

Logiques et représentations des connaissances

Charles Vin

S1-2022

1 Introduction à la logique des propositions et des prédicats du premier ordre

Définition 1.1. Quelques définitions

- Expression : une description logique. Elle est vraie ou fausse
- Meaning : le sens qui relie l'expression vers sa référence
- Référence : représente le sens

Le langage des propositions :

- Atome
- Connecteur :
 - Binary : \vee = "ou", \wedge = "et" \neg = négation
 - DIAPO

Table de vérité :

- Une ligne = une "interprétation"

Une formule est

- Satisfiable : si vraie dans une interprétation
- Valide : si vraie dans toutes les interprétations
- Unsatisfiable : faux sur toutes les interprétations

On peut avoir des fonctions qui représentent une expression logique.

- Un terme représente une fonction qui renvoie un paramètre ou le tuple de paramètres d'une fonction.
- Un atome est une fonction qui renvoie un booléen.

En d'autres mots ça semble être en fonction de ce que la fonction renvoie un booléen ou un paramètre.

Variable est :

- Liée (muette) : Si elle est liée à un quantificateur, on peut donc changer librement son nom tant qu'on le change partout dans la formule
- Libre : C'est l'inverse, pas liée à un quantificateur donc libre dans la formule. Par exemple dans la formule $\exists y, x < y$, la variable x est libre et y est liée. Cette formule représente le fait que "Il existe un nombre plus grand que x ". Au final ici x est en lien avec l'énoncé, il est fixe.

Diapo interpretation : rien compris

A formula is "**valid**" if it is true in **all** the interpretation of **all** domains.

Exemple 1.1. — Valide

- DIAPO

Un modèle est un couple $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, i \rangle$. Une valuation est une fonction $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$. $I_m(F)$ is the truth value. Y'a des propriétés de la truth value dans le DIAPO.

A est une conséquence sémantique de B si A est vraie pour toutes les interprétations où B est vraie i.e. for all models if $I_m \mathcal{V}(B)$ then $I_m \mathcal{V}(A)$. Exemple $A \rightarrow B$ est une conséquence sémantique. Je crois que le symbole c'est $B \models A \iff A$ conséquence logique de B.

Définition 1.2. Un système formel est composé d'un langage formel, un ensemble d'axiomes et de règles d'inférence.

Exemple 1.2. Exemple dans le DIAPO avec le système formel de Hilbert.

- \vdash représente une dérivation. On peut prouver A à partir de B.

Définition 1.3 (Théorème). Any formula which is derived from the axioms by iteratively applying inference rules is a **theorem**.

Notation : $\vdash A$ means A is a theorem

Exemple 1.3. Exemple : $\vdash (A \rightarrow A)$

Preuve : Voir diapo c'est drôle

□

Définition 1.4 (Démonstration). A **proof** of a theorem A is a finite sequence of formulae F_0, \dots, F_n such that DIAPO mais osef un peu

Définition 1.5 (Symbolic system). — Consistency : Each description of the symbolic system corresponds to an object in the reality i.e. DIAPO

— Completeness : each object of the reality can be described in the symbolic system $\forall A$ if $\models A$ then $\vdash A$

1.1 Automatic theorem proving

1.1.1 Tableau method

1. Normalisation : Transformation into **NNF - Negative Normal Form** : The negations occurs only before atomic propositions. i.e il faut développer les négations au max.
2. Build a tableau :
 - Root : The formula under NNF.
 - Build successors of T using two rules R_\wedge et R_\vee VOIR LE DIAPO POUR LEUR DEFINITIONS
 - On arrête lorsque l'on ne peut plus appliquer les règles.

Définition 1.6. Un tableau peut être

- Contradictory
- ... DIAPO

Exemple 1.4 (de la methode). DIAPO MDR OU YOUTUBE PLUTOT

L'avantage de cette méthode par rapport au tableau de vérité c'est qu'on a pas besoin de faire tous les cas possibles.

