UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2015–2016

Devoir surveillé 7 mars 2016
Durée : 2 heures

Avertissement : Le barème donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 *(5 points)*
On considère la moyenne géometrique

$$f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \qquad \text{dans } \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i > 0, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

1. Montrer que le gradient de f peut s'écrire sous la forme

$$\nabla f(x) = \frac{f(x)}{n} \times v^T, \quad \text{où } v = (1/x_1 \ \ldots \ 1/x_n)^T.$$

2. Étant donné que la matrice hessienne peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^2 f(x) = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[v \cdot v^T - n \times \begin{pmatrix} 1/x_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1/x_n^2 \end{pmatrix} \right],$$

montrer que f est concave. *Indication : On utilisera la propriété (sans démonstration) que* $\forall (\ a_1 \ \ \ldots \ \ a_n \ )^T \in \mathbb{R}^n$, $n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \geq 0$.

3. On considère maintenant la moyenne arithmétique $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ et on choisit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} \ : \ f(x) \geq \alpha g(x)\}$ est un convexe.

Exercice 2 *(5,5 points)*
Problème de modélisation:

Rosas et Jasmine sont deux qualités de parfum commercialisées par la société Goodsmell. La matière première de base nécessaire pour leur production peut être achetée dans une autre entreprise chimique à 200 euros par litre. Avant que cette matière puisse être utilisée, elle doit préalablement subir un certain nombre d'opérations au laboratoire de Goodsmell, ce qui nécessite 2 heures de travail par litre de cette substance. A partir d'un litre de matière première, on peut produire 20 cl Rosas $N°1$ et 24 cl Jasmine $N°1$. Le prix de vente de ces parfums est de l'ordre de 120 euros et 100 euros par cl pour respectivement Rosas et Jasmine. Grâce à une heure de travail supplémentaire au laboratoire et un coût supplémentaire de 50 euros, 1 cl de Rosas peut être converti en 1 cl de parfum plus exclusif Rosas $N°2$, qui peut alors être vendu à 350 euros par cl. De façon analogue, on peut en une demi-heure de travail et un coût supplémentaire de 50 euros convertir 1 cl de Jasmine en 1 cl de Jasmine $N°2$, qui peut alors être vendu à 250 euros par cl. Par an, Goodsmell dispose de 6000 heures de travail au laboratoire et peut acheter au plus 2000 litres de matière première. Goodsmell souhaite savoir le planning de production qui procure un gain annuel maximal, sous l'hypothèse que le coût des heures de travail au laboratoire est un coût fixe et que toute la production sera effectivement vendue.

Quel problème d'optimisation doit-on résoudre ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Exercice 3 *(5 points)*
On considère le problème (P) $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ où

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + bx, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (P) est un problème strictement convexe.
2. Déterminer les candidats à minimum local.
3. Y-a-t-il une solution optimale? Justifier votre réponse.
4. Quelle est la valeur optimale?

Exercice 4 *(8,5 points)*
On veut résoudre le problème suivant :

$$(P) \quad \max_{x_1^3 \leq 8x_2 \leq 2x_1^2} (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2.$$

1. Les contraintes sont-elles qualifiées en tout point admissible ? Justifier.
2. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).
3. Montrer que les conditions KKT sont vérifiées pour $x = (2,1)^T$.
4. Déterminer la solution optimale et la valeur optimale du problème (P) sachant que $x = (2,1)^T$ est le seul point admissible qui vérifie les conditions KKT. Vérifier vos résultats à l'aide d'une représentation graphique du problème.