

# Logiques et représentations des connaissances

Charles Vin

S1-2022

## 1 Introduction à la logique des propositions et des prédicats du premier ordre

**Définition 1.1.** Quelques définitions

- Expression : une description logique. Elle est vraie ou fausse
- Meaning : le sens qui relie l'expression vers sa référence
- Référence : représente le sens

Le langage des propositions :

- Atome
- Connecteur :
  - Binary :  $\vee$  = "ou",  $\wedge$  = "et"  $\neg$  = négation
  - DIAPO

Table de vérité :

- Une ligne = une "interprétation"

Une formule est

- Satisfiable : si vraie dans une interprétation
- Valide : si vraie dans toutes les interprétations
- Unsatisfiable : faux sur toutes les interprétations

On peut avoir des fonctions qui représentent une expression logique.

- Un terme représente une fonction qui renvoie un paramètre ou le tuple de paramètres d'une fonction.
- Un atome est une fonction qui renvoie un booléen.

En d'autres mots ça semble être en fonction de ce que la fonction renvoie un booléen ou un paramètre.

Variable est :

- Liée (muette) : Si elle est liée à un quantificateur, on peut donc changer librement son nom tant qu'on le change partout dans la formule
- Libre : C'est l'inverse, pas liée à un quantificateur donc libre dans la formule. Par exemple dans la formule  $\exists y, x < y$ , la variable  $x$  est libre et  $y$  est liée. Cette formule représente le fait que "Il existe un nombre plus grand que  $x$ ". Au final ici  $x$  est en lien avec l'énoncé, il est fixe.

Diapo interpretation : rien compris

A formula is "**valid**" if it is true in **all** the interpretation of **all** domains.

**Exemple 1.1.** — Valide

- DIAPO

Un modèle est un couple  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, i \rangle$ . Une valuation est une fonction  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ .  $I_m(F)$  is the truth value. Y'a des propriétés de la truth value dans le DIAPO.

A est une conséquence sémantique de B si A est vraie pour toutes les interprétations où B est vraie i.e. for all models if  $I_m \mathcal{V}(B)$  then  $I_m \mathcal{V}(A)$ . Exemple  $A \rightarrow B$  est une conséquence sémantique. Je crois que le symbole c'est  $B \models A \iff A$  conséquence logique de B.

**Définition 1.2.** Un système formel est composé d'un langage formel, un ensemble d'axiomes et de règles d'inférence.

**Exemple 1.2.** Exemple dans le DIAPO avec le système formel de Hilbert.

- $\vdash$  représente une dérivation. On peut prouver A à partir de B.

**Définition 1.3** (Théorème). Any formula which is derived from the axioms by iteratively applying inference rules is a **theorem**.

Notation :  $\vdash A$  means  $A$  is a theorem

**Exemple 1.3.** Exemple :  $\vdash (A \rightarrow A)$

*Preuve :* Voir diapo c'est drôle

□

**Définition 1.4** (Démonstration). A **proof** of a theorem  $A$  is a finite sequence of formulae  $F_0, \dots, F_n$  such that .... DIAPO mais osef un peu

**Définition 1.5** (Symbolic system). — Consistency : Each description of the symbolic system corresponds to an object in the reality i.e. DIAPO

— Completeness : each object of the reality can be described in the symbolic system  $\forall A$  if  $\models A$  then  $\vdash A$

## 1.1 Automatic theorem proving

### 1.1.1 Tableau method

1. Normalisation : Transformation into **NNF - Negative Normal Form** : The negations occurs only before atomic propositions. i.e il faut développer les négations au max.
2. Build a tableau :
  - Root : The formula under NNF.
  - Build successors of T using two rules  $R_\wedge$  et  $R_\vee$  VOIR LE DIAPO POUR LEUR DEFINITIONS
  - On arrête lorsque l'on ne peut plus appliquer les règles.

**Définition 1.6.** Un tableau peut être

- Contradictory
- ... DIAPO

**Exemple 1.4** (de la methode). DIAPO MDR OU YOUTUBE PLUTOT

L'avantage de cette méthode par rapport au tableau de vérité c'est qu'on a pas besoin de faire tous les cas possibles.