Généralisation Si je comprend bien on peut prendre des raccourcis avec des nouvelles règles. Pour la règle α on met dans le même tableau. Pour les règles β on met dans deux tableaux différents. **Apprendre les tableau de règles**

1.1.2 Resolution in propositional logic

Définition 1.7 (Une clause). **Ca tombe à l'exam d'après le prof**

- Un literal is either an atom or its negation
- Une clause is a disjunction of literals

Remarque. A clause is a logical entailment (implication) because $(\neg A \vee B)$ is equivalent to $(A \supset B)$

Exemple 1.5. $even(X) \supset odd(successor(X))$

Théorème 1.1. Any clausal formula (sans variable libre) F can be transformed into a logically equivalent conjunction of clauses

Exemple 1.6.

Définition 1.8 (Règle de résolution). S'applique uniquement sur les clauses. Pour prouver que $S \models A$ il suffit de montrer que $S \cup [negA]$ est vide. Voir les exemples du DIAPO

1.1.3 Unification

Définition 1.9 (Substitution). A **substitution** is characterized by a infinite set of "

On peut **composer** plusieurs substitution

Définition 1.10 (term instance).

Définition 1.11 (Pattern Matching). The term t_1 match with the term t_2 if and only if there exist a substitution σ such that $t_1\sigma = t_2$

Définition 1.12 (Unification). The terms t_1 and t_2 unify if and only if there exists a substitution σ such that $t_1\sigma = t_2\sigma$

Pattern matching \rightarrow **Unification**

1.1.4 Resolution in First Order Logic

Nouveau cours du 21/09

Nouveau cours du 28/09

Pas de diapo au moment du cours

Nouveau cours du 12/10

NOUVEAU PROF Modèle Lr : diamond et carré \Leftrightarrow il existe et pour tout

Modèle de Kripke = ensemble de monde (interprétation?) . Puis on peut faire un graph sur comment relier les mondes.

- $M, w_0 \models p \rightarrow q$ c'est faux car dans le monde w_0 p est vrais mais q est faux
- $M, w_0 \models \Box p$ est vrais, on regarde si tous les mondes qui parte de w_0 on p de vrais.
- $M, w_1 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$ ici on regarde dans w_1 , la prémisse de la fleche est vrais car p est vrais dans w_1 , donc $\Box p$ doit être vrais. On regarde dans w_3 , p est faux donc l'implication est fausse. En revanche en partant de w_0
- $M, w_2 \models \Box \Box p$
 - $w_2 \Box p$
 - $w_2 p$ Faux
 - $w_1 p$ Vrais
 - $w_1 \Box p$ Faux
- $M, w_2 \models \Box \Box q$ Vrais
- $M, w_2 \models \Diamond (r \wedge \Box q)$
 - $M, w_2 \models (r \wedge \Box q)$ Vrais
 - $M, w_1 \models (r \wedge \Box q)$ Faux
- \rightarrow VRAIS

Diapo 9 :

$M, w \models \phi$ = La formule est statisfaire dans le monde w du model M .

Si pas d'autre monde accessible? alors $M, w_1 \models \Box \phi$ est vrais

Diapo 10 :

Loupé bruh

Diapo 12 :

Démonstration par l'absurde

Système normal K (diapo 13) : on veut avoir un système de preuve simple, comme celui de Hilbert. On a un axiome sous la forme d'une implication comme pour Hilbert. Mais on simplifie un peu par rapport à Hilbert niveau démonstration, je crois pas l'axiome K .

Dédution (diapo 14) : On a prouvé $p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$ (dans un univers ou tous les mondes vérifie $p \rightarrow q$ alors $\Box p \rightarrow \Box q$). Attention ça n'est pas équivalent a $\vdash p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$, dans celle là on ne vérifie pas l'HP que tous les mondes on $p \rightarrow q$.

