Décisions et Jeux

Théorie des Jeux – Stratégies mixtes, Forme séquentielle

Pierre-Henri WUILLEMIN

LIP6
pierre-henri.wuillemin@lip6.fr

moodle https://moodle-sciences.upmc.fr/moodle-2021/course/view.php?id=5399
mattermost https://channel.lip6.fr/etudmasterandro/channels/coursdj22fev

Stratégies des joueurs dans un Jeu à Somme Nulle

- Pour le joueur des lignes :
  - Gain minimum assuré par la stratégie i_0 : $\min_{j=1}^{n} g_{(i_0,j)}$
  - Une pratique prudente consistera à s'assurer le gain minimum le plus grand possible :

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)}$$: Critère MaxiMin

- Pour le joueur des colonnes :
  - Perte maximum provoquée par la stratégie j_0 : $\max_{i=1}^{m} g_{(i,j_0)}$
  - Une pratique prudente consistera à s'assurer la perte maximum la plus petite possible :
    $\min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)}$: Critère MiniMax

Théorème (MiniMax v1.0)

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)}$$

MiniMax v1.0

Théorème (MiniMax v1.0)

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)}$$

Démonstration :

- $\forall i,\ \forall j',\ g_{i,j'} \geq \min_{j=1}^{n} g_{i,j}$
- Prenant les maximums en i des deux côtés, on obtient : $\forall j',\ \max_{i=1}^{m} g_{i,j'} \geq \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j}$
- Puisque le membre de droite est une constante : $\min_{j'=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{i,j'} \geq \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{i,j}$ ∎

Limites du MiniMax 1.0

Soit le jeu Pierre, Puits, Papier, Ciseau

	Pierre	*Puits*	*Ciseaux*	*Papier*
Pierre	0	-1	1	-1
Puits	1	0	1	-1
Ciseaux	-1	-1	0	1
Papier	1	1	-1	0

- $MaxMin = -1$ (pour toute les lignes)
- $MinMax = 1$ (pour toutes les colonnes)

Peut-on faire mieux que dire qu'il n'y a pas de bonne stratégie ?

stratégies pures, stratégies mixtes

Une stratégie (pure) consiste à proposer le 'meilleur coup possible'. Von Neumann a eu l'idée de chercher si les joueurs pouvaient obtenir plus en espérance mathématique, en jouant de façon aléatoire. On parle alors de stratégie mixte, distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies.

Soit $p = (p^i)_1^m$ la distribution de probabilité du joueur des lignes et $q = (q_j)_1^n$.
Les joueurs jouent de manière indépendante et donc :

$$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}, P(i, j) = p^i \cdot q_j$$

L'espérance mathématique de gain du joueur des lignes (et de perte du joueur des colonnes) peut alors s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(i, j) \cdot g_{(i,j)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p^i \cdot g_{(i,j)} \cdot q_j = p \cdot G \cdot q$$

avec $p \in \mathcal{P} = {}^{\tau}\mathcal{S}_m$ **vecteur ligne** et $q \in \mathcal{Q} = \mathcal{S}_n$ **vecteur colonne**.

On remarque qu'une stratégie pure peut s'écrire comme une stratégie mixte 'dégénérée' où l'une des probabilités est égale à 1.
On appelle extension mixte le jeu où les joueurs choisissent une distribution de probabilité plutôt qu'un coup à jouer.

Équilibres de Nash

Équilibre de Nash en stratégie mixte

Un équilibre de Nash en stratégie mixte est un équilibre de Nash dans l'extension mixte d'un jeu :

$$(p^*, q^*) \quad \text{telles que} \quad \forall q, p^* \cdot G \cdot q^* \geq p^* \cdot G \cdot q$$
$$\text{et} \quad \forall p, p^* \cdot G \cdot q^* \geq p \cdot G \cdot q^*$$

L'ensemble des équilibres de Nash en stratégie pure est un sous-ensemble des équilibres de Nash en stratégie mixte.

Théorème de Nash

Tout jeu à somme nulle possède au moins un équilibre de Nash en stratégie mixte.

Exemple

Soit n témoins à un crime. Chacun peut appeler (A) ou ne pas appeler (N) la police. Chacun accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c si il doit l'appeler lui-même.
On suppose $v > c > 0$

- Équilibres de Nash en stratégie pure : exactement 1 joueur appelle la police.
  $\Rightarrow$ équilibre asymétrique, impossible sans communication (coordination).