**Généralisation** Si je comprend bien on peut prendre des raccourcis avec des nouvelles règles. Pour la règle  $\alpha$  on met dans le même tableau. Pour les règles  $\beta$  on met dans deux tableaux différents. **Apprendre les tableau de règles**

### 1.1.2 Resolution in propositional logic

**Définition 1.7** (Une clause). **Ca tombe à l'exam d'après le prof**

- Un literal is either an atom or its negation
- Une clause is a disjunction of literals

*Remarque.* A clause is a logical entailment (implication) because  $(\neg A \vee B)$  is equivalent to  $(A \supset B)$

**Exemple 1.5.**  $even(X) \supset odd(successor(X))$

**Théorème 1.1.** Any clausal formula (sans variable libre)  $F$  can be transformed into a logically equivalent conjunction of clauses

**Exemple 1.6.**

**Définition 1.8** (Règle de résolution). S'applique uniquement sur les clauses. Pour prouver que  $S \models A$  il suffit de montrer que  $S \cup [negA]$  est vide. Voir les exemples du DIAPO

### 1.1.3 Unification

**Définition 1.9** (Substitution). A **substitution** is characterized by a infinite set of "

On peut **composer** plusieurs substitution

**Définition 1.10** (term instance).

**Définition 1.11** (Pattern Matching). The term  $t_1$  match with the term  $t_2$  if and only if there exist a substitution  $\sigma$  such that  $t_1\sigma = t_2$

**Définition 1.12** (Unification). The terms  $t_1$  and  $t_2$  unify if and only if there exists a substitution  $\sigma$  such that  $t_1\sigma = t_2\sigma$

**Pattern matching**  $\rightarrow$  **Unification**

### 1.1.4 Resolution in First Order Logic

Nouveau cours du 21/09

Nouveau cours du 28/09

Pas de diapo au moment du cours

Nouveau cours du 12/10

**NOUVEAU PROF** Modèle Lr : diamond et carré  $\Leftrightarrow$  il existe et pour tout

Modèle de Kripke = ensemble de monde (interprétation?) . Puis on peut faire un graph sur comment relier les mondes.

- $M, w_0 \models p \rightarrow q$  c'est faux car dans le monde  $w_0$   $p$  est vrais mais  $q$  est faux
- $M, w_0 \models \Box p$  est vrais, on regarde si tous les mondes qui parte de  $w_0$  on  $p$  de vrais.
- $M, w_1 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$  ici on regarde dans  $w_1$ , la prémisse de la fleche est vrais car  $p$  est vrais dans  $w_1$ , donc  $\Box p$  doit être vrais. On regarde dans  $w_3$ ,  $p$  est faux donc l'implication est fausse. En revanche en partant de  $w_0$
- $M, w_2 \models \Box \Box p$ 
  - $w_2 \Box p$ 
    - $w_2 p$  Faux
    - $w_1 p$  Vrais
  - $w_1 \Box p$  Faux
- $M, w_2 \models \Box \Box q$  Vrais
- $M, w_2 \models \Diamond (r \wedge \Box q)$ 
  - $M, w_2 \models (r \wedge \Box q)$  Vrais
  - $M, w_1 \models (r \wedge \Box q)$  Faux
- $\rightarrow$  VRAIS

Diapo 9 :

$M, w \models \phi$  = La formule est statisfaire dans le monde  $w$  du model  $M$ .

Si pas d'autre monde accessible? alors  $M, w_1 \models \Box \phi$  est vrais

Diapo 10 :

Loupé bruh

Diapo 12 :

Démonstration par l'absurde

Système normal K (diapo 13) : on veut avoir un système de preuve simple, comme celui de Hilbert. On a un axiome sous la forme d'une implication comme pour Hilbert. Mais on simplifie un peu par rapport à Hilbert niveau démonstration, je crois pas l'axiome  $K$  .

Dédution (diapo 14) : On a prouvé  $p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$  (dans un univers ou tous les mondes vérifie  $p \rightarrow q$  alors  $\Box p \rightarrow \Box q$ ). Attention ça n'est pas équivalent a  $\vdash p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$ , dans celle là on ne vérifie pas l'HP que tous les mondes on  $p \rightarrow q$ .

Correction et complétude :

- $\vdash$  == démonstration dans un monde
- $\models$  == démonstration dans tous les mondes
- Correction :
- Complétude :
- $\rightarrow$  Le système  $k$  est correct et complet vis à vis de l'ensemble des modèle de Kripke.

CCL :

- Une formule est satisfiable DIAPO

- Non validité : on montre un contre exemple
- Insatisfiabilité :
- Validité :
  - par raisonnement sémantique
  - Avec la méthode des tableau et  $\neg\phi$  UNSAT
  - Un dernier truc pas compris

**Exemple 1.7.** Montrer que  $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$  n'est pas valide.

⇒ Contre exemple : voir diapo 18

Théorie de la correspondance :

- C'est une série d'axiome
- Preuve de la réflexivité dans le DIAPO
- Sériabilité : globalement on kick out les monde sans fleche
- Transitivité : "Si quelque chose est vrais à un pas de distance, alors il est vrais à deux pas de distance également"
- Euclidienne : "Si je crois possible que phi, je sais que je crois possible de phi"
- Symétrie :

Nouveau cours du 19/10

On peut booster les modèle de Kripke en rajoutant des labels au flèche. Dans cette logique on écrit  $\Box$  comme "sait". On peut l'écrire vite avec  $K_2p \Leftrightarrow K_2\Box p$ .

