Département de Mathématiques

L3 MIASH **Année 2021-2022**

Tables statistiques

Table des matières

1 Loi normale standard **2**

2 Lois du Khi-deux **5**

3 Lois de Student **7**

4 Lois de Fisher **9**

5 Loi exponentielle **14**

6 Loi géométrique **15**

7 Loi de Poisson **15**

8 Loi binomiale **16**

9 Test du signe et rang **19**

10 Test de la somme des rangs **20**

11 Test de Kolmogorov Smirnov à un échantillon **22**

12 Test de Kolmogorov Smirnov à deux échantillons **27**

1 Loi normale standard

La table de la page 3 donne les valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Rappelons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

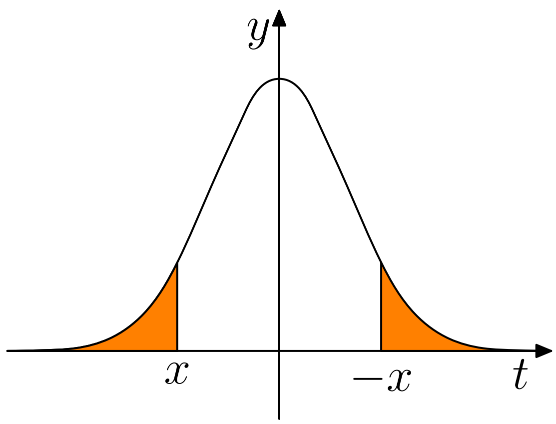
Il n'y a pas d'expression analytique pour les primitives de la densité gaussienne et on ne sait calculer cette intégrale que numériquement. Pour en déduire les valeurs de la f.d.r d'une v.a. Y de loi gaussienne quelconque $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, on utilise le fait que $(Y-m)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, d'où

$$P(Y \leq y) = P\big(\sigma^{-1}(Y-m) \leq \sigma^{-1}(y-m)\big) = \Phi\big(\sigma^{-1}(y-m)\big).$$

La première table donne les valeurs de $\Phi(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, on utilise la relation

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

qui résulte de la parité de la densité gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.
Exemple : pour $x = -1,8$, on trouve : $\Phi(x) = 1 - 0,9641 = 0,0359$.

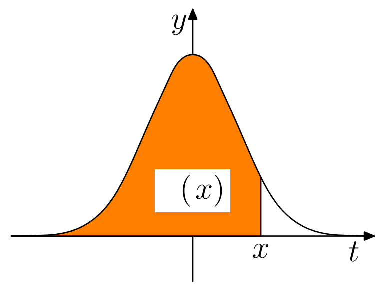


La seconde table donne les valeurs de $\Phi^{-1}(q)$ pour $q \geq 0,5$. Lorsque $q \leq 0.5$, on utilise la relation $\Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1-q)$.
Pour les « très grandes valeurs de x », (i.e. $|x| \geq 4$), on dispose du résultat suivant qui donne une évaluation de la « queue » de la loi normale.
Pour tout $x > 0$, on a l'encadrement :

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Avec le logiciel `R` : si $X \sim \mathcal{N}(m,s^2)$ alors `dnorm(x,a,b)` retourne la densité $f(x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x) = \phi(x)$ est donnée par `pnorm(x,a,b)`. La commande `qnorm(q,a,b)` renvoie le quantile d'ordre q.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 4
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 7	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 2	0,715 6	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 6	0,738 9	0,742 1	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 3	0,773 4	0,776 4	0,779 3	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 9	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 4	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 2
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 7	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 3	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 3	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 5	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 8	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 4	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 5	0,989 8	0,990 1	0,990 3	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 4	0,992 6	0,992 8	0,993 0	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 4	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 8	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Table pour les grandes valeurs de x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Phi(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Table des valeurs de Φ^{-1}, fonction quantile de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$

q	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,5	0	0,002 5	0,005	0,007 5	0,01	0,012 5	0,015	0,017 5	0,020 1	0,022 6
0,51	0,025 1	0,027 6	0,030 1	0,032 6	0,035 1	0,037 6	0,040 1	0,042 6	0,045 1	0,047 6
0,52	0,050 2	0,052 7	0,055 2	0,057 7	0,060 2	0,062 7	0,065 2	0,067 7	0,070 2	0,072 8
0,53	0,075 3	0,077 8	0,080 3	0,082 8	0,085 3	0,087 8	0,090 4	0,092 9	0,095 4	0,097 9
0,54	0,100 4	0,103	0,105 5	0,108	0,110 5	0,113	0,115 6	0,118 1	0,120 6	0,123 1
0,55	0,125 7	0,128 2	0,130 7	0,133 2	0,135 8	0,138 3	0,140 8	0,143 4	0,145 9	0,148 4
0,56	0,151	0,153 5	0,156	0,158 6	0,161 1	0,163 7	0,166 2	0,168 7	0,171 3	0,173 8
0,57	0,176 4	0,178 9	0,181 5	0,184	0,186 6	0,189 1	0,191 7	0,194 2	0,196 8	0,199 3
0,58	0,201 9	0,204 5	0,207	0,209 6	0,212 1	0,214 7	0,217 3	0,219 8	0,222 4	0,225
0,59	0,227 5	0,230 1	0,232 7	0,235 3	0,237 8	0,240 4	0,243	0,245 6	0,248 2	0,250 8
0,6	0,253 3	0,255 9	0,258 5	0,261 1	0,263 7	0,266 3	0,268 9	0,271 5	0,274 1	0,276 7
0,61	0,279 3	0,281 9	0,284 5	0,287 1	0,289 8	0,292 4	0,295	0,297 6	0,300 2	0,302 9
0,62	0,305 5	0,308 1	0,310 7	0,313 4	0,316	0,318 6	0,321 3	0,323 9	0,326 6	0,329 2
0,63	0,331 9	0,334 5	0,337 2	0,339 8	0,342 5	0,345 1	0,347 8	0,350 5	0,353 1	0,355 8
0,64	0,358 5	0,361 1	0,363 8	0,366 5	0,369 2	0,371 9	0,374 5	0,377 2	0,379 9	0,382 6
0,65	0,385 3	0,388	0,390 7	0,393 4	0,396 1	0,398 9	0,401 6	0,404 3	0,407	0,409 7
0,66	0,412 5	0,415 2	0,417 9	0,420 7	0,423 4	0,426 1	0,428 9	0,431 6	0,434 4	0,437 2
0,67	0,439 9	0,442 7	0,445 4	0,448 2	0,451	0,453 8	0,456 5	0,459 3	0,462 1	0,464 9
0,68	0,467 7	0,470 5	0,473 3	0,476 1	0,478 9	0,481 7	0,484 5	0,487 4	0,490 2	0,493
0,69	0,495 9	0,498 7	0,501 5	0,504 4	0,507 2	0,510 1	0,512 9	0,515 8	0,518 7	0,521 5
0,7	0,524 4	0,527 3	0,530 2	0,533	0,535 9	0,538 8	0,541 7	0,544 6	0,547 6	0,550 5
0,71	0,553 4	0,556 3	0,559 2	0,562 2	0,565 1	0,568 1	0,571	0,574	0,576 9	0,579 9
0,72	0,582 8	0,585 8	0,588 8	0,591 8	0,594 8	0,597 8	0,600 8	0,603 8	0,606 8	0,609 8
0,73	0,612 8	0,615 8	0,618 9	0,621 9	0,625	0,628	0,631 1	0,634 1	0,637 2	0,640 3
0,74	0,643 3	0,646 4	0,649 5	0,652 6	0,655 7	0,658 8	0,662	0,665 1	0,668 2	0,671 3
0,75	0,674 5	0,677 6	0,680 8	0,684	0,687 1	0,690 3	0,693 5	0,696 7	0,699 9	0,703 1
0,76	0,706 3	0,709 5	0,712 8	0,716	0,719 2	0,722 5	0,725 7	0,729	0,732 3	0,735 6
0,77	0,738 8	0,742 1	0,745 4	0,748 8	0,752 1	0,755 4	0,758 8	0,762 1	0,765 5	0,768 8
0,78	0,772 2	0,775 6	0,779	0,782 4	0,785 8	0,789 2	0,792 6	0,796 1	0,799 5	0,803
0,79	0,806 4	0,809 9	0,813 4	0,816 9	0,820 4	0,823 9	0,827 4	0,831	0,834 5	0,838 1
0,8	0,841 6	0,845 2	0,848 8	0,852 4	0,856	0,859 6	0,863 3	0,866 9	0,870 5	0,874 2
0,81	0,877 9	0,881 6	0,885 3	0,889	0,892 7	0,896 5	0,900 2	0,904	0,907 8	0,911 6
0,82	0,915 4	0,919 2	0,923	0,926 9	0,930 7	0,934 6	0,938 5	0,942 4	0,946 3	0,950 2
0,83	0,954 2	0,958 1	0,962 1	0,966 1	0,970 1	0,974 1	0,978 2	0,982 2	0,986 3	0,990 4
0,84	0,994 5	0,998 6	1,002 7	1,006 9	1,011	1,015 2	1,019 4	1,023 7	1,027 9	1,032 2
0,85	1,036 4	1,040 7	1,045	1,049 4	1,053 7	1,058 1	1,062 5	1,066 9	1,071 4	1,075 8
0,86	1,080 3	1,084 8	1,089 3	1,093 9	1,098 5	1,103 1	1,107 7	1,112 3	1,117	1,121 7
0,87	1,126 4	1,131 1	1,135 9	1,140 7	1,145 5	1,150 3	1,155 2	1,160 1	1,165	1,17
0,88	1,175	1,18	1,185	1,190 1	1,195 2	1,200 4	1,205 5	1,210 7	1,216	1,221 2
0,89	1,226 5	1,231 9	1,237 2	1,242 6	1,248 1	1,253 6	1,259 1	1,264 6	1,270 2	1,275 9
0,9	1,281 6	1,287 3	1,293	1,298 8	1,304 7	1,310 6	1,316 5	1,322 5	1,328 5	1,334 6
0,91	1,340 8	1,346 9	1,353 2	1,359 5	1,365 8	1,372 2	1,378 7	1,385 2	1,391 7	1,398 4
0,92	1,405 1	1,411 8	1,418 7	1,425 5	1,432 5	1,439 5	1,446 6	1,453 8	1,461 1	1,468 4
0,93	1,475 8	1,483 3	1,490 9	1,498 5	1,506 3	1,514 1	1,522	1,530 1	1,538 2	1,546 4
0,94	1,554 8	1,563 2	1,571 8	1,580 5	1,589 3	1,598 2	1,607 2	1,616 4	1,625 8	1,635 2
0,95	1,644 9	1,654 6	1,664 6	1,674 7	1,684 9	1,695 4	1,706	1,716 9	1,727 9	1,739 2
0,96	1,750 7	1,762 4	1,774 4	1,786 6	1,799 1	1,811 9	1,825	1,838 4	1,852 2	1,866 3
0,97	1,880 8	1,895 7	1,911	1,926 8	1,943 1	1,96	1,977 4	1,995 4	2,014 1	2,033 5
0,98	2,053 7	2,074 9	2,096 9	2,120 1	2,144 4	2,170 1	2,197 3	2,226 2	2,257 1	2,290 4
0,99	2,326 3	2,365 6	2,408 9	2,457 3	2,512 1	2,575 8	2,652 1	2,747 8	2,878 2	3,090 2

