

DM3 SIGNAL

Charles Vin

12 octobre 2022

DM3 pour mercredi 12/10

Exercice 1 Avec $H(S) = \frac{S^2 + w_0^2}{S^2 + 2Sw_0 \cos \theta + w_0^2}$.

1. Trouvez les pôles et les zéros de cette fonction de transfert
2. Tracer les pôles et les zéros dans le plans complexe S
3. Quel type de filtre est réalisé par cette fonction de transfert ? Passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande
4. Avec MatLab tracez la réponse en fréquence de ce filtre pour
 - (a) $\theta = 60^\circ$
 - (b) $\theta = 80^\circ$
 - (c) $\theta = 87^\circ$

et avec $w_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 50\text{hz}$

1. Trouvons les racines du dénominateur : $S^2 + 2Sw_0 \cos \theta$
 - $\Delta = (2w_0 \cos \theta)^2 - 4w_0^2 = 4w_0^2 \cos^2 \theta - 4w_0^2 = 4w_0^2 (\cos^2 \theta - 1)$
 - $\sqrt{\Delta} = 2w_0 \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$
 - Si $w_0 = 0$ ou si $\theta = 0$ alors $\Delta = 0$ il n'y a pas de racine.
 - Sinon $\forall w_0 \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}^*$, $w_0^2 > 0$, $\cos^2(\theta) - 1 < 0 \Rightarrow \Delta < 0$
 - Dans ce cas il y a deux racines complexes : $\frac{-(2w_0 \cos \theta) \pm i * 2w_0 \sqrt{\cos^2 \theta - 1}}{2} = -w_0 \cos \theta \pm i * \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$

$$H(S) = \frac{S^2 + w_0^2}{S^2 + 2Sw_0 \cos \theta + w_0^2}$$

$$= \frac{(S - iw_0)(S + iw_0)}{(S - w_0 \cos \theta \pm i * \sqrt{\cos^2 \theta - 1})(S + -w_0 \cos \theta \pm i * \sqrt{\cos^2 \theta - 1})}$$

On a donc deux pôles : $\pm i * w_0(-\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1})$ et deux zéros $\pm iw_0$

2. On pose $w_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 50\text{hz}$. Pour les coordonnées des points, voir la table 1. Pour le plot des points, voir la figure 1.
On remarque que lorsque si $\cos \theta < 0$ alors le système est instable. Si $\cos \theta = 0$ le système est conditionnellement stable.

θ	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$
z_1	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$
z_2	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$
p_1	$(0, w_0)$	$(-w_0 * \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{w_0}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{w_0}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$	$(\frac{w_0}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$
p_2	$(0, -w_0)$	$(-w_0 * \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{w_0}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{w_0}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$	$(\frac{w_0}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$

Table 1 – Coordonnées des pôles et des zéros pour $w_0 = 2\pi * 50$

3. Parcourons l'axe des imaginaires de $jw = 0 \rightarrow +\infty$.
 - Lorsque $w = 0$, $|H(jw)| = 1$ car les p_i et z_i sont placé sur un cercle.
 - Lorsque $w = w_0$, $|H(jw)| = 0$ car on se place sur z_1 donc le numérateur s'annule

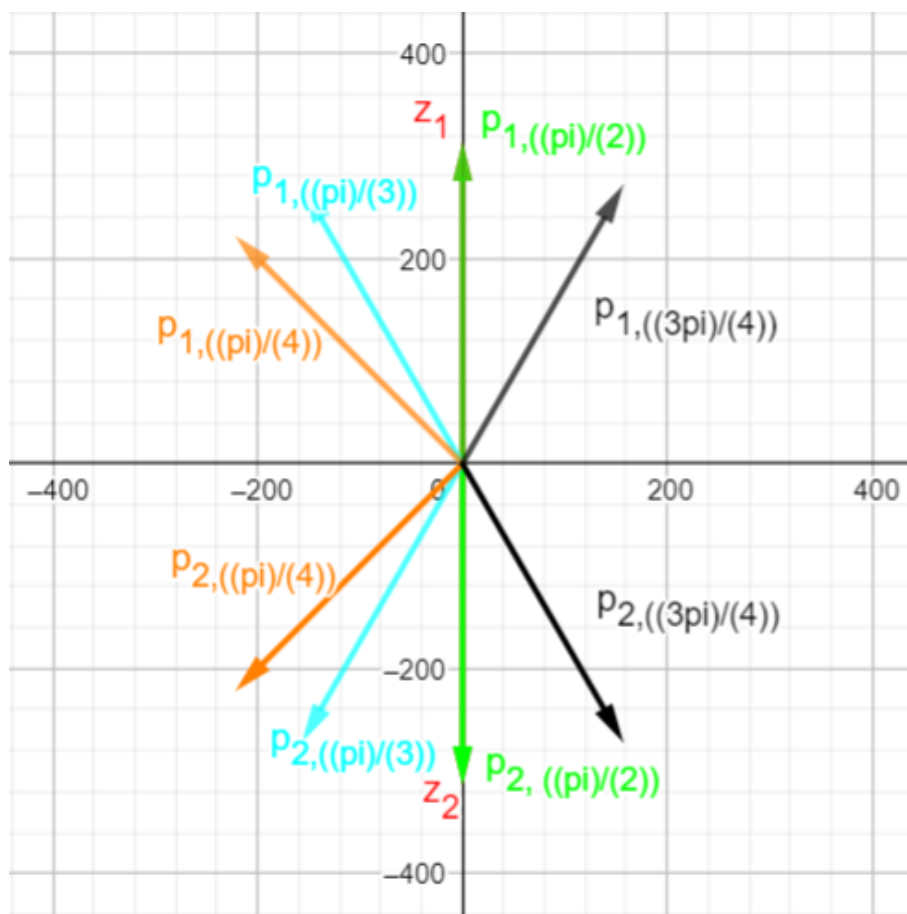


Figure 1 – Pôle et zéros pour $w_0 = 2\pi * 50$

— Lorsque $w \rightarrow +\infty$, $|H(jw)| \rightarrow 1$ également.

On peut donc déduire que le gain se réduit vers zéros autour de $w_0 = 2\pi f_0$ puis remonte vers un (on pourra le voir sur la figure MatLab dans la question suivante). C'est donc un filtre coupe bande sur f_0 .

4. Pour les figures, voir la page suivante.