

Traitement du signal

Charles Vin

2022

Cours de

- Hassam Aboushady, équipe CIAN : hassam.aboushady@lip6.fr. Cours inspiré des 5 premiers chapitres du livre "B.P.Lathi, Linear Signals & Systems, Oxford University Press 2005"
- Sebastien Baey : sebastien.baey@lip6.fr

Modalité d'examen :

- Un exam par professeur après chaque partie.
- Pour Aboushady : 60% exam, 40% sur les CR de TD chaque semaine into 50% de la note finale + une feuille A4
- Pour Baey à voir

Table des matières

- Signaux et opération utiles
- Traitement de signal dans le domaine Temporel (convolution)
 - Temps continu
 - Temps discret
- Traitement de signal dans le domaine fréquentiel
 - Transformé de Laplace (Temps continu)
 - Transformé en Z (Temps discret)
- Filtrage en temps continu/discret

Quatre types de signal : Temps continu/discret X Amplitude Analogique(continue)/numérique(discret).

D'un point de vue technique, le type d'amplitude ne change pas grand chose (ça rajoute juste une erreur qu'on modélise comme du bruit). Ce qui est important est le type de temps.

Table des matières

1 Opération sur les signaux	2
1.1 Quelques révisions	2
1.2 La convolution	2
1.2.1 La convolution graphique de $x(t) \star h(t)$	4
2 Système linéaire et invariant dans le temps	4
2.1 La transformé de Laplace	6
2.2 Transformé de Laplace Inverse	7
2.3 Expression générale d'un système linéaire invariant dans le temps	8
2.3.1 La réponse en fréquence	9
3 Signaux discret	11
3.1 La convolution	11
3.2 La transformé en Z	12
3.3 Transformé en Z inverse	12
3.4 Réponse en fréquence d'un système en Temps-Discret	13
3.5 Stabilité des systèmes Temps-Discret	13
3.6 Placement des pôles et des zéros dans le plan complexe Z	14
3.6.1 Tracer le module et la phase d'un point réel	14
3.6.2 Filtre	14
4 Réalisation d'un système temps-continue	15
5 Réalisation d'un système temps-discret	15

6 Filtre	16
6.1 Spécification d'un filtre temps-continu	16
6.1.1 Approximation de Butterworth	16
6.2 Spécification d'un filtre temps discret	17
6.2.1 Transformation bilinéaire	17

1 Opération sur les signaux

1.1 Quelques révisions

On a

- Un signal $x(t)$ en entrée
- Qui passe dans un système $h(t)$
- Qui sort un autre signal $y(t)$

3 opérations : Voir les graphique dans OneNote

- Décalage : On décale le signal dans le temps $x(t + T), x(t - T)$
- Etalage et compression dans le temps :
 - Etalage : $x(t/2)$ Aplatie la courbe dans le temps
 - Compression : $x(2t)$ L'inverse
- Inversion : $x(-t)$: symétrie par rapport à l'ordonnée.

On vas écrire les fonctions de signal en utilisant cette fonction

$$\begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Exemple 1.1. Exprimer $x(t)$ en fonction de $u(t)$. Voir OneNote

Définition 1.1 (L'impulsion (dirac)). On mesure l'impulsion (le saut si on prend une porte) avec cette fonction. L'amplitude ici est infini (mot du prof mais genre la pente est infini).

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

En faite il le mesure avec cette fonction mais il a fait un dessin où il fait tendre $\epsilon \rightarrow 0$ pour reserrer la fenêtre de l'intégrale autour de la porte

Définition 1.2 (L'exponentiel). On passe dans les complexes où on écrit le nombre imaginaire avec i ou j (pour pas confondre le i de l'intensité du courant).

$$\begin{aligned} e^{st} \text{ avec } s &= a + jb \\ e^{st} &= e^{(a+jb)t} = e^{at} e^{jbt} \\ &= e^{at} (\cos(bt) + j \sin bt) \end{aligned}$$

1.2 La convolution

Définition 1.3. En gardant en tête la définition de tout à l'heure avec le signal d'entrée $x(t)$ et le système $h(t)$. On définit l'intégrale de la convolution tel que

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \star h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Exemple 1.2. Déterminez la réponse d'un système définit par $h(t) = e^{-2t}u(t)$ à une entrée $x(t) = e^{-t}u(t) \rightarrow u(\tau)$.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \star h(t) = \int_{(\infty)}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

Voir figure 1.

