

# BIMA - Examen session 1

15 janvier 2019 - 14h00/16h00

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié. Aucun document ni machine électronique ne sont autorisés. Durée de l'examen : 2h.

## Exercice 1 Questions de cours (10 points)

1. Dans l'espace de Fourier, peut-on localiser spatialement les structures ? Peut-on mesurer leur taille ? Justifier.
2. Comparer les détecteurs de contours du premier ordre avec ceux du second ordre en terme de robustesse au bruit et de localisation des contours.
3. L'opérateur de Harris est-il invariant par translation ? par rotation ? par changement d'échelle ? Justifier.
4. Le détecteur de Harris est-il invariant par rapport à un changement affine de luminosité  $I' = aI + b$  (où  $I$  est l'image et  $a, b$  deux coefficients constants) ? Expliquez pourquoi et discutez les éventuels changements à intégrer.
5. Explicitiez le critère de maximisation de la variance projetée sur une droite vectorielle engendrée par un vecteur  $v$  dans le cadre de l'ACP. Comment résout-on un tel système en pratique ?
6. Explicitiez le critère maximisé dans le cadre de l'ALD et sa résolution en pratique. Quelle est la différence fondamentale avec l'ACP ?

### Answer of exercise 1

1. Dans l'espace de Fourier on ne peut pas localiser les structures car le spectre est invariant par translation. On peut en revanche mesurer leur taille, elle correspond aux périodes des sinusoïdes.
2. Premier ordre : plus robuste au bruit, localise moins bien les contours (sauf si on examine les extrema locaux dans la direction du gradient). Second ordre : moins robuste au bruit, mais localise mieux les contours.
3. Le détecteur de Harris est invariant par rotation car on calcule les v.p. d'une matrice symétrique définie positive. Elle est également invariante par translation puisqu'elle repose sur un filtrage linéaire (opérateur dérivatif passe-haut). Elle n'est pas invariante par changement d'échelle car les opérateurs d'approchant le gradient dépendent de l'échelle.
4. Lorsque l'on applique Harris à une image  $I' = aI + b$ , le  $b$  n'intervient pas car le calcul de la matrice  $M$  est basé sur les gradients de l'image.  $R' = \det(M') - k \text{tr}(M')^2 = a^4 R$  donc les réponses sont proportionnelles : il suffit de faire varier le seuil en conséquence.
5. Le critère est  $v^T \Sigma v$  avec  $\Sigma$  matrice de variance/covariance. En pratique cela revient à une recherche des valeurs propres de  $\Sigma$  (diagonalisation, SVD) et à un tri de ces valeurs propres par ordre décroissant.

6. Le critère est  $v^T B v / v^T \Sigma v$  avec  $v$  un vecteur,  $B$  la matrice de variance "between" (entre les centroïdes des différentes classes) et  $\Sigma$  la matrice de variance/covariance. En pratique, cela revient à une recherche de valeurs propres de  $\Sigma^{-1}B$  et à un tri par ordre décroissant. Contrairement à l'ACP (réduction de dimension purement non supervisée), la notion de classe intervient ici dans le calcul de  $B$ .

### Exercice 2 Calcul de transformée de Fourier (4 points)

On rappelle la définition de la Transformée de Fourier continue (TFC)  $X$  d'un signal  $x$  continu :  $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$  et de la TFC inverse :  $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2i\pi f t} df$ .

1. Soit la fonction Porte, définie par  $\text{Rect}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Calculez sa TFC inverse.
2. Est-ce que la fonction Porte, comme fonction de transfert, est un filtre idéal? Quel(s) inconvénient(s) possède-t-elle?
3. Montrez que le spectre d'une TFC d'une image est invariant par translation  $\vec{t} = (t_1, t_2)^T$ . *Indication* : calculez la TFC de  $(x, y) \mapsto I(x + t_1, y + t_2)$  et faites un changement de variable.

#### Answer of exercise 2

1.

$$\begin{aligned}
 TFCi(\text{Rect})(t) &= \int_{\mathbb{R}} \text{Rect}(f) e^{2i\pi f t} df \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi f t} df \\
 &= \left[ \frac{e^{2i\pi f t}}{2i\pi t} \right]_{f=-\frac{1}{2}}^{f=\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i\pi t} \\
 &= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \text{sinc}(t)
 \end{aligned}$$

2. Oui c'est un filtre idéal puis son support est bornée. L'inconvénient est qu'il génère de l'aliasing quand on reconstruit le signal spatial.
- 3.

