

# Cours

Charles Vin

Date

Nouveau cours de la rentrée

...

Nouveau cours du 17/01

**Rappel :**

$$(P) \min f(x)$$

$$S.C \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \quad \Omega \quad \mathcal{A} = \{x \in \Omega : g(x) = 0, h(x) \leq 0\}$$

## Convexité

— Un ensemble  $E$  est un convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in E.$$

— Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  défini sur un convexe  $E$ . Alors  $f$  est une fonction convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

## 0.1 Problème convexes

$(P)$  est un problème convexe si  $f$  est une fonction convexe et  $\mathcal{A}$  est un convexe.

En plus si  $f$  est une fonction strictement convexe alors  $(P)$  est un problème strictement convexe.

**Théorème 0.1.** Si  $(P)$  est un problème convexe et si  $x^*, (\lambda^*, \mu^*)$  vérifient les conditions KKT, alors  $X^*$  est solution optimale de  $(P)$ .

**Théorème 0.2.** Tout minimum locale de  $(P)$  est également minimum globales de  $(P)$ . En plus l'ensemble des minimums globales est un convexe.

**Théorème 0.3.** Si  $(P)$  est un problème strictement convexe et  $(P)$  admet une solution optimale, alors cette solution optimale est unique.

## 1 Programmation linéaire

problème linéaire (peut s'écrire avec des matrices)

$$(P) \min C^T x \text{ (ou bien } < c, x >)$$

$$S.C \begin{cases} Ax = b \\ Cx \leq d \\ x \in \Omega \end{cases}$$

**Exemple 1.1** (exemple 2.1.1.2).

$$(P) \min c_1 x_1 + c_2 x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Résolution graphique**  $c_1 = 3, c_2 = 8$  traduire les contraintes en droite, les dessiner trouver la zone admissible.  
On définit les courbes de niveau.

$$C_k = \{x \in \mathcal{A} : f(x) = k\} \\ = \{x_1, x_2 \in \mathcal{A} : 3x_1 + 8x_2 = k\}$$

On a fait un truc avec ces courbes de niveau pour dire que c'était croissant puis on a choisi de prendre l'intersection de deux des équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 10((II) - (I)) \\ 2x_1 = 6(3(I) - (II)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases} \text{ solution optimale.}$$

Valeur optimale :  $9 + 40 = 49$

### Exemple 1.2.

$$c_1 = c_2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_2 + X_1 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8 - x_1 \\ x_2 = \frac{18 - x_1}{3} \\ x_2 \leq 14 - 2x_1 \end{cases}$$

$$C_k = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : 3x_1 + 3x_2 = k\}$$

étape que j'ai pas compris lol + un dessin au tableau

$$\text{Solution optimales } S = \{(x_1, 8 - x_1) : 3 \leq x_1 \leq 6\} = \{(8 - x_2, x_2) : 2 \leq x_2 \leq 5\}$$

### Exemple 1.3 (numéros 3).

$$\min 20x_1 + 25x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 2x_2 + X_1 \geq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$C_k = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : 3x_1 + 3x_2 = k\} \Leftrightarrow C_{100} = \{20x_1 + 25x_2 = 100\} = \{\text{la courbe entre } (0,4) \text{ et } (5,0)\}$$

On dessine cette courbe

La fonction à min est décroissante car ...

Donc on suit les courbes parallèles à celle de  $C_k$  jusqu'à arriver au minimum

$$\text{Solution optimales } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}, \text{ Valeur Optimale} = 50$$

**Définition 1.1.** 1. Un polyèdre est une intersection de demi-plans

$$H(a_k, b_k) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_k x \leq b_k\}.$$

