Cours 6 et 7 – Décision multiattribut et élicitation de préférences

Master ANDROIDE – DJ (M1) – Patrice Perny

LIP6 – Sorbonne Université

Plan

I) Introduction à la représentation de préférences par une utilité additive

Motivations

Cadre : décision multiattribut

- représentation de préférences sur des objets multiattributs
- décision (choix, rangement)

Applications : aide à la décision, systèmes de recommandations

Espace des solutions $X = X_1 \times \cdots \times X_n$

Modèle des préférences :
$x \succsim y \iff u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq u(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$\rightarrow$ *décompositions de préférences et représentations compactes*

- sauver de l'espace mémoire
- simplifier l'élicitation (l'acquisition des préférences)
- concevoir des procédures d'optimisation efficaces

Décomposition additive de fonctions d'utilités

Exemple : élaboration d'un menu $x = (x_1, x_2, x_3)$

- main cours $x_1 \in X_1 = \{$meat (M), fish $(F), \ldots\}$,
- drink $x_2 \in X_2 = \{$red wine (R), white wine $(W), \ldots\}$,
- dessert $x_3 \in X_3 = \{$cake (C), sorbet $(S), \ldots\}$.

Décompositions additives et non-additives

- Décomposition additive totale [Luce, Tukey, 64 ; Krantz, Luce, Suppes, Tversky, 71] $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3)$
- Décomposition partielle additive (GAI) [Fishburn, 70 ; Bacchus, Grove 95] $u(x) = u_{12}(x_1, x_2) + u_{13}(x_1, x_3)$
- Décomposition avec forme multiplicative [Keeney, Raiffa, 76] $u(x) = \sum_i k_i u_i(x_i) + k_{12} u_1(x_1) u_2(x_2) + k_{13} u_1(x_1) u_3(x_3)$

Décomposabilité versus expressivité

$(meat, red, cake) \succ (meat, red, sorbet) \succ (meat, white, cake) \succ (meat, white, sorbet) \succ (fish, red, cake) \succ u(fish, red, sorbet) \succ (fish, white, cake) \succ (fish, white, sorbet)$

Représentable par : $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3)$

$u_1(meat) = 4$; $u_1(fish) = 0$; $u_2(red) = 2$; $u_2(white) = 0$; $u_3(cake) = 1$; $u_3(sorbet) = 0$.

$$\begin{array}{llll}
u(meat, red, cake) & = 7\,; & u(meat, red, sorbet) & = 6\,; \\
u(meat, white, cake) & = 5\,; & u(meat, white, sorbet) & = 4\,; \\
u(fish, red, cake) & = 3\,; & u(fish, red, sorbet) & = 2\,; \\
u(fish, white, cake) & = 1\,; & u(fish, white, sorbet) & = 0\,;
\end{array}$$

Decomposabilité versus expressivité

$(meat, red, sorbet) \succ (meat, red, cake) \succ (fish, white, sorbet) \succ (fish, white, cake)(meat, white, sorbet) \succ (meat, white, cake) \succ (fish, red, cake) \succ u(fish, red, sorbet)$

Non representable par : $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3)$

$(meat, red, sorbet) > (meat, white, sorbet) \Rightarrow u_2(red) > u_2(white)$
$(fish, white, sorbet) > (fish, red, sorbet) \Rightarrow u_2(white) > u_2(red)$

Représentable par une fonction d'utilité *partiellement decomposable*
$u(x) = u_{12}(x_1, x_2) + u_{13}(x_1, x_3)$

$$\begin{array}{ll}
u_{12}(meat, red) = 6\,; & u_{12}(fish, white) = 4\,; \\
u_{12}(meat, fish) = 2\,; & u_{12}(fish, red) = 0\,; \\
u_{13}(meat, cake) = 0\,; & u_{13}(meat, sorbet) = 1\,; \\
u_{13}(fish, cake) = 1\,; & u_{13}(fish, sorbet) = 0.
\end{array}$$

Decomposabilité et compacité

EXEMPLE : 12 attributs avec 10 valeurs possibles

SANS DÉCOMPOSITION : 1 facteur de 12 attributs $\rightarrow 10^{12} = 1$ TO

$$u_1(x_1, \ldots, x_{12})$$

DÉCOMPOSITION TOTALE : 12 facteurs $\rightarrow 10 \times 12 = 120$ B

$$u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_{12}(x_{12})$$

DÉCOMPOSITION GAI : 6 facteurs de 3 attributs $\rightarrow 6 \times 10^3 = 6$ KB

$$u_1(x_1, x_2, x_3) + u_2(x_3, x_4, x_5) + \ldots + u_6(x_{11}, x_{12}, x_1)$$

II) Représentation de préférences par une utilité additive : le cas d'attributs à domaines continus

Axiomes pour les utilités additives

Notation : $(z_i, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Axiome (Indépendance en coordonnées)

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall z_i, t_i \in X_i$ et $\forall x_j, y_j \in X_j$, $j \neq i$,
$(z_i, x_{-i}) \succsim (z_i, y_{-i}) \Leftrightarrow (t_i, x_{-i}) \succsim (t_i, y_{-i})$.

Remarques :

- les préférences sur un attributs se raisonnent "toutes choses égales par ailleurs"
- cette condition est nécessaire pour qu'une utilité additive existe
- cette condition permet la définition de préférences marginales $\succsim_i$ définies par :
  $x_i \succsim_i y_i$ iff $\exists (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \times_{j \neq i} X_j$
  tel que $(x_i, x_{-i}) \succsim (y_i, x_{-i})$.

Cette hypothèse permet de réduire considérablement l'effort d'élicitation ; on peut en effet évaluer les utilités attribut par attribut au lieu de considérer toutes les combinaisons.

