# Logiques et représentations des connaissances

Charles Vin

S1-2022

## 1 Introduction à la logique des propositions et des prédicats du premier ordre

**Définition 1.1.** Quelques définitions
- Expression : une description logique. Elle est vrais ou fausse
- Meaning : le sens qui relis l'expression vers sa référence
- Référence : représente le sens

Le langage des propositions :
- Atome
- Connecteur :
  - Binary : $\vee$ = "ou", $\wedge$ = "et" $\neg$ = négation
  - DIAPO

Table de vérité :
- Un ligne = une "interprétation"

Une formule est
- Satisfiable : si vrais dans une interprétation
- Valide : si vrais dans toute les interprétation
- Unsatisfiable : faux sur toutes les interprétations

On peut avoir des fonctions qui représente une expression logique.
- Un terme représente une fonction qui renvoie un paramètre ou le tuple de paramètre d'une fonction.
- Un atome est une fonction qui renvoie un booléen.

En d'autre mot ça semble être en fonction de ce que la fonction renvoie un booléen ou un paramètre.

Variable est :
- Liée (muette) : Si elle est liée à un quantificateur, on peut donc changé librement son nom tant qu'on le change partout dans la formule
- Libre : C'est l'inverse, pas liée à un quantificateur donc libre dans la formule. Par exemple dans la formule $\exists y, x < y$, la variable x est libre et y est liée. Cette formule représente le fait que "Il existe un nombre plus grand que x". Au final ici x est en lien avec l'énoncé, il est fixe.

Diapo interpretation : rien compris

A formula is "**valid**" if it is true in **all** the interpretation of **all** domains.

**Exemple 1.1.**
- Valide
- DIAPO

Un modèle est un couple $\mathcal{M} =< \mathcal{D}, i >$. Une valuation est une fonction $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$. $I_m(F)$ is the truth value. Y'a des propriétés de la truth value dans le DIAPO.

A est une conséquence sémantique de B si A est vrais pour toutes les interpretations où B est vrais i.e. for all models if $I_{m\mathcal{V}}(B)$ then $I_{m\mathcal{V}}(A)$. Exemple $A \rightarrow B$ est une conséquence sémantique. Je crois que le symbole c'est $B \models A$ == A conséquence logique de B.

**Définition 1.2.** Un système formel est composé d'un langage formel, un ensemble d'axiom et de règle d'inférence.

**Exemple 1.2.** Exemple dans le fiapo avec le système formel de Hilbert.

$\vdash$ représente une dérivation. On peut prouver A à partir de B.

**Définition 1.3** (Théorème)**.** Any formula which is derived from the axoms by iteratively applying inference rules is a **theorem**.
Notation : $\vdash A$ means A is a theorem

**Exemple 1.3.** Exemple : $\vdash (A \to A)$

*Preuve :* Voir diapo c'est drôle □

**Définition 1.4** (Démonstration)**.** A **proof** of a theorem A is a finite sequence of formulae $F_0, ..., F_n$ such that .... DIAPO mais osef un peu

**Définition 1.5** (Symbolic system)**.**
— Consistency : Each description of the symbolic system corresponds to an object in the reality i.e. DIAPO
— Completeness : each object of the reality can be described in the symbolic system $\forall A$ if $\models A$ then $\vdash A$

## 1.1 Automatic theorem proving

### 1.1.1 Tableau method

1. Normalisation : Transformation into **NNF - Negative Normal Form** : **The negations occurs only before atomic propositions**. i.e il faut développer les négations au max.
2. Build a tableau :
   — Root : The formula under NNF.
   — Build successors of T using two rules $R_\wedge$ et $R_\vee$ VOIR LE DIAPO POUR LEUR DEFINITIONS
   — On arrête lorsque l'on ne peux plus appliquer les règles.

**Définition 1.6.** Un tableau peut être
— Contradictory
— ... DIAPO

**Exemple 1.4** (de la methode)**.** DIAPO MDR OU YOUTUBE PLUTOT

L'avantage de cette méthode par rapport au tableau de vérité c'est qu'on a pas besoin de faire tous les cas possibles.

