

# Partiel : Traitement du Signal

Cours: H. Aboushady et S. Baey  
Responsable du module: H. Mehrez  
31 Octobre 2007

- Durée 2h00.
- Documents autorisés : 1 feuille A4
- L'examen est composé de 2 parties:
  - Poids indicatif de chaque partie:
    - PARTIE I : 10 points (H. Aboushady)
    - PARTIE II : 10 points (S. Baey)

## PARTIE I

NOM :

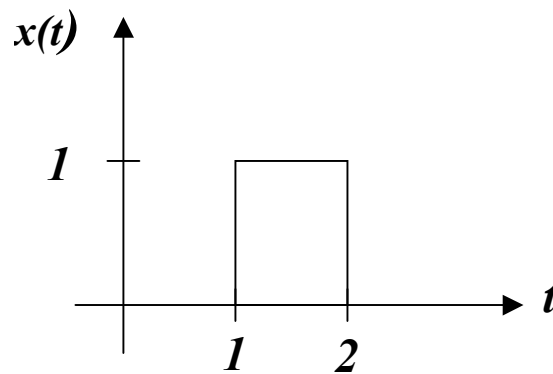
PRENOM :

### Exercice I-1 (7.0 points)

Un système est définie par sa réponse impulsionnelle :

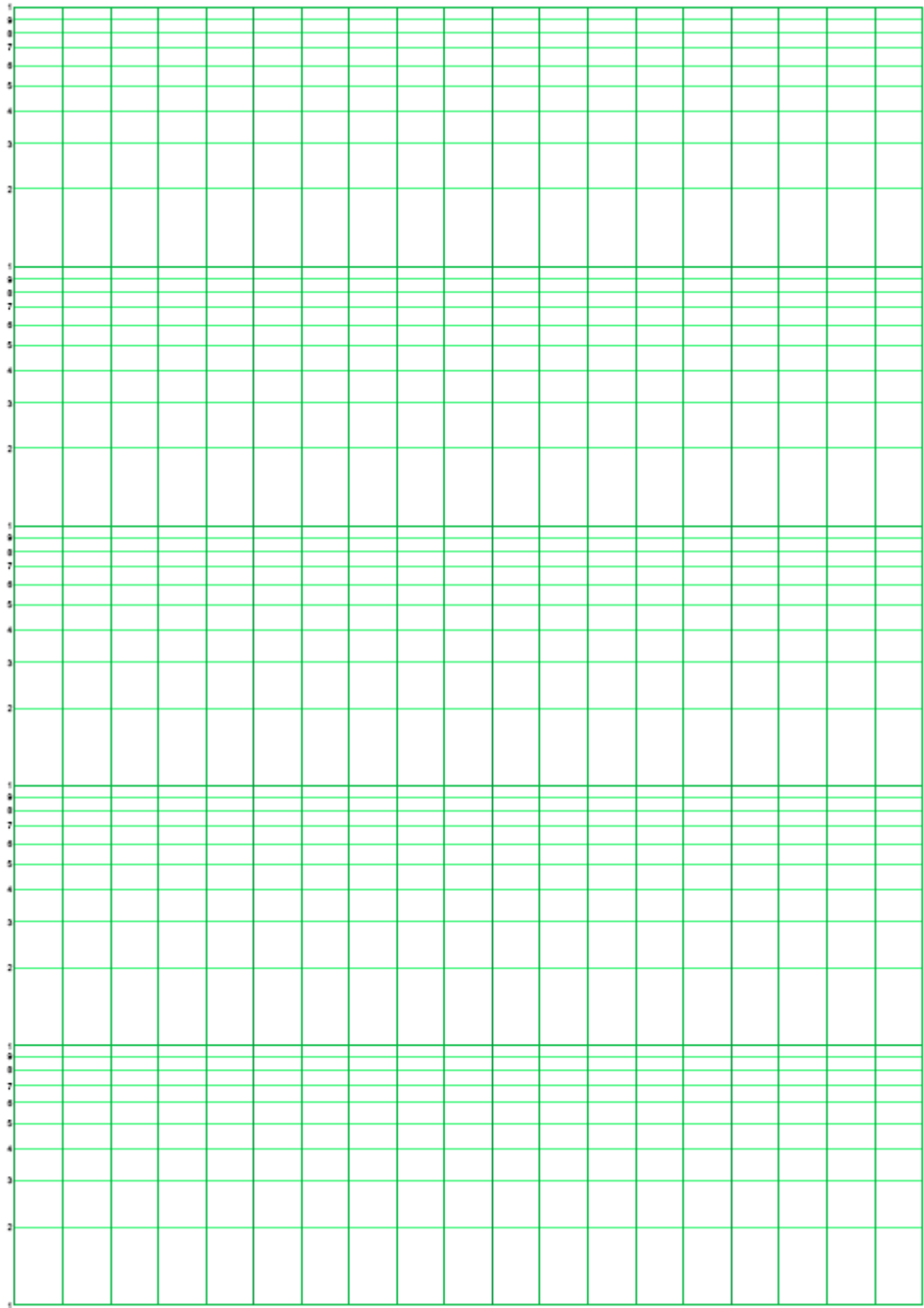
$$h(t) = [4e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

