit $y_0 \in \mathcal{A}^*$. Par l'inégalité de dualité on a $\forall x \in \mathcal{A} \ : \ c^T x \leq b^T y_0$. Donc la fonction objectif est majorée. Le domaine $\mathcal{A}$ étant fermé il existe donc une solution (car la fonction objectif est continue sur $\mathcal{A}$). Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite maximisante : $\sup_{x\in\mathcal{A}} c^T x = v = \lim_{k\to\infty} c^T x_k$. ■

La corollaire suivante est une conséquence triviale du théorème précédent.

Corollaire 4 *Si (P) est réalisable, alors (P) n'a pas d'optimum ssi (P^*) n'est pas réalisable.*

On peut ainsi lister les différentes situations possibles dans le tableau suivant

(P) \ (P^*)	non réalisable	réalisable
non réalisable	(*)	(P^*) non borné
réalisable	(P) non borné	optimum

(*) *Exemple :*

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - 2x_2 \\ s.c. & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} (\mathcal{A}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \emptyset \ \text{ et} \\ \mathcal{A}^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ y_1 - y_2 \geq 3, \ -y_1 + y_2 \geq -2\} = \emptyset \end{array}\right. .$$

3.5 Théorème de dualité

Théorème 8 *Soient $\bar{x} \in \mathcal{A}$, $\bar{y} \in \mathcal{A}^*$. Alors $\bar{x}$ est optimum de (P) et $\bar{y}$ est optimum de (P^*) ssi $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) Nous avons déjà montré cette implication dans Corollaire 3.
($\Rightarrow$) Supposons que $\bar{x}$ est optimum de (P) et que $\bar{y}$ est optimum de (P^*). On sait que si (Λ, μ) sont des multiplicateurs associés à $\bar{x}$ on a $\Lambda^T(b - A\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow b^T\Lambda = \Lambda^T A\bar{x}$ et

$$\left\{\begin{array}{l} A^T\Lambda - \mu = c \Leftrightarrow \mu = A^T\Lambda - c \\ \mu^T\bar{x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\Lambda^T A - c^T)\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \Lambda^T A\bar{x} = c^T\bar{x},$$

donc $b^T\Lambda = c^T\bar{x}$. Si $\bar{y}$ est solution optimale de (P^*), il faut que

$$c^T\bar{x} \leq b^T\bar{y} \leq b^T\Lambda = c^T\bar{x}.$$

Donc $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$. ■

3.6 Théorème des écarts complémentaires

Théorème 9 *Soient $\bar{x} \in \mathcal{A}$ et $\bar{y} \in \mathcal{A}^*$. Alors $\bar{x}$ est optimum de (P) et $\bar{y}$ est optimum de (P^*) ssi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0 \\ \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0 \end{array} \right. .$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons que $\bar{x}$ est optimum de (P) et que $\bar{y}$ est optimum de (P^*). L'inégalité de la dualité implique que

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \forall y \in \mathcal{A}^*\ :\ c^Tx \leq (A^Ty)^Tx = y^TAx = (Ax)^Ty \leq b^Ty.$$

Or d'après le théorème de dualité $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, donc

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^TA\bar{x} = b^T\bar{y} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0 \\ \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0 \end{array} \right. .$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\bar{x}^TA^T\bar{y} = \bar{x}^Tc$ et que $\bar{y}^Tb = \bar{y}^TA\bar{x}$. Alors $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ et par le théorème de dualité $\bar{x}$ est optimum de (P) et $\bar{y}$ est optimum de (P^*). ■

Remarque : Le théorème des écarts complementaires peut s'écrire

- $$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \bar{x}_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\bar{y}_j - c_i \right) \right\} = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\bar{y}_j - c_i \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

  $\Rightarrow$ si la i-ème contrainte de (P^*) est non active alors $\bar{x}_i = 0$.

- $$\sum_{i=j}^{m} \left\{ \bar{y}_j \left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\bar{x}_i \right) \right\} = 0 \Leftrightarrow \bar{y}_j \left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\bar{x}_i \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

  $\Rightarrow$ si $\bar{y}_j > 0$ alors la j-ème contrainte de (P) est active :

  $$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\bar{x}_i = b_j.$$

Donc le théorème des écarts complementaires permet de retrouver la solution de (P) si on a résolu le problème (P^*).

