Licence 3 MASS S6 – Université de Lille **Année 2017–2018**

Optimisation

Examen 23 mai 2018
Durée : 3 heures

<u>**Exercice 1**</u> On considère le problème

$$(\mathcal{P}_1)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 11x_1 - 33x_2 + 10.$$

1. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx + c$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -11 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = 10.$$

Corrigée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^TAx - b^Tx + c &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 10 \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} + 11x_1 - 33x_2 + 10 \\
&= \frac{1}{2}\left\{3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2\right\} + 11x_1 - 33x_2 + 10.
\end{aligned}$$

2. Montrer que A est définie positive.

Corrigée :
On a

$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5} \in \mathbb{R}^{+*},$$

donc A est définie positive.

3. Soit $x^{(0)} = (0,0)^T$. Calculer $\{x^{(k)}\}_{k>0}$ en utilisant la méthode de gradient conjugué et arrêter les itérations dès que la suite a convergé. En déduire la solution optimale <u>exacte</u> $\bar{x}$ et la valeur optimale <u>exacte</u> $f(\bar{x})$? *Indication : $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ et $f(\bar{x})$ sont des entiers relatifs.*

Corrigée :

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= (0,0)^T \\
r^{(0)} &= b - Ax^{(0)} = b = (-11,33)^T \\
d^{(0)} &= r^{(0)} = (-11,33)^T \\
s^{(0)} &= \|r^{(0)}\|^2 = (-11)^2 + (3\times 11)^2 = 10\times 11^2 = 1210 > 0 \\
\rho^{(0)} &= \frac{s^{(0)}}{d^{(0)T}Ad^{(0)}} = \frac{10\times 11^2}{3(-11)^2 - 4(-11)(3\times 11) + 5(3\times 11)^2} = \frac{10}{3+12+45} = \frac{1}{6} \\
x^{(1)} &= x^{(0)} + \rho^{(0)}d^{(0)} = (-11/6, 11/2)^T = 11\times(-1/6,1/2)^T \\
r^{(1)} &= b - Ax^{(1)} = 11\times\left[(-1,3)^T - (-3/2,17/6)^T\right] = 11\times(1/2,1/6)^T \\
\mu^{(1)} &= \|r^{(1)}\|^2 = 11^2\times\{1/4+1/36\} = 121\times 5/18 \\
d^{(1)} &= r^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}}{s^{(0)}}d^{(0)} = 11\times\left\{(1/2,1/6)^T + \frac{1}{36}(-1,3)^T\right\} = 11\times(17/36,1/4)^T \\
s^{(1)} &= \mu^{(1)} = 121\times 5/18 > 0 \\
\rho^{(1)} &= \frac{s^{(1)}}{d^{(1)T}Ad^{(1)}} = \frac{5/18}{3(17/36)^2 - 4(17/36)(1/4) + 5(1/4)^2} \\
&= \frac{5/18}{(3\times 17^2 - 17\times 36 + 5\times 9^2)/36^2} = \frac{360}{660} = 6/11 \\
x^{(2)} &= x^{(1)} + \rho^{(1)}d^{(1)} = 11\times(-1/6,1/2)^T + 6\times(17/36,1/4)^T = (1,7)^T \\
r^{(2)} &= b - Ax^{(2)} = (-11,33)^T - (-11,33)^T = (0,0)^T \\
\mu^{(2)} &= \|r^{(2)}\|^2 = 0 \\
d^{(2)} &= r^{(2)} + \frac{\mu^{(2)}}{s^{(1)}}d^{(1)} = (0,0)^T \\
s^{(2)} &= \mu^{(2)} = 0, \text{ donc on arrête.}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\bar{x} = (1,7)^T$ et $f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}b^T\bar{x} + c = -100$.

<u>Exercice 2</u> Ecrire le programme linéaire

$$
(\mathcal{P}_2) \quad
\begin{array}{ll}
\min & -5x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\
\text{s.c.} & 3x_1 + x_4 = 5 \\
& -x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 1 \\
& 4x_1 - x_3 + x_4 \leq 7 \\
& x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

sous forme canonique $(\mathcal{P}_2)_c$ et sous forme standard $(\mathcal{P}_2)_s$.

