

Cours

Charles Vin

Date

1 Quelques rappels et notation

1.1 Matrice symétrique réelle

Définition 1.1 (Définie positive). A est DP si

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^T A x > 0.$$

Plus concrètement on diagonalise et regarde le signe des valeurs propres.

Théorème 1.1 (décomposition de Schan). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe U matrice unitaire ($U^T U = I \Leftrightarrow U^{-1} = U^T$) et D matrice diagonale tq

$$A = U^T D U.$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad U = u_1, \dots, u_n$$

Note. C'est le théorème de la diagonalisation ça !

Remarque. Comme U est inversible on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^n, y = U^T x.$$

Définition 1.2 (Dérivé directionnel). Permet les dérivés de matrice.

$$\nabla f(x) * h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Définition 1.3 (Formule de Lagrange).

1.1.1 Exercice 1 page 3 :

Voir OneNote

f	g	F	∇R
$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$f \pm g, f^T g \in \mathbb{R}$	$\nabla f \pm \nabla g, g^T \nabla f + f^T \nabla g \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$f g \in \mathbb{R}^m$	$g \nabla f + f \nabla g \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$	$g \circ f \in \mathbb{R}^p$	$\nabla g(f) \nabla f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Définition 1.4 (Convexité). Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est un **convexe** si

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], (tx + (1-t)y) \in D.$$

Définition 1.5 (Fonction convexe). Une fonction f est (strictement ou non) convexe sur D si

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Théorème 1.2. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 alors

1. f est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in D : \nabla^2 f(x)$ est SDP
2. $\forall x \in D : \nabla^2 f(x)$ est DP $\Rightarrow f$ est strictement convexe

$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$
$c \in \mathbb{R}^N$	$0 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	
$b^T x \in \mathbb{R}$	$b^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$bx \in \mathbb{R}^n$	$B * I \in S_n(\mathbb{R})$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$Ax \in \mathbb{R}^m$	$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	$0 \in S_n(\mathbb{R})$
$x^T x$	$2x^T$	$2I \in S_n(\mathbb{R})$
$x^T Ax$	$x^t(A + A^T)$	$A + A^T \in S_n(\mathbb{R})$

Théorème 1.3 (Formule de lagrange). Soit

- (P) un problème d'optimisation à p contraintes d'égalités et q contraintes d'inégalités
- $g_i(x) = 0$ les contraintes d'égalités
- $h_j(x) \leq 0$ les contraintes d'inégalités

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x).$$

On cherche ensuite la borne inférieure de la fonction dual de lagrange (en dérivant)

$$D(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{A}} L(x, \lambda, \mu).$$

2 Convexité

Définition 2.1. $f : E \rightarrow F$ convexe ssi

$$\forall t \in [0, 1], x, y \in E : f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Théorème 2.1 (1.a). f convexe \Leftrightarrow

- $\nabla^2 f(x)$ SDP
- Strictement convexe \Leftrightarrow au plus une solution opti.

Définition 2.2 (Problème convexe). $\Leftrightarrow f : E \rightarrow F$ strictement convexe et E convexe. Souvent $E = \mathbb{R}^n$ qui est convexe.

propriété (thm 2) :

- Tout minimum local est un min globale

3 Optimisation sans contraintes

Théorème 3.1 (Condition Nécessaires d'optimalité).

Théorème 3.2 (Condition Suffisantes d'optimalité).

Exemple 3.1 (Exemple 1,2,3 page 6-7).

Définition 3.1 (Inverse d'une matrice 2x2).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nouveau cours du 07/02

Soit

$$(P) \min f(x)$$

$$S.C \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \\ X \in \Omega \end{cases}$$

3.1 Qualification des contraintes

- On dit que les contraintes sont qualifiées en $X \in \mathcal{A}$ si (au moins) un critère parmi les deux critères (Fromovitz ou Fiacco) est vrai en X
- On dit que les contraintes sont qualifiées en tout point admissible si (au moins) un critère parmi les deux critères (affinité ou Slaten) est vrai.

3.2 CNO

Théorème 3.3. *Si X^* est une solution optimalité de (P) et si les contraintes sont qualifiées en X^* , alors X^* est solution du système KKT*

$$\begin{cases} 3 \text{ condition KKT} \\ X \in \mathcal{A} \end{cases} .$$

4 Résoudre un problème d'optimisation avec contraintes

1. Déterminer les points admissibles où les contraintes **ne sont pas** qualifiées
 - Fiacco :
 - ...
 - ...
 - ...
2. Déterminer les points admissibles qui vérifient les 3 conditions KKT

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \Delta \nabla g(x^*) - M^T \nabla h(x^*) \\ + \text{les autres conditions} \end{cases} .$$

Théorème 4.1 (numéros 6). *Cas particulier : (P) problème convexe \rightarrow Solution du système KKT = solution optimale*