Exemple 8 *Résoudre le problème suivant :*

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 18 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{array} \right. \end{array}$$

On n'a pas une base de départ triviale pour démarrer l'algorithme du simplexe car si on réduit á la forme standard la base correspondant à l'identité n'est pas réalisable :

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ -18 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \nleq x_i,\ i = 5, 6, 7.$$

C'est donc plus facile de résoudre le dual (P^*)

$$(P^*) \quad \begin{array}{ll} \max & 20y_1 + 30y_2 + 18y_3 \\ s.c. & \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 12 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 8 \\ y_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 3 \end{cases} \end{array}$$

Si on réduit à la forme standard et on applique l'algorithme du simplexe on obtient comme optimum $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)^T = (2, 1, 1)^T$, $\bar{y}_4 = \bar{y}_5 = \bar{y}_6 = 0$, $\bar{y}_7 = 2$ et $b^T\bar{y} = 88$. Pour retrouver la solution de (P) on applique le théorème des écarts complementaires. Comme $\bar{y}_7 > 0$ le $4^{\text{ème}}$ contrainte de (P^*) est non active, donc $\bar{x}_4 = 0$, et puisque $\bar{y}_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, il faut que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \end{cases}.$$

Donc $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)^T = (6, 2, 4, 0)^T$ et $c^T\bar{x} = 88$.

3.7 Valeurs marginales : interprétation des variables duales

On étudie l'effet de faibles variations du stock de matières premières sur la valeur de l'objectif à l'optimum. Supposons que le stock varie de b à $b + \Delta b$ avec $\Delta b = (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m)^T$ et donc le problème à résoudre sera

$$(P_\Delta) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.c. & Ax \leq b + \Delta b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Soit $\bar{x}$ solution optimale de (P) et $\bar{x}_\Delta = \bar{x} + \Delta\bar{x}$ solution optimale de (P_Δ). On peut montrer que si (P) est non dégénéré et Δb suffisamment "petit" alors

1. $\bar{x}$ et $\bar{x}_\Delta$ sont associés à la même base réalisable $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire $\bar{x}_i = 0 \Leftrightarrow \Delta\bar{x}_i = 0$) ;
2. $\bar{y}_\Delta = \bar{y}$ (c'est-à-dire $\bar{y}$ reste l'optimum de (P^*_Δ)).

On applique alors le théorème de dualité :

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } (P) \text{ et } (P^*) \ : \ b^T\bar{y} = c^T\bar{x} \\ \text{pour } (P_\Delta) \text{ et } (P^*_\Delta) \ : \ (b + \Delta b)^T\bar{y} = c^T(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta b^T\bar{y} = c^T\Delta\bar{x}.$$

Considérons maintenant la variation du stock d'un seul produit $\forall j \neq k \ : \ \Delta b_j = 0$ et $\Delta b_k \neq 0$ "petit". Alors on a

$$\bar{y}_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\Delta \bar{x}_i}{\Delta b_k}.$$

Donc $\bar{y}_k$ est le produit marginal de la matière première k ($\bar{y}_k$ c'est ce qui rapporterait à l'unité une faible variation de la disponibilité de la matière première k.)

3.8 Exercices

Exercice 1 On considère le problème de programmation linéaire suivant

$$(P) \begin{cases} \min & (48x_1 + 40x_2 + 56x_3) \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 48 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 80 \\ & 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 32 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre (P^*) par l'algorithme du simplexe.
2. Résoudre (P).

Exercice 2 Soit α un paramètre réel, et on considère le problème paramétré (P_α)

$$\begin{cases} \min & (15x_1 + 6x_2 + 10x_3) \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2\alpha \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement (P_α^*).
2. Résoudre (P_α).

Exercice 3 Une entreprise fabrique 5 produits P_i ($1 \leq i \leq 5$) à l'aide de matières premières M_j ($1 \leq j \leq 4$). Les caractéristiques techniques de la production, les quantités disponibles de matières premières, les bénéfices unitaires à la vente sont résumés dans le tableau suivant

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Quant. Dispo.
M_1	1	1	0	2	0	8
M_2	1	0	2	0	0	4
M_3	0	2	0	0	1	9
M_4	1	1	1	1	1	16
Bénéf. Unit.	3	4	1	7	2	

1. Déterminer un plan de production qui maximise le bénéfice à la vente.

2. Un racheteur propose à l'entrepreneur de racheter les matières premières au prix unitaire p_i $(1 \leq i \leq 4)$ pour la matière première M_i. Que va faire l'entrepreneur dans chacun des cas suivants:

   (a) $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 3$;

   (b) $p_1 = 6$, $p_2 = p_3 = p_4 = 0$

   (c) $p_1 = 7/2$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 2$, $p_4 = 0$.

