Manque : table type de filtre FIR, image bode, image gain FIR IIR, cercle trigo ?

0.1 Formule complexe

$$a + jb \to e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos bt + j\sin \overline{bt})$$

$z = a + jb \to |z| * e^{i\arg z}$

$$\tan(\arg z) = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}\,(z+\bar{z})}$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg z_1^n = n \arg z_1$$

$$\arg(az) \equiv \begin{cases} \arg z & \text{si } a > 0 \\ (\arg z) + \pi & \text{si } a < 0\,; \end{cases}$$

0.2 Convolution

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]g[n-m]$$

0.3 Transformé de Laplace

$$X(S) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt$$

$$X[Z] \to H[Z] \to Y[Z] = X[Z]H[Z]$$
$$\Leftrightarrow H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]}$$

- **Convolution** : $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
- Time shifting : $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$
- Intégrale : $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$

Factoriser les polynômes au dénominateur et au numérateur. Puis pour appliquer Laplace inverse, on vérifie dans le tableau si on trouve une forme adapté.
Sinon on décompose en éléments simple pour obtenir une forme du type $\frac{A}{S+c} \to_{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-ct}u(t)$.

Décomposition en élément simple $\frac{A(X)}{B(X)}$:

1. $\deg A < \deg B$ sinon division euclidienne
2. Si polynôme du second degrés sans racine réel au dénominateur, *normalement* on le laisse et à la place d'une constante en haut on met une fonction affine.
3. 3 méthodes
   - Identification : on remet tout sur le même dénominateur puis identification puis système d'équation
   - Multiplier par un des facteurs : pratique si tous les dénominateurs ont la même puissance. On multiplie par un des dénominateur → annulation ou plusieurs des dénominateurs → remplacer x par le truc qui l'annule $x = c$ → simplifier et hop on trouve le coef tout de suite
   - Multiplier par x et faire la limite en $+\infty$: puis appliquer le théorème du plus haut degré

0.4 Composante paire et impaire d'une fonction

Soit $x(t)$ une fonction alors on peut écrire $x(t)$ sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante paire

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante impaire

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)).$$

0.5 Réalisation

Utiliser une forme factorisé de $H(S)$.

- Intégrateur/retard : $1/S$
- $\oplus$: additions
- $\triangleright$: gains/multi

Diagramme de Bode

- Gain $= 20\log_{10}|H(Jw)|$
- Relire OneNote (SIGNAL/Prof1/TP2 toute fin) pour les détails du pourquoi

La méthode pour une fonction $H(s)$

1. Mettre la fonction en forme normale
$$H(S) = K\frac{(S+a_1)(S+a_2)}{S(S+b_1)(S^2+b_2S+b_3)}$$
$$= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{(1+S/a_1)(1+S/a_2)}{S(1+S/b_1)(1+S*b_2/b_2+S^2/b_3)}$$
$$= c * \frac{1+\frac{S}{c_1}+\dots}{(1+\frac{S}{c_2})(1+\frac{S}{c_3})\dots}$$
2. Constante de départ
   - Gain : $20\log_{10} c$
   - Phase : $\begin{cases} 0 & \text{si } c > 0 \\ \pi & \text{si } c < 0 \end{cases}$

0.6 Type de filtre

On peut éviter un diagramme de Bode en faisant :

1. Remplacer $S = j\omega$
2. Placer les pôles dans le plans complexe et
3. $|H(j\omega)| = \left|\frac{z_1\dots z_n}{p_1\dots p_n}\right|$ on observe la distance entre ω et les pôles et zéros
4. Classiquement :
   - Vers $\omega = \infty$ on a $|H(j\omega)| = 1$
   - Avec $\omega =$ un zéros, il annule la fraction donc $= 0$
   - En $\omega = 0$ on a le module des pôles et des zéros

