Logique et Représentation des Connaissances
I - Introduction à la logique modale

N. Maudet, (G. Bourgne)

2022–2023

LRC Master Informatique

Introduction

Jusqu'à présent dans le cours vous avez vu :

- la logique propositionnelle ;
- la logique des prédicats du 1er ordre (LPPO) ;
- des fragments de la LPPO (logiques de descriptions)

Nous allons à présent travailler sur une *extension* de la logique propositionnelle. On prend pour base un langage propositionnel, mais avec deux modalités : $\Box$ et $\Diamond$.

Introduction

Le sens de ces modalités peut varier : il existe de nombreuses logiques modales l'interprétant différemment.
Sens intuitif général de $\Box$: 'nécessairement', 'forcément', 'à tous les coups'.
Pour $\Diamond$: 'possiblement', 'pas impossible', 'dans au moins un cas'...

- logiques épistémiques (2 prochaines séances) : *savoir que (de façon certaine) vs considérer possible que...*
- logiques temporelles (seront abordées plus tard dans l'UE) : *forcément ou possiblement vrai au prochain temps*
- logiques déontiques : *obligatoire ou permis*
- logiques dynamiques (DL, STIT) : *mes actes assurent que ce sera vrai / laissent la possibilité que ce soit vrai*

Introduction

Il existe des méthodes de preuve automatique efficaces pour certaines logiques, en particulier basées sur les méthodes de tableaux, déjà vues dans le cas propositionnel.

Nous utiliserons en particulier le logiciel Lotrec en TME : `https://www.irit.fr/Lotrec/`

Syntaxe

On définit la syntaxe de notre langage de logique modale $\mathcal{L}_M$.

Soit $\mathcal{P} = \{p, q, \dots\}$ un ensemble d'atomes ; $\mathcal{L}_M$ est défini de la manière suivante :

- $\top, \bot \in \mathcal{L}_M$
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_M$
- si $\phi, \psi \in \mathcal{L}_M$ alors
  - $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_M$
  - $\phi \vee \psi \in \mathcal{L}_M$
  - $\phi \rightarrow \psi \in \mathcal{L}_M$
  - $\neg\phi \in \mathcal{L}_M$
  - $\Box\phi \in \mathcal{L}_M$
  - $\Diamond\phi \in \mathcal{L}_M$

Syntaxe

Forme de Nackus-Baur (où p variable propositionnelle)

$$\phi ::= \top | \perp | p | \phi \wedge \phi | \phi \vee \phi | \phi \rightarrow \phi | \neg\phi | \Box\phi | \Diamond\phi$$

Possibilité de définir certains opérateurs à partir des autres (conserver seulement e.g.$\neg$, $\Box$ et $\vee$) :

- Opérateurs classiques :

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

- Modalités (loi de Morgan pour $\Box$ et $\Diamond$) :

$$\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$$

$$\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$$

Rappel : règles de priorité

On suppose l'ordre de priorité habituel sur les opérateurs :
les modalités $\Box$, et $\Diamond$ en tant qu'opérateurs unaires ont la même priorité que $\neg$, et s'appliquent avant les opérateurs binaires $\wedge$ et $\vee$.

Donc par exemple :

- $\Box p \wedge q$ est équivalent à $(\Box p) \wedge q$
- $\Diamond(p \to q)$ n'est pas équivalent à $\Diamond p \to q$
- $\Box(p \vee \neg\Diamond p)$ est équivalent à $\Box(p \vee (\neg\Diamond p))$

Sémantique : mondes possibles

Saul Kripke a proposé une sémantique dite des ≪ mondes possibles ≫

Modèle de Kripke

Un modèle de Kripke M est un triplet $\langle W, R, I \rangle$ où :

- *W est un ensemble de mondes ;*
- *$R \subseteq W \times W$ est une relation binaire d'accessibilité ;*
- *$I : \mathcal{P} \to 2^W$ est une fonction d'évaluation.*

Sémantique : mondes possibles

Saul Kripke a proposé une sémantique dite des ≪ mondes possibles ≫

Modèle de Kripke

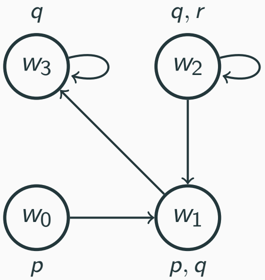
Un modèle de Kripke M est un triplet $\langle W, R, I \rangle$ où :

- *W est un ensemble de mondes ;*
- *$R \subseteq W \times W$ est une relation binaire d'accessibilité ;*
- *$I : \mathcal{P} \to 2^W$ est une fonction d'évaluation.*

Intuitivement, un modèle de Kripke est donc un graphe dont les nœuds sont les mondes, étiquettés par des propositions du langage (les propositions qui sont vraies en ce monde, les autres étant fausses).

