

# Deux systèmes de preuve en logique des propositions

## 1 Système de Hilbert

### 1.1 Composantes

Le système de Hilbert est caractérisé par trois schémas d'axiome et une règle d'inférence :

- Schémas d'axiome :
  - **SA1** :  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - **SA2** :  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - **SA3** :  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Règle d'inférence
  - **Modus Ponens (MP)** :  $A, A \rightarrow B \vdash B$

### 1.2 Dédution

La déduction d'une formule  $A$  dans une théorie  $\Delta$  est une suite finie  $A_0, \dots, A_n$  telle que  $A_n = A$  et pour tout  $i$ ,

- $A_i$  est l'instanciation de l'un des axiomes,
- $A_i$  est l'une des hypothèses, c'est-à-dire  $A_i \in \Delta$
- $A_i$  est obtenue par modus ponens appliqué à  $A_j$  et  $A_k$  avec  $j < i$  et  $k < i$

On peut aussi appliquer toutes les substitutions nécessaires, à condition de les effectuer dans l'ensemble de la formule.

Si on trouve une telle suite, on peut noter  $\Delta \vdash A$ .

## 2 Méthode des tableaux sémantiques

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

### 2.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés  $\alpha$  et  $\beta$ .

Formule $\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Formule $\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg\neg\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	$\varphi_1$	$\varphi_2$
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	$\varphi_2$
$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\varphi_1$	$\neg\varphi_2$	$\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$			

### 2.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules  $\mathcal{F}$  par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble  $\mathcal{F}$  et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - sinon, choisir une formule  $F$  de l'étiquette du nœud
    - si elle est de type  $\alpha$ 
      - créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - lui associer l'étiquette  $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les formules obtenues par réécriture de  $F$
    - sinon (si elle est de type  $\beta$ )
      - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - leur associer respectivement les étiquettes  $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$  et  $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$  où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les formules obtenues par réécriture de  $F$

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors  $\mathcal{F}$  est satisfiable.

Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors  $\mathcal{F}$  est insatisfiable.