Axiomes pour les utilités additives

Notation : $(z_i, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Axiome (Essentialité)

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists\, x_i, y_i \in X_i$ et $\exists\, z_j \in X_j$ $\forall j \neq i$, tel que
$(x_i, z_{-i}) \succ (y_i, z_{-i})$.

Quelques remarques :

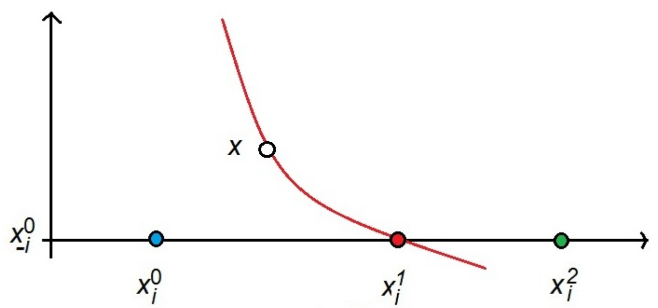
- attribut essentiel = attribut qui est déterminant au moins une fois pour justifier une préférence
- les attributs non-essentiels peuvent être omis dans l'analyse des préférences

Axiomes pour les utilités additives

Notation : $(y_i, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Axiome (Solvabilité restreinte)

Soit $X = \times_{i=1}^n X_i$. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$,
si $(x_i^0, x_{-i}^0) \precsim (x_1, \ldots, x_n) \precsim (x_i^2, x_{-i}^0)$, alors
$\exists\, x_i^1 \in X_i$ tel que $(x_i^1, x_{-i}^0) \sim (x_1, \ldots, x_n)$.



La solvabilité : une propriété nécessaire pour l'elicitation

EXEMPLE : $X = X_1 \times X_i$

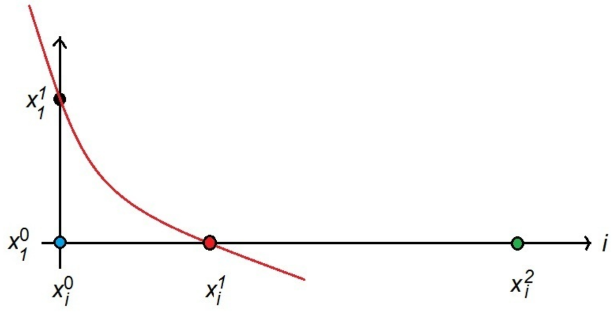
Soient x_1^0 et x_1^1 deux éléments of X_1 tels que $u_1(x_1^1) > u_1(x_1^0)$

Soit $\delta = u_1(x_1^1) - u_1(x_1^0)$ la taille de l'écart de référence (nommé "mèche")

Soit $x_i^0 \in X_i$ tel que $u_i(x_i^0) = 0$.

Soit $x_i^1 \in X_i$ la réponse à la question $(x_i^0, x_1^1) \sim (?, x_1^0)$

Alors $u_i(x_i^0) + u_1(x_1^1) = u_i(x_i^1) + u_1(x_1^0)$

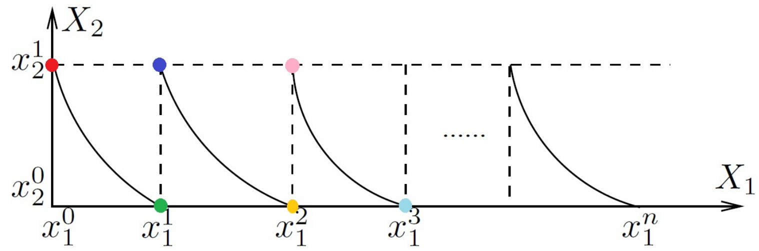


$u_i(x_i^1) = u_i(x_i^0) + u_1(x_1^1) - u_1(x_1^0) = \delta$

Séquences standard et élicitation

Définition (Standard Sequence)

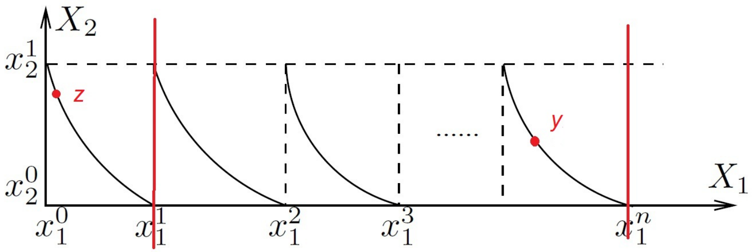
Soit S un ensemble de nombres consécutifs. $\{x_1^k, k \in S\}$ est une séquence standard pour X_1 iff $\exists x^0 = (x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $\exists x^1 = (x_2^1, \ldots, x_n^1)$ tels que $(x_1^0, x_{-1}^0) \not\sim (x_1^0, x_{-1}^1)$ et, $\forall k, k+1 \in N$, $(x_1^{k+1}, x_{-1}^0) \sim (x_1^k, x_{-1}^1)$. $\{x^0, x^1\}$ est appelé mèche de la séquence standard.



Axiomes pour les utilités additives

Axiome (Axiome Archimédien)

Soit $\{x_1^k, k \in S\}$ une séquence standard pour X_1 de mèche $\{x^0, x^1\}$. Si $\exists\, y, z \in X$ tel que $y \succ (x_1^k, x_{-1}^0) \succ z, \forall x_1^k \in X_1$, alors S est fini.



