Traitement du signal

Charles Vin

2022

Cours de

- Hassam Aboushady, équipe CIAN : hassam.aboushady@lip6.fr. Cours inspiré des 5 premiers chapitre du livre "B.P.Lathi, Linear Signals & Systems, Oxford University Press 2005"
- Sebastien Baey : sebastien.baey@lip6.fr

Modalité d'examen :

- Un exam par professeur après chaque partie.
- Pour Aboushady : 60% exam, 40% sur les CR de TD chaque semaine into 50% de la note finale + une feuille A4
- Pour Baey à voir

Table des matières

- Signaux et opération utiles
- Traitement de signal dans le domaine Temporel (convolution)
  - Temps continu
  - Temps discret
- Traitement de signal dans le domaine fréquentiel
  - Transformé de Laplace (Temps continu)
  - Transformé en Z (Temps discret)
- Filtrage en temps continu/discret

Quatres type de signal : Temps continu/discret X Amplitude Analogique(continue)/numérique(discret). D'un point de vu technique, le type d'amplitude ne change pas grand chose (ça rajoute juste une erreur qu'on modélise comme du bruit). Ce qui est important est le type de temps.

1 Opération sur les signaux

1.1 Quelques révisions

On a

- Un signal $x(t)$ en entrée
- Qui passe dans un système $h(t)$
- Qui sort un autre signal $y(t)$

3 opérations : Voir les graphique dans OneNote

- Décalage : On décale le signal dans le temps $x(t+T), x(t-T)$
- Etalage et compression dans le temps :
  - Etalage : $x(t/2)$ Aplatie la courbe dans le temps
  - Compression : $x(2t)$ L'inverse
- Inversion : $x(-t)$: symétrie par rapport à l'ordonnée.

On vas écrire les fonctions de signal en utilisant cette fonction

$$\begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Exemple 1.1. Exprimer $x(t)$ en fonction de $u(t)$. Voir OneNote

Définition 1.1 (L'impulsion (dirac))**.** On mesure l'impulsion (le saut si on prend une porte) avec cette fonction. L'amplitude ici est infini (mot du prof mais genre la pente est infini).

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

En faite il le mesure avec cette fonction mais il a fait un dessin où il fait tendre $\epsilon \to 0$ pour reserrer la fenêtre de l'intégrale autour de la porte

Définition 1.2 (L'exponentiel)**.** On passe dans les complexes où on écrit le nombre imaginaire avec i ou j (pour pas confondre le i de l'intensité du courant).

$$
\begin{aligned}
e^{st} &\text{ avec } s = a + jb \\
e^{st} &= e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} \\
&= e^{at}(\cos(bt) + j\sin bt)
\end{aligned}
$$

1.2 La convolution

Définition 1.3. En gardant en tête la définition de tout à l'heure avec le signal d'entrée $x(t)$ et le système $h(t)$. On définie l'intégrale de la convolution tel que

$$
\begin{aligned}
y(t) = x(t) \star h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau d\tau)
\end{aligned}
$$

Exemple 1.2. Déterminez la réponse d'un système définit par $h(t) = e^{-2t}u(t)$ à une entrée $x(t) = e^{-t}u(t) \to u(\tau)$.

$$
\begin{aligned}
y(t) = x(t) \star h(t) &= \int_{(\infty)}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau
\end{aligned}
$$

Voir figure 1.

Proposition 1.1 (de la convolution)**.** *Quelques propriété de la convolution*

- *Commutativité :* $x_1(t) \star x_2(t) = x_2(t) \star x_1(t)$
- *Distributivité : toi même tu sais*
- *Associativité :* $x_1(t) \star x_2(t) \star x_3(t) = (x_1(t) \star x_2(t))x_3(t) = x_1(t) \star (x_2(t) \star x_3(t))$
- *Décalage : Si* $x_1(t) \star x_2(t) = c(t)$ *alors*

$$
\begin{aligned}
x_1(t) \star x_2(t-T) &= c(t-T) \\
x_1(t-T) \star x_2(t) &= c(t-T) \\
x_1(t-T_1) \star x_2(t-T_2) &= c(t-T_1-T_2)
\end{aligned}
$$