- Équilibres symétrique de Nash en stratégie mixte.Une loi p pour tous les joueurs vérifiant : chaque joueur est indifférent entre A et N.
  Si $A \Rightarrow v - c$
  Si $N \Rightarrow P(\text{pas d'appel}) \cdot 0 + P(\text{au moins 1 appel}) \cdot v$

En notant q la probabilité d'appel :

$$v - c = v \cdot \left(1 - (1-q)^{n-1}\right) \text{ soit } q = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

- Probabilité qu'une personne donnée appelle : $q = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ décroit avec n !
- Probabilité qu'au moins une personne appelle : $1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ décroit avec n !

MiniMax en stratégies mixtes

Définition (Critères MiniMax et MaxiMin)

Nous avons appelés MaxiMin *et* MiniMax *en stratégies pures :*

- MaxiMin : $\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)}$
- MiniMax : $\min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)}$

Nous appellerons MaxiMin *et* MiniMax *en stratégies mixtes :*

- MaxiMin : $\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p \cdot G \cdot q$
- MiniMax : $\min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p \cdot G \cdot q$

Théorème (MiniMax – von Neumann)

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in \mathcal{Q}} p \cdot G \cdot q = \min_{q \in \mathcal{Q}} \max_{p \in \mathcal{P}} p \cdot G \cdot q$$

On appelle cette valeur la valeur du jeu.

Jeux symétriques

Définition (Jeu symétrique)

Un jeu est dit symétrique si c'est un jeu à somme nulle dont la matrice de gain G est antisymétrique : $\forall i, j, g_{(i,j)} = -g_{(j,i)}$.

Propriétés

- La stratégie (mixte) optimale est la même pour les 2 joueurs.
- La valeur d'un jeu symétrique est forcément nulle.
- La stratégie optimale est un vecteur q vérifiant :

$$\begin{cases} G \cdot q \leq 0 \\ \\ {}^{\tau}\mathbf{1} \cdot q = 1 \\ q \geq 0 \end{cases}$$

- La stratégie optimale du joueur des lignes est $p = {}^{\tau}q$.

Jeu symétrique : Pierre, Papier, Ciseau, Puits

	Pierre	*Puits*	*Ciseaux*	*Papier*
Pierre	0	−1	1	−1
Puits	1	0	1	−1
Ciseaux	−1	−1	0	1
Papier	1	1	−1	0

Pour ${}^{\tau}q = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$

$$\begin{cases} & -\beta & +\gamma & -\delta & \leq & 0 \\ \alpha & & +\gamma & -\delta & \leq & 0 \\ -\,\alpha & -\beta & & +\delta & \leq & 0 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & & \leq & 0 \\ \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & 1 \\ \alpha \geq 0\,; & \beta \geq 0\,; & \gamma \geq 0\,; & \delta \geq 0 & & \end{cases}$$

On montre que $\alpha = 0$ puis que $\beta = \gamma = \delta$; d'où $\alpha = 0\,;\ \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{3}$.

Jeu sous forme extensive

Définition (Arbre de jeu, profondeur)

Un arbre de jeu est un arbre de décision dans lequel

- *les noeuds de décision peuvent représenter une décision d'un des joueurs.*
- *les noeuds terminaux (f) sont associés au vecteur des paiements résultants $u(f) = \left(u^1(f) \cdots, u^n(f)\right)$.*

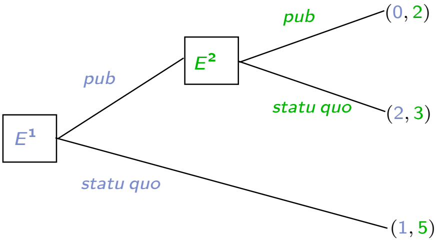
La profondeur d'un sommet est la longueur du chemin de la racine à ce sommet.

La profondeur de l'arbre est le maximum des profondeurs d'un sommet dans l'arbre.

- Pour les jeux en environnement incertain, les *sommets d'information* sont associés à un joueur fictif, la Nature ; chacun des arcs issus de ce sommet correspond à la réalisation d'un événement $E_k \in \mathcal{E}$; la Nature choisissant E_k avec une certaine probabilité p_k.
- Un graphe étant fini, on ne peut représenter ainsi que les jeux à nombre fini de joueurs, ayant un nombre fini de choix à faire entre chaque fois un nombre fini d'actions et où n'interviennent qu'un nombre fini d'événements : jeu fini.
- Les jeux séquentiels se décrivent naturellement sous la forme d'arbre de jeu.

