BIMA - Examen reparti 1

7 décembre 2020 - 13h15

Le barème, sur 20, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié.
Documents non autorisés. Téléphone portable éteint et rangé. Calculatrice autorisée.
Durée de l'examen : 1 heure 30

Exercice 1 Histogramme (5 points)

Soit une image quantifiée sur 16 niveaux de gris et dont l'histogramme est le suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11–15
$H(k)$	113	174	213	129	79	117	102	65	14	11	7	0

1. Calculer l'histogramme cumulé H_c.
2. Quelle est la dynamique de cette image ? Quelle est la taille de l'image en supposant qu'elle soit carrée ? En arrondissant à l'entier inférieur, donner le niveau de gris médian et le niveau de gris moyen.
3. Appliquer un étirement de l'histogramme sur la plus grande dynamique autorisée par un codage à 16 niveaux de gris et donner le nouvel histogramme.
4. Appliquer une égalisation de l'histogramme et donner le nouvel histogramme (on rappelle la formule d'égalisation d'histogramme : $k' = \lfloor \frac{L-1}{N \times M} H_c(k) \rfloor$).
5. Discuter les résultats entre ces deux transformations. Est-ce que ce sont des transformations linéaires sur la valeur de niveau de gris ? Justifier.
6. Proposer une transformation **non linéaire** sur les valeurs de niveaux de gris qui permette d'augmenter le contraste de l'image.

Answer of exercise 1

1. $H_c = [113, 287, 500, 629, 708, 825, 927, 992, 1006, 1017, 1024, 1024, 1024, 1024, 1024, 1024]$
2. Dynamique : 10
   Taille : $N \times M = 1024$ donc $N = M = 32$
   Médian : k t.q $H_c[k]$ $N \times M/2 = 512$. Donc $k = 2$
   Moyen : $E(k) = \sum_k k \times H[k]/1024 = (0 \times 113 + 1 \times 174 + 2 \times 213 + 3 \times 129 + ...)/1024 \approx 3.16 = 3$
3. $k' = \lfloor (L-1) \times (k - k_{min})/(k_{max} - k_{min}) \rfloor$. L=16, $k_{min} = 0$, $k_{max} = 10$, donc $k' = \lfloor 1.5 \times k \rfloor$,
   Nouvel histogramme :

k'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H_e(k')$	113	174	0	213	129	0	79	117	0	102	65	0	14	11	0	7

4. $k' = \lfloor 1.5 H_c(k) \rfloor$ Nouvel histogramme :

k'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H_e(k')$	0	113	0	0	174	0	0	213	0	129	79	0	117	102	90	7

5. Les deux histogrammes sont assez différents : les niveaux de gris sont distribués différemment et, dans le cas de l'égalisation, le nombre de niveaux de gris diminue. Les deux transformations augmente la dynamique de l'image, l'égalisation elle augmente le contraste en réduisant le nombre de classes. La première transformation est linéaire, mais pas la seconde puisque $H_{I+J} \neq H_I + H_J$.
6. L'image est trop sombre, on peut prendre alors la transformation logarithmique.

Exercice 2 Calcul de transformée de Fourier (5 points)

On rappelle la définition de la transformée de Fourier continue (TFC) d'un signal x continu :

$$f \mapsto \mathrm{FT}(x)(f) = X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi ft}dt$$

et de la transformée de Fourier inverse :

$$t \mapsto \mathrm{FT}^{-1}(X)(t) = x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{2i\pi ft}df$$

On trouvera en annexe les transformées de Fourier des fonctions usuelles vues en cours ainsi que les propriétés essentielles de la transformée de Fourier.

1. Le théorème de la convolution s'applique également avec la transformée de Fourier inverse. Montrer que $\mathrm{FT}^{-1}(x \star y) = \mathrm{FT}^{-1}(x) \times \mathrm{FT}^{-1}(y)$. On rappelle que $x \star y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)y(t-u)du$.
   Indication : réarranger les intégrants et faire un changement de variable.
2. Soit le signal continu $x(t) = 1 + 2\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}\sin(6\pi f_0 t), t \in \mathbb{R}$.
   Calculer sa transformée de Fourier et dessiner le module de son spectre en indiquant en abscisse les fréquences importantes.
   Est-ce que ce signal est à bande limité ? Si oui, quelle est la fréquence maximale ?
   En justifiant votre réponse : quel espace (temporel ou fréquentiel) est le plus adapté pour représenter le signal x ?
3. Soit la fonction Porte de longueur L définie par : $\mathrm{Rect}_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   En détaillant le calcul, déterminer sa transformée de Fourier.
4. Soit x_L le signal x fenêtré sur une longueur de $L = 2T_0$, $T_0 = \frac{1}{f_0}$, c'est-à-dire que $x_L(t) = x(t)\,\mathrm{Rect}_{2T_0}(x)$.
   Calculer sa transformée de Fourier. Sans le dessiner, décrire l'allure du module de son spectre. Ce signal est-il à bande limité ? Si oui, quelle est la fréquence maximale ?