$$\begin{aligned}
 TFC((x, t) \mapsto I(x + t_1, y + t_2))(f, g) &= \iint_{\mathbb{R}^2} I(x + t_1, y + t_2) e^{2i\pi(fx + gy)} dx dy \\
 \text{on pose } x' = x + t_1, y' = y + t_2 : \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} I(x', y') e^{2i\pi(f(x' - t_1) + g(y' - t_2))} dx' dy' \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} I(x', y') e^{2i\pi(fx' + gy')} e^{2i\pi(-ft_1 - gt_2)} dx' dy' \\
 &= e^{-2i\pi(ft_1 + gt_2)} TFC((x, y) \mapsto I(x, y))(f, g)
 \end{aligned}$$

Les deux spectres sont égaux à un coefficient près ( $e^{-2i\pi(ft_1 + gt_2)}$ ) mais qui est de module 1!

### Exercice 3 Reconstruction de signaux (10 points)

1. Calculez la TFC de la fonction Porte.
2. Soit un signal continu à support borné. Montrez que sa TFC n'est pas à support borné. (*Indication* : utiliser la fonction Porte)
3. Soit le signal continu  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ . Représentez graphiquement  $x$  sur une période complète et en centrant sur 0. Que vaut cette période ?
4. Calculez la TFC de  $x$  et dessiner son spectre (ps : la TF de  $t \mapsto e^{2i\pi f_0 t}$  a été donnée au tableau).
5. En pratique, les signaux sont limités dans le temps, c'est-à-dire qu'ils sont à support borné. Ainsi le signal  $x$  est en réalité un signal  $x_L(t) = x(t) \text{Rect}(\frac{t}{L})$ . Calculez la TFC de  $x_L$ . Est-il possible de retrouver la TFC de  $x$  à partir de celle de  $x_L$  ? Est-il possible de reconstruire  $x$  ?

#### Answer of exercise 3

1. C'est le même calcul que la question 2.1.
2. Si un signal  $x$  est à support borné, alors il existe  $L$  suffisamment grand tel que  $x(t) = x(t) \text{Rect}(\frac{t}{L})$ . Si on calcule la TF on trouve :  $LX \star \text{sinc}(f/L)$  donc la TF n'est pas support borné.
3. La période est  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .
- 4.

$$\begin{aligned} X(f) &= TFC \left( \frac{e^{2i\pi f_0 t} - e^{-2i\pi f_0 t}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \end{aligned}$$

5.  $X_L(f) = \frac{1}{2i} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \star \text{sinc}(\frac{f}{L}) = \frac{1}{2i} (\text{sinc}(\frac{f}{L} - f_0) - \text{sinc}(\frac{f}{L} + f_0))$ . Soit deux sinus cardinaux centrés en  $f_0$  et  $-f_0$ .

On peut retrouver la TFC de  $x$  puisque  $X_L = X \star \text{sinc}(f/L)$  si on sait "déconvoluer". La reconstruction de  $x$  est parfaitement possible en calculant la transformée de Fourier inverse.

Remarque : ceci est possible car le signal  $x$  est continu et que nous calculons sa transformée de Fourier continue. Après échantillonnage, et obtention d'un signal discret, ce n'est plus possible mais c'est une autre question.

### Exercice 4 Filtrage spatial (16 points)

On considère la famille de filtres de Gabor, définie sur le domaine spatial, et par la réponse impulsionnelle suivante :

$$(x, y) \mapsto h_{\theta, \sigma, \gamma, f_0}(x, y) = \exp\left(-\frac{x'^2 + \gamma y'^2}{2\sigma^2}\right) \cos(2\pi f_0 x') \quad (1)$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

#### Première partie

1. Quelle transformation spatiale du plan les équations (2,3) représentent-elles ? Quel est le rôle du paramètre  $\theta$  et donner son domaine de définition.
2. On suppose que  $\theta = f_0 = 0$  et que  $\gamma = 1$ . Explicitiez  $h$ . Quel filtre spatial reconnaissez vous pour  $h$  ? Quel est le rôle du paramètre  $\sigma$  ? Donnez son domaine de définition.
3. On suppose que  $\theta = f_0 = 0$ ,  $\sigma = 1$ . On fixe  $\gamma = 1$ . Que vaut  $h$  pour les points  $(x, y)$  situés à une distance euclidienne de  $\sigma$  de l'origine du plan (donnez une valeur formelle, non approchée) ? Notons  $z_0$  cette valeur.
4. En déduire la forme de l'intersection du graphe de  $h_{\theta,1,1,0}$ , c'est-à-dire,  $(x, y, z = h_{\theta,1,1,0}(x, y))$ , avec le plan d'équation  $z = z_0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Que se passe-t-il si on fait varier  $\theta$  ?
5. Prenons maintenant  $\gamma = \frac{1}{2}$ , quelle est la forme de l'intersection du graphe de  $h_{\theta,1,\frac{1}{2},0}$  avec le plan d'équation  $z = z_0$ . *Indication* : reconnaître la transformation spatiale  $(x, y) \mapsto (x, \gamma y)$ . Quelle est maintenant la forme de  $(x, y, z = h_{\theta,1,\frac{1}{2},0})$  dans  $\mathbb{R}^3$  ? Quel est le domaine de définition de  $\gamma$  ?
6. En déduire les rôles des paramètres  $\theta$  et  $\gamma$  sur la forme et l'orientation de la gaussienne.
7. On suppose que  $\sigma = f_0 = 1$  et  $\theta = 0$ . Tracer approximativement le graphe de la fonction  $x \mapsto h_{0,1,\gamma,1}(x, 0)$  sur l'intervalle  $[-2, 2]$ .

