

Compte Rendu TM2

Charles Vin

30/09

1. Trouver la transformée de Laplace inverse de

(a) $X(S) = \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3}$

(b) $X(S) = \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3}$

(c) $X(S) = \frac{20}{S(S^2+10S+16)}$

2. Tracer le diagramme de Bode de $H(S) = \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)}$. Tracer la réponse en fréquence de $H(S)$ en utilisant MatLab. Comparer les résultats

$$f = 1 : 0.001 : 1000$$

$$w = 2\pi * f$$

$$S = i * w$$

$$H = S * (S + 100) / \text{la fonction H du dessus}$$

$$\text{module} = 20 * \log_{10}(\text{abs}(H))$$

$$\text{angle}(H)$$

$$\text{plot}(w, \text{module})$$

$$\text{plot}(w, \text{angle})$$

1 Exercice 1

1. Racine du polynôme : $\{-1, -3\}$

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3} \\ &= \frac{10(S+1)}{(S+1)(S+3)} \\ &= \frac{10}{S+3} \end{aligned}$$

D'après la ligne cinq du tableau on a

$$x(t) = e^{\lambda}u(t) \Leftrightarrow X(S) = \frac{1}{S - \lambda}.$$

Dans notre cas $\lambda = -3$. Conclusion :

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= 10e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3} \\ &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{(S+1)(S+3)} \\ &= \frac{10e^{-2S}}{(S+3)} \end{aligned}$$

Nous sommes dans le même cas que précédemment avec un time shifting de 2. Conclusion :

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= 10e^{-3(t-2)}u(t-2) \end{aligned}$$

3. Les racines de $S(S^2+10S+16)$ sont $\{0, -2, -8\}$

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{20}{S(S^2+10S+16)} \\ &= \frac{20}{S(S+2)(S+8)} \\ &= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8} \end{aligned}$$

Trouvons A, B, C :

$$\begin{aligned} \frac{20}{S(S+2)(S+8)} &= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8} \\ \Leftrightarrow 20 &= A(S+2)(S+8) + B(S+8)S + C(S+2)S \\ \Leftrightarrow 20 &= AS^2 + 10AS + 16A + BS^2 + 8BS + CS^2 + 2CS \\ \Leftrightarrow 20 &= (A+B+C)S^2 + (10A+8B+2C)S + 16A \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A+B+C=0 \\ 10A+8B+2C=0 \\ 16A=20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/4-C \\ 8(-5/4-C)+2C=-50/4 \\ A=20/16=5/4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/4-C \\ -6C=-50/4+40/4=-10/4 \\ A=5/4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/3 \\ C=5/12 \\ A=5/4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{20}{S(S^2+10S+16)} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= \frac{5}{4}u(t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{5}{12}e^{-8t}u(t) \\ &= u(t)\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{5}{12}e^{-8t}\right) \end{aligned}$$

2 Exercice 2

$$H(S) = \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{20p * 100}{2 * 20} = \frac{100p}{2} = 50p$$
$$20 \log_{10} |H(jw)| = 20 \log_{10} |50jw| = 20 \log_{10} 50w$$
$$\text{Avec } w = 1 : 20 \log_{10} |H(jw)| = 20 \log_{10} 50$$

Grâce à ces calculs préalable, on peut maintenant tracer le diagramme de Bode du gain dans la figure ??

Figure 1 – Diagramme de Bode du gain