Numéro d'anonymat : 39

EXAMEN 2/2 – TRAITEMENT DU SIGNAL

Durée : 2h.
Aucun document autorisé à l'exception d'une feuille A4 annotée. Calculatrices interdites. On soignera la clarté et la concision des réponses. Les deux exercices et le problème sont indépendants et pourront être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 (environ 6 points)

1) a) Montrer que : $x[k]*\delta[k - k_0] = x[k - k_0]$.

1) b) En déduire une relation entre la transformée de Fourier de $x[k - k_0]$ et la transformée de Fourier de $x[k]$.

2) a) Démontrer la relation : $TF(x^*(t)) = X^*(-f)$.

2) b) En déduire une propriété vérifiée par la transformée de Fourier d'un signal à valeurs réelles.

2) c) Démontrer la relation : $TF(x(-t)) = X(-f)$. -> Inv. temporelle

2) d) Que peut-on en déduire pour la transformée de Fourier d'un signal paire ? Que peut-on dire de la transformée de Fourier d'un signal impaire ?

3) Que peut-on dire de la transformée de Fourier d'un signal paire et à valeurs réelles ?

4) Soit α un paramètre réel non nul. Montrer que : $TF\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$.

Exercice 2 (environ 4 points)

On considère un système pour lequel le signal de sortie $y[k]$ est lié au signal d'entrée $x[k]$ par la relation :

$$y[k] = x[k] - x[k-1] + x[k-2] - x[k-3].$$

1) Mettre cette équation sous la forme d'un produit de convolution et en déduire la réponse impulsionnelle $h[k]$ de ce système.

2) On considère le signal $x[k]$ défini par :

$$x[k] = \begin{cases} 2 & \text{pour } k = 2 \text{ et } k = 4\ ; \\ -1 & \text{pour } k = 3\ ; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Calculer la réponse $y[k]$ de ce système lorsqu'il est sollicité par $x[k]$ par convolution et en vous appuyant sur un graphique. Représenter graphiquement le résultat.

Problème 2 (environ 10 points)

On fera usage des espaces prévus pour les réponses en veillant à soigner la clarté et la concision.

On échantillonne un signal $x(t)$ dont les composantes fréquentielles sont situées uniquement dans la bande de fréquence $[f_1, f_2]$ et dans la bande $[-f_2, -f_1]$, avec $f_1 = 200$ kHz et $f_2 = 400$ kHz. Le spectre $X(\nu)$ du signal $x[k]$ produit par échantillonnage idéal à la fréquence f_e égale à 400 kHz est donné en Fig. 1.