- *Convolution avec une impulsion :* $x(t) \star \delta(t) = x(t)$
- *La durée de la convolution : On somme les deux durées (temps entre le zéro du début et celui de la fin). Soit un signal* $x_1(t)$ *d'une durée* T_1 *et un signal* $x_2(t)$ *d'une durée* T_2*. Alors* $x_1(t) \star x_2(t)$ *à une durée de* $T_1 + T_2$*.*

1.2.1 La convolution graphique de $x(t) \star h(t)$

1. Je garde $x(\tau)$ fixe (ou $h(t)$)
2. Je trace $h(-\tau)$ (ou $x(t)$)
3. Je décale $h(-\tau)$ pour une valeur de t (ou $x(t)$)
4. J'intègre $x(\tau)h(t-\tau)$ dans chaque cas (ou inverses)
5. Je répète 3. et 4. pour différentes valeurs de t

Exemple 1.3. Trouvez la convolution de $x(t), h(t)$. Voir one note

<u>Nouveau **TP** du 22/09</u>

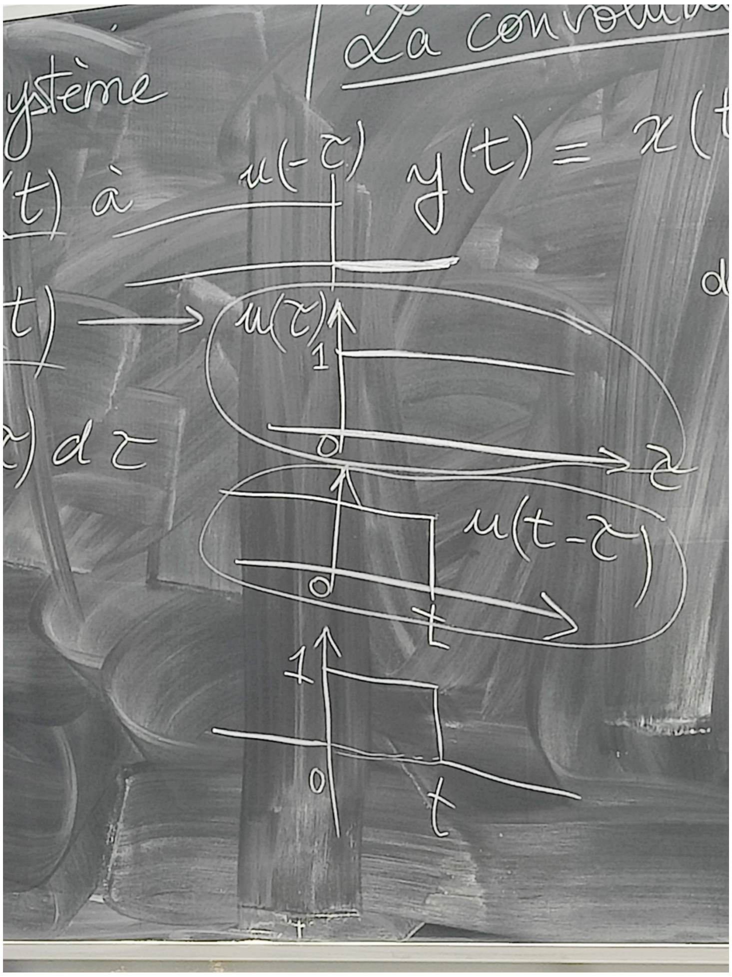

Figure 1 – Exemple convolution

Définition 1.4 (Parité). Fonction paire et impaire
- si $x(t) = x(-t) \to$ fonction paire
- si $x(t) = -x(t) \to$ fonction impaire

On peut écrire une fonction $x(t)$ de ses composantes paire et impaire.

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Exercise 1.4 (1). Écrivez $x(t) = e^{-at}u(t)$ en fonction de ses composantes paires et impaires.
- La fonction paire $x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$
- La fonction impaire $\frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Dessin dans OneNote.

