Compte Rendu TM2

Charles Vin

30/09

1 Exercice 1

1. Racine du polynôme : $\{-1, -3\}$

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3} \\ &= \frac{10(S+1)}{(S+1)(S+3)} \\ &= \frac{10}{S+3} \end{aligned}$$

D'après la ligne cinq du tableau on a

$$x(t) = e^{\lambda}u(t) \Leftrightarrow X(S) = \frac{1}{S-\lambda}.$$

Dans notre cas $\lambda = -3$. Conclusion :

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)}{S^2+4S+3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} & \\ x(t) &= 10e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3} \\ &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{(S+1)(S+3)} \\ &= \frac{10e^{-2S}}{(S+3)} \end{aligned}$$

Nous somme dans le même cas que précédemment avec un time shifting de 2. Conclusion :

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{10(S+1)e^{-2S}}{S^2+4S+3} \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} & \\ x(t) &= 10e^{-3(t-2)}u(t-2) \end{aligned}$$

3. Les racines de $S(S^2+10S+16)$ sont $\{0, -2, -8\}$

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{20}{S(S^2+10S+16)} \\ &= \frac{20}{S(S+2)(S+8)} \\ &= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8} \end{aligned}$$

Trouvons A, B, C :

$$\begin{aligned}
\frac{20}{S(S+2)(S+8)} &= \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} + \frac{C}{S+8} \\
\Leftrightarrow 20 &= A(S+2)(S+8) + B(S+8)S + C(S+2)S \\
\Leftrightarrow 20 &= AS^2 + 10AS + 16A + BS^2 + 8BS + CS^2 + 2CS \\
\Leftrightarrow 20 &= (A+B+C)S^2 + (10A+8B+2C)S + 16A
\end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 10A+8B+2C=0 \\ 16A=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-5/4-C \\ 8(-5/4-C)+2C=-50/4 \\ A=20/16=5/4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-5/4-C \\ -6C=-50/4+40/4=-10/4 \\ A=5/4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-5/3 \\ C=5/12 \\ A=5/4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(S) &= \frac{20}{S(S^2+10S+16)} \\
&\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\
x(t) &= \frac{5}{4}u(t) - \frac{5}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{5}{12}e^{-8t}u(t) \\
&= u(t)(\frac{5}{4} - \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{5}{12}e^{-8t})
\end{aligned}$$

2 Exercice 2

$$\begin{aligned}
H(S) &= \frac{20S(S+100)}{(S+2)(S+10)} \\
&= \frac{20*100}{2*10}\frac{S(1+S/100)}{(1+S/2)(1+S/10)} \\
&= 100 * \frac{S(1+S/100)}{(1+S/2)(1+S/10)}
\end{aligned}$$

Calcul des niveaux de base

- Le gain : $20\log 100 = 40db$
- Le phase : $=0$ car $100 > 0$

Grâce à ces calculs préalable, on peut maintenant tracer le diagramme de Bode du gain dans la figure 1.
Voici sa légende :

- Niveau de base : 40db
- Zero à l'origine : $(S) \rightarrow 20\frac{db}{dec}$
- $(1+\frac{S}{100}) \rightarrow +20\frac{db}{dec}$
- $(1+\frac{S}{2}) \rightarrow -20\frac{db}{dec}$
- $(1+\frac{S}{10}) \rightarrow -20\frac{db}{dec}$