2. Un simplexe est un polyèdre borné

3. Un sommet est un point du polyèdre qu'on

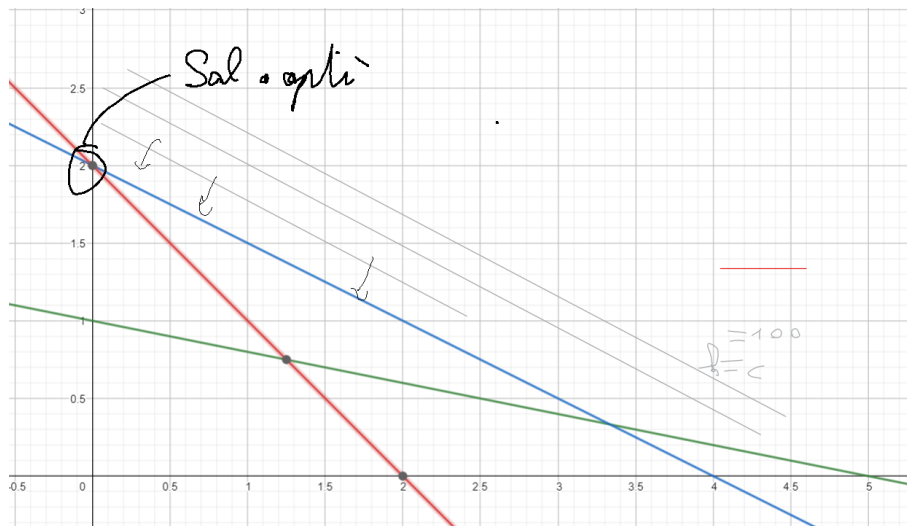
Nouveau cours du 24/01

### Rappel :

1. Une contrainte  $h(x) \leq 0$  est saturée (ou «active») au point  $x^* \in \mathcal{A}$  si  $h(x^*) = 0$ .

Remarque : les contraintes d'égalités  $g(x) = 0$  sont saturées en tout  $x \in \mathcal{A}$

2. Une matrice est de rang  $r$  si il existe une sous-matrice carrée de taille  $r$  dont le déterminant est non-null et pour toute sous-matrice de taille plus élevée le déterminant vaut 0.



**Théorème 1.1** (4, p13). Un point  $x$  est un sommet du polyèdre  $A$  si la matrice de contraintes saturées est de rang  $n$ .

Si le nombre de contraintes saturées vaut exactement  $n$  alors  $x$  est un sommet non-dégénéré. En revanche, si le nombre de contraintes saturées est strictement supérieur à  $n$ , alors  $x$  est un sommet dégénéré.

Supposons qu'on a  $p$  contraintes d'égalité,  $q$  contraintes d'inégalité,  $n$  variables. Alors le nombre de sommets du polyèdre est limité à  $\binom{q}{n-p} = \frac{q!}{(n-p)!(q-n-p)!}$

**Exemple 1.4** (Exercice 12, p28).

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ -x_1 - 2x_3 \leq -1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_3 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \end{array} \right. , p=0, q=7, n=3$$

Le nombre de sommets est limité par  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5}{1*2*3} = 35$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P_1(2, 0, 0), \left\{ \begin{array}{l} 2 < 11 \\ 2 < -1 \\ 2 = 2 \\ 0 < 3 \\ 2 < 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$m = 3 = n, A_S = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, -1, 0 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix} \det A_S = 1 \neq 0 \text{ donc } \text{rang}(A_S) = 3.$$

On en déduit que  $P_1$  est un sommet non-dégénéré.

Autre Point :  $P_2(2, 0, 3)$

$$P_1(2, 0, 0), \begin{cases} 11 = 11 \\ 8 < -1 \\ 2 = 2 \\ 3 = 3 \\ 2 < 0 \\ 0 = 0 \\ 3 \leq 0 \end{cases}$$

Les contraintes saturées sont là où les trucs sont égaux!! On remet ces équations dans la matrice  $A_S$ .

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \text{ donc } Rang(A_S) = 3(=n).$$

Donc matrice dégénérée (car y'a un truc avec  $3 = n < m$ ).

Autre Point :  $P_3(0, 5, 3)$

$$P_1(2, 0, 0), \begin{cases} 11 = 11 \\ 1 = -1 \\ 1 < 2 \\ 0 < 3 \quad m = 3(=n) \\ 1 < 0 \\ 5 < 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les contraintes saturées sont là où les trucs sont égaux!! On remet ces équations dans la matrice  $A_S$ .

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(A_S) = -1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \text{ donc } Rang(A_S) = 3(=n).$$

Donc  $P_3$  est un sommet non-dégénéré

**Théorème 1.2 (6).** Si  $(P_L)$  admet des solutions optimales et si la matrice des contraintes est de rang  $n$ , alors au moins une des solutions optimales est un sommet de  $\mathcal{A}$

## 1.1 La forme standard

$$\begin{aligned} (P_L) \min f^T x \\ \text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ Cx \leq d, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \\ (P_S) \min f^T x \\ \text{s.c. } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tout problème  $(P_L)$  peut s'écrire sous la forme  $(P_S)$  car

$$1. \max f^T x \Leftrightarrow \min -f^T x$$

$$2. a^T x \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x + y = b \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x \geq b \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x - y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$3. \ x_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = x_{k_1} - x_{k_2} \\ x_{k_1}, x_{k_2} \geq 0 \end{cases}$$