Forme extensive : exemple

Deux entreprises E^1 et E^2 sont en duopole sur un produit et font des bénéfices respectifs $(1, 5)$; E^1 peut ou non lancer une campagne publicitaire pour agrandir sa part de marché, ce qui réussira si E^2 ne réagit pas et les amènera alors à $(2, 3)$; en revanche, si E^2 réagit en lançant sa propre campagne, les bénéfices deviendront $(0, 2)$.



Forme normale :

$E^1 \setminus E^2$	*pub*	*statu quo*
pub	$(0, 2)$	$(2, 3)$
statu quo	$(1, 5)$	$(1, 5)$

Équilibres de Nash : (*pub*, *statu quo*) et (*statu quo*, *pub*).

- En raisonnant sur la forme extensive : si E^1 choisit *pub*,E^2 jouera *statu quo* qui lui rapporte alors à coup sûr plus que *pub* ; le prévoyant, E^1 doit préférer *pub* à *statu quo*.

- En raisonnant sur la forme normale : que E^2 ne jouera pas *pub*, dominée par *statu quo*, mais cette dominance n'étant pas stricte, la conclusion resterait douteuse.

Ensemble d'informations

Dans le cadre de jeu à information imparfaite, la forme extensive doit prendre en compte que le joueur ne connaît pas exactement le nœud dans lequel il se trouve.

Définition (Ensemble d'informations)

Un ensemble d'informations est un ensemble de nœuds d'un arbre de jeu que l'un des joueurs ne peut pas distinguer, compte-tenu de l'information qu'il dispose au moment de cette décision.

On peut redéfinir un jeu à information parfaite comme étant un jeu où tout ensemble d'informations est un singleton.

Définition (Information imparfaite symétrique)

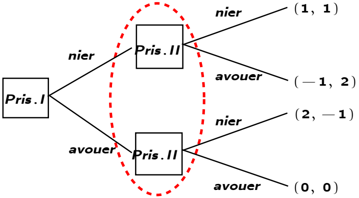
Un jeu est à information imparfaite symétrique lorsque chaque joueur en sait au moins autant que les autres au moment où il joue.

Les ensembles de décision permettent une certaine liberté : la séquence de l'arbre du jeu peut ne pas coïncider parfaitement avec son déroulement chronologique réel.

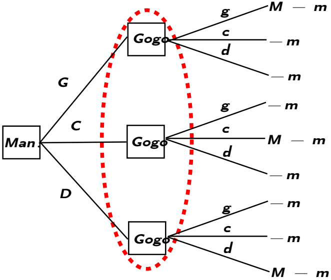
Un jeu peut être représenté par différents arbres de jeu.

Ensemble d'informations : exemples

1. Le dilemme des prisonniers : Les deux joueurs jouent simultanément ; c'est un jeu à information imparfaite.



2. Le jeu du Bonneteau : Le Manipulateur place une bille sous l'une de 3 coupes renversées : $G(auche)$, $C(entre)$ ou $D(roite)$; le Gogo mise m€, choisit une des coupes et gagne M€ s'il gagne.



Stratégies en forme extensive

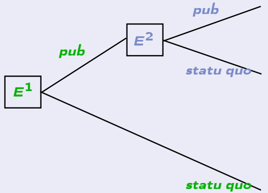
Définition (Stratégie)

Une stratégie du joueur i est une régle sélectionnant une action parmi les actions réalisables en chacun des ensembles d'informations qui lui sont associés.

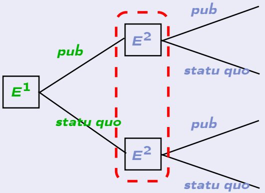
- Dans les jeux à information parfaite, une stratégie correspond à une action par nœud de décision.
- Un profil de stratégies consiste en la donnée d'une stratégie a^i pour chaque joueur i et est donc représenté par une suite $a = (a^1, .., a^i, ..a^n)$.
- Dans un jeu en environnement certain, un profil de stratégies a détermine complétement le déroulement du jeu ; il sélectionne un chemin de la racine vers l'une des feuilles f (la trajectoire du jeu). Les paiements sont alors eux-méme déterminés et valent :
$U(a) = (U^1(a), .., U^i(a), .., U^n(a)) = u(f) = (u^1(f), .., u^i(f), .., u^n(f))$.
- Dans un jeu en environnement incertain, le déroulement du jeu dépend conjointement des stratégies des joueurs et des événement réalisés ; la trajectoire est alors aléatoire.
- Un profil de stratégie a donne alors au joueur i une espérance d'utilité :

$$U^i(a) = \sum_f P_a(f)\, u^i(f)$$

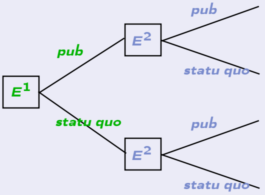
Ensembles d'informations et formes normales