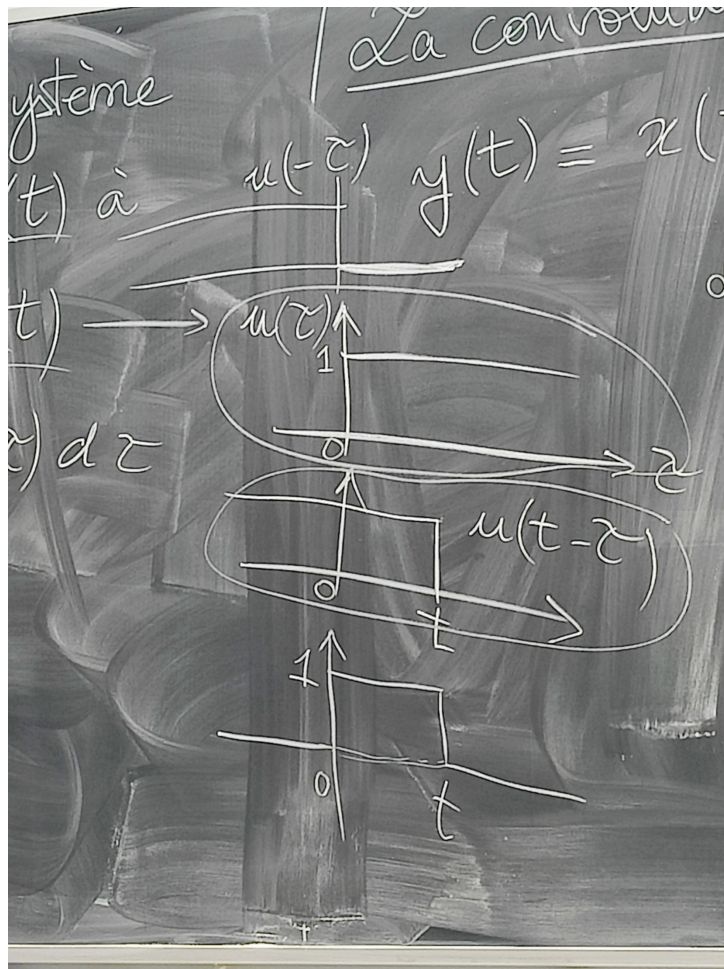


Figure 1 - Exemple convolution

Propriété 1.1 (de la convolution). *Quelques propriétés de la convolution*

- *Commutativité* : $x_1(t) \star x_2(t) = x_2(t) \star x_1(t)$
- *Distributivité* : *toi même tu sais*
- *Associativité* : $x_1(t) \star x_2(t) \star x_3(t) = (x_1(t) \star x_2(t)) \star x_3(t) = x_1(t) \star (x_2(t) \star x_3(t))$
- *Décalage* : Si $x_1(t) \star x_2(t) = c(t)$ alors

$$\begin{aligned}x_1(t) \star x_2(t - T) &= c(t - T) \\x_1(t - T) \star x_2(t) &= c(t - T) \\x_1(t - T_1) \star x_2(t - T_2) &= c(t - T_1 - T_2)\end{aligned}$$

- *Convolution avec une impulsion* : $x(t) \star \delta(t) = x(t)$
- *La durée de la convolution* : On somme les deux durées (temps entre le zéro du début et celui de la fin). Soit un signal $x_1(t)$ d'une durée T_1 et un signal $x_2(t)$ d'une durée T_2 . Alors $x_1(t) \star x_2(t)$ a une durée de $T_1 + T_2$.

1.2.1 La convolution graphique de $x(t) \star h(t)$

1. Je garde $x(\tau)$ fixe (ou $h(t)$)
2. Je trace $h(-\tau)$ (ou $x(t)$)
3. Je décale $h(-\tau)$ pour une valeur de t (ou $x(t)$)
4. J'intègre $x(\tau)h(t - \tau)$ dans chaque cas (ou inversement)
5. Je répète 3. et 4. pour différentes valeurs de t

Exemple 1.3. Trouvez la convolution de $x(t), h(t)$. Voir une note

Nouveau TP1 du 22/09

Définition 1.4 (Parité). Fonction paire et impaire

- si $x(t) = x(-t) \rightarrow$ fonction paire
- si $x(t) = -x(-t) \rightarrow$ fonction impaire

On peut écrire une fonction $x(t)$ de ses composantes paire et impaire.

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Exercice 1.4 (1). Écrivez $x(t) = e^{-at}u(t)$ en fonction de ses composantes paires et impaires.

- La fonction paire $x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$
- La fonction impaire $\frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Dessin dans OneNote.

2 Système linéaire et invariant dans le temps

Définition 2.1 (Système linéaire et invariant dans le temps). Le système doit être **additif, homogène et invariant dans le temps**.

- Additif : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système $h(t)$ est additif.
- Homogène : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système $h(t)$ est homogène.
- Invariant dans le temps : Si $y_1(t) = y_2(t)$ donc le système est invariant dans le temps.
- Voir dessin Onenote

Exercice 2.1 (2). Trouvez si les systèmes suivants sont linéaire et invariant dans le temps.

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi ft) \tag{1}$$

$$y(t) = \sin(x(t)) \tag{2}$$

Réponse dans OneNote

Exercice 2.2. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$x(t) = u(t) - u(t - 4)$$

$$h(t) = tu(t)$$

Correction dans OneNote :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

Exercice 2.3. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$x(t) = u(t) - u(t - 4)$$

$$h(t) = tu(t)$$

Correction dans OneNote

Exercice 2.4. Trouver le résultat de la convolution $x(t) \star h(t)$

$$x(t) = \sin(t)[u(t) - u(t - 2\pi)]$$

$$h(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$$

Correction dans OneNote

A rendre sous forme de compte rendu avant le 28/09/2022

Exercice 2.5. Trouver les composante paires et impaires de $x(t)$: Dessin OneNote

Exercice 2.6. Déterminez si les systèmes suivants sont linéaire et invariant dans le temps

$$y(t) = t^2 \frac{dx(t)}{dt} \quad (3)$$

$$y(t) = \cos(2\pi ft + x(t)) \quad (4)$$

Exercice 2.7. Trouver la convolution de $x(t)$ et $h(t)$:

— Dessin OneNote

$$x(t) = 2u(t - 10)$$

$$h(t) = \sin(2t)u(t)$$

—

$$x(t) = u(t)$$

$$h(t) = \text{voir onenote}$$

— Voir OneNote

Exercice 2.8. Tracer avec MatLab les 3 courbes suivantes sur la même figure $\forall t \in [0, 10]$

$$w(t) = e^{-t} \quad (5)$$

$$x(t) = te^{-t} \quad (6)$$

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} \quad (7)$$

Intro MatLab Commande importante

- Size : check la size d'un vecteur
- Length : Pareil pour les matrices
- Load/Save : Sauver des résultats