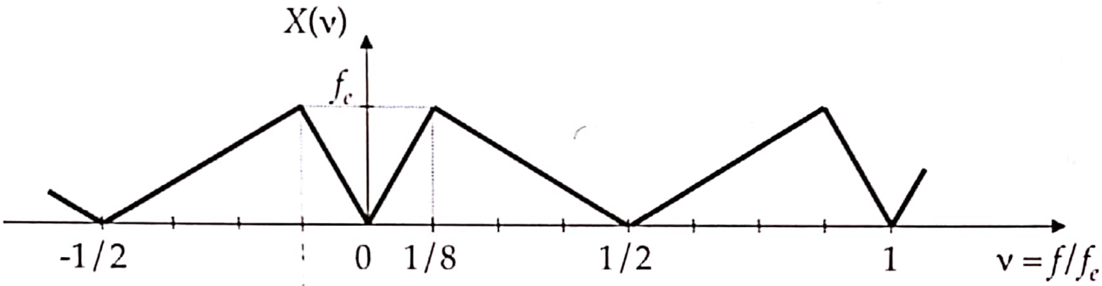
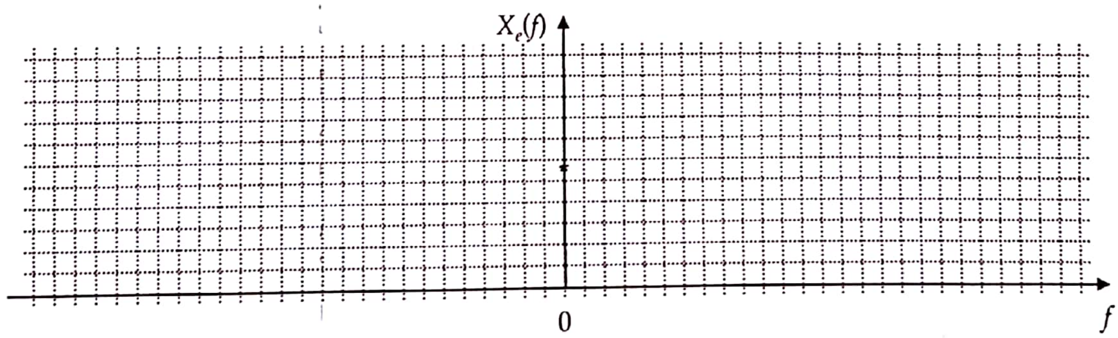
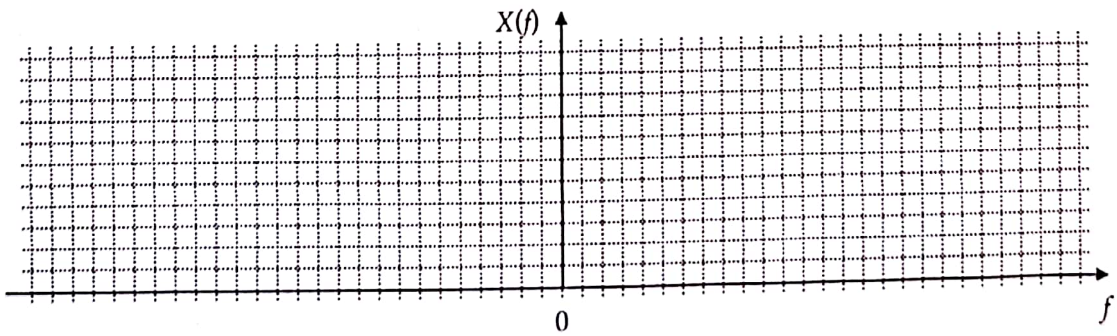


Fig. 1. Spectre $X(\nu)$.

1) a) Représenter le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné $x_e(t)$. On précisera soigneusement les valeurs des fréquences des points caractéristiques sur l'axe des fréquences.



1) b) En déduire le spectre $X(f)$ de $x(t)$.



Numéro d'anonymat : 39

1) c) La fréquence d'échantillonnage f_e qui a été utilisée respecte-t-elle le théorème de Shannon ? Y-a-t-il eu perte d'information lors de l'échantillonnage ? Expliquer.

2) La séquence $x[k]$ est stockée sur un disque dur. Quelque temps plus tard, le signal $x[k]$ est traité à l'aide de la chaîne représentée en Fig. 2 (la réponse en fréquence H du filtre numérique utilisé est représentée sur l'intervalle [-1/2 ; 1/2]).