0.7 Filtre IIR : transformation bilinéaire

On a $\Omega_p, \Omega_s, R_p, A_s$

1. Ordre du filtre : calculer toutes les constantes + les pôles + la fonction de transfert
   - Constante :
$$w_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2}$$
$$w_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2}$$
$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}[(10^{R_p/10}-1)/(10^{A_s/10}-1)]}{2\log_{10}\frac{w_p}{w_s}} \right\rceil$$
$$w_{cp} = \frac{w_p}{(10^{R_p/10}-1)^{1/2N}}$$
$$w_{cs} = \frac{w_s}{(10^{A_s/10}-1)^{1/2N}}$$
$$w_c = \frac{w_{cp}+w_{cs}}{2}$$
   - Les pôles de $H(S)$
     - N est impaire → On a l'argument de nos pôles $\theta = \frac{k\pi}{N} \forall k \in \{0,\dots,2N-1\}$
     - Si N paire $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2N}$
     - $p_i = w_c e^{j\theta_i} = w_c(\cos(\theta_i) + j\sin\theta_i)$ à calculer !
     - Tracer un plan avec le cercle de taille w_c et ne garder que les pôles stable à droite de l'ordonnée
   - Écrire la fonction de transfert $\frac{w_c^N}{(S-p_1)(S-p_2)\dots}$ avec les valeurs des $p_i \in \mathbb{C}$
2. Position des pôles dans le plan Z : Conversion des pôles
$$S = \frac{2}{T}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \Leftrightarrow Z = \frac{ST+2}{2-ST}.$$
On trouve des nouveaux pôles $z_i = \frac{p_i*T+2}{2-p_i*T}$. Les tracer dans le plans complexe avec le cercle unitaire → montrer la stabilité.
3. Écrire $H(S)$ en replaçant S par $S = \frac{2}{T}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$ puis simplifier le dénominateur à fond pour obtenir un polynôme. Vérifier que les racine de ce polynôme sont bien les pôles z_i calculé précédemment.
4. Tracer approximativement la réponses en fréquence : voir figure **??**
5. Proposer une réalisation matériel pour $H(Z)$:
   - Écrire $H(Z)$ calculé à la question 3 sous une forme factorisé $b_0\frac{(1+a_0Z^{-1})\dots}{(1+a_1Z^{-1})\dots}$ On déclare des constantes.
   - Le numérateur = la sortie ; le dénominateur = l'entrée
   - Faire le circuit : penser à développer les constantes au numérateur pour ne pas oublier de multiplieur

0.8 Filtre FIR : Fenêtrage

1. Choisir la fenêtre : toujours rectangulaire je pense lol
2. Ordre du filtre $\Omega_s - \Omega_p = \frac{1.8\pi}{M}$ puis partie supérieur. $M-1 =$ ordre du filtre
3. Coef du filtre :
   - On vas fenêtrer sur l'intervale $[-\frac{M-1}{2}; \frac{M-1}{2}]$ en le divisant en M point.
   - Coef : $\Omega_c = \Omega_s - \Omega_p$ fréquence de coupure
$$h_i = \begin{cases} 1s & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x\Omega_c}{x*\pi} & \text{sinon} \end{cases}.$$
   Utiliser la symétrie pour ne calculer que la moitié des points !
   - Conclure en écrivant $H(Z)$ et en factorisant les coefs symétrique
4. Réalisation matériel : On obtient un $H(Z) = h_0(1+Z^{-3}) + h_1(Z^{-1}+Z^{-2})$ Construire ce qu'il y a entre parenthèse puis multiplier par les facteurs avant de sommer le tout.
5. Comparaison : FIR plus coûteux mais évite les problèmes de stabilité des pôles, n'a pas de boucle et est plus performant.

0.8.1 Type de filtre FIR

- **Type 1 :** On peut réaliser tous les types de filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut
- **Type 2 :** Il existe un zéro à $\Omega = \pi$ → On ne peut pas réaliser un filtre passe-haut
- **Type 3 :** Il existe un zéro à $\Omega = 0$ et à $\Omega = \pi$ → One ne peut pas réaliser un filtre passe-bas, ni un filtre passe-haut.
- **Type 4 :** Il existe un zéro à $\Omega = 0$ → on ne peut pas réaliser un filtre passe-bas