$E^2 \setminus E^1$	pub	statu quo
pub	$(.,.)$	$(.,.)$
statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$



$E^2 \setminus E^1$	pub	statu quo
pub	$(.,.)$	$(.,.)$
statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$



$E^2 \setminus E^1$	pub	statu quo
pub|pub , pub|statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$
pub|pub , statu quo|statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$
statu quo|pub , pub|statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$
statu quo|pub , statu quo|statu quo	$(.,.)$	$(.,.)$

Résolution d'un jeu à information parfaite sous forme extensive

Définition (Solution du jeu)

*Une solution du jeu sous forme extensive est obtenue par **induction arrière** suivante les même règles que pour un arbre de décision normal :*

1. *Toute feuille contenant un résultat c est évalué à $u(c) = \left(u^1(c), \cdots, u^n(c)\right)$.*
2. *Tout nœud de chance dont tous les enfants ont été évalués peut être évalué par l'espérance des évaluations des enfants, en fonction de la distribution du nœud.*
3. *Tout nœud de décision du joueur i dont tous les enfants ont été évalués peut être évalué par la valeur maximale des évaluations des enfants pour i : $u^i(.)$.*

- La solution du jeu n'a pas à être unique.
- Une solution du jeu est automatiquement un équilibre de Nash.

Théorème (Kuhn)

Tout jeu fini à n joueurs à information parfaite a un profil de stratégie qui est un équilibre de Nash *en stratégies pures.*

Jeu à information parfaite, à somme nulle, à 2 joueurs

Théorème (Zermelo)

Tout jeu fini à deux joueurs à information parfaite et à somme nulle a une valeur qui est obtenue par un équilibre de Nash *en stratégie pure.*

Démonstration

- Un jeu fini à deux joueurs, à information parfaite, à somme nulle sous forme extensive vérifie pour chaque feuille f : $u^1(f) + u^2(f) = 0$
- On note $a = (a^1, a^2)$ un profil de stratégies (pures),

$$\text{MiniMax v1.0} \Rightarrow \max_{a^1} \min_{a^2} U^1(a^1, a^2) \leq \min_{a^2} \max_{a^1} U^1(a^1, a^2)$$

- Kuhn $\Rightarrow \exists a_* = (a^1_*, a^2_*)$ équilibre de Nash :

$$U^1(a^1_*, a^2_*) = \max_{a^1} U^1(a^1, a^2_*) = \min_{a^2} U^1(a^1_*, a^2)$$

- On a alors :

$$\max_{a^1} \min_{a^2} U^1(a^1, a^2) \geq \min_{a^2} U^1(a^1_*, a^2) = \max_{a^1} U^1(a^1, a^2_*) \geq \min_{a^2} \max_{a^1} U^1(a^1, a^2)$$

- d'où :

$$\max_{a^1} \min_{a^2} U^1(a^1, a^2) = \min_{a^2} \max_{a^1} U^1(a^1, a^2) \, [= U^1(a^1_*, a^2_*)] \qquad \blacksquare$$

Sous-Jeu, sous-stratégie, équilibre parfait

Définition (Sous-Jeu, sous-stratégie)

On appelle sous-jeu d'un jeu donné tout jeu dont la forme extensive est un sous-arbre de l'arbre de ce jeu.
Une sous-stratégie d'une stratégie (pure) S est la stratégie induite par S dans un des sous-jeux.

- Chaque sous-jeu a ses propres équilibres de Nash.
- Soit S un équilibre de Nash d'un jeu, ses sous-stratégies sont-ils nécessairement des équilibres de Nash ?
  - Sur la trajectoire engendrée par S, les sous-stratégies sont forcément des équilibres de Nash : toute déviation bénéfique dans le sous-jeu serait bénéfique dans le jeu.
  - Hors de la trajectoire engendrée, on ne peut rien dire.
- Il y a donc des équilibres de Nash *robustes* aux perturbations qui peuvent se produire et d'autres qui ne le sont pas.

