1 Définition

- Formule d'Euler : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- Formule d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- Suite géométrique : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1+q+\cdots+q^n) = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
- trigo : $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
- Peigne de Dirac de pas T $W_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-kT)$
- Energie d'un signal à temps continue : $E_x = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt$ si $x(t) \in \mathbb{R}$
- Si divergence : Puissance moyenne temps continue : $P_x = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} x(t)x^*(t)dt$. Temps discret : $\lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} x[k]x^*[k]$
- Intercorrélation temps continue : taux de ressemblance entre deux signaux décalés l'un par rapport à l'autre
  - A energie finie : $\gamma_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt$
  - A puissance finie : $\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt$

  Discret reprendre le même schéma que au dessus
- Autocorrélation temps continue : taux de ressemblance avec une version décalée de lui-même. Même formule que l'intercorrélation mais avec $y(t) = x(t)$
- Réponse impulsionnelle $h(t)$: on input $\delta[k]$ dans notre SLI
- Réponse indicielle : on input $u[k]$ dans notre SLI on obtient $y_u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u)du$ fonction de répartition, et donc h densité
- Réponse en fréquence : $H(f) = TF\{h(t)\} = Y/X$
- Gain de H = $2\log_{10}|H(f)|$, Phase : $\psi(f) = \arg H(f)$
- Si SLI : $y[k] = x[k] \star h[k]$
- Convolution : $x(t) \star h(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$
- $X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
- $x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+j2\pi ft}df$
- $X(\nu) = TF\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k}$ périodique de période 1
- $x[k] = TF^{-1}\{X(\nu)\} = \int_0^1 X(\nu)e^{+j2\pi\nu k}d\nu$
- Egalité de Plancherel : $\int_{\mathbb{R}} x_1(t)x_2^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X_1(f)X_2^*(f)df$ On peut intégré dans les deux domaines : $\int sinc^2 \to \int rect$
- Egalité de Parseval : $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \, df$
- Densité spectrale d'énergie (DSE) = Energie d'un signal calculé dans le domaine fréquentiel (voir thm de Wiener) : $\Gamma_x(f) = |X(f)|^2$
- Densité spectrale de puissance (DSP) = same = $\Gamma_c(f) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} |X_\theta(f)|^2$ avec X_θ DSE de $x(t)$ limité à $[-\theta;\theta]$

2 Démonstration

- $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

$$\begin{aligned}\forall t \neq t_0 : \delta(t-t_0) = 0 \text{ donc}\\ \Leftrightarrow f(t)\delta(t-t_0) = 0\\ = f(t_0)\delta(t-t_0)\\ \forall t = t_0 : f(t) = f(t_0) \implies f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)\end{aligned}$$

- $\gamma_{xy}(\tau) = \gamma_{yx}(-\tau)$ faire un changement de variable $t' = t - \tau$
- $x(t) \star \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$ définition into diamond formula
- TF discrète de période 1 : montrer que $X(\nu) = X(\nu+1)$
- Propriété des TF :
  - Retard : $TF\{x(t-\tau)\} = e^{-j2\pi f\tau}X(f)$ changement de variable $t' = t - \tau$
  - Inversion temporel : $TF\{x(-t)\} = X(-f)$ changement de variable $t' = -t$ attention changement du sens des bornes
  - Conjugaison : $TF\{x^*(t)\} = X^*(f) = \int x^*(t)e^{-j2\pi ft} = (\int x(t)e^{j\pi ft})^* = (X(-f))^*$
  - x réel + pair $\implies$ $TF\{x\}$ réel paire : $x(-t) = x(t) \implies X(-t) = X(t)$ et $x(t) = x^*(t) \implies X*(f) = X(f)$