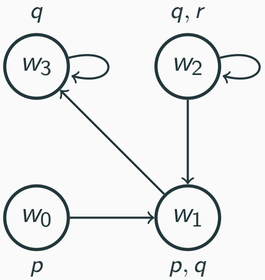
☞ *On appelle le couple $\langle W, R \rangle$ le cadre (frame)*

Exemple



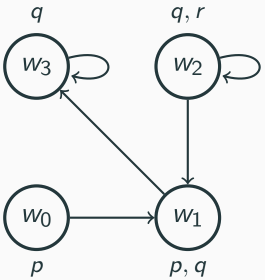
- $M, w_0 \models p \to q$

Exemple



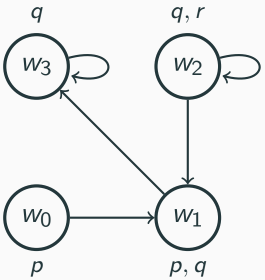
- $M, w_0 \models p \rightarrow q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$

Exemple



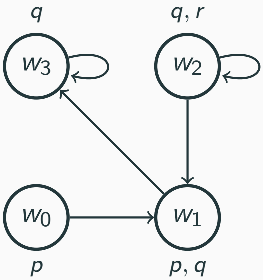
- $M, w_0 \models p \rightarrow q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$ ✔
- $M, w_0 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$

Exemple



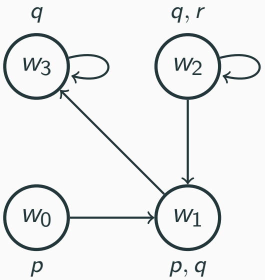
- $M, w_0 \models p \rightarrow q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$ ✔
- $M, w_0 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$ ✔
- $M, w_2 \models \Box\Box p$

Exemple



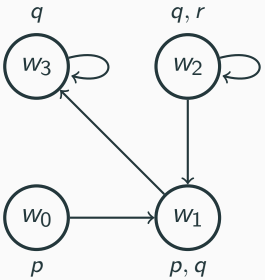
- $M, w_0 \models p \rightarrow q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$ ✔
- $M, w_0 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$ ✔
- $M, w_2 \models \Box\Box p$ ✘
- $M, w_2 \models \Box\Box q$

Exemple



- $M, w_0 \models p \to q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$ ✔
- $M, w_0 \models (p \lor r) \to \Box p$ ✔
- $M, w_2 \models \Box\Box p$ ✘
- $M, w_2 \models \Box\Box q$ ✔
- $M, w_2 \models \Diamond(r \land \Box q)$

Exemple



- $M, w_0 \models p \to q$ ✘
- $M, w_0 \models \Box p$ ✔
- $M, w_0 \models (p \vee r) \to \Box p$ ✔
- $M, w_2 \models \Box\Box p$ ✘
- $M, w_2 \models \Box\Box q$ ✔
- $M, w_2 \models \Diamond(r \wedge \Box q)$ ✔

☞ Le modèle en ligne sur le **Modal Logic Playground**

Sémantique : mondes possibles

On va à présent définir :

$$M, w \models \phi$$

≪ la formule ϕ est satisfaite dans le monde w du modèle M ≫

- $M, w \models \top$ (resp. $\bot$) est (resp. n'est pas) satisfaite
- $M, w \models p$ ssi $w \in I(p)$
- $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
- $M, w \models \phi \wedge \psi$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \vee \psi$ ssi $M, w \models \phi$ ou $M, w \models \psi$
- $M, w \models \phi \rightarrow \psi$ ssi $M, w \not\models \phi$ ou $M, w \models \psi$
- $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tous les mondes v tq $(w, v) \in R$, on a $M, v \models \phi$
- $M, w \models \Diamond\phi$ ssi il existe un monde $v, (w, v) \in R$ tel que $M, v \models \phi$

Validité d'une formule dans un modèle

Toujours en considérant un modèle donné, on peut dire que la formule ϕ est valide dans le modèle M lorsque pour tout monde w de M, on a $M, w \models \phi$. Nous le noterons

$$M \models \phi$$

Cette approche est connue sous le terme de model checking : on vérifie que pour une description sémantique donnée par le modèle, le système satisfait une spécification donnée par la formule ϕ.

