Quelques exercices corrigés

Il est important de noter que les corrections proposées dans cette série d'exercices sont plus des guides et des résultats attendus que des corrections complètes.

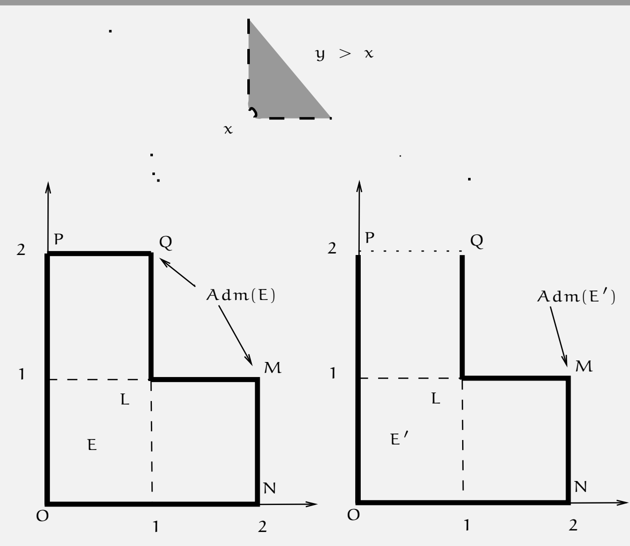
Exercice 1 –

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$, l'ensemble constitué du polygone de sommets $L = (1,1)$; $M = (2,1)$; $N = (2,0)$; $O = (0,0)$; $P = (0,2)$ et $Q = (1,2)$ et de son intérieur.

Q 1.1 - On considère l'ordre naturel $\geq$:

$$x = (x_1, x_2) \geq y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

(i) Quel est l'ensemble, $Adm(E)$, des admissibles dans E ? Est-il complet dans E ?
(ii) Quel est l'ensemble, $Adm(E')$, des admissibles dans $E' = E \setminus [P, Q]$, où $[P, Q]$ désigne le segment d'extrémités P et Q ? Est-il complet dans E' ?



Admissibles pour $\geq$ dans E et E'

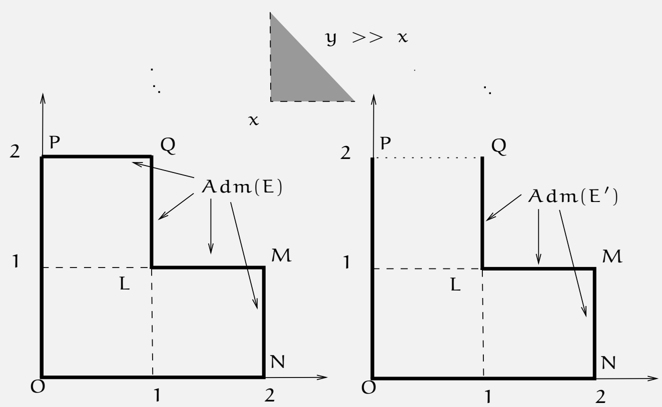
La partie asymétrique de l'ordre $\geq$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ordre strict $>$

$$x > y \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2 \text{ ET } x \neq y]$$

(*i*) $AdmE = \{Q, M\}$ qui est complet dans E.
(*ii*) $Adm(E') = \{M\}$, qui n'est pas complet dans E' : NON $M > (1, 3/2)$

Q 1.2 - Mêmes questions (*i*) et (*ii*) qu'au 1), mais pour la relation $\succsim$ définie par

$$x \succsim y \Leftrightarrow x = y \text{ OU } [x_1 > y_1 \text{ET } x_2 > y_2]$$



admissibles pour $\succsim$ *dans* E *et* E'

La partie asymétrique de l'ordre $\succsim$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ordre strict $>>$

$$x >> y \;\Leftrightarrow [x_1 > y_1 \text{ET } x_2 > y_2\,]$$

(*i*)$\mathrm{Adm}E$ est constitué de la ligne brisée $PQLMN$ et est complet dans E.
(*ii*)$\mathrm{Adm}(E')$ est constitué de la ligne brisée $QLMN$, Q exclu, et est complet dans E'.

