1 Logique des propositions

Exercice 1 – Sémantique, d'après *Lassaigne & de Rougemont*

1. Soit $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
   F et $\neg F$ sont-elles satisfiables ? Sont-elles des tautologies ? Justifier.
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F' obtenue en remplaçant p par $\neg p$ (et réciproquement). F' est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F' ? Justifier.

Exercice 2 – Méthode des tableaux sémantiques

Que peut-on dire des formules suivantes en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

- $F_1 = a \wedge \neg(b \rightarrow a)$
- $F_2 = ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \rightarrow (\neg b \rightarrow ((a \wedge b) \vee c))$
- $F_3 = \neg((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a))$
- $F_4 = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((c \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$
- $F_5 = (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow c))$
- $F_6 = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Exercice 3 – Preuves de Hilbert

1. Justifier chaque étape de la démonstration ci-dessous dans le système formel de Hilbert et identifier le résultat démontré :

F_1	p	[ ]
F_2	$\neg q \rightarrow r$	[ ]
F_3	$\neg\neg p \rightarrow \neg r$	[ ]
F_4	$(\neg\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_5	$r \rightarrow \neg p$	[ ]
F_6	$(r \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$	[ ]
F_7	$\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_8	$(\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$	[ ]
F_9	$(\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_{10}	$\neg q \rightarrow \neg p$	[ ]
F_{11}	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	[ ]
F_{12}	$p \rightarrow q$	[ ]
F_{13}	q	[ ]

2. En utilisant le théorème de la déduction, rappelé ci-dessous :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \text{ alors } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$$

   établir que $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Exercice 4 – Preuve de Hilbert

Démontrer les théorèmes suivants dans le système formel de Hilbert :

1. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$
3. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Exercice 5 – Sémantique

Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes que l'on peut former avec n variables propositionnelles ? Quelles sont-elles pour $n = 1$?

2 Logique des prédicats du premier ordre (LPPO)

2.1 Représentation

Exercice 6

En utilisant les symboles de prédicats et fonctions suivants

$A(x)$	x est anglais	$e(x)$	dénote le pire ennemi de x
$H(x,y)$	x hait y	n	dénote Napoléon
$C(x,y)$	x connaît y		

représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO :

1. tout Anglais hait quelqu'un
2. le pire ennemi de Napoléon est anglais
3. tout Anglais hait son pire ennemi
4. tout le monde connaît quelqu'un qu'il hait et quelqu'un qu'il ne hait pas
5. celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas

Exercice 7

On considère le domaine des œuvres littéraires, le domaine des auteurs et le domaine des êtres humains. Les symboles de constantes `a, m, s` représentent respectivement Alice, “Les mots” et Jean-Paul Sartre. Les prédicats unaires D et R sont tels que $D(x)$ représente “x est un membre du département de littérature” et $R(x)$ “x est un roman”, les prédicats binaires E et L tels que $E(x,y)$ représente “x a écrit y” et $L(x,y)$ “x a lu y”.

1. Représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO
   (a) Un des membres du département de littérature a lu Les mots.
   (b) Tous les membres du département de littérature ont lu Les mots.
   (c) Alice a lu un roman de Sartre
   (d) Un des membres du département de littérature n'a lu que des romans de Sartre
   (e) Aucun des membres du département de littérature n'a lu tous les romans de Sartre
   (f) Tous les membres du département de littérature qui ont lu Les mots ont lu tous les romans de Sartre.
2. Exprimer en langage naturel la signification des formules suivantes
   (a) $\exists x(D(x) \wedge \neg L(x,m))$
   (b) $\forall x((R(x) \wedge E(s,x)) \rightarrow L(a,x))$
   (c) $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge E(s,y) \wedge L(x,y)))$
   (d) $\neg\exists x(D(x) \wedge \forall y((R(y) \wedge L(x,y)) \rightarrow E(s,y))$