UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2015–2016

Examen 19 mai 2016
Durée : 3 heures

Exercice 1 On considère le polyèdre défini par les inégalités

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lcl} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 13 \\ 3x_2 + x_3 & \geq & 3 \\ x_1 & \leq & 2 \\ x_3 & \leq & 3 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Parmi les points suivants

$$P_1 = (2,1,0)^T,\ P_2 = (2,0,3)^T,\ P_3 = (2,1,1)^T,\ P_4 = (0,5,3)^T,$$

trouver ceux qui sont des sommets et déterminer ceux qui sont dégénérés. Justifier les réponses.

Exercice 2

1. Ecrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_4 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \leq 0 \end{array}$$

   sous forme canonique.

2. Ecrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{rl} \max & -x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.c.} & 3x_1 - 3x_2 \geq -7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

   sous forme standard.

Exercice 3

1. En effectuant une phase d'initialisation, déterminer une base admissible de départ $\mathcal{B}_0$ pour le programme linéaire
$$\begin{array}{rl} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$
.

2. Est-ce que la solution de base $x(\mathcal{B}_0)$ est un sommet dégénéré ou non dégénéré ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & -5x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

et les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{2, 3\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{1, 4\}$. Pour chaque base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 5 Ecrire le dual du problème suivant

$$\begin{array}{rl} \min & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 4 \\ & x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercice 6 Une entreprise fabrique trois produits P1, P2 et P3 qui doivent subir une opération sur deux machines M1 et M2. Le nombre de pièces que les machines peuvent modifier par heure ainsi que le temps disponible de chaque machine et le prix de vente unitaire sont indiqués dans le tableau suivant :

	M1 (en pièces par heure)	M2 (en pièces par heure)	prix de vente (en euros par pièce)
P1	8	4	10
P2	5	5	12
P3	2	4	20
temps disponibles (en heures)	25	20	

1. Ecrire le programme linéaire ($\mathcal{P}$) qui permet de déterminer un plan optimal de fabrication de façon à maximiser les bénéfices.
2. Ecrire le dual ($\mathcal{D}$) du problème ($\mathcal{P}$).
3. Résoudre graphiquement le dual ($\mathcal{D}$).
4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déterminer la solution optimale du primal ($\mathcal{P}$).
5. Quelle est la valeur optimale du primal ($\mathcal{P}$) ?