Exercice 2 –

Soit la relation $\succsim$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par

$$x = (x_1, x_2) \succsim y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} \geq \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2$$

(i) Montrer que $\succsim$ est un préordre total ? est-ce un ordre ?
(ii) Trouver une fonction d'utilité, u, représentant $\succsim$.

On peut ré-écrire la définition de $\succsim$ comme

$$x = (x_1, x_2) \succsim y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow {x_1}^2.x_2 \;\geq\; {y_1}^2.y_2$$

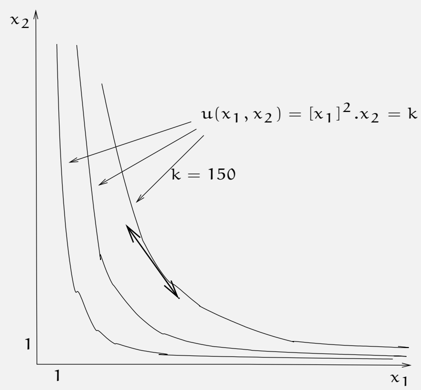
ce qui montre à la fois que $u(x) = u(x_1, x_2) = {x_1}^2.x_2$ est une fonction d'utilité représentant $\succsim$ et que $\succsim$ est un préordre total.
ce n'est pas un ordre puisque $u(x) = u(y)$ n'implique pas $x = y$ (par exemple, prendre $x = (2, 1)$, $y = (1, 4)$).

(iii) La fonction v définie par $v(x) = 2\ln x_1 + \ln x_2$ est-elle une fonction d'utilité ?

La fonction v définie par $v(x) = 2\ln x_1 + \ln x_2$ est une fonction d'utilité puisque $v = \ln \circ u$

(iv) Représenter graphiquement quelques courbes d'indifférence.

Les courbes d'indifférence sont les graphes des fonctions $x_2 = \frac{k}{{x_1}^2}$.



courbes d'indifférence

Exercice 3 – Paradoxe de Saint-Petersbourg

Un casino vous propose le jeu suivant[1]. Une pièce de monnaie non truquée ($\Pr(\mathrm{Pile}) = \Pr(\mathrm{Face}) = \frac{1}{2}$) va être lancée autant de fois que nécessaire ; les tirages sont supposés indépendants. Si Face sort au 1^{er} lancer, le casino vous verse 2€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 2^e lancer ; si Face sort à ce 2^e lancer, le casino vous verse $2^2 = 4$€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 3^e lancer ; etc. : la règle est que le jeu s'arrête au n^e lancer si Face y sort pour la première fois et que vous recevez alors 2^n€ .
Pour prendre part au jeu on vous demande de miser une somme de M€ .

a) Pour quelles valeurs de M accepteriez-vous de miser ? (*réponse personnelle*)

La plupart des gens n'accepteraient pas de miser plus de quelques € pour avoir le droit de jouer. Sans doute parce qu'ils sont conscients de ce qu'ils ont une probabilité $\frac{3}{4}$ de ne pas gagner plus de 4, $\frac{7}{8}$ de ne pas gagner plus de 8, etc.

b) Que valent vos espérances de gain (EG) brut et net (pour une mise de M€) à ce jeu.

Espérance de gain brut (EGb) :
$\mathrm{EGb} = \frac{1}{2}2^1 + \frac{1}{2^2}2^2 + \frac{1}{2^3}2^3 + \cdots + \frac{1}{2^n}2^n + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$;
Espérance de gain net (EGn)
$\mathrm{EGn} = \frac{1}{2}[2^1 - M] + \frac{1}{2^2}[2^2 - M] + \frac{1}{2^3}[2^3 - M] + \cdots + \frac{1}{2^n}[2^n - M] + \cdots = -M + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$.
(N.B. En CdP, on dirait que les lois des gains bruts et nets n'ont pas d'espérances mathématiques)

c) Supposons que vous ayez la possibilité de jouer *pour une mise nulle*. Quel serait pour vous l'équivalent-certain du jeu, c.-à-d. la somme certaine $\bar{c}$ qu'il faudrait vous proposer, au moins, pour que vous renonciez à jouer ? (*réponse personnelle*)
M du (a) et $\bar{c}$ sont-ils du même ordre de grandeur ?