2 Système linéaire et invariant dans le temps

Définition 2.1 (Système linéaire et invariant dans le temps). Le système doit être **additif**, **homogène** et **invariant dans le temps**.
- Additif : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système $h(t)$ est additif.
- Homogène : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système $h(t)$ est homogène.
- Invariant dans le temps : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système est invariant dans le temps.
- Voir dessin Onenote

Exercise 2.1 (2). Trouvez si les systèmes suivant sont linéaire et invariant dans le temps.

$$y(t) = x(t)cos(2\pi ft) \tag{1}$$
$$y(t) = sin(x(t)) \tag{2}$$

Réponse dans OneNote

Exercise 2.2. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - u(t-4) \\ h(t) &= tu(t) \end{aligned}$$

Correction dans OneNote :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Exercise 2.3. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - u(t-4) \\ h(t) &= tu(t) \end{aligned}$$

Correction dans OneNote

Exercise 2.4. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t)[u(t) - u(t-2\pi)] \\ h(t) &= u(t-1) - u(t-3) \end{aligned}$$

Correction dans OneNote

A rendre sous forme de compte rendu avant le 28/09/2022

Exercise 2.5. Trouver les composante paires et impaires de $x(t)$: Dessin OneNote

Exercise 2.6. Déterminez si les systèmes suivants sont linéaire et invariant dans le temps

$$y(t) = t^2 \frac{dx(t)}{dt} \tag{3}$$
$$y(t) = \cos(2\pi f t + x(t)) \tag{4}$$

Exercise 2.7. Trouver la convolution de $x(t)$ et $h(t)$:

— Dessin OneNote

$$x(t) = 2u(t-10)$$
$$h(t) = \sin(2t)u(t)$$

—

$$x(t) = u(t)$$
$$h(t) = \text{ voir onenote}$$

— Voir OneNote

Exercise 2.8. Tracer avec MatLab les 3 courbes suivantes sur la même figure $\forall t \in [0, 10]$

$$w(t) = e^{-t} \tag{5}$$
$$x(t) = te^{-t} \tag{6}$$
$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} \tag{7}$$

Intro MatLab Commande importante

— Size : check la size d'un vecteur
— Length : Pareil pour les matrices
— Load/Save : Sauver des résultats

On évite i et j car dans MatLab c'est les variables complexes.
Faire attention au opérateur $*$ = le produit scalaire et $.*$ = le produit terme à terme de matrice.
Faire le graph de sin :

$$t = 1 : 0.001 : 10$$
$$y = sin(t)$$
$$plot(t, y)$$
$$xlabel('\text{Temps en seconde}')$$
$$ylabel('\text{Amplitude}')$$

Log scale : $semilogx(f, module)$, $subplot$ pour subplot.
Plusieurs courbes :

$$x_1 = e^{-t}$$
$$x_2 = t$$
$$x_3 = t + e^{-t}$$
$$plot(t, x_1,' b', t, x_2,' r', t, x_3,' g')$$
$$c$$

Nouveau cours du 23/09

2.1 La transformé de Laplace

Dans le cas de la transformé de Laplace on a

$$x(t) \to h(t) \to y(t).$$

qui devient

$$X(S) \to H(S) \to Y(S) = X(S)H(S).$$

Définition 2.2 (La transformé de Laplace)**.**

$$\begin{aligned} X(S) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt \end{aligned}$$

avec $S = \sigma + j\omega$ (imaginaire), $w = 2\pi f, f =$ la frequence

Exemple 2.9 (Laplace)**.** Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-St}dt = [\frac{e^{St}}{-S}]_0^\infty \\ &= 0 - \frac{e^0}{-S} = \frac{1}{S} \end{aligned}$$