- (a) Trouvez la fonction de transfert,  $H(s)$ , de ce système.
- (b) Tracez le diagramme de Bode du module et de la phase de  $H(s)$  sur les feuilles en échelle logarithmique (données en page 4 et 5).
- (c) Tracez, dans le plan  $s$ , la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert,  $H(s)$ . Commentez sur la stabilité de ce système.
- (d) Quel type de filtre est réalisé par cette fonction de transfert ? Pourquoi ?
- (e) On applique un signal  $x(t)$ , ci-dessous, au système  $h(t)$ .  
En utilisant la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse, trouvez  $Y(s)$  puis  $y(t)$ , la réponse du système au signal  $x(t)$ .



PARTIE I  
NOM :  
PRENOM :

Exercice I-1 (b)

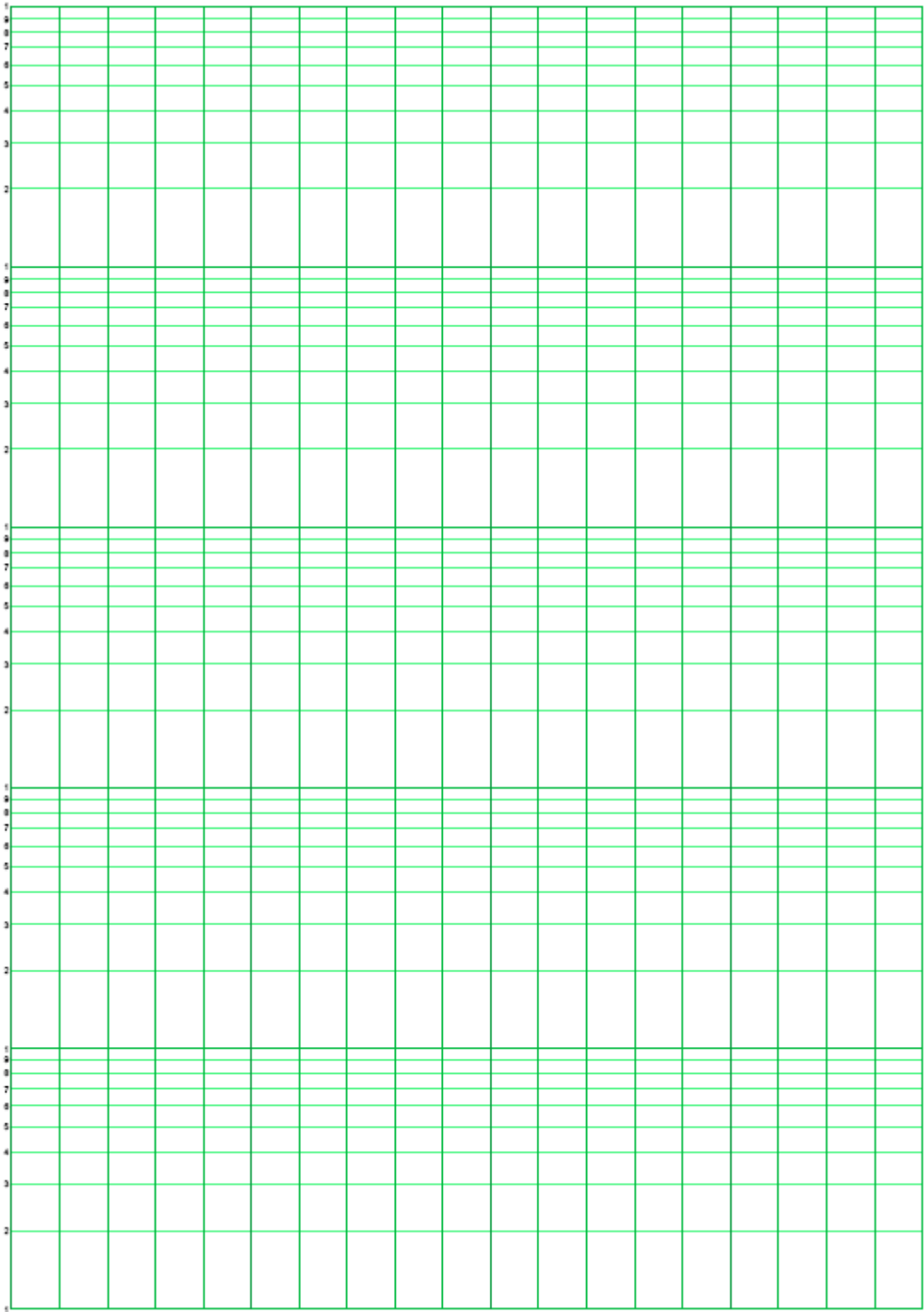


PARTIE I

NOM :

PRENOM :

Exercice I-1 (b)



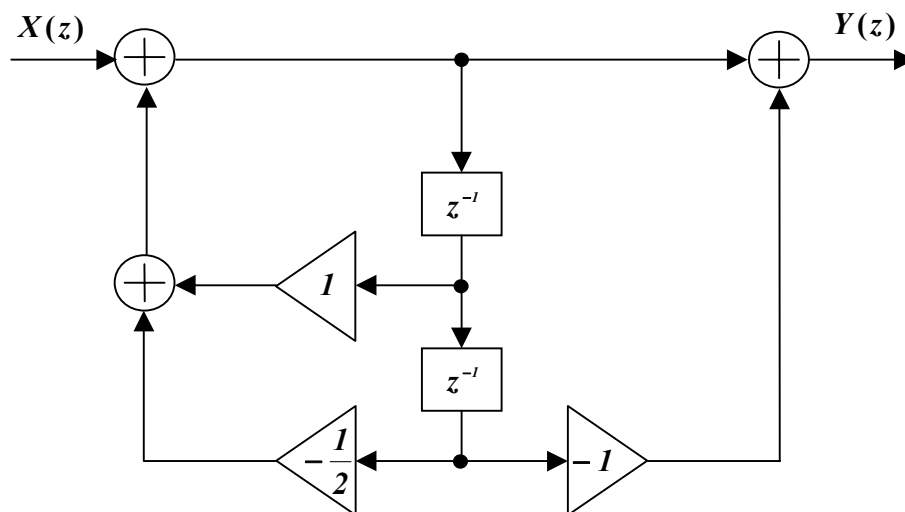
PARTIE I

NOM :

PRENOM :

**Exercice I-2 (3.0 points)**

Un système temps-discret est défini par le schéma en bloc suivant :



(a) Trouvez la fonction de transfert  $H(z)$ ,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- (b) Tracez, dans le plan  $z$ , la position des pôles et des zéros. Commentez sur la stabilité de ce système.
- (c) Quelle type de filtre est réalisé par cette fonction de transfert ? Pourquoi ?
- (d) Tracez approximativement la réponse en fréquence  $H(e^{j\Omega})$ , de  $\Omega=0$  à  $\Omega= 2\pi$ .

TABLE 4.1 A Short Table of (Unilateral) Laplace Transforms

No.	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{s - \lambda}$
6	$t e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}}$
8a	$\cos bt u(t)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
8b	$\sin bt u(t)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
9a	$e^{-at} \cos bt u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$
9b	$e^{-at} \sin bt u(t)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
