

Fiche ML

Charles Vin

S2-2023

1 Généralité

- Fonction de perte : quantifie l'erreur associé à une décision. Erreur simple : A chaque fois qu'on se trompe, on compte 1 : 0-1 loss
- Risque : Proba de se tromper, $R(y_i|x) = \sum_j l(y_i, y_j)P(y_j|x)$ = Moyenne de la Loss pondéré par les probas à post
- Risque continue? : $R(f) = \int_{x \in \mathcal{X}} R(f(x)|x)p(x)dx$ ($p(x) = ???$) = Esperance du X sur notre domaine continue
- iso-contours == courbe de niveau
- Une epoque = on a vu une fois tous les exemples dans le gradient
- Hinge-loss = $\max(0, 1 - yf_w(x))$
 - the Hinge loss penalizes predictions $y < 1$, corresponding to the notion of a margin in a support vector machine.
 - When y and $f_w(x)$ have the same sign (meaning y predicts the right class) and $|f_w(x)| \geq 1$, the hinge loss = 0
 - When they have opposite signs, the hinge loss increases linearly with $f_w(x)$ and similarly if $|f_w(x)| \geq 1$, even if it has the same sign (correct prediction, but not by enough margin).
- Lorsque les données sont de petites dimensions, le risque de sur-apprentissage est plus petit.
- Lors d'une batch de gradient, il n'est pas nécessaire de mélanger les exemples car tous les exemples sont utilisés dans chaque mise à jour de poids. VS En général, il est recommandé de mélanger les exemples lors d'une descente de gradient stochastique (SGD) afin de garantir une convergence plus rapide et une meilleure généralisation.
- $\|x\|^2 = x^T x$

1.1 Descente de gradient

Point initial x_0 et $\epsilon \geq 0$.

1. Calcul de $\nabla f(x_k)$
2. Test d'arrêt : si $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$
3. Calcul d'un pas $\alpha_k > 0$ par une règle de recherche linéaire en f en x_k le long de la direction $-\nabla f(x_k)$
4. Nouvel itéré : $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

1.2 Dérivé des matrices

$$\begin{aligned}\frac{\partial(vMv)}{\partial v} &= (M + M^T)V = 2MV \text{ si } M \text{ symétrique} \\ \frac{\partial(v^T a)}{\partial v} &= \frac{\partial(a^T v)}{\partial v} = a \\ \frac{\partial(\log \det M)}{\partial v} &= M^{-1} \\ \frac{\partial(\text{Tr}(AM))}{\partial v} &= A\end{aligned}$$

1.3 Multiplicateur de Lagrange

Soit $f(x)$ fonction à optimiser, sous $g(x) = 0$ contraintes d'égalités. On pose : $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda(x)$ nouvelle fonction de plus grande dimension à optimiser comme on a l'habitude en annulant le gradient : $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$. Légitimement on doit vérifier si le point est un min ou un max ou un point selle avec la matrice hessienne mais osez.

1.4 KKT & contrainte d'inégalité

Version complete de Lagrange : Fonction objectif f , g_i contrainte d'égalité, h_j contrainte d'inégalité tel que $h_i(x) \leq 0$.
Fonction duale : $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x)$. Les condition KKT pour un point x^* extremum sont

(aka résoudre le système)

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \mu_j^* \leq 0, j = 1, \dots, q \\ \mu_j^* h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, q \end{cases}.$$

2 Arbre de décision

Algo général :

1. Déterminer la meilleure caractéristique dans l'ensemble de données d'entraînement.
2. Diviser les données d'entraînement en sous-ensembles contenant les valeurs possibles de la meilleure caractéristique.
3. Générez de manière récursive de nouveaux arbres de décision en utilisant les sous-ensembles de données créés.
4. Lorsqu'on ne peut plus classer les données, on s'arrête.

Méthode de division des données : On va utiliser l'entropie

Définition 2.1 (Entropie). [Origine de la formule de l'entropie](#) Soit X une variable aléatoire pouvant prendre n valeurs x_i

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \log(P(X = x_i)).$$

Mesure l'homogénéité d'un dataset. C'est également la moyenne de la surprise (voir la vidéo)

Définition 2.2 (Gain d'information). Mesure la réduction attendue de l'entropie causée par le partitionnement des exemples.