2 Lois du Khi-deux

La table de la page 6 donne pour X_d de loi $\chi^2(d)$ et certaines valeurs courantes de la probabilité q, la valeur du réel x_q tel que

$$P(X_d \leq x_q) = q.$$

C'est donc une table de *quantiles* (d'ordre q) de la loi du χ^2.

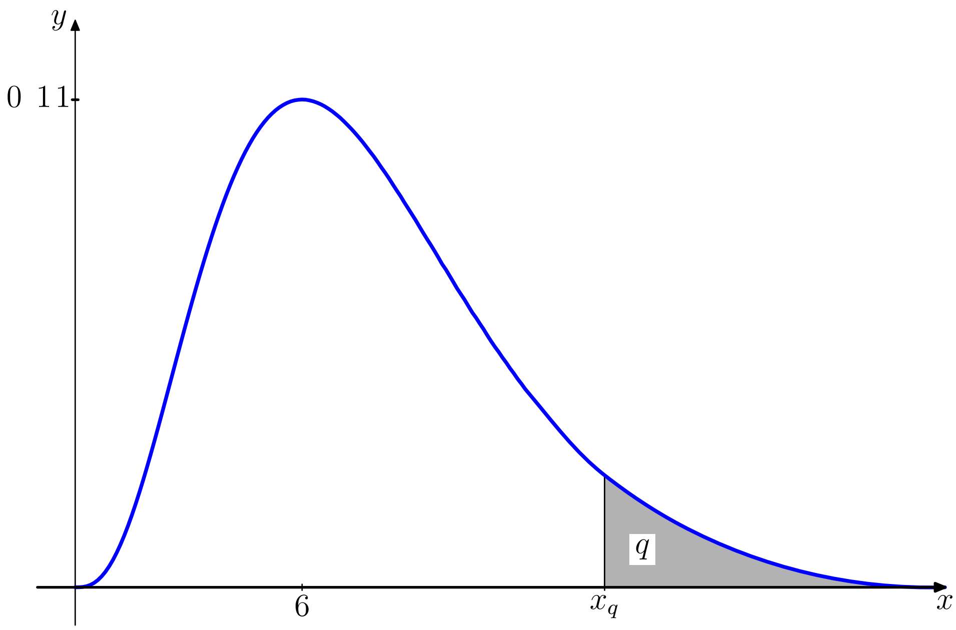


FIGURE 1 – Graphe de la densité d'une loi $\chi^2(8)$

Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des variables i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$Y = X_1^2 + \ldots + X_d^2$$

suit une loi du Khi-deux à d degrés de liberté.

On rappelle que la loi du Khi-deux à d degrés de liberté a pour densité

$$f_d(x) = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})} x^{\frac{d}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad \text{où} \quad \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{d}{2}-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Pour $d = 1$, les trois premières valeurs données par la table sont inférieures à 10^{-3}. Des valeurs plus précises sont $x_{0,999} = 16.10^{-7}$, $x_{0,995} = 393.10^{-7}$, $x_{0,99} = 1571.10^{-7}$.

On rappelle que si X_d suit une loi du Khi-deux à d degrés de liberté, alors

$$\mathbb{E}(X_d) = d \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_d) = 2d.$$

D'autre part, $\sqrt{2X_d} - \sqrt{2d-1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand d tend vers $+\infty$ (ce résultat est utile pour obtenir une valeur approchée des quantiles de la loi $\chi^2(d)$ pour les valeurs de $d > 30$).

Table des quantiles de la loi du $\chi^2(d)$.

d \ q	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	0	0	0	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,002	0,01	0,02	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,21	10,597	13,816
3	0,024	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,091	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,86	18,467
5	0,21	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	4,351	9,236	11,07	12,833	15,086	16,75	20,515
6	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,49	7,344	13,362	15,507	17,535	20,09	21,955	26,124
9	1,152	1,735	2,088	2,7	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	1,479	2,156	2,558	3,247	3,94	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,92	24,725	26,757	31,264
12	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,34	18,549	21,026	23,337	26,217	28,3	32,909
13	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	12,34	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	3,041	4,075	4,66	5,629	6,571	7,79	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32	34,267	39,252
17	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,79
18	4,905	6,265	7,015	8,231	9,39	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312
19	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,82
20	5,921	7,434	8,26	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,41	34,17	37,566	39,997	45,315
21	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,24	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797
22	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268
23	7,529	9,26	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728
24	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,98	45,559	51,179
25	8,649	10,52	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,62
26	9,222	11,16	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,29	54,052
27	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	55,476
28	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892
29	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301
30	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703
40	17,916	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	39,335	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402
50	24,674	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	49,335	63,167	67,505	71,42	76,154	79,49	86,661
60	31,738	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	59,335	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607
70	39,036	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	69,334	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317
80	46,52	51,172	53,54	40,482	60,391	64,278	79,334	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839
90	54,155	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	89,334	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208
100	61,918	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	99,334	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449

Avec le logiciel : si $X \sim \chi^2(d)$, la commande `dchisq(x,d)` renvoie $f_d(x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$ est donnée par la commande `pchisq(x,d)`.
On utilise `qchisq(q,d)` pour obtenir le quantile d'ordre q.

3 Lois de Student

La table de la page 8 donne pour U_d de loi de Student à d degrés de liberté et pour un choix de probabilités q usuelles les valeurs des réels x_q tels que

$$P(U_d \leq x_q) = q.$$

C'est donc une table de *quantiles* (d'ordre q) de la loi de Student.

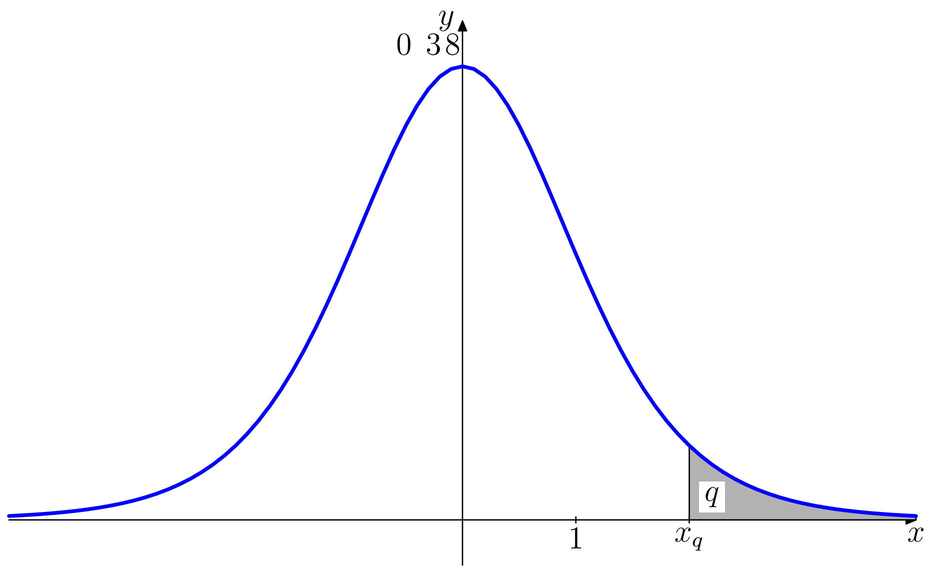


FIGURE 2 – Graphe de la densité d'une loi Student à 7 degrés de liberté

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(d)$ sont indépendantes, alors

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/d}}$$

suit une loi de Student à d degrés de liberté.

On rappelle que la loi de Student à d degrés de liberté a pour densité :

$$g_d(x) = \frac{1}{\sqrt{d\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{d}\right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

et que l'espérance et la variance d'une variable aléatoire U_d de loi de Student à d degrés de liberté sont

$$\mathbb{E}(U_d) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(U_d) = \frac{d}{d-2},$$

la variance n'étant définie que pour $d > 2$. D'autre part, U_d converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand d tend vers $+\infty$.

Avec le logiciel : si $X \sim \mathcal{T}(d)$, alors `dt(x,d)` retourne $g_d(x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$ est donnée par la commande `pt(x,d)`. La commande `qt(q,d)` donne le quantile d'ordre q.

