UFR de Mathématiques Pures et Appliquées USTL

Licence S6 Parcours MASS

Optimisation– année 2015–2016

Devoir surveillé 7 mars 2016
Corrigée

Exercice 1 On considère la moyenne géometrique

$$f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \qquad \text{dans } \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i > 0, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

1. Montrer que la matrice hessienne peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^2 f(x) = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[\begin{pmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 & \ldots & 1/x_n \end{pmatrix} - n \times \begin{pmatrix} 1/x_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1/x_n^2 \end{pmatrix} \right].$$

Corrigée : On calcule d'abord la première derivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} x_i \\ &= \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{x_j} = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \frac{1}{x_j} = \frac{f(x)}{n} \cdot \frac{1}{x_j}. \end{aligned}$$

Puis on calcule la deuxième derivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{f(x)}{n} \cdot \frac{1}{x_j}\right) = \frac{1}{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{x_j} + \frac{f(x)}{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) \\ &= \frac{f(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{x_j} \cdot \frac{1}{x_k} + \frac{f(x)}{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) = \frac{f(x)}{n^2} \times \left(\frac{1}{x_j} \cdot \frac{1}{x_k} + n \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1})\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\nabla^2 f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right]_{k=1,j=1}^{n,n} = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[\begin{pmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 & \ldots & 1/x_n \end{pmatrix} - n \left[-\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1})\right]_{k=1,j=1}^{n,n} \right].$$

Finalement on note que

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^{-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1/x_j^2, & k = j \end{cases}.$$

2. Montrer que f est concave. *Indication : On utilisera la propriété (sans démonstration) que* $\forall (\begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_n \end{array})^T \in \mathbb{R}^n$, $n\sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \geq 0$.

Corrigée : Par définition f est concave si $\forall x \in \mathrm{dom} f$, $\nabla^2 f(x)$ est sémi-définie négative, ou encore, si $\forall x \in \mathrm{dom} f$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$: $y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0$. Soient $v = (1/x_1 \ \dots \ 1/x_n)^T$ et $D = n \ \mathrm{diag}(1/x_1^2 \ \dots \ 1/x_n^2)$. Alors d'après la question précédente

$$y^T \nabla^2 f(x) y = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[y^T v \cdot v^T y - y^T D y\right] = \frac{f(x)}{n^2} \times \left[(y^T v)^2 - y^T D y\right]$$
$$= \frac{f(x)}{n^2} \times \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{x_i^2}\right].$$

Puis, d'après l'indication (avec $a_i = \frac{y_i}{x_i}$) on a

$$\left[\left(\sum_i \frac{y_i}{x_i}\right)^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{x_i^2}\right] \leq 0.$$

Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{dom} f$, on en déduit que $y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0$.

3. On considère maintenant la moyenne arithmétique $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ et on choisit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n_{++} \ : \ f(x) \geq \alpha g(x)\}$ est un convexe.

Corrigée : D'abord on note que $\mathbb{R}^n_{++}$ est un ensemble convexe (c-à.d. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall t \in [0,1]$: $tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$). La fonction f étant concave, on a

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++},\ \forall t \in [0,1] \ : \ f(tx_1 - (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

De plus, la fonction g étant affine (linéaire), on a

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_{++},\ \forall t \in [0,1] \ : \ g(tx_1 - (1-t)x_2) = tg(x_1) + (1-t)g(x_2).$$

On en déduit que $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall t \in [0,1]$:

$$f(tx_1 - (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq t\alpha g(x_1) + (1-t)\alpha g(x_2) = \alpha g(tx_1 + (1-t)x_2),$$

ce qui implique que $tx_1 + (1-t)x_2 \in E$. L'ensemble E est donc convexe.

Exercice 2 Problème de modélisation:

Rosas et Jasmine sont deux qualités de parfum commercialisées par la société Goodsmell. La matière première de base nécessaire pour leur production peut être achetée dans une autre entreprise chimique à 200 euros par litre. Avant que cette matière puisse être utilisée, elle doit préalablement subir un certain nombre d'opérations au laboratoire de Goodsmell, ce qui nécessite 2 heures de travail par litre de cette substance. A partir d'un litre de matière première, on peut produire 20 cl Rosas $N°1$ et 24 cl Jasmine $N°1$. Le prix de vente de ces parfums est de l'ordre de 120 euros et 100 euros par cl pour respectivement Rosas et Jasmine. Grâce à une heure de travail supplémentaire au laboratoire et un coût supplémentaire de 50 euros, 1 cl de Rosas peut être converti en 1 cl de parfum plus exclusif Rosas $N°2$, qui peut alors être vendu à 350 euros par cl. De façon analogue, on peut en une demi-heure de travail et un coût supplémentaire de 50 euros convertir 1 cl de Jasmine en 1 cl de Jasmine $N°2$, qui peut alors être vendu à 250 euros par cl. Par an, Goodsmell dispose de 6000 heures de travail au laboratoire et peut acheter au plus 2000 litres de matière première. Goodsmell souhaite savoir le planning de production qui procure un gain annuel maximal, sous l'hypothèse que le coût des heures de travail au laboratoire est un coût fixe et que toute la production sera effectivement vendue.