On évite i et j car dans MatLab c'est les variables complexes.
 Faire attention au opérateur $*$ = le produit scalaire et $.*$ = le produit terme à terme de matrice.
 Faire le graph de sin :

```
t = 1 : 0.001 : 10
y = sin(t)
plot(t,y)
xlabel('Temps en seconde')
ylabel('Amplitude')
```

Log scale : *semilogx(f, module)*, *subplot* pour subplot.
 Plusieurs courbes :

```
x1 = e^-t
x2 = t
x3 = t + e^-t
plot(t, x1, 'b', t, x2, 'r', t, x3, 'g')
c
```

Nouveau cours du 23/09

2.1 La transformé de Laplace

Dans le cas de la transformé de Laplace on a

$$x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t).$$

qui devient

$$X(S) \rightarrow H(S) \rightarrow Y(S) = X(S)H(S).$$

Définition 2.2 (La transformé de Laplace).

$$\begin{aligned} X(S) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St} dt \end{aligned}$$

avec $S = \sigma + j\omega$ (imaginaire), $\omega = 2\pi f$, f = la frequence

Exemple 2.9 (Laplace). Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{St} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-St} dt = \left[\frac{e^{-St}}{-S} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{e^0}{-S} = \frac{1}{S} \end{aligned}$$

Exemple 2.10. Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)u(t)e^{St} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-St} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)e^{St} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{t(j\omega_0 - S)} + e^{-t(j\omega_0 + S)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(j\omega_0 - S)}}{j\omega_0 - S} - \frac{e^{-t(j\omega_0 + S)}}{j\omega_0 + S} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{0 - 1}{j\omega_0 - S} + \frac{0 - 1}{-(j\omega_0 + S)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{S - j\omega_0} + \frac{1}{S + j\omega_0} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{S + j\omega_0 + S - j\omega_0}{S^2 + \omega_0^2} \right) \\
 &= \frac{S}{S^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

Ici y'a un problème de convergence avec le $+\infty$ le prof ne sais pas

Propriété 2.1 (importante de la transformé de Laplace). — *Addition* : $\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = X_1(S) + X_2(S)$
 — *Dérivé (sous condition)* : $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$
 — *Dérivé seconde* : $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}$
 — *Intégrale* : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{1}{S}X(S)$
 — **Convolution** : $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
 — *Time shifting* : $\mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$

2.2 Transformé de Laplace Inverse

Exemple 2.11 (Transformé de Laplace Inverse). Cas général avec décomposition en élément simple.

$$H(S) = \frac{7S - 6}{S^2 - S - 6}.$$

Racine du dénominateur : 3 et $-2 \rightarrow$ Factorisation du dénominateur en $(S - 3)(S + 2)$

$$\frac{7S - 6}{(S - 3)(S + 2)} = \frac{A}{S + 2} + \frac{B}{S - 3}.$$

Pour trouver A et B : **Trois techniques**

- Par identification en remultipliant en haut et en bas
- Multiplier par un des facteurs à gauche et à droite pour simplifier une des fractions, remplacer S par -2 pour obtenir $-2 + 2 = 0$, ça simplifie plein de truc et hop on peut retrouver B facilement.
-

Bref ici $A = 4$ et $B = 3$

$$\begin{aligned}
 H(S) &= \frac{4}{S + 2} + \frac{3}{S - 3} \\
 \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\
 h(t) &= 4e^{-2t}u(t) + 3e^{3t}u(t)
 \end{aligned}$$

2.3 Expression générale d'un système linéaire invariant dans le temps

$$\begin{aligned} & \frac{d^N}{dt^N}y(t) + a_{N-1}\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t) + \dots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) \\ &= b_M\frac{d^M}{dt^M}x(t) + b_{M-1}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}x(t) + \dots + b_1\frac{d}{dt}x(t) + b_0x(t) \end{aligned}$$

En supposant toutes les conditions initiales nulles et en appliquant la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} & [S^N + a_{N-1}S^{N-1} + \dots + a_1S + a_0]Y(S) = [b_MS^M + b_{M-1}S^{M-1} + \dots + Sb_1 + b_0]X(S) \\ \Leftrightarrow \frac{Y(S)}{X(S)} &= \frac{b_MS^M + b_{M-1}S^{M-1} + \dots + Sb_1 + b_0}{S^N + a_{N-1}S^{N-1} + \dots + a_1S + a_0} \\ \Leftrightarrow H(S) &= \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{(S + z_1)(S + z_2) + \dots + (S + z_M)}{(S + p_1)(S + p_2) + \dots + (S + p_N)} \end{aligned}$$

Avec $H(S)$ la fonction de transfert, z_1, \dots, z_M les **zéros de la fonction de transfert** et p_1, \dots, p_N les **pôles de la fonction de transfert**.

$$\begin{aligned} H(S) &= \frac{1}{S + p_1} + \frac{B}{S + p_2} + \dots + \frac{N}{S + p_N} \\ \mathcal{L}^{-1} \downarrow \\ h(t) &= Ae^{-p_1 t} + Be^{-p_2 t} + \dots + Ne^{-p_N t} \end{aligned}$$

Exemple 2.12 (Stabilité d'un système LTI). **uniquement les pôles ont une influence sur la stabilité (?)**

$$\begin{aligned} H(S) &= \frac{1}{S + p_1} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = e^{-p_1 t} \\ &= \frac{1}{s - p_1} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = e^{p_1 t} \end{aligned}$$

C'est une formule que l'on retrouve dans la table de la transformée de Laplace qu'il a distribué.

