Licence 3 MASS S6 – Université de Lille **Année 2017–2018**

Optimisation

Examen 23 mai 2018
Durée : 3 heures

<u>Exercice 1</u> On considère le problème

$$(\mathcal{P}_1)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 11x_1 - 33x_2 + 10.$$

1. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -11 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c = 10.$$

2. Montrer que A est définie positive.

3. Soit $x^{(0)} = (0,0)^T$. Calculer $\{x^{(k)}\}_{k>0}$ en utilisant la méthode de gradient conjugué et arrêter les itérations dès que la suite a convergé. En déduire la solution optimale <u>exacte</u> $\bar{x}$ et la valeur optimale <u>exacte</u> $f(\bar{x})$? *Indication : $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ et $f(\bar{x})$ sont des entiers relatifs.*

<u>Exercice 2</u> Ecrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_2)\quad \begin{array}{rl} \min & -5x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + x_4 = 5 \\ & -x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 4x_1 - x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array}$$

sous forme canonique $(\mathcal{P}_2)_c$ et sous forme standard $(\mathcal{P}_2)_s$.

<u>Exercice 3</u> On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = -4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

2. On admet (sans démonstration) que les bases $\mathcal{B}_j = \{1, j+1\}$, $1 \leq j \leq 3$, ne sont pas réalisables. Déterminer les bases réalisables et vérifier si elle sont dégénérées ou non-dégénérées et si elles satisfont les conditions suffisantes d'optimalité.

3. Le problème de maximisation $(\mathcal{P}_3)$ a-t-il une solution optimale ? Et si on remplace le problème par un problème de minimisation ? Justifier vos réponses.

Exercice 4 Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal et la méthode à deux phases) le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_4) \quad \begin{array}{rl} \min & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Exercice 5 On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_5) \quad \begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 - 4x_4 = 4 \\ & -x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{R} \\ & x_4 \leq 0 \end{array}$$

1. Écrire le dual $(\mathcal{D}_5)$ du problème $(\mathcal{P}_5)$.

2. Étudier l'existence d'une solution optimale de $(\mathcal{P}_5)$ en utilisant les propriétés de la dualité.

Exercice 6 Un entreprise fabrique trois types de produits (A, B et C) qui rapportent un bénéfice unitair de respectivement 300, 400 et 500 euros par pièce. Chacun des trois types de produits doit passer par deux départements de production (X et Y). Dans ces départements il y a respectivement 450 et 350 minutes disponible par jour. Le tableau ci-dessous donne pour chaque produit le nombre de pièces qui peuvent passer par minute dans chaque département. On veut déterminer le plan de fabrication optimal par jour de façon à maximiser les bénéfices (en euros par jour).

	A	B	C
X	3	2	1
Y	1	2	3

1. Modéliser ce problème $(\mathcal{P}_6)$.

2. Résoudre graphiquement le dual $(\mathcal{D}_6)$.

3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$.

4. Quelle est la valeur optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$?