Traitement du signal

Charles Vin

2022

Cours de
- Hassam Aboushady, équipe CIAN : hassam.aboushady@lip6.fr. Cours inspiré des 5 premiers chapitre du livre "B.P.Lathi, Linear Signals & Systems, Oxford University Press 2005"
- Sebastien Baey : sebastien.baey@lip6.fr

Modalité d'examen :
- Un exam par professeur après chaque partie.
- Pour Aboushady : 60% exam, 40% sur les CR de TD chaque semaine into 50% de la note finale + une feuille A4
- Pour Baey à voir

Table des matières
- Signaux et opération utiles
- Traitement de signal dans le domaine Temporel (convolution)
  - Temps continu
  - Temps discret
- Traitement de signal dans le domaine fréquentiel
  - Transformé de Laplace (Temps continu)
  - Transformé en Z (Temps discret)
- Filtrage en temps continu/discret

Quatres type de signal : Temps continu/discret X Amplitude Analogique(continue)/numérique(discret). D'un point de vu technique, le type d'amplitude ne change pas grand chose (ça rajoute juste une erreur qu'on modélise comme du bruit). Ce qui est important est le type de temps.

1 Opération sur les signaux

1.1 Quelques révisions

On a
- Un signal $x(t)$ en entrée
- Qui passe dans un système $h(t)$
- Qui sort un autre signal $y(t)$

3 opérations : Voir les graphique dans OneNote
- Décalage : On décale le signal dans le temps $x(t+T), x(t-T)$
- Etalage et compression dans le temps :
  - Etalage : $x(t/2)$ Aplatie la courbe dans le temps
  - Compression : $x(2t)$ L'inverse
- Inversion : $x(-t)$: symétrie par rapport à l'ordonnée.

On vas écrire les fonctions de signal en utilisant cette fonction

$$\begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Exemple 1.1. Exprimer $x(t)$ en fonction de $u(t)$. Voir OneNote

Définition 1.1 (L'impulsion (dirac))**.** On mesure l'impulsion (le saut si on prend une porte) avec cette fonction. L'amplitude ici est infini (mot du prof mais genre la pente est infini).

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

En faite il le mesure avec cette fonction mais il a fait un dessin où il fait tendre $\epsilon \to 0$ pour reserrer la fenêtre de l'intégrale autour de la porte

Définition 1.2 (L'exponentiel)**.** On passe dans les complexes où on écrit le nombre imaginaire avec i ou j (pour pas confondre le i de l'intensité du courant).

$$\begin{aligned} e^{st} &\text{ avec } s = a + jb \\ e^{st} &= e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + j\sin bt) \end{aligned}$$

1.2 La convolution

Définition 1.3. En gardant en tête la définition de tout à l'heure avec le signal d'entrée $x(t)$ et le système $h(t)$. On définie l'intégrale de la convolution tel que

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) \star h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau d\tau) \end{aligned}$$

Exemple 1.2. Déterminez la réponse d'un système définit par $h(t) = e^{-2t}u(t)$ à une entrée $x(t) = e^{-t}u(t) \to u(\tau)$.

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) \star h(t) &= \int_{(\infty)}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{t} e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

Voir figure 1.

Proposition 1.1 (de la convolution)**.** *Quelques propriété de la convolution*

— *Commutativité :* $x_1(t) \star x_2(t) = x_2(t) \star x_1(t)$
— *Distributivité : toi même tu sais*
— *Associativité :* $x_1(t) \star x_2(t) \star x_3(t) = (x_1(t) \star x_2(t))x_3(t) = x_1(t) \star (x_2(t) \star x_3(t))$
— *Décalage : Si* $x_1(t) \star x_2(t) = c(t)$ *alors*

$$\begin{aligned} x_1(t) \star x_2(t-T) &= c(t-T) \\ x_1(t-T) \star x_2(t) &= c(t-T) \\ x_1(t-T_1) \star x_2(t-T_2) &= c(t-T_1-T_2) \end{aligned}$$

