Examen réparti 1

Exercice 1 (4 pts) – **Sac-à-dos bi-objectif**

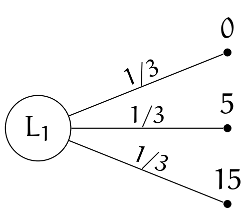
Pierre et Nathalie déménagent à l'étranger pour plusieurs années et souhaitent emporter des bonnes bouteilles de vin de leur cave commune. Ils ont dans la cave 5 caisses dont le poids total est de 100kg. Malheureusement, après avoir chargé les choses essentielles, le transporteur leur annonce qu'il ne reste que 30kg pour le vin. Pierre et Nathalie n'ont pas les même préférences en matière de vin. Le tableau ci-dessous résume le poids des caisses et leur utilité pour chacun des deux protagonistes.

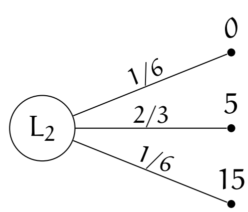
Caisse	1	2	3	4	5
Poids	10	10	30	30	20
Pierre	8	2	8	6	4
Nathalie	1	9	7	3	6

Q 1.1 En formulant ce problème de sac-à-dos comme celui de la recherche de chemins Pareto-optimaux dans un graphe d'états que l'on précisera, déterminer les vecteurs d'utilité des solutions Pareto-optimales du problème par un algorithme de programmation dynamique bi-critère.

Q 1.2 Soit u_1 la fonction d'utilité de Pierre et u_2 celle de Nathalie, toutes deux définies sur tout sous-ensemble de caisses. On s'intéresse maintenant au critère de Hurwicz défini par $h(x) = \alpha \min\{u_1, u_2\} + (1-\alpha)\max\{u_1, u_2\}, \alpha \in]0,1[$. Montrer que, dans un problème de maximisation bi-critère, les solutions qui maximisent h pour au moins une valeur de $\alpha \in]0,1[$ sont Pareto-optimales. La réciproque est-elle vraie sur l'instance de l'exercice ?

Exercice 2 (5pts) – **Loteries à support de cardinal** 3

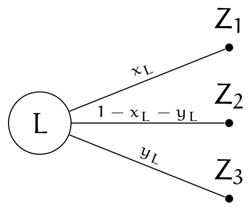
Soit la loterie 

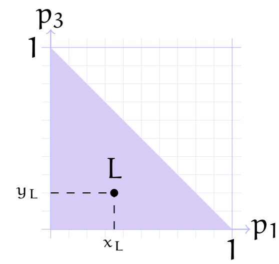
et la loterie 

Q 2.1 Calculer l'espérance de gain de L_1 et L_2.

Q 2.2 Supposons que l'on sache que le décideur (rationnel au sens de Von Neumann-Morgenstern) est indifférent entre L_1 et δ_5 (gagner 5 à coup sûr), que pouvez vous dire de sa préférence entre L_1 et L_2 ?

Q 2.3 Triangle de Marschak-Machina
En se limitant aux loteries dont l'ensemble des conséquences Z est de cardinal 3 ($Z = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$), on peut représenter graphiquement l'ensemble ces loteries sous la forme du triangle rectangle (simplex unitaire) ci-dessous. Un point dans ce triangle représente une telle loterie.





Q 2.3.1 Représenter les loteries L_1,L_2 et δ_5 dans le triangle de Marschak-Machina pour $Z_1 = 0, Z_2 = 5, Z_3 = 15$ puis pour pour $Z_1 = 0, Z_2 = 15, Z_3 = 5$.

Q 2.3.2 Quelle forme prennent les courbes d'indifférence dans cette représentation ?

Q 2.3.3 Utiliser cette propriété pour montrer à nouveau le résultat de la question 2.1.

Exercice 3 (6 pts) – PL mono et bi-critère

Un exploitant agricole possède deux fermes F_1 et F_2 où il cultive le maïs et le blé tendre. Les terres cultivables sont de 40 hectares dans chacune des deux fermes, mais la nature du sol étant différente, elle induisent des coûts de production et des rendements différents qui sont donnés dans le tableau suivant :

	F_1	F_2
Rendement du maïs (tonnes/hectares)	10	9
Coût de production du maïs (euros/hectares)	1 200	1 100
Rendement du blé tendre (tonnes/hectares)	8	11
Coût de production du blé tendre (euros/hectares)	1 100	1 000

Les terres de chaque ferme doivent être *intégralement exploitées* en cultivant du maïs ou du blé tendre ou une combinaison des deux (dans ce cas, une partie du champs est consacrée au maïs, l'autre au blé tendre).
On dispose d'un budget de 90 000 euros. On souhaite alors déterminer un plan d'exploitation des sols qui, sans dépasser le budget, maximise la quantité de maïs et de blé produite.

Q 3.1 Dans un premier temps, on s'intéresse simplement à maximiser la quantité totale de céréales produite (maïs + blé tendre). Modéliser ce problème comme un programme linéaire (on prendra soin de spécifier précisément les variables de décision et leur signification, les contraintes du problème et la fonction objectif) et faire une résolution graphique du problème.

Q 3.2 Pour pouvoir contrôler la production de maïs et de blé tendre plutôt que la production totale de céréales, on considère un premier objectif qui consiste à maximiser la quantité z_1 de maïs produite et un deuxième objectif qui consiste à maximiser la quantité z_2 de blé tendre produite, toujours en respectant la contrainte budgétaire. Après avoir modélisé ce problème comme un programme linéaire bi-critère, représenter les solutions réalisables dans l'espace des critères. Déterminer alors les solutions Pareto-optimales du problème.