Correction et complétude :

- \vdash == démonstration dans un monde
- \models == démonstration dans tous les mondes
- Correction :
- Complétude :
- \rightarrow Le système k est correct et complet vis à vis de l'ensemble des modèle de Kripke.

CCL :

- Une formule est satisfiable DIAPO

- Non validité : on montre un contre exemple
- Insatisfiabilité :
- Validité :
 - par raisonnement sémantique
 - Avec la méthode des tableau et $\neg\phi$ UNSAT
 - Un dernier truc pas compris

Exemple 1.7. Montrer que $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ n'est pas valide.

⇒ Contre exemple : voir diapo 18

Théorie de la correspondance :

- C'est une série d'axiome
- Preuve de la réflexivité dans le DIAPO
- Sérialité : globalement on kick out les monde sans fleche
- Transitivité : "Si quelque chose est vrais à un pas de distance, alors il est vrais à deux pas de distance également"
- Euclidienne : "Si je crois possible que phi, je sais que je crois possible de phi"
- Symétrie :

Nouveau cours du 19/10

On peut booster les modèle de Kripke en rajoutant des labels au flèche. Dans cette logique on écrit \Box comme "sait". On peut l'écrire vite avec $K_2p \Leftrightarrow K_2\Box p$.

Diapo 2

- .
- .
- $M, w_1 \models K_2K_1p$ assez space, je crois que ça se traduit bien avec "l'agent 2 sait que l'agent un sait p.
- $M, w_1 \models K_2K_1\neg p$
- $M, w_1 \models K_2\neg K_1$ Est-ce que l'agent 2 sait que l'agent 1 ne sait pas p. On regarde les mondes accessible par l'agent 2 : w_1, w_2 . Dans w_1 l'agent 1 ne sais pas p (on regarde w_1, w_0). Dans w_2 l'agent 1 sait p. donc on a un faux et un vrais ce qui donne faux
- $M, w_1 \models K_1\neg K_2p$ ça va
- $M \models K_2p$ ça va

Diapo après : Exemple d'application

Diapo 7 : 3 axiomes important qui forme le système S5

Diapo 12 : différence "je sais que" je sais la chose VS "je sais si" = je sais la chose ou je ne sais pas la chose. le K_p^{si} c'est comme un où

Diapo 13 :

- $M, w_1 \models K_1K_2^{si}p$
- $M, w_1 \models K_2K_1^{si}p$ faux, mais si on prend $B_2K_1^{si}p$ fonctionne, B_2K_1p fonctionne, $B_2K_1\neg p$ ne fonctionne pas

Diapo 14-15 :

Exemple 1.8. On a 6 mondes possible. On suppose les boucles sur eux même chaque monde (réflexivité)

- .
- $M, w_2 \models (2B \vee 2C) \rightarrow w_2 \rightarrow w_2, w_1$ puis on regarde $2B \vee 2C$
- .
- $M \models \neg K_21A$ est-ce que dans tous les monde l'agent 2 ne sait pas que j'agent 1 à reçu A. L'agent 2 ne sais jamais la carte du joueur 1.
- $M \models B_21A$ contre exemple : w_0, w_5
- $M \models K_22A \vee B_21A$ On peut utiliser le cas précédant. Vrais
- $M \models 1A \rightarrow K_1(2B \vee 2C)$ Rapide à vérifier avec l'implication, on regarde les mondes 1A et c'est vrais, on l'a vérifié 2 et 3.

Diapo 16 : Le problème de l'omniscience logique, paragraphe du millier, en faite c'est un hypothèse très forte, parce que $K_i\phi$ alors K_i connaît toute les conséquence logique de ϕ . C'est assez fort de savoir toute les implications de ce qu'on sait.

Diapo 17 : Complexité : assez forte si je comprend bien

Diapo 19-20-21 : on peut avoir une équivalence entre deux modèles de Kripke. Y'a une définition formel appelé bi-simulation. Exemple dans le diapo 21