Les poles sont les racines de la fonction de transfert $H(S)$! Ici c'est un réel donc il est sur l'axe des abscisses. Voir dessin OneNote

Nouveau TP2 du 29/09

Exemple 2.13 (autre exemple). Voir les dessins dans OneNote.

$$H(S) = \frac{1}{S} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = u(t), \text{ Pole} = \{(0, 0)\} \quad (8)$$

$$H(S) = \frac{1}{S^2} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = tu(t), \text{ Pole} = \{(0, 0), (0, 0)\} \text{ (je crois)} \quad (9)$$

$$H(S) = \frac{1}{(S + (a + jb))(S - (a - jb))} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = u(t), \text{ Pole} = \{\text{bcp OneNote}\} \quad (10)$$

$$(11)$$

Dans ce dernier cas, on a certaine condition de stabilité

- Stable : Si tous les pôles sont dans la partie gauche du plans complexe
- Instable :
 - Au moins un pôle dans la partie droite du plan complexe
 - Il existe au moins un pôle multiple sur l'axe imaginaire
- Conditionnellement stable : Il existe un pôle simple sur l'axe imaginaire ($a = 0$)
- Comme d'hab dessin dans OneNote

2.3.1 La réponse en fréquence

Pour tracer la réponse en fréquence on remplace S par $j\omega$

Exemple 2.14.

$$H(S) = \frac{S + 0.1}{S + 5}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 5}$$

$$\text{Le Modules : } |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0.1^2}}{\sqrt{\omega^2 + 5^2}}$$

$$\text{La Phase : } \angle H(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{0.1} - \arctan \left(\frac{\omega}{5} \right)$$

Graphique du module et de la phase dans OneNote.

Note. Dans la suite on va voir la méthode du diagramme de Bode qui permet "d'obtenir les graphiques" sans logiciel. On va voir comment le 5 et le 0.1 affecte la phase et le module.

Le diagramme de Bode

Exemple 2.15.

$$H(S) = K \frac{(S + a_1)(S + a_2)}{S(S + b_1)(S^2 + b_2S + b_3)}$$

= forme avec a_1, a_2 en facteur commun

$$= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{(1 + S/a_1)(1 + S/a_2)}{S(1 + S/b_1)(1 + S * b_2/b_2 + S^2/b_3)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{|1 + j\omega/a_1||1 + j\omega/a_2|}{|j\omega||1 + j\omega/b_1||1 + j\omega b_2/b_3 + |j\omega|^2/b_3|}$$

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} + 20 \log |1 + j\omega/a_1| + 20 \log |1 + j\omega/a_2| \\ - 20 \log j\omega - 20 \log |1 + j\omega/b_1| - 20 \log |1 + j\omega b_2/b_3 + (j\omega)^2/b_3|$$

Il est maintenant facile de trouver la phase? ou les pôles? Je sais plus ce qu'il a dit

$$\angle H(j\omega) = \arctan(\omega/a_1) + \arctan(\omega/a_2) - \arctan(\omega/0) - \arctan(\omega/b_1) - \arctan\left(\frac{\omega b_2/b_3}{1 - \omega^2/b_3}\right)$$

Exemple 2.16 (Réponse en fréquence). Réponse en fréquence de $\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}$:

- Amplitude : $20 \log \left(\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \right)$
- Phase $\begin{cases} 0 & \text{si le terme est positif} \\ \pi & \text{si le terme est négatif} \end{cases}$

Exemple 2.17 (Réponse d'un pôle). (Je sais pas si c'est des exemples différents.) Réponse d'un pôle (ou d'un zero) à l'origine : Dessin dans OneNote. Un *dec* c'est quand on fait $\times 10$, ça va de paire avec l'échelle logarithmique des *db*

Exemple 2.18. Réponse en fréquence d'un pôle (ou d'un zéro) simple : $1 + \frac{j\omega}{b_1}$

- Pour $\omega \ll b_1 \rightarrow -20 \log(1 + j\omega/b_1) \approx -20 \log(1) = 0$
- Pour $\omega \gg b_1 \rightarrow -20 \log(1 + j\omega/b_1) \approx -20 \log(j\omega/b_1) = 0$
- Pour $\omega = b_1 \rightarrow -20 \log(1 + j) \approx -20 \log(\sqrt{2}) = -3db$

Pour la phase $\angle 1 + j\omega/b_1$

- Pour $\omega \ll b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = 0^\circ$
- Pour $\omega \gg b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = 90^\circ$
- Pour $\omega = b \rightarrow -\arctan(\omega/b_1) = -45^\circ$

Dessin du module $-20 \log |H(j\omega)|$ et de la phase $\angle 1 + j\omega/b_1$ dans OneNote.

