# 1. Quelques rappels et notations

Exercice 1

1. D'abord on note que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq

   - $V^T V = I_n$ (la matrice identité),
   - $V^T A V = D$, et
   - $\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^n \; : \; y = Vx$.

   Du coup

$$\begin{array}{rcccl} A \text{ est DP} & \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{R}^n, y^T A y > 0 & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^n, \left\{ \begin{array}{l} y^T A y > 0 \\ y = Vx \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T V^T A V x > 0 & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T D x > 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 > 0 & \Leftrightarrow & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0. \end{array}$$

2. Soit $\sigma_A$ le spectre de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \text{ est DP } \Rightarrow 0 \notin \sigma_A \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

3. Soit $A = \text{diag}(1, -1)$. Alors $A$ n'est ni SDP

$$(\text{car pour } x = (0,1)^T \text{ on a : } x^T A x = -1 < 0),$$

   ni SDN

$$(\text{car pour } x = (1,0)^T \text{ on a : } x^T A x = 1 > 0).$$

4. Soit $e_i$ le i-ème vecteur canonique. Alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est à la fois SDN et SDP ssi

$$\begin{array}{cl} & \forall y \in \mathbb{R}^n, y^T A y = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = a_{ii} + 2a_{ij} + a_{jj} = 0 \\ \Leftrightarrow & A = 0_n \text{ (la matrice null).} \end{array}$$

Exercice 2 Pour $A = [a_{ij}] \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ on a :

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{ a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \}.$$

On en déduit (en utilisant les dérivées partielles) que

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} = x^T A$$

et

$$\nabla^2 F(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

En utilisant la dérivée directionnelle on a pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} D|_h F(x) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{(x+th)^T A(x+th) - x^T Ax}{t} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\{x^T Ah + h^T Ax + th^T Ah\} = \frac{1}{2}\{x^T Ah + h^T Ax\} \\ &= \frac{1}{2}\{x^T Ah + x^T Ah\} = x^T Ah = \nabla F(x)h, \end{aligned}$$

donc $\nabla F(x) = x^T A$, et

$$D|_h \nabla^T F(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\nabla^T F(x+th) - \nabla^T F(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{A(x+th)-Ax}{t} = Ah = \nabla^2 F(x)h,$$

donc $\nabla^2 F(x) = A$.

Finalement, dans le cas où $A$ n'est pas symétrique on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{1}{2}x^T Ax = \frac{1}{4}\{x^T Ax + x^T Ax\} = \frac{1}{4}\{x^T Ax + (x^T Ax)^T\} = \frac{1}{4}x^T\{A + A^T\}x.$$

Du coup

$$\nabla F(x) = \frac{1}{2}x^T\{A + A^T\} \text{ et } \nabla^2 F(x) = \frac{1}{2}\{A + A^T\}.$$

Exercice 3

1.

$$\begin{aligned} D|_d f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\{(x+td)^T H(x+td) + h(x+td) + \gamma\} - \{x^T Hx + hx + \gamma\}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\{(2x^T H + h)d + td^T Hd\} = (2x^T H + h)d = \nabla f(x)d, \end{aligned}$$

donc $\nabla f(x) = 2x^T H + h$.

$$\begin{aligned} D|_d \nabla^T f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\nabla^T f(x+td) - \nabla^T f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\{2H(x+td) + h^T\} - \{2Hx + h^T\}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\{2Hd\} = 2Hd = \nabla^2 f(x)d, \end{aligned}$$

donc $\nabla^2 f(x) = 2H$.

2.

$$
\begin{aligned}
D|_h f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\{A(x+th)+b\}-\{Ax+b\}}{t} \\
&= Ah = \nabla f(x) h.
\end{aligned}
$$

Par conséquent $\nabla f(x) = A$. Ensuite,

$$
\begin{aligned}
D|_h \nabla^T f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\nabla^T f(x+th)-\nabla^T f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\{A^T\}-\{A^T\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} \equiv 0 = \nabla^T f(x) h.
\end{aligned}
$$

Par conséquent $\nabla^2 f(x) \equiv 0$.

