Statistiques décisionnelles

Charles Vin

S6 2022

Plan du cours

1. Rappel du 1er semestre
2. Test d'ajustement :
   $X_1, \ldots, X_n$ va. iid. de loi $\mathbb{P}_X$
   (a) Est-ce que les X_i suivent la loi L ($\mathbb{P}_X = L$)?
   (b) Est-ce que la loi des X_i appartient à une famille de loi? Est-ce qu'il existe m, σ^2 tel que $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
3. Tests de comparaison :
   — Test non paramétriques : $(\omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$, On ne se restreint pas à une famille paramétrique de lois
   — Tests de comparaison : $X_1, ..., X_n$ jeu de données 1 et $Y_1, ..., Y_n$ jeu de données 2. Les X_i Y_i ont-il même loi? Les X_i et Y_i sont-ils indépendants?
4. L'ANOVA, voir cours de Mme Lavigne
5. Etudes de cas

Table des matières

1 Rappel sur les tests

On fixe un modèle $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$.
On dit que le modèle est paramétrique s'il existe

$$d \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Theta \in \mathbb{R}^d.$$

Sinon, on dira que le modèle est non-paramétrique.

Exemple 1.1 (de modèle paramétrique)**.**
1. $\Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(m, \sigma^2), \theta = (m, \sigma^2)$
2. $\Theta = [0,1], \mathbb{P}_\theta = Ber(\theta), \theta \in [0,1]$
3. $\Theta = \mathbb{R}_*^+, \mathbb{P}_\theta = \mathcal{E}(\theta), \theta \in \mathbb{R}_*^+$

Exemple 1.2 (de modèle non-paramétrique)**.**
1. $\Theta =$ densité de probabilité sur $\mathbb{R}, \mathbb{P}_f =$ la loi de densité f, $f \in \Theta$
2. $\Theta = \{(p_i)_{i\in\mathbb{N}}, \forall i \in \mathbb{N}, p_i \in [0,1] \sum_{+\infty}^{i=0} p_i = 1\}, \theta = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}, \mathbb{P}_theta =$ la loi discrète tq$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = p_k,$
3. $\Theta = \{$ fonction de répartion de var.$\}, F \in \Theta, \mathbb{P}_F =$ loi de la va. dont la fonction de répartiton est $F, (\mathbb{P}_F)_{F\in\Theta}$

Définition 1.1 (Test d'hypothèse)**.** Soit $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un ensemble d'observations de loi $\mathbb{P}_\theta$
On appelle test d'hypothèse de H_0 contre H_1 (à H_0 et H_1 sont des sous-ensemble de Θ). toute fonction des observations à valeur dans $\{0,1\}$
- à $\phi(\mathbb{X}) = 0$ correspond à conserver H_0
- à $\phi(\mathbb{X}) = 1$ correspond à rejeter H_0 au profit de H_1

$R = \phi(\{1\})$ est la zone de rejet, c'est l'ensemble des observation qui ... à un rejet de H_0

Remarque. Si $\phi(\mathbb{X}) = \mathbb{1}_{h(\mathbb{X})\in\mathbb{R}}$ on dira que h est la statistique de test et R la zone de rejet

Exemple 1.3. $h(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n X_i, R = [h, +\infty[$. Test : $\phi(\mathbb{X}) = \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^n X_i \geq k}$

Exemple 1.4. $\phi(\mathbb{X}) = 0$ le test que conserve toujours H_0 est un test.

Définition 1.2 (Erreur de première espèce & Taille du test)**.** l'Erreur de 1ère espèce est la fonction :

$$\begin{aligned} \alpha : \Theta_0 &\to [0,1] \\ \theta &\mapsto \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbb{X} = 1)) \end{aligned}$$

La taille du test ϕ est

$$\alpha^* = \sup_{\theta\in\theta_0} \alpha(\theta).$$

On dit que ϕ est de niveau α si

$$\alpha^* \leq \alpha.$$

Une suite de test $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de niveau asymptotique α si

$$\limsup_n \alpha_n^* \leq \alpha.$$

En général on a : $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^* = \alpha$

Remarque. Pour l'erreur de 1ère espèce le meilleur test est $\phi(\mathbb{X}) = 0$. En effet $\forall\theta \in \Theta_0, \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbb{X}) = 1) = 0$

Remarque (Cours de M.Thiam, def 12)*.* Si vous préférez la formulation du 1er semestre, c'est tout aussi valable.

Définition 1.3 (Erreur de seconde espèce et puissance)**.** La fonction erreur de 2nd espèce d'un test ϕ est

$$\begin{aligned} \underline{\beta} : &\Theta_1 \to [0,1] \\ &\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbb{X} = 0)) \end{aligned}$$

C'est la probabilité de conserver à tort H_0. On appelle en général erreur de seconde espèce la quantité $\beta = \sup_{\theta\in\Theta_1} \underline{\beta}(\theta)$

La fonction puissance γ est $1 - \underline{\beta}$.

Exemple 1.5. Le test $\phi(\mathbb{X}) = 0$ (le test stupide) a une erreur de seconde espèce qui vaut 1.

$$\mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbb{X}) = 0) = 1.$$

et sa puissance vaut 0

Définition 1.4 (p-valeur)**.** Si pour tout niveau α, on a construit un test ϕ_α Soit $\mathbb{X}$ une observation.

$$p(\mathbb{X}) = \inf\{\alpha \in [0,1] \text{tel que } \phi_\alpha(\mathbb{X}) = 1\}.$$

Si on choisit un niveau α

$$\alpha < p(\mathbb{X}), \text{ on conserve } H_0.$$

Et si $\alpha \geq p(\mathbb{X})$ on rejette H_0

Définition 1.5 (Test consistent)**.** Une suite de tests ϕ_n est dite consistent si pour tout $\theta \in \Theta_1$

$$\gamma_n(\theta) \to_{n\to\infty} 1.$$

2 Tests d'ajustement

Le but de ce chapitre est de répondre à la question suivante :
Étant donnée un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ et une loi de proba sur $\mathbb{R}$ nommée $\mathcal{L}$

$$\text{Est ce que les } X_i \sim \mathcal{L}.$$

— $H_0 =$ les X_i ont pour loi $\mathcal{L}$
— $H_1 =$ les X_i n'ont pas pour loi $\mathcal{L}$

Comment comprendre ce problème ?

