DM3 SIGNAL

Charles Vin

12 octobre 2022

DM3 pour mercredi 12/10

Exercice 1 Avec $H(S) = \frac{S^2+w_0^2}{S^2+2Sw_0\cos\theta+w_0^2}$.

1. Trouvez les pôles et les zéros de cette fonction de transfert
2. Tracer les pôles et les zéros dans le plans complexe S
3. Quel type de filtre est réalisé par cette fonction de transfert ? Passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande
4. Avec MatLab tracez la réponse en fréquence de ce filtre pour
   (a) $\theta = 60°$
   (b) $\theta = 80°$
   (c) $\theta = 87°$
   et avec $w_0 = 2\pi f_0, f_0 = 50hz$

1. Trouvons les racines du dénominateur : $S^2 + 2Sw_0\cos\theta$
   — $\Delta = (2w_0\cos\theta)^2 - 4w_0^2 = 4w_0^2\cos^2\theta - 4w_0^2 = 4w_0^2(\cos^2\theta - 1)$
   — $\sqrt{\Delta} = 2w_0\sqrt{\cos^2\theta - 1}$
   — Si $w_0 = 0$ ou si $\theta = 0$ alors $\Delta = 0$ il n'y a pas de racine.
   — Sinon $\forall w_0 \in R^*, \theta \in R^*, w_0^2 > 0, \cos^2(\theta) - 1 < 0 \Rightarrow \Delta < 0$
   — Dans ce cas il y a deux racines complexes : $\frac{-(2w_0\cos\theta)\pm i*2w_0\sqrt{\cos^2\theta-1}}{2} = -w_0\cos\theta \pm i*\sqrt{\cos^2\theta - 1}$

$$
\begin{aligned}
H(S) &= \frac{S^2+w_0^2}{S^2+2Sw_0\cos\theta+w_0^2} \\
&= \frac{(S-iw_0)(S+iw_0)}{(S-w_0\cos\theta \pm i*\sqrt{\cos^2\theta-1})(S+-w_0\cos\theta \pm i*\sqrt{\cos^2\theta-1})}
\end{aligned}
$$

   On a donc deux pôles : $\pm i * w_0(-\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})$ et deux zéros $\pm iw_0$

2. On pose $w_0 = 2\pi f_0, f_0 = 50hz$. Pour les coordonnes des points, voir la table 1. Pour le plot des points, voir la figure 1.
   On remarque que lorsque si $\cos\theta < 0$ alors le système est instable. Si $\cos\theta = 0$ le système est conditionnellement stable.

θ	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$
z_1	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$	$(0, w_0)$
z_2	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$	$(0, -w_0)$
p_1	$(0, w_0)$	$(-w_0 * \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{w_0}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{w_0}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$	$(\frac{w_0}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$
p_2	$(0, -w_0)$	$(-w_0 * \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{w_0}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{w_0}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$	$(\frac{w_0}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}w_0)$

Table 1 – Coordonnées des pôles et des zéros pour $w_0 = 2\pi * 50$

3. Parcourons l'axe des imaginaires de $jw = 0 \to +\infty$.
   — Lorsque $w = 0, |H(jw)| = 1$ car les p_i et z_i sont placé sur un cercle.
   — Lorsque $w = w_0, |H(jw)| = 0$ car on se place sur z_1 donc le numérateur s'annule