Diapo 2

- .
- .
- $M, w_1 \models K_2K_1p$  assez space, je crois que ça se traduit bien avec "l'agent 2 sait que l'agent un sait p.
- $M, w_1 \models K_2K_1\neg p$
- $M, w_1 \models K_2\neg K_1$  Est-ce que l'agent 2 sait que l'agent 1 ne sait pas p. On regarde les mondes accessible par l'agent 2 :  $w_1, w_2$ . Dans  $w_1$  l'agent 1 ne sais pas p (on regarde  $w_1, w_0$  ). Dans  $w_2$  l'agent 1 sait p. donc on a un faux et un vrais ce qui donne faux
- $M, w_1 \models K_1\neg K_2p$  ça va
- $M \models K_2p$  ça va

Diapo après : Exemple d'application

Diapo 7 : 3 axiomes important qui forme le système S5

Diapo 12 : différence "je sais que" je sais la chose VS "je sais si" = je sais la chose ou je ne sais pas la chose. le  $K_p^{si}$  c'est comme un où

Diapo 13 :

- $M, w_1 \models K_1K_2^{si}p$
- $M, w_1 \models K_2K_1^{si}p$  faux, mais si on prend  $B_2K_1^{si}p$  fonctionne,  $B_2K_1p$  fonctionne,  $B_2K_1\neg p$  ne fonctionne pas

Diapo 14-15 :

**Exemple 1.8.** On a 6 mondes possible. On suppose les boucles sur eux même chaque monde (réflexivité)

- .
- $M, w_2 \models (2B \vee 2C) \rightarrow w_2 \rightarrow w_2, w_1$  puis on regarde  $2B \vee 2C$
- .
- $M \models \neg K_21A$  est-ce que dans tous les monde l'agent 2 ne sait pas que j'agent 1 à reçu A. L'agent 2 ne sais jamais la carte du joueur 1.
- $M \models B_21A$  contre exemple :  $w_0, w_5$
- $M \models K_22A \vee B_21A$  On peut utiliser le cas précédant. Vrais
- $M \models 1A \rightarrow K_1(2B \vee 2C)$  Rapide à vérifier avec l'implication, on regarde les mondes 1A et c'est vrais, on l'a vérifié 2 et 3.

Diapo 16 : Le problème de l'omniscience logique, paragraphe du millier, en faite c'est un hypothèse très forte, parce que  $K_i\phi$  alors  $K_i$  connaît toute les conséquence logique de  $\phi$ . C'est assez fort de savoir toute les implications de ce qu'on sait.

Diapo 17 : Complexité : assez forte si je comprend bien

Diapo 19-20-21 : on peut avoir une équivalence entre deux modèles de Kripke. Y'a une définition formel appelé bi-simulation. Exemple dans le diapo 21

## Nouveau cours du 26/10

- $E_G \phi$  = tout le groupe  $G$  sait que  $\phi$
- Diapo 5 : def G-atteignable
- Diapo 6 : Connaissance distribuée : On peut déduire  $\phi$  en combinant les connaissances des agents du groupe  $G$ . On regarde l'intersection de toutes les connaissances pour tous les agents. exemple : l'agent 1 sait que la solution est 1 ou 2, l'agent 2 sait que la solution c'est 2 ou 3 → La solution est 2. Voir figure 1.
- Diapo 7 : propriété assez instinctive : on ajoute ou retire des gens du groupe

