Quelques annales

Exercice 1 (2 pts) – Préférence

Une relation binaire est dite “relation de préférence” si elle est complète et transitive.
Soit une relation $\succeq$ définie sur $\mathcal{X}$ par :

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, x \succeq y \iff x \geq y - \frac{1}{2}$$

Q 1.1 $\succeq$ est-elle une relation de préférence pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Q 1.2 On note $\succ$ et $\sim$ les parties respectivement asymétrique et symétrique de $\succeq$. Sont-elles transitives ?

Q 1.3 $\succeq$ est-elle une relation de préférence pour $\mathcal{X} = \mathbb{N}$?

Exercice 2 (3 pts) – Paris et utilité

On propose à un joueur (rationnel au sens de VNM) d'engager une somme m sur un jeu au sujet de la réalisation d'un évènement A (de probabilité p) : il doit allouer une partie de m sur le pari que A se réalise et le reste sur le pari que l'évènement complémentaire $\bar{A}$ se réalise. Si A (resp. $\bar{A}$ se réalise), le montant alloué à A (resp. $\bar{A}$) sera gagné.
On note x le montant alloué à A. On note u la fonction d'utilité du joueur sur ses gains.

Q 2.1 Écrire la loterie associée à ce jeu et l'espérance d'utilité associée à cette loterie (on notera $u(.)$ l'utilité de VNM).

Q 2.2 Déterminer la valeur de x que doit choisir le joueur si son utilité est $\forall w, u(w) = w$.

Q 2.3 Déterminer la valeur de x que doit choisir le joueur si son utilité est $\forall w, u(w) = \ln(w)$.

Exercice 3 (5pts) – Ouragan et décision

Une ville risque régulièrement d'être traversée par des ouragans. La municipalité décide donc de mettre en place un outil d'aide à la décision afin de la guider dans la décision principale qu'elle peut prendre : évacuer ou non ses habitants.
L'étude qu'elle mène fait apparaître que deux critères principaux doivent régir cette décision : la sécurité des habitants (S) et le coût engendré par la décision (C). Dans un premier temps, cette même étude propose 3 niveaux de sécurité ($S \in \{1, 2, 3\}$, du plus risqué au plus sûr) et 2 niveaux de coût ($C \in \{1, 2\}$, du plus cher au moins onéreux).

Q 3.1 Utilité pour les décisions

Q 3.1.1 Pourquoi S est-elle graduée du plus risqué (1) au plus sûr (3) alors que C est graduée du plus cher (1) au moins onéreux (2) ?

Q 3.1.2 Soit une distribution $D = (P_{SC})_{S\in\{1,2,3\}, C\in\{1,2\}}$ sur le double critère $S \times C$, le modélisateur propose l'utilité suivante :

$$U(D) = \prod_{S\in\{1,2,3\}, C\in\{1,2\}} (S+1)^{C \cdot P_{S,C}}$$

Ainsi, une distribution uniforme uniquement sur les deux évènements “risqué mais peu coûteux” $(1, 2)$ et “cher mais sûr” $(3, 1)$ aurait pour utilité : $2^{2\cdot\frac{1}{2}} \cdot 4^{1\cdot\frac{1}{2}} = 4$.

Montrer que le préférences du décideur sont compatible avec une utilité linéaire sur l'ensemble des distributions.

Q 3.1.3 Montrer que l'utilité de Von Neumann-Morgenstern est alors compatible avec une utilité additive bi-critères.

Q 3.2 Arbre de décision
On utilise maintenant une version simplifiée de l'utilité de Von Neumann-Morgenstern de la question précédente :

$u(S, C)$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$
$C = 1$	4	6	7
$C = 2$	8	14	16

La municipalité reçoit une annonce indiquant qu'il y a un risque d'ouragan dans la région. Elle estime à 10% le risque du passage de l'ouragan dans sa ville. Évacuer amène à une situation à risque faible ($S = 3$) et coût important ($C = 1$). Ne pas évacuer permet un coût faible mais si l'ouragan passe sur la ville, le risque est haut ($S = 1$) et si l'ouragan ne passe pas, le risque est moyen ($S = 2$).
Proposer un arbre de décision pour ce problème et le résoudre.

Q 3.3 Afin d'affiner son analyse, la mairie se propose d'utiliser les services d'une agence de prévision météo. Le service de prévision assure que son avis ("Good" ou "Bad") est garanti en fonction de S suivant cette table :

	1	2	3
$p(G\|S)$	0.05	0.4	0.90
$p(B\|S)$	0.95	0.6	0.10

Par ailleurs, d'après les archives de la commune, dans le cas de la même annonce que la question précédente, les probabilités de risque sont les suivants :

S	1	2	3
$p(S)$	0.44	0.25	0.31

Calculer la décision optimale dans le cas où le service de prévision rendrait un avis "Good" et dans le cas où il rendrait un avis "Bad". Cela montre-t-il que l'utilisation de l'agence serait pertinente ?