En faisant un test T sur un des attributs, on obtient deux partitions d'exemples de X : X_1 qui vérifie le test et X_2 qui ne vérifie pas le test (resp. Y_1 et Y_2).

$$H(Y|T) = \frac{|X_1|}{|X|} H(Y_1) + \frac{|X_2|}{|X|} H(Y_2).$$

Gain d'information :

$$I(T, Y) = H(Y) - H(Y|T).$$

On veut maximiser le gain d'information par le split \Leftrightarrow minimiser $H(Y|T)$

3 KNN

- Prendre les K plus proches voisins pour classer
- K petit == noisy and subject to the effects of outliers == overfitting?
- K grand == underfitting

4 Classifieur bayésien

On a :

- $P(y)$ fréquence des classes dans le dataset
- $P(x|y)$ les points de notre jeu de données. Graphiquement : les points coloriés

On cherche :

$$\arg \max_y P(y|x) = \arg \max_y \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}.$$

Naive Bayes : indépendance des dimensions de x , on peut développer le $P(x|y) = P(x_1|y) \dots P(x_d|y)$.

Puis rapport de vraisemblance **en utilisant le risque** pour prendre la décision.

Remarque :

- Classifieur bayésien = le classifieur qui minimise le risque = le meilleur classifieur possible
- Classifieur optimal car minimise l'erreur car en choisissant la plus grande proba, on ne peut pas réduire $1 - P(y|x)$ qui est déjà le plus grand possible
- $P(x)$ difficile à calculer = répartition des points dans l'espace, dans le graph 2d non colorié. En général très petit, uniquement utile pour générer des données, pas pour faire l'argmax (aka classer).

Autre truc important :

- On utilise classiquement une 0-1 loss
- Frontière de décision : $\frac{R(+|x)}{R(-|x)} > 1 \rightarrow$ Permet de prendre en compte les coûts asymétriques des classes. Forme dans \mathbb{R}^2 : cercle

5 Estimation de densité

5.1 Par histogramme

Définition 5.1 (Estimation par histogramme). Soit Y une v.a.r nombre de point tombant dans un bin : $Y \sim \mathcal{B}(n, p_b V)$. On a donc $E(Y) = np_b V \Leftrightarrow p_b = \frac{k}{nV}$.

- Cas discret : Comptage dans chaque classe puis normalisation par le nombre d'exemple $N \rightarrow p_b = \frac{k}{nV} = \frac{\text{Nb dans le bin}}{\text{nb d'ech tot} * \text{Volume d'un bin}}$
- Cas continue : Discretisation des valeurs puis comptage et normalisation

Importance de la discrétisation :

- Petit \rightarrow sur-apprentissage, trou dans l'histogramme
- Trop grand \rightarrow sous-apprentissage

Limite :

- Grande dimension \rightarrow Perte de sens exponentiel (3 ou 4 max)
- Effet de bord : petit changement dans les bins, gros changement d'estimation.

