Liste des Tests du cours

Charles Vin

2022

1 Test de Kolmogorov-Smirnov

Conditions

1. Les X_i semblent provenir d'une loi à fonction de répartition continue. $\Rightarrow$ on n'a pas plusieurs fois la même valeur (sauf si celle-ci on était arrondi).

2. Fonctionne $\forall n$: même si n est petit, ce test est pertinent
3. Si $n \geq 100$, on fait un test asymptotique.

Hypothèse

— $H_0 =$ les X_i ont pour fdr. F_X
— $H_1 =$ les X_i n'ont pas pour fdr. F_X

Statistique de test

$$h(F_n, F) = \max_{1 \leq i \leq n} (\max(\left|\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\right|, \left|\frac{i-1}{n} - F(X_{(i)})\right|)).$$

Zone de Rejet

$$\mathcal{R} = \{h(F_n, F_X) \leq h_{1-\alpha}\}.$$

avec F_n fonction de réparation empirique, $h_{1-\alpha}$ le quantile à aller chercher dans la table

Méthode

Pour trouver la valeur de $h(F_n, F_X)$: Faire le grand tableau puis trouver le max. Exemple :

i	1	2	3	4	5
$X_{(i)}$	0.3	0.7	0.9	1.2	1.4
$X_{(i)} - 2$	-1.70	-1.30	-1.10	-0.80	-0.60
$F_0(X_{(i)})$	0.04	0.10	0.14	0.21	0.27
$\frac{i}{n}$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
$\lvert\frac{i}{n} - F_0(X_{(i)})\rvert$	0.01	0.00	0.01	0.01	0.02
$\lvert\frac{i-1}{n} - F_0(X_{(i)})\rvert$	0.04	0.05	0.04	0.06	0.07

Table 1 – Ici le max c'est 0.07 à la dernière case

2 Adéquation à une famille d'exponentielle

Conditions

Hypothèse

Statistique de test

Zone de Rejet

Méthode

3 Adéquation à une loi normale

Conditions

Hypothèse

Statistique de test

Zone de Rejet

Méthode

4 Le test du $\mathcal{X}^2$ d'ajustement

Conditions

1. Les X_i sont à valeur dans un ensemble fini (loi discrète)
2. Test asymptotique : $\forall k \in \{1, \dots, d\}, np_k^{ref}(1 - p_k^{ref}) \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 20$

Hypothèse

$$H_0 = p = p^{ref} \text{ i.e. } \forall k \in \{1, \dots, d\}, p_k = p_k^{ref}$$
$$H_1 = p \neq p^{ref} \text{ i.e. } \exists k \in \{1, \dots, d\} : p_k \neq p_k^{ref}$$

Avec p^{ref} un vecteur fixé à tester (par exemple pour un lancé de dé $(\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6})$)

Statistique de test

$$D(\bar{p_n}, p^{ref}) = n \sum_{k=1}^{d} \frac{(\bar{p_{k,n}} - p_k^{ref})^2}{p_k^{ref}} \rightarrow_{n \to \infty}^{\mathcal{L}} \mathcal{X}^2(d-1).$$

avec

- $N_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i x_k}$
- $\bar{p_{k,n}} = \frac{N_{k,n}}{n}$ les proportions observés

Zone de Rejet

$$\mathcal{R} = \{D(\bar{p_n}, p^{ref}) \geq h_\alpha\}.$$

avec h_α le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d-1)$

Méthode

1. Etape 0 : On vérifie les conditions

$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, n * p_k \geq 5.$$

   C'est la condition de Cochran (1954), il avait testé cas possible en observant l'approximation faites.

2. Etape 1 : On calcule les effectifs et proportions observées : $N_{k,n}$ et $\hat{p}_{k,n}$
3. Etape 2 : Calcul de la statistique de test

$$D = n \sum_{d}^{k=1} \frac{(\hat{p}_{k,n} - p_k)^2}{p_k}.$$

4. Etape 3 : Détermination de la zone de rejet au niveau α. On lit h_α le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{X}^2(d_1)$
5. Etape 4 : Décisions
   — si $D > h_\alpha$, on rejette H_0 (au niveau α).
   — Si $D \leq h_\alpha$ on conserve H_0