BIMA - Examen session 1

14 janvier 2020 - 14h00/16h00

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié.
Aucun document ni machine électronique (calculatrice, téléphone portable) ne sont autorisés.
Durée de l'examen : 2h.

Exercice 1 Questions de cours (10 points)

1. Soit une image dont les valeurs sont codées sur 1 octets non signé et telles qu'elles soient inférieures à 50. Visuellement quel aspect a l'image ? Comment augmenter significativement son contraste ? Même question si les valeurs de l'image sont toutes supérieures à 200 ?
2. Définir les termes suivants : réponse impulsionnelle, fonction de transfert.
3. Parmi les filtres suivants, indiquer (en justifiant) lesquels sont linéaires : (a) étirement d'histogramme, (b) égalisation d'histogramme, (c) convolution spatiale, (d) filtrage fréquentiel, (e) filtre de Harris.
4. Soit un signal x continu sur $\mathbb{R}$, quels sont les filtres continus qui sont linéaires et invariants par translation ? Même question si le signal est discret sur $\mathbb{Z}$?
5. On parle d'imagerie hyper-spectrale lorsque les capteurs peuvent acquérir des images sur plusieurs dizaines (voire des centaines) de longueurs d'ondes différentes. C'est notamment le cas en imagerie satellitale. Proposer une méthode pour visualiser ce type d'image en couleur. Comment quantifier la perte d'information ?
6. À quoi sert un détecteur SIFT ? Rappeler son principe de fonctionnement.
7. On souhaite segmenter une image en régions homogènes. Donner la différence **fondamentale** entre une méthode type "k-means" et une méthode de type "Split and Merge" ?

Answer of exercise 1

1. En appliquant une transformation exponentielle pour le premier cas, logarithmique pour le second.
2. c'est la sortie d'un filtre sur un dirac, et sa transformée de Fourier.
3. (a) L'étirement est une opération affine sur les ndg. Elle n'est donc pas linéaire (b) non linéaire car H(I+B) != H(I)+H(J), (c) linéaire par définition, (d) linéaire car la TF est linéaire, (e) non linéaire car termes quadratiques.
4. Ce sont les convolutions continues et discrètes.
5. En appliquant une ACP et en retenant que les 3 premières composantes visualisées en composantes RGB. La sommme des valeurs propres des 3 premières composantes indique la quantité d'information contenue dans les 3 premières composantes.

6. Le SIFT est un filtre qui résume une image à un vecteur de 128 valeurs. Ces valeurs sont des histogrammes locaux d'orientation du gradient. Cette représentation est insensible à l'échelle et à la rotation, elle permet donc de comparer des images entres elles.
7. La méthode des k-means n'est pas une méthode de segmentation aux sens où elle n'assure pas une connexité des classes, au contraire du split'n merge.

Exercice 2 Calcul de transformée de Fourier (10 points)

On rappelle la définition de la transformée de Fourier continue (TFC) d'un signal x continu : $f \mapsto X(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi ft}dt$. On admet que la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-2i\pi f_0 t}$ est $f \mapsto \delta(f - f_0)$ où δ est la fonction de Dirac (nulle partout en dehors de 0 et d'intégrale égale à 1).

1. Soit la fonction Porte définie par : $\mathrm{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte.
2. Démontrer la "scale property" de la transformée de Fourier, c-a-d :
$$TF(t \mapsto x(\alpha t)) = X\left(\frac{f}{\alpha}\right)\frac{1}{|\alpha|}$$
où X est la transformée de Fourier du signal x.
3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{Rect}_L : t \mapsto \mathrm{Rect}\left(\frac{t}{L}\right)$.
4. Démontrer la propriété de translation de la transformée de Fourier, c-a-d :
$$TF(t \mapsto x(t - t_0))(f) = e^{-2i\pi f t_0}X(f)$$
où X est la transformée de Fourier du signal x.
5. Soit le signal $x_1(t) = \mathrm{Rect}(\frac{t}{2T_0})\,(\cos(2\pi t f_0) + \cos(4\pi t f_0))$ où $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Calculer la transformée de Fourier de x_1.
6. Dessiner l'amplitude du spectre de x_1 ainsi que le graphe de x_1. Rappel : machines électroniques interdites.
7. Soit le signal x_2 tel que :
$$x_2(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } t \in [-T_0, 0] \\ \cos(4\pi f_0 t) & \text{si } t \in [0, T_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Exprimer $x_2(t)$ à l'aide de la fonction Porte.
8. En déduire sa transformée de Fourier.
9. Dessiner le graphe de x_2 ainsi que l'amplitude de son spectre.
10. Que conclure sur la transformée de Fourier et sa capacité à localiser dans le temps les modes d'un signal non stationnaire ?

Answer of exercise 2

1. Vu en cours et en TD.
2. Il suffit de faire le changement de variable $t' = \alpha t$ sous l'intégrale. Bien comprendre que $dt' = |\alpha|dt$.