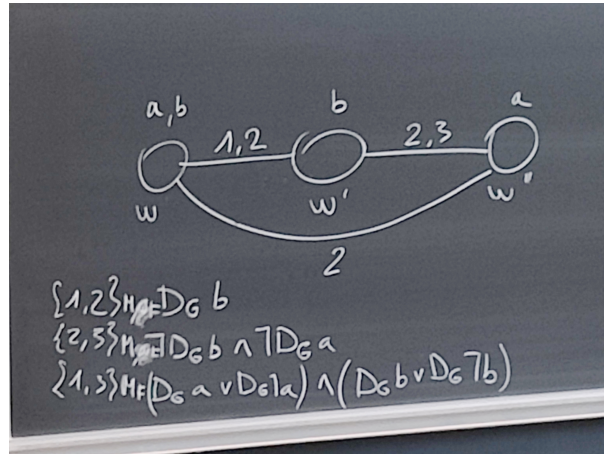


Figure 1 – c'est réflexif

### Diapo 8 : exemple

1. On regarde tous les mondes atteignable depuis  $w_2$  par un des membres du groupe  $G = \{1, 2\}$ . C'est à dire tous les mondes de la structure. Et on a toujours  $1A \vee 1B \vee 1C$  donc c'est vrais
2. Vrais
3. On regarde les flèches avec 1 et 2 partant de  $w_2$ , ici il n'y a que  $w_2$  par réflexivité. et la formule ici est vrais.
4. On doit vérifier si tous les membres du groupe savent que  $\neg B$  Vrais
5. Faux

### Diapo 9 : Notion d'annonce publique

- Ca a pour effet d'éliminer tous les mondes où  $\phi$  est faux

### Diapo 10-11 : Retour sur coffee logic

- On vas regarder ce qui se passe avec les annonces publique avec 3 agents
- La réponse de la première personne vas faire disparaître la moitié des mondes. Ceux qui commence ou ne commence pas par un 1.ect ect

### Diapo 13-14 : exemple enfant sale

1. On regarde tous les monde avec la coordonnée 2 à 1. Puis  $p_2$  est vrais dans tous les monde accessible par l'agent 1.
2. On regarde tous les monde accessible à partir de 101 que je peux atteindre en un arc. Et dans chacun de ces mondes, il y a au moins un enfant sale. Donc tout le monde sait qu'il y a au moins un enfant qui est sale.
3. Non à cause du monde 000
4. Faux dans plein de monde de ma structure
5. On veux que ça soit vrais dans toute la structure
6. Il est bien vrais à chaque fois que j'ai soit  $p_1$  soit  $\neg p_1$

### Diapo 15 : avec annonce publique

- On prend le monde 101 comme le vrais monde
- Le père annonce l'un de vous est sale. → Le monde 000 devient impossible.

- Ainsi si mes deux camarades sont propre, je sais que je suis sale. → on peut éliminer tous ces mondes si les 3 enfants ne répondent pas.
- Nouvelle annonce publique : Est-ce que l'un de vous sait si il est sale?
- Si je vois que les deux autres enfants sont sale, je ne peux toujours pas répondre à la question. L'enfant 1 et l'enfant 3 répondent oui → élimine les mondes 111, 110, 011
- Il ne reste plus que le monde 101

Diapo 16 : Sujet d'examen d'il y a quelques années

- L'épicier est capable de distinguer le poids des sphères et le magicien la magie.
- On a 6 mondes possibles
- Sur le graph, on peut voir que le magicien hésite entre tous les mondes où il a la sphère magique et tous les mondes où il n'a pas la sphère. Same pour l'épicier.

On a des annonces publiques, quel monde éliminer.

1. "Epicier : Je ne sais pas que j'ai la sphère magique" On n'élimine aucun monde, l'épicier hésite toujours entre deux mondes où il a ou pas la sphère magique.
2. "Epicier : Je sais que j'ai obtenu la sphère de 130 numéros 3" →  $w_3, w_4, w_0$  et  $w_1$  aussi car l'épicier hésite quand même avec le monde  $w_3$
3. "Magicien : Je sais que je n'ai pas la sphère magique"
4. Pour la question d'opti pour le roi :
  - Commencer par le magicien est une mauvaise idée, ça élimine 3 mondes en haut ou en bas puis l'épicier n'hésite entre plus aucun des mondes (car il hésitait entre ceux du haut et du bas) et hop ils peuvent conclure
  - Si on fait d'abord parler l'épicier :
    - Avec un paquet de 250g :  $w_2, w_5$  donc il sait qu'il a la sphère de 130,
    - Avec un paquet de 230 : l'épicier est sûr qu'il a la sphère de 110g (1)
    - Avec un paquet de 240g : l'épicier ne sait pas si il a la sphère de 110, et ne sait pas si il a la sphère de 130g :  $w_1$  ou  $w_3$  mais ils sont indistinguables par l'épicier. Et il reste encore 4 mondes possibles :  $w_0, w_1, w_3, w_4$ . Et là le magicien ne peut pas distinguer.

Diapo 19 :

- Remarque que, si il y a coopération, il y a une information plus informative
- Mais c'est au delà de ce que la modélisation nous permet de faire.

Diapo 20 : Nouvelle Énigme

- Correction en TME

Diapo 22-25 : Autre énigme : EXAM 2018-2019

- Initialement avec 140 mondes
- Avec l'annonce de A, on tombe à 20

Diapo 23 : Les cartes russes

—