- — Dérivation : $TF\{x^{(n)}(t)\} = (j2\pi f)^n X(f)$ et $TF\{(-j2\pi t)^n x(t)\} = X^{(n)}(f)$
  - — Changement d'échelle : $TF\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}X(\frac{f}{\alpha})$: **compression de l'échelle du temps $\implies$ dilatation de l'échelle des fréquence** : changement de variable ATTENTION signe de α faire deux cas $t' = \frac{t}{\alpha}$
  - — Modulation : $TF\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$: évident
  - — Convolution : $TF\{x(t) \star y(t)\} = X(f)Y(f)$: definition into Fubini into changement de var into cqfd
  - — Produit : Attention temps discret donne $\circledast$: prouver par tf inverse
- — Théorème de Wiener-Kintchine : $\Gamma_x(f) = TF\{\gamma_x(\tau)\}$: $\gamma_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(\tau)$ puis prop TF pour cqfd

3 Système Linéaire, homogène et invariant

- — Linéaire = Additivité + homogène
- — Additivité :
  - — Soit $x_1(t) \to h(t)$ et $x_2(t) \to h(t) \to$ somme des deux sorties $= y_1(t)$
  - — Soit $x_1(t) + x_2(t) \to h(t) \to y_2(t)$
  - — Additif si $y_1(t) = y_2(t)$
- — Homogène
  - — Soit $x(t) * K \to h(t) \to y_1(t)$
  - — Soit $x(t) \to h(t) \to *K \to y_2(t)$
  - — Homogène si $y_1(t) = y_2(t)$
- — Invariance dans le temps
  - — Soit $x(t) \to (t - T) \to h(t) \to y_1(t)$
  - — Soit $x(t) \to h(t) \to t - T \to y_2(t)$
  - — Invariant si $y_1(t) = y_2(t)$

4 Analyse en régime harmonique

La réponse en fréquence d'un SLI peut être obtenue par une analyse en régime harmonique (régime sinusoïdale permanent) pour diverses valeurs de f_0 balayant l'axe des fréquences :

$$x(t) = A_e sin(2\pi f_0 t) \to SLI \to y(t) = A_s(f_0)\sin(2\pi f_0 t + \psi(f_0)).$$

$$|H(f_0)| = \frac{A_s(f_0)}{A_e}.$$

$$\psi(f_0) = argH(f_0).$$

5 Convolution à la main

$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-u)h(u)du$

1. inversion du temps de $x(u) \to x(-u)$
2. Décalage en un t donné : $x(-u) \to x(t-u)$
3. Multiplication terme à terme avec $h(u)$: $x(t-u) \to h(u)x(t-u)$
4. Intégration du produit sur $\mathbb{R}$

6 TF

Pour les TF complexe : 4 méthode :

- — Brut force le calcul
- — Penser à la formule de la dérivé
- — La fonction est le résultat d'une convolution

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
1	$\delta(t)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$
$Rect_T(t)$	$T sinc(\pi f T)$
$W_T(t)$	$\frac{1}{T}\sum\delta(f-\frac{n}{T})$

$x[k]$	$X(\nu)$
$\delta[k]$	1
$\delta[k-k_0]$	$e^{-j2\pi\nu k_0}$
1	$\delta(t)$
$e^{-j2\pi\nu_0 k}$	$\delta(\nu-\nu_0)$
$\cos[2\pi\nu_0 t]$	$\frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_0)+\frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_0)$
$\sin[2\pi\nu_0 t]$	$\frac{1}{2j}\delta(\nu-\nu_0)+\frac{1}{2j}\delta(\nu+\nu_0)$
$x[k]=\begin{cases}1 & \forall k=0,1,\ldots,N-1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\begin{cases}e^{-j\pi\nu(N-1)}\frac{sin(\pi\nu N)}{sin(\pi\nu)} & \text{si } \nu\neq 0\\ N & \text{si } \nu=0\end{cases}$
$W_N[k]$	$\frac{1}{N}\sum\delta(\nu-\frac{n}{N})$

7 Échantillonnage

$x(t)\rightarrow x[k]=x(kT_e+), T_e$ période d'échantillonnage.