Exemple 2.10. Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)u(t)e^{St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \cos(omega_0 t)e^{-St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} (\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2})e^{St}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{t(j\omega_0 - S)} + e^{-t(j\omega_0 + S)}dt \\ &= \frac{1}{2}[\frac{e^{t(j\omega_0 - S)}}{j\omega_0 - S} - \frac{e^{-t(j\omega_0 + S)}}{j\omega_0 + S}]_0^\infty \\ &\text{Ici y'a un problème de convergence avec le } +\infty \text{ le prof ne sais pas} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{0-1}{j\omega_0 - S} + \frac{0-1}{-(j\omega_0 + S)}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{S - j\omega_0} + \frac{1}{S + j\omega_0}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{S + j\omega_0 + S - j\omega_0}{S^2 + \omega_0^2}) \\ &= \frac{S}{S^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Proposition 2.1 (importante de la transformé de Laplace)**.**
- *Addition :* $\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = X_1(S) + X_2(S)$
- *Dérivé (sous condition) :* $\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\}$
- *Dérivé seconde :* $\mathcal{L}\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\}$
- *Intégrale :* $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$
- ***Convolution*** *:* $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
- *Time shifting :* $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$

2.2 Transformé de Laplace Inverse

Exemple 2.11 (Transformé de Laplace Inverse)**.** Cas général avec décomposition en élément simple.

$$H(S) = \frac{7S - 6}{S^2 - S - 6}.$$

Racine du dénominateur : 3 et $-2 \rightarrow$ Factorisation du dénominateur en $(S-3)(S+2)$

$$\frac{7S - 6}{(S-3)(S+2)} = \frac{A}{S+2} + \frac{B}{S+2}.$$

Pour trouver A et B : Trois techniques

— Par identification en remultipliant en haut et en bas
— Multiplier par un des facteurs à gauche et à droite pour simplifier une des fractions, remplacer S par -2 pour obtenir $-2+2=0$, ça simplifie plein de truc et hop on peut retrouver B facilement.
—

Bref ici $A=4$ et $B=3$

$$\begin{aligned}&H(S)=\frac{4}{S+2}+\frac{3}{S-3}\\&\downarrow \mathcal{L}^{-1}\\&h(t)=4e^{-2t}u(t)+3e^{3t}u(t)\end{aligned}$$

2.3 Expression générale d'un système linéaire invariant dans le temps

$$\begin{aligned}&\frac{d^N}{dt^N}y(t)+a_{N-1}\frac{d^N}{dt^N}y(t)+\dots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)\\=&b_M\frac{d^Mx(t)}{dt^M}+b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}}+\dots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)\end{aligned}$$

En supposant toutes les conditions initiales nulles et en appliquant la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}&[S^N+a_{N-1}S^{N-1}+\dots+a_1S+a_0]Y(S)=[b_MS^M+b_{M-1}S^{M-1}+\dots+Sb_1+b_0]X(S)\\\Leftrightarrow&\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{b_MS^M+b_{M-1}S^{M-1}+\dots+Sb_1+b_0}{S^N+a_{N-1}S^{N-1}+\dots+a_1S+a_0}\\\Leftrightarrow&H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{(S+z_1)+(S+z_2)+\dots+(S+z_M)}{(S+p_1)+(S+p_2)+\dots+(S+p_N)}\end{aligned}$$

Avec $H(S)$ la fonction de transfert, $z_1,\dots,z_M$ les **zéros de la fonction de transfert** et $p_1,\dots,p_N$ les **pôles de la fonction de transfert**.

$$\begin{aligned}&H(S)=\frac{1}{S+p_1}+\frac{B}{S+p_2}+\dots+\frac{N}{S+p_N}\\&\mathcal{L}^{-1}\downarrow\\&h(t)=Ae^{-p_1t}+Be^{-p_2t}+\dots+Ne^{-p_Nt}\end{aligned}$$

Exemple 2.12 (Stabilité d'un système LTI)**. uniquement les pôles ont une influence sur la stabilité (?)**

$$\begin{aligned}H(S)&=\frac{1}{S+p_1}\to_{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=e^{-p_1t}\\&=\frac{1}{s-p_1}\to_{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=e^{p_1t}\end{aligned}$$

C'est une formule que l'on retrouve dans la table de la transformé de Laplace qu'il a distribué.