Q 3.3 On souhaite déterminer maintenant la solution qui maximise $z_3 = \min\{z_1, z_2\}$ sous les mêmes contraintes que précédemment. Déterminer les coordonnées du point optimal dans l'espace des critères pour ce problème (on pourra s'aider du graphique fait à la question précédente). En déduire le plan optimal d'exploitation des sols pour ce problème.

Q 3.4 Déterminer z_1^*, la quantité maximale de maïs que l'on peut produire sans dépasser le budget, puis z_2^* la quantité maximale de blé dur que l'on peut produire sans dépasser le budget. Pour chaque fonction objectif z_i $(i = 1, 2)$, on définit la fonction "regret" $r_i = z_i^* - z_i$. On s'intéresse alors maintenant au problème qui consiste à minimiser $\max\{r_1, r_2\}$ (la somme des regrets) sous les mêmes contraintes que précédemment. En vous aidant d'une résolution graphique, déterminer les coordonnées du point optimal dans l'espace des critères pour ce nouveau problème. En déduire le plan optimal d'exploitation des sols pour ce problème.

Exercice 4 (6 points) – **Arbres de décision**

Dans tout l'exercice, le décideur utilise le critère de maximisation des gains.

Ce décideur doit prendre une décision $D \in \{d_1, d_2, d_3\}$. Après qu'il ait effectué son choix entre d_1, d_2 et d_3, un évènement $Y \in \{y, \overline{y}\}$ ($p(y) = p(\overline{y}) = \frac{1}{2}$) peut se produire. En fonction de sa décision et de Y , le décideur s'attend à obtenir les gains $g(D, Y)$ suivants :

$g(D, Y)$	y	$\overline{y}$
d_1	10	0
d_2	8	4
d_3	5	6

Cet exercice étudie les stratégies du décideur pour ce problème dans 3 cas : sans information, avec contrôle et avec information parfaite.

Q 4.1 Résolution sans information

On considère ici que le décideur n'a comme information que la description du problème donnée ci-dessus.

Q 4.1.1 Représenter ce problème sous la forme d'un arbre de décision. On note le gain moyen obtenu avec cette stratégie optimale : VE_{si} (valeur espérée sans information). Donner la stratégie optimale et VE_{si}.

Q 4.1.2 En supposant que les paramètres $p(Y)$ et $g(D, Y)$ ne sont pas fixés, quelle est l'équation donnant VE_{si} en fonction de ces $p(Y)$ et $g(D, Y)$?

Q 4.2 Résolution avec contrôle

On suppose maintenant que, pour un coût x, le décideur choisit la valeur que va prendre Y (il "contrôle" la Nature). Il peut prendre alors la décision D en conséquence.

Q 4.2.1 Représenter ce nouveau problème sous la forme d'un arbre de décision. On note le gain moyen obtenu avec cette stratégie optimale $VE_c(x)$ (valeur espérée avec contrôle). donner la stratégie optimale et $VE_c(x)$. La stratégie optimale dépend-elle de x ? Pourquoi ?

Q 4.2.2 Quelle est l'équation donnant $VE_c(x)$ en fonction des $g(D, Y)$ et de x ? Montrer que $x = VE_c(0) - VE_c(x)$.

Q 4.2.3 On note x_c^* la somme maximale que le décideur sera prêt à payer pour avoir ce contrôle de la Nature. Quelle équation lie $VE_c(x_c^*)$ et VE_{si} ? En déduire une formule pour x_c^* en fonction de $VE_c(0)$ et VE_{si}. Donner la valeur de x_c^* pour ce problème.

Q 4.3 Résolution avec information parfaite

Le décideur demande maintenant à un expert de lui donner son avis pour un coût de x. L'expert lui répond $E \in \{e, \overline{e}\}$ qui permet de connaître avec certitude si y ou $\overline{y}$ vont se réaliser (information parfaite : $e \Rightarrow y$ et $\overline{e} \Rightarrow \overline{y}$). Le décideur peut ensuite prendre sa décision D en conséquence.

Q 4.3.1 Calculer la valeur de $p(e)$ et de $p(\overline{e})$ (en utilisant par exemple les probabilités conditionnelles $p(E|Y)$). Représenter ce problème sous la forme d'un arbre de décision. On note le gain moyen obtenu avec cette stratégie optimale $VE_{ip}(x)$ (valeur espérée avec information parfaite). Donner la stratégie optimale et $VE_{ip}(x)$. Cette stratégie optimale dépend-elle de x ? Pourquoi ?

Q 4.3.2 Quelle est l'équation donnant $VE_{ip}(x)$ en fonction des $p(Y)$, $g(D, Y)$ Montrer que $x = VE_{ip}(0) - VE_{ip}(x)$.

Q 4.3.3 On note x^*_{ip} la somme maximale que le décideur sera prêt à payer pour avoir accès aux réponses de cet expert. Quelle équation lie $VE_{ip}(x^*_{ip})$ et VE_{si} ? En déduire une formule pour x^*_{ip} en fonction de $VE_{ip}(0)$ et VE_{si}. Donner la valeur de x^*_{ip} pour ce problème.

Q 4.4 Représenter l'ensemble des valeurs et des fonctions de cet exercice sur un graphique où l'axe des abscisses est l'axe des sommes (x) et l'axe des ordonnées est l'axe des gains.