

**BIMA - Examen (session 1)**

11 janvier 2022 - 14h00

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié.  
**Documents et calculatrice non autorisés. Téléphone portable éteint et rangé.**  
Durée de l'examen : 1 heure 30

*The grading scale for each exercise is only an indication and can change.*  
*No document nor calculator authorized. Your mobile phone should be off and put away.*  
*Exam duration: 1.5 hour*

**Exercice 1 Questions de cours (10 points)**

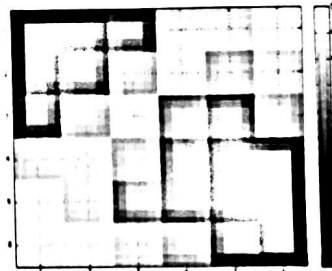
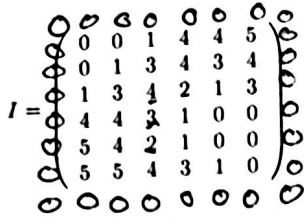
1. On réalise une analyse en composantes principales d'un ensemble de données.
  - Que représente la valeur propre associée à une composante et quelle interprétation physique peut-on lui donner?
  - Définir le rapport d'information expliquée (inertie) lorsqu'on ne retient que  $K$  composantes principales. Comment choisir la valeur de  $K$  dans un problème de reconnaissance de formes (par exemple des visages)?

*A principal component analysis is performed on a dataset.*

  - What does the eigenvalue associated with a principal component represent? What could be a physical interpretation?
  - Define the ratio of explained information (inertia) when  $K$  principal components are kept. How to choose the value of  $K$  in a pattern recognition problem (e.g. faces)?
2. Quelles sont les différences entre l'étirement d'histogramme et l'égalisation d'histogramme? Dans quels cas utiliser l'un plutôt que l'autre?  
*What are the differences between histogram stretching and histogram equalization? In which case is it best to use one or the other?*
3. Peut-on localiser spatialement les structures (contours par exemple) à partir du spectre d'une image?  
*Is it possible to spatially localize structures (e.g. contours) from the spectrum of an image?*
4. Expliquer ce qu'est le phénomène d'aliasing, et comment on peut le corriger.  
*Explain what is the aliasing phenomenon, and how it can be corrected.*
5. Quel critère doit-on maximiser dans une analyse linéaire indépendante? En pratique, comment l'obtient-on?  
*Which criterion should be maximized in a linear independent analysis? How is this done in practice?*

**Exercice 2 Traitement d'images (10 points)**

Soit l'image  $I$  de taille  $6 \times 6$  représentée ci dessous :  
*Let  $I$  be the  $6 \times 6$  image represented below:*



1. Rappeler la définition d'un histogramme, d'un histogramme normalisé et d'un histogramme cumulé normalisé d'une image.  
Give the definition of histogram, normalized histogram, and normalized cumulative histogram of an image.
2. Calculer et représenter :  
— l'histogramme de  $I$ ,  
— l'histogramme cumulé de  $I$ .  
Calculate and represent:  
— the histogram of  $I$ ,  
— the cumulative histogram of  $I$ .
3. Calculer la moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  de  $I$ .  
Indication : on pourra exprimer la moyenne en fonction de l'histogramme et la variance en fonction de la moyenne et de la moyenne des carrés.  
Calculate the mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$  of  $I$ .  
Indication: the mean can be expressed from the histogram, and the variance from the mean and the mean of squares of the image values.
4. On va centrer et réduire l'image  $I$ , de telle sorte que les niveaux de gris de la nouvelle image  $I'$  vont s'écrire :  $I' = \frac{I - \mu}{\sigma}$ .  
— Quelle sont la moyenne et la variance de  $I'$ ? En utilisant une valeur à  $10^{-1}$  près pour  $\sigma$  et  $\mu$ , donner les valeurs minimales et maximales de  $I'$ .  
— La transformation pour passer de  $I$  à  $I'$  est-elle linéaire? Justifier.  
The centered and reduced image is written as  $I' = \frac{I - \mu}{\sigma}$ .  
— What are the mean and variance of  $I'$ ? Using approximate values of  $\sigma$  and  $\mu$  (with a precision of  $10^{-1}$ ), what are the minimal and maximal values of the new image  $I'$ ?  
— Is the transformation that maps  $I$  to  $I'$  linear? Justify your answer.
5. On va maintenant appliquer un filtrage médian  $3 \times 3$  à l'image  $I$ .  
— Rappeler le principe du filtrage médian.  
NB: on effectuera une opération de zero-padding préalablement au filtrage.  
— Calculer le résultat de l'application d'un filtre médian  $3 \times 3$  à l'image  $I$ .  
— Le filtrage médian est-il linéaire? Justifier.  
Let us now compute a  $3 \times 3$  median filter on  $I$ .  
— Recall the principle of the median filter.  
NB: apply a zero-padding before the filter.  
— Compute the result of the  $3 \times 3$  median filter on  $I$ .  
— Is the median filter linear? Justify.

