3. Optimisation sans contraintes

Exercice 1

1. D'après Thm 1(a), f est convexe ssi $\nabla^2 f(x)$ est SDP. Or

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + Cx \Rightarrow \nabla f(x) = x^T A + C \Rightarrow \nabla^2 f(x) = A,$$

donc f est convexe ssi A est SDP.

2. D'après la question précédente et Thm 1(b), f est strictement convexe. En result le problème est strictement convexe car l'ensemble admissible $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ est un convexe, et il admet au plus une solution optimale d'après Thm 3(b). De plus, f est une fonction coercive sur $\mathbb{R}^n$. En effet,

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{\|x\|\to+\infty} x^T Ax = \frac{1}{2}\lim_{\|x\|\to+\infty} x^T U^T \Lambda U x.$$

Soit $y = Ux$, alors $\|y\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, et

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} x^T U^T \Lambda U x = \lim_{\|y\|\to+\infty} y^T \Lambda y = \lim_{\|y\|\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |y_k|^2 = +\infty,$$

car A est DP. D'après Cor 2 le problème admet au moins une solution optimale. On en déduit que le problème possède une et une seule solution optimale $\bar{x}$. Ensuite d'après Thm 3(a) et Thm 6, $\bar{x}$ est solution optimale de f ssi $\nabla f(\bar{x}) = 0$:

$$\bar{x}^T A + C = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}C^T.$$

Finalement on calcule la valeur optimale :

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{x}^T A + C)\bar{x} + \frac{1}{2}C\bar{x} = \frac{1}{2}C\bar{x} = \frac{1}{2}CA^{-1}C^T.$$

Exercice 2

1. On a :

$$\nabla f(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12\tilde{x}_1^3 - 8\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = 0 \\ -4\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{x}_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4\tilde{x}_1^3 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2\tilde{x}_1^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \tilde{x} = 0.$$

2. Puis on a :

$$\nabla^2 f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 24\tilde{x}_1 - 8\tilde{x}_2 & -8\tilde{x}_1 \\ -8\tilde{x}_1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\nabla^2 f(\tilde{x})$ est SDP, mais ne pas DP, donc ne satisfait pas la CSO du Thm 5. On note que f est un polynôme de degré 2 en x_2, et que f s'annule quand

$$x_2 = \frac{4x_1^2 \pm \sqrt{16x_1^4 - 12x_1^4}}{2} = 2x_1^2 \pm x_1^2,$$

donc $f(x) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 3x_1^2)$. On en déduit que $\tilde{x}$ est un point celle de f ($\tilde{x}$ est un maximum local sur le courbe $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2x_1^2\}$ et un minimum local sur le courbe $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$).

3. On note d'abord que
$$\min_{x \in D_t} f(x) \Leftrightarrow \min_{y \in \mathbb{R}} g_t(y)$$
où $g_t(y) = f(y, ty) = 3y^4 - 4ty^3 + t^2y^2$. En result
$$g_t'(y) = 12y^3 - 12ty^2 + 2t^2y \Rightarrow g_t'(0) = 0$$
et
$$g_t''(y) = 36y^2 - 24ty + 2t^2 \Rightarrow g_t''(0) = 2t^2 \geqslant 0.$$
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\tilde{x}$ est minimum local de (P_t). Finalement, puisque $g_0(y) = 3y^4$ est strictement convexe, $\tilde{x}$ est minimum global de (P_0).

Exercice 3 On a :
$$f(x) = -\|x\|^2 \Rightarrow \nabla f(x) = -2x^T \Rightarrow \nabla^2 f(x) = -2I.$$
On en déduit que :

- $\nabla f(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$ et $0 \in D$, donc f ne possède qu'un seul point critique dans D ;
- f est strictement concave sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier sur Ω ;
- $\inf(P) = -1$, or pour tout $x \in \Omega$, $f(x) > -1$, donc (P) n'a pas de solution optimale.

Remarque : On note que (P) est équivalent au problème $\max_{x \in \Omega} \operatorname{dist}(x, p)$ avec $p = 0$, c-à.d., déterminer le point du disque ouvert Ω, centré a l'origin et de rayon 1, le plus eloigné du point p.