$$\begin{aligned}
x_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t-kT_e)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta(t-kT_e)\\
&= x(t)\sum_k \delta(t-kT_e)\\
X_e(f) &= \sum x[k]e^{-j2\pi fkT_e}\\
&= X(\nu)|_{\nu=fT_e=\frac{f}{f_e}}\\
&= X(f)\star TF\{\sum\delta(t-kT_e)\}\\
&= \frac{1}{T_e}\sum X(f-k\frac{1}{T_e})\\
X(\nu) &= f_e\sum X(f-\frac{k}{T_e})|_{f=\frac{\nu}{T_e}=\nu f_e}
\end{aligned}$$

+ Filtre antialisaing pré-échantillonage : $f_c=f_e/2$ pour éviter le recouvrement spectrale + **dessin**

8 Blocage d'ordre zéro

On veut : $x[k] \to y(t)$. Inverse de l'échantillonnage : on cale des rectangles $p(t) = rect_{T_e}(t - \frac{T_e}{2})$ faire dessin

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum x[k]p(t - kT_e) \\
&= \sum x[k](\delta(t - kT_e) \star p(t)) \\
&= p(t) \star x_e(t) \\
Y(f) &= P(f)X_e(f) \\
&= T_e \frac{sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e} e^{-j2\pi f T_e/2} * X_e(f)
\end{aligned}$$

Le sinus cardinale s'annule en $f = f_e$ et vaut $1/f_e$ en zéro. Il est proche de 1 autour de zéros. Par sa valeur en zéro, il annule l'effet du $*f_e$ qu'on a après échantillonnage sur l'ordonnée
+ filtre post bloqueur en again $f_c = f_e/2$ pour retirer les ondelettes provoqué par le sinc autour de f_e.

9 Réduction de cadence

= échantillonnage version numérique = même démo que échantillonnage continue avec $T_e = N$: $x[k] \to x^{\downarrow}[n] = x[k] = x[nN]$

$$x_e[k] = \sum_n x[nN]\delta(k - nN)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum x^{\downarrow}[n]\delta(k - nN) \\
&= x[k] \sum \delta(k - nN) \\
X_e(\nu) &= TF\{\sum x^{\downarrow}[n]\delta(k - nN)\} \\
&= \sum x^{\downarrow} e^{-j2\pi\nu nN} \\
&= X(\nu')|_{\nu'=\nu N} \\
X_e(\nu) &= X(\nu) \circledast \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mu - \frac{n}{N}) \\
&= \frac{1}{N} X(\nu) \star \sum_{n=0}^{N-1} \delta(\nu - \frac{n}{N}) \\
&= \frac{1}{N} \sum X(\nu - \frac{n}{N}) \\
X^{\downarrow}(\nu') &= \frac{1}{N} \sum X(\nu - \frac{n}{N})|_{\nu=\nu'/N}
\end{aligned}$$

Cette fois-ci on écarte l'axe des abscises $\nu' = \nu N$. Shannon $\frac{1}{N} > 2\nu_{max}$ donc on filtre antialiasing $f_c = \frac{1}{2N}$ avant

10 Élévation de cadence

Insérer $M - 1$ zéros entre chaque point.
= bloqueur d'ordre zéros version numérique

$x[k] \rightarrow x^{\uparrow}[m] = \begin{cases} x[k] & \text{si } m = kM \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^{\uparrow}(\nu'') &= TF\{x^{\uparrow}[m]\} = \sum_m x^{\uparrow}[m] e^{-j2\pi\mu'' m} \\ &= \sum_k x[k] e^{-j2\pi\nu'' kM} \\ &= X(\nu)|_{\nu = M\nu''} \end{aligned}$$

On réduit l'axe des abscises par $\nu'' = \nu/M$.
Filtre post traitement de $f_c = \frac{1}{2M}$ **et de hauteur** M pour ré-équilibré le $*\frac{1}{N}$ qu'on fait avec une réduction de cadence