1. En général, on peut utiliser les fonction de répartition. La question devient $F_X = F$ contre $F_X \neq F$ (en tout point de $\mathbb{R}$)
2. Si les X_i sont à support dans $\{1, ..., K\}$. La question devient $\forall i \in \{1, ..., K\}, \hat{p_i} = p_i$ contre $\exists i$ tq $\hat{p_i} \neq p_i$ où $\hat{p_i} = P(X = i)$ et $p_i = P(L = i)$

Énorme problème : On ne connaît pas la loi des X_i, on connaît juste n réalisations.

Problème plus difficile : Ajustement à une famille de lois ? Est-ce que les X_i proviennent d'une loi normale ? (sans en connaître les paramètres)

Remarque. Cette question est fondamentale pour valider un modèle

2.1 Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov

2.1.1 Rappels

Définition 2.1 (Fonction de répartition)**.** Soit X une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition est la fonction

$$\begin{aligned} F_X : &\mathbb{R} \to [0,1] \\ &t \mapsto P(X \leq t) \end{aligned}$$

Elle caractérise la loi de X.
Si X est à densité, F_X est continue. Les discontinuité de F_X sont les valeurs $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = t_0) > 0$.

Exemple 2.1. — Si $X \sim Unif(0,1)$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ t \text{ si } t \in [0;1] \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}.$$

— Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$F_X(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ -e^{-\lambda t} \text{ si } t + 1 \geq 0 \end{cases}.$$

— Si $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1-p \text{ si } t \in [0;1[\\ 0 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

Définition 2.2 (Pseudo inverse de la fonction de répartion)**.** Soit X une var. de fonction de répartition F_X. On pose

$$\begin{aligned} F_X^{-1} :&]0,1[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \inf\{t \in \mathbb{R}, F_X(t) \geq x\} \end{aligned}$$

On l'appelle inverse généralisé de F_X et elle coincide avec l'inverse si F_X est bijective.

Elle vérifie la propriété fondamentale

$$\forall x \in]0,1[, \forall t \in \mathbb{R}, F_X^{-1} \leq t \Leftrightarrow x \leq F_X(t).$$

Théorème 2.1. *Soit X une var. de fonction de répartition F_X et une variable uniforme U sur $[0,1]$ alors*

$$X \text{ et } F_X^{-1}(U) \text{ ont même loi}.$$

Preuve : Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(F_X^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F_X(t)) \text{ comme } \{F_X^{-1}(U) \leq t\} = \{U \leq F_X(t)\}.$$

Or $F_X(t) \in [0,1]$ donc

$$P(U \leq F_X(t)) = F_X(t).$$

Ainsi F_X^{-1} et X ont la même fonction de répartition et donc la même loi □

Nouveau cours du 20/01

2.1.2 Le test de Kolmogorov-Smirnov

But : Si on a $X_1, \dots, X_n$ observation iid. Est-ce que la fonction de répartition des X_i est une certaine fonction F_L **donnée** ?
$\Leftrightarrow F_X = F_L \Leftrightarrow$ La loi des X_i est la même que L

Exemple 2.2. Se demander si les $X_i \sim \mathcal{E}(1)$ revient à demander : Est-ce que $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = (1-e^{-t})\mathbb{1}_{t\geq 0}$

Autre reformulation : Est-ce que mes observations sont cohérentes avec l'hypothèse $F_{X_i} = F$? Il va donc falloir estimer F_{X_i} et la comparer à F

Définition 2.3 (Fonction de répartition empirique)**.** Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon iid. On appelle **fonction de répartition empirique** de $X_1, \dots, X_n$ la fonction

$$\begin{aligned} F_n :& \mathbb{R} \to [0,1] \\ & t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq t} \end{aligned}$$

Illustration graphique 1 :

Rappels :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) \to^{p.s}_{n\to+\infty} F_{X_1}(t)$
2. De plus $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{F_X(t)(1-F_X(t))}}(F_n(t) - (F_X(t))) \to^{\mathcal{L}}_{n\to+\infty} Z \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

Ce n'est rien d'autre que le TCL pour la suite de variables iid. $(Y_i = \mathbb{1}_{X_i \leq t})_{i\in\mathbb{N}}$