\rightarrow Solution : Estimation par noyaux

5.2 Estimation de densité par noyaux

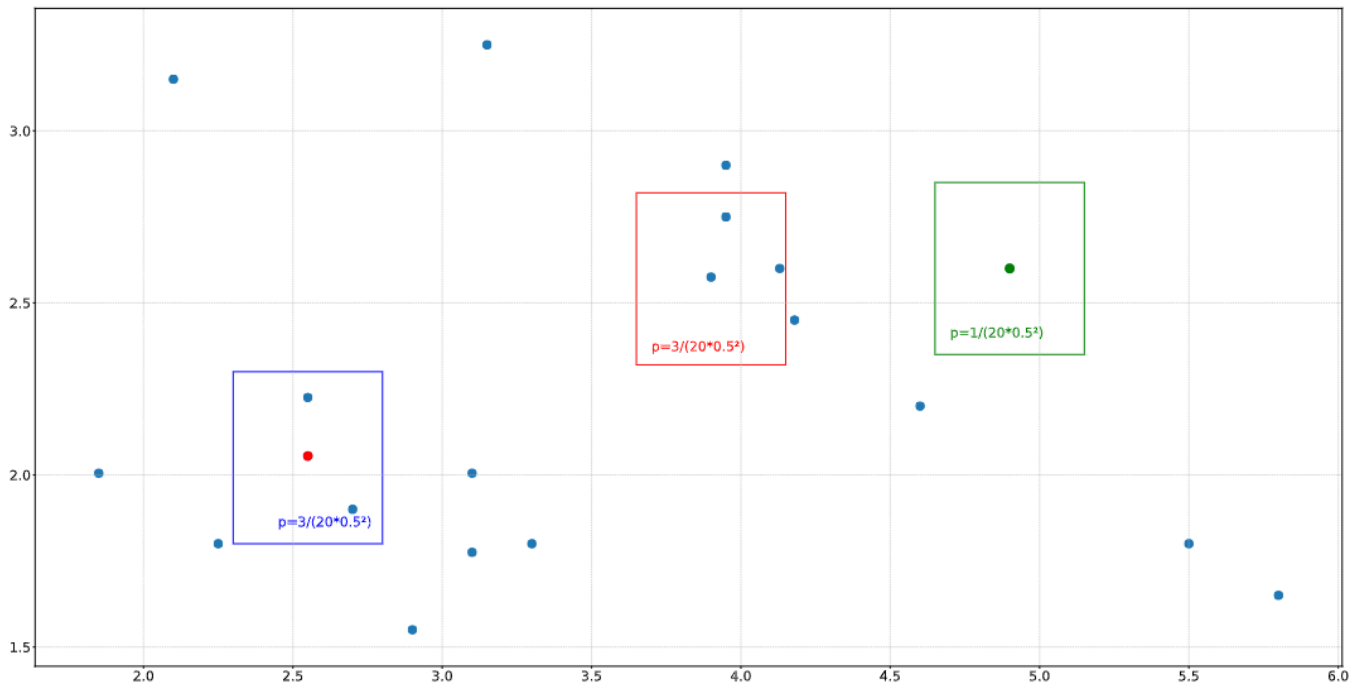


Figure 1 – Intuition de l'estimation par noyaux

Intuition figure 1 : Plutôt que de décider d'une discrétisation a priori, l'estimation est faite en centrant une fenêtre autour du point d'intérêt x_0 (dans un espace de dimension d) à posteriori. \rightarrow Problème : pas continue (si on bouge la boîte et qu'un point rentre dedans, ça fait faire un saut à la fonction)

5.2.1 Fenêtre de Parzen

On combine la solution précédente avec une densité/noyaux. Classiquement Gaussien, pour obtenir un truc lisse et continue

Définition 5.2 (Fenêtre de Parzen). Soit $(x_1, \dots, x_N) \sim f$ iid

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{N * h} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Avec K le noyaux **centrée et réduit sur x** , souvent une fonction gaussienne. Si c'est une fonction rectangle ça fonctionne aussi. Puis y'a plein d'autre noyaux possible.

6 Regression Linéaire

— MSE : $(XW - Y)^T(XW - Y) = W^T X^T XW - (Y^T XW)^T - YXW + Y^T Y$

$$\begin{aligned}\nabla_W MSE &= 2X^T XW - X^T Y - Y^T X \\ &= 2X^T XW - X^T Y - X^T Y \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^T = \lambda \\ &= 2X^T(XW - Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow W = (X^T X)^{-1} X^T Y\end{aligned}$$

— Sinon descente de gradient

7 Régression Logistique

- On peut pas utiliser la MSE car distance à la frontière de décision peut être très grande pour un point qui est très très certainement dans une classe
- On vas plutot essayer de modéliser la confiance qu'on a dans la classif d'un point \rightarrow Proba : $p(y = 1|x) = \mu(x)$
- Modélisation de cette proba par un truc linéaire qu'on projette entre 0 et 1 avec la sigmoïde ou tanh
- On remarque que le log ratio : $\log \frac{\mu(x)}{1-\mu(x)} = f_w(x)$ pour la sigmoïde
- Pas de solution analytique à la log vrais : descente de gradient

8 Perceptron

- $f_w(x) = \langle x, w \rangle$, décision : $\text{sign}(f_w(x))$
- Hinge-loss = $\max(0, -yf_w(x))$, vaut 0 quand bonne prédiction
- gradient Hinge loss

$$\nabla H_w = \begin{cases} 0 & \text{si } -yxw < 0 \\ -yx & \text{sinon} \end{cases}.$$