Exemple 2.19. Pôle ou zero du second ordre

$$\begin{aligned}
 S^2 + b_2 S + b_3 \\
 S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 \\
 \omega_n = \sqrt{b_3} \\
 2\zeta\omega_n = b_2 \\
 \zeta = \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}
 \end{aligned}$$

Alors pour $H(j\omega) = 20 \log \left(\left| 1 + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| \right)$

- Pour $\omega \ll \omega_n \rightarrow |H(j\omega)| \approx 20 \log(1) = 0$
- Pour $\omega \gg \omega_n \rightarrow |H(j\omega)| \approx 20 \log\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \approx -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

Pour la phase : $\angle K(j\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$

- Pour $\omega \ll \omega_n \rightarrow \approx \arctan(0) = 0^\circ$
- Pour $\omega \gg \omega_n \rightarrow \approx \arctan(\infty) = -180^\circ$ (mais il sait pas trop il a bugé voir la photo onenote)

Exemple 2.20 (Diagramme de Bode). Trouver le diagramme de Bode de

$$H(S) = \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)}.$$

$$H(S) = \frac{20 * 100}{2 * 10} \frac{S(1 + S/100)}{(1 + S/2)(1 + S/10)}$$

Note. Le prof précise qu'il ne faut pas forcément remplacer le S par $j\omega$ et tout développer, il a montré ça en tant que démonstration.

La partie constante : $20 \log 100 = 40 \text{ dB}$

- Voir OneNote pour la suite

CE QUE JE COMPREND PAS

- Conversion en DB
- D'où viennent les pôles qu'on trouve, là où change les courbes

L'inverse On va maintenant faire l'inverse. C'est à dire qu'on va partir d'un graph pour obtenir une équation.

On imagine un point a dans le plans complexe S

$$\begin{aligned}
 H(S) &= \frac{(S + z_1)(S + z_2) \dots (S + z_M)}{(S + p_1)(S + p_2) \dots (S + p_N)} \\
 H(a) &= \frac{(a + z_1)(a + z_2) \dots (a + z_M)}{(a + p_1)(a + p_2) \dots (a + p_N)} \\
 &= \frac{(r_1 + e^{j\phi_1})(r_2 + e^{j\phi_2}) \dots (r_M + e^{j\phi_M})}{(d_1 + e^{j\theta_1})(d_2 + e^{j\theta_2}) \dots (d_N + e^{j\theta_N})} \\
 &= \frac{r_1 r_2 \dots r_M e^{j(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_M)}}{d_1 d_2 \dots d_N e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N)}} \\
 \text{Module : } |H(a)| &= \frac{r_1 r_2 \dots r_M}{d_1 d_2 \dots d_N} \\
 &= \frac{\text{Produit des distances entre les zéros et le point } a}{\text{Produit des distances entre les poles et le point } a} \\
 \text{Phase : } \angle H(a) &= (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N) \\
 &= (\text{Somme des phases entre les zero et le point } a) - \text{Somme des phases entre les poles et le point } a
 \end{aligned}$$

Exemple 2.21. OneNote

DM pour le XX/XX

1. Trouver la transformée de Laplace inverse de

(a) $X(S) = \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3}$

(b) $X(S) = \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3}$

(c) $X(S) = \frac{20}{S(S^2+10S+16)}$

2. Tracer le diagramme de Bode de $H(S) = \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)}$. Tracer la réponse en fréquence de $H(S)$ en utilisant MatLab. Comparer les résultats

$$f = 1 : 0.001 : 1000$$

$$w = 2\pi * f$$

$$S = i * w$$

$$H = S * (S + 100) / \text{la fonction H du dessus}$$

$$\text{module} = 20 * \log_{10}(\text{abs}(H))$$

$$\text{angle}(H)$$

$$\text{plot}(w, \text{module})$$

$$\text{plot}(w, \text{angle})$$

Nouveau cours 2 du 30/09

3 Signaux discret

Opération utiles sur un signal temps-discret

- Décalage dans le temps
- Inversion dans le temps
- Impulsion dans le temps

Signaux utile en temps discret

- Impulsion
- Echelon

Tout dans OneNote comme d'hab.

3.1 La convolution

Réponse d'un système temps-discret à une entrée externe

$$x[n] \rightarrow h[n] \rightarrow y[n].$$

Définition 3.1 (Convolution).

$$\begin{aligned} x[n] \star h[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-m] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \end{aligned}$$

Propriété 3.1 (de la convolution discète).

- *Commutativité* : $x_1[n] \star x_2[n] = x_2[n] \star x_1[n]$
- *Associativité* : $x_1[n] \star (x_2[n] \star x_3[n]) = (x_1[n] \star x_2[n]) \star x_3[n]$
- *Distributivité* : $x_1[n] \star (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] \star x_2[n] + x_1[n] \star x_3[n]$
- *Décalage* : Si $x_1[n] \star x_2[n] = c[n]$ donc $x_1[n-m] \star x_2[n-p] = c[n-m-p]$
- *Causalité* : Si $x[n]$ et $h[n]$ sont des signaux causaux (c'est à dire égal à zero pour $n < 0$) alors $x[n] \star h[n] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m]$

Exemple 3.1. Trouver la convolution de $x[n] \star h[n]$ avec $x[n] = 0.8^n u[n]$, $h[n] = 0.3^n u[n]$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] \star h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \\ &= \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \\ &= \sum_{m=0}^n 0.8^m u[m] 0.3^{n-m} u[n-m] \\ &= \sum_{m=0}^n 0.8^m 0.3^{n-m} \\ &= 0.3^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{0.8}{0.3}\right)^m \end{aligned}$$

Sachant que $\sum_{K=m}^n r^K = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}$

$$y[n] = 2[0.8^{n+1} - 0.3^{n+1}]$$

Exemple 3.2 (Convolution discrete graphique). **Exemple important**
Voir OneNote pour les deux fonctions ainsi que l'exemple.