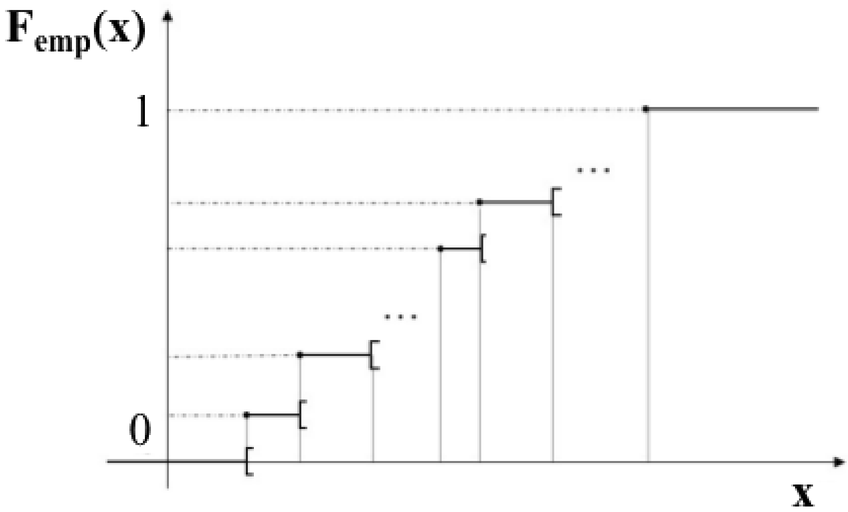

Figure 1 – Exemple de fonction de répartion empirique

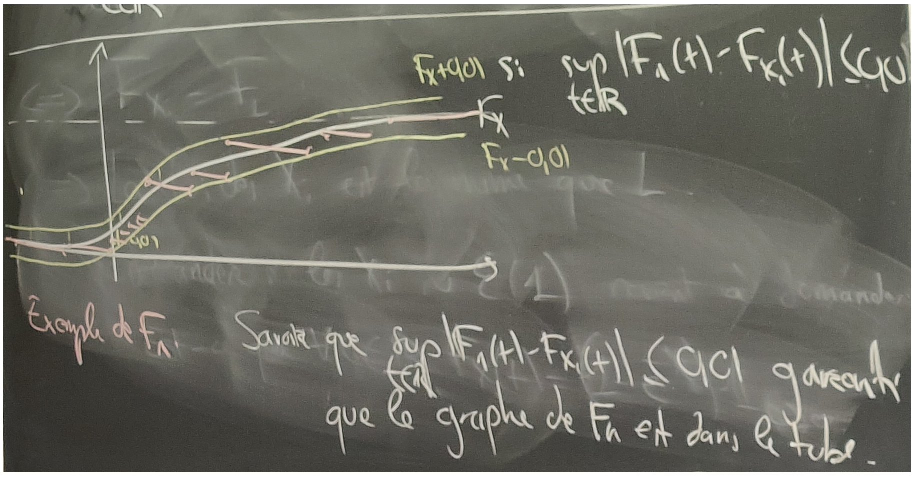

Figure 2 – Illustration graphique de Glivenko-Cantelli

Théorème 2.2 (Glivenko-Cantelli)**.** $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de va. iid. alors*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)| \to^{p.s}_{n\to+\infty} 0.$$

Illustration graphique 2 :

Ce théorème montre que la bonne quantité pour savoir si $F_X = F$ à F est une certaine fonction donnée est

$$h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)|\,.$$

— Si $F = F_X$ alors d'après le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$h(F_n, F) \to^{p.s}_{n\to+\infty} 0.$$

— Si je me suis trompé et que $F \neq F_X$, alors

$$h(F_n, F) \to^{p.s}_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)|\,.$$

En effet $F_n \to F_{X_i}$ donc

$$\begin{aligned} h(F_n, F) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)| \\ &\to^{p.s}_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)| > 0 \end{aligned}$$

De manière informelle, on a envie de dire

— Si $h(F_n, F)$ est petit alors $F_X = F$

— Si $h(F_n, F)$ n'est pas petit alors $F_X \neq F$

.

2.1.2.1 Comment calculer en pratique $h(F_n, F)$?

Données : $X_1, \dots, X_n$ des valeurs. F une fonction de répartition cible.
But : Calculer $h(F_n, F)$ de manière pratique. à $h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)|$ (Voir Figure. 3)

Note (du dessin)*.* Le but de cette explication est de montrer graphiquement et instinctivement pourquoi on ne regarde pas pour tout $t \in \mathbb{R}$ mais uniquement à chaque saut.

1. étape : avant $X_(1)$

$$\sup_{t\leq X_{(1)}} |F_n(t) - F_{X_1}(t)| = \max\{\left|\frac{1}{n} - F(X_{(1)})\right|, \left|F(X_{(1)}) - 0\right|\}.$$

On recommence pour les différentes valeurs de $X_{(i)}$ et on voit que la plus grande distance entre les deux courbes est forcément atteinte à un des points de saut

Remarque (**attention**)*.* Pour chaque saut, il faut regarder 2 valeurs AVANT et APRES le saut.

Formule de calcul de $h(F_n, F)$

$$h(F_n, F) = \max_{1\leq i\leq n} (\max(\left|\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\right|, \left|\frac{i-1}{n} - F(X_{(i)})\right|)).$$

Note. On fait le max pour tous les sauts du maximum entre la distance APRES (au moment du saut) et AVANT (juste avant le saut (i-1)).

Exemple 2.3 (Cas concret)**.** $X_1 = 0.06, X_2 = 0.8, X_3 = 0.27, X_4 = 0.67, X_5 = 0.38$

$$F(t) = F_U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ t \text{ si } t \in [0 \\ 1] \\ 1 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Etape 1 : On ordonne les valeurs Ici $h(F_n, F_U) = 0.22$