Exercice 4 Dans une raffinerie, la distillation de 4 types de pétrole bruts B_i $(1 \leq i \leq 4)$ fournit 3 qualités d'essences E_j $(1 \leq j \leq 3)$. La raffinerie doit approvisionner un distributeur d'essences. Les caractéristiques techniques de la distillation, la demande et le coût unitaire des pétroles bruts sont indiqués dans le tableau ci-dessous

	E_1	E_2	E_3	Coûts unit.
B_1	10%	20%	10%	5
B_2	10%	10%	20%	5
B_3	30%	40%	20%	12
B_4	20%	10%	10%	8
Demande	2	3	1.8	

Un sous-traitant propose au raffineur d'assurer l'approvisionnement d'essences. Quel systèmes de prix unitaires va-t-il proposer?

Exercice 5 Un laboratoire farmaceutique utilise 3 produits $B_i, i = 1, 2, 3$ pour élaborer un fortifiant. Les normes en vigueur imposent au fortifiant une teneur minimale en vitamines V_j, $j = 1, ...4$ donnée par

$$V_1 = 4, \quad V_2 = 2, \quad V_3 = 4, \quad V_4 = 14.$$

Les teneurs en vitamines de chaque produit sont données dans le tableau ci-dessus:

	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1	1	0	0	1
B_2	1	0		2
B_3	0	1	1	3

Les coûts unitaires de chaque produit sont : $c_1 = 5, c_2 = 13, c_3 = 18$.

Le laboratoire cherche à fabriquer son fortifiant au coût minimal, tout en respectant les normes en vigueur.

1. On note (P) le problème linéaire du laboratoire.

   (a) Ecrire et interpréter (P^*).

   (b) Résoudre (P^*).

   (c) Résoudre (P) (on trouvera une infinité d'optimums: $\tilde{x}_1 = 6 - \tilde{x}_3, \tilde{x}_2 = 4 - \tilde{x}_3, \tilde{x}_3)$ avec $2 \leq \tilde{x}_3 \leq 3$).

2. On suppose que le coût unitaire de B_3 passe de 18 à $18+\alpha$ avec $\alpha > 0$. On note (P_α) le nouveau programme linéaire.

   (a) Résoudre (P^*_α).

   (b) Résoudre (P_α).

3. Les normes en vigueur se durcissent et les nouvelles teneurs en vitamines deviennent: $V_1 = 4+\beta$, $V_2 = 2+\beta$, $V_3 = 4+\beta$, $V_4 = 14+2\beta$ $(\beta > 0)$. On note (P_β) le nouveau programme linéaire

   (a) Montrer que la base réalisable $\mathcal{B} = \{4, 2, 3\}$ trouvée en 1. est une base réalisable du problème standard obtenu de (P^*_β). Mettre cette base en position de test.

   (b) Résoudre (P^*_β), en distinguant deux cas: $\beta \leq 1$ et $\beta > 1$.

   (c) Résoudre (P_β).

Exercices supplémentaires

Exercice 6 Ecrire les programmes linéaires suivants sous forme canonique :

1.

$$(P_1)\quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 = 5 \\ & x_2 + x_3 - x_4 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \leq 0 \\ & x_4 \in \mathbb{R} \end{array}$$

2.

$$(P_2)\quad \begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_4 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \leq 0 \end{array}$$

Exercice 7 Ecrire le dual des problèmes suivants :

1.

$$(P_1)\quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

2.

$$(P_2) \quad \begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 4 \\ & x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercice 8 On considère le problème :

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

1. Résoudre graphiquement le dual.
2. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal.
3. Quelle est la valeur optimale?

Exercice 9 Une entreprise fabrique trois produits P1, P2 et P3 qui doivent subir une opération sur deux machines M1 et M2. Le nombre de pièces que les machines peuvent modifier par heure ainsi que le temps disponible de chaque machine et le prix de vente unitaire sont indiqués dans le tableau suivant :

	M1 (en pièces par heure)	M2 (en pièces par heure)	prix de vente (en euros par pièce)
P1	8	4	10
P2	5	5	12
P3	2	4	20
temps disponibles (en heures)	25	20	

1. Ecrire le programme linéaire ($\mathcal{P}$) qui permet de déterminer un plan optimal de fabrication de façon à maximiser les bénéfices.
2. Ecrire le dual ($\mathcal{D}$) du problème ($\mathcal{P}$).
3. Résoudre graphiquement le dual ($\mathcal{D}$).
4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal ($\mathcal{P}$).
5. Quelle est la valeur optimale du primal ($\mathcal{P}$) ?

