Décisions et Jeux

Théorie des Jeux : introduction, forme normale

Pierre-Henri WUILLEMIN

LIP6
pierre-henri.wuillemin@lip6.fr

moodle https://moodle-sciences-22.sorbonne-universite.fr/course/view.php?id=4521
mattermost https://channel.lip6.fr/etudmasterandro/channels/coursdj23fev

Théorie des Jeux

Définition (Théorie des Jeux)

La théorie des jeux étudie des situations (les jeux) où des agents (les joueurs) ont à choisir des stratégies et obtiendront chacun un résultat (paiement, gain) qui dépendra des stratégies jouées par l'ensemble des joueurs.
Une stratégie peut se réduire à une décision élémentaire, mais peut aussi consister en un plan d'action complexe.
Un jeu est non-coopératif lorsque les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu les uns des autres.
La théorie des jeux coopératifs étudie au contraire les avantages que peuvent tirer les joueurs de la possibilité de former entre eux des coalitions.

La théorie des jeux fournit un ensemble d'outils analytiques développés pour faciliter la compréhension des situations d'interaction entre des décideurs (agents, joueurs) supposés *rationnels*.
Nous nous placerons donc dans le cadre de maxEU pour tout calculs de préférence du joueur.

Types de jeux

Différents types

- Jeux coopératifs et non-coopératifs
- Jeux simultanés (ou stratégiques) et séquentiels

Les jeux simultanés se représenteront préférentiellement sous la forme d'un tableau dit forme normale
Les jeux séquentiels se représenteront préférentiellement sous la forme d'arbres de jeu.

Définition (Information parfaite)

Un jeu est à information parfaite si chaque joueur connaît l'ensemble des décisions passées de tous les autres joueurs.

Définition (Information incomplète)

Un jeu est à information incomplète lorsque au moins un joueur ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

Jeux non-coopératifs : la forme normale

Un jeu non-coopératif simultané est forcément à information imparfaite : Un joueur ne connaît pas le coup de ses adversaires quand il doit choisir le sien.
On supposera que notre jeu est à information complète : chaque joueur connaît le gain (utilité) de tous les joueurs, dans toutes les configurations possibles.

Définition (Forme normale)

Un jeu est présenté sous forme normale (on dit encore sous forme stratégique) lorsqu'il est défini par la donnée :

- *d'un ensemble de joueurs* $\mathcal{N} = \{1, .., i, .., n\}$ *;*
- *pour chaque joueur* i*, d'un ensemble de stratégies* $\mathcal{A}^i = \{a^i_1, .., a^i_l, .., a^i_{m^i}\}$ *;*
- *d'une fonction (vectorielle) de paiement*

$$u \left| \begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}^i & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ a = (a^1, ..a^i, ..a^n) & \longmapsto & (u^1(a), .., u^i(a), .., u^n(a)). \end{array} \right.$$

On notera $-i$ l'ensemble $\mathcal{N}\backslash\{i\}$, d'où $a^{-i} = (a^1, .., a^{i-1}, a^{i+1}, ..a^n)$, $a = (a^i, a^{-i})$, $u^{-i}(a) = (u^1(a), .., u^{i-1}(a), u^{i-1}(a), .., u^n(a))$, $u(a) = (u^i(a), u^{-i}(a))$, $\mathcal{A}^{-i} = \bigotimes_{j\neq i} \mathcal{A}^j$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^i \times \mathcal{A}^{-i}$, etc.
Cette définition peut être étendue à un nombre infini de joueurs ou de stratégies.

Forme normale pour 2 joueurs

Dans le cas de deux joueurs ($n = 2$), on peut représenter un tel jeu à l'aide de la matrice du jeu, dont les lignes et colonnes sont respectivement identifiées aux stratégies de chacun des joueurs.

Exemple : la guerre des sexes

Line et Colin veulent aller au spectacle ce soir et doivent acheter leurs billets à l'avance, chacun séparément ; ils n'ont pas la possibilité de communiquer ; ils n'aiment l'une que l'opéra,l'autre que la boxe ; enfin, leur soirée à tous deux sera gâchée s'ils ne sont pas ensemble.