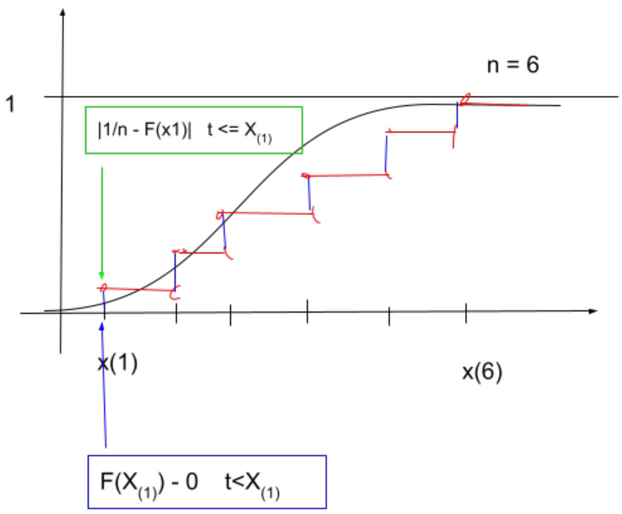

Figure 3 – Figure pour trouver la fonction $h(F_n, F)$

$X_{(i)}$	0.06	0.27	0.38	0.67	0.8
F_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
F	0.06	0.27	0.38	0.67	0.8
Après le saut : $\lvert\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\rvert$	0.14	0.13	**0.22**	0.13	0.2
Avant le saut : $\lvert\frac{i-1}{n} - F(X_{(i)})\rvert$	0.06	0.07	0.02	0.07	0

2.1.2.2 Comportement théorique de $h(F_n, F)$

$$h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \le t} - F(t) \right|.$$

est une variable aléatoire.

A priori, la loi de $h(F_n, F)$ dépend

- de n
- de la loi des X_i

Rappel : $H_0 : F = F_{X_o}$ contre $H_1 : F \neq F_{X_i}$

Sous H_O quel est la loi de $h(F_n, F)$?

$$h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \le t} - F_{X_1}(t) \right|.$$

Soit $U_1, \dots, U_n$ iid. uniforme sur $[0, 1]$

Soit $F_{X_1}^{-1}$ l'inverse généralisé de F_X

Alors $F_{X_1}^{-1}(U_1), \dots, F_{X_1}^{-1}(U_n)$ ont même loi que $X_1, \dots, X_n$. Ainsi en loi

$$h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{F_X^{-1}(U_i) \le t} - F_{X_1}(t) \right|.$$

Or $\{F_X^{-1} \le t\} = \{U_i \le F_{X_1}(t)\}$ donc $\mathbb{1}_{F_X^{-1}(U_i) \le t} = \mathbb{1}_{U_i \le F_{X_1}(t)}$ et donc

$$h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i \le F_{X_1}(t)} - F_{X_1}(t) \right|.$$

Si F_{X_1} est continue, alors $]0,1[\subset F_{X_1}(\mathbb{R}) \subset [0,1]$. Ainsi en reparamétrant le $\sup$ on a

$$h(F_n, F) =^{Loi} \sup_{s\in]0,1[} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i \leq s} - s \right|.$$

Dans cette formule, la loi de X (et sa fonction de répartition) n'apparaît pas !
Bilan : La loi de $h(F_n, F)$ ne dépend que de n sout H_0
La loi de $h(F_n, F)$ est tabulé pour toutes les valeurs de n. On peut alors construire un test de niveau $1-\alpha$

2.1.2.3 Le test de Kolmogorov-Smirnov à 1 échantillon

Données :
- $X_1, \ldots, X_n$
- F une fonction de répartition continue
- α un niveau
- H_0 : $F_X = F$ contre H_1 : $F_{X_1} \neq F$

Soit h_α le quantile de niveau $1-\alpha$ de $h(F_n, F)$
- Si $h(F_n, F) > h_\alpha$, on rejette H_0
- Si $h(F_n, F) \leq h_\alpha$, on conserve H_0

De manière formelle : $\phi(\mathbb{X}) = \mathbb{1}_{h(F_n,F)>h_\alpha}$

Exemple 2.4 (retour sur l'exemple)**.** Dans le tableau, on avait lu $h(F_n, F) = 0.22, n = 5$.
Test de niveau 90% : la zone de rejet est $h > 0.509$ (d'après la table). Dans l'exemple on conserve H_0, les X_i proviennent d'une $\mathcal{U}([0,1])$

Exemple 2.5 (Autre exemple)**.** $X_1 = 1.67, X_2 = 1.3, X_3 = 0.01, X_4 = 2.48, X_5 = 0.11$ Est-ce que les $X_i \sim \mathcal{E}(1)$? On applique le test de Kolmogorov-Smirnov.

$X_{(i)}$	0.01	0.11	1.3	1.67	2.48
F_n	0.2 + 1/n	0.4	0.6	0.8	1
$F(t) = 1 - e^{-x}$	0.01	0.1	0.72	0.81	0.91
Après le saut : $\left\lvert\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\right\rvert$	0.19	0.3	0.12	0.01	0.09
Avant le saut : $\left\lvert\frac{i-1}{n} - F(X_{(i)})\right\rvert$	0.01	0.1	**0.32**	0.21	0.11

$$h_{F_5,F} = 0.32.$$

Test de niveau 99% : Rejet si $h \leq 0.6689$ comme $0.32 \leq 0.6685$ on conserve H_0

<u>Nouveau cours du 27/01</u>

Rappel du cours précédent

On a vu le test de Kolmogorov-Smirnov : $X_1, \ldots, X_n$ iid. de fdr. F_{X_1}.
Fonction de répartion cible F

$$H_0 = F_{X_1} = G \text{ contre } H_1 = F_{X_1} \neq F.$$

On calcule $h(F_n, F) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$.
La loi de $h(F_n, F)$ est tabimée, il suffit alors pour un niveau α donnée de vérifier si

$$h(F_n, F) > S_\alpha \text{ le seuil au niveau } \alpha.$$

Début du cours

Si n est grand, on ne dispose pas de la table de $h(F_n, F)$. Solution : Utiliser un test asymptotique.

Théorème 2.3. *Soit $h_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{U_i\leq t} - t\right|$ à $U_1, \ldots, U_n$ sont des va. iid. de loi uniforme sur $[0,1]$*

$$\sqrt{n}h_n \to^{\mathcal{L}}_{n\to\infty} W_\infty.$$

où $P(W_\infty \leq t) = 1 - 2\sum_{h=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2t^2}$.
Bonne nouvelle : La loi de W_∞ est tabulée !!

