Décisions et Jeux

Préférences
en environnement aléatoire
Théorie de Von Neumann-Morgenstern

Pierre-Henri WUILLEMIN

LIP6
pierre-henri.wuillemin@lip6.fr

moodle https://moodle-sciences-22.sorbonne-universite.fr/course/view.php?id=4521
mattermost https://channel.lip6.fr/etudmasterandro/channels/coursdj23fev

Décision dans l'incertitude, décision dans le risque

La décision dans le certain se traduit par un acte de choix entre différents éléments. Il s'agit alors de se donner les moyens de cette comparaison.

Définition (Décision dans l'incertitude)

On appelle décision dans l'incertitude les situations de choix pour lesquels le résutats des actions ne peut être prévus avec certitude.

Définition (Décision dans le risque)

Lorsque cette incertitude est probabilisée (i.e. le résultat ne dépend que de la réalisation d'évènements de probabilités connues) , on utilise alors le terme de décision dans le risque.

Pour les **bayésiens**, un décideur rationnel fait de la décision dans le risque, même si les probabilités sont subjectives (cf. De Finetti, Savage).
Pour les non-bayésiens, le risque est un cas particulier de l'incertitude.

Environnement aléatoire probabilisé

Exemple : préfère-t-on miser 1€ sur un “Pile ou Face”, où Pile rapporte 2€ et Face rien plutôt que de ne pas jouer ?

- À chaque décision correspond une distribution de probabilité sur les résultats.
- Ce sont sur ces distributions sur les résultats que peuvent s'exprimer les préférences du décideur
- Ces préférences induisent des préférences sur les décisions.

L'ensemble de choix sera donc ici $\mathcal{P}$ l'ensemble des lois sur l'espace des résultats $\mathcal{C}$.

Probabilité

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble (fini), $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (fermé pour $\cup$ et $\cap$).

Définition (Probabilité)

$p : \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$ *est une loi de probabilité si et seulement si :*

- $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{E}, 0 \leq p(\mathcal{A}) \leq 1$
- $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{E}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow p(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B})$
  $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont alors dits* mutuellement exclusifs.
- $p(\mathcal{C}) = 1.$

$p(\emptyset) = 0$?
$p(\overline{\mathcal{A}}) = 1 - p(\mathcal{A})$?

Mixage de lois de probabilité

Soit P et P' 2 lois sur $\mathcal{C}$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Théorème (Mixage)

Soit Q définie par $\forall x \in \mathcal{E}, Q(x) = \lambda \cdot P(x) + (1 - \lambda) \cdot P'(x)$.

- *Q est une loi de probabilité sur $\mathcal{E}$.*
- *On note $Q = \lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot P'$ qu'on appelle alors combinaison linéaire convexe ou mixage de P et P'.*

On peut vérifier :

- $1 \cdot P + 0 \cdot P' = P$
- $\lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot P = P$
- $\lambda \cdot (\beta \cdot P + (1 - \beta) \cdot P') + (1 - \lambda) \cdot (\gamma \cdot P + (1 - \gamma) \cdot P') = (\lambda \cdot \beta + (1 - \lambda) \cdot \gamma) \cdot P + (\lambda \cdot (1 - \beta) + (1 - \lambda) \cdot (1 - \gamma)) \cdot P'$

généralisation : $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot P_i)$ où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Loteries

Définition (Loi certaine)

Soit $c \in \mathcal{C}$, on appelle loi certaine (ou loi de Dirac) en c, la loi δ_c telle que $\delta_c(\{c\}) = 1$.

Définition (Support d'une loi de probabilité)

Le support $\mathcal{S}$ d'une loi de probabilité P sur $\mathcal{C}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que $P(\mathcal{S}) = 1$:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \text{ tel que } P(\mathcal{S}) = 1 \text{ et } \forall \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}, P(\mathcal{T}) < 1$$

Définition (Loterie)

On appelle loterie toute loi de de probabilité sur $\mathcal{E}$ dont le support $\mathcal{S}$ est fini.