3. Soit $y = Ax+b$. Alors

$$
\begin{aligned}
D|_h f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{h(A(x+th)+b)-h(Ax+b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(y+tAh)-h(y)}{t} \\
&= \nabla h(y) Ah = \nabla f(x) h.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\nabla f(x) = \nabla h(y) A = \nabla h(Ax+b) A.
$$

4.

$$
\begin{aligned}
D|_h g(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(x+th)-g(x)}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{t\to 0} \frac{\{[r_i(x+th)]^2-[r_i(x)]^2\}}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{[r_i(x+th)-r_i(x)]}{t} [r_i(x+th)+r_i(x)] \right\} \\
&= \left\{ 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(x) r_i(x) \right\} h.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\nabla g(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(x) r_i(x).
$$

$$
\begin{aligned}
D|_h \nabla^T g(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(x+th)-g(x)}{t} \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} \lim_{t\to 0} \frac{\nabla^T r_i(x+ht) r_i(x+th) - \nabla^T r_i(x) r_i(x)}{t} \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} \lim_{t\to 0} \frac{[\nabla^T r_i(x+ht) - \nabla^T r_i(x)] r_i(x+th) + \nabla^T r_i(x)[r_i(x+th) - r_i(x)]}{t} \\
&= \left\{ 2\sum_{i=1}^{m} \left[\nabla^2 r_i(x) r_i(x) + \nabla^T r_i(x) \nabla r_i(x)\right] \right\} h.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\nabla^2 g(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \left[\nabla^T r_i(x)\nabla r_i(x) + \nabla^2 r_i(x) r_i(x)\right].
$$

Exercice 4

1. D'abord note que $y \in B(x,r)$ ssi $\|x-y\| \leqslant r$. Soit $z = ty_1 + (1-t)y_2$ avec $y_1, y_2 \in B(x,r)$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors

$$
\begin{aligned}
\|x-z\| = \|x - ty_1 - (1-t)y_2\| &= \|t(x-y_1) + (1-t)(x-y_2)\| \\
&\leqslant |t|\|x-y_1\| + |1-t|\|x-y_2\| = t\|x-y_1\| + (1-t)\|x-y_2\| \\
&\leqslant tr + (1-t)r = r.
\end{aligned}
$$

   On en déduit que $z \in B(x,r)$, donc $B(x,r)$ est un convexe.

2. Soit $z = ty_1 + (1-t)y_2$ avec $y_1, y_2 \in D$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors
   - $z_1 = t(y_1)_1 + (1-t)(y_2)_1 \geqslant 0$ car $(y_1)_1 \geqslant 0$, $(y_2)_1 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$ ;
   - $z_2 = t(y_1)_2 + (1-t)(y_2)_2 \geqslant 0$ car $(y_1)_2 \geqslant 0$, $(y_2)_2 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$ ; et
   - $$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \{t(y_1)_1 + (1-t)(y_2)_1\} + \{t(y_1)_2 + (1-t)(y_2)_2\} \\
&= t\{(y_1)_1 + (y_1)_2\} + (1-t)\{(y_2)_1 + (y_2)_2\} \leqslant t + (1-t) = 1.
\end{aligned}
$$

   On en déduit que $z \in D$, donc $D$ est un convexe.

3. Soit $z = ty_1 + (1-t)y_2$ avec $y_1, y_2 \in D$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors
   - pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $z_i = t(y_1)_i + (1-t)(y_2)_i \geqslant 0$ car $(y_1)_i \geqslant 0$, $(y_2)_i \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$ ; et
   - $$
\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} \{t(y_1)_i + (1-t)(y_2)_i\} = t\sum_{i=1}^{n}(y_1)_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n}(y_2)_i = t + (1-t) = 1.
$$

On en déduit que $z \in D$, donc $D$ est un convexe.

4. - $\mathbb{R}$, $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ ;
   - $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$, avec $-\infty < a < b < \infty$ ;
   - $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$, ou $\emptyset$.

