Fiche SIGNAL

Charles Vin

S1-2022

Table des matières

.

.

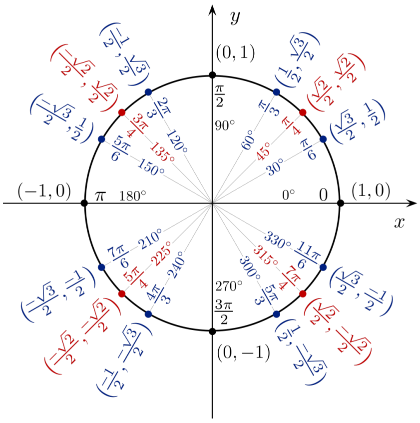
Formule complexe :

$$
\begin{aligned}
a+jb \rightarrow e^{(a+jb)t} &= e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos bt + j\sin bt) \\
z = a+jb \rightarrow |z| * e^{i\arg z} & \\
\tan(\arg z) &= \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}\,(z+\bar{z})} \\
\arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \\
\arg z_1^n &= n \arg z_1 \\
\arg(az) &\equiv \begin{cases} \arg z & \text{si } a>0 \\ (\arg z)+\pi & \text{si } a<0; \end{cases}
\end{aligned}
$$

1 Composante paire et impaire d'une fonction

Soit $x(t)$ une fonction alors on peut écrire $x(t)$ sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t)-x(-t)).$$



Composante paire

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante impaire

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)).$$

2 Convolution

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]g[n-m]\end{aligned}$$

— Inverser $x(\tau)$ en $x(-\tau)$ par symétrie
— Décaler $x(-\tau)$ de t donnant alors $x(-\tau+t) = x(t-\tau)$
— Différencier les différents cas possibles en croisant les graphs, **attention aux échelles de tes dessins**!!!
— Pour chaque cas : calculer la convolution en utilisant les fonctions en jeux sur les bonnes bornes

3 Système Linéaire, homogène et invariant

— Linéaire = Additivité + homogène
— Additivité :
  — Soit $x_1(t) \to h(t)$ et $x_2(t) \to h(t) \to$ somme des deux sorties $= y_1(t)$
  — Soit $x_1(t) + x_2(t) \to h(t) \to y_2(t)$
  — Additif si $y_1(t) = y_2(t)$
— Homogène
  — Soit $x(t) * K \to h(t) \to y_1(t)$
  — Soit $x(t) \to h(t) \to *K \to y_2(t)$
  — Homogène si $y_1(t) = y_2(t)$
— Invariance dans le temps
  — Soit $x(t) \to (t-T) \to h(t) \to y_1(t)$
  — Soit $x(t) \to h(t) \to t - T \to y_2(t)$
  — Invariant si $y_1(t) = y_2(t)$

4 Signaux continue

4.1 Transformé de Laplace, pôle, zéro, stabilité

On trace les pôles et les zéros dans le plans complexe !
Transformé de Laplace

$$\begin{aligned} X(S) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[Z] \to H[Z] \to & Y[Z] = X[Z]H[Z] \\ \Leftrightarrow & H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} \end{aligned}$$

— **Convolution** : $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
— Time shifting : $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$
— Intégrale : $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$

Factoriser les polynômes au dénominateur et au numérateur. Puis pour appliquer Laplace inverse, on vérifie dans le tableau si on trouve une forme adapté.
Sinon on décompose en éléments simple pour obtenir une forme du type $\frac{A}{S+c} \to_{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-ct}u(t)$.

Décomposition en élément simple $\frac{A(X)}{B(X)}$:

1. $\deg A < \deg B$ sinon division euclidienne
2. Si polynôme du second degrés sans racine réel au dénominateur, *normalement* on le laisse et à la place d'une constante en haut on met une fonction affine.
3. 3 méthodes
   — Identification : on remet tout sur le même dénominateur puis identification puis système d'équation
   — Multiplier par un des facteurs : pratique si tous les dénominateurs ont la même puissance. On multiplie par un des dénominateur $\to$ annulation ou plusieurs des dénominateurs $\to$ remplacer x par le truc qui l'annule $x = c \to$ simplifier et hop on trouve le coef tout de suite
   — Multiplier par x et faire la limite en $+\infty$: puis appliquer le théorème du plus haut degré

4.1.1 Stabilité

Soit $H(S) = \frac{1}{(S+p_1)(S+p_2)\dots}$ une forme factorisé $\to_{\mathcal{L}^{-1}}$ $h(S) = \dots$. On définis la stabilité par en regardant si $h(S)$ converge. $\Leftrightarrow$
On regarde uniquement les pôles pour la stabilité
— Stable : Si tous les pôles sont dans la partie gauche du plans complexe
— Instable :
   — Au moins un pôle dans la partie droite du plan complexe
   — Il existe au moins un pôle multiple sur l'axe imaginaire
— Conditionnellement stable : Il existe un pôle simple sur l'axe imaginaire ($a = 0$)