3. $\alpha = \frac{1}{L} \Rightarrow X(f) = L\,\mathrm{sinc}(L\pi f)$
4. Il suffit de faire le changement de variable $t' = t - t_0$ sous l'intégrale.
5. On a $TF(\cos(4\pi f_0 t)) = \frac{\delta(f-2f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$. Connaissant la TF de la fonction Porte, de l'autre cosinus, en appliquant le théorème de la convolution on trouve :

$$X_1(f) = 2T_0\,\mathrm{sinc}(2\pi T_0 f) \star \left(\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2} + \frac{\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)}{2}\right)$$

6. Pour dessiner le graphe de x_1 il suffit de superposer le graphe des 2 sinusoïdes (l'une a une fréquence double de l'autre et ont même origine) et de les ajouter "géométriquement". Le graphe de X_1 est trivial : c'est le spectre de 4 sinus Cardinal "scalés" et centrés respectivement en $\pm 2f_0$ et $\pm f_0$.
7. $x_2(t) = \mathrm{Rect}(\frac{t-T_0/2}{T_0})\cos(2\pi f_0 t) + \mathrm{Rect}(\frac{t+T_0/2}{T_0})\cos(4\pi f_0 t)$
8. On utilise la formule de la translation : $TF(\mathrm{Rect}(\frac{t}{T_0} \pm \frac{1}{2})(f) = e^{\pm i\pi f} TF(\mathrm{Rect}(\frac{t}{T_0}))$ pour en déduire X_2 :

$$X_2(f) = e^{-i\pi f} T_0\,\mathrm{sinc}(\pi T_0 f) \star \left(\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\right) + e^{i\pi f} T_0\,\mathrm{sinc}(\pi T_0 f) \star \left(\frac{\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)}{2}\right)$$

   Les TF des deux fonctions portes translatées font apparaître des complexes de module 1 (formule de la translation), ces nombres n'ont pas d'impacts sur le spectre. On a donc toujours un sinus cardinal convolué avec 4 Dirac translatés.

   En revanche les repliements du sinus Cardinal sont plus rapides (support de la fonction Porte plus court).
9. Le spectre est quasi-identique à celui de x_1. Le graphe de x_2 est facile à dessiner.
10. Les deux spectres quasi sont identiques donc on ne peut pas se servir de la TF pour localiser dans le temps les deux modes du signal x_2. En revanche, on localise bien leur fréquence.

Exercice 3 Calcul de transformée de Fourier discrètes (4 points)

On rappelle la définition de la transformée de Fourier discrète (TFD) pour un signal x de longueur N :

$$X(n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k) e^{-2i\pi \frac{nk}{N}}$$

1. Montrer que le filtre dont la réponse impulsionnelle est :

$$f_1(n) = \begin{cases} -2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = \pm 1 \end{cases}$$

   est un passe-haut. Déterminer sa fréquence de coupure.
2. Montrer que le filtre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un passe-bas.

Answer of exercise 3

1. On a $N = 3$ et :

$$\begin{aligned}
X(n) &= \sum_{k=-1}^{1} x(k)e^{-2i\pi\frac{nk}{/}3} \\
&= e^{2i\pi\frac{n}{3}} - 2 + e^{-2i\pi\frac{n}{3}} \\
&= 2\cos(\frac{2\pi n}{3}) - 2 \\
X(0) &= 1 - 2 + 1 = 0 \\
X(\pm 1) &= 2\cos(\frac{\pm 2\pi}{3}) - 2 = 2(-\frac{1}{2}) - 2 = -3
\end{aligned}$$

   On a $|X(\pm 1) > |X(0)|$ donc c'est un passe-haut, de fréquence de coupure $f_c = \pm 1$.

2.

$$\begin{aligned}
X(n) &= \sum_{k=-1}^{1} x(k)e^{-2i\pi\frac{nk}{/}3} \\
&= e^{2i\pi\frac{n}{3}} + 1 + e^{-2i\pi\frac{n}{3}} \\
&= 2\cos(\frac{2\pi n}{3}) + 1 \\
X(0) &= 1 + 1 + 1 = 3 \\
X(\pm 1) &= 2\cos(\frac{\pm 2\pi}{3}) + 1 = 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 0
\end{aligned}$$

   On a $|X(\pm 1) < |X(0)|$ donc c'est un passe-bas.

Exercice 4 Filtrage spatial (4 points)

1. Le filtre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-il séparable ? Si oui spécifier les filtres séparés. Que représente A ?
2. Le filtre $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-il séparable ? Si oui spécifier les filtres séparés. Que représente B ?
3. Soit un signal discret 1D de longueur n, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$. X est noté comme un vecteur colonne. Soit A une matrice symétrique à 3 bandes telle que :
   — les éléments de la diagonale valent tous a_2
   — les éléments de la diagonale supérieure valent tous a_3
   — les éléments de la diagonale inférieure valent tous a_1
   Montrer que le produit matrice-vecteur AX peut s'écrire sous la forme d'une convolution discrète, dont on précisera le noyau.
4. Généraliser pour une matrice symétrique à $p < n$ diagonales constantes en notant $a_1, \cdots, a_p$ les valeurs de ces diagonales.