3.2 La transformé en Z

Définition 3.2.

$$z\{x[n]\} = X[Z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n}.$$

avec $Z = e^{j\Omega}$, $\Omega = \omega T$

Exemple 3.3. Calculez la transformé en Z de $x[n] = \gamma^n u[n]$. C'est une des propriétés du tableau.

$$\begin{aligned} z\{x[n]\} &= X[Z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n Z^{-n} u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{Z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - (\gamma/Z)} \text{ car } \left|\frac{\gamma}{Z}\right| < 1 \\ &= \frac{Z}{Z - \gamma}, |\gamma| < |Z| \end{aligned}$$

On a utilisé la formule suivante $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$

Propriété 3.2. *Propriété de la transformé en Z*

- $z\{x_1[n] + x_2[n]\} = X_1[Z] + X_2[Z]$
- $z\{ax[n]\} = aX[Z]$
- $z\{x[n-m]u[n-m]\} = Z^{-m}X[Z]$
- $z\{x_1[n] \star x_2[n]\} = X_1[Z] * X_2[Z]$

3.3 Transformé en Z inverse

Définition 3.3.

$$X[Z] \rightarrow H[Z] \rightarrow Y[Z] = X[Z]H[Z] \Leftrightarrow H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]}$$

bref idk mais on regarde dans le tableau pour trouver un truc qui ressemble.

Exemple 3.4. Trouver la transformée en Z inverse de

$$X[Z] = \frac{8Z - 19}{(Z - 2)(Z - 3)} = \frac{A}{Z - 2} + \frac{B}{Z - 3}.$$

On regarde dans le tableau pour trouver un truc qui ressemble. Il y a la ligne sept mais elle est plutôt complexe, le prof préfère la six. Pour retomber sur la forme voulue on va utiliser

$$\frac{X[Z]}{Z} = \frac{8Z - 19}{Z(Z - 2)(Z - 3)} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z - 2} + \frac{C}{Z - 3}.$$

Comme ça on pourra rebasculer le Z et retomber sur la somme de forme désirée.

Décomposition en élément simple : $A = \frac{-19}{6}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{5}{3}$. Avec la ligne 6 du tableau, on retombe sur

$$X[Z] = \frac{-19}{6} \frac{Z}{Z} + \frac{3}{2} \frac{Z}{Z - 2} + \frac{5}{3} \frac{Z}{Z - 3}$$

$$z^{-1} \downarrow$$

$$x[n] = \frac{-19}{6} \delta[n] + \left(\frac{3}{2} 2^n + \frac{5}{3} 3^n \right) u[n]$$

Nouveau TP3 du 06/10

3.4 Réponse en fréquence d'un système en Temps-Discret

Exemple 3.5. Trouvez la réponse en fréquence de $H(Z) = \frac{Z}{Z - 0.8} = \frac{1}{1 - 0.8Z^{-1}}$

On remplace $Z = e^{j\Omega}$

$$H[Z] = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{1}{1 - 0.8(\cos \Omega - j \sin \Omega)}$$

$$= \frac{1}{(1 - 0.8 \cos \Omega) + j(0.8 \sin \Omega)}$$

$$|H(Z)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.8 \cos \Omega)^2 + (0.8 \sin \Omega)^2}}$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -\arctan\left(\frac{0.8 \sin \Omega}{1 - 0.8 \cos \Omega}\right)$$

Pour la phase :

- Si $\Omega = 1$ alors ...
- Si $\Omega = 0$ alors ...

Graphique dans OneNote.

La réponse en fréquence d'un système temps-discret est périodique.

La période dépend de la fréquence d'échantillonnage $T = 1/F_s \Leftrightarrow$ Période = inverse de la fréquence d'échantillonnage. Dans notre cas $\omega T = \frac{\Omega}{F_s} = \frac{\pi f}{F_s}$.

Pour le pas brouiller le signal, il faut que la bande (de fréquence) soit 2 fois plus grande que la fréquence d'échantillonnage $F_s > 2B$.

3.5 Stabilité des systèmes Temps-Discret

On se souviens des règles de stabilité en temps continue dans le plan complexe $S = \sigma + j\omega$

- A gauche de l'axe des imaginaires : Stable
- A droite de l'axe des imaginaires : Instable
- Sur l'axe des imaginaires : Conditionnellement stable

Pour le cas discret, on a un cercle unitaire e dans le plans complexe $Z = \Sigma + j\Omega$

- Dans le cercle unitaire : Stable

- En dehors le cercle unitaire : Instable
 - Sur le cercle unitaire : Conditionnellement stable
- Comparaison entre les deux graphiques dans OneNote.

Preuve : On a huit cas (schéma dans OneNote) :

- Pole sur \mathbb{R}^+ : $H[Z] = \frac{Z}{Z-\gamma} \rightarrow z^{-1} h[n] = \gamma^n u[n] \rightarrow_{n \rightarrow 0} 0$ Converge donc \rightarrow STABLE
- Pole sur \mathbb{R}^- : il a pas détailler le calcul mais le graphique a changer mais Converge donc \rightarrow STABLE
- Double pôle dans le cercle : $H[Z] = \frac{(0.5re^{j\theta})Z}{Z-\gamma} \frac{(0.5re^{j\theta})Z}{Z-\gamma^*} \Leftrightarrow h[z] = v |\gamma|^n \cos(\beta n + \theta) u[n]$ (je sais pas d'où il sort ça comme ça) \rightarrow STABLE
- Double pôle en dehors du cercle : pas de détail des calculs mais graphique divergent \rightarrow INSTABLE
- Pôle réel égal à 1 : $H[Z] = \frac{Z}{Z-\gamma} \Leftrightarrow h[n] = \gamma^n u[n]$, cette fois-ci le gamma égal 1 donc on a une fonction continue. \rightarrow Conditionnellement stable
- Pôle réel égal à -1 : cette fois ci on alterne avec le $(-1)^n \rightarrow$ Conditionnellement stable
- Deux pôle sur le cercle : même calcul que précédemment mais cette fois-ci le module de gamma vaut 1 donc pas de convergence, juste une stabilité conditionnelle. \rightarrow Conditionnellement stable
- Double pôle positif : $H[Z] = \frac{\gamma Z}{(Z-\gamma)^2} \Leftrightarrow h[n] = n\gamma^n u[n]$ divergent donc \rightarrow INSTABLE
- Double pôle négatif : divergence + alternance donc \rightarrow INSTABLE