Line \ Colin	opéra	boxe
opéra	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
boxe	$(-2, -2)$	$(1, 2)$

Les profils de stratégie : (opéra, opéra), (opéra, boxe), (boxe, opéra), (boxe, boxe).

Forme normale pour 2 joueurs

Exemple : le dilemme des prisonniers

Deux criminels présumés sont interrogés séparément par la police ;

- s'ils nient tous les deux ils seront condamnés à une faible peine (1 ans) faute de preuve ;
- s'ils avouent tous les deux ils seront condamnés à une peine plus forte (8 ans) ;
- si l'un des deux avoue tandis que l'autre nie, le premier n'aura qu'une peine de principe (0 an) alors que le second aura la peine maximale (10 ans).

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
Avouer	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

Que vont faire, que doivent faire, les deux prisonniers ?

Fome normale pour 3 joueurs

Soit un jeu sous forme normale à 3 joueurs :

A	*left*	*right*
top	1,2,0	2,1,1
bottom	0,1,3	1,0,4

B	*left*	*right*
top	1,1,2	2,3,4
bottom	0,0,0	1,2,2

C	*left*	*right*
top	1,0,1	5,1,2
bottom	10,6,1	8,4,3

Le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 choisit une colonne et le joueur 3 choisit une matrice

Niveaux de sécurité

Soit un jeu sous forme normale,

Niveau de sécurité du coup a^i

Le niveau de sécurité du coup a^i pour le joueur i correspond au minimum de paiement que i peut recevoir en jouant a^i :

$$SL_{a^i} = \min_{a^{-i}} u^i(a^i, a^{-i})$$

Niveau de sécurité du joueur i

Le niveau de sécurité du joueur i correspond au plus grand niveau de sécurité auquel il peut prétendre :

$$SL_i = \max_{a^i} SL_{a^i} = \max_{a^i} \min_{a^{-i}} u^i(a^i, a^{-i})$$

Niveaux de sécurité - exemple

Line \ Colin	opéra	boxe
opéra	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
boxe	$(-2, -2)$	$(1, 2)$

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	(-1, -1)	(-10, 0)
Avouer	(0, -10)	(-8, -8)

Analyse d'une forme normale : Dominance

Définition (Dominance)

La stratégie a^i *du joueur* i *domine faiblement sa stratégie* b^i *lorsque :*

$$u^i(a^i, a^{-i}) \geq u^i(b^i, a^{-i}), \forall a^{-i} \in \mathcal{A}^{-i};$$

Elle la domine si elle la domine faiblement et que, de plus :

$$\exists c^{-i} \in \mathcal{A}^{-i} \text{ tel que } u^i(a^i, c^{-i}) > u^i(b^i, c^{-i})$$

Enfin, elle la domine strictement lorsque :

$$u^i(a^i, a^{-i}) > u^i(b^i, a^{-i}), \forall a^{-i} \in \mathcal{A}^{-i}.$$

La stratégie a^i *est dite faiblement dominante (resp. dominante, resp. strictement dominante) si elle domine faiblement (resp. domine, resp. domine strictement) tous les* $b^i \in \mathcal{A}^i \setminus \{a^i\}$.

Dominance - exemples

Line \ Colin	opéra	boxe
opéra	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
boxe	$(-2, -2)$	$(1, 2)$

- Line n'a pas de stratégie dominante.
- Colin non plus.

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	(-1, -1)	(-10, 0)
Avouer	(0, -10)	(-8, -8)

- Bonnie a une stratégie (strictement) dominante : Avouer.
- Clyde a une stratégie (strictement) dominante : Avouer.

Dans le dilemme des prisonniers, les joueurs obtiendraient tous deux plus qu'à cet équilibre en jouant (*Nier*, *Nier*) ; il n'est donc pas efficace du point de vue de la rationalité collective.

Optimum de Pareto

Définition (Optimum de Pareto)

Un n-uplet de stratégies $a_* = (a_*^1, ..a_*^i, ..a_*^n)$ *est un* optimum de Pareto *lorsqu'aucun des joueurs ne peut obtenir un paiement plus élevé sans que le paiement d'un des autres diminue :*

$$\left[u^i(a^i,\, a^{-i}) \geq u^i(a_*^i, a_*^{-i}), \forall i\right] \Longrightarrow \left[u^i(a^i,\, a^{-i}) = u^i(a_*^i, a_*^{-i}), \forall i\right]$$

Bonnie \ Clyde	Nier	Avouer
Nier	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
Avouer	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

Dans le dilemme des prisonniers, $(Nier,\; Nier)$ est un optimum de Pareto.