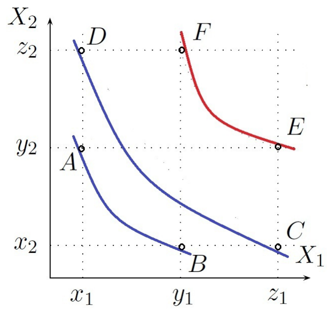
La même définition s'applique à tout attribut X_i, $i > 1$.

La condition de Thomsen (cas de 2 attributs)

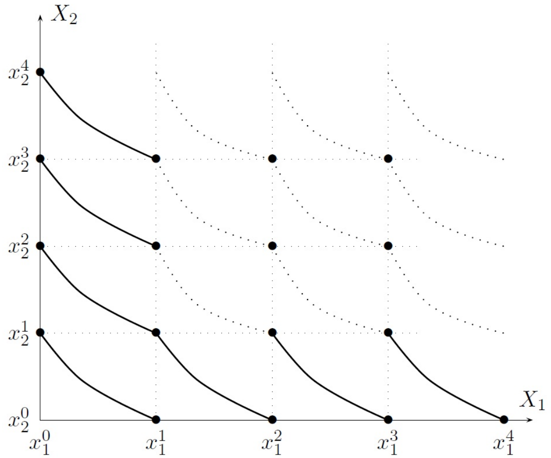
Définition (Condition de Thomsen)

Soit $X = X_1 \times X_2$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overset{A}{(x_1, y_2)} & \sim & \overset{B}{(y_1, x_2)} \\ \underset{C}{(z_1, x_2)} & \sim & \underset{D}{(x_1, z_2)} \end{array} \right. \Rightarrow \underset{E}{(z_1, y_2)} \sim \underset{F}{(y_1, z_2)}$$



Utilité de la condition de Thomsen



Existence et unicité des utilités additives

Théorème (Krantz, Luce, Suppes,Tversky, 1971)

Soit $\succsim$ une relation binaire sur $X = \times_{i=1}^{n} X_i$, with $n \geq 3$. Si la solvabilité restreinte est vérifiée sur tous les attributs et que au moins 3 attributs sont essentiels alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- *$\succsim$ est un préordre complet vérifiant :*
  - *L'indépendance en coordonnées*
  - *L'axiome Archimédien*
- *$\succsim$ est représentable par une fonction d'utilité u de la forme $u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$ et cette utilité est unique à une transformée affine positive près.*

Remarque : Pour le cas $n = 2$ un théorème similaire existe (il faut juste imposer la condition de Thomsen en plus de l'indépendance et de l'axiome archimédien)

Importance de l'unicité à une transformation affine près

Si $u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$ et $v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i)$ sont deux fonctions d'utilité additives reprèsentant la même préférence $\succsim$, alors $\exists \alpha > 0$ et $\exists \beta_i \in \mathbb{R}$, tels que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u_i(\cdot) = \alpha v_i(\cdot) + \beta_i$.

Conséquence :

On peut choisir le 0 de chaque échelle d'utilité u_i (grace aux β_i) et l'unité sur un attribut de référence (disons X_1).

Comment procéder ?

Définir les valeurs de références ayant une utilité nulle 0 sur chaque attribut : $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$
Définir la valeur d'utilité 1 sur l'attribut X_1 : x_1^1
Soit $v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i)$ une utilité additive représentant $\succsim$
Alors $u_i(x_i) = \frac{v_i(x_i)}{v_1(x_1^1) - v_1(x_i^0)} - \frac{v_i(x_i^0)}{v_1(x_i^1) - v_1(x_i^0)}$ pour tous les $x_i \in X_i$ est une utilité additive telle que $u_1(x_1^1) = 1$ et $u_i(x_i^0) = 0$ pour tout i.

Analyse de ce résultat axiomatique

Intérêt

- propose une méthode théorique de construction d'une utilité additive, axiomatiquement fondée
- si la grille à q points, seulement q questions par attribut sont posées au décideur, le modèle peut éventuellement être completé par interpolation
- si une grille plus fine est nécessaire, elle peut être obtenue en réduisant la taille de la mèche
- les questions posées sont relativement simples car les objets à comparer ne varient que sur deux attributs à la fois

Limites

- la solvabilité requise pour engendrer des séquences standard supposent que les attributs soient suffisamment riches (e.g., continus)
- la construction est fondée sur des jugements d'indifférence qui sont réputés moins fiables que les jugements de préférences
- la possibilité de chainer les erreurs dans les réponses est grande du fait de la construction par séquences standard

Une méthode simple pour éliciter la fonction d'utilité

- on peut déjà chercher à éliciter indépendamment les utilités sur chaque attribut X_i (par évaluation directe, ou en utilisant des loteries ou tout autre question de comparaison impliquant des écarts d'utilités sur un attribut)
- on obtient alors n utilités monoattribut indépendantes $v_1, \ldots, v_n$
- les v_i's peuvent alors être agrégés de manière cohérente en une fonction d'utilité de la forme :

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i(x_i)$$

Algorithm 1: A general elicitation procedure

for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  Elicit a utility function $v_i(\cdot)$ over attribute X_i ;
  Determine k_i so as to match v_i with $v_j(\cdot)$, $j < i$
end

Elicitation des coefficients $k_i, i \geq 2$

Initialisation : $k_1 \leftarrow 1$ (non restrictif).

Détermination de k_i à partir de v_j's, $j \leq i$

1. Choisir $j < i$
2. Trouver deux éléments de la forme $x^1 = (a_i, a_j, x)$ et $x^2 = (b_i, b_j, x)$ tels que $x^1 \sim x^2$ avec $x \in \times_{k \notin \{i,j\}} X_k$.