Corrigée :

$$\begin{array}{rl} \max & -[-5(-x_1') + 2x_2 - x_3 - 2(x_{4,1} - x_{4,2})] \\ \text{s.c.} & 3(-x_1') + (x_{4,1} - x_{4,2}) \le 5 \\ & -[3(-x_1') + (x_{4,1} - x_{4,2})] \le -5 \\ & -[-(-x_1') + 6x_2 + x_3] \le -1 \\ & 4(-x_1') - x_3 + (x_{4,1} - x_{4,2})) \le 7 \\ & x_1', x_2, x_3, x_{4,1}, x_{4,2} \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow (\mathcal{P}_2)_c \quad \begin{array}{rl} \max & -5x_1' - 2x_2 + x_3 + 2x_{4,1} - 2x_{4,2} \\ \text{s.c.} & -3x_1' + x_{4,1} - x_{4,2} \le 5 \\ & 3x_1' - x_{4,1} + x_{4,2} \le -5 \\ & -x_1' - 6x_2 - x_3 \le -1 \\ & -4x_1' - x_3 + x_{4,1} - x_{4,2} \le 7 \\ & x_1', x_2, x_3, x_{4,1}, x_{4,2} \ge 0 \end{array}$$

et

$$(\mathcal{P}_2)_s \quad \begin{array}{rl} \min & 5x_1' + 2x_2 - x_3 - 2x_{4,1} + 2x_{4,2} \\ \text{s.c.} & -3x_1' + x_{4,1} - x_{4,2} = 5 \\ & x_1' + 6x_2 + x_3 - y_1 = 1 \\ & -4x_1' - x_3 + x_{4,1} - x_{4,2} + y_2 = 7 \\ & x_1', x_2, x_3, x_{4,1}, x_{4,2}, y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

<u>**Exercice 3**</u> On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_3) \quad \begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = -4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

   Corrigée :
   $n = 4$, $q = 4$ et $p = 2$, donc l'ensemble admissible peut avoir au plus 6 sommets.

2. On admet (sans démonstration) que les bases $\mathcal{B}_j = \{1, j+1\}$, $1 \le j \le 3$, ne sont pas réalisables. Déterminer les bases réalisables et vérifier si elle sont dégénérées ou non-dégénérées et si elles satisfont les conditions suffisantes d'optimalité.

   Corrigée :

   - $\mathcal{B}_4 = \{2, 3\}$:

     $$\text{dét} A^{\mathcal{B}_4} = \text{dét} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \ne 0 \text{ donc } A^{\mathcal{B}_4} \text{ est inversible}$$

     or

     $$(A^{\mathcal{B}_4})^{-1} b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \not\ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

     donc $\mathcal{B}_4$ n'est pas réalisable.

- $\mathcal{B}_5 = \{2, 4\}$:

$$\text{dét}A^{\mathcal{B}_5} = \text{dét}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ donc } A^{\mathcal{B}_5} \text{ n'est pas inversible.}$$

  En result $\mathcal{B}_5$ n'est pas réalisable.

- $\mathcal{B}_6 = \{3, 4\}$:

$$\text{dét}A^{\mathcal{B}_6} = \text{dét}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \text{ donc } A^{\mathcal{B}_6} \text{ est inversible}$$

  et

$$(A^{\mathcal{B}_6})^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  donc $\mathcal{B}_6$ est réalisable et non-dégénérée.
  Puis on a $\mathcal{H}_6 = \{1, 2\}$, donc

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_6} = f^T_{\mathcal{H}_6} - f^T_{\mathcal{B}_6}(A^{\mathcal{B}_6})^{-1}A^{\mathcal{H}_6} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9/2 & 2 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc $\mathcal{B}_6$ ne satisfait pas les conditions suffisantes d'optimalité.

3. Le problème de maximisation $(\mathcal{P}_3)$ a-t-il une solution optimale ? Et si on remplace le problème par un problème de minimisation ? Justifier vos réponses.