Quel problème d'optimisation doit-on résoudre ? Commencer par définir les variables qui interviennent.

Corrigée : Définisons d'abord les variables qui interviennent :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{nombre de cl Rosas } N°1 \text{ que Goodsmell produit par an}\\
x_2 &= \text{nombre de cl Jasmine } N°1 \text{ que Goodsmell produit par an}\\
x_3 &= \text{nombre de cl Rosas } N°2 \text{ que Goodsmell produit par an}\\
x_4 &= \text{nombre de cl Jasmine } N°2 \text{ que Goodsmell produit par an}\\
x_5 &= \text{nombre de litres de matière première que Goodsmell achète par an}
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
\text{le gain annuel } = &\text{ le bénéfice annuel par la vente des parfums}\\
&- \text{ le coût supplémentaire des convertissements}\\
&- \text{ le coût d'achat de matière première,}
\end{aligned}$$

la fonction objective devient

$$\begin{aligned}
f(x) &= (120x_1 + 100x_2 + 350x_3 + 250x_4) - (50x_3 + 50x_4) - 200x_5\\
&= 120x_1 + 100x_2 + 300x_3 + 200x_4 - 200x_5.
\end{aligned}$$

Puis on peut déduire 5 contraintes d'(in-)égalités :

1. Goodsmell peut acheter au plus 2000 litres de matière première, donc

$$x_5 \leq 2000.$$

2. Goodsmell dispose de 6000 heures de travail au laboratoire. Sachant que
   - la matière première doit préalablement subir un certain nombre d'opérations, ce qui nécessite 2 heures de travail par litre;
   - le convertissement d'un cl Rosas $N°1$ en 1 cl Rosas $N°2$ nécessite 1 heure;
   - le convertissement d'un cl Jasmine $N°1$ en 1 cl Jasmine $N°2$ nécessite 0.5 heure;

   il faut que
   $$x_3 + 0.5x_4 + 2x_5 \leq 6000.$$
3. A partir d'un litre de matière première, on peut produire 20 cl Rosas, donc
   $$x_1 + x_3 = 20x_5.$$
4. A partir d'un litre de matière première, on peut produire 24 cl Jasmine, donc
   $$x_2 + x_4 = 24x_5.$$
5. Les variables ne peuvent pas être négatives, donc il faut que
   $$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Le problème d'optimisation devient donc

$$\begin{array}{ll} \max & 120x_1 + 100x_2 + 300x_3 + 200x_4 - 200x_5 \\ s.c. & x_1 + x_3 - 20x_5 = 0 \\ & x_2 + x_4 - 24x_5 = 0 \\ & x_5 - 2000 \leq 0 \\ & x_3 + 0.5x_4 + 2x_5 - 6000 \leq 0 \\ & -x_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

Exercice 3 On considère le problème (P) $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ où

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + bx, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (P) est un problème strictement convexe.

   Corrigée : On a $\nabla^2 f(x) = A$, où

   $$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1 > 0;$$

   donc A est définie positive. D'après Théorème 1, f est strictement convexe sur un domaine convexe : $\mathbb{R}^2$. On en déduit que (P) est un problème strictement convexe (voir Définition 3).

2. Déterminer les candidats à minimum local.

   Corrigée :

   $$\nabla f(x) = x^T A + b = (2x_1 + x_2 + 1\ ,\ x_1 + 2x_2),$$

   donc

   $$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

   On a donc 1 point critique : $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$.

3. Y-a-t-il une solution optimale ? Justifier votre réponse.

   Corrigée : D'après Théorème 6, $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$ est un minimum local de f. De plus, d'après Théorème 3 tout minimum local est minimum global et (P) admet au plus une solution optimale. Donc $\bar{x} = \frac{1}{3}(-2, 1)^T$ est l'unique solution optimale de (P).

4. Quelle est la valeur optimale ?

   Corrigée :

   $$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4 On veut résoudre le problème suivant :

$$(P) \quad \max_{x_1^3 \le 8x_2 \le 2x_1^2} (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2.$$

1. Les contraintes sont-elles qualifiées en tout point admissible ? Justifier.

   Corrigée : On a deux contraintes d'inégalités $h_1(x_1,x_2) = x_1^3 - 8x_2 \le 0$ et $h_2(x_1,x_2) = 8x_2 - 2x_1^2 \le 0$. D'après Fiacco-McCormick les contraintes sont qualifiées en un point admissible $x = (x_1,x_2)^T$ ssi les gradients de toutes les contraintes saturées en x sont linéairement indépendants. Calculons les gradients de h_1 et h_2 :

   $$\nabla h_1(x_1,x_2) = (3x_1^2, -8) \quad \text{et} \quad \nabla h_2(x_1,x_2) = (-4x_1, 8).$$