Équilibre itératif en stratégies **strictement** dominées

Définition (Équilibre en stratégies strictement dominantes)

Lorsque chaque joueur a une stratégie strictement dominante, l'ensemble de ces stratégies définissent un équilibre en stratégies strictement dominantes.

Lorsqu'un joueur a une stratégie strictement dominée, il semble évident qu'il ne la jouera jamais.

Définition (Équilibre itératif en stratégies strictement dominées)

Un équilibre itératif en stratégies strictement dominées est obtenue par une séquence de suppression de stratégies strictement dominées.
Si cet équilibre existe, il ne dépend pas de l'ordre de la séquence d'élimination et est donc unique.

Même s'il n'existe pas de tel équilibre, le jeu peut souvent être simplifié par un processus itératif où chaque joueur, tablant sur la rationalité de ses adversaires, écarte les stratégies apparues comme strictement dominées à cette étape de son raisonnement.

Exemple : séquence d'élimination de stratégies strictement dominées

	G	C	D
H	$(2,5)$	$(4,8)$	$(1,3)$
M	$(1,4)$	$(2,5)$	$(3,6)$
B	$(9,7)$	$(5,8)$	$(2,9)$

$G \prec C \Rightarrow$

	C	D
H	$(4,8)$	$(1,3)$
M	$(2,5)$	$(3,6)$
B	$(5,8)$	$(2,9)$

$H \prec B \Rightarrow$

	C	D
M	$(2,5)$	$(3,6)$
B	$(5,8)$	$(2,9)$

$C \prec D \Rightarrow$

	D
M	$(3,6)$
B	$(2,9)$

$B \prec M \Rightarrow$

	D
M	$(3,6)$

(M, D) est l'équilibre itéré en stratégies strictement dominées.

Équilibre itératif en stratégies dominantes

On peut penser qu'un joueur rationnel ne devrait jamais jouer non plus une stratégie s'il en existe une autre assurant un gain supérieur ou égal quoi qu'il arrive et strictement supérieur pour certaines stratégies des autres joueurs. Ici encore si chaque joueur a une stratégie dominante (il ne peut en avoir plus d'une), il doit la jouer. On dit alors qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes.

En revanche, le concept d'équilibre itératif en stratégies dominées pose des problèmes. En effet, contrairement au cas de la dominance stricte, selon l'ordre d'élimination de stratégies dominées adopté, on peut aboutir à des résultats différents.

Équilibre de Nash

Les équilibres en stratégie dominante, itérées, de Pareto sont tous assez rares. Il est donc nécessaire de définir une propriété plus *faible* permettant de définir des stratégies pour le joueur.

Définition (Meilleure réponse)

La stratégie a^i_* du joueur i est une meilleure réponse à une stratégie donnée $b^{-i} \in \mathcal{A}^{-i}$ des autres joueurs lorsque : $\forall a^i \in \mathcal{A}^i, u^i(a^i_*, b^{-i}) \geq u^i(a^i, b^{-i})$

Définition (Équilibre de Nash)

Un profil de stratégies $a_* = (a^1_*, ..a^i_*, ..a^n_*)$ est un équilibre de Nash *lorsque chacune de ses composantes constitue une meilleure réponse aux autres :*

$$\forall i \in \{1, .., n\}, \forall a^i \in \mathcal{A}^i, u^i(a^i_*, a^{-i}_*) \geq u^i(a^i, a^{-i}_*)$$

Propriétés de l'équilibre de Nash

- Stabilité : si un des joueurs pense que tous ses adversaires vont jouer leurs stratégies d'équilibre, alors il n'a aucune incitation à jouer lui-même autre chose que sa stratégie d'équilibre.
- Multiplicité : il n'y a pas unicité de l'équilibre de Nash.
- Un équilibre en stratégies (strictement) dominantes est un équilibre de Nash.
- Un équilibre itératif en stratégies (strictement) dominées est un équilibre de Nash.
- Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un équilibre itératif en stratégies (strictement) dominées.
- Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement Pareto-optimal.