   De là on tire :

$$k_i v_i(a_i) + k_j v_j(a_j) + \sum_{p \neq i,j} k_p v_p(x_p) = k_i v_i(b_i) + k_j v_j(b_j) + \sum_{p \neq i,j} k_p v_p(x_p)$$

3. $k_i \leftarrow k_j \frac{v_j(b_j) - v_j(a_j)}{v_i(a_i) - v_i(b_i)}$

III) Représentation de préférences par une utilité additive : le cas d'attributs à domaines finis

Le cas d'attributs à domaines finis

Cadre général

$X = X_1 \times \cdots \times X_n$ X_i fini

- Pas de solvabilité ni de possibilité de faire une séquence standard
- L'indépendance en coordonnée reste une condition nécessaire pour garantir l'existence des fonctions u_i
- ... quoi d'autre ?

L'indépendance n'est clairement pas suffisante pour assurer qu'il existe $(u_1, \ldots, u_n)$ tel que :

$$x \succ y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) > \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$
$$x \sim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

Exemple (du à D. Bouyssou et M. Pirlot)

$$x_1x_2 \succ y_1x_2 \succ x_1y_2 \succ x_1z_2 \succ y_1y_2 \succ z_1x_2 \succ z_1y_2 \succ y_1z_2 \succ z_1z_2$$

- $\succsim$ vérifie l'indépendance :

$$\begin{array}{lll} x_1w \succ y_1w & \forall w & \\ y_1w \succ z_1w & \forall w & \Rightarrow \quad x_1 \succ_1 y_1 \succ_1 z_1 \\ x_2v \succ y_2v & \forall v & \\ y_2v \succ z_2w & \forall v & \Rightarrow \quad x_2 \succ_2 y_2 \succ_2 z_2 \end{array}$$

- mais aucune utilité additive ne peut représenter $\succ$

$$\begin{array}{ll} x_1z_2 \succ y_1y_2 \Rightarrow & u_1(x_1) + u_2(z_2) > u_1(y_1) + u_2(y_2) \\ y_1y_2 \succ z_1x_2 \Rightarrow & u_1(y_1) + u_2(y_2) > u_1(z_1) + u_2(x_2) \\ & u_1(x_1) + u_2(z_2) > u_1(z_1) + u_2(x_2) \\ z_1y_2 \succ y_1z_2 \Rightarrow & u_1(z_1) + u_2(y_2) > u_1(y_1) + u_2(z_2) \\ y_1x_2 \succ x_1y_2 \Rightarrow & u_1(y_1) + u_2(x_2) > u_1(x_1) + u_2(y_2) \\ & u_1(z_1) + u_2(x_2) > u_1(x_1) + u_2(z_2) \end{array}$$

Introduction d'autres conditions nécessaires : C_m

Soit $m \geq 2$ et $(x^1, \dots, x^m) \in X^m$.
Pour toute permutation $(y^1, \dots, y^m)$ de $(x^1, \dots, x^m)$ on a :

$$\begin{array}{llll} \forall i \in N, & \sum_{j=1}^m u_i(x_i^j) & = & \sum_{j=1}^m u_i(y_i^j) \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_i(x_i^j) & = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_i(y_i^j) \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n u_i(x_i^j) & = & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n u_i(y_i^j) \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^m u(x^j) & = & \sum_{j=1}^m u(y^j) \end{array}$$

Si $x^j \succsim y^j$ $\forall j = 1, \dots, m-1$ alors $u(x^j) \geq u(y^j)$ $\forall j = 1, \dots, m-1$

$$\Rightarrow \text{not}(u(x^m) > u(y^m)) \Rightarrow \text{not}(x^m \succ y^m)$$

Condition C_m

Axiome (C_m)

Pour tout vecteur $(x^1, \dots, x^m) \in X^m$, pour tout vecteur $(y^1, \dots, y^m)$ qui est une permutation de $(x^1, \dots, x^m)$:

$$\forall j = 1, \dots, m-1, x^j \succsim y^j \Rightarrow \textit{not}(x^m \succ y^m)$$

Propriétés

- $C_{m+1} \Rightarrow C_m$ mais la réciproque est fausse.
- $C_2 \Rightarrow \succsim$ vérifie l'indépendance
- $C_3 \Rightarrow \succsim$ est transitive

A montrer en exercice.

Un théorème de représentation pour le cas fini

Théorème (Fishburn, 1970)

Soit $\succsim$ une relation binaire sur un ensemble fini $X \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- *$\succsim$ est représentable par une fonction de la forme $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$*
- *$\succsim$ est complète et satisfait C_m, $\forall m \geq 2$*

REMARQUES

- La représentation, quand elle existe, n'est pas nécessairement unique,
- C_m pour tout ordre m représente une infinité de conditions à tester, c'est infaisable en pratique.
- Pour un ensemble X donné, il suffit en revanche de tester par PL si le système d'équation suivant admet une solution

  $\{\sum_{i=1}^n u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n u_i(y_i)$ pour tout $x, y \in X$ tel que $x \succsim y\}$

  (voir plus loin la méthode UTA).

IV) Elicitation de préférences : la méthode “Even Swaps”

Spécificités de la méthode “Even Swaps”

- élicitation partielle des préférences pour résoudre une instance donnée d’un problème de choix multiattribut
- on fait l’hypothèse de l’existence d’une utilité additive (ou simplement de quelques propriétés utiles nécessaires à l’existence d’une utilité additive)
- on ne cherche pas à déterminer explicitement les utilités mais seulement à se servir des propriétés utiles pour éliminer progressivement des alternatives et determiner la meilleure option pour le décideur
- principe : simplification de la table de décision en utilisant des échanges de performances à utilité constante (even swaps) et réduction progressive de l’ensemble des alternatives à comparer.