Exemple 2.6 (Théorique de l'utilisation)**.** Si $n \geq 30$. Pour avoir S_α tel que $P(h_n > S_\alpha) \approx 1 - \alpha$.
Si je prends k_α tel que $P(W_\infty > k_\alpha) = 1 - \alpha$ (k_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de W_∞).
Alors, si on pose $S_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}}$ on a :

$$P(h_n \geq S_\alpha) = P(h_n \geq \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}}) = P(\sqrt{n}h_n > k_\alpha) \approx P(W_\infty \geq h_\alpha).$$

Conclusion : Si n est grand (pas dans la table), on prend $s_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{n}}$ à h_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de W_∞

2.1.2.4 Qu'est ce que W_∞

$$\begin{aligned}\sqrt{n}h_n &= \sqrt{n}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{U_i\leq t} - F(\mathbb{1}_{U_i\leq t})\right| \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{U_i\leq t} - F(\mathbb{1}_{U_i\leq t})\right|\end{aligned}$$

Cette quantité est approximativement une $\mathcal{N}(0, t(1-t))$

$$Gt \to \sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{U_i\leq t} - F(\mathbb{1}_{U_i\leq t}).$$

Le graphe de G est aléatoire et est disponible sur moodle (ça resemble à un cours de la bourse, dans notre cas on appelle ça un pont Brownien).

Pour la culture : un inégalité bien pratique

Théorème 2.4 (Inégalité DKW)**.** *Inégalité de Dvoretsky-Kiefer-Wolfanitz : X_i va. iid.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(\sup_{t\in\mathbb{R}}|F_n(t) - F_{x_1}(t)| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}.$$

Cette inégalité est

- *Non asymptotique*
- *Pas génial si n petit*

Mais elle permet aussi de construire une zone de rejet.

2.1.2.5 Kolmogorov-Smirnov en pratique

On fait ce test si

1. Les X_i semblent provenir d'une loi à fonction de répartition continue. $\Rightarrow$ on n'a pas plusieurs fois la même valeur (sauf si celle-ci on était arrondi).
   Par exemple : si on voit 14 fois la même valeur $\to$ on utilise pas KS. Mais si on voit 2 fois la même valeur $\to$ c'est jouable
2. Fonctionne $\forall n$: même si n est petit, ce test est pertinent (alors qu'un test du khi-deux qu'on verra plus tard est exclusivement asymptotique)
3. Si $n \geq 100$, on fait le test asymptotique. Sinon on peut faire un test non asymptotique.

2.2 Ajustement à une famille de lois

On veut savoir si nos observations iid. proviennent d'une certaine famille de lois.

Exemple 2.7.

- Est-ce que la loi X_i sont des $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$?
- Est-ce que la loi X_i sont des $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $m \in \mathbb{R}, \sigma^{\not\models} > \not\models$?
- Est-ce que la loi X_i sont des $\mathcal{B}(n, p)$ pour $m \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$?

Malheureusement, il est impossible de répondre à cette question en toute généralité.
Cependant il y a deux exemple important qu'on peut traiter.

2.2.0.1 Adéquation à une famille d'exponentielle Données : $X_1, \dots, X_n$ iid. loi inconnue

— H_0 : les X_i sont $\mathcal{E}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

— H_1 : les X_i ne sont pas exponentiels.

Idée : On utilise $h(F_n, F_\lambda)$ pour un F_λ bien choisis :

$$F_\lambda = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{x>0}.$$

Si on veut tester $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, λ fixée, on regarde

$$h(F_n, F_\lambda) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|F_n(t) - (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{t>0}\right|.$$

Problème : λ est inconnu $\Rightarrow$ On l'estime !

$$\overline{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \text{ estimateur Maximum Vraisemblance de } \lambda.$$

On regarde : X_i iid $\mathcal{E}(\lambda)$

$$h(F_n, F_{\overline{\lambda}_n}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq t} - (1 - e^{-\overline{\lambda}_n x})\mathbb{1}_{t>0}\right|.$$

Miracle : La loi de $h(F_n, F_{\overline{\lambda}_n})$ ne dépend pas de λ, mais uniquement de n.

Si les $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont iid. de loi $\mathcal{E}(1)$, les $(\frac{1}{\lambda}Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour comprendre la loi de $h(F_n, F_{\overline{\lambda}_n})$, je peux remplacer les X_i par $\frac{1}{\lambda}Y_i$.

$$\begin{aligned}
h(F_n, F_{\overline{\lambda}_n}) &=^{loi} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\frac{Y_i}{\lambda} \leq t} - (1 - e^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^n Y_i/\lambda}t}\mathbb{1}_{t>0})\right| \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_i \leq \lambda t} - (1 - e^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^n Y_i}\lambda t}\mathbb{1}_{\lambda t>0})\right| \text{ or } \mathbb{1}_{t>0} = \mathbb{1}_{\lambda t} \\
&= \sup_{s\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_i \leq s} - (1 - e^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^n Y_i}s})\mathbb{1}_{s>0}\right| \text{ avec } s = \lambda t
\end{aligned}$$

Cela ne dépend pas de λ mais seulement de n. On peut tabuler ! (Malheureusement elle n'a pas de nom) et construire un test de KS.

2.2.0.2 Adéquation à une loi normale On peut adapter le test précédent pour des gaussiennes en estimant m et σ^2 avec $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ et construire un test.
Cela s'appelle le test de normalité de **Lilliefors** (voir exo de TD pour la suite)

2.3 Le test du $\mathcal{X}^2$ d'ajustement

La lettre grecque $\mathcal{X}$ se prononce "khi".