Q 3.4 Peut-on répondre à la question : faut-il utiliser l'agence ? Quelle information manque-t-il ? Comment impacter cette information dans l'étude ? Trouver alors la condition pour que la ville veuille bien utiliser les services de l'agence.

Exercice 4 (5 pts) – Programmation linéaire bi-objectif

Soit P le programme linéaire bi-critère suivant :

$$\max\ z_1 = 4 + x_1 - x_2$$

$$\max\ z_2 = 4 - 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

Q 4.1 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables de P dans l'espace (x_1, x_2) puis dans l'espace (z_1, z_2)

Q 4.2 Déterminer les solutions Pareto-optimales pour ce problème.

Q 4.3 Déterminer les solutions optimales au sens d'une agrégation lexicographique des critères (on considérera successivement le cas où le premier critère est plus important que le second, puis le cas contraire).

Q 4.4 Soit P' le problème issu de P en imposant que les variables x_1 et x_2 prennent des valeurs entières non négatives. En vous servant des représentations graphiques de la question 1, déterminer les solutions Pareto-optimales du problème P'.

Exercice 5 (5 pts) – **Plus court chemin dans un graphe tri-critère**

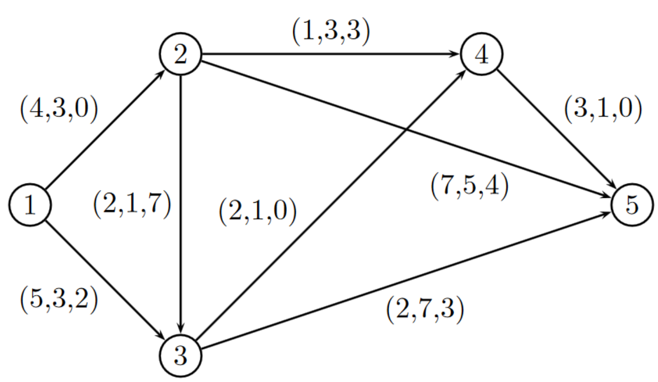
On considère un problème de plus court chemin dans un graphe dont les arcs sont évalués sur 3 critères. Chaque arc u du graphe est étiquetté par un vecteur $(c_1(u), c_2(u), c_3(u))$ où $c_i(u)$ est le coût de l'arc u sur le critère i. Tout chemin P est alors implicitement évalué par le vecteur $c(P) = \sum_{u \in P} c(u)$. Etant donné deux sommets i et j du graphe, on s'intéresse alors à déterminer un chemin P de i à j dont le vecteur coût $c(P)$ minimise la fonction :

$$f(P) = [c_1(P)]^2 + [c_2(P)]^2 + [c_3(P)]^2$$

parmi tous les chemins de i à j. On dit alors que P est f-optimal de i à j.

Q 5.1 Montrer qu'un chemin f-optimal de i à j est nécessairement Pareto optimal parmi l'ensemble des chemins de i à j.

Q 5.2 En vous appuyant sur l'algorithme de Coorley et Moon, proposer une procédure pour déterminer un chemin f-optimal entre deux sommets i et j du graphe. Appliquer cette procédure dans le graphe représenté ci-dessous, pour déterminer le chemin f-optimal du sommet 1 vers le sommet 5.



Exercice 6 (4pts) – **affectation multiagent**

On considère un problème d'affectation de n objets à n agents. Dans l'exercice on traitera le cas $n = 3$ et on considère une instance avec trois objets $\{a, b, c\}$ et trois agents $\{x, y, z\}$ (chaque agent doit recevoir exactement un objet). Les utilités des différents objets pour chaque agent sont données dans le tableau suivant :

	a	b	c
x	3	4	1
y	4	3	1
z	3	4	1

On considère un critère par agent pour évaluer les solutions du problème d'affectation ; ces critères consistent à définir l'utilité d'une affectation pour un agent comme l'utilité de l'objet qui lui est affecté. Ainsi l'affectation $\{(x, a), (y, b), (z, c)\}$ conduit au vecteur d'utilités $(3, 3, 1)$.

Q 6.1 Pour toute affectation α donnée, on peut construire un graphe bi-parti G_α dit "graphe d'échange de α" et défini comme suit :

- on a $2n$ sommets dont n sommets-agent (un sommet par agent) et n sommets-objet (un sommet par objet),
- on a n arcs allant de chaque sommet-agent vers le sommet correspondant à son objet préféré,
- on a n arcs allant de chaque sommet-objet vers le sommet correspondant à l'agent qui le détient dans l'affectation α.