Answer of exercise 2

1. C'est la même démonstration que celle vue en TD.
2. On a $\sin(x) = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}$. $X(f) = \delta(f) + (\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))/i + (\delta(f-3f_0) - \delta(f+3f_0))/4i$.
   Graphe du module du spectre : une dirac en 0, deux en $\pm f_0$, deux en $\pm 3f_0$.
   Le signal est à bande limité. La fréquence maximale est $3f_0$. Le signal x est difficile à dessiner (addition de 4 fonctions sinus) alors que celui du spectre non (5 dirac) ! Donc le domaine fréquentiel est ici plus adapté, le signal se décrit avec 3 fréquences et 3 amplitudes.

3. On peut faire le calcul direct ou bien remarquer que $\text{Rect}_L(t) = \text{Rect}(t/L)$ et appliquer la propriété de contraction de la transformée de Fourier.
4.

$$
\begin{aligned}
X_L &= X \star \text{FT}(\text{Rect}_{2T_0}) \\
&= \big(f \mapsto \delta(f) + (\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))/i + (\delta(f-3f_0) - \delta(f+3f_0))/4i\big) \star \\
&\quad \big(f \mapsto 2T_0 \,\text{sinc}(2T_0\pi f)\big) \\
&= 2T_0(\text{sinc}(2T_0\pi f) + \frac{1}{i}(\text{sinc}(2T_0\pi(f-f_0)) - \text{sinc}(2T_0\pi(f+f_0))) \\
&\quad + \frac{1}{4i}(\text{sinc}(2T_0\pi(f-3f_0)) - \text{sinc}(2T_0\pi(f+3f_0))))
\end{aligned}
$$

On dessine un sinus cardinal centré en l'origine, deux en $\pm f_0$ et deux en $\pm 3f_0$. Les zéros des sinc sont à distance $\frac{k}{2T_0}, k \in \mathbb{Z}^*$ du centre du sinc. Le signal n'est pas à bande limité puisque le support de son spectre n'est pas borné.

Exercice 3 Interpolation (7 points)

1. Soit la fonction Tri défini par : $\text{Tri}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

   En admettant que $\text{Tri} = \text{Rect}_1 \star \text{Rect}_1$, calculer la transformée de Fourier de Tri.
2. Dessiner le graphe de Tri et son spectre. Indiquer clairement la taille du support de Tri et les fréquences qui annulent son spectre.
3. On considère maintenant la fonction de fenêtrage $w = \text{Tri} \star \text{Rect}_1$. Calculer sa transformée de Fourier.
4. On admettra que le support de w est $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

   Quel est le support de la fonction $w_L(t) = w(\frac{3t}{L})$? Calculer sa transformée de Fourier.
5. On considère le signal x de l'exercice 2 et on souhaite l'échantillonner pour obtenir un signal x_e.

   Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage f_e si on veut reconstruire le signal original sans perte ?
6. Par la suite on considère un signal x quelconque. On rappelle que $x_e(t) = x(t)\text{Ш}_{T_e}(t)$ avec $T_e = \frac{1}{f_e}$.

   Calculer X_e, le spectre de x_e.
7. En utilisant w_L comme la fonction de transfert d'un filtre passe-bas, est-il possible de retrouver le spectre X du signal x original sans perte ? Dans ce cas, que devrait valoir la longueur L ?
8. L'interpolation consiste à reconstruire le signal original x à partir de ses échantillons $x(kT_e)$ en utilisant le filtre dont la fonction de transfert est w_L pour obtenir un signal x_r "reconstruit".

   Donner la formule de reconstruction de x_r à partir de ses échantillons $x(kT_e), k \in \mathbb{Z}$.

   Indication : on calculera la transformée de Fourier inverse de $X_e(f)w_L(f)$ et on admettra que la transformée de Fourier inverse de w_L est identique à sa transformée de Fourier.