Even Swaps : An example

The Decision Problem : Choosing an apartment to rent in Paris

- Building $X_1 = \{Old, Recent, New\}$
- Size (m^2) $X_2 = \{70, 75, 80, \dots, 120\}$
- Rooms $X_3 = \{3, 4, 5\}$
- Locations $X_4 = \{A, B, C, D, E\}$
- Parking $X_5 = \{yes, no\}$
- Monthly Cost $X_6 = \{1500, \dots, 4000\}$

The Decision Table

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$A1$	*Old*	70	3	B	*no*	1800
$A2$	*Recent*	100	4	B	*no*	2000
$A3$	*Old*	120	5	D	*no*	2400
$A4$	*New*	80	4	C	*yes*	2400
$A5$	*Recent*	90	4	B	*no*	2500
$A6$	*Old*	100	5	A	*yes*	2800

We assume that :

$Old \succ Recent \succ new$ and $A \succ B \succ C \succ D \succ E$

Even Swaps : Step 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A1	Old	70	3	B	no	1800
A2	Recent	100	4	B	no	2000
A3	Old	120	5	D	no	2400
A4	New	80	4	C	yes	2400
~~A5~~	~~Recent~~	~~90~~	~~4~~	~~B~~	~~no~~	~~2500~~
A6	Old	100	5	A	yes	2800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
A1	Old	70	3	B	yes	1800	+200
A2	Recent	100	4	B	yes	2000	+200
A3	Old	120	5	D	yes	2400	+200
A4	New	80	4	C	yes	2400	
~~A5~~	~~Recent~~	~~90~~	~~4~~	~~B~~	~~no~~	~~2500~~	
A6	Old	100	5	A	yes	2800	

1. A5 is dominated by A2
2. The cost of a parking car is 200

Even Swaps : Step 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A1	Old	70	3	B	no	1800
A2	Recent	100	4	B	no	2000
A3	Old	120	5	D	no	2400
A4	New	80	4	C	yes	2400
~~A5~~	~~Recent~~	~~90~~	~~4~~	~~B~~	~~no~~	~~2500~~
A6	Old	100	5	A	yes	2800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
A1	Old	70	3	B	yes	1800	+200
A2	Recent	100	4	B	yes	2000	+200
A3	Old	120	5	D	yes	2400	+200
A4	New	80	4	C	yes	2400	
~~A5~~	~~Recent~~	~~90~~	~~4~~	~~B~~	~~no~~	~~2500~~	
A6	Old	100	5	A	yes	2800	

1. A5 is dominated by A2
2. The cost of a parking car is 200

Even Swaps : Step 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
B1	Old	70	3	B	2000
B2	Recent	100	4	B	2200
B3	Old	120	5	D	2600
~~A4~~	~~New~~	~~80~~	~~4~~	~~C~~	~~2400~~
A6	Old	100	5	A	2800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
B1	Old	70	3	B	2000
B2	Old	100	4	B	2200
B3	Old	120	5	D	2600
~~A4~~	~~New~~	~~80~~	~~4~~	~~C~~	~~2400~~
A6	Old	100	5	A	2800

1. A4 is dominated by B2
2. DM is willing to pay 100 to pass from 'Recent' to 'Old'

Even Swaps : Step 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
B1	Old	70	3	B	2000
B2	Recent	100	4	B	2200
B3	Old	120	5	D	2600
~~A4~~	~~New~~	~~80~~	~~4~~	~~C~~	~~2400~~
A6	Old	100	5	A	2800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
B1	Old	70	3	B	2000
B2	Old	100	4	B	2300
B3	Old	120	5	D	2600
~~A4~~	~~New~~	~~80~~	~~4~~	~~C~~	~~2400~~
A6	Old	100	5	A	2800

1. A4 is dominated by B2
2. DM is willing to pay 100 to pass from 'Recent' to 'Old'

Even Swaps : Step 3

	x_2	x_3	x_4	x_6
$B1$	70	3	B	2000
$C2$	100	4	B	2300
$B3$	120	5	D	2600
$A6$	100	5	A	2800

⇩

	x_2	x_3	x_4	x_6
$B1$	100	3	B	2300
$C2$	100	4	B	2300
$B3$	100	5	C	2600
$A6$	100	5	A	2800

⇨

	x_2	x_3	x_4	x_6
$B1$	100	3	B	2300
$C2$	100	4	B	2300
$B3$	100	5	C	2600
$A6$	100	5	A	2800

⇧

	~~x_2~~	x_3	x_4	x_6
~~$B1$~~	~~100~~	~~3~~	~~B~~	~~2300~~
$C2$	~~100~~	4	B	2300
$B3$	~~100~~	5	C	2600
$A6$	~~100~~	5	A	2800

1. B1 : DM is willing to pay up to 300 to pass from 70 to 100
2. B3 : DM is willing to loose up to 20 m^2 to pass from D to C
3. we can delete x_2
4. B1 is dominated

Even Swaps : Step 4

	x_3	x_4	x_6
$C2$	4	B	2300
$C3$	5	D	2600
$A6$	5	A	2800

⇩

	x_3	x_4	x_6
$C2$	4	B	2300
$C3$	5	D	2600
$A6$	5	B	2600

⇨

	x_3	x_4	x_6
$C2$	4	B	2300
~~$C3$~~	~~5~~	~~D~~	~~2600~~
$B6$	5	B	2600

⇧

	x_3	~~x_4~~	x_6
$C2$	4	~~B~~	2300
~~$C3$~~	~~5~~	~~D~~	~~2600~~
$B6$	5	~~B~~	2600