On dispose de $X_1, \dots, X_n$ va. iid.

On se place dans le cas particulier où les X_i sont à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_d\}$. La loi des X_i est donc entièrement déterminée par la donnée de $p_k = P(X_1 = x_k)$ pour tout k. Le vecteur $p = (p_1, \dots, p_d)$ caractérise la loi des X_i

Remarque. On sait que $p_1 + \dots + p_d = 1$

Hypothèse : $\forall h \in \{1, \dots, d\}, p_k > 0$. On ne s'est pas trompés dans le support, il faut prendre le plus petit d.

Ces restrictions ne sont pas si contraignantes dans beaucoup de cas pratiques, elles sont automatiquement vérifiées

Exemple 2.8. — Réponse à un questionnaire QCM : la réponse prend un nombre fini de valeurs

— Une notes sur 20 d'un examen

— Des variables qualitatives : fille/garçons, couleur des yeux

On a des observations $X_1, \dots, X_n$ de loi inconnue $p = (p_1, \dots, p_d)$. On veut savoir si $p = p^{ref}$ pour un vecteur p^{ref} fixé.

$$H_0 = p = p^{ref} \text{ i.e. } \forall k \in \{1, \dots, d\}, p_k = p_k^{ref}$$
$$H_1 = p \neq p^{ref} \text{ i.e. } \exists k \in \{1, \dots, d\} : p_k \neq p_k^{ref}$$

2.3.0.1 Préparatifs, introduction

Si on trie nos valeurs $p^{ref} = (0;3, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2)$ On a envie de

	x1	x2	...	xs
Nombre d'observation	17	23	...	12

regarder $\overline{p}_1 = \frac{\text{Nombre de } n_1}{n}, \ldots, \overline{p}_s = \frac{\text{Nombre de } n_s}{n}$. On a envie de construire quelque chose avec ces estimateurs

Notation

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, N_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i = x_k}.$$

Les $N_{k,n}$ sont les effectifs observés.

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\} \overline{p}_{k,n} = \frac{N_{k,n}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i = x_k}.$$

Les $\overline{p}_{k,n}$ sont les proportions observés. On note $\overline{p}_n = (\overline{p}_{1,n}, \ldots, \overline{p}_{d,n})$
Sous H_0, les $\overline{p}_{k,n}$ devraient être proches des p_k^{ref}
Note. Comme dans KS, on vas trouver une formule reliant les deux et pouvant être tabuler pour faire des tests. Mais elle est pas vraiment démontrable à notre niveau et utilise des vecteurs gaussiens

Théorème 2.5. *Sous H_0 on note*

$$D(\overline{p}_n, p^{ref}) = n \sum_{k=1}^{d} \frac{(\overline{p}_{k,n} - p_k^{ref})^2}{p_k^{ref}}$$
$$D(\overline{p}_n, p^{ref}) \to_{n \to \infty}^{\mathcal{L}} \mathcal{X}^2(d-1)$$

Sous H_1

$$D(\overline{p}_n, p^{ref}) \to_{n \to \infty}^{p.s} +\infty.$$

Remarque (Autre formulation, qu'on utilise en TD !). On peut aussi écrire

$$D(\overline{p}_n, p^{ref}) = \sum_{k=1}^{d} \frac{(N_{k,n} - np_k^{ref})^2}{np_k^{ref}}$$

Si on note $N_k^{ref} = np_k^{ref}$ l'effectifs attendu, alors cela devient

$$D(\overline{p}_n, p^{ref}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{(N_{k,n} - N_k^{ref})^2}{N_k^{ref}}.$$

N_k^{ref} n'est pas un entier en général

2.3.0.2 Le test du $\mathcal{X}^2$

- Données : $X_1, \ldots, X_n$ à valeur dans $\{x_1, \ldots, x_d\}$
- p^{ref} qu'on veut tester
- Niveau α

Soit h_α le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d-1)$ alors
- Si $D(\overline{p}_n, p^{ref}) \geq h_\alpha$ on rejette H_0
- Sinon $D(\overline{p}_n, p^{ref}) < h_\alpha$ on conserve H_0

Attention : Ce test est uniquement asymptotique !
Condition d'utilisation :

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, np_k^{ref}(1 - p_k^{ref}) \geq 5.$$

Cela implique $n \geq 20$ mais en général il faut beaucoup plus

Exemple 2.9 (dé truqué)**.** On dispose d'un dé douteux, on releve les résultats de 100 lancés et on veut determiner si il est pipé ou non.
Condition : $100 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \frac{500}{36} = 13.88 > 5$ c'est bon le test du $\mathcal{X}^2$ est applicable.

	1	2	3	4	5	6
Effectifs	16	20	19	10	17	18
Proportions	0.16	0.2	0.19	0.1	0.17	0.18

— H_0 : dè non truqué $\Leftrightarrow p^{ref} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6},)$
— H_1 : dé truqué $p \neq p^{ref}$

On calcule

$$D = 100 * [\frac{(0.16 - \frac{1}{6})^2}{1/6} + \frac{(0.2 - \frac{1}{6})^2}{1/6} + \cdots + \frac{(0.18 - \frac{1}{6})^2}{1/6}]$$
$$= 600 \sum_{k=1}^{6} (\overline{p}_k - \frac{1}{6})^2 = 3.8$$

Pour faire un test à 90%, on doit comparer cette valeur avec le quantile d'ordre d'une loi $\mathcal{X}^2(6-1)$ degrés de liberté. Lecture de table : $k = 9.24$.
Ainsi comme $D = 3.28 < 9.24$, on conserve H_0 le dé est équilibré