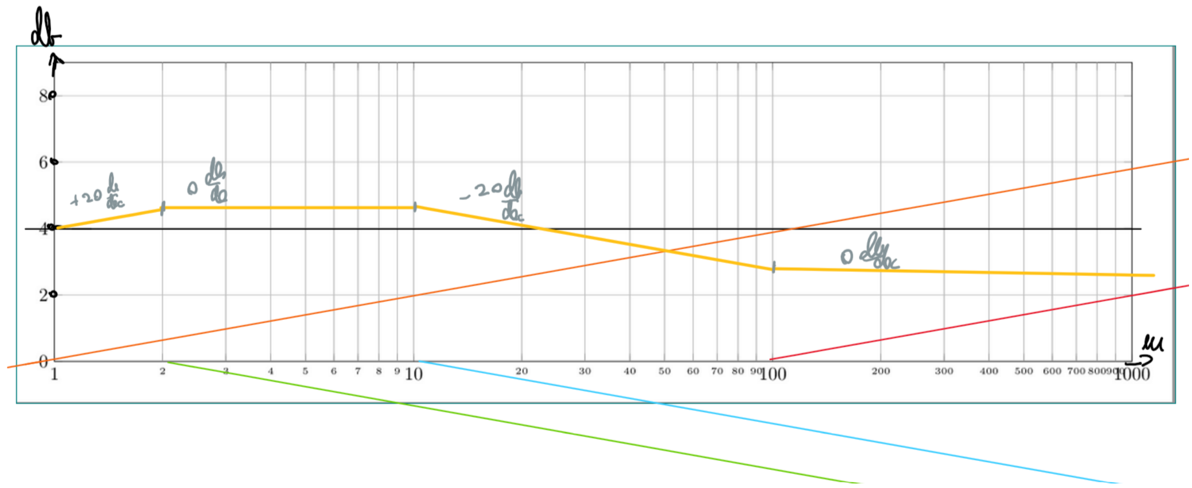


Figure 1 – Diagramme de Bode du gain

— Résultante

Puis on peut tracer le diagramme de la phase sur la figure 2. Voici sa légende :

— Niveau de base : 0
— Zero à l'origine : $(S) \rightarrow +\frac{\pi}{2}$
— $(1 + \frac{S}{100}) \rightarrow +\frac{\pi}{4}$ sur $[10, 1000]$
— $(1 + \frac{S}{2}) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ sur $[0.2, 20]$
— $(1 + \frac{S}{10}) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ sur $[1, 100]$
— Résultante

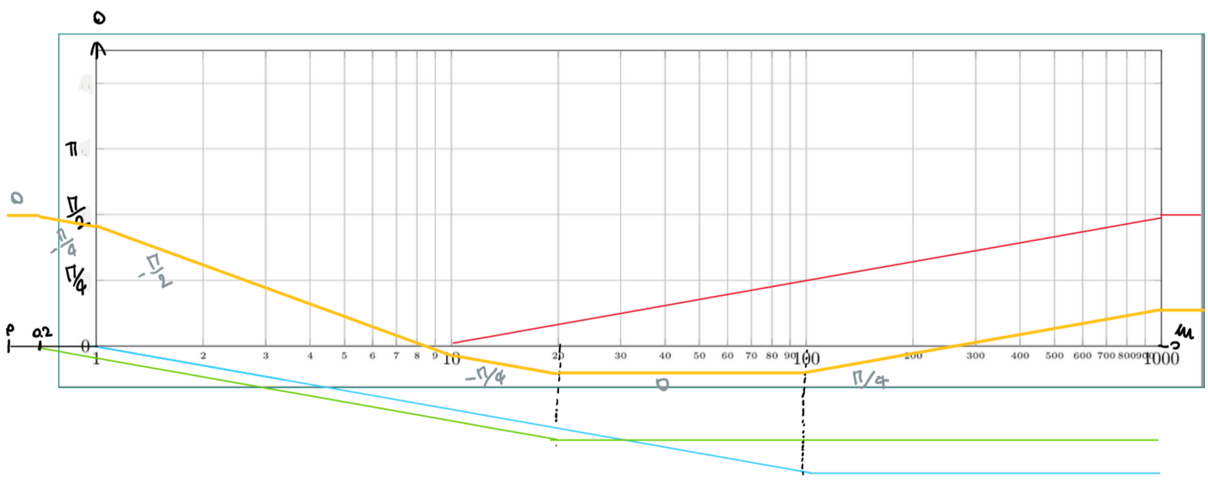


Figure 2 – Diagramme de Bode de la phase

2.1 MatLab

Voici deux diagramme de Bode :

— Le premier dans la figure 3 fut généré avec la fonction $bode()$ de la toolbox de signal processing.
— Le deuxième généré avec le code indiqué.