1. A6 : DM is willing to move from A to B to save at least 200
2. C3 is now dominated
3. we can delete x_4

Even Swaps : Step 5

	x_3	x_6
$C2$	4	2300
$B6$	5	2600

$\Rightarrow$

	x_3	x_6
$C2$	4	2300
$C6$	4	2400

$\Downarrow$

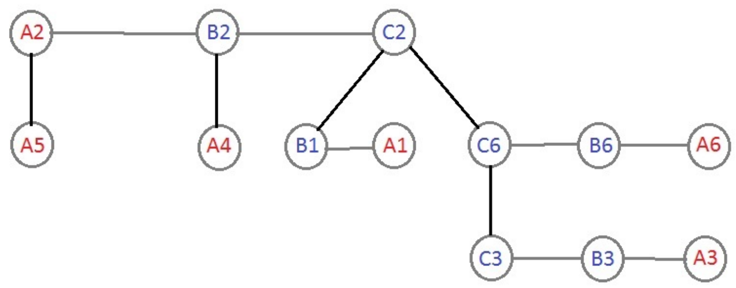
	x_6
$C2$	2300
$C6$	2400

$\Rightarrow$

	x_6
$C2$	2300

1. B6 : DM is indifferent between loosing one room or saving 200
2. we can delete x_4
3. C6 is now dominated by C2
4. The preferred alternative is A2 (indifferent to C2)

Explications fondées sur le graphe de préférences



trait horizontal = indifférence
trait vertical = préférence du haut sur le bas

Principes utilisés dans le processus de décision

Soit $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des attributs.
Soit $A \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$ l'ensemble des alternatives.

P1 : Dominance

Si il existe $x, y \in A$ $\forall i, x_i \succ_i y_i$ alors $x \succ y$ et y peut être éliminé de l'ensemble des alternatives A.

P2 : Independance et essentialité

Si $\exists i \in N, \forall x \in X, x_i = \alpha$ alors $x \succsim y \Leftrightarrow x_{-i} \succsim y_{-i}$. alors i n'est pas un attribut essentiel et il peut être supprimé de l'ensemble N des attributs à considérer.

Autres principes utilisés

P3 : Solvabilité restreinte

$\forall x \in X_i, \forall z \in X_{N\setminus\{i\}}, \forall a_i, b_i \in X_i,$

$$(a_i, z) \succsim x \succsim (b_i, z) \Rightarrow \exists c_i \in X_i, x \sim (c_i, z)$$

P4 : Transitivité

$\succsim$ est transitive. Cela implique notamment que :
si $x \sim y$ alors $x \succsim z \Leftrightarrow y \succsim z$ et $z \succsim x \Leftrightarrow z \succsim y$

Remarques :

Les principes $P1, P2, P3, P4$ sont tous vérifiés lorsque les préférences du décideur sont représentés par une utilité additive :
$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3) + u_4(x_4) + u_5(x_5)$

Analyse de la méthode Even Swaps

Avantages

- simple et intuitive, axiomatiquement fondée
- ne nécessite pas d'expliciter un modèle formel ni d'éliciter les composantes
- permet de produire des explications pour justifier le choix final

Limites

- ne convient que pour des petites tables de décision (peu d'alternatives et d'attributs)
- le processus doit être redémarré si on change l'ensemble des alternatives
- ne fournit pas de modèle des préférences du décideur

V) Elicitation de préférences : la méthode UTA

La méthode UTA (Jacquet-Lagreze and Siksos, 1982)

Utilité additive $u(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n u_i(x_i)$

- sur chaque X_i, r_i niveau de références $(x_i^1,\ldots,x_i^{r_i})$ sont choisis (pour une échelle continue, on discretise en r_i segments). On va alors apprendre le valeurs d'utilités $u_i(x_i^k)$ sur chaque attribut i, les autres valeurs d'utilités s'en déduiront par interpolation.
- les échelles d'utilité sont normalisées en posant : $u_i(x_i^0)=0$ and $u_i(x_i^{r_i})=1$

On utilise un ensemble d'alternatives étalon :
$A=\{a^1,\ldots,a^m\}$ telles que : $a_i^1 \precsim_i a_i^2 \precsim_i \ldots \precsim_i a_i^m$. Si $a_i^k \in [x_i^j, x_i^{j+1}]$, on a par interpolation linéaire :

$$u_i(a_i^k)=u_i(x_i^j)+\frac{a_i^k-x_i^j}{x^{j+1}-x_i^j}\left(u_i(x_i^{j+1})-u_i(x_i^j)\right)$$

Approximation de la fonction d'utilité
$v(x_1,\ldots,x_n)=u(x_1,\ldots,x_n)+\sigma(x)$ telle que :

$$\begin{cases} v(a^{k+1})-v(a^k)\geq\delta & \text{if } a^{k+1}\succ a^k \\ v(a^{k+1})-v(a^k)=0 & \text{if } a^{k+1}\sim a^k \end{cases}$$

où $\delta>0$ est une seuil de discrimination arbitrairement petit.