□

CCL : Condition de stabilité d'un système temps discret.

- Un système T.D. est stable si \rightarrow tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unitaire.
- Un système T.D. est instable si
 - Au moins un pôle est à l'extérieur du cercle unitaire
 - Il existe des pôles multiples sur le cercle unitaire
- Un système T.D. est conditionnellement stable si \rightarrow il existe des pôles simples sur le cercle unitaire.

3.6 Placement des pôles et des zéros dans le plan complexe Z

$$\begin{aligned}
 H(Z) &= \frac{(Z + z_1) \dots (Z + z_M)}{(Z + p_1) \dots (Z + p_N)} \\
 H(e^{j\Omega}) &= \frac{r_1 e^{j\phi_1} \dots (r_M e^{j\phi_M})}{(d_1 e^{j\theta_1}) \dots (d_N e^{j\theta_N})} \\
 &= \frac{r_1 \dots r_M}{d_1 \dots d_N} e^{j[(\phi_1 + \dots + \phi_M) - (\theta_1 + \dots + \theta_N)]} \\
 |H(e^{j\Omega})| &= \frac{r_1 \dots r_M}{d_1 \dots d_N} \\
 \angle H(e^{j\Omega}) &= (Q_1 + \dots + Q_M) - (\theta_1 + \dots + \theta_N)
 \end{aligned}$$

3.6.1 Tracer le module et la phase d'un point réel

Du coup on vas tracer $|H(e^{j\omega})| = \frac{r_1 \dots r_M}{d_1 \dots d_N} = \frac{1}{d_1}$ voir le dessin au debut de la section dans OneNote. Puis on regarde la distance avec chaque point du cercle, elle vas varier, augmenter et descendre. C'est ce qu'on vas ploter. Tout est dans OneNote.

Pour la phase, on vas avoir la même approche mais avec l'angle.

3.6.2 Filtre

Trois exemple de filtre dans OneNote

- Filtre passe-bas : On place les pôles proche de 0 (je crois)
- Filtre passe bande : On place les pôles proche de $\frac{\pi}{2}$
- Filtre passe-haut : On place les pôles proche de π
- Je pense qu'on peut faire varier la valeur en fonction de ce qu'on veut, ici c'est un exemple

4 Réalisation d'un système temps-continue

$$H(S) = \frac{(S + z_1) \dots (S + z_M)}{(S + p_1) \dots (S + p_N)} \\ = \frac{b_M S^M + \dots + b_1 S + b_0}{S^N + a_{N-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

Exemple 4.1.

$$H(S) = \frac{b_3 S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0}{S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0} \\ = \frac{b_3 S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0 / S^3}{S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0 / S^3} \\ H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_3 + b_2 / S + b_1 / S^2 + b_0 / S^3}{1 + a_2 / S + a_1 / S^2 + a_0 / S^3}$$

Voir le circuit dans OneNote. + les calculs sur les différentes sorties.

Matériel nécessaire pour la réalisation de la fonction de transfert :

- 6 intégrateurs
- 7 gains
- 6 additionneurs

On peut aussi avoir une forme plus optimisée prenant moins de matériel, d'énergie et de place. Voir photo OneNote

5 Réalisation d'un système temps-discret

$$z\{x[n-m]u[n-m]\} = Z^{-m}X[Z] \\ z\{x[n+m]u[n]\} = Z^{+m}X[Z]$$

Avec toutes les conditions initiales nulles

Il est facile de décaler le signal en arrière dans le temps. Donc on va utiliser la première ligne comme bloc principal.

Exemple 5.1.

$$H(Z) = \frac{b_3 Z^3 + b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0}{Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0} \\ = \frac{b_3 Z^3 + b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0 / Z^3}{Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 / Z^3} \\ H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{b_3 + b_2 / Z + b_1 / Z^2 + b_0 / Z^3}{1 + a_2 / Z + a_1 / Z^2 + a_0 / Z^3} \\ = \frac{b_3 + b_2 Z^{-1} + b_1 Z^{-2} + b_0 Z^{-3}}{1 + a_2 Z^{-1} + a_1 Z^{-2} + a_0 Z^{-3}}$$

On a presque le même circuit mais cette fois-ci on a un bloc Z^{-1} à la place de $1/S$

Matériel nécessaire pour la réalisation de la fonction de transfert :

- 3 retards
- 7 gains (multiplieur)
- 6 additionneurs

DM3 pour mercredi 12/10

Exercice 1 Avec $H(S) = \frac{S^2 + w_0^2}{S^2 + 2w_0 \cos \theta + w_0^2}$.

