Optimisation

Examen 22 mai 2019
Durée : 3 heures

Exercice 1 On veut résoudre le problème $(\mathcal{P}_1)$ $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ avec $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_1^2 + 10$ en utilisant la méthode de gradient à pas optimal au départ du point $x^{(0)} = (1, -2)^T$.

1. Déterminer la direction $d^{(0)}$ de déplacement et le pas optimal ρ_0 dans cette direction. Quel est le nouveau point $x^{(1)}$?

2. Supposons que l'on veut faire une minimisation approchée (recherche linéaire) en utilisant le règle d'Armijo avec paramètres $m = 1/3$ et $M = 3$. Quelles conditions doit vérifier le pas $\tilde{\rho}_0$ définissant le nouvel itéré $\tilde{x}^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{\rho}_0 d^{(0)}$? Vérifier si $\tilde{\rho}_0 = 1/4$ satisfait les conditions.

Exercice 2 Ecrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_4 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0 \end{array}$$

sous forme canonique $(\mathcal{P}_2)_c$ et sous forme standard $(\mathcal{P}_2)_s$.

Exercice 3 On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_3) \quad \begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & -5x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

et les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{2, 3\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{1, 4\}$.

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

2. Pour chaque base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle est dégénérée ou non-dégénérée et si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 4 Résoudre par la méthode du simplexe (en utilisant la règle du plus grand gain marginal et la méthode à deux phases) le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_4) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Exercice 5 On considère le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_5) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 - 4x_4 = 4 \\ & -x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \ x_3 \in \mathbb{R}, \ x_4 \leq 0 \end{array}$$

1. Écrire le dual $(\mathcal{D}_5)$ du problème $(\mathcal{P}_5)$.
2. Étudier l'existence d'une solution optimale de $(\mathcal{P}_5)$ en utilisant les propriétés de la dualité.

Exercice 6 Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Produire une unité de bien necessite:

- 0.5 heures de machine et 2 heures de main d'oeuvre avec la première technique;
- 1.5 heures de machine et 1.5 heures de main d'oeuvre pour la deuxème technique;
- 2 heures de machine et 0.5 heures de main d'oeuvre pour la troisième technique.

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12h et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15 h. L'entreprise cherche à maximiser ses bénéfices, les marges unitaires étant de 3 euros, 4 euros et 5 euros selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

1. Ecrire le programme linéaire $(\mathcal{P}_6)$ que doit résoudre l'entreprise.
2. On considère le sommet $x_1 = 96/15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 66/15$, $x_4 = x_5 = 0$.
   (a) Quelle est la base $\mathcal{B}$ correspondante ?
   (b) Ecrire la fonction objectif en fonction des variables hors base.
   (c) Quel est le vecteur des coûts réduits correspondant à cette base ?
   (d) Utiliser la condition suffisante d'optimalité pour conclure si ce sommet est optimal.
3. Résoudre graphiquement le dual $(\mathcal{D}_6)$.
4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$.
5. Quelle est la valeur optimale du primal $(\mathcal{P}_6)$?