Exercice 4

1. On a :
$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1(1 + 3x_1 + 2x_1^2) = 0 \\ x_2 = x_1 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1(1 + x_1)(1 + 2x_1) = 0 \\ x_2 = x_1 \end{array} \right. .$$
On a donc 3 points critiques : $x^{(1)} = (0,0)^T$, $x^{(2)} = (-1,-1)^T$, $x^{(3)} = (-1/2, -1/2)^T$.

2. Puis
$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$
donc

- $x^{(1)}$ est un minimum local car
$$A_1 = \nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ est DP } (\mathrm{Sp}(A_1) = \{3 \pm \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R}^{*+});$$
- $x^{(2)}$ est un minimum local car
$$A_2 = \nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ est DP } (\mathrm{Sp}(A_2) = \{3 \pm \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R}^{*+});$$
- $x^{(3)}$ n'est pas un optimum local car
$$A_3 = \nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas SDP, ni SDN } (\mathrm{Sp}(A_3) = \{(3 \pm \sqrt{17})/2\}).$$

3. On a $f(x^{(1)}) = 0$ et $f(x^{(2)}) = 0$. De plus on note que $f(x)$ est un polynôme de degré 2 en x_2, et que f s'annule quand
$$x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{(-1)}|1 + x_1|) \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \{x^{(1)}, x^{(2)}\}.$$
On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, donc f possède un minimum global en $x = x^{(1)}$ et en $x = x^{(2)}$.

Exercice 5

1. On a :
$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \begin{cases} 2x_k(1 + x_n)^3, & k \neq n \\ 3(1 + x_n)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n, & k = n. \end{cases} .$$
On en déduit que $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ ssi $\tilde{x} = 0$.

2. Puis
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \begin{cases} 2(1 + x_n)^3 \delta_{jk}, & j \neq n, k \neq n \\ 6x_k(1 + x_n)^2, & j = n, k \neq n \\ 6(1 + x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2, & j = k = n \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 f(\tilde{x}) = 2I$$
Comme $\nabla^2 f(\tilde{x})$ est DP, on en déduit que $\tilde{x}$ est un minimum local de f.

3. On a $f(\tilde{x}) = 0$. Or on note que f est un polynôme de degré 3 en x_n à coefficient dominant $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geqslant 0$. On en déduit que f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^n$ ($\lim_{x_n \to -\infty} f(x) = -\infty$ quand $x_i \neq 0$ pour au moins un $i \in \{1, \ldots, n-1\}$), donc f n'a pas de minimum global.

Exercice 6

1. On a $\nabla^2 f(x) = A$, où
$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1 > 0;$$
donc A est définie positive. D'après Théorème 1, f est strictement convexe sur un domaine convexe : $\mathbb{R}^2$. On en déduit que (P) est un problème strictement convexe (voir Définition 3).

2.
$$\nabla f(x) = x^T A + b = (2x_1 + x_2 + 1\ ,\ x_1 + 2x_2),$$

donc
$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

On a donc 1 point critique : $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$.

3. D'après Théorème 6, $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$ est un minimum local de f. De plus, d'après Théorème 3 tout minimum local est minimum global et (P) admet au plus une solution optimale. Donc $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$ est l'unique solution optimale de (P).

4.
$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

<u>Exercice 7</u>

1. On a :
$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1^2 - 4x_1 x_2 = 0 \\ -2x_1^2 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2(3 - 4x_1) = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{array} \right. .$$

On a donc 2 points critiques : $x^{(1)} = (0, 0)^T$, $x^{(2)} = (3/4, 9/16)$.

2. Puis
$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 4x_2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix},$$

donc

- $x^{(1)}$ n'est pas un optimum local car
$$A_1 = \nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est SDP } (\mathrm{Sp}(A_1) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}^+),$$
or pour tout $r > 0$ il existe $y_1, y_2 \in B(x^{(1)}, r)$ tq $f(y_1) < f(x^{(1)}) = 0 < f(y_2)$. En effet, soient $y_1 = (-r/2, 0)$ et $y_2 = (0, r/2)$. Alors $f(y_1) = -r^3/8 < 0$ et $f(y_2) = r^2/4 > 0$;
- $x^{(2)}$ n'est pas un optimum local car
$$A_2 = \nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 9/4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas SDP, ni SDN } (\mathrm{Sp}(A_2) = \{(17 \pm \sqrt{2 \cdot 17^2 - 1})/8\}.$$

3. Comme f n'a pas d'optimums locaux sur $\mathbb{R}^2$, elle n'a pas non plus d'optimums globaux sur $\mathbb{R}^2$.