Corrigé détaillé de l'exercice 13

Exercice 13

- nombre de variables $n = 3$
- nombre de contraintes d'égalité $p = 0$
- nombre de contraintes d'inégalité $q = 7$

On en déduit que le nombre de sommets est borné supérieur par

$$\begin{pmatrix} q \\ n-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{7!}{3!4!} = 35.$$

1. $P_1 = (2,1,0)^T$:
   On a
   $$\begin{cases} 5\times 2 + 2\times 1 + 0 & < & 13 \\ -3\times 1 - 0 & = & -3 \\ 2 & = & 2 \\ 0 & < & 3 \\ -2 & < & 0 \\ -1 & < & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$
   donc $P_1 \in \mathcal{P}$. De plus le nombre de contraintes saturées $m = 3$ (donc $m = n$), et la matrice des contraintes saturées
   $$A_s = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   est du rang n, car $\text{dét}(A_s) = -3 \neq 0$. On en déduit que P_1 est un sommet non-dégénéré.

2. $P_2 = (2,0,3)^T$:
   On a
   $$\begin{cases} 5\times 2 + 2\times 0 + 3 & = & 13 \\ -3\times 0 - 3 & = & -3 \\ 2 & = & 2 \\ 3 & = & 3 \\ -2 & < & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -3 & < & 0 \end{cases}$$
   donc $P_2 \in \mathcal{P}$. De plus le nombre de contraintes saturées $m = 5$ (donc $m > n$), et la matrice des contraintes saturées
   $$A_s = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est du rang n, car

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

On en déduit que P_2 est un sommet dégénéré.

3. $P_3 = (2,1,1)^T$:
   On a

$$\left\{\begin{array}{lcr} 5\times 2 + 2\times 1 + 1 & = & 13 \\ -3\times 1 - 1 & < & -3 \\ 2 & = & 2 \\ 1 & < & 3 \\ -2 & < & 0 \\ -1 & < & 0 \\ -3 & < & 0 \end{array}\right.$$

   donc $P_3 \in \mathcal{P}$. De plus le nombre de contraintes saturées $m = 2$ (donc $m < n$). On en déduit que P_3 n'est pas un sommet.

4. $P_4 = (0,5,3)^T$:
   On a

$$\left\{\begin{array}{lcr} 5\times 0 + 2\times 5 + 3 & = & 13 \\ -3\times 5 - 3 & < & -3 \\ 0 & < & 2 \\ 3 & = & 3 \\ 0 & = & 0 \\ -5 & < & 0 \\ -3 & < & 0 \end{array}\right.$$

   donc $P_4 \in \mathcal{P}$. De plus le nombre de contraintes saturées $m = 3$ (donc $m = n$), et la matrice des contraintes saturées

$$A_s = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est du rang n, car $\text{dét}(A_s) = -2 \neq 0$. On en déduit que P_4 est un sommet non-dégénéré.