1. Trouvez les pôles et les zéros de cette fonction de transfert
2. Tracer les pôles et les zéros dans le plans complexe S
3. Quel type de filtre est réalisé par cette fonction de transfert ? Passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande
4. Avec MatLab tracez la réponse en fréquence de ce filtre pour
 - (a) $\theta = 60^\circ$
 - (b) $\theta = 80^\circ$
 - (c) $\theta = 87^\circ$
 et avec $w_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 50\text{Hz}$

Nouveau cours3 du 07/10

6 Filtre

6.1 Spécification d'un filtre temps-continu

On ne peut pas faire un filtre parfait, du coup on se donne une sorte de marge, un intervalle dans lequel on s'autorise à passer. Voir OneNote pour un dessin

6.1.1 Approximation de Butterworth

Définition 6.1.

$$|H(jw)^2| = \frac{1}{1 + (\frac{w}{w_c})^{2N}}$$

Où N est l'ordre du filtre. On prend $2N$ car on ne se serre pas des pôles à droite donc on en prend deux fois plus

→ Equation d'un cercle

→ La fonction de transfert contient uniquement des pôles

Comment trouver l'ordre du filtre de Butterworth à partir des spécifications ?

$$\begin{aligned} R_p &= -10 \log_{10} \frac{1}{1 + (\frac{w_p}{w_c})^{2N}} \\ A_s &= -10 \log_{10} \frac{1}{1 + (\frac{w_s}{w_c})^{2N}} \\ \rightarrow N &= \left\lceil \log_{10} \frac{(10^{R_p/10} - 1)(10^{A_s/10} - 1)}{2 \log_{10} \frac{w_p}{w_s}} \right\rceil \\ w_{cp} &= \frac{w_p}{(10^{R_p/10} - 1)^{1/2N}} \\ w_{cs} &= \frac{w_s}{(10^{A_s/10} - 1)^{1/2N}} \\ \rightarrow w_c &= \frac{w_{cp} + w_{cs}}{2} \end{aligned}$$

Ici N donne l'ordre (= le nombre de pôles), et les trois w le rayon du cercle

Exercice 6.1. Réalisez un filtre de Butterworth pour les spécifications suivantes : $w_p = 0.2\pi$, $w_s = 0.3\pi$, $R_p = 7\text{dB}$, $A_s = 16\text{dB}$.

1. Calculer les valeurs de N et w_c
2. Trouvez la position des pôles dans le plan complexe S
3. Ecrire une relation pour la fonction de transfert $H(S)$

4. Trancez le schéma en bloc pour la réalisation du filtre
5. Tracer le module et la phase de $H(S)$

1.

$$N = \left\lceil \log_{10} \frac{(10^{R_p/10} - 1)(10^{A_s/10} - 1)}{2 \log_{10} \frac{w_p}{w_s}} \right\rceil = \lceil 2.8 \rceil = 3$$

$$w_{cp} = \frac{w_p}{(10^{R_p/10} - 1)^{1/2N}}$$

$$w_{cs} = \frac{w_s}{(10^{A_p/10} - 1)^{1/2N}}$$

$$\rightarrow w_c = \frac{w_{cp} + w_{cs}}{2} \approx 0.5$$

On a un ordre 3 donc 6 pôles : $H(S) = \frac{w_c^N}{(S-p_1)(S-p_2)(S-p_3)}$

2. On a donc un cercle de rayon 0.5 avec 2 * 3 pôles. Voir OneNote pour le graph. Les pôles p_0, p_1, p_5 sont instables, on utilise p_2, p_3, p_4 .

$$p_2 = w_c e^{j2\pi/3} = w_c \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j w_c \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.25 + j0.433$$

$$p_4 = w_c e^{j\pi} = -0.5$$

$$p_3 = w_c e^{j\frac{4\pi}{3}} = w_c \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j w_c \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -0.25 - j0.433$$

3.

$$H(S) = \frac{(0.5)^3}{(S + 0.5)(S - (-0.25 + j0.433))(S - (-0.25 - j0.433))}$$

$$= \frac{(0.5)^3}{S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0}$$

$$= \frac{(0.5)^3 / S^3}{1 + a_2 S^{-1} + a_1 S^{-2} + a_0 S^{-3}}$$

4. OneNote

$$V(S) = X(S) + (-a_2 S^{-1} - a_1 S^{-2} - a_0 S^{-3})V(S)$$

$$\Leftrightarrow (-a_2 S^{-1} - a_1 S^{-2} - a_0 S^{-3})V(S) = X(S)$$

$$\Leftrightarrow V(S) = \frac{X(S)}{(-a_2 S^{-1} - a_1 S^{-2} - a_0 S^{-3})} Y(S) = \frac{b_0 V(S)}{S^3} = \frac{b_0 S^{-3} X(S)}{1 + a_2 S^{-1} + a_1 S^{-2} + a_0 S^{-3}}$$

5. il a dit on sais a quoi s'attendre, on le fera en TP avec matlab

6.2 Spécification d'un filtre temps discret

Petit schéma dans OneNote pour les notations

6.2.1 Transformation bilinéaire

$$H(Z) = H(S)|_{S = \frac{2}{T} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}}$$

La transformation bilinéaire ne change pas le module. Donc $R_p(T.D.) = R_p(T.C.)$ et $A_s(T.D.) = A_s(T.C.)$.

La transformation bilinéaire ne change pas les fréquences avec la relation suivante : $\frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} = w$

Donc $\frac{2}{T} \tan(\frac{\Omega_p}{2}) = w_p$ et $\frac{2}{T} \tan(\frac{\Omega_s}{2}) = w_s$