4.2 Réponse en fréquence

Soit $H(S)$ une fonction de transfert, on remplace $S = -j\omega$ puis phase $|H(S)|$ et gain $\lfloor H(j\omega)$

Diagramme de Bode
— Gain = $20\log_{10}|H(Jw)|$
— Relire OneNote (SIGNAL/Prof1/TP2 toute fin) pour les détails du pourquoi
La méthode pour une fonction $H(s)$

1. Mettre la fonction en forme normale

$$\begin{aligned} H(S) &= K\frac{(S+a_1)(S+a_2)}{S(S+b_1)(S^2+b_2S+b_3)} \\ &= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{(1+S/a_1)(1+S/a_2)}{S(1+S/b_1)(1+S*b_2/b_2+S^2/b_3)} \\ &= c * \frac{1+\frac{S}{c_1}+\dots}{(1+\frac{S}{c_2})(1+\frac{S}{c_3})\dots} \end{aligned}$$

2. Constante de départ
   — Gain : $20\log_{10} c$
   — Phase : $\begin{cases} 0 & \text{si } c > 0 \\ \pi & \text{si } c < 0 \end{cases}$
3. Les différents type de courbe à assembler sur le graph de Bode : $1+\frac{S}{c_i}$ dans le figure 1.

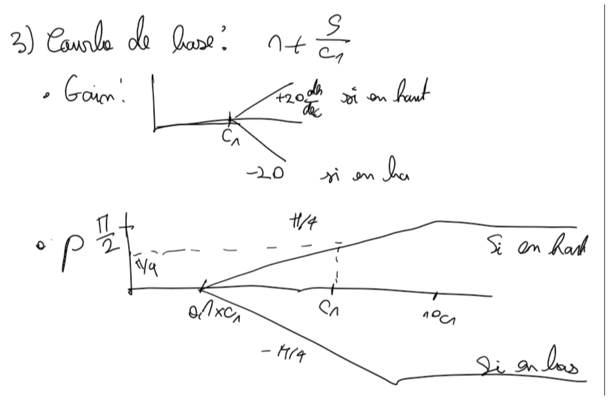


Figure 1 – Les courbes de base pour Bode

Diagramme de Bode inverse Bien observer et faire l'inverse je suppose ahah, s'entraîner pour voir $\rightarrow$ EZ
Dans le cours il a parlé de plein de truc, mais je sais pas si c'est nécessaire

4.3 Type de filtre

Pour determiner le type de filtre d'une fonction de transfert $H(S)$, on regarde son gain $|H(S)|$.
On peut éviter un diagramme de Bode en faisant :

1. Remplacer $S = j\omega$
2. Placer les pôles dans le plans complexe et
3. $|H(j\omega)| = \frac{\prod \text{produit de la distance aux zéros}}{\prod \text{produit de la distance aux pôles}}$ on observe la distance entre ω et les pôles et zéros
4. Classiquement :
   — Vers $\omega = \infty$ on a $|H(j\omega)| = 1$
   — Avec $\omega =$ un zéros, il annule la fraction donc $= 0$
   — En $\omega = 0$ on a le module des pôles et des zéros

NON FAIRE UN BODE VITE FAIT si pas de $\mathbb{C}$ $\uparrow$ NE FONCTIONNE PAS DE OUF

4.4 Réalisation

Utiliser une forme factorisé de $H(S)$.
— Intégrateur/retard : $1/S$
— $\oplus$: additions
— $\triangleright$: gains/multi
Je comprend pas les boucles dans les circuits pffff

4.5 Filtre Butterworts

$$
\begin{aligned}
\left|H(jw)^2\right| &= \frac{1}{1+(\frac{w}{w_c})^{2N}} \\
|H(S)| &= \frac{w_c^N}{(S-p_1)(S-p_2)\dots(S-p_N)} \\
R_p &= -10\log_{10}\frac{1}{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2N}} \\
A_s &= -10\log_{10}\frac{1}{1+(\frac{w_s}{w_c})^{2N}} \\
\to N &= \left\lceil \frac{\log_{10}[(10^{R_p/10}-1)/(10^{A_s/10}-1)]}{2\log_{10}\frac{w_p}{w_s}} \right\rceil \\
w_{cp} &= \frac{w_p}{(10^{R_p/10}-1)^{1/2N}} \\
w_{cs} &= \frac{w_w}{(10^{A_p/10}-1)^{1/2N}} \\
\to w_c &= \frac{w_{cp}+w_{cs}}{2}
\end{aligned}
$$