1. dû à Nicolas Bernoulli en 1713 ; Daniel Bernoulli, son neveu, en proposa une solution en 1738

La plupart des gens annoncent un équivalent-certain du jeu, $\bar{c}$, du même ordre de grandeur que ce qu'ils miseraient au (a), pour les mêmes raisons.

Si, comme N.Bernoulli, on pense que le seul critère fondé est celui de l'espérance de gain, on trouve paradoxal qu'un jeu d'espérance infinie ait un équivalent-certain si faible.

d) Selon D.Bernoulli, votre critère pour des gains $x > 0$ est en fait l'espérance d'utilité, avec pour fonction d'utilité ("de vNM", mais c'est un anachronisme!) $u(x) = \log_2(x)$.
Utilisant le fait que : $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4$,
montrer que $\bar{c} = 4$.

Le critère EU avec pour fonction d'utilité de vNM $u(x) = \log_2(x)$, donne pour équivalent-certain du jeu, $\bar{c}$ tel que $u(\bar{c})$ =EU du jeu, c.-à-d. :
$\log_2(\bar{c}) = \frac{1}{2}\log_2(2^1) + \frac{1}{2^2}\log_2(2^2) + \frac{1}{2^3}\log_2(2^3) + \cdots + \frac{1}{2^n}\log_2(2^n) + \cdots =$
$\frac{1}{2}[1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots] = \frac{4}{2} = 2$;
d'où, $\bar{c} = 4$.

Exercice 4 – Paradoxe d'Allais

On demande aux sujets d'une expérience sur les préférences dans le risque ce qu'ils choisiraient entre les deux propositions suivantes :

A : *gagner* $10\,000$€ *avec certitude* ;

B : *gagner* $50\,000$€ *avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{1}{11}$.

C : *gagner* $10\,000$€ *avec probabilité* $\frac{11}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{89}{100}$;

D : *gagner* $50\,000$€ *avec probabilité* $\frac{10}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{90}{100}$.

(a) Que choisiriez-vous entre A et B ? entre C et D ?

Réponses durant le cours :
AC : 0
AD : 20
BC : 1
BD : 15

(b) On note P' la *perspective aléatoire*, ou *loterie* (lois de probabilités sur les gains) offerte par la proposition A et P'' celle offerte par la proposition B ; on note Q la loi (presque) certaine en 0€. exprimer les perspectives aléatoires offertes par les propositions C et D comme mixages de P', P'' et Q.

Les perspectives aléatoires, ou loteries (lois de probabilités sur les gains) offertes par les diverses propositions sont les suivantes :
$A \longmapsto P' = \delta_{10\,000}$;
$B \longmapsto P'' = \frac{10}{11}\delta_{50\,000} + \frac{1}{11}\delta_0 = \frac{10}{11}\delta_{50\,000} + \frac{1}{11}Q$;
$C \longmapsto R' = \frac{11}{100}\delta_{10\,000} + \frac{89}{100}\delta_0 = \frac{11}{100}P' + \frac{89}{100}Q$;

$D \longmapsto R'' = \frac{10}{100}\delta_{50\,000} + \frac{90}{100}\delta_0 = \frac{11}{100}[\frac{10}{11}\delta_{50\,000} + \frac{1}{11}\delta_0] + \frac{89}{100}\delta_0] = \frac{11}{100}P'' + \frac{89}{100}Q.$

(c) Qu'exigerait le respect de l'axiome d'indépendance de la théorie de vNM ? Vos choix le respectent-ils ? Si ce n'est pas le cas essayez d'analyser les raisons de vos choix.

> L'axiome d'indépendance de vNM exige que :
> $\frac{11}{100}P' + \frac{89}{100}Q \succsim \frac{11}{100}P'' + \frac{89}{100}Q \Leftrightarrow P' \succsim P''$ et
>
> $\frac{11}{100}P' + \frac{89}{100}Q \succ \frac{11}{100}P'' + \frac{89}{100}Q \Leftrightarrow P' \succ P''.$
>
> Donc : C choisi si A l'est ; D choisi si B l'est.
>
> Des choix fréquemment observés qui ne respectent pas l'axiome sont : A et D. Une explication souvent donnée par ceux qui font ces choix correspond à un *effet de certitude* (Kahneman et Tversky) : Le gain minimum assuré par A est supérieur à celui de B, avantage que ne possède pas C par rapport à D, puisqu'avec les deux on peut ne rien gagner. On peut dire aussi que le critère MAXIMIN combine chez eux ses effets à ceux du critère EU.

