UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2016–2017

Examen 18 mai 2017
Durée : 3 heures

Exercice 1 Résoudre par la méthode de gradient conjugué le problème quadratique

$$\min_{(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2} 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1 + 2x_2$$

au départ du point $x^{(0)} = (0,0)^T$.

Exercice 2

1. Ecrire le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ & x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \leq 0 \end{array}$$

   sous forme canonique.

2. Ecrire le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \max & -3x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

   sous forme standard.

Exercice 3 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 7 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 5. \end{array}$$

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

2. Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ les bases $\mathcal{B}_j = \{1, 2, j+2\}$ ne sont pas réalisables.

3. Pour les bases $\mathcal{B}_4 = \{3, 4, 5\}$ $\mathcal{B}_5 = \{1, 3, 5\}$ et $\mathcal{B}_6 = \{1, 4, 5\}$, vérifier si elles sont réalisables. Dans le cas échéant vérifier si elles sont dégénérées ou non-dégénérées et si elles satisfont les conditions suffisantes d'optimalité.

<u>Exercice 4</u> Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal) le problème suivant :

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - x_3 = -1 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3 \end{array}$$

<u>Exercice 5</u> On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 4 \\ & x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

1. Écrire le dual $(\mathcal{D})$ du problème $(\mathcal{P})$.

2. Étudier l'existence d'une solution optimale de $(\mathcal{P})$ en utilisant les propriétés de la dualité.

<u>Exercice 6</u> On considère le problème diététique suivant : il s'agit d'acheter à un coût minimum des fruits, des légumes et de la viande afin d'obtenir suffisamment de vitamines A et B. Pour une alimentation saine, on considère qu'il faut consommer (au moins) 11 unités de vitamine A et 4 unités de vitamines B. Les valeurs nutritives des aliments (par unité de poids) sont données dans le tableau ci-dessous:

	Légumes	Fruits	Viande
Vitamine A	1	5	1
Vitamine B	2	1	1

Les coûts par unité de poids des aliments sont de 3 (légumes), 2 (fruits) et 10 (viande).

1. Modéliser ce problème $(\mathcal{P})$.

2. Résoudre graphiquement le dual $(\mathcal{P}^*)$.

3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal $(\mathcal{P})$.

4. Quelle est la valeur optimale du primal $(\mathcal{P})$?