10a	$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{(r \cos \theta)s + (ar \cos \theta - br \sin \theta)}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$
10b	$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s + a - jb} + \frac{0.5re^{-j\theta}}{s + a + jb}$
10c	$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$
	$r = \sqrt{\frac{A^2c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}$	
	$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}} \right)$	
	$b = \sqrt{c - a^2}$	
10d	$e^{-at} \left[ A \cos bt + \frac{B - Aa}{b} \sin bt \right] u(t)$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$
	$b = \sqrt{c - a^2}$	



TABLE 4.2 The Laplace Transform Properties

Operation	$x(t)$	$X(s)$
Addition	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
Scalar multiplication	$kx(t)$	$kX(s)$
Time differentiation	$\frac{dx}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
	$\frac{d^2x}{dt^2}$	$s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$
	$\frac{d^3x}{dt^3}$	$s^3X(s) - s^2x(0^-) - s\dot{x}(0^-) - \ddot{x}(0^-)$
	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$
	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$
Time shifting	$x(t - t_0)u(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0} \quad t_0 \geq 0$
Frequency shifting	$x(t)e^{s_0 t}$	$X(s - s_0)$
Frequency differentiation	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$
Frequency integration	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(z) dz$
Scaling	$x(at), a \geq 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
Time convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Frequency convolution	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$
Initial value	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (n > m)$
Final value	$x(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad [\text{poles of } sX(s) \text{ in LHP}]$