— *Convolution avec une impulsion :* $x(t) \star \delta(t) = x(t)$
— *La durée de la convolution : On somme les deux durées (temps entre le zéro du début et celui de la fin). Soit un signal* $x_1(t)$ *d'une durée* T_1 *et un signal* $x_2(t)$ *d'une durée* T_2*. Alors* $x_1(t) \star x_2(t)$ *à une durée de* $T_1 + T_2$*.*

1.2.1 La convolution graphique de $x(t) \star h(t)$

1. Je garde $x(\tau)$ fixe (ou $h(t)$)
2. Je trace $h(-\tau)$ (ou $x(t)$)
3. Je décale $h(-\tau)$ pour une valeur de t (ou $x(t)$)
4. J'intègre $x(\tau)h(t-\tau)$ dans chaque cas (ou inverses)
5. Je répète 3. et 4. pour différentes valeurs de t

Exemple 1.3. Trouvez la convolution de $x(t), h(t)$. Voir one note

Nouveau cours du 23/09

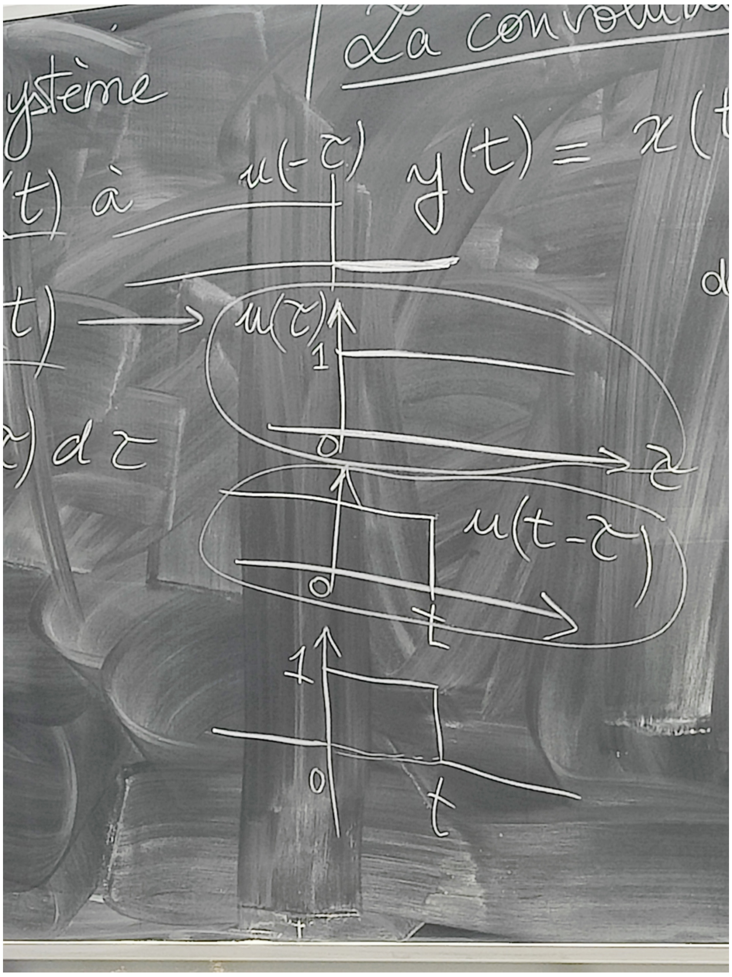

Figure 1 – Exemple convolution

1.3 La transformé de Laplace

Dans le cas de la transformé de Laplace on a

$$x(t) \to h(t) \to y(t).$$

qui devient

$$X(S) \to H(S) \to Y(S) = X(S)H(S).$$

Définition 1.4 (La transformé de Laplace)**.**

$$\begin{aligned} X(S) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-St}dt \end{aligned}$$

avec $S = \sigma + j\omega$ (imaginaire), $w = 2\pi f, f =$ la frequence

Exemple 1.4 (Laplace)**.** Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-St}dt = [\frac{e^{St}}{-S}]_0^\infty \\ &= 0 - \frac{e^0}{-S} = \frac{1}{S} \end{aligned}$$

