# Fiche SIGNAL

Charles Vin

S1-2022

## Table des matières



Exponentiel complexe :

$$a + jb \to e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos bt + j\sin bt).$$

# 1 Composante paire et impaire d'une fonction

Soit $x(t)$ une fonction alors on peut écrire $x(t)$ sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante paire

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante impaire

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)).$$

# 2 Convolution

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]g[n-m]$$

— Inverser $x(\tau)$ en $x(-\tau)$ par symétrie
— Décaler $x(-\tau)$ de $t$ donnant alors $x(-\tau+t) = x(t-\tau)$
— Différencier les différents cas possibles en croisant les graphs, **attention aux échelles de tes dessins**!!!
— Pour chaque cas : calculer la convolution en utilisant les fonctions en jeux sur les bonnes bornes

# 3 Système Linéaire, homogène et invariant

— Linéaire = Additivité + homogène
— Additivité :
  — Soit $x_1(t) \to h(t)$ et $x_2(t) \to h(t) \to$ somme des deux sorties $= y_1(t)$
  — Soit $x_1(t) + x_2(t) \to h(t) \to y_2(t)$
  — Additif si $y_1(t) = y_2(t)$
— Homogène
  — Soit $x(t) * K \to h(t) \to y_1(t)$
  — Soit $x(t) \to h(t) \to *K \to y_2(t)$
  — Homogène si $y_1(t) = y_2(t)$
— Invariance dans le temps
  — Soit $x(t) \to (t-T) \to h(t) \to y_1(t)$
  — Soit $x(t) \to h(t) \to t-T \to y_2(t)$
  — Invariant si $y_1(t) = y_2(t)$

# 4 Signaux continue

## 4.1 Transformé de Laplace, pôle, zéro, stabilité

Transformé de Laplace

$$X(S) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt$$

$$X[Z] \to H[Z] \to Y[Z] = X[Z]H[Z]$$
$$\Leftrightarrow H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]}$$

— **Convolution** : $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
— Time shifting : $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$
— Intégrale : $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$

Factoriser les polynômes au dénominateur et au numérateur. Puis pour appliquer Laplace inverse, on vérifie dans le tableau si on trouve une forme adapté.
Sinon on décompose en éléments simple pour obtenir une forme du type $\frac{A}{S+c} \to_{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-ct}u(t)$ **A vérifier dans le tableau**.

Décomposition en élément simple : 3 méthodes
— Identification : on remet tout sur le même dénominateur puis identification puis système d'équation

— Multiplier par un des facteurs : pratique si tous les dénominateurs ont la même puissance. On multiplie par un des dénominateur $\rightarrow$ annulation ou plusieurs des dénominateurs $\rightarrow$ remplacer $x$ par le truc qui l'annule $x = c \rightarrow$ simplifier et hop on trouve le coef tout de suite
— Multiplier par $x$ et faire la limite en $+\infty$ : puis appliquer le théorème du plus haut degré

**A voir si dans les annales il demande des décompositions en éléments simple du futur mais c'est là au cas où**

**Completer avec les possibilités lorsqu'on a un polynôme en haut!!!**

#### 4.1.1 Stabilité

Soit $H(S) = \frac{1}{(S+z_1)(S+z_2)\dots}$ une forme factorisé $\rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(S) = \dots$. On définis la stabilité par en regardant si $h(S)$ converge. $\Leftrightarrow$

— Stable : Si tous les pôles sont dans la partie gauche du plans complexe
— Instable :
  — Au moins un pôle dans la partie droite du plan complexe
  — Il existe au moins un pôle multiple sur l'axe imaginaire
— Conditionnellement stable : Il existe un pôle simple sur l'axe imaginaire ($a = 0$)
— Comme d'hab dessin dans OneNote

### 4.2 Réponse en fréquence

Soit $H(S)$ une fonction de transfert, on remplace $S = -j\omega$ puis phase $|H(S)|$ et gain $\lfloor H(j\omega)$ **Décrire la méthode de calcul ici**

**Diagramme de Bode**

— Module d'un complexe : $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$
— Argument : $\arg z$
— Gain = $20 \log_{10} |H(Jw)|$
— Relire OneNote (SIGNAL/Prof1/TP2 toute fin) pour les détails du pourquoi

La méthode pour une fonction $H(s)$

1. Mettre la fonction en forme normale
$$\begin{aligned} H(S) &= K \frac{(S + a_1)(S + a_2)}{S(S + b_1)(S^2 + b_2 S + b_3)} \\ &= \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} * \frac{(1 + S/a_1)(1 + S/a_2)}{S(1 + S/b_1)(1 + S * b_2/b_2 + S^2/b_3)} \\ &= c * \frac{1 + \frac{S}{c_1} + \dots}{(1 + \frac{S}{c_2})(1 + \frac{S}{c_3}) \dots} \end{aligned}$$
2. Constante de départ
   — Gain : $20 \log_{10} c$
   — Phase : $\begin{cases} 0 & \text{si } c > 0 \\ \pi & \text{si } c < 0 \end{cases}$
3. Les différents type de courbe à assembler sur le graph de Bode : $1 + \frac{S}{c_i}$ dans le figure 1.