<u>Nouveau cours du 03/02</u>

Bilan jusqu'à présent
Le test du $\mathcal{X}^2$ "basique" permet de tester l'adéquation de données iid $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_d\}$ à une loi discrète sur $\{x_1, \ldots, x_d\}$ caractérisé par un vecteur de probabilité : $p = (p_1, \ldots, p_d)$

2.3.0.3 Mise en place concrette :

1. Etape 0 : On vérifie les conditions

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, n * p_k \geq 5.$$

   C'est la condition de Cochran (1954), il avait testé cas possible en observant l'approximation faites.
2. Etape 1 : On calcule les effectifs et proportions observées : $N_{k,n}$ et $\hat{p}_{k,n}$
3. Etape 2 : Calcul de la statistique de test

$$D = n \sum_{d}^{k=1} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k)^2}{p_k}.$$

4. Etape 3 : Détermination de la zone de rejet au niveau α. On lit h_α le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d_1)$
5. Etape 4 : Décisions
   — si $D > h_\alpha$, on rejette H_0 (au niveau α).
   — Si $D \leq h_\alpha$ on conserve H_0

2.3.0.4 Test du $\mathcal{X}^2$ avec fusion des classes Que fait-on si la condition $np_k \geq 5$ n'est pas vérifiée ? On fusionne des classes !

Exemple 2.10. On a observé des réponses à un questionnaire. On veut tester l'adéquation à la loi $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16})$ avec $n = 40$

Modalité	1	2	3	4
Effectif	10	18	11	1

Vérification des conditions du test du $\mathcal{X}^2$

$40 * p_1 = \dfrac{40}{4} = 10 > 540 * p_2 = \dfrac{40}{4} = 10 > 540 * p_3 = \dfrac{40 * 7}{16} = 10 \geq 540 * p_4 = \dfrac{40}{16} = 10 < 5$ condition non vérifiée !

On fusionne des colonnes de manière à remplir les conditions. On fusionne les colonnes 3 et 4 pas exemple.

Modalité	1	2	3 ou 4
Effectif	10	18	12

La nouvelle probabilité de référence devient

$$p^{ref}_{nouvelle} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16} + \frac{1}{16}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}).$$

Nouvelle condition :

$$40 * p_1 = 10 > 540 * p_2 = 10 > 540 * p_3 = \frac{40}{2} = 20 > 5$$

Si on applique le test du $\mathcal{X}^2$ "de base", on obtient un test asymptotique de niveau α pour le cas à 3 classes (fait avec un $\mathcal{X}^2(2)$), donc c'est aussi un test asymptotique de niveau α pour le cas à 4 classes.
Remarque. Si on prend $q = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ qui appartient à H_1^4 car $q \neq p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16})$. En fusionnant ce cas particulier, on se retrouve dans H_0^3.

$$q \in H_1^4 \to q^{reduit} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \in H_0^3.$$

On perd donc en information quand on fusionne des colonnes. La puissance du test se réduit car on se retrouve avec des cas dans H_1 et dans H_0.
L'opération de fusion des colonnes permet toujours de construire un test de niveau asymptotique α au détriment de la puissance.

2.4 Le test du $\mathcal{X}^2$ pour une loi discrète

Données : $X_1, \dots, X_n$ observation iid.
Loi cible à valeur dans $\mathbb{N}$ caractérisée par

$$p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Exemple pour une poisson

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Est-ce que la loi des X_i est donnée par p ? C'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X_1 = k) = p_k\,?$$

Valeur	0	1	2	3	4	5	6	...
Effectif	5	8	12	7	2	1	0	...

Exemple 2.11. "On ne peut pas faire un $\mathcal{X}^2$ avec une infinité de degrés de liberté" $\to$ On regroupe les classes à partir d'un certain rang On voudrait regarder np_0, np_1, np_2, np_3 et pour la 4ème classe

Valeur	0	1	2	3	4 et plus
Effectif	5	8	12	7	4

$n(\sum_{k=4}^{+\infty} p_k)$. Les classes sont déterminées afin que toutes les conditions soient satisfaites.
En pratique, on regarde à partir de quel indice la condition $np_k < 5$ ne fonctionne plus, puis on regroupe à partir de la

2.4.0.1 En pratique

Donnée : $X_1, \dots, X_n$
Loi cible : $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

1. Etape 0 : On détermine les classes en calculant np_1, np_2, ... et ainsi de suite.
2. On regroupe les classes qui ne vérifient pas la condition
3. On calcule les effectifs de chaque classes $N_{1,n}, \dots, N_{c-1,n}, N_{c,n}$ avec c l'effectif dans la classe agglomérée
4. On calcule les proportions observées $\hat{p}_{k,n}$ et la stat de test $D = n \sum_{k=1}^{c} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k)^2}{p'_k}$ où $p'_k = p_k$ si $k \leq c_1$ et $p'_c = \sum_{k=c}^{+\infty} p_l$
5. On détermine la zone de rejet à l'aide du quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une loi $\mathcal{X}^2(c-1)$, noté h_α Et on décide de conserver H_0 si $D \leq h_\alpha$, on rejette sinon.

2.4.0.2 Limite Ce test permet de tester l'adéquation à n'importe quelle loi discrète au niveau α. Cependant, dès lors qu'on regroupe des classes (ce qui est obligatoire ici) on perd la consistance du test.

2.5 Le test du $\mathcal{X}^2$ pour une loi discrète

Données : $X_1, \ldots, X_n$ iid.
Loi cible : L la loi d'une v.a. L (par exemple de densité g)
Idée : Transformer les données en les regroupant par paquets.