Les poles sont les racines de la fonction de transfert $H(S)$**!**. Ici c'est un réel donc il est sur l'axe des abscises. Voir dessin OneNote

Nouveau **TP** du 29/09

Exemple 2.13 (autre exemple)**.** Voir les dessins dans OneNote.

$$H(S)=\frac{1}{S}\to_{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=u(t),\text{Pole = }\{(0,0)\}\tag{8}$$

$$H(S)=\frac{1}{S^2}\to_{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=tu(t),\text{Pole = }\{(0,0),(0,0)\}\text{ (je crois)}\tag{9}$$

$$H(S)=\frac{1}{(S+(a+jb))(S-(a-jb))}\to_{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=u(t),\text{Pole = }\{\text{bcp OneNote}\}\tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Dans ce dernier cas, on a certaine condition de stabilité

— Stable : Si tous les pôles sont dans la partie gauche du plans complexe
— Instable :
  — Au moins un pôle dans la partie droite du plan complexe
  — Il existe au moins un pôle multiple sur l'axe imaginaire
— Conditionnellement stable : Il existe un pôle simple sur l'axe imaginaire ($a = 0$)
— Comme d'hab dessin dans OneNote

2.3.1 La réponse en fréquence

Pour tracer la réponse en fréquence on remplace S par $j\omega$

Exemple 2.14.

$$H(S) = \frac{S + 0.1}{S + 5}$$
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 5}$$
$$\text{Le Modules : } |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0.1^2}}{\sqrt{\omega^2 + 5^2}}$$
$$\text{La Phase : } \lfloor H(j\omega) = \arctan\frac{\omega}{0.1} - \arctan(\frac{\omega}{5})$$

Graphique du module et de la phase dans OneNote.

Note. Dans la suite on vas voir la méthode du diagrame de Bode qui permet "d'obtenir les graphiques" sans logiciel. On vas voir comment le 5 et le 0.1 affecte la phase et le module.

Le diagramme de Bode

Exemple 2.15.

$$\begin{aligned}
H(S) &= K\frac{(S + a_1)(S + a_2)}{S(S + b_1)(S^2 + b_2S + b_3)} \\
&= \text{ forme avec } a_1, a_2 \text{ en facteur commun} \\
&= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{(1 + S/a_1)(1 + S/a_2)}{S(1 + S/b_1)(1 + S * b_2/b_2 + S^2/b_3)} \\
|H(j\omega)| &= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{|1 + j\omega||1 + j\omega/a_2|}{|j\omega||1 + j\omega/b_1||1 + j\omega b_2/b_3 + |j\omega|^2/b_3|} \\
20\log|H(j\omega)| &= 20\log\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} + 20\log|1 + j\omega/a_1| + 20\log|1 + j\omega/a_2| \\
&\quad - 20\log j\omega - 20\log|1 + j\omega/b_1| - 20\log|1 + j\omega b_2/b_3 + (j\omega)^2/b_2| \\
&\quad \text{Il est maintenant facile de trouver la phase? ou les pôles? Je sais plus ce qu'il a dit}
\end{aligned}$$

$$\lfloor H(j\omega) = \arctan(\omega/a_1) + \arctan(\omega/a_2) - \arctan(\omega/0) - \arctan(\omega/b_1) - \arctan(\frac{\omega b_2/b_3}{1 - \omega^2/b_3})$$

Exemple 2.16 (Réponse en fréquence)**.** Réponse en fréquence de $\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}$:
— Amplitude : $20\log(\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3})$
— Phase $\begin{cases} 0 & \text{si le terme est positif} \\ \pi & \text{si le terme est negatif} \end{cases}$

Exemple 2.17 (Réponse d'un pôle)**.** (Je sais pas si c'est des exemples différents.) Réponse d'un pôle (ou d'un zero) à l'origine : Dessin dans OneNote. Un dec c'est quand on fait $\times 10$, ça va de paire avec l'échelle logarithmique des db

