Annales ER2

Exercice 1 – Élicitation de préférences [5 pts]

On considère un ensemble X de 8 alternatives dans un problème d'évaluation tri-critère. Chaque alternative de X est caractérisée par un vecteur de performances $x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ comme indiqué dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1^i	3	2	2	1	2	1	4	1
x_2^i	2	1	2	2	1	2	1	0
x_3^i	1	1	2	1	3	0	1	2

On s'intéresse alors à éliciter les poids w_i des critères $i = 1, 2, 3$ dans le cadre du modèle de la somme pondérée. On fait l'hypothèse que les poids sont tous non négatifs et somment à 1.

Q 1.1 Le décideur déclare les préférences suivantes : $x^2 \succsim x^4$ et $x^6 \succsim x^8$. Déduire de ces préférences le polyèdre convexe qui caractérise l'ensemble W des poids admissibles compte-tenu de cette information. Représenter ce polyèdre dans l'espace (w_1, w_2) (on notera qu'on n'a pas besoin de considérer explicitement w_3 puisqu'on sait que $w_3 = 1 - w_1 - w_2$). Déterminer alors les composantes des sommets du polyèdre obtenu (on précisera ici les trois composantes w_1, w_2, w_3). Dans la suite de l'exercice, on notera S l'ensemble des sommets de W.

Q 1.2 Après avoir déterminé l'ensemble X' des solutions Pareto-optimales dans X, calculer, pour chaque paire d'alternatives (x, y) de X' et pour chaque vecteur poids $v \in S$, le regret $R_v(x, y) = v.(y - x)$ que le décideur aurait de choisir x plutôt que y.

Q 1.3 En s'appuyant sur le résultat de la question précédente déterminer, pour chaque paire (x, y) de X', le regret maximum $R(x, y)$ de choisir x plutôt que y sur l'ensemble W des poids admissibles (on prendra soin de bien justifier la réponse). Quel est alors le choix optimal pour le décideur ? Justifier précisément la réponse.

Q 1.4 On s'intéresse maintenant à un autre agrégateur qui évalue toute solution x^i par le critère

$$f_w(x^i) = w_1\tilde{x}_1^i + w_2\tilde{x}_2^i + w_3\tilde{x}_3^i$$

à maximiser, où $\tilde{x}^i$ est le vecteur obtenu à partir de x^i en triant ses composantes par ordre croissant. De plus, on impose que $w_1 \geq w_2$ et $w_2 \geq w_3$ et aussi que $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. En vous inspirant de la méthode des regrets utilisée dans les questions précédentes, déterminer le choix optimal dans X' selon le critère f_w.

Exercice 2 – utilités additives (4 pts)

On souhaite comparer 5 prototypes d'un véhicule automobile en phase de conception. On organise une série de 4 tests pour évaluer ces prototypes et déterminer le meilleur d'entre eux avant production à grande échelle. Les performances des prototypes $\{a, b, c, d, e\}$ sur les

4 tests T_1, T_2, T_3, T_4 sont notées sur 10 et données dans la matrice M suivante :

	T_1	T_2	T_3	T_4
a	6	6	7	3
b	5	6	8	4
c	9	6	9	2
d	5	3	8	4
e	8	7	8	1

On suppose que les préférences du décideur sur les prototypes sont représentables par une fonction d'utilité additive de la forme $u(x) = u_1(x_1)+u_2(x_2)+u_3(x_3)+u_4(x_4)$ où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est le vecteur note du prototype x et les u_i sont des fonctions strictement croissantes. Sous cette hypothése, on va chercher à déterminer le prototype ayant la plus grande utilité. On décide alors d'appliquer les règles suivantes :

RÈGLE 1 : *S'il existe deux prototypes x et y tels que dans la matrice M on a $\forall i, x_i \geq y_i$, l'une (au moins) de ces inégalités étant stricte, alors je peux supprimer la ligne du prototype y dans la matrice M.*

RÈGLE 2 : *S'il existe une colonne de la matrice M dans laquelle toutes les notes sont identiques, je peux supprimer cette colonne.*

RÈGLE 3 : *Si le décideur est indifférent entre deux vecteurs de notes x et x' alors je peux remplacer les notes de x par celles de x' dans la matrice M.*

Q 2.1 À partir de là, si en appliquant les règles 1, 2, 3, on parvient à réduire la matrice M de sorte qu'elle ne comporte plus qu'une ligne, le prototype correspondant à cette ligne est déclaré être le meilleur prototype.