Soient $I_1, \ldots, I_d$ des intervalles qui forment une partition du support de L. (disjoints, dont l'union couvre toutes les valeurs de L) Voir 4
Condition

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\} n * P(L \in I_k) \geq 5.$$

On crée de nouvelle variables Y_i : Numéro de l'intervalle dans lequel est X_i

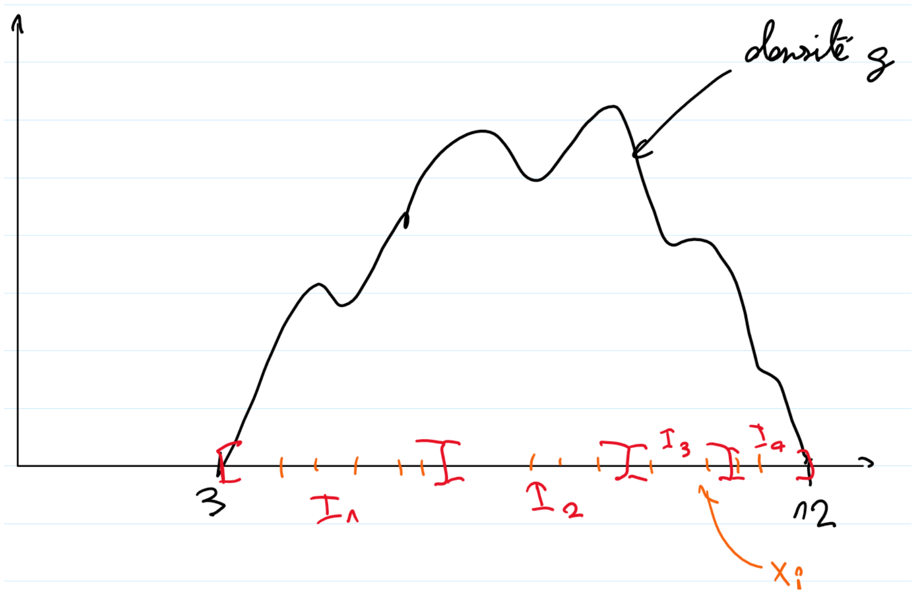

Figure 4 – Illustration de la partition de L

$$P(Y_1 = k) = P(X_i \in I_k) = p_k(\text{sous } H_0).$$

On a alors : $Y_1, \ldots, Y_n$ variables à valeur dans $\{1, ..., d\}$, avec comme proba cible : $p = (p_i = P(L \in I_i), \ldots, p_d = P(L \in I_d))$.

On applique alors le test du $\mathcal{X}^2$ "basique" aux variable Y_i. Cela fournit un test asymptotique de niveau α. Le tableau à considérer est :

Intervale	I_1	I_2	I_3	...	I_d
Effectif	.	.	.	...	.

2.5.0.1 Bilan de la méthode Aspects positifs :
- **Fonctionne pour toutes les lois**
- Facile à faire

Aspects négatifs :
- Problème de consistance. Regrouper les variables par intervalle ruiner l'erreur de seconde espèce.
- Asymptotique
- Dépendant du choix des intervalles. Ce qui n'est pas canonique.

2.6 Le $\mathcal{X}^2$ d'ajustement à une famille paramétrique de loi

On dispose d'observation iid. $X_1, \ldots, X_n$.
On veut savoir si la loi des X_i fait partie d'une famille paramétrique $\mathcal{F} = (P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ à $\Theta \subset \mathbb{R}^M$.
Par exemple

- Lois de Poisson $(\mathcal{P}ois(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}_*^+}, M = 1$
- Lois Exponentielles : $(\mathcal{E}(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}_*^+}, M = 1$
- Lois géométrique : $(\mathcal{G}eom(p))_{p\in]0,1[}, M = 1$
- Lois normales : $(\mathcal{N}(m, \sigma^2))_{m\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}_*^+}, M = 2$

Les hypothèses :

- $H_0 =$ la loi des X_i appartient à $\mathcal{F}$
- $H_1 =$ la loi des X_i n'appartient pas à $\mathcal{F}$

1. Etape 1 : Soit $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ (pour P_θ). On estime **tous** les paramètres de la loi $(p_1^{\hat{\theta}_n}, \ldots, p_d^{\hat{\theta}_n})$
2. Etape 2 : On vas tester l'ajustement de $X_1, \ldots, X_n$ à $P_{\hat{\theta}_n}$ On calcule les fréquences observées $\hat{p}_{k,n}$.

Erreur à ne pas commettre : il est faut de dire que

$$D = n \sum_{k=1}^{d} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k^{\hat{\theta}_n})^2}{p_k^{\hat{\theta}_n}} \to \mathcal{X}^2(d-1).$$

Théorème 2.6. *Sous H_0 ,*

$$D = n \sum_{k=1}^{d} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k^{\hat{\theta}_n})^2}{p_k^{\hat{\theta}_n}} \to \mathcal{X}^2(d-1-M).$$

Avec

- *$d =$ Nombre de classes à la fin, après regroupement éventuel*
- *$M =$ nombre de paramètre*

2.6.0.1 En pratique

1. Etape 1 : Soit $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ (pour P_θ). On estime **tous** les paramètres de la loi $(p_1^{\hat{\theta}_n}, \ldots, p_d^{\hat{\theta}_n})$
2. Etape 2 : On vas tester l'ajustement de $X_1, \ldots, X_n$ à $P_{\hat{\theta}_n}$ On calcule les fréquences observées $\hat{p}_{k,n}$.
3. Etape 3 : Vérification des conditions $np_k^{\hat{\theta}_n}$ et possible regroupement en classes
4. Etape 4 : Calcul de la stat de test D
5. Etape 5 : Zone de rejet : lecture de H_α le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\mathcal{X}^2(d-1-M)$
6. Etape 6 : Décision
   - $D > h_\alpha$ on rejette H_0
   - $D \leq h_\alpha$ on conserve H_0