   Corrigée :
   D'après la question précédente le problème de maximisation n'a pas de solution optimale car aucune base satisfait les conditions suffisantes d'optimalité. Par contre, la base $\mathcal{B}_6$ satisfait bien les conditions suffisantes d'optimalité si on remplace le problème par un problème de minimisation car $c^{\mathcal{H}_6} \geq (0\ 0)$. La solution minimale est $\bar{x} = (0, 0, 1, 4)^T$ est la valeur minimale vaut 5.

<u>**Exercice 4**</u> Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal et la méthode à deux phases) le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_4) \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Corrigée :
Première phase :

$$(\mathcal{P}_4)_a \quad \begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + y_1 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4, \quad y_j \geq 0,\ j = 1,2 \end{array}$$

$\mathcal{B}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2		
y_1	-1	1	-1	1	1	0	2	(2/1)
y_2	1	3	-1	0	0	1	1	(1/3)←
	0	-4	2	-1	0	0	3	
		↑						

$\mathcal{B}_1$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2		
y_1	-4/3	0	-2/3	1	1	-1/3	5/3	(5/3)←
x_2	1/3	1	-1/3	0	0	1/3	1/3	(-)
	4/3	0	2/3	-1	0	4/3	5/3	
				↑				

$\mathcal{B}_2$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_4	-4/3	0	-2/3	1	1	-1/3	5/3
x_2	1/3	1	-1/3	0	0	1/3	1/3
	0	0	0	0	1	1	0

Deuxième phase :
Pour $\mathcal{B}_0 = \{2,4\}$ on a $\mathcal{H}_0 = \{1,3\}$ et

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_0} &= f^T_{\mathcal{H}_0} - f^T_{\mathcal{B}_0}(A^{\mathcal{B}_0})^{-1}A^{\mathcal{H}_0} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -4/3 & -2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11/3 & 4/3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}_0$ satisfait les conditions suffisantes d'optimalité. En result la solution optimale est $\bar{x} = (0, 1/3, 0, 5/3)$ est la valeur optimale vaut $4/3$. Le tableaux devient

$\mathcal{B}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1/3	1	-1/3	0	1/3
x_4	-4/3	0	-2/3	1	5/3
	11/3	0	4/3	0	4/3

Exercice 5 On considère le programme linéaire

$$
(\mathcal{P}_5) \quad \begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
\text{s.c.} & x_1 - x_2 - 4x_4 = 4 \\
& -x_1 + x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_3 \in \mathbb{R} \\
& x_4 \leq 0
\end{array}
$$

1. Écrire le dual $(\mathcal{D}_5)$ du problème $(\mathcal{P}_5)$.

   Corrigée :

$$
(\mathcal{D}_5) \quad \begin{array}{rl}
\min & 4y_1 + 2y_2 \\
\text{s.c.} & y_1 - y_2 \geq 1 \\
& -y_1 \geq 2 \\
& y_2 = 3 \\
& -4y_1 \leq 4 \\
& y_1 \in \mathbb{R} \\
& y_2 \leq 0
\end{array}
$$

2. Étudier l'existence d'une solution optimale de $(\mathcal{P}_5)$ en utilisant les propriétés de la dualité.

   Corrigée :
   Comme le dual $(\mathcal{D}_5)$ n'est pas réalisable (car $y_2 = 3 \nleq 0$), $(\mathcal{P}_5)$ ne possède pas des optimums d'après Théorème 19.

Exercice 6 Un entreprise fabrique trois types de produits (A, B et C) qui rapportent un bénéfice unitair de respectivement 300, 400 et 500 euros par pièce. Chacun des trois types de produits doit passer par deux départements de production (X et Y). Dans ces départements il y a respectivement 450 et 350 minutes disponible par jour. Le tableau ci-dessous donne pour chaque produit le nombre de pièces qui peuvent passer par minute dans chaque département. On veut déterminer le plan de fabrication optimal par jour de façon à maximiser les bénéfices (en euros par jour).