Exercice 10 Dans une exploitation agricole, on doit choisir entre deux types d'engrais A et B pour fertiliser les terres. Celles-ci nécessitent au moins 62 kg de potassium, 107 kg de calcium et 94 kg de sodium par hectare. Dans un paquet d'engrais A, il y a 1 kg de potassium, 3 kg de calcium et 3 kg de sodium ; dans un paquet d'engrais B, il y a 2 kg de potassium, 2 kg de calcium et 1 kg de sodium.

1. Quel programme linéaire ($\mathcal{P}$) doit on résoudre pour déterminer les quantités optimales de A et de B à utiliser par hectare si le prix des paquets est de 90 euros pour A et de 90 euros pour B ?
2. Ecrire le problème dual ($\mathcal{D}$).
3. Quel problème est-il préférable de résoudre, ($\mathcal{P}$) ou ($\mathcal{D}$)? Justifiez votre réponse.
4. Résoudre par la méthode du simplexe le problème choisi dans la question précédente.
5. Calculer les quantités optimales d'engrais A et d'engrais B.

Exercice 11 Considérons le problème suivant:

$$\min(x_1 - 3x_2)$$

$$(P') \quad \begin{cases} \text{s.c.} \quad 2x_1 - 3x_2 \leq 7 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ \qquad x_1 - x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le problème sous forme standard (P).
2. Pourquoi $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ n'est pas une base réalisable?
3. On doit donc résoudre par la méthode du simplexe en deux phases. La première phase consiste à trouver une base de départ réalisable. Quel problème doit-on résoudre ?
4. On considère la base $\mathcal{B} = \{3, 1, 5\}$. Résoudre le système des contraintes par rapport à ces variables et conclure qu'il s'agit d'une base réalisable pour (P).
5. Ecrire la fonction objectif en fonction des variables hors base.
6. En déduire le vecteur des coûts réduits et compléter le tableau initial suivant de démarrage de la méthode du simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Sol.
x_3	0	1	1	2	0	3
x_1	1	-2	0	-4	0	2
x_5	0	1	0	1	1	2

7. Résoudre le problème (on doit obtenir comme solution optimale $x_1 = 6, x_2 = 2$).

8. Ecrire le problème dual (D) de (P').

9. Résoudre (D) en appliquant les conditions de complémentarité.

10. On veut remplacer dans le problème (P') la valeur 7 par $7+\alpha$, avec α de valeur absolue suffisamment petite pour que la base reste optimale.

    (a) Comment change la valeur optimale de (P')?

    (b) Pour quelles valeurs de α ce résultat reste-t-il valable?

Exercice 12 Une raffinerie fabrique deux qualités d'essence A et B en mélangeant dans certaines proportions deux produits semi-finis P_1 et P_2. Les indices d'octane et les quantités disponibles par jour pour ces deux produits sont indiqués dans le tableau suivant :

	Indice d'octane	Nb. Barils/jour
Produit P_1	71	3900
Produit P_2	99	5000

L'indice d'octane de l'essence A doit être d'au moins 96 et celui de l'essence B d'au moins 85 . La raffinerie vend toute sa production de A et B aux prix respectifs de 3.75 dollars et 2.75 dollars le baril. Les excédents éventuels de P_1 sont revendus au prix de 1.25 par baril à une fabrique de goudron et ceux de P_2 sont revendus à un terrain d'aviation au prix de 2.25 dollars par baril. On note les variables $x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}$.

1. Expliciter la signification de chacune des variables.

2. Calculer, en fonction de x_{1A} et x_{2A}, l'indice d'octane de A.

3. Ecrire le programme correspondant à l'optimisation du profit de la raffinerie.

4. Avez-vous intérêt à résoudre par la méthode du simplex ce programme ou son dual? Justifier votre réponse.

Exercice 13 L'entreprise Gemini démarre, en complément de son activité, une affaire de fabrication d'écharpes et de pulls pour l'université, sur lesquels elle doit coudre un écusson brodé. Elle en dispose de 2000. Les bénéfices unitaires sont respectivement de 10 euros et de 35 euros. Une écharpe necessite une pelote de laine et un pull 4 pelotes. Au total il y a un stock de 2300 pelotes. Elle dispose aussi d'un endroit de stockage qui permet de ranger 1250 écharpes. On peut aussi utiliser cette place pour ranger les pulls, mais ils prennent plus de place: 3 pulls prennent la place de 2 écharpes.