Construire les graphes d'échange G_α et $G_{\alpha'}$ associés aux affectations $\alpha = \{(x, a), (y, b), (z, c)\}$ et $\alpha' = \{(x, c), (y, b), (z, a)\}$. Montrer que chacun de ces graphes contient un circuit de longueur strictement supérieure à 2 et en déduire que α et α' ne sont pas des affectations Pareto-optimales (on expliquera précisément pourquoi).

Q 6.2 Proposer un algorithme itératif simple permettant de construire, pour une permutation donnée des critères, une affectation optimale au sens de l'agrégation lexicographique. Utiliser cet algorithme pour construire l'ensemble des solutions optimales au sens d'une agrégation lexicographique dans l'instance donnée ci-dessus (on considérera toutes les permutations des critères). En déduire l'ensemble des affectations Pareto-optimales pour l'instance considérée.

Exercice 7 (6pts) – recherche de meilleur chemin

On considère un problème de recherche de meilleur chemin dans le graphe représenté sur la figure 1. Chaque sommet numéroté de 1 à 10 représente une position de référence sur un massif de haute montagne et chaque arc (i, j) représente un passage permettant d'aller de i à j. Les passages ne sont pas ouverts tous les jours et on ne connaît que la probabilité p_{ij} que le passage (i, j) soit ouvert le jour où le problème se pose. Par ailleurs, chaque passage est plus ou moins long et difficile à emprunter et on ne connaît que le temps moyen ℓ_{ij} pour traverser le passage (i, j) si le passage est ouvert. Ces données sont précisées dans les étiquettes des arcs du graphe sous la forme (t_{ij}, p_{ij}).

On souhaite déterminer le meilleur chemin de 1 à 10 sachant que la qualité d'un chemin est appréciée selon deux critères distincts :

- ℓ la longueur définie par le temps moyen de parcours du chemin,
- p la probabilité du chemin définie comme la probabilité que tous les passages qui composent le chemin soient ouverts (l'ouverture d'un passage est indépendante de l'ouverture d'un autre passage).

Bien entendu, le premier critère est à minimiser et le second à maximiser.

Q 7.1 Soit x un chemin caractérisé par une ensemble X d'arcs, exprimer sa longueur $\ell(x)$ en fonction de $\{\ell_{ij} : (i, j) \in X\}$ et sa probabilité $p(x)$ en fonction de $\{p_{ij} : (i, j) \in X\}$. Etant donné deux chemins x et y évalués par les vecteurs $(\ell(x), p(x))$ et $(\ell(y), p(y))$, écrire les conditions à satisfaire pour que x domine y au sens de Pareto.

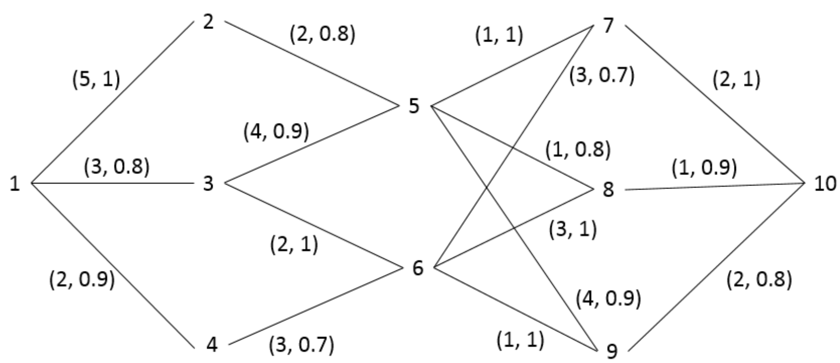


FIGURE 1 – Graphe des chemins de 1 à 10

Q 7.2 En utilisant une adaptation de l'algorithme de Corley et Moon pour ce problème, déterminer les chemins Pareto-optimaux parmi les chemins de 1 à 10 dans le graphe de la figure 1

Q 7.3 Afin de déterminer un bon compromis entre les deux critères, on évalue chaque chemin de longueur ℓ et de probabilité p par la fonction coût $f_w(\ell, p) = (1-w)\ell + 10w(1-p)$ à minimiser. Déterminer quels sont les chemins minimisant f_w en fonction de $w \in [0, 1]$.

Q 7.4 Déterminer ℓ^* la longueur du chemin le moins long de 1 à 10, et p^* la probabilité du chemin le plus probable de 1 à 10. On souhaite maintenant minimiser l'écart normalisé au point idéal (ℓ^*, p^*) défini par la fonction $g(\ell, p) = \max\{\ell - \ell^*, 10(p^* - p)\}$. Déterminer le chemin optimal au sens de g.