Définition (Équilibre de Nash parfait en sous-jeu)

Un équilibre de Nash *est dit parfait (en sous-jeux) lorsque toutes ses sous-stratégies sont des équilibres de* Nash.

Le Venezuela menace de priver les Etats-Unis de pétrole, mais est jugé peu crédible

20minutes.fr

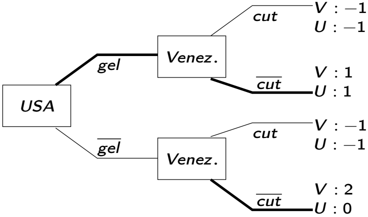
Le Venezuela a de nouveau menacé de priver de pétrole les Etats-Unis, en représailles au contentieux soulevé par ExxonMobil, mais cette mesure, dont pâtirait davantage le pays latino-américain, n'a guère de chance d'être appliquée, selon les experts.

Le président vénézuélien Hugo Chavez a récemment averti qu'il pourrait "ne plus envoyer une goutte de pétrole vers l'empire des Etats-Unis", en réaction au possible gel mondial des actifs de la compagnie nationale PDVSA.
Or, au delà des joutes verbales, les Etats-Unis constituent le premier client du Venezuela, qui lui vend la moitié de sa production (3,2 millions de barils quotidiens selon les données officielles), alors que le pétrole vénézuélien ne représente qu'environ 10% des importations américaines.

L'économie américaine a d'ailleurs déjà affronté cette situation lors de la grande grève déclenchée contre le régime de Chavez qui paralysa le secteur pétrolier entre décembre 2002 et janvier 2003, signale Elio Ohep, responsable de la revue spécialisée, PetroleumWorld, dans un entretien à l'AFP.

"Les grands fournisseurs des Etats-Unis, Mexico et le Canada, qui ont remplacé le Venezuela durant la grève pétrolière, prendrait le relais immédiatement", affirme-t-il.

- Décisions pour USA : $\{\, gel, \overline{gel} \,\}$.
- Décisions pour Venezuela : $\{\, cut, \overline{cut} \,\}$.



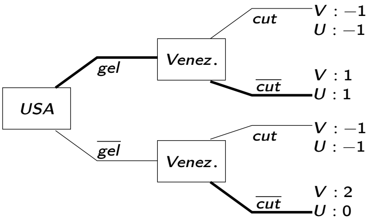
Stratégies

- pour USA : $\{\, gel, \overline{gel} \,\}$.
- pour Venezuela : $\{cc, c\bar{c}, \bar{c}c, \bar{c}\,\bar{c}\}$.

Forme normale :

	gel	$\overline{gel}$
cc	$(-1, -1)$	$(-1, -1)$
$c\bar{c}$	$(-1, -1)$	$(2, 0)$
$\bar{c}c$	$(1, 1)$	$(-1, -1)$
$\bar{c}\,\bar{c}$	$(1, 1)$	$(2, 0)$

Jeu fini à 2 joueurs, à information parfaite.



	gel	$\overline{gel}$
cc	$(-1, -1)$	$(-1, -1)$
$c\bar{c}$	$(-1, -1)$	$(2, 0)$
$\bar{c}c$	$(1, 1)$	$(-1, -1)$
$\bar{c}\,\bar{c}$	$(1, 1)$	$(2, 0)$

- *USA* n'a pas de stratégie dominante.
- *Venezuela* a une stratégie faiblement dominante : $\bar{c}\,\bar{c}$.
- La meilleure réponse de *USA* face à cette stratégie est *gel*.
- Stratégie complète : $(\bar{c}\,\bar{c}, gel)$ (idem forme extensive).
- C'est un équilibre de Nash.
- Ce n'est pas le seul : $(c\bar{c}, \overline{gel})$ et $(\bar{c}c, gel)$ sont aussi des équilibres de Nash.
- On ne peut donc pas prédire précisément l'issue du jeu. Il faut discriminer parmi ces équilibres de Nash et d'affiner nos prédictions.

- Les équilibres $(c\bar{c}, \overline{gel})$ et $(\bar{c}c, gel)$ sont soutenues par la menace de c. Alors que le choix de *Venezuela* sera toujours $\bar{c}$, quelque soit le coup de *USA* : c'est une menace non crédible.
- Un équilibre parfait en sous-jeux permet d'éviter ce type d'équilibre basés sur des actions qui ne seront jamais adoptées.
- L'induction arrière permet d'obtenir un équilibre parfait en sous-jeux.