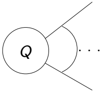
Théorème

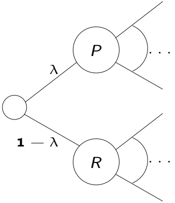
Toute loterie peut s'écrire comme le mixage des lois certaines sur les éléments de $\mathcal{S}$

Représentation graphique : arbre de chance

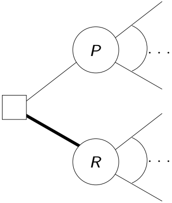
On peut facilement représenter un mixage (et donc une loterie) comme un nœud chance ou comme un sous-arbre de chance d'un arbre de décision

Avec $Q = \lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot R$:





De même, on peut aisément représenter l'acte de décision dans le risque par un arbre de décision. Avec $R \succ P$:



Axiomatique : vers une théorie de la décision dans le risque

Le but de cette théorie est de prouver l'existence d'une utilité U représentant les préférences du décideur.

1. Le décideur doit choisir entre 2 décisions D_1 et D_2.
2. Chaque décision a pour conséquence une distribution de probabilité P_1 et P_2 sur l'ensemble des conséquences $\mathcal{C}$. (P_1 et $P_2 \in \mathcal{P}$).
3. S'il existe une utilité $U : \mathcal{P} \rightarrow IR$ telle que $U(P_1) \geq U(P_2)$
4. Alors $P_1 \succeq P_2$,
5. Et donc $D_1 \succeq D_2$.

Pour prouver l'existence de cette utilité U, il est nécessaire d'avoir quelques hypothèses sur les préférences. Ces hypothèses se déclinent en une **axiomatique**.

Axiome 1

Axiome (1– Préférences complètes sur les lois)

L'ensemble de choix $\mathcal{P}$ est constitué de **toutes** *les lois sur l'ensemble des résultats $\mathcal{C}$. La relation de préférence sur $\mathcal{P}$ est un préordre large total dans $\mathcal{P}$.*

Le décideur n'attache pas d'importance à la manière dont un tirage est effectué. Seule la distribution sur $\mathcal{C}$ compte : pas de *plaisir de jouer*.

Axiome 2

Axiome (2 – Continuité)

Soit $P, P', Q \in \mathcal{P}$ *avec* $P \succ Q \succ P'$, *alors* $\exists \lambda, \beta \in]0,1[$ *tels que :*

$$\lambda \cdot P + (1-\lambda) \cdot P' \succ Q$$
$$Q \succ \beta \cdot P + (1-\beta) \cdot P'$$

Il n'y a pas de résultat si préférable (resp. si peu), qu'aucune loi ne soit préférable (resp. moins) à une loi proposant ce résultat.

Axiome 3

Axiome (3 – Indépendance)

Soit $P, P', Q \in \mathcal{P}$ *et* $\lambda \in]0,1]$ *:*

$$P \succ P' \Rightarrow \lambda \cdot P + (1-\lambda) \cdot Q \succ \lambda \cdot P' + (1-\lambda) \cdot Q$$

Ajouter le même nouvel élément d'aléatoire dans les résultats de deux décisions ne devraient pas changer les préférences du Décideur.
Cet axiome est souvent discuté : il est facile de trouver des exemples d'application en contradiction (voir le paradoxe d'Allais).

Axiome d'indépendance : Paradoxe d'Allais

Soit A, B, C, et D quatre loteries :

- **A** : *gagner* 10 000 € =10 *k€ avec certitude* ;
- **B** : *gagner* 50 *k€ avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *; ne rien gagner sinon* ;
- **C** : *gagner* 10 *k€ avec probabilité* $\frac{11}{100}$ *; ne rien gagner sinon* ;
- **D** : *gagner* 50 *k€ avec probabilité* $\frac{10}{100}$ *; ne rien gagner sinon.*

L'expérience consiste à offrir aux sujets le choix entre A et B d'une part, C et D d'autre part.

Analyse du paradoxe d'Allais

Les perspectives aléatoires offertes par les diverses propositions sont les suivantes :

$$A \longmapsto P = \delta_{10} \;;$$

$$B \longmapsto P' = \frac{10}{11}\delta_{50} + \frac{1}{11}\delta_0 = \frac{10}{11}\delta_{50} + \frac{1}{11}Q \;; \text{(avec } Q = \delta_0\text{)}$$

$$C \longmapsto R = \frac{11}{100}\delta_{10} + \frac{89}{100}\delta_0 = \frac{11}{100}P + \frac{89}{100}Q \;;$$

$$D \longmapsto R' = \frac{10}{100}\delta_{50} + \frac{90}{100}\delta_0 = \frac{11}{100}P' + \frac{89}{100}Q.$$

L'axiome d'indépendance exige que :

$$P \succ P' \Rightarrow \frac{11}{100}P + \frac{89}{100}Q \succ \frac{11}{100}P' + \frac{89}{100}Q$$

donc que C soit choisi si A l'est, mais que D soit choisi si c'est B qui l'est.