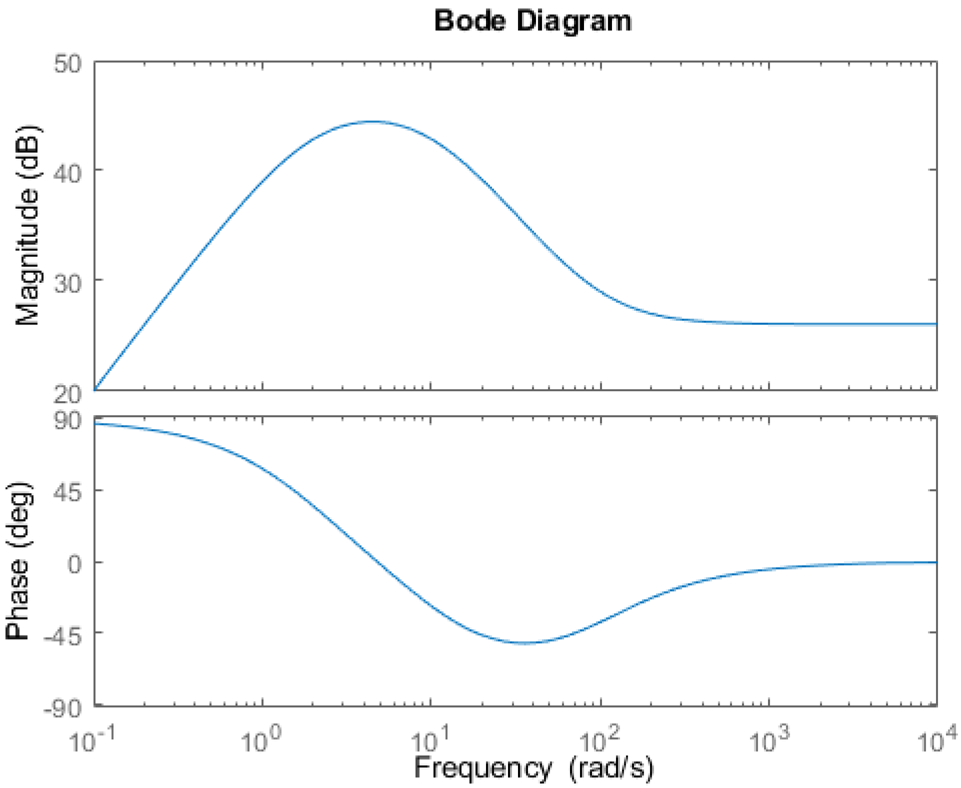
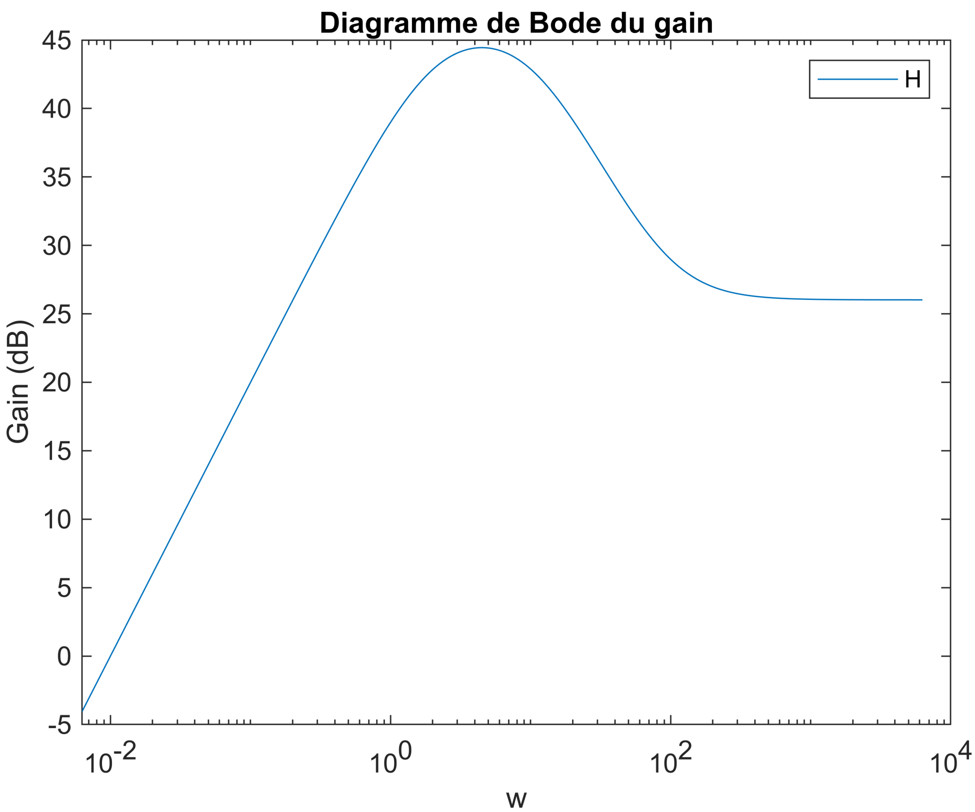