- into descente de gradient
- le vecteur de poids w est normal à l'hyperplans de la séparatrice, $\langle w, x \rangle$ mesure l'angle entre les deux vecteurs, maj : on fait bouger l'hyperpaln en fct de cette angle

Théorème de convergence : si

- $\exists R, \forall x \|x\| \leq R$
- Les données peuvent être séparées avec une marge p
- L'ensemble d'apprentissage est présenté au perceptron un nombre suffisant de fois

Alors : après au plus $\frac{R^2}{p^2}$ correction, l'algo converge

9 SVM

- Donnée non linéaire \rightarrow Projection, dim ++ \rightarrow Attention sur apprentissage + quel dim choisir \rightarrow SMV do this auto
- Résous le problème de l'unicité de la solution également
- Maximiser la marge $\gamma \Leftrightarrow$ minimiser $\|w\|$ sous la contrainte $\forall i, (wx^i + b)y^i \geq 1$ par des calculs obscures (≥ 1 car on veut que la distance entre la droite de régression et ces deux marges soit supérieur 1)
- Prise en compte des erreurs :
 - ξ variable de débordement par rapport à sa marge pour chaque point mal classé \rightarrow Raison obscure $\rightarrow \xi = \max(0, 1 - (wx^i + b)y^i)$ Hinge loss
 - On avait $\min \|w\|^2$ maintenant $\min \|w\|^2 + K \sum \xi$ avec K hyper param nombre d'erreur
- Optimisation avec lagrangien cas simple

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{s.c. } y^i (wx^i + b) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_i \alpha_i (y^i (wx^i + b) - 1).$$

- Optimisation avec Langrangien cas complexe

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 + K \sum_i \xi_i \\ \text{s.c. } y^i (wx + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(w, b, \alpha, \nu) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + K \sum_i \xi_i - \sum_i \alpha_i (y^i (wx + b) + \xi_i - 1) - \sum_i \nu_i \xi_i$$

Kernel Tricks :

- Kernel Function : $k(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$
- Mesure la similarité entre 2 objets
 - $-$ = vecteur opposé = éloigné
 - $= 0$ = produit orthogonal = éloigné
 - $++$ = vecteur aligné = proche
- Stable pas addition, multiplication, composition avec f polynome, exponentiel
- La complexité de calcul d'un noyau polynomial est linéaire par rapport d le degré du polynome. Mais pas la dimensionnalité de la projection

Généralité SVM

- The support vectors are the data points that lie on the margin, which is the region between the decision boundary and the closest data points of each class. Support vectors are critical in SVM because they determine the location and orientation of the decision boundary. All other data points that are not support vectors are not used to construct the decision boundary, which means that SVM is robust to noise and outliers in the data.
- La taille de la marge est un hyper-paramètre important : marge grande == underfitting // marge petite == overfitting (séparation linéaire plus proche des points, moins centrée)