Satisfiabilité et validité d'une formule

On définit aussi les notions suivantes, plus générales puisqu'elle portent sur l'ensemble des modèles :

- ϕ est satisfiable lorsqu'il existe un modèle M et un monde w de M tel que $M, w \models \phi$ (et insatisfiable sinon).
- la formule ϕ est valide lorsque ϕ est valide dans tous les modèles (pour une logique donnée)

$$\models \phi$$

Exemple

Montrons sémantiquement que $\models (\Box p \land \Box q) \rightarrow \Box(p \land q)$

Exemple

Montrons sémantiquement que $\models (\Box p \land \Box q) \to \Box(p \land q)$

Par contradiction, supposons pour que l'implication soit fausse qu'il existe M, w tq $\underbrace{M, w \models \Box p \land \Box q}_{(i)}$ et que $\underbrace{M, w \not\models \Box(p \land q)}_{(ii)}$

(ii) il existe un monde w^* tq $(w, w^*) \in R$ où $M, w^* \models \neg(p \land q)$

(i) dans tous les mondes w' tq $(w, w') \in R$, on a $M, w' \models p$ et $M, w' \models q$. Donc en particulier dans w^*, on a $M, w^* \models p \land q$.

Contradiction.

Système normal K

Voyons à présent une caractérisation syntaxique de ces logiques.

Le système K est un système modal minimal. On peut le caractériser de la manière suivante, en notant $\vdash_K \phi$ le fait que ϕ soit un théorème dans le système K :

- toutes les théorèmes de la logique propositionnelle sont des théorèmes de K
- Axiome K : $\vdash \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$

et des règles d'inférences :

- (RN) Nécessitation : si $\vdash \phi$ alors $\vdash \Box\phi$
- (MP) Modus Ponens : si $\vdash \phi$ et $\vdash \phi \to \psi$, alors $\vdash \psi$

Système normal K : Déduction

Ainsi, de la même manière que le système de Hilbert nous permettait de prouver des théorèmes dans le cadre de la logique propositionnelle, nous disposons d'un système permettant de prouver des théorèmes dans le cadre de cette logique modale.

Montrons que $\vdash \Box p \to \Box(q \to p)$

1. $p \to (q \to p)$ (Th. logique prop.)
2. $\Box(p \to (q \to p))$ (Nec.)
3. $\Box(p \to (q \to p)) \to (\Box p \to \Box(q \to p))$ (K)
4. $\vdash \Box p \to \Box(q \to p)$ (MP 3/4)

Système normal K : Déduction

Montrons que $(p \to q) \vdash (\Box p \to \Box q)$
(i.e. on peut déduire $\Box p \to \Box q$ depuis l'hypothèse $p \to q$)

1. $p \to q$ (hyp.)
2. $\Box(p \to q)$ (RN)
3. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (K)
4. $\Box p \to \Box q$ (MP2/3)

Système normal K : Déduction

Montrons que $(p \rightarrow q) \vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$
(i.e. on peut déduire $\Box p \rightarrow \Box q$ depuis l'hypothèse $p \rightarrow q$)

1. $p \rightarrow q$ (hyp.)
2. $\Box(p \rightarrow q)$ (RN)
3. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (K)
4. $\Box p \rightarrow \Box q$ (MP2/3)

Mais attention : $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ n'est pas une formule valide, ie. un théorème [exercice : trouver un countre-exemple]

De manière générale : pour montrer que $\vdash A \rightarrow B$, on ne peut pas simplement poser A comme hypothèse et appliquer un théorème de la déduction comme en logique propositionnelle.
(Essentiellement, à cause de la règle de nécessitation).

"Modal logic raises problems for the notion of deduction"
(M. Fitting, Handbook of Modal Logic, 2007).

Correction et complétude

- Correction (soundness) : tout théorème d'un système est une formule valide pour un cadre de modèles donné.
- Complétude (completeness) : toute formule valide pour un cadre de modèle donné est un théorème du système.