TABLE 5.1 (Unilateral)  $z$ -Transform Pairs

No.	$x[n]$	$X[z]$
1	$\delta[n - k]$	$z^{-k}$
2	$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$
3	$nu[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
4	$n^2u[n]$	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
5	$n^3u[n]$	$\frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z - 1)^4}$
6	$\gamma^n u[n]$	$\frac{z}{z - \gamma}$
7	$\gamma^{n-1} u[n - 1]$	$\frac{1}{z - \gamma}$
8	$n\gamma^n u[n]$	$\frac{\gamma z}{(z - \gamma)^2}$
9	$n^2\gamma^n u[n]$	$\frac{\gamma z(z + \gamma)}{(z - \gamma)^3}$
10	$\frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - m + 1)}{\gamma^m m!} \gamma^n u[n]$	$\frac{z}{(z - \gamma)^{m+1}}$
11a	$ \gamma ^n \cos \beta n u[n]$	$\frac{z(z -  \gamma  \cos \beta)}{z^2 - (2 \gamma  \cos \beta)z +  \gamma ^2}$
11b	$ \gamma ^n \sin \beta n u[n]$	$\frac{z \gamma  \sin \beta}{z^2 - (2 \gamma  \cos \beta)z +  \gamma ^2}$
12a	$r \gamma ^n \cos (\beta n + \theta) u[n]$	$\frac{rz[z \cos \theta -  \gamma  \cos (\beta - \theta)]}{z^2 - (2 \gamma  \cos \beta)z +  \gamma ^2}$
12b	$r \gamma ^n \cos (\beta n + \theta) u[n] \quad \gamma =  \gamma e^{j\beta}$	$\frac{(0.5re^{j\theta})z}{z - \gamma} + \frac{(0.5re^{-j\theta})z}{z - \gamma^*}$
12c	$r \gamma ^n \cos (\beta n + \theta) u[n]$	$\frac{z(Az + B)}{z^2 + 2az +  \gamma ^2}$

$$r = \sqrt{\frac{A^2|\gamma|^2 + B^2 - 2AaB}{|\gamma|^2 - a^2}}$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{-a}{|\gamma|}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Aa - B}{A\sqrt{|\gamma|^2 - a^2}}$$



TABLE 5.2  $z$ -Transform Operations

Operation	$x[n]$	$X[z]$
Addition	$x_1[n] + x_2[n]$	$X_1[z] + X_2[z]$
Scalar multiplication	$ax[n]$	$aX[z]$
Right-shifting	$x[n - m]u[n - m]$	$\frac{1}{z^m}X[z]$
	$x[n - m]u[n]$	$\frac{1}{z^m}X[z] + \frac{1}{z^m} \sum_{n=1}^m x[-n]z^n$
	$x[n - 1]u[n]$	$\frac{1}{z}X[z] + x[-1]$
	$x[n - 2]u[n]$	$\frac{1}{z^2}X[z] + \frac{1}{z}x[-1] + x[-2]$
	$x[n - 3]u[n]$	$\frac{1}{z^3}X[z] + \frac{1}{z^2}x[-1] + \frac{1}{z}x[-2] + x[-3]$
Left-shifting	$x[n + m]u[n]$	$z^mX[z] - z^m \sum_{n=0}^{m-1} x[n]z^{-n}$
	$x[n + 1]u[n]$	$zX[z] - zx[0]$
	$x[n + 2]u[n]$	$z^2X[z] - z^2x[0] - zx[1]$
	$x[n + 3]u[n]$	$z^3X[z] - z^3x[0] - z^2x[1] - zx[2]$
Multiplication by $\gamma^n$	$\gamma^n x[n]u[n]$	$X\left[\frac{z}{\gamma}\right]$
Multiplication by $n$	$nx[n]u[n]$	$-z \frac{d}{dz} X[z]$
Time convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1[z]X_2[z]$
Time reversal	$x[-n]$	$X[1/z]$
Initial value	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X[z]$
Final value	$\lim_{N \rightarrow \infty} x[N]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X[z]$ poles of $(z - 1)X[z]$ inside the unit circle