<u>Exercice 5</u>

1. Soit $z = ty_1 + (1-t)y_2$ avec $y_1, y_2 \in D$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$,
$$g_j(z) = g_j(ty_1 + (1-t)y_2) \leqslant tg_j(y_1) + (1-t)g_j(y_2) \leqslant 0,$$
car $tg_j(y_1) \leqslant 0$ et $(1-t)g_j(y_2) \leqslant 0$. On en déduit que $z \in D$, donc $D$ est un convexe.

2. Soit $z = ty_1 + (1-t)y_2$ avec $y_1, y_2 \in D$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors
   - pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i = t(y_1)_i + (1-t)(y_2)_i \geqslant 0$ car $(y_1)_i \geqslant 0$, $(y_2)_i \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$ ;
   - $$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n \{t(y_1)_i + (1-t)(y_2)_i\} = t\sum_{i=1}^n (y_1)_i + (1-t)\sum_{i=1}^n (y_2)_i = t + (1-t) = 1 \text{ ; et}$$
   - $g(z) = g(ty_1 + (1-t)y_2) \leqslant tg(y_1) + (1-t)g(y_2) \leqslant t\rho + (1-t)\rho = \rho$.

   On en déduit que $z \in D$, donc $D$ est un convexe.

3. Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ quelconques. Alors
$$\begin{aligned} g(ty_1 + (1-t)y_2) = \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(ty_1 + (1-t)y_2) &\leqslant \sum_{j=1}^p \{t\mu_j g_j(y_1) + (1-t)\mu_j g_j(y_2)\} \\ &= t\sum_{j=1}^p \mu_j g_j(y_1) + (1-t)\sum_{j=1}^p \mu_j g_j(y_2) = tg(y_1) + (1-t)g(y_2), \end{aligned}$$
donc $g(ty_1 + (1-t)y_2) \leqslant tg(y_1) + (1-t)g(y_2)$ pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in [0,1]$.

<u>Exercice 6</u>

1. Soient $x, y \in C_1 + C_2$. Alors, ils existent $x_1, y_1 \in C_1$ et $x_2, y_2 \in C_2$ telles que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Par conséquent, $\forall \theta \in [0,1]$ :
$$\begin{aligned} \theta x + (1-\theta)y &= \theta(x_1 + x_2) + (1-\theta)(y_1 + y_2) \\ &= [\theta x_1 + (1-\theta)y_1] + [\theta x_2 + (1-\theta)y_2]. \end{aligned}$$
Comme $C_1$ et $C_2$ sont convexes, $\theta x_j + (1-\theta)y_j \in C_j$, $j = 1, 2$. Du coup $[\theta x_1 + (1-\theta)y_1] + [\theta x_2 + (1-\theta)y_2] \in C_1 + C_2$.

2. Soient $x, y \in C_1 \times C_2$. Alors, ils existent $x_1, y_1 \in C_1$ et $x_2, y_2 \in C_2$ telles que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\forall \theta \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} \theta x + (1-\theta) y &= \theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\theta) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta) y_1 \\ \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Comme $C_1$ et $C_2$ sont convexes, $\theta x_j + (1-\theta) y_j \in C_j$, $j = 1, 2$. Du coup $\begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta) y_1 \\ \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \end{pmatrix} \in C_1 \times C_2$.

3. Soient $x, y \in D$. Alors, ils existent $x_1, y_1 \in B_2$ telles que $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} \in C$ et $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} \in C$. Comme $C$ est convexe, on a $\forall \theta \in [0,1]$ : $\begin{pmatrix} \theta x + (1-\theta) y \\ \theta x_1 + (1-\theta) y_1 \end{pmatrix} \in C$ où $\theta x + (1-\theta) y \in B_1$ et $\theta x_1 + (1-\theta) y_1 \in B_2$. Par conséquent, $\theta x + (1-\theta) y \in D$.

4. **(a)** Int($C$) :
   $\forall x, y \in \mathrm{Int}(C)$ il existe $r_{xy} \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $B(x, r_{xy}) \subseteq C$ et $B(y, r_{xy}) \subseteq C$. Comme $C$ est un convexe, on a $\forall \theta \in [0,1]$ et $\forall u \in B \cap B(0,1)$ :

$$\theta x + (1-\theta) y + r_{xy} u = \theta (x + r_{xy} u) + (1-\theta)(y + r_{xy} u) \in C.$$

   Donc $\theta x + (1-\theta) y$ est bien à l'intérieur de $C$.