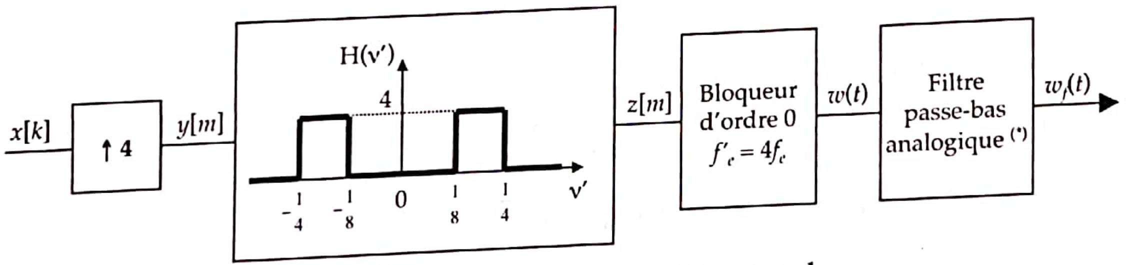
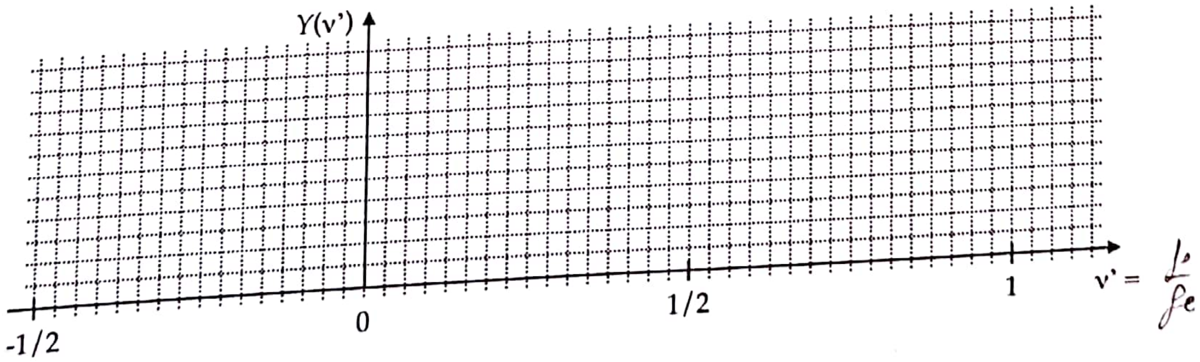


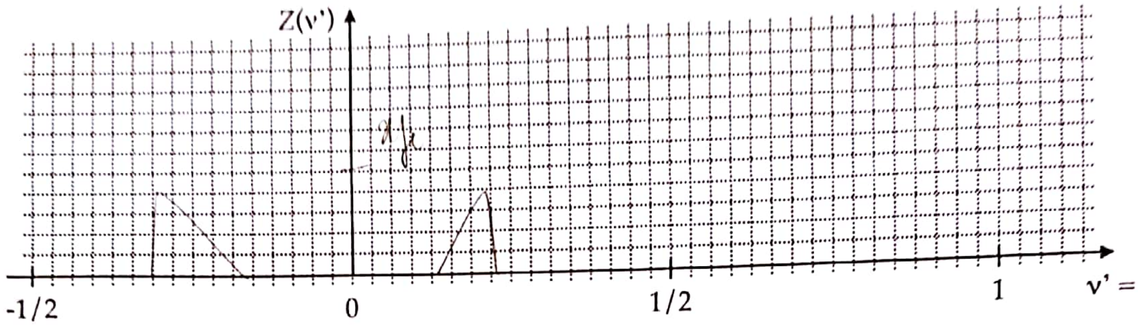
Fig. 2. Chaîne de traitement du signal.

(*) Bande de transition du filtre analogique : [500 kHz, 1100 kHz].

2) a) Donner la représentation spectrale $Y(\nu')$ du signal $y[m]$ en respectant soigneusement l'échelle imposée sur l'axe des abscisses. Préciser ν'.



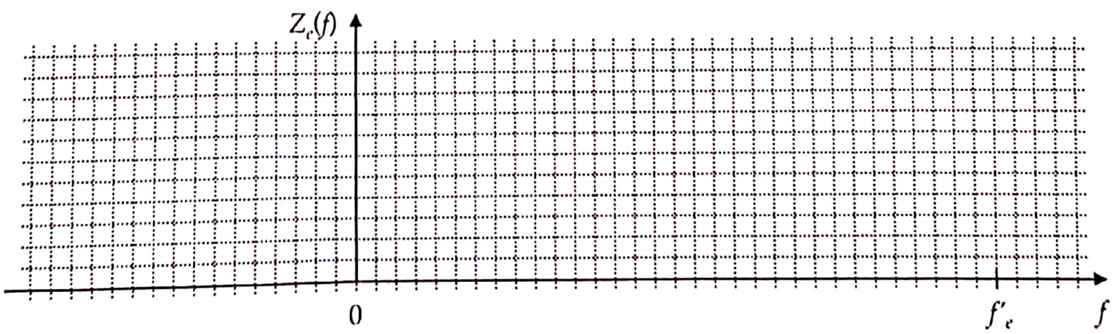
2) b) Donner ensuite la représentation spectrale $Z(\nu')$ du signal $z[m]$.