Exercice 5 – Loteries et utilités

L'ensemble des résultats (gains) est un intervalle borné $[0, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$; Les décisions engendrent toutes des loteries (lois de probabilité à support fini) sur $\mathcal{C}$. Les préférences $\succsim$ du décideur sont représentables par la fonction d'utilité V définie par :

$$P, \text{ loterie de support}\{c_i,\ i \in I(P)\} \mapsto V(P) = \prod_{i \in I(P)} [c_i^2]^{P(c_i)}$$

Q 5.1 -

(a) Montrez, à l'aide d'un exemple utilisant des loteries simples que V n'est pas une fonction d'utilité linéaire.

> V n'est pas une fonction d'utilité linéaire ; contre-exemple :
> $V(\delta_1) = 1$; $V(\delta_2) = 4$; $V(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2) = 2 \neq \frac{1}{2}V(\delta_1) + \frac{1}{2}V(\delta_2) = \frac{5}{2}$.

(b) $W = \ln \circ V$ est-elle une fonction d'utilité ? Est-elle une fonction d'utilité linéaire ?

> $W = \ln \circ V$ est encore une fonction d'utilité puisque la fonction ln est strictement croissante. C'est de plus une fonction d'utilité linéaire, car
>
> $W(P) = \ln(V(P)) = \sum_{i \in I(P)} P(c_i)[2\ln(c_i)]$;
> c'est donc une espérance d'utilité, pour la fonction d'utilité de vNM $w(c) = 2\ln c$.

(c) La fonction $u : c \mapsto \ln c$ est-elle une fonction d'utilité de vNM ? Quelle est l'attitude du décideur vis-à-vis du risque ?

> La fonction $u : c \mapsto \ln c$ est aussi une fonction d'utilité de vNM, comme transformée affine (et même linéaire) de w. Comme c'est une fonction concave, le décideur

est adversaire du risque.

Q 5.2 - Deux décideurs ayant tous deux V comme fonction d'utilité reçoivent :

- l'un un gain de 1 000€ si l'événement E_1 se produit, un gain de 3 000€ sinon ;
- l'autre un gain de 1 000€ si l'événement E_2 se produit, un gain de 3 000€ sinon.

(a) Sachant que $\Pr(E_1) = \Pr(E_2) = \frac{1}{3}$ et que $\Pr(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9}$, ont-ils intérêt à s'entendre pour que le premier verse 1 000€ au deuxième si l'événement $\bar{E}_1 \cap E_2$ est réalisé et en reçoive la même somme si $E_1 \cap \bar{E}_2$ l'est[2].

Chacun des deux a, en l'absence d'entente, une espérance d'utilité (en prenant $u = \ln$) :
$\frac{1}{3}\ln 10^3 + \frac{2}{3}\ln 3.10^3 = \ln 10^3 + \frac{2}{3}\ln 3$,
alors qu'en cas d'entente, elle vaut :
$\frac{1}{9}\ln 10^3 + \frac{4}{9}\ln 2.10^3 + \frac{4}{9}\ln 3.10^3 = \ln 10^3 + \frac{4}{9}(\ln 2 + \ln 3)$
L'entente est intéressante puisque :
$\frac{4}{9}(\ln 2 + \ln 3) = \frac{4}{9}\ln 6 > \frac{2}{3}\ln 3 \Leftrightarrow 2\ln 6 > 3\ln 3 \Leftrightarrow 36 > 27$.

(b) Quel principe général, lié à l'attitude des décideurs vis-à-vis du risque, ceci illustre-t-il ?

C'est le principe des mutuelles d'assurance. Leur existence vient de ce qu'il y a de nombreux adversaires du risque.

2. on note $\bar{E}$ le complémentaire de E.