Cours

Charles Vin

Date

1 Quelques rappels et notation

1.1 Matrice symétrique réelle

Définition 1.1 (Définie positive)**.** A est DP si

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^T Ax > 0.$$

Plus concrètement on diagonalise et regarde le signe des valeurs propres.

Théorème 1.1 (décomposition de Schan)**.** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe U matrice unitaire ($U^T U = I \Leftrightarrow U^{-1} = U^T$) et D matrice diagonale tq*

$$A = U^T DU.$$

$D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $U = u_1, \dots, u_2$

Note. C'est le théorème de la diagonalisation ça !

Remarque. Comme U est inversible on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^n, y = U^T x.$$

Définition 1.2 (Dérivé directionnel)**.** Permet les dérivés de matrice.

$$\nabla f(x) * h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Définition 1.3 (Formule de Lagrange)**.**

1.1.1 Exercise 1 page 3 :

Voir OneNote

f	g	F	∇R
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$f \pm g, f^T g \in \mathbb{R}$	$\nabla f \pm \nabla g, g^T \nabla f + f^T \nabla g \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$fg \in \mathbb{R}^m$	$g \nabla f + f \nabla g \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$	$g \circ f \in \mathbb{R}^p$	$\nabla g(f) \nabla f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Définition 1.4 (Convexité)**.** Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est un **convexe** si

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], (tx + (1 - t)y) \in D.$$

Définition 1.5 (Fonction convexe)**.** Un fonction f est (strictement ou non) convexe sur D si

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Théorème 1.2. *Soit $f : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ alors*

1. *f est convexe* $\Leftrightarrow \forall x \in D : \nabla^2 f(x) estSDP$
2. $\forall x \in D : \nabla^2 f(x)$ *est DP* $\Rightarrow$ *f est strictement convexe*

$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$
$c \in \mathbb{R}^N$	$0 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	
$b^T x \in \mathbb{R}$	$b^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$bx \in \mathbb{R}^n$	$B * I \in S_n(\mathbb{R})$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$Ax \in \mathbb{R}^m$	$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$x^T x$	$2x^T$	$2I \in S_n(\mathbb{R})$
$x^T Ax$	$x^t(A + A^T)$	$A + A^T \in S_n(\mathbb{R})$

Théorème 1.3 (Formule de lagrange)**.** *Soit*

— (P) *un problème d'optimisation à* p *contraintes d'égalités et* q *contraintes d'inégalités*
— $g_i(x) = 0$ *les contraintes d'égalités*
— $h_j(x) \leq 0$ *les contraintes d'inégalités*

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_i h_j(x).$$

On cherche ensuite la borne inférieur de la fonction dual de lagrange (en dérivant)

$$D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{A}} L(x, \lambda, \mu).$$

2 Convexité

Définition 2.1. $f : E \to F$ convexe ssi

$$\forall t \in [0, 1], x, y \in E : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Théorème 2.1 (1.a)**.** f *convexe* $\Leftrightarrow$

— $\nabla^2 f(x)$ *SDP*
— *Strictement convexe* $\Leftrightarrow$ *au plus une solution opti.*

Définition 2.2 (Problème convexe)**.** $\Leftrightarrow$ $f : E \to F$ strictement convexe et E convexe. Souvent $E = \mathbb{R}^n$ qui est convexe.
propriété (thm 2) :

— Tout minimum local est un min globale

3 Optimisation sans contraintes

Théorème 3.1 (Condition Nécessaires d'optimalité)**.**

Théorème 3.2 (Condition Suffisantes d'optimalité)**.**

Exemple 3.1 (Exemple 1,2,3 page 6-7)**.**

Définition 3.1 (Inverse d'une matrice 2x2)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$