

Optimisation

Devoir surveillé 9 mars 2021

Durée : 2 heures

Avertissement : Le barème donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (8 pts) Problème de modélisation :

Une raffinerie fabrique du butane, de l'essence, du diesel et du fioul à partir de deux pétroles bruts B1 et B2. Pour élaborer tous ces produits, le raffineur a recours à quatre familles de traitement: la distillation, le reformage, la désulfuration et le craquage catalytique. La distillation s'effectue dans une tour et fournit du butane, du naphta, du gazole brut et des résidus.. Ces produits sont stockés dans des réservoirs avant de subir quelques traitements pour pouvoir être utilisés: le naphta doit subir un réformage, le gazole un traitement de désulfuration et les résidus un processus de craquage (on suppose que ses traitements sont faits sans perte de matière). Le raffineur mélange ensuite les différents produits de façon à satisfaire les besoins du marché en butane, essence, diesel et fioul. Le schéma simplifié de la distillerie est donné dans la Figure 1.

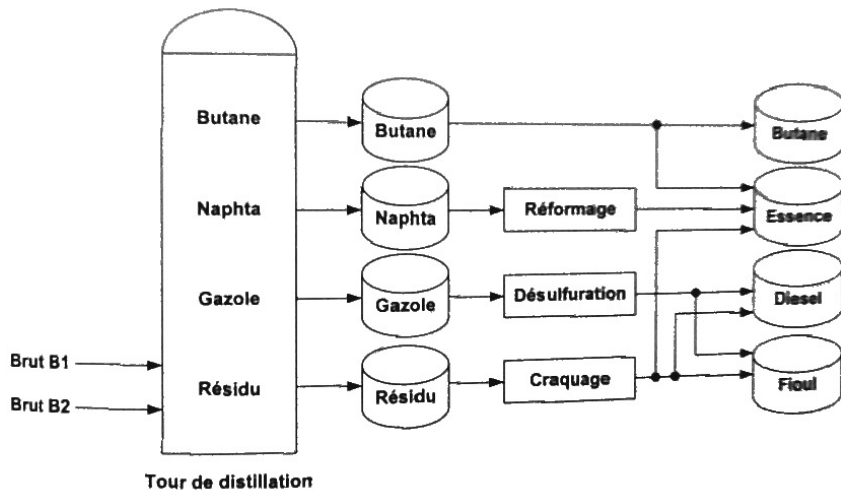


Figure 1: schéma de la raffinerie

Après distillation, le brut B1 fournit 3% de butane, 15% de naphta, 40% de gazole et 15% de résidu. Le brut B2 fournit 5% de butane, 20% de naphta, 35% de gazole et 10% de résidu. L'essence est fabriquée à partir du butane, naphta et résidu; le diesel est obtenu par mélange de gazole et résidu; le fioul contient du gazole et du résidu.

Les réglementations imposent des spécifications pour l'essence (indice d'octane et tension de vapeur) et pour le diesel (pourcentage de soufre). Les spécifications des quatre composants et celles à respecter pour l'essence et le diesel sont résumées dans le tableau suivant

Spécification	Butane	Naphta	Gazole	Résidu	Essence	Diesel
indice d'octane	120	100	-	74	≥ 94	-
Tension de vapeur	60	2,6	-	4,1	$\leq 12,7$	-
Soufre en %	-	-	0,3	1,2	-	$\leq 0,5$

La raffinerie doit produire en un mois au moins 20 000 tonnes de butane, 40 000 tonnes d'essence, 35 000 tonnes de diesel et 50 000 tonnes de fioul. Elle dispose pour cela de 250 000 tonnes de brut B1 et 500 000 tonnes de brut B2 en stock. Les capacités mensuelles de reformage, désulfuration et craquage sont limitées à 30 000, 40 000 et 50 000 tonnes mensuelles. Les coûts de reformage, désulfuration et craquage sont respectivement de 250, 450 et 350 euro par tonne.

Le problème est de déterminer la composition de chaque produit fini (Butane (1), Essence (2), Diesel (3), Fioul (4)) de façon à minimiser les coûts de production de la raffinerie pour le mois de planification tout en respectant les contraintes de capacité et les réglementations en vigueur. Aidez-vous de la Figure 1 pour répondre aux questions suivantes.

1. On énumère les produits de distillation- les composants: Butane (1), Naphta (2), Gazole (3) et Résidu (4). On définit les variables suivantes: pour $i = 1, \dots, 4$ et $j = 1, \dots, 4$

$$y_{ij} = \text{quantité du composant } j \text{ dans le produit fini } i$$

- (a) Quelles variables sont nulles et peuvent donc être éliminées?
- (b) Ecrire la fonction objectif à minimiser.

2. Nous allons maintenant traiter les contraintes. Pour cela on introduit deux nouvelles variables

$$x_i = \text{quantité de pétrole brut } i \text{ consommée, } i = 1, 2$$

- (a) Ecrire les contraintes qui traduisent les limites des stocks, la satisfaction des demandes et les capacités mensuelles de reformatage, désulfuration et craquage.
- (b) Ecrire les contraintes qui traduisent les spécifications à respecter pour l'essence et le diesel.
- (c) Finalement traduire les contraintes qui garantissent que la quantité totale de composant j utilisée dans les divers mélanges n'excède pas la quantité produite par distillation.

Exercice 2(4 pts) On considère sur \mathbb{R}^2 la fonction

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

1. Déterminer les candidats à minimum local.

2. Y-a-t-il des minimums locaux? Justifier votre réponse.
3. La fonction a-t-elle un minimum global? Dans le cas échéant déterminer la (les) solution(s) optimale(s) et la valeur optimale. Justifier vos réponses.

Exercice 3(8 pts) On veut résoudre le problème suivant:

$$\min(6x_1 - 6x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - x_1x_2)$$

$$(P) \quad \begin{cases} \text{s.c.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ce problème a-t-il une solution? Justifier.
2. Pourquoi peut-on appliquer KKT pour le résoudre?
3. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).
4. Montrer que $x^{(1)} = (4, 0)^T$, $x^{(2)} = (0, 3)^T$ et $x^{(3)} = (8/3, 1)^T$ sont des points admissibles vérifiant les trois conditions KKT.
5. En admettant (sans démonstration) qu'il n'existe aucun autre point admissible vérifiant les trois conditions KKT, en déduire la solution optimale et la valeur optimale. Justifier votre réponse.