N = nombre de pôle = nombre de racine. Si complexe, prendre uniquement partie réelle ou inverser la division $\frac{\omega_p}{\omega_s}$ en $\frac{\omega_s}{\omega_p}$
Les pôles sont sur le cercle de rayon w_c. La fonction de

- On prend $2N$ pôle mais on se serre que de la moiter : les stables à gauche de l'ordonnée. On divise donc $\frac{2\pi}{2N}$ ou $\frac{360}{2N}$. Si N paire, penser à pivoter les pôles pour ne pas qu'il soit sur l'axe des ordonnés (conditionnellement stable)
- chaque pôle : $p_i = w_c * e^{j*i\frac{2\pi}{2N}}$ On prend que ceux au dessus de $\pi/2$ ou 90. On peut éventuellement simplifier avec la formule de l'exp complexe.

5 Signaux discret

5.1 Transformé en Z

Transformé en Z (fonction discrète)

$$
\begin{aligned}
X[Z] &= z\{x[n]\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\Omega} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega T}
\end{aligned}
$$

On remplace Ω par $\Omega = \omega T$ avec $T = \frac{1}{Fs}$ la période = inverse de la fréquence d'échantillonnage.

5.2 Pôles et zéros

?????

5.3 Réponse en fréquence

Soit $H[Z]$ une fonction de transfert, on remplace $Z = e^{-j\Omega} = \cos\Omega - j\sin\Omega$ puis phase $|H[Z]|$ et gain $\lfloor H[e^{j\Omega}]$ $\to$ Réponse en fréquence périodique par le $\cos$ et le $\sin$

5.4 Stabilité

Plot partie réel $\mathcal{R}$ et partie imaginaire Im

- Un système T.D. est stable si $\rightarrow$ touts les pôles sont à l'intérieur du cercle unitaire.
- Un système T.D. est instable si
  - Au moins un pôle est à l'extérieur du cercle unitaire
  - Il existe des pôles multiples sur le cercle unitaire
- Un système T.D. est conditionnellement stable si $\rightarrow$ il existe des pôles simples sur le cercle unitaire.

5.5 Type de filtre

On doit regarder $|H[Z]| = \left|H[e^{j\Omega}]\right| = \left|H[e^{2\pi f}]\right|$ qui serait caractérisé par la distance des pôles (et zéros ?) à un point sur le cercle dans le plans. On regarde le graphique de l'argument de ce point en abscise et du module en ordonné.

J'ai l'impression on regarde souvent par rapport à π

Pourquoi il met $\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{r_1 \ldots r_M}{d_1 \ldots d_M} = \frac{1}{d_1}$ **???** Si la phase est constante y'a pas de filtre ? Il doit y avoir un problème avec ce calcul

5.6 Filtre IIR :

5.6.1 Filtre IIR : Transformation bilinéaire

On passe d'un truc discret pour retourner vers le continue où on sait faire

$$H(z) = H(S) \text{ avec } S = \frac{2}{T}\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \Leftrightarrow Z = \frac{S/2 + 1}{1 - S/2}$$

$\rightarrow$ Permet de transformer nos pôles continue en pôles discret. On peut alors les dessiner dans le plans complexe avec le cercle unitaire et remarquer que c'est stable si dans le cercle. Où $Z = e^{j\omega}$

$$\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2} = w \text{ pour les deux } \omega_s, \omega_r.$$

5.7 Filtre FIR : fenêtrage

Classiquement on aura $\Omega_s - \Omega_p = \frac{c * \pi}{M}$ avec M le nombre de coefficient à déterminer, et une attenuation **min** hors bande $A_s \min$ associé.

Les coefficients sont symétrique, donc la phase du filtre est linéaire ($\lfloor H(e^{j\Omega}) = -2\Omega$)

Dans ce cas, l'ordre du filtre est $M - 1$.

5.7.1 Type de filtre FIR

Voir graphique sur OneNote pour la représentation des différents types c'est intéressant.

- **Type 1 :** On peut réaliser tous les types de filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut
- **Type 2 :** Il existe un zéro à $\Omega = \pi \rightarrow$ On ne peut pas réaliser un filtre passe-haut
- **Type 3 :** Il existe un zéro à $\Omega = 0$ et à $\Omega = \pi \rightarrow$ One ne peut pas réaliser un filtre passe-bas, ni un filtre passe-haut.
- **Type 4 :** Il existe un zéro à $\Omega = 0 \rightarrow$ on ne peut pas réaliser un filtre passe-bas

Symétrie de $h[n]$	Nombre de coefficients M	Type
Symétrie positive $h_n = -h_{M-1-n}$	Impaire	1
	Paire	2
Symétrie négative : $h_n = -h_{M-1-n}$	Impaire	3
	Paire	4