Table des quantiles de U_d pour U_d de loi de Student à d degrés de liberté

d \ q	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,158	0,325	0,51	0,727	1	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,25	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,19	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,92	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,13	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,13	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,1	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297
10	0,129	0,26	0,397	0,542	0,7	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,129	0,26	0,396	0,54	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,87	1,079	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,69	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	3,686
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,646
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,86	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,518	2,831	3,527
22	0,127	0,256	0,39	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,127	0,256	0,39	0,532	0,685	0,858	1,06	1,319	1,714	2,069	2,5	2,807	3,485
24	0,127	0,256	0,39	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,127	0,256	0,39	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,45
26	0,127	0,256	0,39	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,127	0,256	0,389	0,53	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,127	0,256	0,389	0,53	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,127	0,256	0,389	0,53	0,683	0,854	1,055	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,385
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,05	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2	2,39	2,66	3,232
70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,99	2,374	2,639	3,195
90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,29	1,66	1,984	2,364	2,626	3,174

4 Lois de Fisher

Les tables des pages 10 et 12 donne pour F_{d_1,d_2} de loi de Fisher-Snedecor de paramètres (d_1, d_2) et pour $q = 0{,}95$ et $q = 0{,}975$ les valeurs du réel x_q tels que

$$P(F_{d_1,d_2} \leq x_q) = q.$$

C'est donc une table de *quantiles* (d'ordre 95% et 97, 5%) de la loi de Fisher.

On rappelle que, si X_{d_1}, resp. X_{d_2}, sont deux variables aléatoires indépendantes de loi du Khi-deux à d_1, resp. d_2 degrés de liberté alors la variable aléatoire

$$F_{d_1,d_2} = \frac{d_2 X_{d_1}}{d_1 X_{d_2}},$$

suit une loi de Fisher-Snedecor de paramètres (d_1, d_2). Elle a pour densité,

$$f_{d_1,d_2}(x) = C(d_1, d_2) \frac{x^{\frac{d_1}{2}-1}}{(d_2 + d_1 x)^{\frac{d_1+d_2}{2}}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad \text{où} \quad C(d_1, d_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right) d_1^{\frac{d_1}{2}} d_2^{\frac{d_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_2}{2}\right)}.$$

Et elle admet une espérance pour $d_2 > 2$ et une variance pour $d_2 > 4$ qui sont :

$$\mathbb{E}(F_{d_1,d_2}) = \frac{d_2}{d_2 - 2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(F_{d_1,d_2}) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}.$$

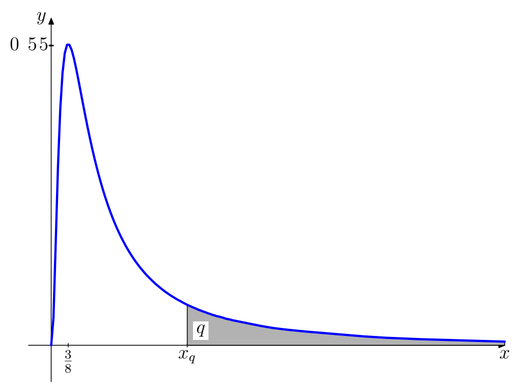


FIGURE 3 – Graphe de la densité d'une loi $\mathcal{F}(8, 2)$

Remarque :

— Si $d_1 > 2$, alors $\lim_{x\to 0} f_{d_1,d_2}(x) = 0$ et la courbe admet un unique mode en $d_2(d_1 - 1)/(d_1(d_2 + 2))$.

— Si $d_1 = 2$ alors $\lim_{x\to 0} f_{d_1,d_2}(x) = 0$ et la courbe admet un unique mode en 0.

— Si $d_1 = 1$ alors $\lim_{x\to 0} f_{d_1,d_2}(x) = +\infty$.

Remarque :

Si F_{d_1,d_2} suit une loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(d_1, d_2)$ alors $1/F_{d_1,d_2}$ suit une loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(d_2, d_1)$. Par conséquent, si $x_q(d_1, d_2)$ vérifie
$P(F_{d_1,d_2} > x_q(d_1, d_2)) = q$ alors $x_{1-q}(d_2, d_1) = x_q(d_1, d_2)^{-1}$.

Table des quantiles d'ordre 95% de F_{d_1,d_2} pour F_{d_1,d_2} de loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(d_1, d_2)$.

d_2 \ d_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	246,0	246,5	246,9	247,3	247,7	248,0
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,35	19,37	19,38	19,4	19,4	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44	19,44	19,44	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,7	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,8
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,7	4,68	4,66	4,64	4,62	4,6	4,59	4,58	4,57	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,1	4,06	4,03	4	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,9	3,88	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,6	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,2	3,19	3,17	3,16	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,1	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,8	2,79	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,7	2,69	2,67	2,66	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3	2,91	2,85	2,8	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,6	2,58	2,57	2,56	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,6	2,58	2,55	2,53	2,51	2,5	2,48	2,47	2,46
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,4	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,4	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,4	2,37	2,35	2,33	2,32	2,3	2,29	2,28
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,2	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,2	2,18	2,17	2,16
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,2	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,2	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,1
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,26	2,23	2,2	2,17	2,15	2,13	2,11	2,1	2,08	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,2	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,05
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,3	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,2	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2	2,17	2,13	2,1	2,08	2,06	2,04	2,02	2	1,99	1,97
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2	1,99	1,97	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,1	2,08	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93
31	4,16	3,3	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,2	2,15	2,11	2,08	2,05	2,03	2	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92
32	4,15	3,29	2,9	2,67	2,51	2,4	2,31	2,24	2,19	2,14	2,1	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,95	1,94	1,92	1,91
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,5	2,39	2,3	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2	1,98	1,96	1,94	1,93	1,91	1,9
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,93	1,92	1,9	1,89
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89	1,88
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	2	1,98	1,95	1,93	1,92	1,9	1,88	1,87
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,2	2,14	2,1	2,06	2,02	2	1,97	1,95	1,93	1,91	1,89	1,88	1,86
38	4,1	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,9	1,88	1,87	1,85
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,98	1,95	1,93	1,91	1,89	1,88	1,86	1,85
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2	1,97	1,95	1,92	1,9	1,89	1,87	1,85	1,84

d_2 \ d_1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	248,3	248,6	248,8	249,1	249,3	249,5	249,6	249,8	250,0	250,1	250,2	250,4	250,5	250,6	250,7	250,8	250,9	251,0	251,1	251,1
2	19,45	19,45	19,45	19,45	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,47	19,47	19,47	19,47	19,47	19,47	19,47	19,47
3	8,65	8,65	8,64	8,64	8,63	8,63	8,63	8,62	8,62	8,62	8,61	8,61	8,61	8,61	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,59
4	5,79	5,79	5,78	5,77	5,77	5,76	5,76	5,75	5,75	5,75	5,74	5,74	5,74	5,73	5,73	5,73	5,72	5,72	5,72	5,72
5	4,55	4,54	4,53	4,53	4,52	4,52	4,51	4,5	4,5	4,5	4,49	4,49	4,48	4,48	4,48	4,47	4,47	4,47	4,47	4,46
6	3,86	3,86	3,85	3,84	3,83	3,83	3,82	3,82	3,81	3,81	3,8	3,8	3,8	3,79	3,79	3,79	3,78	3,78	3,78	3,77
7	3,43	3,43	3,42	3,41	3,4	3,4	3,39	3,39	3,38	3,38	3,37	3,37	3,36	3,36	3,36	3,35	3,35	3,35	3,34	3,34
8	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,1	3,1	3,09	3,08	3,08	3,07	3,07	3,07	3,06	3,06	3,06	3,05	3,05	3,05	3,04
9	2,93	2,92	2,91	2,9	2,89	2,89	2,88	2,87	2,87	2,86	2,86	2,85	2,85	2,85	2,84	2,84	2,84	2,83	2,83	2,83
10	2,76	2,75	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72	2,71	2,7	2,7	2,69	2,69	2,69	2,68	2,68	2,67	2,67	2,67	2,66	2,66
11	2,64	2,63	2,62	2,61	2,6	2,59	2,59	2,58	2,58	2,57	2,57	2,56	2,56	2,55	2,55	2,54	2,54	2,54	2,53	2,53
12	2,53	2,52	2,51	2,51	2,5	2,49	2,48	2,48	2,47	2,47	2,46	2,46	2,45	2,45	2,44	2,44	2,44	2,43	2,43	2,43
13	2,45	2,44	2,43	2,42	2,41	2,41	2,4	2,39	2,39	2,38	2,38	2,37	2,37	2,36	2,36	2,35	2,35	2,35	2,34	2,34
14	2,38	2,37	2,36	2,35	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31	2,31	2,3	2,3	2,29	2,29	2,28	2,28	2,28	2,27	2,27	2,27
15	2,32	2,31	2,3	2,29	2,28	2,27	2,27	2,26	2,25	2,25	2,24	2,24	2,23	2,23	2,22	2,22	2,21	2,21	2,21	2,2
16	2,26	2,25	2,24	2,24	2,23	2,22	2,21	2,21	2,2	2,19	2,19	2,18	2,18	2,17	2,17	2,17	2,16	2,16	2,15	2,15
17	2,22	2,21	2,2	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,15	2,15	2,14	2,14	2,13	2,13	2,12	2,12	2,11	2,11	2,11	2,1
18	2,18	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,13	2,12	2,11	2,11	2,1	2,1	2,09	2,09	2,08	2,08	2,07	2,07	2,07	2,06
19	2,14	2,13	2,12	2,11	2,11	2,1	2,09	2,08	2,08	2,07	2,07	2,06	2,06	2,05	2,05	2,04	2,04	2,03	2,03	2,03
20	2,11	2,1	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,05	2,05	2,04	2,03	2,03	2,02	2,02	2,01	2,01	2,01	2	2	1,99
21	2,08	2,07	2,06	2,05	2,05	2,04	2,03	2,02	2,02	2,01	2	2	1,99	1,99	1,98	1,98	1,98	1,97	1,97	1,96
22	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	2	2	1,99	1,98	1,98	1,97	1,97	1,96	1,96	1,95	1,95	1,95	1,94	1,94
23	2,04	2,02	2,01	2,01	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,95	1,95	1,94	1,94	1,93	1,93	1,93	1,92	1,92	1,91
24	2,01	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,95	1,95	1,94	1,93	1,93	1,92	1,92	1,91	1,91	1,9	1,9	1,9	1,89
25	2	1,98	1,97	1,96	1,96	1,95	1,94	1,93	1,93	1,92	1,91	1,91	1,9	1,9	1,89	1,89	1,88	1,88	1,88	1,87
26	11,98	1,97	1,96	1,95	1,94	1,93	1,92	1,91	1,91	1,9	1,89	1,89	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,86	1,86	1,85
27	11,96	1,95	1,94	1,93	1,92	1,91	1,9	1,9	1,89	1,88	1,88	1,87	1,87	1,86	1,86	1,85	1,85	1,84	1,84	1,84
28	1,95	1,93	1,92	1,91	1,91	1,9	1,89	1,88	1,88	1,87	1,86	1,86	1,85	1,85	1,84	1,84	1,83	1,83	1,82	1,82
29	1,93	1,92	1,91	1,9	1,89	1,88	1,88	1,87	1,86	1,85	1,85	1,84	1,84	1,83	1,83	1,82	1,82	1,81	1,81	1,81
30	1,92	1,91	1,9	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,85	1,84	1,83	1,83	1,82	1,82	1,81	1,81	1,8	1,8	1,8	1,79
31	1,91	1,9	1,88	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,83	1,83	1,82	1,82	1,81	1,81	1,8	1,8	1,79	1,79	1,78	1,78
32	1,9	1,88	1,87	1,86	1,85	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,81	1,8	1,8	1,79	1,79	1,78	1,78	1,78	1,77	1,77
33	1,89	1,87	1,86	1,85	1,84	1,83	1,83	1,82	1,81	1,81	1,8	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,76	1,76	1,76
34	1,88	1,86	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,81	1,8	1,8	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,76	1,76	1,75	1,75	1,75
35	1,87	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,81	1,8	1,79	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,76	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74
36	1,86	1,85	1,83	1,82	1,81	1,81	1,8	1,79	1,78	1,78	1,77	1,76	1,76	1,75	1,75	1,74	1,74	1,73	1,73	1,73
37	1,85	1,84	1,83	1,82	1,81	1,8	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,76	1,75	1,74	1,74	1,73	1,73	1,73	1,72	1,72
38	1,84	1,83	1,82	1,81	1,8	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,75	1,75	1,74	1,74	1,73	1,73	1,72	1,72	1,71	1,71
39	1,83	1,82	1,81	1,8	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,75	1,75	1,74	1,73	1,73	1,72	1,72	1,71	1,71	1,7	1,7
40	1,83	1,81	1,8	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,75	1,74	1,74	1,73	1,73	1,72	1,72	1,71	1,71	1,7	1,7	1,69

