Optimisation

Devoir surveillé 1$^{\text{er}}$ mars 2019
Durée : 2 heures

Avertissement : Le barème donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1(3 pts + 2 pts bonus) Problème de modélisation :
Petroco est une entreprise qui fabrique trois types d'essence : E_1, E_2 et E_3. Chacun de ces trois types est produit par trois types de pétrole brut : P_1, P_2 et P_3. Le prix de vente de chacun des trois types d'essence et le prix d'achat de chacun des trois types de pétrole brut sont donnés dans le tableau suivant :

	prix de vente (en euros par baril)		prix d'achat (en euros par baril)
E_1	210	P_1	135
E_2	180	P_2	105
E_3	150	P_3	75

Les propriétés dans lesquelles les trois mélanges se différencient sont leur indice d'octane et leur teneur en soufre. Il faut que E_1 ait un indice d'octane d'au moins 10 et ne contient pas plus de 1% de soufre ; E_2 ait un indice d'octane d'au moins 8 et ne contient pas plus de 2% de soufre ; E_3 ait un indice d'octane d'au moins 6 et ne contient pas plus de 1% de soufre. L'indice d'octane et le teneur en soufre de chacun des trois types de pétrole brut sont donnés dans le tableau suivant :

	P_1	P_2	P_3
indice d'octane	12	6	8
teneur en soufre	0.5%	2.0%	3.0%

Le coût de production pour la conversion du pétrole brut en essence est 12 euros par baril, et la raffinerie de Petroco responsable de ce processus peut traiter un maximum de 14000 barils de pétrole par jour. Afin de répondre à la demande des distributeurs qui achètent de l'essence à Petroco, il faut que Petroco produit au moins 3000 barils de E_1, 2000 barils de E_2 et 1000 barils de E_3 par jour. En outre, Petroco a la possibilité d'augmenter cette demande par le biais de la publicité. Une étude de marché a montré que, pour chaque 100 euros dépensés par jour en publicité pour l'un des trois types d'essence, la demande pour ce type augmente d'un baril par jour. De plus, il faut que toute l'essence soit vendue le jour de sa production ; il n'y a donc pas d'essence en stock. Enfin, Petroco peut acheter jusqu'à 5000 barils de chaque type de pétrole brut par jour. Quel problème d'optimisation doit-on résoudre pour maximiser le profit quotidien ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Exercice 2(5 pts) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ un convexe, où $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe aussi.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathcal{B} \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\}$ est un convexe.

On considère la fonction $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par $f = g \circ h$ avec $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction concave de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{C}$ et $h : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{A}$.

2. Montrer que $\nabla^2 f(x) = [\nabla h(x)]^T \cdot \nabla^2 g(h(x)) \cdot \nabla h(x)$, et en déduire que f est concave. Justifier vos calculs pour $\nabla^2 f(x)$ en indiquant à chaque étape la taille des vecteurs/matrices qui interviennent.

Exercice 3(3 pts) On considère le problème (P) $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ où $f(x) = (2x_1 - x_2)^2$.

1. Montrer que $\tilde{x} = (0,0)^T$ est un minimum local de f.

2. Montrer que l'on ne peut pas actionner Corollaire 2 du cours pour démontrer l'existence d'une solution optimale.

3. Montrer que $\tilde{x}$ est bien une solution optimale de (P). Cette solution optimale est-elle unique ? Justifier votre réponse.

Exercice 4(9 pts) On veut déterminer le point de l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| \leq 8, \ x_2 \leq x_1^3 - 8, \ x_1 \leq 2\}$ qui est le plus éloigné du point $p = (4, -8)^T$.

1. Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & -(x_1 - 4)^2 - (x_2 + 8)^2 \\ \text{s.c.} & x_1^2 + x_2^2 - 64 \leq 0 \\ & x_2 - x_1^3 + 8 \leq 0 \\ & x_1 - 2 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

2. Vérifier si les contraintes sont qualifiées en $x^{(1)} = (0, -8)^T$ et en $x^{(2)} = (2, -2\sqrt{15})^T$, et en déduire s'ils sont des candidats à optimum de (P). *(Remarque : On admet que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ ne vérifient pas les conditions KKT.)*

3. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).

4. Vérifier si les conditions KKT sont vérifiées pour $x^{(3)} = (1, -7)^T$ et pour $x^{(4)} = (2, 0)$, et en déduire s'ils sont des candidats à optimum de (P). *(Remarque : On admet que les contraintes sont qualifiées en $x^{(3)}$ et en $x^{(4)}$.)*

5. Montrer que (P) possède au moins une solution optimale.

6. On admet que tous les candidats à optimum appartiennent à l'ensemble $\{x^{(j)}\}_{j=1}^4$. Déterminer le point de l'ensemble $\mathcal{A}$ le plus éloigné du point p et sa distance au point p. Justifier vos réponses.