**Exemple 1.5** (Exercice 14 page 28).

$$(P_L) \max x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1, x_3 \geq 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(P_S) \min -(x_1 + 5(x_{2,1} - x_{2,2}) + 2x_3)$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3(x_{21} - x_{22}) + y_1 = 10 \\ x_1 + (x_{21} - x_{22}) + x_3 + y_2 = 9 \\ x_1, x_{22}, x_{21}, x_3 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_L) \max -x_1 + x_2 - x_3$$

$$S.C \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \geq 7 \\ x_1 + 2x_1 + x_3 \leq 9 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(P_S) -x'_1 - x_{21} + x_{22} + x_3$$

$$S.C \begin{cases} -3x'_1 - 3x_{21} + 3x_{22} - y_1 = -7 \\ -x'_1 + 2x_{21} - 2x_{22} + x_3 + y_2 = 9 \\ x'_1 \geq 0 \\ x_{21}, x_{22} \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Considérons la partition de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en

— en  $B = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$  (indices des variables de base)

— et  $H = \{i_{p+1}, \dots, i_n\}$  (indices des variables h de base (?))

de façon que  $B \cup H = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $B \cap H = \emptyset$

$$x = (x_B, x_H)$$

$$A = (A^B, A^H)$$

$$f^T = (f_B^T, f_H^T)$$

Si il existe  $B$  et  $H$  tq

1.  $(A^B)$  est inversible

2.  $x_B = (A^B)^{-1}b \geq 0$

alors  $x(B) = (x_b, x_h)$  est un sommet.

**Exemple 1.6** (Exo 17, p 29).

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 + 2x_2 \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad p = 2, n = 4 \\ & B_1 = \{2, 4\}, H_1 = \{1, 3\} \\ & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & A^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_1} = 1 \neq 0 \text{ donc } A^B \text{ est inversible} \\ & x_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq 0 \end{aligned}$$

La base  $B_1$  n'est pas «réalisable» (elle ne correspond à aucun sommet)

**Exemple 1.7.**

$$\begin{aligned} & B_2 = \{1, 2\}, \text{ donc } H_2 = \{3, 4\} \\ & A^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_2} = 6 \neq 0, \text{ donc } A^{B_2} \text{ est inversible} \\ & x_{B_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 19/6 \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Donc  $B_2$  est une base réalisable non-dégénérée. Sommet non-dégénéré  $P(\frac{5}{6}, \frac{19}{6}, 0, 0)$

**Exemple 1.8.**

$$x_{B_3} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 12/5 \end{pmatrix} > 0$$

donc  $B_3$  est une base réalisable non dégénérée.

Nouveau cours du 31/01

## 2 Algorithme du simplexe

- $B_k = \{i_1, \dots, i_p\}$  (les indices des variables de base)
- $H_k = \{i_{p+1}, \dots, i_n\}$  (les indices des variables hors base)

Si  $A^{B_k}$  est inversible et si  $X_{B_k} = (A^{B_k})^{-1}b \geq 0$  alors  $X_{B_k} = (X_{b_k}, X_{H_k})$  avec  $X_{H_k} = 0$  est un sommet de l'ensemble  $\mathcal{A}$  et on dit que la base  $B_k$  est réalisable.

- Si  $X_{b_k} > 0$  alors  $X(B_k)$  est un sommet non-dégénéré et  $B_k$  est une base non-dégénérée
- Si  $X_{b_k} \geq 0$  mais pas strictement positif alors  $X(B_k)$  est un sommet dégénéré et  $B_k$  est une base dégénérée

Le but est maintenant de construire une suite minimisante  $\{B_k\}_{k \geq 0}$  tel que  $\forall k, l \in \mathbb{N}$  avec  $k < l$  :  $f(X(B_k)) > f(X(B_l))$ .

Comme  $\forall k, l \in \mathbb{N}$  avec  $k \neq l$  on a  $B_k \neq B_l$  et puisque le nombre de sommets est fini, cette suite converge vers la solution optimale dans un nombre fini d'itération.