Exemple 2.18. Réponse en fréquence d'un pôle (ou d'un zéro) simple : $1 + \frac{j\omega}{b_1}$
— Pour $\omega << b_1 \to -20\log(1 + j\omega/b_1) \approx -20\log(1) = 0$
— Pour $\omega >> b_1 \to -20\log(1 + j\omega/b_1) \approx -20\log(j\omega/b_1) = 0$
— Pour $\omega = b_1 \to -20\log(1 + j) \approx -20\log(\sqrt{2}) = -3db$

Pour la phase $\lfloor 1 + j\omega/b_1$
- Pour $\omega << b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = 0°$
- Pour $\omega >> b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = 90°$
- Pour $\omega = b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = -45°$

Dessin du module $-20\log|H(j\omega)|$ et de la phase $\lfloor 1 + j\omega/b_1$ dans OneNote.

Exemple 2.19. Pôle ou zero du second ordre

$$S^2 + b_2S + b_3$$
$$S^2 + 2\zeta\omega_nS + \omega_n^2$$
$$\omega_n = \sqrt{b_3}$$
$$2\zeta\omega_n = b_2$$
$$\zeta = \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}$$

Alors pour $H(j\omega) = 20\log(\left|1 + j\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|)$
- Pour $\omega << \omega_n \rightarrow \left|H_(j\omega)\right| \approx 20\log(1) = 0$
- Pour $\omega >> \omega_n \rightarrow \left|H_(j\omega)\right| \approx 20\log(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}) \approx -40\log(\frac{\omega}{\omega_n})$

Pour la phase : $\lfloor K(j\omega) = -\arctan(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2})$
- Pour $\omega << \omega_n \rightarrow\approx \arctan(0) = 0°$
- Pour $\omega >> \omega_n \rightarrow\approx \arctan() = -180°$(mais il sait pas trop il a buge voir la photo onenote)

Exemple 2.20 (Diagramme de Bode)**.** Trouver le diagramme de Bode de

$$H(S) = \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)}.$$

$$H(S) = \frac{20*100}{2*10}\frac{S(1+S/100)}{(1+S/2)(1+S/10)}$$

Note. Le prof précise qu'il ne faut pas forcement remplacer le S par $j\omega$ et tout développer, il a montré ça en tant que démonstration.

La partie constante : $20\log 100 = 40db$
- Voir OneNote pour la suite

CE QUE JE COMPREND PAS
- Conversion en DB
- D'où viennent les pôles qu'on trouve, là ou change les courbes

L'inverse On vas maintenant faire l'inverse. C'est à dire qu'on vas partir d'un graph pour obtenir une équation.

On imagine un point a dans le plans complexe S

$$\begin{aligned}
H(S) &= \frac{(S+z_1)(S+z_2)\dots(S+z_M)}{(S+p_1)(S+p_2)\dots(S+p_N)} \\
H(a) &= \frac{(a+z_1)(a+z_2)\dots(a+z_M)}{(a+p_1)(a+p_2)\dots(a+p_N)} \\
&= \frac{(r_1+e^{j\phi_1})(r_2+e^{j\phi_2})\dots(r_M+e^{j\phi_M})}{(d_1+e^{j\theta_1})(d_2+e^{j\theta_2})\dots(d_N+e^{j\theta_N})} \\
&= \frac{r_1r_2\dots r_Me^{j(\phi_1+\phi_2+\dots+\phi_M)}}{d_1d_2\dots d_Me^{j(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_M)}}
\end{aligned}$$

Module : $|H(a)| = \frac{r_1r_2\dots r_M}{d_1d_2\dots d_N}$

$$= \frac{\text{Produit des distances entre les zéros et le point } a}{\text{Produit des distances entre les poles et le point } a}$$

Phase : $\lfloor H(a) = (\phi_1+\phi_2+\dots+\phi_M) - (\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_N)$

= (Somme des phases entre les zero et le point) a $-$ Somme des phases entre les poles et le poit a

Exemple 2.21. OneNote