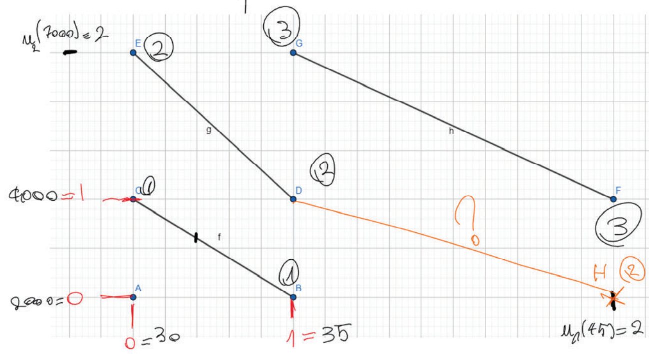
CheatSheet

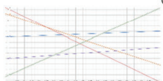
## TD7 : élicitation d'utilité additive

- Dessiner les points, relier ceux équivalent
- En donnant des valeurs arbitraires en abscisse
  - Pour le point (0, 0), la situation actuelle
  - → propagation, équation → Trouver la valeur utilité des autres points




- Test utilité additive ?
  - Trouver un point avec la même utilité qui n'a pas été testé
- Penser au passage du log $V\binom{x}{y} = (x+\gamma)^{\lambda}(y+\delta)$
- Gros système avec les log pour trouver $\gamma, \lambda$ et $\delta$

**Max Regret :**



$u_\mu(x) = \mu V_1(x) + (1-\mu) V_2(x) = \mu (V_1(x) - V_2(x)) + V_2(x)$

$$MR(x, y, \mathcal{U}) = \max_{u_\mu \in \mathcal{U}} u_\mu(y) - u_\mu(x)$$

Tableau $x \backslash y$ … $MR(x, y)$ | Regret max possible en choisissant $x$ à la place de $y$

$$MR(x, \mathcal{U}) = \max_{y \in X} MR(x, y, \mathcal{U})$$

Le max de chaque ligne du tableau précédent

= Le regret max en choisissant $x$

$$x^*_{\mathcal{U}} = \arg\min_{x \in X} MR(x, \mathcal{U})$$

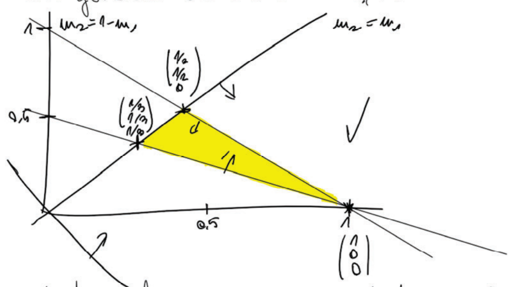
alternative qui min le regret max

$y^* = \arg\max_{y \in Y} MR(x^*, y, \mathcal{U})$ son pire ennemi

→ IF $x^* \succsim y^*$ :
  on avait raison
ELSE :
  restreindre le graph à la partie où $x^* \succsim y^*$ est vrai
  Refaire l'analyse min max regret dans cette restriction

### Scaling de la méthode : $\mathbb{R}^3$

- Réécrire toute les contraintes $(x^2 \succsim x^3, \dots)$ en fonction de $x^2 = a x_1 + b$




- Réduction des $x$ en ne gardant que les dominant
- Valeur de chaque point à chacun des Sommets
- Déterminer le regret maximum entre deux point pour chaque sommet

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2,5 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 1,5 | 2 |
| 7 | 4 | 2,5 | 2 |

→ $MR(x, y, \mathcal{U})$

| | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 5 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## TD8 : Théorie des jeux

- Équilibre de Nash forme normal : "Si je choisis X alors je choisis Y"
- Stratégie strictement dominante :
  - Prendre les vecteurs de chaque strat. ⚠ prendre le bon joueur
- Équilibre itéré :
  - Prendre strat. meilleur qu'une autre et supprimer la ligne du tableau → boucle ⇒ Équilibre Nash
- Si strict dominer tjr. ⇒ résultat invariant de l'ordre
- ⚠ Simplifier les jeux en virant les strat. stric. domi.

### Jeux à Somme nulle (cout symétrique, 1 chiffre)

- Maxi Min : maximiser le gain min du $J_1$
- Mini Max $\leq$ (thm) : minimiser la perte max du $J_2$

| | 1 | 2 | maxi | minmax |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | -1 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | 4 | 1 | 4 |

mixte : Valeur de jeu

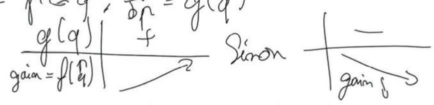
$$\max_{p \in P} \min_{q \in Q} pGq = \min_{q} \max_{p} pGq$$

- Élimination de Fourier
  - $x_n \geq A_i$, $x_n \leq B_j$, $\Phi$ pour là où $x_n$ n'apparait pas
  - ↳ Nouveau système : $\forall i, j \; A_i \leq B_j$ + Vérifier les solution