**Diagramme de Bode inverse** Bien observer et faire l'inverse je suppose ahah, s'entraîner pour voir Dans le cours il a parlé de plein de truc, mais je sais pas si c'est nécessaire

### 4.3 Type de filtre

Pour determiner le type de filtre d'une fonction de transfert $H(S)$ , on regarde son gain $|H(S)|$.
On peut éviter un diagramme de Bode en faisant :

1. Remplacer $S = j\omega$
2. Observer le comportement de $|H(j\omega)|$ pour $\omega = 0, \omega = +\infty$ et pour d'autre valeur évidente qui pourrait être valuable
3. Déduire une pseudo forme du graphique du module

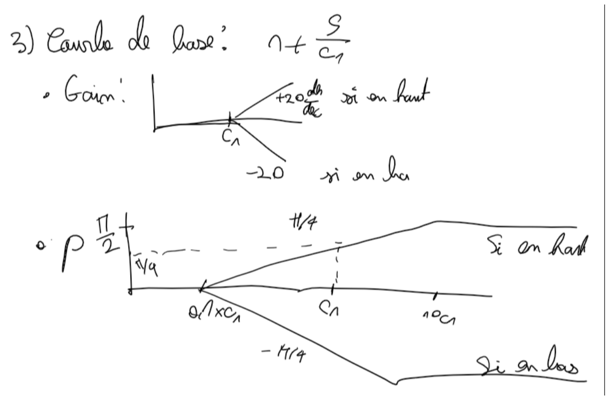


Figure 1 – Les courbes de base pour Bode

## 4.4 Réalisation

Utiliser une forme factorisé de $H(Z)$ **Je comprend pas les boucles dans les circuits pfffff**

## 4.5 Filtre Butterworts

$$\left|H(jw)^2\right| = \frac{1}{1+(\frac{w}{w_c})^{2N}}$$

$$|H(S)| = \frac{w_c^N}{(S-p_1)(S-p_2)\dots(S-p_N)}$$

$$R_p = -10\log_{10}\frac{1}{1+(\frac{w_p}{w_c})^{2N}}$$

$$A_s = -10\log_{10}\frac{1}{1+(\frac{w_s}{w_c})^{2N}}$$

$$\rightarrow N = \left\lceil \log_{10}\frac{(10^{R_p/10}-1)(10^{A_s/10}-1)}{2\log_{10}\frac{w_p}{w_s}} \right\rceil$$

$$w_{cp} = \frac{w_p}{(10^{R_p/10}-1)^{1/2N}}$$

$$w_{cs} = \frac{w_w}{(10^{A_p/10}-1)^{1/2N}}$$

$$\rightarrow w_c = \frac{w_{cp}+w_{cs}}{2}$$

N = nombre de pôle = nombre de racine. Les pôles sont sur le cercle de rayon $w_c$. La fonction de

- On prend $2N$ pôle mais on se serre que de la moitier : les stables à gauche de l'ordonnée. On divise donc $\frac{2\pi}{2N}$ ou $\frac{360}{2N}$. Si $N$ paire, penser à pivoter les pôles pour ne pas qu'il soit sur l'axe des ordonnés (conditionnellement stable)
- chaque pôle : $p_i = w_c * e^{j*i\frac{2\pi}{2N}}$ On prend que ceux au dessus de $\pi/2$ ou $90$. On peut éventuellement simplifier avec la formule de l'exp complexe.

# 5 Signaux discret

## 5.1 Transformé en Z

Transformé en Z (fonction discrète)

$$X[Z] = z\{x[n]\}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\Omega} \qquad\qquad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega T}$$

On remplace $\Omega$ par $\Omega = \omega T$ avec $T = \frac{1}{Fs}$ la période = inverse de la fréquence d'échantillonnage.

## 5.2 Pôles et zéros

?????

## 5.3 Réponse en fréquence

Soit $H[Z]$ une fonction de transfert, on remplace $Z = e^{-j\Omega} = \cos\Omega - j\sin Omega$ puis phase $|H[Z]|$ et gain $\lfloor H[e^{j\Omega}]\rceil \rightarrow$ Réponse en fréquence périodique par le $\cos$ et le $\sin$

## 5.4 Stabilité

Plot partie réel $\mathcal{R}$ et partie imaginaire $Im$

- Un système T.D. est stable si $\rightarrow$ touts les pôles sont à l'intérieur du cercle unitaire.
- Un système T.D. est instable si
  - Au moins un pôle est à l'extérieur du cercle unitaire
  - Il existe des pôles multiples sur le cercle unitaire
- Un système T.D. est conditionnellement stable si $\rightarrow$ il existe des pôles simples sur le cercle unitaire.

## 5.5 Type de filtre

On doit regarder $|H[Z]| = \left|H[e^{j\Omega}]\right| = \left|H[e^{2\pi f}]\right|$ qui serait caractérisé par la distance des pôles (et zéros ?) à un point sur le cercle dans le plans. On regarde le graphique de l'argument de ce point en abscise et du module en ordonné.

**Pourquoi il met $\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{r_1 \ldots r_M}{d_1 \ldots d_M} = \frac{1}{d_1}$ ???** Si la phase est constante y'a pas de filtre ? Il doit y avoir un problème avec ce calcul

## 5.6 Filtre IIR :

### 5.6.1 Filtre IIR : Transformation bilinéaire

On passe d'un truc discret pour retourner vers le continue où on sait faire

$$S = \frac{2}{T}\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}.$$

$$\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2} = w.$$

Pour les deux $\omega_s, \omega_r$

## 5.7 Filtre FIR : fenêtrage