Formulation par programmation linéaire

Variables du PL : $u_i^k=u_i(x_i^k)$ pour $k=1,\ldots,r_i$ et $\sigma^j=\sigma(a^j)$, $\bar{u}_i^j=u_i(a^j), j=1,\ldots,m$.

$$\min \sum_{k=1}^m \sigma^k$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{u}_i^{k+1}-\sum_{i=1}^n \bar{u}_i^k+\sigma^{k+1}-\sigma^k\geq\delta & \text{if } a^{k+1}\succ a^k \\ \sum_{i=1}^n \bar{u}_i^{k+1}-\sum_{i=1}^n \bar{u}_i^k+\sigma^{k+1}-\sigma^k=0 & \text{if } a^{k+1}\sim a^k \\ \bar{u}_i^k=u_i^j+\frac{a_i^k-x_i^j}{x^{j+1}-x_i^j}\left(u_i^{j+1}-u_i^j\right) & \\ u_i^{k+1}-u_i^k\geq 0 \text{ for all i, k} & \\ \sum_{i=1}^n u_i^{r_i}=1 & \\ u_i^0=0 & i=1,\ldots,n \end{cases}$$

$u_i^k\geq 0, \sigma^j\geq 0, \bar{u}_i^j\geq 0, \forall i,j,k$

Si la valeur de la fonction objectif à l'optimum est 0 alors on a trouvé une représentation parfaitement compatible avec l'échantillon d'apprentissage (alternatives étalon), sinon il n'en n'existe pas mais on fournit un modèle additif pour une relation de préférence approchée.

UTASTAR : un raffinement de UTA

$v(x_1,\ldots,x_n)=u(x_1,\ldots,x_n)-\sigma_+(x)+\sigma_-(x)$

Introduction de variables $w_{ik}=u_i^k-u_i^{k+1}$
(Les conditions de monotonie s'écrivent alors : $\forall i\forall k\ w_{ik}\geq 0$)

Les utilités des solutions peuvent se réécrire en fonction des w_{ij}'s :
$u_i^0=0$ and $u_i^k=\sum_{j=1}^{k-1} w_{ij}$ for all $k=1,\ldots,n_i-1$

Nouvelle formulation du problème par PL

$$\min \sum_{k=1}^m (\sigma_+^k+\sigma_-^k)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_{ik}-\sigma_+^{k+1}+\sigma_-^{k+1}+\sigma_+^k-\sigma_-^k\geq\delta & \text{if } a^{k+1}\succ a^k \\ \sum_{i=1}^n w_{ik}-\sigma_+^{k+1}+\sigma_-^{k+1}+\sigma_+^k-\sigma_-^k=0 & \text{if } a^{k+1}\sim a^k \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i-1} w_{ij}=1 & \\ \ldots & \end{cases}$$

$w_{ij}\geq 0, \sigma_+^k\geq 0, \sigma_-^k\geq 0$ pour tous les i,j,k

VI) Elicitation incrémentale d'utilités

Elicitation incrémentale d'utilités : ISMAUT

Imprecisely specified multiattribute utility theory (ISMAUT), développée par Sage and White (1984)

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i(x)$$

Idée de base : résolution d'une instance d'un problème de choix par réduction progressive de l'ensemble des utilités admissibles et de l'ensemble des solutions potentiellement optimales jusqu'à l'obtention d'une solution nécessairement optimale

- utilités admissibles : toutes les fonctions d'utilités additives compatibles avec les préférences observées jusqu'à présent
- solution potentiellement optimale : solution qui est optimale pour au moins une utilité admissible
- solution nécessairement optimale : solution qui est optimale pour toutes les utilités admissibles

Elicitation dirigée par le critère du min-max regret

(Wang et Boutilier (2003))

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i(x_i)$ élicitation de $(w_1, \ldots, w_n)$ (les u_i sont supposé connus)

W : ens. des poids admissibles (initialement $W = \{w \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\}$)

Le max regret par (regret max encouru en choisissant x plutôt que y) :

$$PMR(x, y, W) = \max_{w \in W} u(y, w) - u(x, w)$$

Le max regret (regret max encouru de choisir x dans X) :

$$MR(x, X, W) = \max_{y \in X} PMR(x, y, W)$$

La valeur du minimax regret

$$MMR(X, W) = \min_{x \in X} MR(x, W)$$

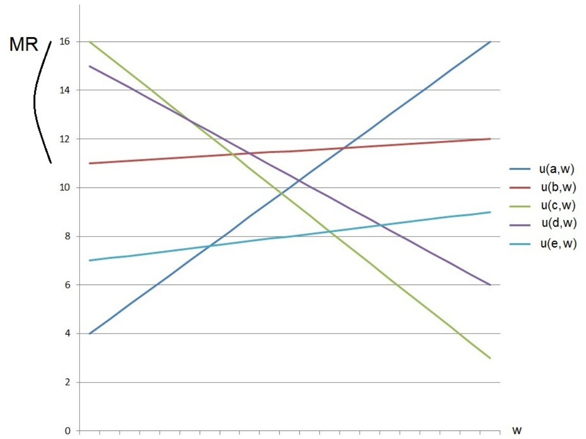
La solution du minimax regret

$$x_W^* = \arg\min_{x \in X} MR(x, X, W)$$

Le calcul du MR

u(x; w) = w x1+ (1-w) x2

a	(16, 4)
b	(12,11)
c	(3, 16)
d	(6, 15)
e	(9, 7)

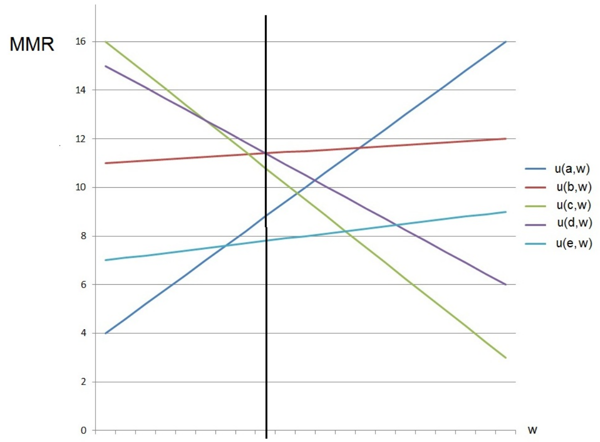


$$\begin{aligned} MR(b, c, [0,1]) &= \max\{3w + 16(1-w) - 12w - 11(1-w), w \in [0,1]\} \\ &= \max\{5 - 14w, w \in [0,1]\} = 5 \end{aligned}$$