Q 2.2 Justifier précisément le bien fondé des règles 1, 2, 3. Montrer que la règle 1 permet de réduire la matrice M en une matrice M' que l'on précisera.

Q 2.3 Le décideur déclare que si le prototype e avait obtenu un point de moins au test T_2, il aurait pu compenser en gagnant deux points de plus au test T_4. Montrer alors que les règles données ci-dessus permettent de réduire la matrice M' en une matrice M'' que l'on précisera.

Q 2.4 Le décideur déclare ensuite que si c avait obtenu un point de moins au test T_3, il aurait aussi pu compenser en gagnant deux points de plus au test T_4. En déduire le meilleur prototype compte-tenu des informations préférentielles obtenues et expliquer précisément pourquoi il est meilleur que chacun des autres prototypes envisagés (on fournira une explication pour chaque prototype non-retenu).

Exercice 3 – Plus courts chemins mullticritéres [4 pts]

Soit G le graphe de la figure ci-dessous où chaque arc u est muni d'une valuation tri-critère $(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, les f_i étant des fonctions coûts à minimiser.

Q 3.1 Déterminer par l'algorithme de Corley et Moon vu en cours l'ensemble des chemins non-dominés au sens de Pareto parmi les chemins de 1 à 6 et donner leur vecteur coût. En déduire les solutions optimales au sens d'une agrégation lexicographique (on considérera les différentes permutations possibles des critéres).

Q 3.2 Calculer le point idéal x^* dans l'espace des critéres (point dont les composantes réalisent le coût minimum sur chacun des critéres envisagés séparément). Déterminer alors un chemin de 1 à 6 dont les performances sont les plus proche du point idéal dans l'espace des critére (au sens de la distance $d(x, x^*) = \max_{i\in\{1,2,3\}} |x_i - x_i^*|$).

Q 3.3 Déterminer les chemins de 1 à 6 dont le vecteur coût x minimise la fonction

$$f(x) = 3\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$$

où $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ est le vecteur de coût obtenu à partir de x en triant ses composantes par ordre décroissant (on prendra soin de justifier précisément l'approche utilisée).

Q 3.4 Comparer les méthodes de génération d'un compromis utilisées en 2) et en 3).

Exercice 4 – modélisation des préférences

On souhaite modéliser les préférences d'un agent sur un ensemble de 8 alternatives décrites sur trois attributs booléens. Les préférences de l'agent forment l'ordre total suivant :

$$111 \succ 011 \succ 110 \succ 010 \succ 000 \succ 001 \succ 100 \succ 101$$

Q 4.1 Ces préférences sont elles indépendantes pour l'attribut 1 ? pour l'attribut 2 ? pour l'attribut 3 ?

Q 4.2 Montrer que ces préférences ne sont pas représentables par une utilité additive de la forme $u(x, y, z) = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z)$.

Q 4.3 Vérifier que lorsque y est fixé à une valeur donnée, les préférences sur x ne dépendent pas de la valeur de z et réciproquement. (par exemple si $y = 1$, la préférence entre $11z$ et $01z$ ne dépend pas de la valeur de z).

Q 4.4 Peut-on représenter les préférences observées par une utilité de la forme $v(x, y, z) = v_1(x, y) + v_2(y, z)$? Dans l'affirmative on proposera des tables d'utilité à valeurs entières pour $v_1(x, y)$ et $v_2(y, z)$ telles que v permette de décrire les préférences observées ; dans la négative on expliquera pourquoi ce n'est pas possible.

Exercice 5 (7 points) – Forme normale

Soit le jeu dont la matrice des gains sous forme normale est :

L \ C	a	b	c	d
1	(1, 11)	(3, 11)	(7, 10)	(6, 8)
2	(2, 6)	(4, 5)	(7, 4)	(2, 4)
3	(1, 2)	(5, 3)	(7, 2)	(4, 2)
4	(1, 5)	(3, 13)	(6, 9)	(11, 12)

Q 5.1 Que donne la méthode d'élimination itérée de stratégies strictement dominées ?