Table des quantiles d'ordre 0.975 pour une loi de Fisher $\mathcal{F}(d_1, d_2)$.

d_2 \ d_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,9	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	973,0	976,7	979,8	982,5	984,9	986,9	988,7	990,4	991,8	993,1
2	38,51	39	39,17	39,25	39,3	39,33	39,36	39,37	39,39	39,4	39,41	39,41	39,42	39,43	39,43	39,44	39,44	39,44	39,45	39,45
3	17,44	16,04	15,44	15,1	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,37	14,34	14,3	14,28	14,25	14,23	14,21	14,2	14,18	14,17
4	12,22	10,65	9,98	9,6	9,36	9,2	9,07	8,98	8,9	8,84	8,79	8,75	8,71	8,68	8,66	8,63	8,61	8,59	8,58	8,56
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52	6,49	6,46	6,43	6,4	6,38	6,36	6,34	6,33
6	8,81	7,26	6,6	6,23	5,99	5,82	5,7	5,6	5,52	5,46	5,41	5,37	5,33	5,3	5,27	5,24	5,22	5,2	5,18	5,17
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,9	4,82	4,76	4,71	4,67	4,63	4,6	4,57	4,54	4,52	4,5	4,48	4,47
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,3	4,24	4,2	4,16	4,13	4,1	4,08	4,05	4,03	4,02	4
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,2	4,1	4,03	3,96	3,91	3,87	3,83	3,8	3,77	3,74	3,72	3,7	3,68	3,67
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62	3,58	3,55	3,52	3,5	3,47	3,45	3,44	3,42
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43	3,39	3,36	3,33	3,3	3,28	3,26	3,24	3,23
12	6,55	5,1	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28	3,24	3,21	3,18	3,15	3,13	3,11	3,09	3,07
13	6,41	4,97	4,35	4	3,77	3,6	3,48	3,39	3,31	3,25	3,2	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3	2,98	2,96	2,95
14	6,3	4,86	4,24	3,89	3,66	3,5	3,38	3,29	3,21	3,15	3,09	3,05	3,01	2,98	2,95	2,92	2,9	2,88	2,86	2,84
15	6,2	4,77	4,15	3,8	3,58	3,41	3,29	3,2	3,12	3,06	3,01	2,96	2,92	2,89	2,86	2,84	2,81	2,79	2,77	2,76
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,5	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,93	2,89	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,7	2,68
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,87	2,82	2,79	2,75	2,72	2,7	2,67	2,65	2,63	2,62
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,1	3,01	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,7	2,67	2,64	2,62	2,6	2,58	2,56
19	5,92	4,51	3,9	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,76	2,72	2,68	2,65	2,62	2,59	2,57	2,55	2,53	2,51
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,72	2,68	2,64	2,6	2,57	2,55	2,52	2,5	2,48	2,46
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,8	2,73	2,68	2,64	2,6	2,56	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,7	2,65	2,6	2,56	2,53	2,5	2,47	2,45	2,43	2,41	2,39
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,9	2,81	2,73	2,67	2,62	2,57	2,53	2,5	2,47	2,44	2,42	2,39	2,37	2,36
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,7	2,64	2,59	2,54	2,5	2,47	2,44	2,41	2,39	2,36	2,35	2,33
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,56	2,51	2,48	2,44	2,41	2,38	2,36	2,34	2,32	2,3
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,1	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,39	2,36	2,34	2,31	2,29	2,28
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,8	2,71	2,63	2,57	2,51	2,47	2,43	2,39	2,36	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,9	2,78	2,69	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,37	2,34	2,32	2,29	2,27	2,25	2,23
29	5,59	4,2	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,48	2,43	2,39	2,36	2,32	2,3	2,27	2,25	2,23	2,21
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,2
31	5,55	4,16	3,57	3,23	3,01	2,85	2,73	2,64	2,56	2,5	2,44	2,4	2,36	2,32	2,29	2,26	2,24	2,22	2,2	2,18
32	5,53	4,15	3,56	3,22	3	2,84	2,71	2,62	2,54	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31	2,28	2,25	2,22	2,2	2,18	2,16
33	5,51	4,13	3,54	3,2	2,98	2,82	2,7	2,61	2,53	2,47	2,41	2,37	2,33	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,17	2,15
34	5,5	4,12	3,53	3,19	2,97	2,81	2,69	2,59	2,52	2,45	2,4	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,2	2,17	2,15	2,13
35	5,48	4,11	3,52	3,18	2,96	2,8	2,68	2,58	2,5	2,44	2,39	2,34	2,3	2,27	2,23	2,21	2,18	2,16	2,14	2,12
36	5,47	4,09	3,5	3,17	2,94	2,78	2,66	2,57	2,49	2,43	2,37	2,33	2,29	2,25	2,22	2,2	2,17	2,15	2,13	2,11
37	5,46	4,08	3,49	3,16	2,93	2,77	2,65	2,56	2,48	2,42	2,36	2,32	2,28	2,24	2,21	2,18	2,16	2,14	2,12	2,1
38	5,45	4,07	3,48	3,15	2,92	2,76	2,64	2,55	2,47	2,41	2,35	2,31	2,27	2,23	2,2	2,17	2,15	2,13	2,11	2,09
39	5,43	4,06	3,47	3,14	2,91	2,75	2,63	2,54	2,46	2,4	2,34	2,3	2,26	2,22	2,19	2,16	2,14	2,12	2,1	2,08
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,9	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07