## Seconde partie

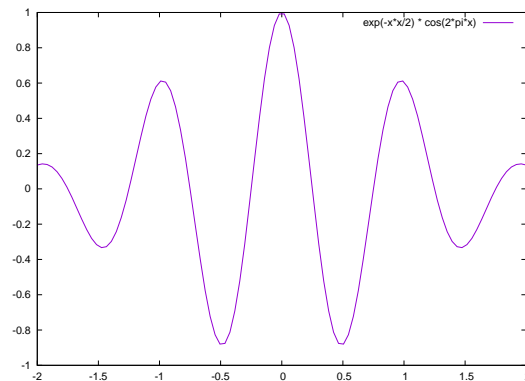
Par la suite on suppose que  $\theta = 0$ .

1. Calculez la TFC de  $(x, y) \mapsto \cos(2\pi f_0 x')$ . *Indication* : faites apparaître  $x$  au lieu de  $x'$ .
2. Calculez la TFC de  $(x, y) \mapsto \exp\left(-\frac{x'^2 + \gamma y'^2}{2\sigma^2}\right)$ .
3. En déduire la fonction de transfert  $H$  de  $h_{f_0,\sigma,\gamma,0}$  et dessiner approximativement le profil du spectre de  $H(u, 0)$ .
4. Si on fait maintenant varier le paramètre  $\theta$ , quelle incidence cela a-t-il sur le spectre de la fonction de transfert  $H$  ?
5. De quel type de filtre s'agit-il (passe bas, haut ou bande) ? Est-ce un filtre idéal ?

### Answer of exercise 4

Partie 1 :

1. C'est une rotation d'angle  $\theta \in [0, 2\pi]$  centrée en l'origine.
2.  $h_{0,\sigma,1,0}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$ . C'est la gaussienne 2D d'écart type  $\sigma > 0$ .
3.  $h_{0,1,1,0}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ .  $z_0 = e^{-1/2}$
4. C'est un cercle de rayon 1 et de centre l'origine. La rotation ne change pas l'allure du cercle et de la gaussienne donc.
5. La transformation est une contraction de paramètre  $\gamma$  dans l'axe des  $y$  donc le cercle se transforme en une ellipse : le plus petit rayon est  $1/2$ .  $\gamma$  est défini sur  $\mathbb{R}^+$ .
6. Ces deux paramètres contrôlent la forme ( $\gamma$ ) et la direction principale de la gaussienne ( $\theta$ ).
7.  $h(x) = e^{-x^2/2} \cos(2\pi x)$ , le graphe :



Partie 2 :

1. La TFC de  $(x', y) = \cos(2i\pi x')$  est  $\frac{\delta(f-f_0, g) + \delta(f+f_0, g)}{2}$ . La rotation spatiale agit de la même manière dans le domaine fréquentielle. Donc la TFC est toujours deux Dirac orientés dans la direction  $\theta$ . et puis on a fixé  $\theta$  à 0. Donc  $x' = x$  (et  $y' = y$ ).
2. La TF d'une gaussienne d'écart-type  $\sigma$  est une gaussienne d'écart-type proportionnelle à  $\frac{1}{\sigma}$ . Puisque  $e^{-\frac{x^2 + \gamma y^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{\gamma y^2}{\sigma^2}}$   
Donc la T.F. est approximativement :  $\exp(-\sigma^2 \frac{f^2 + g^2}{2\gamma})$
3. La fonction de transfert, c'est la TFC, gaussienne convoluée avec les deux Dirac.
4. C'est un filtre bande ou passe bas selon la valeur de  $f_0$ , il n'est pas idéal à cause de la gaussienne.