1. Ecrire le programme linéaire (P) qui permet de déterminer le plan optimal de fabrication de façon à maximiser le gain de l'entreprise.

2. M. Martin vient de s'installer dans la région et souhaite démarrer une activité dans le textile. Il propose donc à l'entreprise Gemini de lui acheter tout son stock à des prix très compétitifs. Quel programme linéaire doit il résoudre pour fixer les prix unitaires de la place de rangement, des écussons et des pelotes de laine de façon à minimiser ses coûts et convaincre l'entreprise de lui vendre son stock?

3. En sachant que la solution du problème (P) est de 420 pulls et 620 écharpes, calculer les prix que doit fixer M. Martin et ses coûts.

<u>Exercice 14</u> Soit une entreprise capable de produire deux biens en quantités x_1 et x_2. Ces productions font intervenir deux facteurs fixes: la main d'oeuvre et des équipements. La quantité disponible en main d'oeuvre est de 2. La capacité de production des équipements est égale à 1 et ils n'interviennent que pour la production du second bien. Les bénéfices unitaires sont de 3/2 et 1 respectivement et on veut maximiser les bénéfices totaux, c'est à dire, résoudre le problème

$$\max(\frac{3}{2}x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} \text{s.c.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème graphiquement.

2. Ecrire le problème sous forme standard. A quelle base correspond la solution optimale trouvée en 1.?

3. Ecrire les contraintes sous forme résolue par rapport aux variables de base.

4. Exprimer la fonction objectif en termes des variables hors base et montrer que le vecteur des coûts réduits est $c^H = [-3/4, -1/4]$.

5. Calculer la solution optimale du dual.

6. Supposons que l'on augmente la main d'oeuvre disponible $b_1^0 = 2$ vers $b_1 = b_1^0 + \Delta b_1$ ($b_2^0 = 1$ restant fixe). Quelle est la nouvelle solution optimale? Comment varie la valeur optimale?

7. Supposons maintenant que l'on veut augmenter la capacité de production de $b_2^0 = 1$ vers $b_2 = b_2^0 + \Delta b_2$ ($b_1^0 = 2$ restant fixe). Déterminer la nouvelle solution et la variation de la valeur optimale.

8. Comparer les résultats de 6. et 7. avec la solution optimale du dual et donner une interprétation économique à cette solution.

9. Si le prix d'usage des équipements servant à la fabrication du bien 2 et de 0.2, vaut-il la peine d'augmenter la capacité de production? Et si c'est 0.4?

Exercice 15 On considère le problème suivant:

$$(P)\quad \begin{cases} \min(8x_1 + 5x_2 + 9x_3) & \\ \text{s.c.} \quad 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 7 & \\ \qquad\quad 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 17 & \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

1. Ecrire le problème dual.
2. Résoudre le dual par la méthode du simplexe.
3. Quelle est la solution optimale de (P)?

Exercice 16 Ecrire le dual du problème suivant

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ x_1 & \leq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_3 & \leq & 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 17 On considère le problème:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq & 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 & \geq & 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Résoudre graphiquement le dual.
2. Donner la solution du primal.
3. Quelle est la valeur optimale?

Exercice 18 Quel est le dual du problème

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.c.} & \begin{cases} Ax & \leq & d \\ Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{cases} \end{array}$$

avec $b, d \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 19 On considère le problème diététique suivant: il s'agit d'acheter à un coût minimum des fruits, des légumes et de la viande afin d'obtenir suffisamment de vitamines A et B. Pour une alimentation saine, on considère qu'il faut consommer 11 unités de vitamine A et 4 unités de vitamines B. Les valeurs nutritives des aliments (par unité de poids) sont données dans le tableau ci-dessous:

	Légumes	Fruits	Viande
Vitamine A	1	5	1
Vitamine B	2	1	1

Les coûts par unité de poids des aliments sont de 3 (légumes), 2 (fruits) et 10 (viande).

1. Modéliser ce problème.

2. On considère maintenant le problème de l'entreprise pharmaceutique qui synthétise artificiellement de la vitamine A et B et qui vend la vitamine pure au diététicien. L'entreprise cherche à déterminer les prix de vente des vitamines qui lui assurent d'emporter tout le marché tout en maximisant son profit. Modéliser ce problème.

3. Quel est le rapport entre ces deux problèmes?