Propriétés de l'équilibre de Nash : exemples

- Multiplicité

Line \ Colin	opéra	boxe
opéra	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
boxe	$(-2, -2)$	$(1, 2)$

(opéra, opéra) et (boxe, boxe) sont des équilibres de Nash. Il faut une entente préalable pour obtenir l'un des équilibres. De tels jeux sont appelés des jeux de coordination

- Dans le dilemme des prisonniers, (Nier, Nier) est Pareto-optimal mais n'est pas un équilibre de Nash, (Avouer, Avouer) est un équilibre de Nash.
- Soit le jeu :

	G	D
H	$(10, 0)$	$(5, 2)$
B	$(10, 11)$	$(2, 0)$

$B \preceq H \Rightarrow$ l'issue du jeu est (H, D) qui est un équilibre de Nash mais un autre équilibre de Nash a été éliminé par l'itération (B, G) qui domine strictement (H, D) au sens de Pareto !

Jeux à somme nulle

Définition (Jeu à somme nulle)

Un jeu est à somme nulle lorsque la somme des paiements reçus par les joueurs est toujours nulle.

$$\forall a = (a^1, \cdots, a^n),\ \sum_{i=1}^{n} u^i(a) = 0$$

Dans le cas d'un jeu à 2 joueurs, avec un nombre fini de stratégies, la matrice du jeu prend une forme particulière : toutes les cellules contiennent des paires de la forme $(g, -g)$. On peut ne représenter alors que les **gains (algébriques) du joueur des lignes** :

$i \setminus j$	1	$\cdots$	j_0	$\cdots$	n
1	$g_{(1,1)}$	$\cdots$	$g_{(1,j_0)}$	$\cdots$	$g_{(1,n)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i_0	$g_{(i_0,1)}$	$\cdots$	$g_{(i_0,j_0)}$	$\cdots$	$g_{(i_0,n)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	$g_{(m,1)}$	$\cdots$	$g_{(m,j_0)}$	$\cdots$	$g_{(m,n)}$

Nous noterons G_i les lignes de la matrice G et G^j ses colonnes.

Stratégies des joueurs dans un Jeu à Somme Nulle

- Pour le joueur des lignes :
  - Gain minimum assuré par la stratégie i_0 : $\min_{j=1}^{n} g_{(i_0,j)}$
  - Une pratique prudente consistera à s'assurer le gain minimum le plus grand possible :

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)} \quad : \text{Critère MaxiMin}$$

- Pour le joueur des colonnes :
  - Perte maximum provoquée par la stratégie j_0 : $\max_{i=1}^{m} g_{(i,j_0)}$
  - Une pratique prudente consistera à s'assurer la perte maximum la plus petite possible :

$$\min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)} \quad : \text{Critère MiniMax}$$

Théorème (MiniMax v1.0)

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} g_{(i,j)} \leq \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} g_{(i,j)}$$

Jeux à somme nulle : exemples

1.

$i \setminus j$	(1)	(2)	(3)	min
(1)	5	1	2	1
(2)	2	5	2	2
(3)	4	6	1	1
max	5	6	2	

Il y a égalité du MiniMax et du MaxiMin. La stratégie $(2, 3)$ constitue un équilibre de Nash qui donne ce gain au joueur des lignes et l'opposé au joueur des colonnes.

2. Le joueur des colonnes répartit à sa guise 2 pièces de 1€ entre 3 boîtes : (N)*oire*, (R)*ouge* et (V)*erte* ; le joueur des lignes doit alors choisir l'une des boîtes.

$i \setminus j$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	min
(N)	2	0	0	0	1	1	0
(R)	0	2	0	1	0	1	0
(V)	0	0	2	1	1	0	0
max	2	2	2	1	1	1	

$$max_{i=1}^{m}\ min_{j=1}^{n}\ g_{i,j} = 0 < 1 = min_{j=1}^{n}\ max_{i=1}^{m}\ g_{i,j}$$

Ses 3 stratégies garantissent 0 au joueur des lignes ; une perte au plus égale à 1 est garantie au joueur des colonnes par ses stratégies (4), (5) et (6).
Il n'y a aucun équilibre de Nash.