Fiche SIGNAL

Charles Vin

S1-2022

Exponentiel complexe :

$$a + jb \to e^{(a+jb)t} = e^{at}e^{jbt} = e^{at}(\cos bt + j \sin bt).$$

1 Composante paire et impaire d'une fonction

Soit $x(t)$ une fonction alors on peut écrire $x(t)$ sous la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante paire

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)).$$

Composante impaire

$$x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)).$$

2 Convolution

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]g[n-m]\end{aligned}$$

— Inverser $x(\tau)$ en $x(-\tau)$ par symétrie
— Décaler $x(-\tau)$ de t donnant alors $x(-\tau + t) = x(t - \tau)$
— Différencier les différents cas possibles en croisant les graphs, **attention aux échelles de tes dessins**!!!
— Pour chaque cas : calculer la convolution en utilisant les fonctions en jeux sur les bonnes bornes

3 Système Linéaire, homogène et invariant

- Linéaire = Additivité + homogène
- Additivité :
  - Soit $x_1(t) \to h(t)$ et $x_2(t) \to h(t) \to$ somme des deux sorties $= y_1(t)$
  - Soit $x_1(t) + x_2(t) \to h(t) \to y_2(t)$
  - Additif si $y_1(t) = y_2(t)$
- Homogène
  - Soit $x(t) * K \to h(t) \to y_1(t)$
  - Soit $x(t) \to h(t) \to *K \to y_2(t)$
  - Homogène si $y_1(t) = y_2(t)$
- Invariance dans le temps
  - Soit $x(t) \to (t - T) \to h(t) \to y_1(t)$
  - Soit $x(t) \to h(t) \to t - T \to y_2(t)$
  - Invariant si $y_1(t) = y_2(t)$

4 Laplace, pôle, zéro, stabilité

— **Convolution** : $\mathcal{L}\{x_1(t) \star x_2(t)\} = X_1(S)X_2(S)$
— Time shifting : $\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(S)e^{-t_0 S}$
— Intégrale : $\mathcal{L}\{\int_0^t x(t)dt\} = \frac{1}{S}X(S)$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}.$$

Factoriser les polynômes au dénominateur et au numérateur. Puis pour appliquer Laplace inverse, on vérifie dans le tableau si on trouve une forme adapté.
Sinon on décompose en éléments simple pour obtenir une forme du type $\frac{A}{S+c} \rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} Ae^{-ct}u(t)$ **A vérifier dans le tableau**.
Décomposition en élément simple : 3 méthodes

— Identification : on remet tout sur le même dénominateur puis identification puis système d'équation
— Multiplier par un des facteurs : pratique si tous les dénominateurs ont la même puissance. On multiplie par un des dénominateur $\rightarrow$ annulation ou plusieurs des dénominateurs $\rightarrow$ remplacer x par le truc qui l'annule $x = c \rightarrow$ simplifier et hop on trouve le coef tout de suite
— Multiplier par x et faire la limite en $+\infty$: puis appliquer le théorème du plus haut degré

A voir si dans les annales il demande des décompositions en éléments simple du futur mais c'est là au cas où

4.1 Stabilité

Soit $H(S) = \frac{1}{(S+z_1)(S+z_2)\dots}$ une forme factorisé $\rightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} h(S) = \dots$. On définis la stabilité par en regardant si $h(S)$ converge. $\Leftrightarrow$

— Stable : Si tous les pôles sont dans la partie gauche du plans complexe
— Instable :
  — Au moins un pôle dans la partie droite du plan complexe
  — Il existe au moins un pôle multiple sur l'axe imaginaire
— Conditionnellement stable : Il existe un pôle simple sur l'axe imaginaire ($a = 0$)
— Comme d'hab dessin dans OneNote

5 Diagramme de Bode

— Module d'un complexe : $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$
— Argument : $\arg z$
— Gain = $20\log_{10}|H(Jw)|$
— Relire OneNote (SIGNAL/Prof1/TP2 toute fin) pour les détails du pourquoi

La méthode pour une fonction $H(s)$

1. Mettre la fonction en forme normale

$$\begin{aligned} H(S) &= K\frac{(S+a_1)(S+a_2)}{S(S+b_1)(S^2+b_2S+b_3)} \\ &= \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} * \frac{(1+S/a_1)(1+S/a_2)}{S(1+S/b_1)(1+S*b_2/b_2+S^2/b_3)} \\ &= c * \frac{1+\frac{S}{c_1}+\dots}{(1+\frac{S}{c_2})(1+\frac{S}{c_3})\dots} \end{aligned}$$

2. Constante de départ
   — Gain : $20\log_{10} c$
   — Phase : $\begin{cases} 0 & \text{si } c > 0 \\ \pi & \text{si } c < 0 \end{cases}$

3. Les différents type de courbe à assembler sur le graph de Bode : $1+\frac{S}{c_i}$ dans le figure 1.

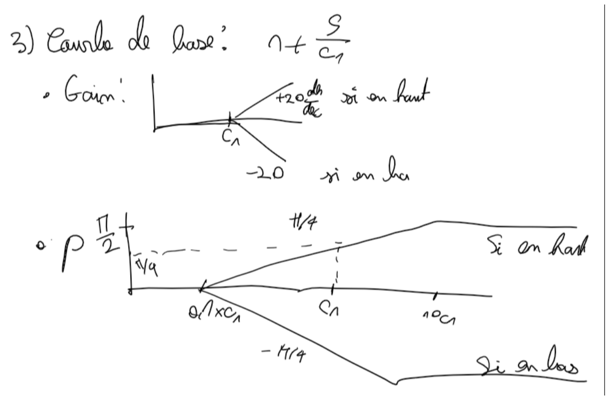

Figure 1 – Les courbes de base pour Bode

5.1 Diagramme de Bode inverse

Bien observer et faire l'inverse je suppose ahah, s'entraîner pour voir
Dans le cours il a parlé de plein de truc, mais je sais pas si c'est nécessaire

6 Filtre Butterworts

7 Filtre FIR : fenêtrage