d_2 \ d_1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	994,3	995,4	996,4	997,3	998,1	998,9	999,6	1000	1001	1001	1002	1002	1003	1003	1004	1004	1005	1005	1005	1006
2	39,45	39,45	39,45	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47	39,47
3	14,16	14,14	14,13	14,12	14,12	14,11	14,1	14,09	14,09	14,08	14,07	14,07	14,06	14,06	14,06	14,05	14,05	14,04	14,04	14,04
4	8,55	8,53	8,52	8,51	8,5	8,49	8,48	8,48	8,47	8,46	8,45	8,45	8,44	8,44	8,43	8,43	8,42	8,42	8,42	8,41
5	6,31	6,3	6,29	6,28	6,27	6,26	6,25	6,24	6,23	6,23	6,22	6,21	6,21	6,2	6,2	6,19	6,19	6,18	6,18	6,18
6	5,15	5,14	5,13	5,12	5,11	5,1	5,09	5,08	5,07	5,07	5,06	5,05	5,05	5,04	5,04	5,03	5,03	5,02	5,02	5,01
7	4,45	4,44	4,43	4,41	4,4	4,39	4,39	4,38	4,37	4,36	4,36	4,35	4,34	4,34	4,33	4,33	4,32	4,32	4,31	4,31
8	3,98	3,97	3,96	3,95	3,94	3,93	3,92	3,91	3,9	3,89	3,89	3,88	3,87	3,87	3,86	3,86	3,85	3,85	3,84	3,84
9	3,65	3,64	3,63	3,61	3,6	3,59	3,58	3,58	3,57	3,56	3,55	3,55	3,54	3,53	3,53	3,52	3,52	3,51	3,51	3,51
10	3,4	3,39	3,38	3,37	3,35	3,34	3,34	3,33	3,32	3,31	3,3	3,3	3,29	3,29	3,28	3,27	3,27	3,26	3,26	3,26
11	3,21	3,2	3,18	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,13	3,12	3,11	3,1	3,1	3,09	3,09	3,08	3,08	3,07	3,07	3,06
12	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	3	2,99	2,98	2,97	2,96	2,96	2,95	2,94	2,94	2,93	2,93	2,92	2,92	2,91	2,91
13	2,93	2,92	2,91	2,89	2,88	2,87	2,86	2,85	2,85	2,84	2,83	2,82	2,82	2,81	2,8	2,8	2,79	2,79	2,78	2,78
14	2,83	2,81	2,8	2,79	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72	2,71	2,71	2,7	2,69	2,69	2,68	2,68	2,67
15	2,74	2,73	2,71	2,7	2,69	2,68	2,67	2,66	2,65	2,64	2,64	2,63	2,62	2,62	2,61	2,6	2,6	2,59	2,59	2,59
16	2,67	2,65	2,64	2,63	2,61	2,6	2,59	2,58	2,58	2,57	2,56	2,55	2,55	2,54	2,53	2,53	2,52	2,52	2,51	2,51
17	2,6	2,59	2,57	2,56	2,55	2,54	2,53	2,52	2,51	2,5	2,49	2,49	2,48	2,47	2,47	2,46	2,46	2,45	2,45	2,44
18	2,54	2,53	2,52	2,5	2,49	2,48	2,47	2,46	2,45	2,44	2,44	2,43	2,42	2,42	2,41	2,4	2,4	2,39	2,39	2,38
19	2,49	2,48	2,46	2,45	2,44	2,43	2,42	2,41	2,4	2,39	2,39	2,38	2,37	2,37	2,36	2,35	2,35	2,34	2,34	2,33
20	2,45	2,43	2,42	2,41	2,4	2,39	2,38	2,37	2,36	2,35	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31	2,31	2,3	2,3	2,29	2,29
21	2,41	2,39	2,38	2,37	2,36	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31	2,3	2,29	2,29	2,28	2,27	2,27	2,26	2,26	2,25	2,25
22	2,37	2,36	2,34	2,33	2,32	2,31	2,3	2,29	2,28	2,27	2,26	2,26	2,25	2,24	2,24	2,23	2,23	2,22	2,21	2,21
23	2,34	2,33	2,31	2,3	2,29	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,22	2,21	2,2	2,2	2,19	2,19	2,18	2,18
24	2,31	2,3	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,21	2,2	2,19	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,16	2,15	2,15
25	2,28	2,27	2,26	2,24	2,23	2,22	2,21	2,2	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,15	2,15	2,14	2,13	2,13	2,12	2,12
26	2,26	2,24	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,13	2,12	2,11	2,11	2,1	2,1	2,09
27	2,24	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,13	2,12	2,11	2,1	2,1	2,09	2,09	2,08	2,07	2,07
28	2,22	2,2	2,19	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,12	2,11	2,1	2,1	2,09	2,08	2,08	2,07	2,06	2,06	2,05	2,05
29	2,2	2,18	2,17	2,15	2,14	2,13	2,12	2,11	2,1	2,09	2,08	2,08	2,07	2,06	2,06	2,05	2,04	2,04	2,03	2,03
30	2,18	2,16	2,15	2,14	2,12	2,11	2,1	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,05	2,04	2,04	2,03	2,03	2,02	2,01	2,01
31	2,16	2,15	2,13	2,12	2,11	2,1	2,08	2,07	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,03	2,02	2,01	2,01	2	2	1,99
32	2,15	2,13	2,12	2,1	2,09	2,08	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,02	2,01	2	2	1,99	1,99	1,98	1,98
33	2,13	2,12	2,1	2,09	2,08	2,06	2,05	2,04	2,03	2,03	2,02	2,01	2	2	1,99	1,98	1,98	1,97	1,97	1,96
34	2,12	2,1	2,09	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	2	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,96	1,95	1,95
35	2,1	2,09	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,95	1,95	1,94	1,94	1,93
36	2,09	2,08	2,06	2,05	2,04	2,03	2,01	2	2	1,99	1,98	1,97	1,96	1,96	1,95	1,94	1,94	1,93	1,92	1,92
37	2,08	2,07	2,05	2,04	2,03	2,01	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,95	1,94	1,94	1,93	1,92	1,92	1,91	1,91
38	2,07	2,05	2,04	2,03	2,01	2	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95	1,95	1,94	1,93	1,93	1,92	1,91	1,91	1,9	1,9
39	2,06	2,04	2,03	2,02	2	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95	1,94	1,94	1,93	1,92	1,91	1,91	1,9	1,9	1,89	1,89
40	2,05	2,03	2,02	2,01	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95	1,94	1,93	1,93	1,92	1,91	1,9	1,9	1,89	1,89	1,88	1,88

Avec le logiciel `R` : si $X \sim \mathcal{F}(d_1, d_2)$, alors `df(x,d1,d2)` retourne $f_{d_1,d_2}(x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$ est donnée par `pf(x,d1,d2)`. La commande `qf(q,d1,d2)` renvoie le quantile d'ordre q.

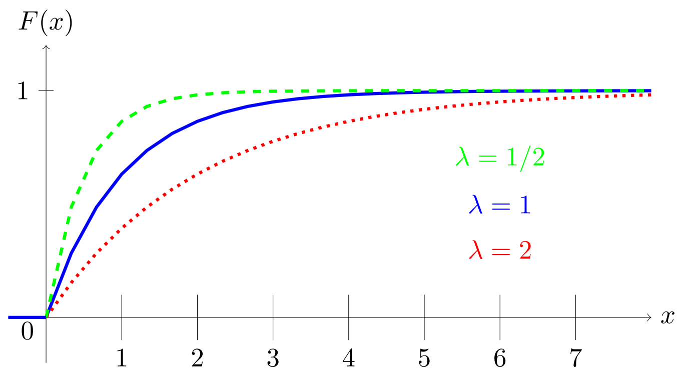
5 Loi exponentielle

La densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Sa fonction de répartition est $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Son espérance est $1/\lambda$, sa variance $1/\lambda^2$.

La loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser les durées de vie (d'appareils électriques, par exemple). Le paramètre λ est proportionnel à la probabilité de casser pendant un temps très court.



6 Loi géométrique

Soient $(X_1, \ldots,)$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. $Y = \min\{k, X_k = 1\}$ est le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès. Y suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1} \quad \mathbb{E}\,(Y) = \frac{1}{p} \quad \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

7 Loi de Poisson

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Si p est très petit, n est très grand et $\lambda = np$ est de l'ordre de 1, alors la loi de $Y = X_1 + \ldots + X_n$ peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ.

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \mathbb{E}Y = \lambda, \quad \mathrm{Var}\,(Y) = \lambda$$

Fonction de répartition pour la loi de Poisson

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,5	0,61	0,91	0,99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,37	0,74	0,92	0,98	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,5	0,22	0,56	0,81	0,93	0,98	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0,14	0,41	0,68	0,86	0,95	0,98	1	1	1	1	1	1	1
2,5	0,08	0,29	0,54	0,76	0,89	0,96	0,99	1	1	1	1	1	1
3	0,05	0,2	0,42	0,65	0,82	0,92	0,97	0,99	1	1	1	1	1
3,5	0,03	0,14	0,32	0,54	0,73	0,86	0,93	0,97	0,99	1	1	1	1
4	0,02	0,09	0,24	0,43	0,63	0,79	0,89	0,95	0,98	0,99	1	1	1
4,5	0,01	0,06	0,17	0,34	0,53	0,7	0,83	0,91	0,96	0,98	0,99	1	1
5	0,01	0,04	0,12	0,27	0,44	0,62	0,76	0,87	0,93	0,97	0,99	0,99	1

Avec le logiciel `R` : si $X \sim \mathcal{P}(l)$, alors `dpois(x,l)` retourne $\mathbb{P}\,(X = l)$ et $\mathbb{P}\,(X \leq l)$ est donnée par `ppois(x,l)`. La commande `qpois(q,l)` renvoie le quantile d'ordre q.

8 Loi binomiale

La première table donne la loi d'une binomiale $\text{Bin}(n, \frac{1}{2})$. On rappelle que si X_n suit une loi binomiale $\text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ alors sa loi est symétrique autour de son espérance $n/2$ puisque X_n et $n - X_n$ sont de même loi. Donc pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$P(X_n \leq k) = P(X_n \geq n - k).$$

D'autre part pour les grandes valeurs de n, la loi de

$$\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$$

est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ (par le théorème centrale limite).
Les tables suivantes donnent les fonctions de répartition d'une loi binomiale $\text{Bin}(10, p)$ et $\text{Bin}(20, p)$ pour différentes valeurs de p.

Pour les grandes valeurs de n, la loi de

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$$

est toujours approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Cependant, plus p est éloigné de $0, 5$, plus la convergence est lente.

Avec le logiciel `R` : si $X \sim \text{Bin}(n, p)$, alors `dbinom(x,n,p)` renvoie $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$ est donnée par `pbinom(x,n,p)`. La commande `qbinom(q,n,p)` renvoie le quantile d'ordre q.