Exemple 1.5. Ici on montre comment les valeurs du tableau poly sont calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)u(t)e^{St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \cos(omega_0 t)e^{-St}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} (\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2})e^{St}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{t(j\omega_0 - S)} + e^{-t(j\omega_0 + S)}dt \\ &= \frac{1}{2}[\frac{e^{t(j\omega_0 - S)}}{j\omega_0 - S} - \frac{e^{-t(j\omega_0 + S)}}{j\omega_0 + S}]_0^\infty \end{aligned}$$

Ici y'a un problème de convergence avec le $+\infty$ le prof ne sais pas

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\frac{0-1}{j\omega_0 - S} + \frac{0-1}{-(j\omega_0 + S)}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{S - j\omega_0} + \frac{1}{S + j\omega_0}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{S + j\omega_0 + S - j\omega_0}{S^2 + \omega_0^2}) \\ &= \frac{S}{S^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Proposition 1.2 (importante de la transformé de Laplace)**.**

- *Addition :* $\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = X_1(S) + X_2(S)$
- *Dérivé (sous condition) :* $\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\}$
- *Dérivé seconde :* $\mathcal{L}\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\}$
- *Intégrale :* $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$
- ***Convolution*** *:* $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
- *Time shifting :* $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$

1.4 Transformé de Laplace Inverse

Exemple 1.6 (Transformé de Laplace Inverse)**.** Cas général avec décomposition en élément simple.

$$H(S) = \frac{7S-6}{S^2-S-6}.$$

Racine du dénominateur : 3 et $-2 \to$ Factorisation du dénominateur en $(S-3)(S+2)$

$$\frac{7S-6}{(S-3)(S+2)} = \frac{A}{S+2} + \frac{B}{S+2}.$$

Pour trouver A et B : Trois techniques

— Par identification en remultipliant en haut et en bas
— Multiplier par un des facteurs à gauche et à droite pour simplifier une des fractions, remplacer S par -2 pour obtenir $-2+2=0$, ça simplifie plein de truc et hop on peut retrouver B facilement.
—

Bref ici $A=4$ et $B=3$

$$\begin{aligned} &H(S) = \frac{4}{S+2} + \frac{3}{S-3} \\ &\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ &\quad h(t) = 4e^{-2t}u(t) + 3e^{3t}u(t) \end{aligned}$$

1.5 Expression générale d'un système linéaire invariant dans le temps

$$\begin{aligned} &\frac{d^N}{dt^N}y(t) + a_{N-1}\frac{d^N}{dt^N}y(t) + \dots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) \\ =&b_M\frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

En supposant toutes les conditions initiales nulles et en appliquant la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} &[S^N + a_{N-1}S^{N-1} + \dots + a_1 S + a_0]Y(S) = [b_M S^M + b_{M-1}S^{M-1} + \dots + Sb_1 + b_0]X(S) \\ \Leftrightarrow &\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_M S^M + b_{M-1}S^{M-1} + \dots + Sb_1 + b_0}{S^N + a_{N-1}S^{N-1} + \dots + a_1 S + a_0} \\ \Leftrightarrow &H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{(S+z_1)+(S+z_2)+\dots+(S+z_M)}{(S+p_1)+(S+p_2)+\dots+(S+p_N)} \end{aligned}$$

Avec $H(S)$ la fonction de transfert, $z_1, \dots, z_M$ les zéros de la fonction de transfert et $p_1, \dots, p_N$ les pôles de la fonction de transfert.

$$\begin{aligned} &H(S) = \frac{1}{S+p_1} + \frac{B}{S+p_2} + \dots + \frac{N}{S+p_N} \\ &\mathcal{L}^{-1} \downarrow \\ &\quad h(t) = Ae^{-p_1 t} + Be^{-p_2 t} + \dots + Ne^{-p_N t} \end{aligned}$$

Exemple 1.7 (Stabilité d'un système LTI)**. uniquement les pôles ont une influence sur la stabilité (?)**

$$\begin{aligned} H(S) &= \frac{1}{S+p_1} \to h(t) = e^{-p_1 t} \\ &= \frac{1}{s-p_1} \to h(t) = e^{p_1 t} \end{aligned}$$

Voir dessin OneNote