

Compte Rendu TM2

Charles Vin

30/09

1 Exercice 1

1. Racine du polynôme : $\{-1, -3\}$

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2 + 4S + 3} \\&= \frac{10(S+1)}{(S+1)(S+3)} \\&= \frac{10}{S+3}\end{aligned}$$

D'après la ligne cinq du tableau on a

$$x(t) = e^{\lambda}u(t) \Leftrightarrow X(S) = \frac{1}{S - \lambda}.$$

Dans notre cas $\lambda = -3$. Conclusion :

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2 + 4S + 3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= 10e^{-3t}u(t)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2 + 4S + 3} \\&= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{(S+1)(S+3)} \\&= \frac{10e^{-2S}}{(S+3)}\end{aligned}$$

Nous sommes dans le même cas que précédemment avec un time shifting de 2. Conclusion :

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2 + 4S + 3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= 10e^{-3(t-2)}u(t-2)\end{aligned}$$

3. Les racines de $S(S^2 + 10S + 16)$ sont $\{0, -2, -8\}$

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{20}{S(S^2 + 10S + 16)} \\&= \frac{20}{S(S+2)(S+8)} \\&= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8}\end{aligned}$$

Trouvons A, B, C :

$$\begin{aligned}\frac{20}{S(S+2)(S+8)} &= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8} \\ \Leftrightarrow 20 &= A(S+2)(S+8) + B(S+8)S + C(S+2)S \\ \Leftrightarrow 20 &= AS^2 + 10AS + 16A + BS^2 + 8BS + CS^2 + 2CS \\ \Leftrightarrow 20 &= (A+B+C)S^2 + (10A+8B+2C)S + 16A\end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{aligned}&\begin{cases} A+B+C=0 \\ 10A+8B+2C=0 \\ 16A=20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/4-C \\ 8(-5/4-C)+2C=-50/4 \\ A=20/16=5/4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/4-C \\ -6C=-50/4+40/4=-10/4 \\ A=5/4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} B=-5/3 \\ C=5/12 \\ A=5/4 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(S) &= \frac{20}{S(S^2+10S+16)} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= \frac{5}{4}u(t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{5}{12}e^{-8t}u(t) \\ &= u(t)\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{5}{12}e^{-8t}\right)\end{aligned}$$

2 Exercice 2

$$\begin{aligned}H(S) &= \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)} \\ &= \frac{20*100}{2*10} \frac{S(1+S/100)}{(1+S/2)(1+S/10)} \\ &= 100 * \frac{S(1+S/100)}{(1+S/2)(1+S/10)}\end{aligned}$$

Calcul des niveaux de base

- Le gain : $20 \log 100 = 40 \text{db}$
- Le phase : $= 0$ car $100 > 0$

Grâce à ces calculs préalable, on peut maintenant tracer le diagramme de Bode du gain dans la figure 1.

Voici sa légende :

- Niveau de base : 40db
- Zero à l'origine : $(S) \rightarrow 20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$
- $(1 + \frac{S}{100}) \rightarrow +20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$
- $(1 + \frac{S}{2}) \rightarrow -20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$
- $(1 + \frac{S}{10}) \rightarrow -20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$

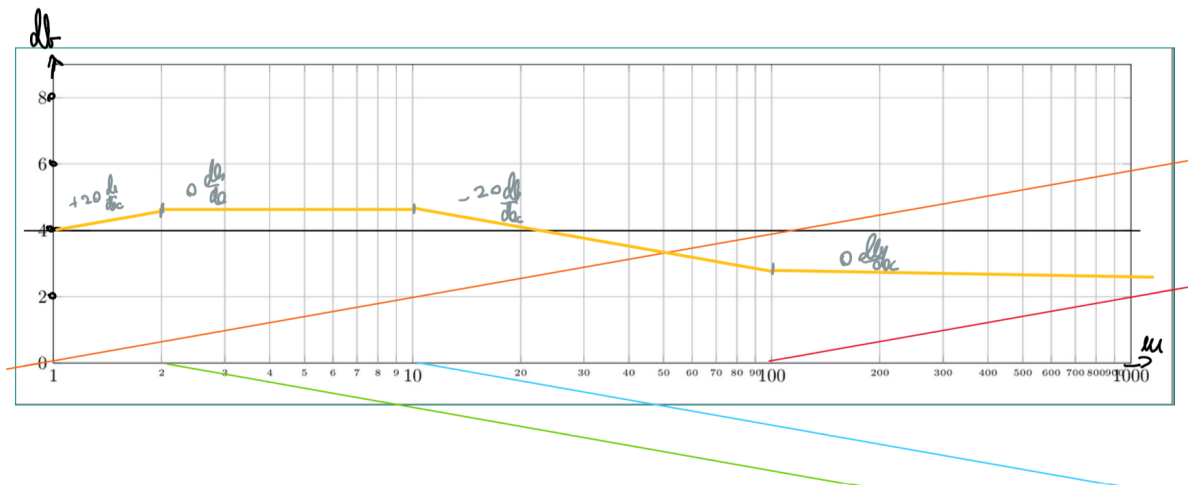


Figure 1 – Diagramme de Bode du gain

— Résultante

Puis on peut tracer le diagramme de la phase sur la figure 2. Voici sa légende :