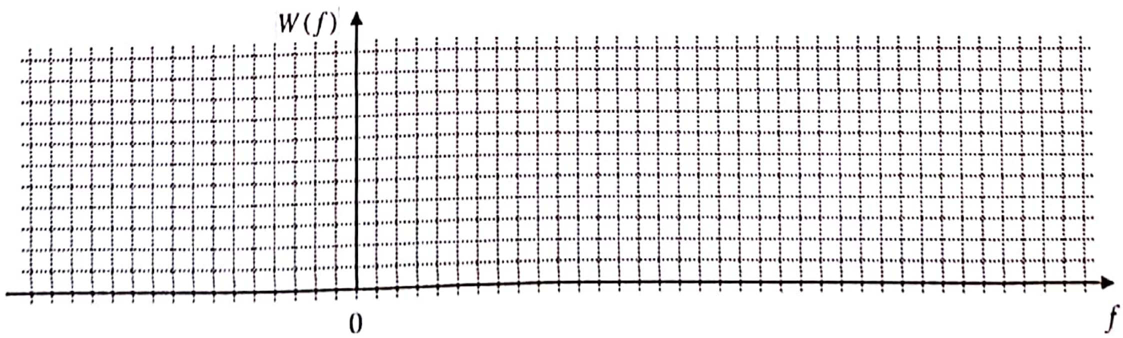


2) c) A quoi correspond le signal $z[m]$ par rapport au signal $x(t)$? Justifier.

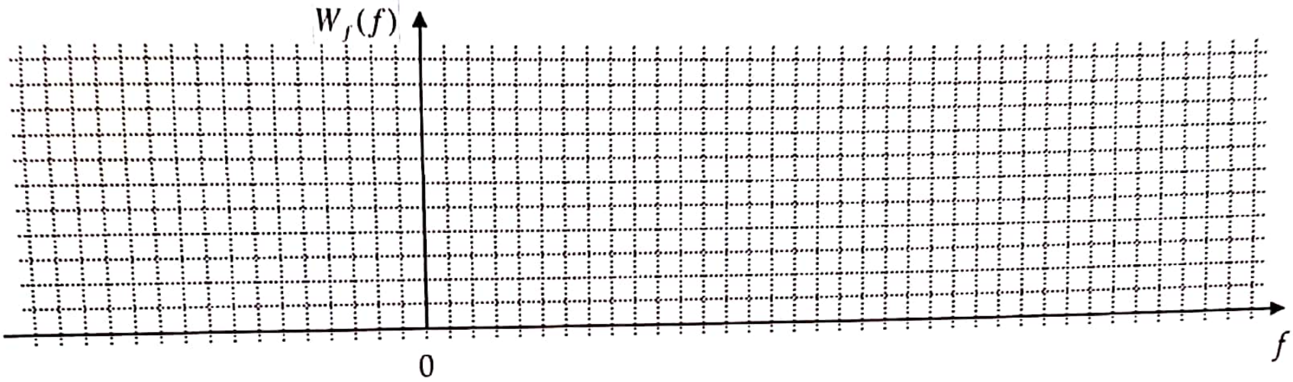
3) Dessiner l'amplitude spectrale $|W(f)|$ de $w(t)$ obtenu en sortie du bloqueur d'ordre 0 opérant à la cadence $f_e' = 4f_e$. On s'aidera de la représentation spectrale $Z_e(f)$ du signal échantillonné $z_e(t)$ associé à $z[m]$ pour la fréquence d'échantillonnage $f_e' = 4f_e$.

On respectera soigneusement l'échelle imposée sur l'axe des abscisses.





4) Donner l'amplitude spectrale $|W_f(f)|$ du signal $w_f(t)$ obtenu après filtrage passe-bas.



5) Quelle est l'utilité de la chaine de traitement représentée en Fig. 2 ?