Optimisation

Examen 1er juin 2021 (rattrapage)
Durée : 3 heures

Exercice 1 On veut résoudre le problème $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ avec $f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2x_2^2 + 10$ en utilisant la méthode de gradient à pas optimal au départ du point $x^{(0)} = (1, -2)^T$.

1. Déterminer la direction $d^{(0)}$ de déplacement et le pas optimal ρ_0 dans cette direction. Quel est le nouveau point $x^{(1)}$?

2. Supposons que l'on veut faire une minimisation approchée (recherche linéaire) en utilisant le règle de Goldstein avec paramètres $m_1 = 1/4$ et $m_2 = 1/3$. Quelles conditions doit vérifier le pas $\tilde{\rho}_0$ définissant le nouvel itéré $\tilde{x}^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{\rho}_0 d^{(0)}$? Vérifier si $\tilde{\rho}_0 = 1/4$ satisfait les conditions.

Exercice 2

1. Écrire le programme linéaire

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & 3x_1 - x_3 + 5x_4 \\ \text{s.c.} & -6x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ & 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_3 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_4 \leq 0 \end{array}$$

   sous forme canonique $(\mathcal{P})_c$ et sous forme standard $(\mathcal{P})_s$.

2. Écrire le dual $(\mathcal{D})$ du programme linéaire $(\mathcal{P})$.

Exercice 3 On considère le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} & 5x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

1. Combien de sommets peut avoir l'ensemble admissible au plus?

2. Pour chaque base $\mathcal{B} = \{i, j\}$, $1 \leq i < j \leq 4$, vérifier si elle est une base réalisable. Dans le cas échéant vérifier si elle est dégénérée ou non-dégénérée et si elle satisfait les conditions suffisantes d'optimalité.

Exercice 4 Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'oeuvre. Produire une unité de bien nécéssite :

- 0.5 heures de machine et 2 heures de main d'oeuvre avec la première technique ;
- 1.5 heures de machine et 1.5 heures de main d'oeuvre pour la deuxième technique ;
- 2 heures de machine et 0.5 heures de main d'oeuvre pour la troisième technique.

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12h et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15h. L'entreprise cherche à maximiser ses bénéfices, les marges unitaires étant de 3 euros, 4 euros et 5 euros selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

1. Écrire le programme linéaire que doit résoudre l'entreprise.
2. Résoudre le problème par la méthode du simplexe.
3. Comment écrire que l'on désire satisfaire une demande d'au moins 10 unités ? Cela modifie-t-il la solution précédente ? (Justifier votre réponse.)
4. On considère le sommet $x_1 = 96/15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 66/15$, $x_4 = x_5 = 0$.
   (a) Quelle est la base $\mathcal{B}$ correspondante ?
   (b) Écrire la fonction objectif en fonction des variables hors base.
   (c) Quel est le vecteur des coûts réduits correspondant à cette base ?
   (d) Utiliser la condition suffisante d'optimalité pour conclure si ce sommet est optimal.

Exercice 5 On considère le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \max & -(x_1 + x_2) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 4x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1. Résoudre graphiquement le problème. Quelle est la valeur optimale ?
2. Donner la solution optimale du dual en appliquant le théorème des écarts complémentaires.
3. On s'intéresse maintenant au calcul du minimum de la même fonction objectif soumise aux mêmes contraintes. Étudier l'existence d'une solution optimale en utilisant les propriétés de la dualité.