Answer of exercise 3

1. On sait que $\mathrm{FT}(\mathrm{Rect})(f) = \mathrm{sinc}(\pi f)$ donc par le théorème de la convolution, $\mathrm{FT}(\mathrm{Tri})(f) = \mathrm{FT}(\mathrm{Rect})(f) \times \mathrm{FT}(\mathrm{Rect})(f) = \mathrm{sinc}^2(\pi f)$.
2. Graphe de Tri : c'est un triangle de base $[-1, 1]$ et de hauteur 1. Le graphe du spectre ressemble à celui de $|\,\mathrm{sinc}\,|$ lissé aux intersections avec l'abscisse. Les zéros du spectres sont ceux de $\mathrm{sinc}(\pi f)$: $\pm k, k \in \mathbb{Z}^*$.
3. $W(f) = \mathrm{FT}(\mathrm{Tri})(f) \times \mathrm{FT}(\mathrm{Rect})(f) = \mathrm{sinc}^3(\pi f)$.
4. Il est de $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$. En effet, on a : $|\frac{3t}{L}| < \frac{3}{2} \Rightarrow t < \frac{L}{2}$. En appliquant la propriété de contraction : $W_L(f) = \frac{L}{3} W(\frac{L}{3} f)$
5. La fréquence maximale de x est $3f_0$, donc il faut que $f_e \geq 6f_0$ (Shannon).
6.
$$\begin{aligned} X_e(f) &= f_e X \star ⧢_{f_e}(f) = f_e X \star \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(f - kf_e) \\ &= f_e \sum_k X \star \delta(f - kf_e) = f_e \sum_k X(f - kf_e) \end{aligned}$$
7. Oui c'est possible à condition que le support du spectre de X reste dans le support de w_L. Ce support étant $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, il faut donc que $L = f_e$.
8. On suit les indications :
$$\begin{aligned} x_r(t) &= \mathrm{FT}^{-1}(X_e(f) w_L(f))(t) = \frac{L}{3} x_e(t) \star W_L(\frac{L}{3} t) \\ &= \frac{L}{3} (\sum_k x(t)\delta(t - kT_e)) \star W_L(\frac{L}{3} t) \\ &= \frac{L}{3} \sum_k x(kT_e) W_L(\frac{L}{3}(t - kT_e)) \\ &= \frac{L}{3} \sum_k x(kT_e)\, \mathrm{sinc}^3(\frac{L}{3}(t - kT_e)) \end{aligned}$$

Exercice 4 Filtrage spatial discret (3 points)

1. Soit T un opérateur LTI discret. Quelles propriétés sont vérifiées par T ? Soit x un signal, exprimer $T[x]$ à partir de la réponse impulsionnelle de T.
2. On souhaite appliquer un filtre anti-aliasing avant de sous-échantillonner un signal 1-D.
   (a) Quelles sont les caractéristiques fréquentielles d'un filtre anti-aliasing ?
   (b) On a le choix d'utiliser comme filtre anti-aliasing ceux ayant comme fonction de transfert : une fonction Porte de longueur L, une fonction de Butterworth ($B_{n,c}(f) = \frac{1}{1+(f/c)^{2n}}$), et une fonction gaussienne d'écart-type σ.
   Lesquels sont des filtres idéaux ? Comment choisir leur fréquence de coupure ?

Answer of exercise 4

1. LTI : linear Time Invariant : le filtre est invariant par translation temporelle linéaire. Il s'exprime comme la convolution entre le signal et la réponse impulsionnelle du filtre : $T(x) = x \star h$ avec $h = T[\delta]$.

2. (a) C'est un filtre passe-bas qui annule les fréquences au delà de 1/4.
   (b) Seule la porte est un filtre idéal. Le Butterworth est l'approximation d'un filtre idéal, c'est une porte "lisse". Choix des fréquences de coupure :
   — Porte : $f_c = 1/4 \Rightarrow L = 1/2$.
   — Butterworth : $f_c = c = 1/4$.
   — Gaussien : $f_c = 3\sigma = 1/4$.

Annexes

Propriétés de la transformée de Fourier continue

	$x(t)$	$X(f)$
linéarité	$x(t) + \lambda y(t)$	$X(f) + \lambda Y(f)$
translation	$x(t - t_0)$	$X(f)\ e^{-2i\pi f t_0}$
contraction	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X(\frac{f}{\alpha})$
convolution	$x \star y(t)$	$X(f) \times Y(f)$
produit	$x(t) \times y(t)$	$X \star Y(f)$

Propriétés de la distribution de Dirac

— $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.
— $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$
— $x \star \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
— scaling property : $|\alpha| \cdot \delta(\alpha t) = \delta(t)$
— $TF\left[\delta(t - t_0)\right] = e^{-2i\pi f t_0}$ et $TF\left[e^{2i\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

Signal	FT	Signal	FT
1	$\delta(f)$	$\delta(t)$	1
$e^{2i\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-2i\pi f t_0}$
$⧢_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} ⧢_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$		