Table des valeurs de $P(X_n \leq k)$, pour X_n de loi $\mathrm{Bin}(n, \frac{1}{2})$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,250	0,750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3	0,125	0,500	0,875	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	0,062	0,313	0,688	0,938	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	0,031	0,187	0,500	0,812	0,969	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	0,016	0,109	0,344	0,656	0,891	0,984	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
7	0,008	0,063	0,227	0,500	0,773	0,938	0,992	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
8	0,004	0,035	0,145	0,363	0,637	0,855	0,965	0,996	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	0,002	0,020	0,090	0,254	0,500	0,746	0,910	0,980	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,001	0,011	0,055	0,172	0,377	0,623	0,828	0,945	0,989	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
11	0,000	0,006	0,033	0,113	0,274	0,500	0,726	0,887	0,967	0,994	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
12	0,000	0,003	0,019	0,073	0,194	0,387	0,613	0,806	0,927	0,981	0,997	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
13	0,000	0,002	0,011	0,046	0,133	0,291	0,500	0,709	0,867	0,954	0,989	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
14	0,000	0,001	0,006	0,029	0,090	0,212	0,395	0,605	0,788	0,910	0,971	0,994	0,999	1,000	1,000	1,000
15	0,000	0,000	0,004	0,018	0,059	0,151	0,304	0,500	0,696	0,849	0,941	0,982	0,996	1,000	1,000	1,000
16	0,000	0,000	0,002	0,011	0,038	0,105	0,227	0,402	0,598	0,773	0,895	0,962	0,989	0,998	1,000	1,000
17	0,000	0,000	0,001	0,006	0,025	0,072	0,166	0,315	0,500	0,685	0,834	0,928	0,975	0,994	0,999	1,000
18	0,000	0,000	0,001	0,004	0,015	0,048	0,119	0,240	0,407	0,593	0,760	0,881	0,952	0,985	0,996	0,999
19	0,000	0,000	0,000	0,002	0,010	0,032	0,084	0,180	0,324	0,500	0,676	0,820	0,916	0,968	0,990	0,998
20	0,000	0,000	0,000	0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588	0,748	0,868	0,942	0,979	0,994
21	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,013	0,039	0,095	0,192	0,332	0,500	0,668	0,808	0,905	0,961	0,987
22	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,008	0,026	0,067	0,143	0,262	0,416	0,584	0,738	0,857	0,933	0,974
23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,005	0,017	0,047	0,105	0,202	0,339	0,500	0,661	0,798	0,895	0,953
24	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,011	0,032	0,076	0,154	0,271	0,419	0,581	0,729	0,846	0,924
25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,007	0,022	0,054	0,115	0,212	0,345	0,500	0,655	0,788	0,885
26	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,005	0,014	0,038	0,084	0,163	0,279	0,423	0,577	0,721	0,837
27	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,010	0,026	0,061	0,124	0,221	0,351	0,500	0,649	0,779
28	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,006	0,018	0,044	0,092	0,172	0,286	0,425	0,575	0,714
29	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,012	0,031	0,068	0,132	0,229	0,356	0,500	0,644
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,021	0,049	0,100	0,181	0,292	0,428	0,572

Fonction de répartition d'une Bin$(10, p)$.

k \ p	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
0	0,263	0,056	0,009	0,001	0	0	0
1	0,639	0,244	0,064	0,011	0,001	0	0
2	0,88	0,526	0,211	0,055	0,008	0	0
3	0,973	0,776	0,447	0,172	0,038	0,004	0
4	0,996	0,922	0,694	0,377	0,128	0,02	0,001
5	0,999	0,98	0,872	0,623	0,306	0,078	0,004
6	1	0,996	0,962	0,828	0,553	0,224	0,027
7	1	1	0,992	0,945	0,789	0,474	0,12
8	1	1	0,999	0,989	0,936	0,756	0,361
9	1	1	1	0,999	0,991	0,944	0,737
10	1	1	1	1	1	1	1

Fonction de répartition d'une Bin$(20, p)$.

k \ p	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
0	0,069	0,003	0	0	0	0	0
1	0,267	0,024	0,001	0	0	0	0
2	0,535	0,091	0,007	0	0	0	0
3	0,765	0,225	0,027	0,001	0	0	0
4	0,905	0,415	0,079	0,006	0	0	0
5	0,969	0,617	0,179	0,021	0,001	0	0
6	0,992	0,786	0,328	0,058	0,003	0	0
7	0,998	0,898	0,508	0,132	0,012	0	0
8	1	0,959	0,683	0,252	0,034	0,001	0
9	1	0,986	0,823	0,412	0,085	0,004	0
10	1	0,996	0,915	0,588	0,177	0,014	0
11	1	0,999	0,966	0,748	0,317	0,041	0
12	1	1	0,988	0,868	0,492	0,102	0,002
13	1	1	0,997	0,942	0,672	0,214	0,008
14	1	1	0,999	0,979	0,821	0,383	0,031
15	1	1	1	0,994	0,921	0,585	0,095
16	1	1	1	0,999	0,973	0,775	0,235
17	1	1	1	1	0,993	0,909	0,465
18	1	1	1	1	0,999	0,976	0,733
19	1	1	1	1	1	0,997	0,931
20	1	1	1	1	1	1	1

9 Test du signe et rang

Soient $(Z_i)_{1\leq i\leq n}$ un échantillon dont la loi est continue et supposée symétrique par rapport à 0. On note, pour $1 \leq i \leq n$, $\tilde{Z}_i = |X_i|$ et $R(i)$ le rang de $\tilde{Z}_i$ dans l'échantillon réordonné $(\tilde{Z}_{(1)}, \ldots, \tilde{Z}_{(n)})$. On définit alors la statistique de test

$$T_n^+ = \sum_{i=1}^{n} R(i)\mathbf{1}_{Z_i\geq 0} \quad \text{et} \quad T_n^- = \sum_{i=1}^{n} R(i)\mathbf{1}_{Z_i<0}.$$

Alors T_n^+ et T_n^- possèdent les propriétés suivantes :

— T_n^+ et T_n^- prennent toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n(n+1)/2$ et $T_n^- + T_n^+ = n(n+1)/2$,

— leurs espérances et leurs variances sont données par :

$$\mathbb{E}(T_n^+) = \mathbb{E}(T_n^-) = \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(T_n^+) = \mathrm{Var}(T_n^-) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24},$$

— leurs lois sont symétrique par rapport à l'espérance, autrement dit, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T_n^+ \leq k) = \mathbb{P}(T_n^- = k) = \mathbb{P}(T_n^+ \geq n(n+1)/2 - k),$$

— leurs lois ne dépendent pas de la loi des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$.

Avec le logiciel `R` : la fonction `wilcox.test(Z,alternative)` où Z est le vecteur des observations permet de réaliser le test du signe et du rang.

La table donne les quantiles d'ordre α ($\alpha = 0,2,\ 0,1,\ 0,05$ et $0,025$ pour $n \leq 30$. Pour des plus grandes valeurs de n, on admet que

$$\frac{T_n^+ - E(T_n^+)}{\sqrt{\mathrm{Var}(T_n^+)}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand n tend vers $+\infty$.

Table des quantiles de la loi de T_n^+ : on donne k tel que $\mathbb{P}(T_n^+ \leq k) \leq \alpha$

n \ α	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01
3	0	-	-	-	-
4	2	0	-	-	-
5	3	2	0	-	-
6	5	3	2	0	-
7	8	5	3	2	0
8	11	8	5	3	1
9	14	10	8	5	3
10	18	14	10	8	5
11	22	17	13	10	7
12	27	21	17	13	9
13	32	26	21	17	12
14	38	31	25	21	15
15	44	36	30	25	19
16	50	42	35	29	23
17	57	48	41	34	27
18	65	55	47	40	32
19	73	62	53	46	37
20	81	69	60	52	43

10 Test de la somme des rangs

Soient $(X_i)_{1\le i\le n_1}$ et $(Y_i)_{1\le i\le n_2}$ deux échantillons indépendants de même loi F continue. On définit $(Z_1,\ldots,Z_n) = (X_1,\ldots,X_{n_1},Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ (avec $n = n_1+n_2$). Et on définit la statistique W_X de la somme des rangs de l'échantillon $(X_i)_{1\le i\le n_1}$:

$$W_X = \sum_{i=1}^{n_1} R(i) \quad \text{où} \quad R(i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{Z_j \le Z_i}.$$

Alors W_X possède les propriétés suivantes :

— W_X prends toutes les valeurs entières comprises entre

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n_1(n_1+2n_2+1)}{2},$$

— son espérance et sa variance sont données par :

$$\mathbb{E}(W_X) = \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(W_X) = \frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{2},$$

— sa loi est symétrique par rapport à son espérance, autrement dit, pour tout entier k,

$$P(W_X \le k) = P(W_X \ge n_1(n_1+n_2+1) - k),$$

— sa loi ne dépend pas de F.

Pour les petites valeurs de n_1 et de n_2 (inférieures à 10), les quantiles d'ordre α sont donnés par les quatre tables suivantes (pour $\alpha = 20\%$, $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 2,5\%$. Et pour des plus grandes valeurs de n_1 et de n_2, on admet que

$$\frac{W_X - E(W_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_X)}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$.

Avec le logiciel `R` : la fonction `wilcox.test(X,Y,alternative,paired=FALSE)` où X et Y sont les vecteurs des observations permet de réaliser le test de la somme des rangs.

Table des valeurs de l'entier k tel que $P(W_X \leq k_\alpha)$ est le plus proche de $\alpha\%$, où W_X est la statistique de la somme des rangs pour différentes valeurs de n_1 et de n_2.