Pourquoi garder l'axiome d'indépendance ?

L'axiome d'indépendance amène à des paradoxes. Pourquoi le garder quand même ?

Argument de la pompe monétaire

Soient $P, P', Q \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in [0, 1]$, $R = \lambda P + (1 - \lambda)Q$ et $R' = \lambda P' + (1 - \lambda)Q$
Supposons $P \succ P'$ et pourtant $R' \succ R$.
On propose au Décideur :

(L1) de choisir entre R' et R ;

(L2) de payer M pour pouvoir choisir entre R' et R.

Dans (L1), le processus est décomposé : choix entre (P ou P') ou Q (proba λ) puis phase de décision entre P et P'

Le Décideur va choisir de payer M pour ne pas avoir à décider entre P et P'.

Existence d'une utilité linéaire

Une fonction f est dite linéaire $\iff f(\lambda \cdot x + \beta \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

Théorème (VNM)

Sous les axiomes 1,2 et 3, il existe sur $(\mathcal{P}, \succeq)$ une fonction d'utilité linéaire, unique à une transformation affine, strictement croissante près.

C'est-à-dire qu'il existe une fonction U vérifiant :

1. $\forall P, P' \in \mathcal{P}, P \succeq P' \iff U(P) \geq U(P')$
2. Pour tout mixage (P, P', λ),
   $U(\lambda \cdot P + (1 - \lambda) \cdot P') = \lambda \cdot U(P) + (1 - \lambda) \cdot U(P')$
3. Si V vérifie (1) et (2), alors $\exists a > 0, b, \forall P, V(P) = a \cdot U(P) + b$

Une utilité linéaire est aussi appelée **utilité ou indice de Bernoulli**.

Démonstration

- A1 $\succeq$ préodre large total.
- A2 Continuité : Si $P \succ Q \succ P'$ alors $\exists 0 < \lambda, \beta < 1, \lambda P + (1-\lambda)P' \succ Q \succ \beta P + (1-\beta)P'$.
- A3 Indépendance : $P \succ P' \Rightarrow \lambda P + (1-\lambda)Q \succ \lambda P' + (1-\lambda)Q$.

1. Comparaison de mélanges de lois
   1. $\forall P, P', \forall \lambda \in [0,1[, P \succ P' \Rightarrow P \succ \lambda P + (1-\lambda)P'$
   2. $\forall P, P', \forall \lambda > \mu \in [0,1]$,
      $P \succ P' \Rightarrow \lambda P + (1-\lambda)P' \succ \mu P + (1-\mu)P'$
2. Existence d'un mélange indifférent à une loi
   $\forall P, P', Q$ tel que $P \succ Q \succ P', \exists \overline{\lambda}, Q \sim \overline{\lambda} P + (1-\overline{\lambda})P'$
3. Indifférence entre mélanges de lois
   1. $\forall P, P', \forall \lambda \in [0,1], P \sim P' \Rightarrow P \sim \lambda P + (1-\lambda)P'$
   2. $\forall P, P', Q, \forall \lambda \in [0,1], P \sim P' \Rightarrow \lambda P + (1-\lambda)Q \sim \lambda P' + (1-\lambda)Q$
4. Utilité sur un intervalle d'ordre
   1. Existence de l'utilité dans $E = \{P \in \mathcal{P}, P^+ \succeq P \succeq P^-\}$
   2. Linéarité de l'utilité dans E
5. Cardinalité de l'utilité linéaire sur un intervalle d'ordre
6. Extension de l'utilité linéaire à tout $\mathcal{P}$

préordre sur les résultats

Propriété (préordre sur $\mathcal{C}$)

Le préordre large total sur $\mathcal{P}$ induit un préordre large total sur $\mathcal{C}$:

$$c, c' \in \mathcal{C}, c \succeq c' \iff \delta_c \succeq \delta_{c'}$$

On peut alors définir une utilité u sur $\mathcal{C}$ pour ce préordre induit, appelé utilité de Von Neumann :

Définition (Utilité de Von Neumann)

$$\forall c \in \mathcal{C}, u(c) = U(\delta_c)$$

u unique à une transformation affine strictement croissante près

Espérance d'utilité de Von Neumann

- Étant donnés un préordre large total sur $\mathcal{P}$, une fonction d'utilité U le représentant, u l'utilité de Von Neumann associée.
- En notant $\mathcal{P}_0$ les lois à support fini :
  $P \in \mathcal{P}_0 \iff \exists (c_i)_{i \in 1 \ldots n}, P(c_i) \neq 0$ et $P(c \not\subset (c_i)_{i \in 1 \ldots n}) = 0$.