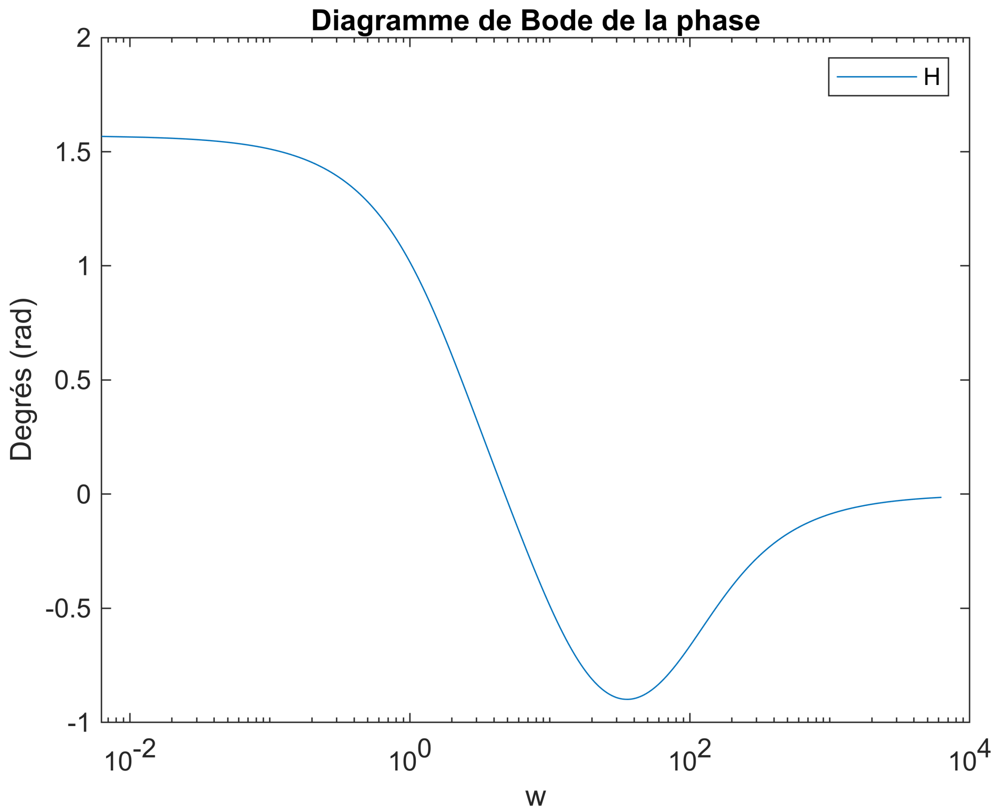
Figure 3 – Figure généré avec la fonction $bode()$

```
f = 0 : 0.001 : 1000;
w = 2*pi*f;
S = 1i*w;
H = (20*S.*(S+100)) ./ ((S+2).*(S+10));
module = 20*log10(abs(H));
phase = angle(H);

figure('name', 'Diagramme de Bode du gain');
semilogx(w, module);
title('Diagramme de Bode du gain');
xlabel('w');
ylabel('Gain (dB)');
legend('H');
```




```
figure('name', 'Diagramme de Bode de la phase');
semilogx(w, phase);
title('Diagramme de Bode de la phase');
xlabel('w');
ylabel('Degrés (rad)');
legend('H');
```




```
num = [20 2000 0];
```

```
num = 1×3
          20        2000           0
```

```
den = [1 12 20];
```

```
den = 1×3
     1    12    20
```

