Optimisation

Examen 22 mai 2019
Corrigé

Exercice 1 On veut résoudre le problème $(\mathcal{P}_1)$ $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ avec $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_1^2 + 10$ en utilisant la méthode de gradient à pas optimal au départ du point $x^{(0)} = (1, -2)^T$.

1. Déterminer la direction $d^{(0)}$ de déplacement et le pas optimal ρ_0 dans cette direction. Quel est le nouveau point $x^{(1)}$?

   Corrigé :
   On a $\nabla f(x) = (4x_1^3 - 4x_1, 2x_2)$, donc
   $$d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = (0, 4)^T.$$
   Puis, soit
   $$g(t) = f(x^{(0)} + td^{(0)}) = f(1, -2 + 4t) = (4t - 2)^2 + 9.$$
   Alors $g'(t) = 8(4t - 2) = 0$ ssi $t = 1/2$, et $g''(t) = 32 > 0$. On en déduit que
   $$\rho_0 = \mathrm{Argmin}_t g(t) = 1/2.$$
   En result, $x^{(1)} = x^{(0)} + \frac{1}{2}d^{(0)} = (1, 0)^T$.

2. Supposons que l'on veut faire une minimisation approchée (recherche linéaire) en utilisant le règle d'Armijo avec paramètres $m = 1/3$ et $M = 3$. Quelles conditions doit vérifier le pas $\tilde{\rho}_0$ définissant le nouvel itéré $\tilde{x}^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{\rho}_0 d^{(0)}$? Vérifier si $\tilde{\rho}_0 = 1/4$ satisfait les conditions.

   Corrigé :
   Etant donné que $f(1, -2) = 13$, il faut que
   $$\begin{cases} f(1, -2 + 4\tilde{\rho}_0) < 13 - \frac{16}{3}\tilde{\rho}_0 \\ f(1, -2 + 12\tilde{\rho}_0) > 13 - 16\tilde{\rho}_0 \end{cases}.$$
   Pour $\tilde{\rho}_0 = 1/4$ on a :
   $$13 - \frac{16}{3}\tilde{\rho}_0 = \frac{35}{3} > 10 = f(1, -1) = f(1, -2 + 4\tilde{\rho}_0)$$
   et
   $$13 - 16\tilde{\rho}_0 = 9 < f(1, 1) = f(1, -2 + 12\tilde{\rho}_0),$$
   donc $\tilde{\rho}_0 = 1/4$ satisfait les conditions d'Armijo.

Exercice 2 Ecrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_4 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0 \end{array}$$

sous forme canonique $(\mathcal{P}_2)_c$ et sous forme standard $(\mathcal{P}_2)_s$.

Corrigé :

$$(\mathcal{P}_2)_c \quad \begin{array}{rl} \max & -(x_{11} - x_{12} - x_2 + x_3 + x_4') \\ \text{s.c.} & -x_{11} + x_{12} - x_3 \leq -3 \\ & -x_{11} + x_{12} - x_4' \leq 1 \\ & x_{11} - x_{12} - x_2 - x_4' \leq 7 \\ & -x_{11} + x_{12} + x_2 + x_4' \leq -7 \\ & x_{11}, x_{12}, x_2, x_3, x_4' \geq 0 \end{array}$$

et

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{rl} \min & x_{11} - x_{12} - x_2 + x_3 + x_4' \\ \text{s.c.} & x_1 + x_3 - x_5 = 3 \\ & -x_1 + x_4 + x_6 = 1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & x_{11}, x_{12}, x_2, x_3, x_4', x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 3 On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & -5x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

et les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{2, 3\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{1, 4\}$.

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

   Corrigé :
   On a : $n = 4$, $p = 2$ et $q = 4$, donc il y a au plus $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ sommets.

2. Pour chaque base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle est dégénérée ou non-dégénérée et si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

   Corrigé :
   On a :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ f^T = (3, 2, 0, 0) \text{ et } b = (-1, 3)^T.$$

   (a) Pour $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$ on a :

   - $$A^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{dét}A^{\mathcal{B}_1} = -6 \neq 0$$

     donc $A^{\mathcal{B}_1}$ est inversible ;

   - $$(A^{\mathcal{B}_1})^{-1}b = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} > 0;$$

   - pour $\mathcal{H}_1 = \{3, 4\}$ on a

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_1} &= (0,0) - (3,2)\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1/2, 1/3)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = (1/6, -13/6) \ngeq 0; \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{B}_1$ est une base réalisable non-dégénérée, et ne satisfait pas les CSO.

   (b) Pour $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$ on a :

- $$A^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dét}A^{\mathcal{B}_2} = 1 \neq 0$$

  donc $A^{\mathcal{B}_2}$ est inversible ;
- or
  $$(A^{\mathcal{B}_2})^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \ngeq 0;$$

donc $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base réalisable.

(c) Pour $\mathcal{B}_3 = \{2, 3\}$ on a :

- $$A^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dét}A^{\mathcal{B}_3} = -1 \neq 0$$

  donc $A^{\mathcal{B}_3}$ est inversible ;
- or
  $$(A^{\mathcal{B}_3})^{-1}b = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \ngeq 0;$$

donc $\mathcal{B}_3$ n'est pas une base réalisable.

(d) Pour $\mathcal{B}_4 = \{1, 4\}$ on a :

- $$A^{\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dét}A^{\mathcal{B}_1} = -5 \neq 0$$

  donc $A^{\mathcal{B}_4}$ est inversible ;
- $$(A^{\mathcal{B}_4})^{-1}b = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 14/5 \end{pmatrix} > 0;$$
- pour $\mathcal{H}_4 = \{2, 3\}$ on a
  $$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_4} = (2, 0) - (3, 0)\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = (2, 0) + 3/5(1, 1) = (13/5, -3/5) \geq 0; \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}_4$ est une base réalisable non-dégénérée, et elle satisfait les CSO.