	A	B	C
X	3	2	1
Y	1	2	3

1. Modéliser ce problème $(\mathcal{P}_6)$.

   Corrigée :

$$
(\mathcal{P}_6) \quad \begin{array}{rl}
\max & 300x_1 + 400x_2 + 500x_3 \quad ([\text{euros/pièce}] \times [\text{pièces/jour}] = [\text{euros/jour}]) \\
\text{s.c.} & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 450 \\
& x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 350 \quad ([\text{minutes/pièce}] \times [\text{pièces/jour}] = [\text{minutes/jour}]) \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3
\end{array}
$$

2. Résoudre graphiquement le dual $(\mathcal{D}_6)$.

Corrigée :
Le dual devient :

$$(\mathcal{D}_6) \quad \begin{array}{rl} \min & 450y_1 + 350y_2 \\ \text{s.c.} & \frac{1}{3}y_1 + y_2 \geq 300 \\ & \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq 400 \\ & y_1 + \frac{1}{3}y_2 \geq 500 \\ & y_j \geq 0,\ j = 1, 2 \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{rl} \min & 450y_1 + 350y_2 \\ \text{s.c.} & y_1 + 3y_2 \geq 900 \\ & y_1 + y_2 \geq 800 \\ & 3y_1 + y_2 \geq 1500 \\ & y_j \geq 0,\ j = 1, 2 \end{array}$$

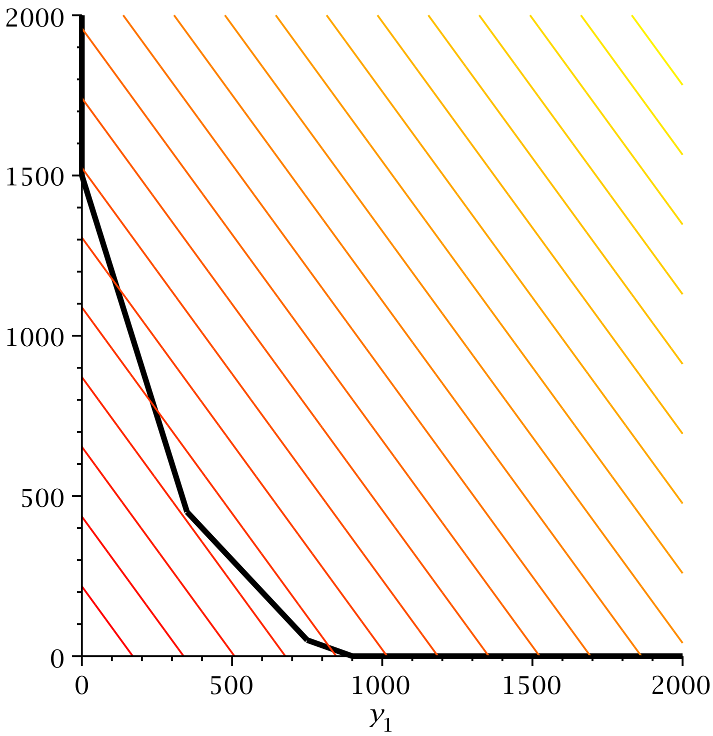

Figure 1: La représentation graphique de l'exercice 6.2.

Sur la figure on voit que $\bar{y}$ est solution optimale de $(\mathcal{D}_6)$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 800 \\ 3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1500 \end{array} \right. \Leftrightarrow \bar{y} = (350, 450)^T.$$

La valeur optimale vaut 315000.

3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$.

   Corrigée :
   D'après la question précédente, la première contrainte de $(\mathcal{D}_6)$ est non active, donc $\bar{x}_1 = 0$, et $\bar{y}_j > 0$ pour $j = 1, 2$, donc $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)^T$ est solution du système d'equations

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 350 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

   La solution optimale est donc $\bar{x} = (0, 600, 150)^T$.

4. Quelle est la valeur optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$?

   Corrigée :
   D'après Théorème 20 et la question 6.2, la valeur optimale vaut 315000. En effet, on a $300 \times 0 + 400 \times 600 + 500 \times 150 = 315000$.