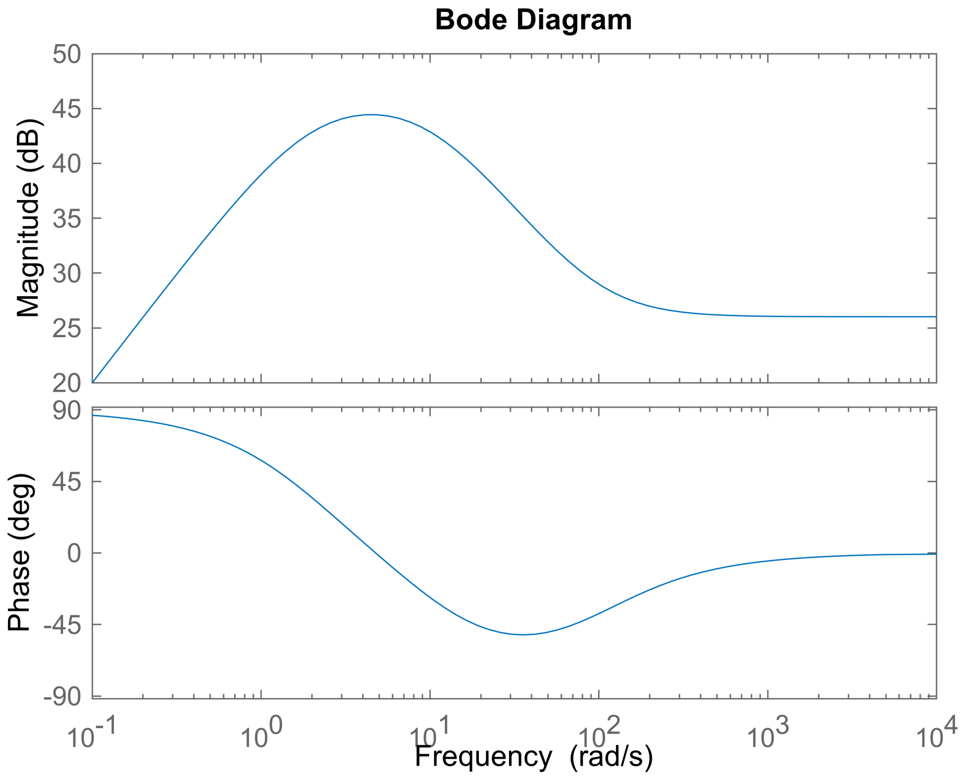
```
H = tf(num,den);
```

```
H =

  20 s^2 + 2000 s
  ---------------
  s^2 + 12 s + 20

Continuous-time transfer function.
```

```
bode(H);
```


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
45
40
35
30
25
20
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)