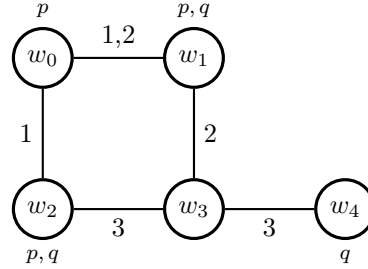


**Exercice 1** (*Connaissance commune et connaissance distribuée*)

On considère la structure de Kripke suivante (l'orientation des arcs est omise car la relation est symétrique, de même les arcs de réflexivité sont omis pour faciliter la lecture) qui implique trois agents 1, 2 et 3.



1. Cette structure est-elle adéquate pour la logique S5 ?
2. Le tableau suivant présente un certain nombre de formules, qui dépendent de groupes  $G$ . Indiquez si elles sont vraies, pour chaque groupe  $G$  considéré.

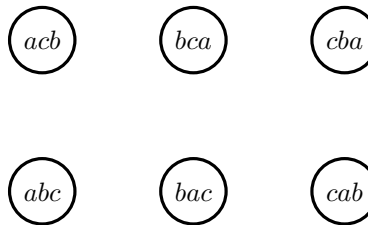
groupe $G$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$M, w_2 \models C_G(p \rightarrow q)$				
$M, w_0 \models C_G(q \rightarrow p)$				
$M, w_0 \models D_G p$				
$M \models D_G(p \vee q)$				
$M \models K_2(q \wedge \neg p) \rightarrow C_G(p \vee q)$				
$M, w_2 \models E_G^2(p \vee q)$				

3. Pouvez-vous trouver une formule qui soit vraie pour les groupes  $\{1, 2\}$  et  $\{1, 3\}$ , et fausse pour les groupes  $\{2, 3\}$  et  $\{1, 2, 3\}$  ?

**Exercice 2** (*La galette des rois*)

Amel ( $a$ ), Benoît ( $b$ ) et Clarisse ( $c$ ) se retrouvent pour fêter une galette des rois. La (ou le) plus jeune doit aller sous la table pour allouer les parts à l'aveugle, mais personne ne connaît l'âge des autres, et personne ne veut révéler son âge aux autres... La galette risque donc d'attendre longtemps.

On modélise la situation avec les mondes notés  $xyz$  (avec  $x, y, z \in \{a, b, c\}$ ), avec pour convention le fait que le monde  $xyz$  est le monde où  $x$  est le plus jeune, suivi de  $y$ , suivi de  $z$ . On a donc 6 mondes correspondant aux 6 (=3!) manières possibles d'ordonner Amel, Benoît et Clarisse.



1. En conservant la disposition des mondes donnée ci-dessus, complétez la structure avec les relations d'accessibilité qui devraient exister pour que toutes les personnes sachent toujours qui est la plus jeune, mais que aucune ne sache jamais qui est la plus âgée.
2. Heureusement, une quatrième personne (Zorro) arrive et dit :
  - Amel, je peux te dire si tu es l'aînée ou pas ;
  - Benoît, je peux te dire si Amel est plus âgée que Clarisse ou pas ;
  - Clarisse, je peux te dire s'il y a une personne plus jeune et une personne plus âgée que toi (sans te dire qui sont ces personnes), ou pas.

Zorro donne alors chacune de ces informations secrètement à chacune des personnes.

En conservant la disposition des mondes donnée ci-dessus, complétez la structure avec les relations d'accessibilité qui existent après que Zorro aura parlé à Amel, Benoît et Clarisse.

- Existe-t-il des situations où les informations de Zorro permettent, si certaines personnes communiquent, de garantir que toutes les personnes savent qui est la plus jeune, mais que aucune ne sait qui est la plus âgée ?

**Exercice 3** (*Trois femmes debout sur un escalier —suite—*)

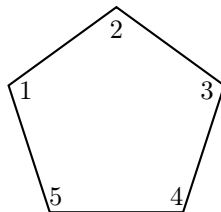
Nous reprenons la situation des trois femmes sur l'escalier discutée dans le TD précédent (la femme 1 est sur la plus haute marche, etc.)

- Représentez sous forme de formules de la logique modale les énoncés suivants, et indiquez s'ils sont valides ou pas dans la structure de Kripke construite précédemment.
  - Il est connaissance commune que si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête alors la femme 3 a le papillon sur la tête ;
  - Si la femme 3 sait si elle a le papillon sur la tête, alors il est connaissance commune qu'elle a le papillon sur la tête ;
  - Si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête, alors tout le monde sait que la femme 2 n'a pas le papillon sur la tête ;
  - Si la femme 2 sait si elle a le papillon sur la tête, alors il est connaissance commune entre 1 et 2 qu'elle n'a pas le papillon sur la tête ;
  - Si la femme 2 et la femme 3 communiquent, elles peuvent déterminer si la femme 1 a le papillon sur la tête.
- A présent la femme 1 annonce : “la femme 2 ne sait pas si elle a le papillon sur la tête”. Indiquez la modification à effectuer sur la structure de Kripke pour prendre en compte cette nouvelle information. Est-il vrai que après cette annonce, la femme 3 sait qu'elle n'a pas le papillon sur la tête ?

**Exercice 4** – Modélisation et annonces publiques (la carte jaune) — *Examen 2018-2019*

On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5.

Un jeu de cartes est composé de 5 cartes : 2 cartes rouges ( $R$ ), 2 cartes bleues ( $B$ ), et 1 carte jaune ( $J$ ). 5 agents sont disposés en “cercle”, comme indiqué sur la figure, de telle manière que chaque agent ne voit que les cartes de ses deux voisins. Les agents ne voient pas leur propre carte. Ainsi, par exemple, l'agent 2 voit les cartes de l'agent 1 et de l'agent 3.



- On modélise un monde possible comme une attribution (valide selon les spécifications du problème) d'une couleur à chaque agent. Cette modélisation induit-elle 120, 30 ou 12 mondes possibles ? Justifiez votre réponse.
- L'agent 1 annonce “Je sais que mes voisins ont des cartes de la même couleur”. Après cette annonce, seuls subsistent 6 mondes possibles. Représentez la structure de Kripke résultante, avec les relations d'accessibilité des agents 1, 2, 3, 4 et 5.
- Est-il vrai, après cette annonce, que :
  - les agents 2 et 5 savent qui possède la carte  $J$  ;
  - les agents 3 et 4 ne savent pas qui possède la carte  $J$  ;
  - les agents 3 et 4 ont la connaissance distribuée de qui possède la carte  $J$ .

Vous justifierez votre réponse en vous appuyant sur la structure de Kripke obtenue.