— Niveau de base : 0

— Zero à l'origine : $(S) \rightarrow +\frac{\pi}{2}$

— $(1 + \frac{S}{100}) \rightarrow +\frac{\pi}{4}$ sur $[10, 1000]$

— $(1 + \frac{S}{2}) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ sur $[0.2, 20]$

— $(1 + \frac{S}{10}) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ sur $[1, 100]$

— Résultante

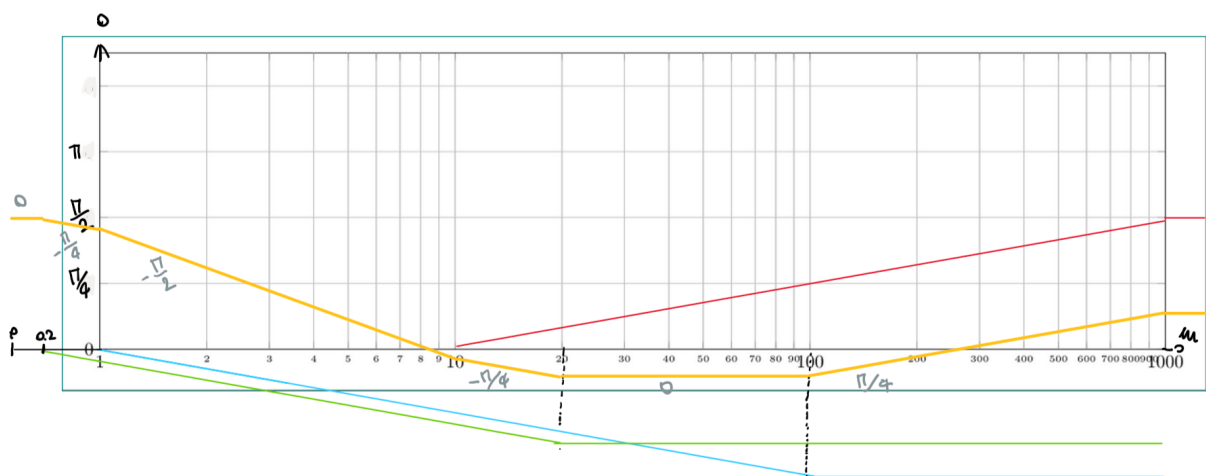


Figure 2 – Diagramme de Bode de la phase

2.1 MatLab

Voici deux diagramme de Bode :

- Le premier dans la figure 3 fut généré avec la fonction `bode()` de la toolbox de signal processing.
- Le deuxième généré avec le code indiqué.

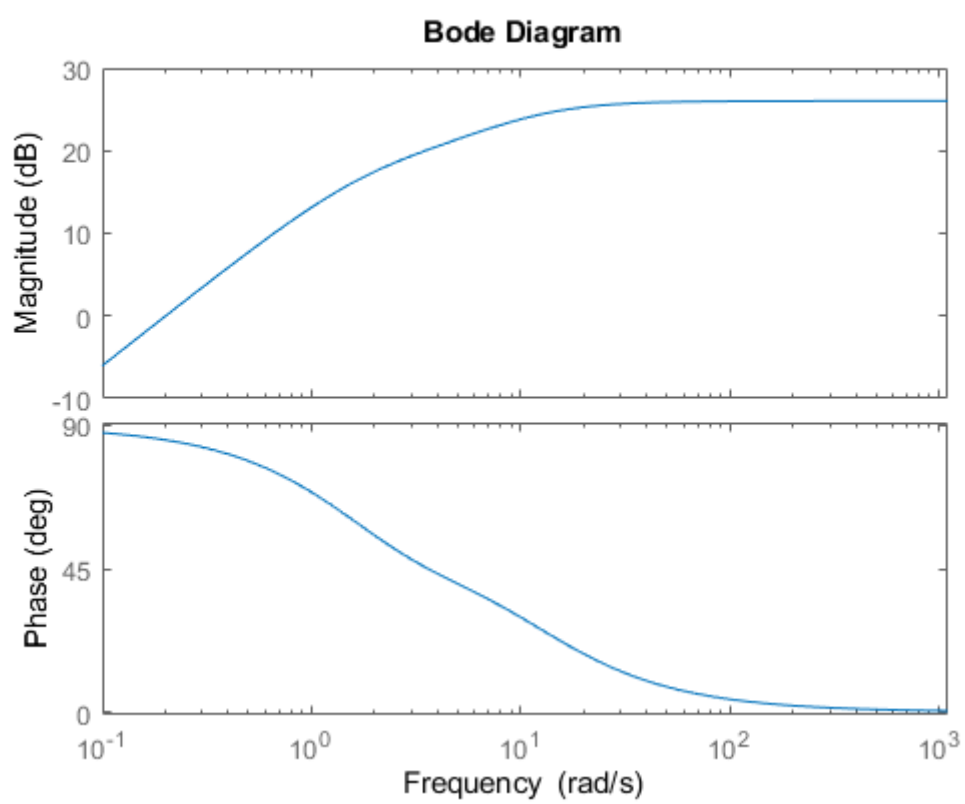


Figure 3 – Figure généré avec la fonction *bode()*