   Les contraintes sont certainement qualifiées en x si aucune contrainte est saturée en x. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $\nabla h_1(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et $\nabla h_2(x_1,x_2) \neq (0,0)$, on en déduit que les contraintes sont aussi qualifiées en x s'il n'y a qu'une seule contrainte saturée. Finalement on a

   $$\begin{cases} h_1(x_1,x_2) = 0 \\ h_2(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2) \in \{(0,0),\ (2,1)\}.$$

   Pour $(x_1,x_2) = (2,1)$ on a

   $$\alpha \nabla h_1(2,1) + \beta \nabla h_2(2,1) = \alpha(12,-8) + \beta(-8,8) = (12\alpha - 8\beta, -8\alpha + 8\beta)$$

   et

   $$(12\alpha - 8\beta, -8\alpha + 8\beta) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = (0,0).$$

   Les gradients sont donc linéairement indépendent en $(2,1)$ ce qui implique que les contraintes sont qualifiées en $(2,1)$. Par contre, pour $(x_1,x_2) = (0,0)$ et $(\alpha,\beta) = (1,1) \neq (0,0)$ on a

   $$\nabla h_1(0,0) + \nabla h_2(0,0) = (0,-8) + (0,8) = (0,0).$$

   Donc les gradients ne sont pas linéairement indépendent en $(0,0)$, ce qui implique que les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0,0)$.

2. Ecrire les conditions KKT pour le problème (P).

   Corrigée : D'abord on note que le problème (P) est équivalent à

   $$(P') \ -\min_{x_1^3 \le 8x_2 \le 2x_1^2} -(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2.$$

On applique maintenant le théorème KKT au problème (P') : La fonction objective est $f(x_1, x_2) = -(x_1-1)^2-(x_2-1)^2$ et les contraintes d'(in-)égalités sont $h_1(x_1, x_2) = x_1^3-8x_2 \leq 0$ et $h_2(x_1, x_2) = 8x_2 - 2x_1^2 \leq 0$. La lagrangienne est donc

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) &= f(x_1, x_2) - \mu_1 h_1(x_1, x_2) - \mu_2 h_2(x_1, x_2) \\ &= -(x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 - \mu_1(x_1^3 - 8x_2) - \mu_2(8x_2 - 2x_1^2). \end{aligned}$$

Alors les conditions KKT deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1-1) - 3\mu_1 x_1^2 + 4\mu_2 x_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_2-1) + 8\mu_1 - 8\mu_2 = 0 \\ \mu_1 \leq 0, \ \mu_2 \leq 0 \\ \mu_1 h_1(x_1, x_2) = \mu_1(x_1^3 - 8x_2) = 0 \\ \mu_2 h_2(x_1, x_2) = \mu_2(8x_2 - 2x_1^2) = 0 \end{cases}.$$

3. Montrer que les conditions KKT sont vérifiées pour $x = (2, 1)^T$.

Corrigée : Pour $(x_1, x_2) = (2, 1)$ on a bien $\mu_1 h_1(2, 1) = 0$ et $\mu_2 h_2(2, 1) = 0$ car $h_1(2, 1) = 0 = h_2(2, 1)$. Il reste donc à démontrer qu'il existe $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$ tels que $\nabla_x L(2, 1, \mu_1, \mu_2) = (0, 0)$. On a

$$\begin{aligned} \nabla_x L(2, 1, \mu_1, \mu_2) = (0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} L(2, 1, \mu_1, \mu_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(2, 1, \mu_1, \mu_2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 12\mu_1 + 8\mu_2 = 0 \\ 8\mu_1 - 8\mu_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 4\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \mu_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = -\frac{1}{2} < 0. \end{aligned}$$

4. Déterminer la solution optimale et la valeur optimale du problème (P) sachant que $x = (2, 1)^T$ est le seul point admissible qui vérifie les conditions KKT. Vérifier vos résultats à l'aide d'une représentation graphique du problème.

Corrigée : Les candidats à optimum sont $x = (0, 0)^T$ (car les contraintes ne sont pas qualifiées en $(0, 0)^T$) et $x = (2, 1)^T$ (car c'est le seul point admissible qui satisfait les conditions KKT). Soit $F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$. Alors $F(0, 0) = 2$ et $F(2, 1) = 1 < 2$. La solution optimale est donc $x = (0, 0)^T$ et la valeur optimale est 2. Notez que pour $k > 0$ constante, $F(x_1, x_2) = k^2$ est l'équation cartisienne d'un cercle à centre $(1, 1)$ et rayon k. La solution optimale de (P) est donc le point le plus éloigné du point $(1, 1)$ et la valeur optimale de (P) est la distance en carrée.