### Exercice 3 Echantillonnage (10 points)

Dans cet exercice, on considère le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$  défini sur  $\mathbb{R}$ .  
In this exercise, we consider the signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$  defined on  $\mathbb{R}$ .

1. Dessiner  $x$  sur l'intervalle  $[0, T_0]$ , avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .  
Draw  $x$  on the interval  $[0, T_0]$ , with  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  and  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .

2. Toujours avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , calculer et dessiner le spectre de  $x$ . Dans la suite, on considère une valeur quelconque pour  $\alpha$ .  
*Compute and draw the spectrum of  $x$  for  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  
 In the following questions,  $\alpha$  can take any value.*
3. Le signal  $x$  est échantillonné avec un pas d'échantillonnage  $T_s$  pour former le signal  $x_s$ . Exprimer  $x_s$  en fonction de  $x$ .  
*The signal  $x$  is sampled with a sampling step  $T_s$ , resulting in a signal  $x_s$ . Write  $x_s$  as a function of  $x$ .*
4. Calculer le spectre de  $x_s$ .  
*Compute the spectrum of  $x_s$ .*
5. Expliquer comment on peut reconstruire  $x$  à partir de  $x_s$ .  
*Explain how  $x$  can be reconstructed from  $x_s$ .*
6. Donner la valeur limite de  $T_s$  pour que le signal  $x$  puisse être reconstruit sans erreur à partir de  $x_s$  et montrer que cette valeur ne dépend pas de  $\alpha$ .  
*Give the limit value of  $T_s$  such that  $x$  can be reconstructed without error from  $x_s$ , and prove that this value does not depend on  $\alpha$ .*

#### Exercice 4 Filtres orientables (10 points)

Les filtres orientables sont des copies d'un même filtre après différentes rotations. On peut synthétiser ce filtre dans n'importe quelle orientation à partir d'une combinaison linéaire appropriée d'une base de filtres. Cela permet d'analyser la réponse du filtre non seulement selon un ensemble discret d'orientations, mais sur une plage continue d'orientations.

*Steerable filters are all identical copies of the same filter, rotated to different orientations. One can synthesize this filter rotated to any orientation by taking an appropriate linear combination of the basis filters. This allows one to analyze oriented filter response not just at a discrete set of orientations, but over the continuous range of possible orientations.*

Soit  $F^\theta(x, y)$  le noyau d'un filtre obtenu par rotation d'angle  $\theta$  de  $F(x, y)$ , c'est-à-dire  $F^\theta(x, y) = F(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$ . On ignore les questions d'échantillonnage, et on considère que les points  $(x, y)$  sont définis dans l'espace continu.  $F(x, y)$  est un filtre orientable nécessitant  $M$  filtres de base si on peut écrire

$$F^\theta(x, y) = \sum_{i=1}^M k_i(\theta) F_i(x, y)$$

où les  $F_i$  sont les filtres de base, qui ne dépendent que de  $(x, y)$  et pas de  $\theta$ , and  $k_i$  sont des fonctions, appelées fonctions d'interpolation, qui ne dépendent que de  $\theta$  et pas de  $(x, y)$ .