   **(b)** Clos($C$) :
   $\forall x, y \in \mathrm{Clos}(C)$, il existe des suites $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ d'éléments de $C$ convergeant vers respectivement $x \in \mathrm{Clos}(C)$ et $y \in \mathrm{Clos}(C)$. Alors $\forall x, y \in \mathrm{Clos}(C)$ et $\forall \theta \in [0,1]$ il existe une suite $\{\theta x_k + (1-\theta) y_k\}$ d'éléments de $C$ convergeant vers $\theta x + (1-\theta) y$. Comme Clos($C$) est fermé, $\theta x + (1-\theta) y \in \mathrm{Clos}(C)$.

5. D'abord, notez que $\mathcal{E} = \{x : \| A^{-1}(x - x_0) \|_2 \leq 1\}$. Alors, $\forall x, y \in \mathcal{E}$ et $\forall \theta \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} \| A^{-1}(\theta x + (1-\theta) y - x_0) \|_2 &= \| A^{-1}(\theta (x - x_0) + (1-\theta)(y - x_0) \|_2 \\ &\leq \theta \| A^{-1}(x - x_0) \|_2 + (1-\theta) \| A^{-1}(y - x_0) \|_2 \\ &\leq \theta + (1-\theta) = 1. \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\theta x + (1-\theta) y \in \mathcal{E}$.

6. (Reasonnement par récurrence). L'assertion est vrai pour $k = 2$. Supposons qu'elle est vrai

pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Alors pour $k = n$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i x_i + \theta_n x_n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} x_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i\right) x_n \\
&= \theta y + (1-\theta) x_n
\end{aligned}$$

où $\theta = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \in [0,1]$ et $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} x_i \in C$ car $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} = 1$ et l'hypothèse est vrai pour $k = n-1$. Comme l'hypothèse est aussi vrai pour $k = 2$, $\theta y + (1-\theta) x_n \in C$.

7. ($\Rightarrow$) D'abord notez qu'une droite est un ensemble affine, donc un convexe. Par conséquent, si $C$ est un convexe, alors l'intersection avec une droite est aussi un convexe car l'intersection préserve la convexité.
   ($\Leftarrow$) $\forall x, y \in C$, il existe une droite $D_{x,y}$ telle que $x, y \in D_{x,y}$ et donc $x, y \in C \cap D_{x,y}$. Comme $C \cap D_{x,y}$ est un convexe, on a $\forall \theta \in [0,1]$ : $\theta x + (1-\theta) y \in C \cap D_{x,y}$, donc $\theta x + (1-\theta) y \in C$.

8. $\forall \theta \in [0,1]$ il existe une suite $\{\theta_k\}$ d'éléments de $[0,1]$, obtenu à l'aide de la méthode de dichotomie, convergeant vers $\theta$. Alors $\forall x, y \in C$, $\{\theta_k x + (1-\theta_k) y\}$ est une suite d'éléments de $C$ (grace á la propriété de convexité du point milieu) convergeant vers $\theta x + (1-\theta) y \in C$ (car $C$ est fermé).

Exercice 7

1. $\forall x, y \in C$ et $\forall \theta \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned}
f(\theta x + (1-\theta) y) &= g(h(\theta x + (1-\theta) y)) \\
&\leq g(\theta h(x) + (1-\theta) h(y)) \quad \text{car } h \text{ est convexe et } g \text{ est croissante} \\
&\leq \theta g(h(x)) + (1-\theta) g(h(y)) \quad \text{car } g \text{ est convexe} \\
&= \theta f(x) + (1-\theta) f(y).
\end{aligned}$$

2. ($\Rightarrow$) Soient $\begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \in \text{epi} f$. Alors $\forall \theta \in [0,1]$ :

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \leq \theta r + (1-\theta) s.$$

   Par conséquent,

$$\theta \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} + (1-\theta) \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta x + (1-\theta) y \\ \theta r + (1-\theta) s \end{pmatrix} \in \text{epi} f.$$

   ($\Leftarrow$) $\forall x, y \in C$, $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} \in \text{epi} f$. Comme epi$f$ est convexe, on a $\forall \theta \in [0,1]$ :

$$\theta \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + (1-\theta) \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta x + (1-\theta) y \\ \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \end{pmatrix} \in \text{epi} f.$$

   On en déduit que $f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.