Soit donner la réalisable  $B_k$

$$\begin{aligned}
 AX(B_k) = b &\Leftrightarrow [A^{B_k}, A^{H_k}] \begin{pmatrix} X_{B_k} \\ X_{H_k} \end{pmatrix} = b \\
 &\Leftrightarrow A^{B_k} X_{B_k} + A^{H_k} X_{H_k} = b \\
 &\Leftrightarrow A^{B_k} X_{B_k} = b - A^{H_k} X_{H_k} \\
 &\Leftrightarrow X_{B_k} = (A^{B_k})^{-1} b - (A^{B_k})^{-1} A^{H_k} X_{H_k} \\
 &= f_{B_k}^T X_{B_k} + f_{H_k}^T X_{H_k} \\
 &= f^T (A^{B_k})^{-1} b - f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} A^{H_k} X_{H_k} + f_{H_k}^T X_{H_k} \\
 &= f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} b - [f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} A^{H_k} - f_{H_k}^T] X_{H_k} \\
 &= f_{B_k}^T (A^{B_k})^{-1} b - C^{H_k} X_{H_k} \text{ (les couts reduits)}
 \end{aligned}$$

Si  $C^{H_k} \geq 0$  alors  $X(B_k)$  est minimum global. Sinon on prend  $e = \arg \min(C^{H_k}) \rightarrow X_e$  variable entrante,  $e \in H_k, e \notin B_k$  sinon  $e \in B_{k+1}, e \notin H_{k+1}$

#### Déterminer la variable sortante

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ , Il faut que

$$\begin{aligned}
 (A^{B_k})^{-1} b - [(A^{B_k})^{-1} A^{H_k}]_e t &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow t &= \min \left\{ \frac{(A^{B_k})^{-1} b}{[\dots]_e} \right\} \text{ composant par composant} \\
 \arg \min \left\{ \frac{(A^{B_k})^{-1} b}{[\dots]_e} \right\} &= s \\
 B_{k+1} &= (B_k \setminus \{s\}) \cup \{e\}
 \end{aligned}$$

**Exemple 2.1** (Exercice 17).

$$\begin{aligned}
 &\min 2x_1 + 2x_2 \\
 S.C. &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i \in [1, 4] \end{cases} \\
 f^T &= (2, 2, 0, 0) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Avec  $B_1 = \{2, 4\}$  (et alors  $H_1 = \{1, 3\}$ )

$$A^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_1} = 1 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_1} = (A^{B_1})^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \not\geq 0 \text{ donc } B_1 \text{ n'est pas réalisable.}$$

Avec  $B_2 = \{1, 2\}$  (et alors  $H_2 = \{3, 4\}$ )

$$A^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \det A^{B_2} = 1 + 5 = 6 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_2} = (A^{B_2})^{-1} b = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 19/6 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ donc } B_2 \text{ est une base réalisable non dégénéré.}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 C^{H_2} &= f_{H_2}^T - f_{B_2}^T (A^{B_2})^{-1} A^{H_2} \\
 &= (0, 0) - (2, 2) \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -(2, 2) \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \\
 &= -(12/6, 0) = (-2, 0) \not\geq
 \end{aligned}$$

Donc  $B_2$  ne satisfait pas les CSO (condition suffisante d'optimalité)

Avec  $B_3 = \{1, 3\}$  (et alors  $H_2 = \{2, 4\}$ )

$$A^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \det A^{B_3} = 5 \neq 0 \text{ donc inversible.}$$

Puis on a

$$X_{B_3} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 19/5 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ donc } B_3 \text{ est une base réalisable non dégénérée.}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 C^{H_3} &= f_{H_3}^T - f_{B_3}^T (A^{B_3})^{-1} A^{H_3} \\
 &= (2, 0) - (2, 0) \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (2, 0) - (0, -2/5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= (2, 0) - (-2/5, -2/5) = (12/5, 2/5) \geq \text{ donc } B_3 \text{ satisfait les CSOs}
 \end{aligned}$$

On en déduit que la solution optimale est  $\bar{X} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 19/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Exemple 2.2.** Voir one note

Nouveau cours du 07/02

### 3 Mise en oeuvre de l'algo du simplexe

1. Initialisation d'une base réalisable non-dégénérée
  - Choix triviale, s'il existe
  - Méthode à deux phases (voir plus tard)
  - A partir d'une base de données
2. Construire le tableau correspondant : voir poly 2.5.4

$$\begin{aligned}
 T &= (A^B)^{-1} A = [I, (A^B)^{-1} A^H] \\
 X_b &= (A^B)^{-1} \\
 C &= f^T - f_B^T T = [0, f_H^T - f_B^T T^H] \\
 Z &= f_B^T X_B
 \end{aligned}$$

3. Tester la base ( $C^H \geq 0$ ?)
4. Tant que la base ne satisfait pas les CSL, faire
  - (a) Déterminer la variable entrante
  - (b) Déterminer la variable sortante
  - (c) Mise à jour du tableau correspondant
  - (d) Tester la base

Voir poly le chapitre 2.5 entier

**Exemple 3.1** (Exercice 7 p26). OneNote