Révision du MMR

u(x; w) = w x1+ (1-w) x2

a	(16, 4)
b	(12,11)
c	(3, 16)
d	(6, 15)
e	(9, 7)



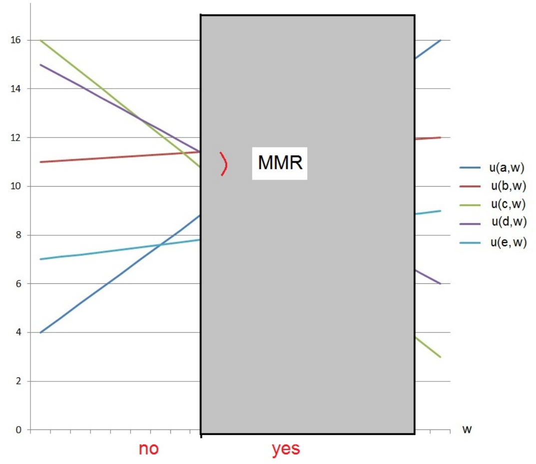
Supposons que l'on demande au décideur de comparer b et d

Révision du MMR sachant $d \succ c$

u(x; w) = w x1+ (1-w) x2

a	(16, 4)
b	(12,11)
c	(3, 16)
d	(6, 15)
e	(9, 7)

?
b > d



Réduction progressive de W

- toute préférence observée du type $x \succsim y$ induit une nouvelle contrainte linéaire sur W de la forme $\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - y_i) \geq 0$
- choix de la paire (x, y) à présenter au décideur : x solution du MMR, y solution maximisant $PMR(x, y, W)$ dans X (pire adversaire de x)

Retour à l'exemple
b est la solution optimale au sens du MMR avec MMR = 5.

Le pire adversaire de b est c

On demande au décideur de comparer b et c... Supposons qu'il préfère c alors on a : $3w + 16(1 - w) \geq 12w + 11(1 - w)$ soit encore $5(1 - w) \geq 9w$ donc $w \leq 5/14$ ce qui réduit W à l'intervalle [0, 5/14].

La nouvelle solution du minimax regret est alors d avec une valeur de MMR assez réduite. On peut s'arrêter là ou continuer en demandant de comparer d et c...

VII) Elicitation de préférences : une approche bayésienne

Approche Bayésienne de l'élicitation

- on suppose qu'une distribution de probabilité a priori est disponible sur les utilités $p(u), u \in U$
- on se donne un ensemble de questions possibles $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$,
- la réponse a_i^k à la question q_i est connue sous forme de probabilités conditionnelles $p(a_i^k/u)$
- on utilise la révision Bayésienne pour calculer la loi a posteriori $p(u/a_i^k)$
- on calcule la valeur espérée de la solution optimale après une telle question :
  $\mathrm{EVOI}(q_i) = \sum_k p(a_i^k) max_{x \in X} \sum_{u \in U} p(u/a_i^k)u(x)$

La valeur de l'information apportée par la question q_i est :
$\mathrm{EVOI}(q_i) - \max_{x \in X} \sum_{u \in U} p(u)u(x)$

On choisit alors la question de valeur d'information apportée maximale.

Exemple : recommandation de films

Dans la base d'utilisateurs on a seulement deux type d'individus : 60% sont consistants avec u_1, et 40% avec u_2

Deux questions possibles :
q : aimez vous le film f ? q' : aimez vous le film f' ?

Probabilité d'une réponse $r \in \{oui, non\}$ aux questions q et q' :

$p(r/u)$	oui	non
u_1	0.3	0.7
u_2	0.8	0.2

$p'(r/u)$	oui	non
u_1	0.3	0.7
u_2	0.4	0.6

Révision Bayésienne : $p(r) = p(r/u_1)p(u_1) + p(r/u_2)p(u_2)$, $r \in \{oui, non\}$

$p(oui) = 0.5$ $p(non) = 0.5$ $p'(oui) = 0.34$ $p'(non) = 0.66$

$p(u/r)$	oui	non
u_1	0.36	0.84
u_2	0.64	0.16

$p'(u/r)$	oui	non
u_1	0.53	0.64
u_2	0.47	0.36

$$p(u/r) = p(r/u)p(u)/p(r)$$

Calcul de la valeur espérée des questions

(0.5)	f_1	f_2	f_3	p u_i/oui
u_1	16	12	7	0.36
u_2	4	11	14	0.64
EV	8.32	11.36	11.48	

(0.5)	f_1	f_2	f_3	p u_i/non
u_1	16	12	7	0.84
u_2	4	11	14	0.16
EV	14.08	11.84	8.12	

$EVOI(q) = 0.5 \times 11.48 + 0.5 \times 14.08 = 12.78$

(0.34)	f_1	f_2	f_3	p' u_i/oui
u_1	16	12	7	0.53
u_2	4	11	14	0.47
EV	10.36	11.53	10.29	

(0.66)	f_1	f_2	f_3	p' u_i/non
u_1	16	12	7	0.64
u_2	4	11	14	0.36
EV	11.68	11.64	9.52	

$EVOI(q') = 11.53 \times 0.34 + \times 11.68 \times 0.66 = 11.63$

$\rightarrow$ q est plus informative que q'

$\rightarrow$ Les deux questions sont utiles puisque la valeur espérée du gain avant la question est EV $= 11.6$ (pour f_2)