Corrigé détaillé de l'exercice 15

Exercice 15

1.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \min & 8x_1 + 5x_2 + 9x_3 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 17 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \max & 7y_1 + 17y_2 \\ \text{s.c.} & 3y_1 + 3y_2 \leq 8 \\ & 3y_1 + 6y_2 \leq 5 \\ & 4y_1 + 2y_2 \leq 9 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Le problème dual s'écrit sous forme standard :

$$(\mathcal{D})_s \quad \begin{array}{ll} \max & 7y_1 + 17y_2 \\ \text{s.c.} & 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 8 \\ & 3y_1 + 6y_2 + y_4 = 5 \\ & 4y_1 + 2y_2 + y_5 = 9 \\ & y_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

- $\mathcal{B}_0 = \{3, 4, 5\}$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	3	3	1	0	0	8
y_4	3	6	0	1	0	5
y_5	4	2	0	0	1	9
	7	17	0	0	0	0

- $\mathcal{B}_1 = \{3, 2, 5\}$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	$3/2$	0	1	$-1/2$	0	$11/2$
y_2	$1/2$	1	0	$1/6$	0	$5/6$
y_5	3	0	0	$-1/3$	1	$22/3$
	$-3/2$	0	0	$-17/6$	0	$85/6$

  Solution optimale : $\bar{y}^T = (0, 5/6, 11/2, 0, 22/3)$
  Valeur optimale : $85/6$

3. D'après question 2. et le théorème de dualité, la valeur optimale du primal vaut $85/6$. Puis, d'après le théorème des écarts complémentaires,

   - $\bar{y}_2 > 0 \Rightarrow 3\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 = 17$
   - $\bar{y}_3 > 0$ (la première contrainte de $(\mathcal{D})$ est non active) $\Rightarrow \bar{x}_1 = 0$
   - $\bar{y}_5 > 0$ (la troisième contrainte de $(\mathcal{D})$ est non active) $\Rightarrow \bar{x}_3 = 0$,

   donc $\bar{x}^T = (0, 17/6, 0)$.
   Vérification : $8\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 + 9\bar{x}_3 = 0 + 5 \times 17/6 + 0 = 85/6$.