Cours: MAPSI

Charles Vin

2022

Nouveau cours du 13/09

1 Introduction

- Exam final : 50%
- Partiel : 35%
- Participation : 15%
  - travail dans la séance
  - TME soumis en fin de séance omg

Deux grand type de modèle :
- Modèle paramétrique : connaissance sur la distribution stat des données. Puis on estime les paramètres de la loi.
- Modèle non paramétrique : l'inverse, on ne connait pas la loi. exemple : regression logistique

Echantillons :
- population
- ect

Définition 1.1. Vocabulaire :
- Voir diapo 9/51

Définition 1.2 (Mesure de proba)**.** Une fonction qui associe chaque événement à une valeur entre 0 et 1. Voir diapo 15, definition importante.

Définition 1.3.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Densité de proba

Retrouver la définition.

Fonction de répartition
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Espérance :
$$E(X) = \sum x_k * p_k$$
$$E(X) = \int Xp(x)dx$$
$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Le Mode
$$p(Mo) = \max_k p(x_k) p(Mo) = \max_x p(x)$$

Variance :

$$\sigma^2 = \sum (x_k - E(X))^2$$

$$\sigma^2 = \int (x - E(X))^2 p(x) dx$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)$$

Médiane et quantile

idk diapo

Définition 1.4 (Loi marginale)**.** La marginalisation consiste à projeter une loi jointe sur l'une des variables aléatoires. Par exemple extraire $P(A)$ à partir de $P(A, B)$.

$$P(A) = \sum_i P(A, B = pb_i).$$

C'est la somme de la ligne ou de la colonne du tableau.

Définition 1.5. Probabilités conditionnelles

$$P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A|B)P(B)$$

Proposition 1.1. — *Réversibilité :* $P(A, B) = P(A|B)$

— *Théorème de Bayes :*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

— *Intégration des probabilités totale*

— *DIAPO 39*

Définition 1.6 (Indépendance probabiliste)**.** Deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A, B) = P(A) * P(B).$$

Corollaire : $P(A|B) = P(A)$

Définition 1.7. La covariance

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Définition 1.8 (Coefficient de corrélation linéaire)**.** Soit X,Y deux variables. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$r = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

CCL :

VOIR DIAPOProbabilité Marginalisation Conditionnement Indépendance : Si X_1 et X_2 sont indépendantes : $P(X_1, X_2) = P(X_1)P(X_)$

<u>Nouveau cours du 20/09</u>

Définition 1.9 (Indépendance de deux variables discrète)**.** Discrète : Continue :

Définition 1.10 (Indépendance mutuelle de n variable)**.** Soient n variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$. Elle sont **mutuellement indépendantes** si tout événement lié à une partie d'entre elles est indépendant de tout événement lié à toute autre partie disjointe de la précédente. Propriété :

— Indépendance mutuelle $\rightarrow$ Indépendance deux à deux. **Attention :** réciproque fausse

$\rightarrow$ Permet de réduire la taille du tableau des probabilité de chaque événement!

Définition 1.11 (Indépendance conditionnelles)**.** On reprend les formules de l'indépendances mais en sachant une variable, au final c'est dans un cas particulier.

$$X \perp Y | Z$$
$$\forall x, \forall y, \forall z P(X = x \cap Y = y | Z = z) = P(X = x | Z = z) * P(Y = y | Z = z)$$

$\rightarrow$

$$\Rightarrow P(X, Y|Z) = P(X|Z) * P(Y|Z).$$

Définition 1.12. Loi normale

Proposition 1.2. *- Moyenne linéaire et variance comme bilinéaire*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ alors } Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

- Centrer et réduire

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Définition 1.13 (Convergence en loi)**.**

$$\forall x, \lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x).$$

On ne sais pas comment ça converge

Définition 1.14 (Convergence en probabilité)**.** (X_n) **converge en probabilité** vers X si, pour tout $\epsilon > 0$ la probabilité que l'écart absolu entre X_n et X dépasse ϵ tend vers 0 quand $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Définition 1.15 (convergence presque sur)**.** (X_n) **converge presque surement**vers X s'il y a yne proba 1 que la suite des réalisation des X_n tende vers X

Définition 1.16 (Loi faible des grands nombre)**.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires :
- — De même loi
- — D'éspérance m
- — Possédant une variance σ^2
- — **Deux à deux** indépendante

Alors

$$\bar{X_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \rightarrow_{\mathbb{P}} m.$$

Rappel :

$$E(\bar{X_n}) = m$$
$$V(\bar{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Définition 1.17 (Loi forte des grands nombres)**.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires :
- — De même loi
- — D'éspérance m
- — Possédant une variance σ^2
- — **mutuellement** indépendante

Alors

$$\bar{X_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \rightarrow_{p.s} m.$$

Définition 1.18 (Théorème centrale limite)**.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires :
- — De même loi
- — D'éspérance μ
- — Possédant une variance σ^2
- — **mutuellement** indépendantes

Alors

$$\frac{\bar{X_n} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow_{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$