Answer of exercise 4

1. A est séparable car $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On reconnaît une approximation de la dérivation dans les directions horizontale et verticale : $A \simeq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$
2. B n'est pas séparable car il ne peut pas s'écrire comme un produit d'un vecteur ligne avec un vecteur colonne. A est l'approximation du laplacien.
3. au calcul de la i-ième ligne pour AX on a : $a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1}$. C'est formellement la convolution de X avec le noyau $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$. Les termes de bord sont traités par zéro-padding.
4. à la i-ième ligne on a : $a_1 x_{i-p/2} + \cdots + a_{p/2} x_i + \cdots + a_p x_{i+p/2}$ ce qui correspond à la convolution par le noyau $\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Détecteur Hessien (12 points)

La matrice Hessienne $H(x, y)$ en chaque pixel (x, y) d'une image I s'écrit de la manière suivante :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

On admet que les vecteurs propres de $H(x, y)$ (avec leurs valeurs propres associées) définissent les directions de variations principales de la fonction I au pixel (x, y). On rappelle que :

— pour une matrice 2×2 symétrique $M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, le déterminant s'écrit $\det(M) = ab - c^2$.

— le déterminant est invariant par changement de base orthonormée. Il s'ensuit immédiatement que le déterminant de M est le produit de ses valeurs propres.

1. Détecteur Hessien
   (a) Calculer la trace de $H(x, y)$. Quel détecteur reconnaît-on ?
   (b) Quelle est la valeur attendue pour les valeurs propres de H dans le cas d'un coin ? D'une région homogène ? D'un contour ?
   (c) Le détecteur Hessien propose comme critère de détection $C_h(x, y) = |\det(H)|$.
   — Expliquer comment utiliser $C_h(x, y)$ pour détecter les coins.
   — $C_h(x, y)$ permet-il de séparer coins, contours et régions homogènes comme le détecteur de Harris ? Justifier.
   (d) Algorithme de détection. Donner le code Python :
   — d'une fonction `calculeH(I)` qui calcule le critère de détection Hessien $C_h(x, y)$ en chaque pixel (x, y) d'une image I. On suppose que l'on dispose d'une fonction de `convolution(I,M)` qui effectue la convolution de l'image I avec le masque M.
   — d'une fonction `detectionHessien(I)` effectue la détection globale de points d'intérêts à partir du critère de détection Hessien. La fonction retourne alors une carte des points d'intérêts calculés sur l'image I. En particulier, on précisera les étapes de post-traitement mises en place.
2. Invariance du détecteur Hessien
   (a) Le détecteur Hessien est-il invariant à la rotation ? Justifier.

(b) On considère une transformation affine d'illumination : $I'(x,y) = aI(x,y) + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.

i. Soit $H'(x,y)$ la matrice Hessienne de $I'(x,y)$. Exprimer $H'(x,y)$ en fonction de $H(x,y)$.

ii. Le critère de détection Hessien $C_h(x,y)$ est-il invariant aux transformations affines d'illumination ? Justifier.

iii. Les maxima locaux de $C_h(x,y)$ sont-ils invariants aux transformations affines d'illumination ? Si oui, proposer comment adapter le seuil de détection entre I et I'. Sinon, justifier.

Answer of exercise 5

1. Détecteur Hessien :

(a) $trace = I_{xx} + I_{yy}$ on reconnaît le laplacien !

(b) coin : 2 VP grandes, contour, 1 VP gde, une petite, zone homogene, 2 VP petites

(c) $C_h(x,y) = |det(M)| = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2|$. Il suffit de seuiller $C_h(x,y)$ pour avoir une indication sur la variation conjointe d'intensité dans deux directions orthogonales ; La valeur abs permet de ne pas tenir compte du signe.

— 1 pt. Il est plus délicat qu'avec Harris de détecter à la fois contours, régions homogènes et coins. En particulier, si $|\lambda_1| = 10^{-4}$ et $|\lambda_2| = 1$, on a le même déterminant qu'avec $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 10^{-2}$. Avec Harris le -k * trace donne des valeurs tres négatives pour le premier cas, ce qui est bien plus discriminant.

(d) — Fonction H : le point important est le calcul des dérivées secondes. On peut appliquer deux fois un filtre de Sobel : $I_{xx} = conv(conv(I, S_x), S_x)$, $I_{xy} = conv(conv(I, S_x), S_y)$, $I_{yy} = conv(conv(I, S_y), S_y)$.

— fonction $detectionHessien$: elle calcule C_h via H, localise les maxima locaux de C_h qu'elle seuille.

2. Invariance du détecteur Hessien :

(a) det invariant par changement de base orthonormé, donc rotation

(b) $I'(x,y) = aI(x,y) + b$

— $H'(x,y) = aH(x,y)$

— Pas invariant car $C'_h(x,y) = a^2 C_h(x,y)$

— Si le coefficient a laisse inchangé les extrema locaux, il faut quand même adapter le seuil. En fonction de la dynamique d'une image d_1, on fixe un seuil δ fixe qui marche pour I_1, alors pour une image I_2 de dynamique d_2, le seuil $\delta(\frac{d_2}{d_1})^2$ marchera