Q 5.2 Déterminer le ou les équilibre(s) de Nash en stratégie pure.

Q 5.3 Déterminer le ou les équilibre(s) de Nash en stratégie mixte.

Q 5.4 Ces équilibres sont-ils Pareto-optimaux ?

Q 5.5 Un équilibre de Nash est-il toujours Pareto-optimal ? Une solution Pareto-optimal est-elle toujours un équilibre de Nash ?

Exercice 6 (5 points) – L'impatient chasseur de trésor

Un aventurier est sur la piste d'un trésor. Il a malheureusement besoin d'un guide pour le conduire à ce trésor. Le guide propose un partage (g_1, a_1) du trésor. g_1 est la part du

guide, a_1 celle de l'aventurier [1]. L'aventurier peut accepter ce partage, ou proposer un nouveau partage (g_2, a_2). Le guide peut alors accepter ce nouveau partage ou le refuser. Dans ce dernier cas, la tribu guerrière qui protège le trésor les rattrape et ne leur permet de récupérer qu'une fraction $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ du trésor.
L'aventurier, comme tout aventurier, est impatient ce qui se traduit par l'application d'un taux d'actualisation $\delta < 1$ si le jeu dure plus qu'un coup. Le guide, comme tous les guides, est patient et n'applique aucune actualisation.

Q 6.1 Représenter ce jeu sous forme extensive. Ne pas oublier que les gains du jeu sont les gains actualisés si besoin.

Q 6.2 En supposant que les deux joueurs sont rationnels et veulent maximiser leurs gains actualisés, déterminer :
- la décision optimale du guide si l'aventurier propose le partage (g_2, a_2).
- la proposition optimale de l'aventurier si il est amené à en faire une (et les gains associés).
- la décision optimale de l'aventurier quand le guide propose (g_1, a_1).
- la proposition optimale du guide dans ce cas (et les gains associés).

Q 6.3 Discuter des gains en fonction de l'impatience de l'aventurier.

Exercice 7 (5 pt) – mini-poker de 2 tours avec bluff

Deux joueurs J_1 et J_2 jouent à une version minimaliste du poker : après que les 2 joueurs aient misé chacun 2€, le joueur J_1 choisit une carte au hasard parmi 2 cartes G ou P (Gagnante ou Perdante, équiprobable) et ne la montre pas au joueur J_2. Le jeu se déroule ainsi :

(tour 1) a. *J_1 peut soit Relancer soit Se coucher (R ou S). S'il se couche, le pot revient à J_2. S'il relance, il rajoute 2€ au pot.*

b. *Si J_1 a relancé, J_2 doit alors choisir entre Continuer de jouer ou Abandonner (C ou A). S'il abandonne, le pot revient à J_1. S'il continue, il rajoute 2€ au pot.*

(tour 2) c. *Si J_2 a décidé de continuer à l'étape précédente, même déroulement qu'à l'étape a.*

d. *Même déroulement qu'à l'étape b.*

(fin) e. *Si J_2 a décidé de continuer à l'étape précédente, on montre la carte. Si elle est Gagnante, J_1 ramasse le pot sinon c'est J_2 qui gagne.*

Q 7.1 Que pouvez vous dire sur la nature de ce jeu ? Combien y a-t-il de stratégies pures pour J_1 et pour J_2 ?

Q 7.2 En commençant par le nœud de chance (tirage de la carte), proposer une modélisation sous forme extensive de ce jeu. Ne pas oublier les ensembles d'information si il y en a !!!

Q 7.3 Écrire ce jeu sous forme normale. Montrer que J_1 n'a que 3 stratégies pures non dominées. Après avoir éliminé les stratégies dominées de la forme normale, trouver la stratégie mixte optimale pour J_1 et J_2. Quelle est la valeur de ce jeu ?

---

1. $\forall i, g_i + a_i = 1$ et $0 \leq g_i, a_i \leq 1$