*Let  $F^\theta(x, y)$  be a filter kernel obtained from the rotation of angle  $\theta$  of  $F(x, y)$ . So  $F^\theta(x, y) = F(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$ . We ignore sampling issues and work in a continuous  $(x, y)$  space.  $F(x, y)$  is a steerable filter requiring  $M$  basis filters if we can write*

$$F^\theta(x, y) = \sum_{i=1}^M k_i(\theta) F_i(x, y)$$

where  $F_i$  are the basis filters, that depend only on  $(x, y)$  and not on  $\theta$ , and  $k_i$  are called the interpolation functions, that depend only on  $\theta$  and not on  $(x, y)$ .

Le filtre orientable le plus simple est la dérivée directionnelle d'une fonction à symétrie radiale  $G(r)$ , où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Soit  $G(r) = e^{-(x^2 + y^2)}$  une fonction gaussienne.

*The simplest possible steerable filter is the directional derivative of a radially symmetric function  $G(r)$ , where  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Let  $G(r) = e^{-(x^2 + y^2)}$  be a Gaussian function.*

1. Montrer que  $G(x, y)$  est invariant par rotation d'angle  $\theta$ .  
*Prove that  $G(x, y)$  is invariant by a rotation of angle  $\theta$ .*
2. Montrer que  $F = \frac{\partial G}{\partial x}$  est un filtre orientable avec  $M = 2$ . Donner la base des filtres et les fonctions d'interpolation.

- Prove that  $F = \frac{\partial G}{\partial x}$  is a steerable filter with  $M = 2$ . Give the set of basis filters and interpolation functions.
3. Montrer que la dérivée seconde d'une gaussienne,  $H = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  est aussi un filtre orientable. Donner la base des filtres et les fonctions d'interpolation, en utilisant le plus petit nombre  $M$  de termes possibles.
- Prove that the second derivative of a Gaussian  $H = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  is also a steerable filter. Give a set of basis filters and interpolation functions with the smallest possible number  $M$ .
4. Expliquer comment échantillonner le filtre  $H$ , comment obtenir un filtre de support borné et proposer des bornes pertinentes pour ce support.  
Explain how to sample the filter  $H$ , how to obtain a filter with a bounded support and give relevant boundaries of this support.
5. (Question bonus) Écrire un code Python qui prend en argument un angle  $\theta$  et qui calcule les filtres  $F^\theta$  et  $H^\theta$ .  
(Bonus question) Write a Python code that takes as argument an orientation  $\theta$  and returns filters  $F^\theta$  and  $H^\theta$ .
6. Donner une application du filtre  $F^\theta$  en analyse d'images.  
Give an application of filter  $F^\theta$  for image processing.

## Annexes

Transformée de Fourier d'un signal  $x$  continu :  
Fourier transform of a continuous signal  $x$ :

$$f \mapsto \text{FT}(x)(f) = X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

## Propriétés de la transformée de Fourier continue – Properties of the continuous Fourier transform

	$x(t)$	$X(f)$
linéarité – linearity	$x(t) + \lambda y(t)$	$X(f) + \lambda Y(f)$
translation – translation	$x(t - t_0)$	$X(f) e^{-2i\pi f t_0}$
contraction – contraction	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
convolution – convolution	$x * y(t)$	$X(f) \times Y(f)$
produit – product	$x(t) \times y(t)$	$X * Y(f)$

## Propriétés de la distribution de Dirac – Properties of the Dirac distribution

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .
- $x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$
- $x * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- scaling property :  $|\alpha| \cdot \delta(\alpha t) = \delta(t)$
- $TF[\delta(t - t_0)] = e^{-2i\pi f t_0}$  et  $TF[e^{2i\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$

## Transformée de Fourier de fonctions usuelles – Some usual Fourier transforms

Signal	FT
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$e^{2i\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-2i\pi f t_0}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$