$\alpha = 5\%$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	-	-	-	3	3	3	4	4	5
3	-	6	6	7	8	9	10	10	11
4	-	10	12	13	14	15	16	17	18
5	15	16	18	19	21	22	24	25	27
6	21	23	25	27	29	30	32	34	36
7	28	31	33	35	37	40	42	44	46
8	37	40	42	45	47	50	52	55	57
9	46	49	52	55	58	61	64	67	70
10	57	60	63	67	70	73	76	80	83

$\alpha = 2,5\%$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	-	-	-	-	-	-	3	3	3
3	-	-	-	6	7	8	8	9	9
4	-	-	10	12	13	14	14	15	16
5	-	15	17	18	19	20	22	23	24
6	-	22	24	25	27	28	30	32	33
7	-	30	32	33	35	37	39	41	43
8	36	38	40	43	45	47	49	52	54
9	45	48	50	53	56	58	61	63	66
10	55	58	61	64	67	70	73	76	79

$\alpha = 1\%$

n_1 \ n_2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	-	-	-	-	6	6	7	7
4	-	-	10	11	12	12	13	14
5	-	15	16	17	18	19	21	22
6	-	22	23	25	26	27	29	30
7	28	30	31	33	35	36	38	40
8	36	38	40	42	44	46	48	50
9	46	48	51	53	55	57	60	62
10	56	59	62	64	67	69	72	75

11 Test de Kolmogorov Smirnov à un échantillon

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables réelles i.i.d de loi F. On note F_n la fonction de répartition empirique des X_i. On considère la statistique de test

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

La loi de cette statistique de test ne dépend pas de F.

La table ci-dessous donne les quantiles de D_n : $P(D_n \leq t_\varepsilon) = \varepsilon$ pour le test de Kolmogorov Smirnov à un échantillon, avec $D_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$, F_n étant la fonction de répartition empirique.

n \ ε	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	0,683 8	0,776 4	0,841 9	0,900 0	0,929 3
3	0,564 8	0,636 0	0,707 6	0,784 6	0,829 0
4	0,492 6	0,565 2	0,623 9	0,688 9	0,734 2
5	0,447 0	0,509 4	0,563 3	0,627 2	0,668 5
6	0,410 4	0,468 0	0,519 3	0,577 4	0,616 6
7	0,381 5	0,436 1	0,483 4	0,538 4	0,575 8
8	0,358 3	0,409 6	0,454 3	0,506 5	0,541 8
9	0,339 1	0,387 5	0,430 0	0,479 6	0,513 3
10	0,322 6	0,368 7	0,409 3	0,456 6	0,488 9
11	0,308 3	0,352 4	0,391 2	0,436 7	0,467 7
12	0,295 8	0,338 2	0,375 4	0,419 2	0,449 1
13	0,284 7	0,325 5	0,361 4	0,403 6	0,432 5
14	0,274 8	0,314 2	0,348 9	0,389 7	0,417 6
15	0,265 9	0,304 0	0,337 6	0,377 1	0,404 2
16	0,257 8	0,294 7	0,327 3	0,365 7	0,392 0
17	0,250 4	0,286 3	0,318 0	0,355 3	0,380 9
18	0,243 6	0,278 5	0,309 4	0,345 7	0,370 6
19	0,237 4	0,271 4	0,301 4	0,336 8	0,361 2
20	0,231 6	0,264 7	0,294 1	0,328 7	0,352 4
21	0,226 2	0,258 6	0,287 2	0,321 0	0,344 3
22	0,221 2	0,252 8	0,280 9	0,313 9	0,336 7
23	0,216 5	0,247 5	0,274 9	0,307 3	0,329 5
24	0,212 0	0,242 4	0,269 3	0,301 0	0,322 9
25	0,207 9	0,237 7	0,264 0	0,295 2	0,316 6
26	0,204 0	0,233 2	0,259 1	0,289 6	0,310 6
27	0,200 3	0,229 0	0,254 4	0,284 4	0,305 0
28	0,196 8	0,225 0	0,249 9	0,279 4	0,299 7
29	0,193 5	0,221 2	0,245 7	0,274 7	0,294 7
30	0,190 3	0,217 6	0,241 7	0,270 2	0,289 9
31	0,187 3	0,214 1	0,237 9	0,266 0	0,285 3
32	0,184 5	0,210 9	0,234 2	0,261 9	0,280 9
33	0,181 7	0,207 7	0,230 8	0,258 0	0,276 8
34	0,179 1	0,204 7	0,227 4	0,254 3	0,272 8
35	0,176 6	0,201 9	0,224 3	0,250 7	0,269 0
36	0,174 2	0,199 1	0,221 2	0,247 3	0,265 3
37	0,171 9	0,196 5	0,218 3	0,244 0	0,261 8
38	0,169 7	0,193 9	0,215 4	0,240 9	0,258 4
39	0,167 5	0,191 5	0,212 7	0,237 9	0,255 2

n \ ε	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
40	0,165 5	0,189 1	0,210 1	0,234 9	0,252 0
41	0,163 5	0,186 9	0,207 6	0,232 1	0,249 0
42	0,161 6	0,184 7	0,205 2	0,229 4	0,246 1
43	0,159 7	0,182 6	0,202 8	0,226 8	0,243 3
44	0,158 0	0,180 5	0,200 6	0,224 3	0,240 6
45	0,156 2	0,178 6	0,198 4	0,221 8	0,238 0
46	0,154 6	0,176 7	0,196 3	0,219 4	0,235 4
47	0,153 0	0,174 8	0,194 2	0,217 2	0,233 0
48	0,151 4	0,173 0	0,192 2	0,214 9	0,230 6
49	0,149 9	0,171 3	0,190 3	0,212 8	0,228 3
50	0,148 4	0,169 6	0,188 4	0,210 7	0,226 0
51	0,147 0	0,168 0	0,186 6	0,208 6	0,223 9
52	0,145 6	0,166 4	0,184 8	0,206 7	0,221 7
53	0,144 2	0,164 8	0,183 1	0,204 7	0,219 7
54	0,142 9	0,163 3	0,181 4	0,202 9	0,217 7
55	0,141 6	0,161 9	0,179 8	0,201 1	0,215 7
56	0,140 4	0,160 4	0,178 2	0,199 3	0,213 8
57	0,139 2	0,159 1	0,176 7	0,197 6	0,212 0
58	0,138 0	0,157 7	0,175 2	0,195 9	0,210 2
59	0,136 9	0,156 4	0,173 7	0,194 3	0,208 4
60	0,135 7	0,155 1	0,172 3	0,192 7	0,206 7
65	0,130 5	0,149 1	0,165 7	0,185 2	0,198 8
70	0,125 9	0,143 8	0,159 8	0,178 6	0,191 7
75	0,121 7	0,139 0	0,154 4	0,172 7	0,185 3
80	0,117 9	0,134 7	0,149 6	0,167 3	0,179 5
85	0,114 4	0,130 7	0,145 2	0,162 4	0,174 2
90	0,111 3	0,127 1	0,141 2	0,157 9	0,169 4
95	0,108 3	0,123 7	0,137 5	0,153 7	0,164 9
100	0,105 6	0,120 7	0,134 0	0,149 9	0,160 8

Table pour les grandes valeurs de n ($n > 100$)

q	$0,8$	$0,9$	$0,95$	$0,98$	$0,99$
ε	$1,07/\sqrt{n}$	$1,22/\sqrt{n}$	$1,36/\sqrt{n}$	$1,52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Avec le logiciel `R` : la commande
`ks.test(X,'p nom de la distribution', paramètres de la distribution)` où X est le vecteur d'observations permet de réaliser un test de Kolomogorov-Smirnov. Par exemple, `ks.test(X,'pnorm',0,1)` teste si les variables X_i peuvent provenir d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Test de Lilliefor pour la normalité

La table[1] ci-dessous donne les quantiles t_ε telle que $P(D_n \leq t_\varepsilon) = \varepsilon$ pour le test de Lilliefor pour la normalité avec

$$D_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \hat{F}(x)|$$

où F_n est la fonction de répartition empirique est $\hat{F}$ la fonction de réartition d'une loi normale de moyenne $\bar{X}$ et de variance S_n^{*2}.

n \ ε	0,90	0,95	0,99	0,999
4	0,344	0,375	0,414	0,432
5	0,320	0,344	0,398	0,427
6	0,298	0,323	0,369	0,421
7	0,281	0,305	0,351	0,399
8	0,266	0,289	0,334	0,383
9	0,252	0,273	0,316	0,366
10	0,240	0,261	0,305	0,350
11	0,231	0,251	0,291	0,331
12	0,223	0,242	0,281	0,327
14	0,208	0,226	0,262	0,302
16	0,195	0,213	0,249	0,291
18	0,185	0,201	0,234	0,272
20	0,176	0,192	0,223	0,266
25	0,159	0,173	0,202	0,236
30	0,146	0,159	0,186	0,219
40	0,127	0,139	0,161	0,190
50	0,114	0,125	0,145	0,173
60	0,105	0,114	0,133	0,159
75	0,094	0,102	0,119	0,138
100	0,082	0,089	0,104	0,121

Table pour les grandes valeurs de n

q	$0,90$	$0,95$	$0,99$	$0,999$
ε	$0,816/\sqrt{n}$	$0,888/\sqrt{n}$	$1,038/\sqrt{n}$	$1,212/\sqrt{n}$

1. Cette table provient du livre "Nonparametric Statistical Inference" de Gibbons et Chakraborti. Elle a été obtenue par simulations

Test de Lilliefor pour la distribution exponentielle

La table [2] ci-dessous donne la valeur critique t_ε telle que $P(D_n > t_\varepsilon) = \varepsilon$ pour le test de Lilliefor pour la distribution exponentielle avec

$$D_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \hat{F}(x)|$$

où F_n est la fonction de répartition empirique est $\hat{F}(x) = 1 - e^{-x/\bar{x}}$.