3. Soit $\{x \in C : \quad f(x) \leq r\} =: C_r$. Alors $\forall x, y \in C_r$ et $\forall \theta \in [0,1]$ :
$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \leq \theta r + (1-\theta) r = r.$$
Par conséquent, $\theta x + (1-\theta)y \in C_r$.

Exercice 8 Considérons la fonction $f(x) = x^T A x + b^T x + c$. Alors $\nabla f = 2x^T A + b^T$ et $\nabla^2 f = 2A$. Si $A$ est SDP, alors $\nabla^2 f$ est SDP et $f$ est convexe d'après Théorème 1a). D'après l'exercice précédent (avec $r = 0$), on en déduit que $C$ est convexe.

Exercice 9

1. On calcule d'abord la première derivée partielle :
$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} = \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n-1} \prod_{i=1, i\neq j}^n x_i \\ &= \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n-1} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_j} = \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \frac{1}{x_j} = \frac{f(x)}{n} \cdot \frac{1}{x_j}.\end{aligned}$$
Puis on calcule la deuxième derivée partielle :
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f(x)}{n} \cdot \frac{1}{x_j}\right) = \frac{1}{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} f(x) \cdot \frac{1}{x_j} + \frac{f(x)}{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) \\ &= \frac{f(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{x_j} \cdot \frac{1}{x_k} + \frac{f(x)}{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) = \frac{f(x)}{n^2} \times \left(\frac{1}{x_j} \cdot \frac{1}{x_k} + n \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1})\right).\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\nabla^2 f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right]_{k=1,j=1}^{n,n} = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[\begin{pmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 & \ldots & 1/x_n \end{pmatrix} - n\left[-\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1})\right]_{k=1,j=1}^{n,n}\right].$$
Finalement on note que
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1/x_j^2, & k = j \end{cases}.$$

2. Par définition $f$ est concave si $\forall x \in \ \mathrm{dom} f$, $\nabla^2 f(x)$ est sémi-définie négative, ou encore, si $\forall x \in \ \mathrm{dom} f$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ : $y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0$. Soient $v = (1/x_1 \ \ldots \ 1/x_n)^T$ et $D = n \ \mathrm{diag}(1/x_1^2 \ \ldots \ 1/x_n^2)$. Alors d'après la question précédente
$$\begin{aligned}y^T \nabla^2 f(x) y = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[y^T v \cdot v^T y - y^T D y\right] &= \frac{f(x)}{n^2} \times \left[(y^T v)^2 - y^T D y\right] \\ &= \frac{f(x)}{n^2} \times \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}\right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{x_i^2}\right].\end{aligned}$$

Puis, d'après l'indication (avec $a_i = \frac{y_i}{x_i}$) on a

$$\left[\left(\sum_{i}^{n} \frac{y_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{x_i^2}\right] \leq 0.$$

Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ dom$f$, on en déduit que $y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0$.

3. D'abord on note que $\mathbb{R}^n_{++}$ est un ensemble convexe (c-à.d. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall t \in [0,1]$ : $tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$). La fonction $f$ étant concave, on a

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++},\ \forall t \in [0,1]\ :\ f(tx_1 - (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

De plus, la fonction $g$ étant affine (linéaire), on a

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++},\ \forall t \in [0,1]\ :\ g(tx_1 - (1-t)x_2) = tg(x_1) + (1-t)g(x_2).$$

On en déduit que $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall t \in [0,1]$ :

$$f(tx_1 - (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq t\alpha g(x_1) + (1-t)\alpha g(x_2) = \alpha g(tx_1 + (1-t)x_2),$$

ce qui implique que $tx_1 + (1-t)x_2 \in E$. L'ensemble $E$ est donc convexe.