### Équilibre de Nash en stratégie mixte

- "Si $J_2$ a $q_1$ alors $J_1$ fait sa pour max ses gains"
- $f\binom{p}{q} = E$ gain $= pGq$, $\frac{\partial f}{\partial p} = g(q)$

Si $g(q) > 0$ Sinon




- Same pour $J_2$
- Nash = frontière entre les deux, Si boucle
- ⚠ Deuxième méthode en dessous
- Jeu Symétrique : matrice Antisymétrique : $g_{ij} = -g_{ji}$
  - Strat opti $\begin{cases} Gq \leq 0 \\ \sum q_i = 1 \end{cases}$ $p = q^T$
  - Valeur de jeux = 0

## TD9 : Arbre de jeux

- remonte arrière si pas d'ensemble d'info Sinon forme normal
- Stratégie := prédiction en avance "Si $J_2$ fait x alors y"

- Stratégie := prédiction en avance "Si $J_2$ fait $x$ alors $y$ sinon $z$" = Des Tuples
- Forme normal : Tableau stratégie des deux joueurs | ⚠ retirer strat. strict. dom.
- Equilibre de Nash parfait en sous jeu
  - → Celui par induction arrière
    1) Construire tous les sous jeux = { noeuds autre que racine / pas ensemble d'information
    2) Faire forme normal + nash
    3) Vérifier compatibilité avec Nash global
- Ensemble d'information :
  - Même joueur, même nombre de branche/décision possible
  - "$J_i$ ne distingue pas ces deux noeud, il ne sais pas où il est"
- Nash mixte jeu évolutionnaire

| | F | C | p |
|---|---|---|---|
| F | 0 | · | · |
| C | · | · | 0 |
| p | · | 0 | · |

- $p = \alpha F + (1-\alpha) C = \alpha \binom{\cdot}{\cdot} + (1-\alpha) \binom{\cdot}{\cdot}$
- Nash ssi $\begin{cases} \cdot < \cdot \\ \cdot < \cdot \end{cases}$
- Stratégie Evolutionnairement Stable (SES)
  - Après avoir fixé $\alpha$ pour Nash
  - $q = \beta F + (1-\beta) C$

| | F | C | p | q |
|---|---|---|---|---|
| F | 0 | · | · | · |
| C | · | · | · | · |
| p | f | c | · | $x = \beta f + (1-\beta) c$ |
| q | · | · | $x^T$ | · |

$\Rightarrow$

| | p | q |
|---|---|---|
| p | $g(p,p)$ | $g(q,p)$ |
| q | $g(p,q)$ | $g(q,q)$ |

$\Rightarrow$ Thm du cours

$g(\cdot,\cdot)$ = première valeur du vecteur $\in \mathbb{R}^2$

Thm du cours :

- $g(p,p) > g(q,p)$ OU $\begin{cases} g(p,p) = g(q,p) \\ g(p,q) > g(q,p) \end{cases}$

## Valeur de Shapley

- Coeur du jeu : $\forall S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} x(i) \geq V(S)$ et $\sum_{i \in N} x(i) = V(N)$
- Shapley $x(i) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-s)!}{n!} [V(S) - V(S \setminus \{i\})]$
- Shapley $x(i) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-s)!}{n!} [V(S) - V(S \setminus \{i\})]$

$\mathcal{P}(S)$ | coef | $V(S)$ | $V(S \setminus \{1\})$ | $V(S \setminus \{2\})$ ...

$\Sigma$ = Valeur de Shap

- Si jeu convexe $\forall S,T \in \mathcal{P}(N)$ $V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T)$ alors Shap $\in$ Coeur du jeu

# TD6 : Utilité additive

- $C_m$ : $\forall \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \in X^m$, $\forall \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ permutation de $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $x^j \succsim y^j \Rightarrow$ not $(x^m \succ y^m)$
- $C_3 \Rightarrow$ Transitive | Supposons $C_3$, Soit $a, b, c$ tq $a \succsim b$, $b \succsim c$, soit $r = b$, $s = c$, $r = \binom{b_1}{b_2}$, $s = \binom{c_1}{c_2}$, $t = \binom{d_1}{d_2} = u \mid a \succsim b, b \succsim c \Rightarrow \begin{cases} b \succsim s \\ a \succsim r \end{cases}$ $\overset{C_3}{\Rightarrow}$ $t \succsim c \Rightarrow a \succsim c$ ∎
- $C_{m+1} \Rightarrow C_m$
- $C_2 \Rightarrow \succsim$ vérifie l'indépendance
- EVOI = Esperance Value of Info
  $= P(q)\, U(\text{meilleure réponse si } q)$
  $+ P(\overline{q})\, U(\text{meilleure réponse si } \overline{q})$
- Complete + $C_m$ $(m \geq 2) \Leftrightarrow$ Représentable par une utilité additive
- Thomsen :

$\left.\begin{matrix} \overset{A}{\binom{x_1}{y_2}} \sim \overset{B}{\binom{y_1}{x_2}} \\ \binom{z_1}{x_2} \sim \binom{x_1}{z_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{E}{\binom{z_1}{y_2}} \sim \underset{F}{\binom{y_1}{z_2}}$