☞ *Le système K est correct et complet vis-à-vis de l'ensemble des modèles de Kripke*

Autrement dit, si on ne fait aucune hypothèse particulière sur les propriétés des modèles de Kripke considérés, nous sommes en présence d'une logique modale normale.

Note : il existe des systèmes non-normaux, mais qui reposent sur d'autres sémantiques que celle de Kripke étudiée ici.

Résumé

En résumé, pour montrer :

- la satisfiabilité d'une formule, il suffit d'exhiber un exemple, ie. un modèle et un monde où la formule est vraie ;
- la non-validité d'une formule, il suffit d'exhiber un contre-exemple, ie. un modèle et un monde où la formule est fausse
- l'insatisfiabilité d'une formule, il faut montrer qu'elle ne peut être vraie dans aucun monde d'aucun modèle ;
- la validité d'une formule, il faut montrer qu'elle est valide dans tout modèle. On peut le faire :
  - par raisonnement sémantique ;
  - en montrant que $\neg\phi$ est insatisfiable (cf. méthode des tableaux et Lotrec) ;
  - en prouvant que $\vdash \phi$ est un théorème dans un système (dont on sait qu'il est correct pour la classe de modèles considérés).

Exemple

Montrons que la formule $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ n'est pas valide.

Exemple

Montrons que la formule $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ n'est pas valide.

Un contre-exemple parmi d'autres :

$$\begin{tikzcd} w_0 \arrow[r] & \underset{\phi}{w_1} \arrow[r] & w_2 \end{tikzcd}$$

La formule est-elle au moins satisfiable ?

Un exemple parmi d'autres :

$$\begin{tikzcd} \underset{\phi}{w_0} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Théorie de la correspondance

On a vu que l'axiome K ne requiert aucune hypothèse particulière sur les cadres de modèles de Kripke considéré (d'où son nom). Mais on peut établir en général des équivalences entre les propriétés des cadres, et certains schémas d'axiomes (qui ne sont pas valides dans un système normal) :

Nom	**Axiome**	**Propriété**	
T	$\Box\phi \to \phi$	réflexivité :	$\forall w : (w, w) \in R$
D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	sérialité :	$\forall w, \exists w' : (w, w') \in R$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	transitivité :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w', w'') \in R$, alors $(w, w'') \in R$
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	euclidienne :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w, w'') \in R$, alors $(w', w'') \in R$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	symétrie :	$\forall w, w'$: si $(w, w') \in R$ alors $(w', w) \in R$

Exemple : réflexivité

Essayons de montrer que :

R est réflexive ($\forall w \in W, (w, w) \in R$) ssi

$\Box\phi \to \phi$ est valide dans le cadre $F = \langle W, R \rangle$.

($\Rightarrow$) On suppose R réflexive. Prenons un w un monde quelconque, tel que $M, w \models \Box\phi$. La formule ϕ est vraie dans tous les mondes w' tq $(w, w') \in R$. Comme R est réflexive, $(w, w) \in R$, et donc $M, w \models \phi$ ✔

Exemple : réflexivité

Essayons de montrer que :
R est réflexive ($\forall w \in W, (w, w) \in R$) ssi
$\Box\phi \to \phi$ est valide dans le cadre $F = \langle W, R \rangle$.

($\Rightarrow$) On suppose R réflexive. Prenons un w un monde quelconque, tel que $M, w \models \Box\phi$. La formule ϕ est vraie dans tous les mondes w' tq $(w, w') \in R$. Comme R est réflexive, $(w, w) \in R$, et donc $M, w \models \phi$ ✔

($\Leftarrow$) Supposons $\Box\phi \to \phi$ valide. Prenons $\Box p \to p$ comme une instance de ce schéma d'axiome. Donc, si $M, w \models \Box p$ alors $M, w \models p$, et ce pour tout monde w et toute fonction d'interprétation I de M. Pour la contradiction, supposons R non réflexive : il doit donc exister au moins un monde w^* tel que $(w^*, w^*) \notin R$. Mais alors on peut choisir $I = W \setminus \{w^*\}$, ainsi $M, w^* \models \Box p$ mais $M, w^* \models p$. Contradiction. ✔

Une grande famille de logiques

Selon les axiomes que l'on considère, on obtient donc différentes logiques modales. Quand on parle de la logique modale KT par exemple, il s'agit du système normal avec en plus l'axiome T (dans ce cas les modèles de Kripke sont réflexifs), etc.

Les axiomes ne sont pas nécessairement indépendants entre eux.