<u>Exercice 4</u> Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal et la méthode à deux phases) le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_4)\quad \begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Corrigée :

Première phase :

$$(\mathcal{P}_4)_a\quad \begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + y_1 = 1 \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4, \quad y_j \geq 0,\ j = 1,2 \end{array}$$

$\mathcal{B}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2		
y_1	-1	-1	1	-2	1	0	1	(1/1)←
y_2	0	2	1	-1	0	1	4	(4/1)
	1	-1	-2	3	0	0	5	
			↑					

$\mathcal{B}_1$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2		
x_3	-1	-1	1	-2	1	0	1	(-)
y_2	1	3	0	1	-1	1	3	(3/3)←
	-1	-3	0	-1	2	0	3	
		↑						

$\mathcal{B}_2$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_3	-2/3	0	1	-5/3	2/3	1/3	2
x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	1/3	1
	0	0	0	0	1	1	0

Deuxième phase :

Pour $\mathcal{B}_0 = \{2,3\}$ on a $\mathcal{H}_0 = \{1,4\}$ et

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{H}_0} &= f^T_{\mathcal{H}_0} - f^T_{\mathcal{B}_0}(A^{\mathcal{B}_0})^{-1}A^{\mathcal{H}_0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -5/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & -7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 10/3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}_0$ satisfait les conditions suffisantes d'optimalité. En result la solution optimale est $\bar{x} = (0,1,2,0)$ est la valeur optimale vaut 7. Le tableaux devient

$\mathcal{B}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1/3	1	0	1/3	1
x_3	-2/3	0	1	-5/3	2
	4/3	0	0	10/3	7

<u>Exercice 5</u> On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_5)\quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 - 4x_4 = 4 \\ & -x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \leq 0 \end{array}$$

1. Écrire le dual $(\mathcal{D}_5)$ du problème $(\mathcal{P}_5)$.

   Corrigé :

$$(\mathcal{D}_5)\quad \begin{array}{rl} \max & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.c.} & y_1 - y_2 \leq 1 \\ & -y_1 \leq 2 \\ & y_2 = 3 \\ & -4y_1 \geq 4 \\ & y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \leq 0 \end{array}$$

2. Étudier l'existence d'une solution optimale de $(\mathcal{P}_5)$ en utilisant les propriétés de la dualité.

   Corrigé :
   Etant donné que $y_2 = 3 \nleq 0$, $(\mathcal{D}_5)$ n'est pas réalisable. Alors $(\mathcal{P}_5)$ ne possède pas des optimums d'après Théorème 19 du cours.

Exercice 6 Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Produire une unité de bien necessite:

- 0.5 heures de machine et 2 heures de main d'oeuvre avec la première technique;
- 1.5 heures de machine et 1.5 heures de main d'oeuvre pour la deuxème technique;
- 2 heures de machine et 0.5 heures de main d'oeuvre pour la troisième technique.

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12h et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15 h. L'entreprise cherche à maximiser ses bénéfices, les marges unitaires étant de 3 euros, 4 euros et 5 euros selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

1. Ecrire le programme linéaire $(\mathcal{P}_6)$ que doit résoudre l'entreprise.

   Corrigé :

$$(\mathcal{P}_6) \quad \begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} & \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. On considère le sommet $x_1 = 96/15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 66/15$, $x_4 = x_5 = 0$.

   (a) Quelle est la base $\mathcal{B}$ correspondante ?

   Corrigé : $\mathcal{B} = \{1, 3\}$.

   (b) Ecrire la fonction objectif en fonction des variables hors base.

   Corrigé :

$$Z = f_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c^{\mathcal{H}} x_{\mathcal{H}}$$

   où $f_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = 3 \times 96/15 + 5 \times 66/15 = 206/5$, $\mathcal{H} = \{2, 4, 5\}$ et

$$c^{\mathcal{H}} = f_{\mathcal{H}}^T - f_{\mathcal{B}}^T (A^{\mathcal{B}})^{-1} A^{\mathcal{H}} = (4, 0, 0) + (4/5, 4/3) \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (4,0,0) - (34/15, 14/15) \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4,0,0) - (24/5, 34/15, 14/15) = -(4/5, 34/15, 14/15),$$

   donc

$$Z = 206/5 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{34}{15}x_4 - \frac{14}{15}x_5.$$

(c) Quel est le vecteur des coûts réduits correspondant à cette base ?

Corrigé :

$$c^{\mathcal{H}} = -(4/5, 34/15, 14/15).$$

(d) Utiliser la condition suffisante d'optimalité pour conclure si ce sommet est optimal.

Corrigé :
Le sommet est optimal car $\mathcal{B}$ satisfait les CSO ($c^{\mathcal{H}} \leq 0$).

3. Résoudre graphiquement le dual $(\mathcal{D}_6)$.

Corrigé :

$$(\mathcal{D}_6) \quad \begin{array}{rl} \min & 12y_1 + 15y_2 \\ \text{s.c.} & \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & \frac{3}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 \geq 4 \\ & 2y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

La solution optimale est solution du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 5 \end{array} \right. \Rightarrow y_1 = 34/15 \text{ et } y_2 = 14/15.$$

4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$.

Corrigé :
D'après la question précédente, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ et la deuxième contrainte n'est pas active, donc il faut que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 15 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x_1 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 15 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 32/5 \\ x_3 = 22/5 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

5. Quelle est la valeur optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$?

Corrigé :
La valeur optimale vaut $12 \times \frac{34}{15} + 15 \times \frac{14}{15} = \frac{206}{5}$, ou encore, $3 \times \frac{32}{5} + 5 \times \frac{22}{5} = \frac{206}{5}$.