10 Réseau de neurone

11 Non supervisé

12 Théorie de l'apprentissage

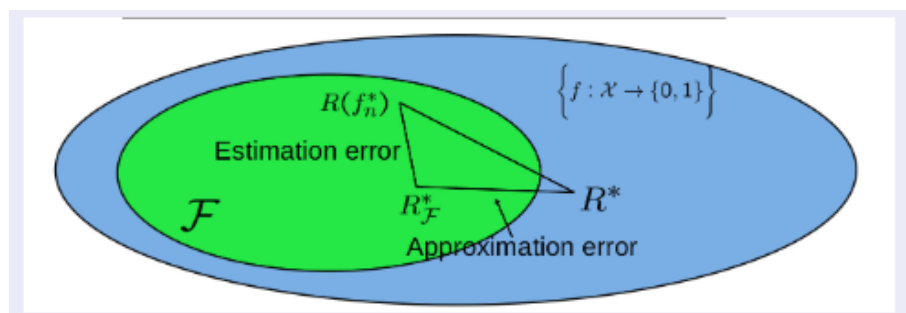


Figure 2 - Variance = estimation error, biais = approximation error

- Algorithme universellement consistant : risque de la fonction apprise converge vers le risque bayésien. Si on peut overfit sur n'importe quel jeu de donnée (comme un arbre de décision ou un réseau de neurone avec nombre de paramètre infini).
- Biais : risque lié à la restriction de la taille de l'ensemble de fonction où on cherche la fonction optimale
- Variance : Risque lié à notre set de train et à la capacité de généralisation du modèle
- Compromis biais variance : Si on augmente la taille de \mathcal{F} alors on réduit le biais potentiel mais on augmente la variance potentielle
- Pour un ensemble discret \mathcal{F} , on peut trouver une vitesse de convergence logarithmique par rapport au nombre de fonction $|\mathcal{F}|$
- Pour un ensemble infini de fonction : de même mais utilise la VC-dimension de \mathcal{F} : $VC(\mathcal{F})$
- VC-dimension :
 - Un ensemble de points est shattered (pulvérisé) par un espace de fonction si pour tout partitionnement des points en deux ensembles il existe une fonction qui sépare les deux partitions.
 - La VC-dimension (Vapnik-Chervonenkis) de \mathcal{F} sur un espace de données \mathcal{X} est la taille du plus grand ensemble fini de points de \mathcal{X} pulvérisé par \mathcal{F} .
 - Fonctions linéaires : en dimension d , VC-dimension de $d + 1$
 - le nombre d'exemples doit être linéaire en fonction de $VC(\mathcal{F})$
 - **VC-dim grande** = modèle flexible = fit/overfit sur données complexe = plus sensible au bruit // **VC-dim faible** = fonction plus "général" = moins d'overfit mais moins de performance aussi = plus robuste au bruit

13 Bagging et Boosting

On veut pouvoir combiner des classifieurs, ils doivent être indépendants. Comment les rendre indépendants entre eux?
Deux solutions

13.1 Bagging

- Sous échantillon du train, tirage avec remise
- Random forest = arbre de décision + bagging = randomisation du support de décision puis moyenne de tous les noeuds des arbres
- Chacun vas un peu apprendre une partie de l'espace, lié au hasard, puis les décision se moyenne
- Très efficace à grande dimensionnalité

13.2 Boosting

- Correction des erreurs faite en $n - 1$ en n avec une pondération des exemples dans la loss
- Poids uniforme → On augmente le poids où il a fait des erreurs et baisse les poids des bons exemples
- → combinaison des frontière de décision
- Beaucoup d'overfit → garder des arbres de décision à faible profondeur
- Ecrit sous une forme gloutonne == descente de gradient pour les arbre de décision
- AdaBoost : Si l'erreur est supérieur à 0.5 on a pas su améliorer la classif alors on arrete

14 Reinforcement Learning

Policy itération

- $V^\pi(s) = E[G_t | S_t = s] = E[\sum_{k \geq 0} \gamma^k R_{t+k}]$ avec R_{t+k} les récompenses obtenues à l'état $t + k$. V^π représente la moyenne des récompenses possible dans le futur, futur plus où moins proche réglé par γ
- Par l'équation de Bellman

$$V_{k+1}(s) = (T^\pi V_k)(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V_k(s')].$$

- Une application répété de l'opérateur de Bellman T^π fait converger V_k pour évaluer la policy π
- Puis mise à jour de la politique pour chaque état en choisissant l'action qui maximise $V^k(s)$ si j'ai bien compris.

$$\pi_{k+1}(s) = \operatorname{argmax}_a \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V^k(s')].$$

- L'étape d'évaluation de la policy est couteuse. On peut la skip en évaluant directement chaque action pendant l'entraînement, ça fait sauter la première somme dans la formule donnant

$$V^*(s) = \max_{\pi} V^\pi(s) = \max_a \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V^*(s')].$$

Application :

Evaluation d'une politique π

- Simplifier et écrire la formule pour notre MDP, en particulier pour les états stochastiques ou non, la somme avec la proba peut disparaître où bien se réduire.
- Tableau avec les états en colonne et les $V_k^\pi(s)$ en ligne, on vas faire augmenter k
- Appliquer la formule à chaque étape

Exemple d'une formule simplifiée : Voir TD9 Question 2 avec une marche aléatoire.

$$\pi(gauche|s_i)(r(s_i, g, s_{i-1}) + \gamma V_k^\pi(s_{i-1})) + \pi(droite|s_i)(r(s_i, d, s_{i+1}) + \gamma V_k^\pi(s_{i+1})).$$

Mise à jour de π : TODO

value iteration!!!! je crois que c'est juste une maj différente a partir de la valeur des etat, résumer ça