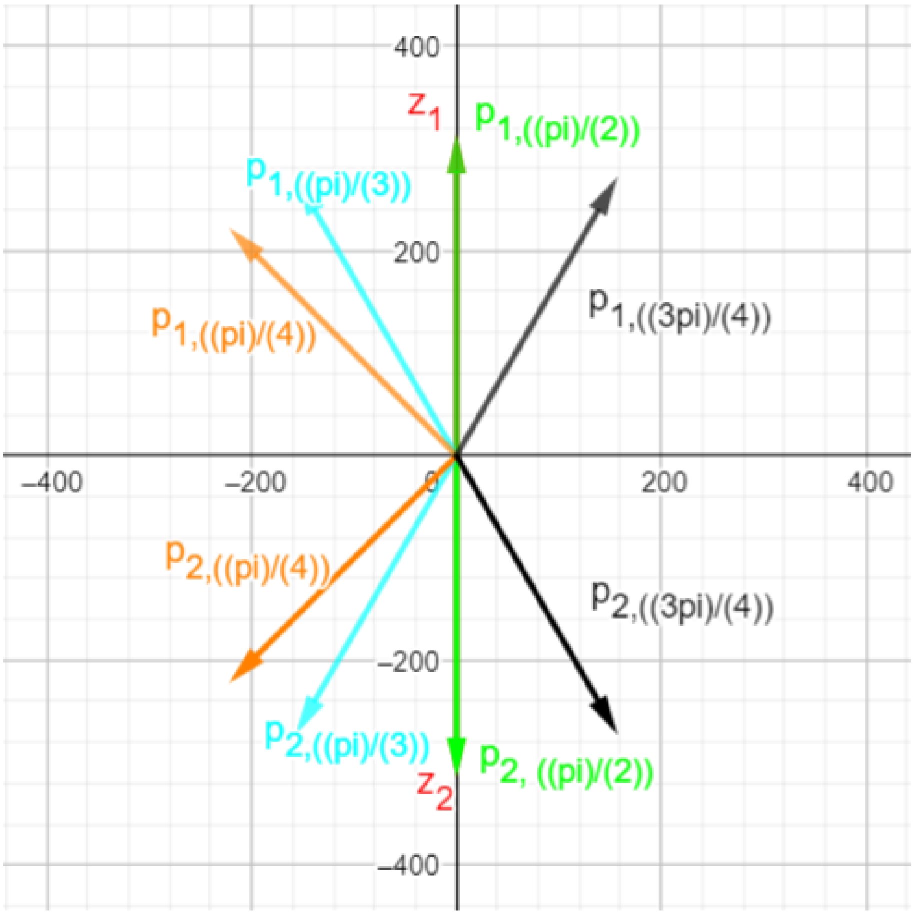


Figure 1 – Pôle et zéros pour $w_0 = 2\pi * 50$

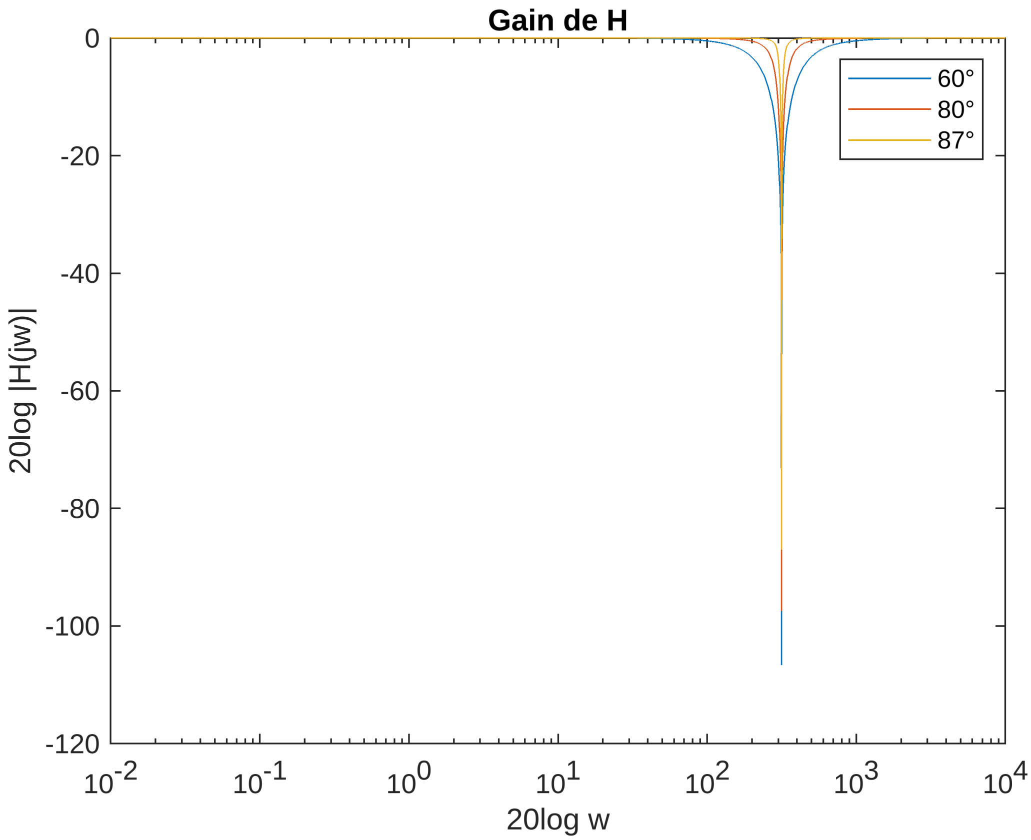
— Lorsque $w \to +\infty, |H(jw)| \to 1$ également.
On peut donc déduire que le gain se réduit vers zéros autour de $w_0 = 2\pi f_0$ puis remonte vers un (on pourra le voir sur la figure MatLab dans la question suivante). C'est donc un filtre coupe bande sur f_0.

4. Pour les figures, voir la page suivante.

```
f_0 = 50;
w_0 = 2*pi*f_0;
theta = [60*pi/180 80*pi/180 87*pi/180];
theta = transpose(theta);

w = 0 : 0.01 : 10000;
S = 1i*w;
H = (S.^2 + w_0^2) ./ (S.^2 + 2*w_0*cos(theta)*S + w_0.^2);
module = 20*log10(abs(H));
phase = angle(H);

figure('name', 'Gain de H');
semilogx(w, module);
title('Gain de H');
xlabel('20log w');
ylabel('20log |H(jw)|');
legend('60°', '80°', '87°');
```




```

figure('name', 'Phase de H');
semilogx(w, phase);
title('Phase de H');
xlabel('20log w');
ylabel('Degrés (rad)');
legend('H');
```

```
legend('60°', '80°', '87°');
```