n \ ε	0,90	0,95	0,99	0,999
4	0,444	0,483	0,556	0,626
5	0,405	0,443	0,514	0,585
6	0,374	0,410	0,477	0,551
7	0,347	0,381	0,444	0,509
8	0,327	0,359	0,421	0,502
9	0,310	0,339	0,399	0,460
10	0,296	0,325	0,379	0,444
11	0,284	0,312	0,366	0,433
12	0,271	0,299	0,350	0,412
14	0,271	0277	0,325	0,388
16	0,237	0,261	0,311	0,366
18	0,224	0,247	0,293	0,328
20	0,213	0,234	0,279	0,329
25	0,192	0,211	0,251	0,296
30	0,176	0,193	0,229	0,270
40	0,153	0,168	0,201	0,241
50	0,137	0,150	0,179	0,214
60	0,125	0,138	0,164	0,193
75	0,113	0,124	0,146	0,173
100	0,098	0,108	0,127	0,150

<u>Table pour les grandes valeurs de n</u>

q	0,90	0,95	0,99	0,999
ε	$0,980/\sqrt{n}$	$1,077/\sqrt{n}$	$1,274/\sqrt{n}$	$1,501/\sqrt{n}$

2. Cette table provient du livre "Nonparametric Statistical Inference" de Gibbons et Chakraborti. Elle a été obtenue par simulations

12 Test de Kolmogorov Smirnov à deux échantillons

Les tables ci-dessous donne la valeur critique t_α de la zone de rejet $\{D_{n_1,n_2} \geq t_\alpha\}$, resp. $\left\{D^+_{n_1,n_2} \geq t_\alpha\right\}$, au niveau α% pour le test bilatéral, resp. unilatéral, de Kolmogorov Smirnov à deux échantillons, avec

$$D_{n_1,n_2} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)|, \quad D^+_{n_1,n_2} := \sup_{x\in\mathbb{R}} (F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x))$$

F_{n_1} étant la fonction de répartition empirique du premier échantillon de taille n_1 et G_{n_2} celle du deuxième échantillon de taille n_2 (avec $n_1 \neq n_2$). Pour un niveau $\alpha = 5\%$, il faut prendre les valeurs au dessus de la diagonale et pour un niveau $\alpha = 1\%$, celles en dessous de la diagonale.

On rappelle que lorsque $n_1 = n_2 = n$, alors

$$P_0(nD_{n,n} \geq k) = 2P_0(nD^+_{n,n} \geq k) = 2\sum_{j=1}^{[n/k]} (-1)^{j+1} \frac{(n!)^2}{(n-jk)!(n+jk)!},$$

P_0 étant la probabilité sous l'hypothèse nulle selon laquelle les deux échantillons ont la même loi.

Avec le logiciel `R` : la commande `ks.test(x,y,alternative)` permet de réaliser un test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons (il faut être prudent, car c'est la même commande qui permet de faire le test de Kolmogorov-Smirnov à un seul échantillon).

Tables des valeurs t_α telles que $P\left(D_{n_1,n_2} \geq t_\alpha\right) \simeq \alpha$
au dessus de la diagonale pour $\alpha = 5\%$ et en dessous de la diagonale pour $\alpha = 1\%$ pour $n_1 \neq n_2$.

n_2 \ n_1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5		0,800	0,800	0,750	0,778	0,800	0,709	0,717	0,692	0,657	0,733	0,800	0,647	0,667	0,642	0,650
6	1,000		0,714	0,708	0,722	0,667	0,652	0,667	0,667	0,643	0,533	0,625	0,667	0,667	0,614	0,600
7	1,000	0,857		0,714	0,667	0,657	0,623	0,631	0,615	0,643	0,590	0,571	0,571	0,571	0,571	0,564
8	0,875	0,833	0,857		0,639	0,600	0,602	0,625	0,596	0,571	0,558	0,625	0,566	0,611	0,539	0,550
9	0,889	0,883	0,778	0,764		0,589	0,596	0,583	0,556	0,556	0,556	0,542	0,536	0,556	0,520	0,517
10	0,900	0,800	0,757	0,750	0,700		0,545	0,550	0,569	0,529	0,533	0,525	0,524	0,511	0,495	0,550
11	0,818	0,818	0,766	0,727	0,707	0,700		0,545	0,524	0,532	0,509	0,506	0,497	0,490	0,488	0,486
12	0,833	0,833	0,714	0,708	0,694	0,667	0,652		0,519	0,512	0,517	0,500	0,490	0,500	0,474	0,483
13	0,800	0,769	0,714	0,692	0,667	0,646	0,636	0,608		0,489	0,492	0,486	0,475	0,470	0,462	0,462
14	0,800	0,762	0,786	0,679	0,66	0,643	0,623	0,619	0,571		0,467	0,473	0,467	0,460	0,455	0,450
15	0,800	0,767	0,714	0,675	0,667	0,667	0,618	0,600	0,590	0,586		0,475	0,455	0,456	0,446	0,450
16	0,800	0,750	0,688	0,688	0,653	0,625	0,602	0,604	0,582	0,563	0,554		0,456	0,444	0,437	0,437
17	0,800	0,716	0,706	0,647	0,647	0,624	0,588	0,583	0,576	0,563	0,557	0,526		0,435	0,437	0,429
18	0,788	0,778	0,690	0,653	0,667	0,600	0,596	0,583	0,585	0,556	0,544	0,535	0,536		0,415	0,422
19	0,747	0,728	0,684	0,645	0,626	0,595	0,584	0,570	0,559	0,556	0,533	0,526	0,514	0,515		0,421
20	0,800	0,733	0,664	0,650	0,617	0,650	0,577	0,583	0,550	0,543	0,533	0,525	0,515	0,506	0,492	

Tables des valeurs t_α telles que $P\left(D_{n,n} \geq t_\alpha\right) \simeq \alpha$.

α \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,05	1,000	0,833	0,857	0,750	0,667	0,700	0,636	0,583	0,538	0,571	0,533	0,500	0,471	0,500	0,474	0,450
0,01	1,000	1,000	0,857	0,875	0,778	0,800	0,727	0,667	0,692	0,643	0,600	0,625	0,583	0,555	0,526	0,550

Table pour les grandes valeurs de n

q	$0,20$	$0,1$	$0,05$	$0,02$	$0,01$
ε	$1,07\sqrt{N/nm}$	$1,22\sqrt{N/nm}$	$1,36\sqrt{N/nm}$	$1,52\sqrt{N/nm}$	$1,63\sqrt{N/nm}$

Tables des valeurs t_α telles que $P\left(D^+_{n_1,n_2} \geq t_\alpha\right) \simeq \alpha$
au dessus de la diagonale pour $\alpha = 5\%$ et en dessous de la diagonale pour $\alpha = 1\%$ pour $n_1 \neq n_2$.

n_2 \ n_1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5		0,800	0,714	0,675	0,667	0,700	0,636	0,600	0,615	0,600	0,667	0,600	0,588	0,578	0,589	0,600
6	1,000		0,667	0,625	0,611	0,600	0,576	0,667	0,590	0,571	0,567	0,563	0,649	0,511	0,561	0,550
7	0,857	0,833		0,607	0,571	0,571	0,571	0,547	0,549	0,571	0,533	0,526	0,513	0,516	0,519	0,514
8	0,875	0,833	0,750		0,556	0,550	0,545	0,500	0,519	0,517	0,500	0,563	0,500	0,500	0,487	0,500
9	0,800	0,778	0,746	0,750		0,556	0,525	0,528	0,504	0,500	0,511	0,479	0,484	0,500	0,468	0,467
10	0,800	0,733	0,714	0,700	0,678		0,518	0,500	0,492	0,486	0,500	0,475	0,465	0,456	0,447	0,500
11	0,800	0,742	0,714	0,693	0,636	0,627		0,485	0,469	0,474	0,461	0,455	0,455	0,444	0,440	0,436
12	0,800	0,750	0,690	0,667	0,639	0,617	0,583		0,455	0,464	0,467	0,458	0,441	0,444	0,434	0,433
13	0,769	0,692	0,692	0,644	0,624	0,600	0,601	0,590		0,428	0,446	0,438	0,434	0,423	0,421	0,415
14	0,729	0,714	0,714	0,643	0,635	0,600	0,584	0,560	0,560		0,438	0,428	0,420	0,413	0,414	0,407
15	0,800	0,700	0,667	0,625	0,622	0,600	0,576	0,567	0,574	0,529		0,421	0,412	0,411	0,400	0,417
16	0,738	0,688	0,65	0,688	0,604	0,588	0,568	0,562	0,538	0,536	0,500		0,401	0,403	0,395	0,400
17	0,741	0,667	0,647	0,625	0,601	0,582	0,556	0,549	0,534	0,525	0,514	0,511		0,386	0,390	0,383
18	0,722	0,722	0,659	0,611	0,611	0,578	0,545	0,556	0,526	0,519	0,511	0,493	0,490		0,389	0,378
19	0,737	0,675	0,647	0,612	0,579	0,547	0,545	0,535	0,526	0,508	0,498	0,497	0,489	0,468		0,379
20	0,750	0,667	0,650	0,625	0,578	0,600	0,536	0,533	0,519	0,507	0,500	0,488	0,479	0,472	0,450	

Tables des valeurs t_α telles que $P\left(D^+_{n,n} \geq t_\alpha\right) \simeq \alpha$.

α \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,05	0,800	0,833	0,714	0,625	0,667	0,600	0,545	0,500	0,538	0,500	0,467	0,438	0,471	0,444	0,421	0,400
0,01	1,000	1,000	0,857	0,750	0,778	0,700	0,727	0,667	0,615	0,571	0,600	0,563	0,529	0,555	0,526	0,500

Table pour les grandes valeurs de m et n ($n > 100$)

q	$0,2$	$0,1$	$0,05$	$0,02$	$0,01$
ε	$1,07/\sqrt{mn/(m+n)}$	$1,22/\sqrt{mn/(m+n)}$	$1,36/\sqrt{mn/(m+n)}$	$1,52/\sqrt{mn/(m+n)}$	$1.63/\sqrt{mn/(n+m)}$