**Généralisation** Si je comprend bien on peut prendre des raccourcis avec des nouvelles règles. Pour la règles $\alpha$ on met dans le même tableau. Pour les règles $\beta$ on met dans deux tableaux différents. **Apprendre les tableau de règles**

### 1.1.2 Resolution in propositional logic

**Définition 1.7** (Une clause)**. Ca tombe à l'exam d'après le prof**
— Un literal is either an atom or its negation
— Une clause is a disjunction of literals

*Remarque.* A clause is a logical entailment (implication) because $(\neg A \vee B)$ is equivalent to $(A \supset B)$

**Exemple 1.5.** $even(X) \supset odd(successor(X))$

**Théorème 1.1.** *Any claused formula (sans variable libre) $F$ can be transformed into a logically equivalent conjunction of clauses*

**Exemple 1.6.**

**Définition 1.8** (Règle de résolution)**.** S'applique uniquement sur les clauses. Pour prouver que $S \models A$ il suffit de montrer que $S \cup [negA]$ est vide. Voir les exemples du DIAPO

### 1.1.3 Unification

**Définition 1.9** (Substitution)**.** A **substitution** is characterized by a infinite set of "

On peut **composer** plusieurs substitution

**Définition 1.10** (term instance)**.**

**Définition 1.11** (Pattern Matching)**.** The term $t_1$ match with the term $t_2$ if and only if there exist a substitution $\sigma$ such that $t_1\sigma = t_2$

**Définition 1.12** (Unification)**.** The terms $t_1$ and $t_2$ unify if and only if there exists a substitution $\sigma$ such that $t_1\sigma = t_2\sigma$

**Pattern matching $\rightarrow$ Unification**

### 1.1.4 Resolution in First Oder Logic

<u>Nouveau cours du 21/09</u>
<u>Nouveau cours du 28/09</u>
Pas de diapo au moment du cours
<u>Nouveau cours du 12/10</u>
**NOUVEAU PROF** Modèle Lr : diamond et carré $\Leftrightarrow$ il existe et pour tout

Modèle de Kripke = ensemble de monde (interprétation ?). Puis on peut faire un graph sur comment relier les mondes.

— $M, w_0 \models p \rightarrow q$ c'est faux car dans le monde $w_0$ $p$ est vrais mais $q$ est faux
— $M, w_0 \models \Box p$ est vrais, on regarde si tous les mondes qui parte de $w_0$ on $p$ de vrais.
— $M, w_1 \models (p \vee r) \rightarrow \Box p$ ici on regarde dans $w_1$, la prémice de la fleche est vrais car p est vrais dans $w_1$, donc $\Box p$ doit être vrais. On regarde dans $w_3$, $p$ est faux donc l'implication est fausse. En revanche en partant de $w_0$
— $M, w_2 \models \Box\Box p$
— VOIR ONENOTE J4ARRIVERAI JAMAIOS A ALLER ASSEZ VITE

Système normal K (diapo 13) : on veut avoir un système de preuve simple, comme celui de Hilbert. On a un axiome sous la forme d'une implication comme pour Hilbert. Mais on simplifie un peu par rapport à Hilbert niveau démonstration, je crois pas l'axiome $K$ .
Déduction (diapo 14) : On a prouvé $p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$ (dans un univers ou tous les mondes vérifie $p \rightarrow q$ alors $\Box p \rightarrow \Box q$). Attention ça n'est pas équivalent a $\vdash p \rightarrow p \vdash \Box p \rightarrow \Box q$, dans celle là on ne vérifie pas l'HP que tous les mondes on $p \rightarrow q$.

Correction et complétude :
— $\vdash$ == démonstration dans un monde
— $\models$ == démonstration dans tous les mondes
— Correction :
— Complétude :
— $\rightarrow$ Le système $k$ est correct et complet vis à vis de l'ensemble des modèle de Kripke.

CCL :
— Une formule est satisfiable DIAPO
— Non validité : on montre un contre exemple
— Insatisfiabilité :
— Validité :
  — par raisonnement sémantique
  — Avec la méthode des tableau et $\neg\phi$ UNSAT
  — Un dernier truc pas compris

**Exemple 1.7.** Montrer que $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ n'est pas valide.
$\Rightarrow$ Contre exemple : voir diapo 18

Théorie de la correspondance :
— C'est une série d'axiome
— Preuve de la réflexivité dans le DIAPO
— Sérialité : globalement on kick out les monde sans fleche
— Transitivité : "Si quelque chose est vrais à un pas de distance, alors il est vrais à deux pas de distance également"
— Euclidienne : "Si je crois possible que phi, je sais que je crois possible de phi"
— Symétrie :