$$\forall P \in \mathcal{P}_0, U(P) = \sum_{i=1}^{n} P(c_i) \cdot u(c_i) = E(u)$$

Cette propriété est généralisable à des lois à support dénombrable : $U(P) = \sum_I p(c_i) \cdot u(c_i)$.
Et même pour des lois de densité $p(.)$: $U(P) = \int_{\mathcal{C}} u(c) \cdot p(c) dc$. Si $u(.)$ vérifie les bonnes propriétés (mesurable, bornée).

Propriétés de l'utilité de VNM

Axiome (4 – Dominance)

Soit $P \in \mathcal{P}$ et $c_0 \in \mathcal{C}$.

- $P(\{c \in \mathcal{C}, c \succeq c_0\}) = 1 \Rightarrow P \succeq \delta_{c_0}$
- $P(\{c \in \mathcal{C}, c \preceq c_0\}) = 1 \Rightarrow P \preceq \delta_{c_0}$

Théorème

Soit un préordre large total sur $\mathcal{P}$ vérifiant les axiomes (1) à (4),
Soit une fonction d'utilité U le représentant,
Soit u l'utilité de Von Neumann associée.

Nécessairement u est bornée.

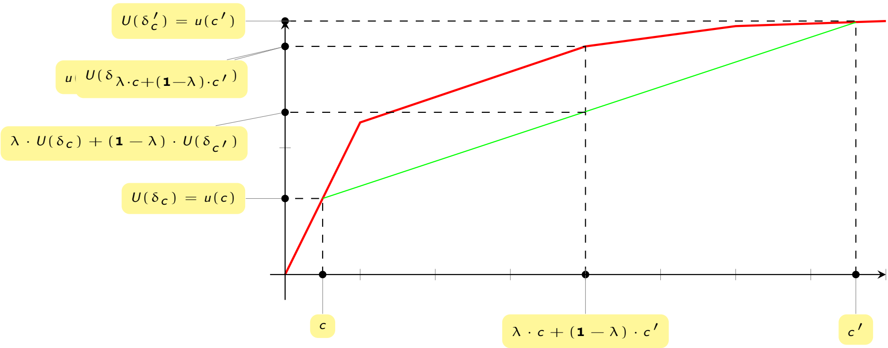
Propriétés de l'utilité de VNM bornée

Propriété

Rien ne peut amener le Décideur à prendre certains risques.
Rien ne peut amener le Décideur à renoncer à tenter certaines chances.

- Soit c_1 telle que $u(c_1) = 1$
- Soit c quelconque
- On compare $D_A =$«c_1 sûrement» et $D_B =$«c avec une proba p et 0 sinon»
  - $U(D_A) = 1 \cdot u(c_1) = 1$
  - $U(D_B) = p \cdot u(c) + (1 - p) \cdot 0 = p \cdot u(c)$
- Si M est la borne max de u, alors il suffit que $p < \frac{1}{M}$ pour que D_A soit préféré à D_B quelque soit c.

Concavité de l'utilité de VNM



u est concave $\iff$ $u(\lambda \cdot c + (1-\lambda) \cdot c') \geq \lambda \cdot u(c) + (1-\lambda) \cdot u(c')$ avec $\lambda \in [0, 1]$

Si u est concave alors $\delta_{\lambda \cdot c + (1-\lambda) \cdot c'} \succeq \lambda \cdot \delta_c + (1-\lambda) \cdot \delta_{c'}$

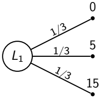
À un résultat aléatoire d'espérance mathématique donnée, le Décideur préfère la certitude de cette espérance.

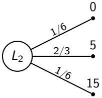
Comportement vis-à-vis du risque

Définition (Aversion au risque)

Un décideur a de l'aversion pour le risque si son utilité de VNM est concave.
Un décideur est un joueur si son utilité de VNM est convexe.
Un décideur est neutre vis-à-vis du risque si son utilité de VNM est linéaire.

Un exemple

Soit la loterie 

et la loterie 

(On suppose que le décideur est rationnel)

- Espérance de gain ?

- Si $L_1 \sim \delta_5$, que dire de la comparaison entre L_1 et L_2 ?

- proposer dans ce cas ($L_2 \sim L_1$) une utilité pour les gains ?