TD 7 - Élicitation d'utilités additives

Exercice 2 – Utilités additives

Un Décideur peut choisir entre temps consacré chaque quinzaine au sport et temps consacré aux activités culturelles [les couples (x_1, x_2) de nombres de $\mathbb{R}_+^2$ ci-dessous se lisent "(nombre d'heures de sport par quinzaine, nombre d'heures d'activités culturelles par quinzaine)"].
On admet que ses préférences $\succsim$ dans $\mathbb{R}_+^2$, qui croissent strictement avec $\geq$, sont représentables par une fonction d'utilité additivement séparable $u = u_1 + u_2$.
On sait de plus que le D. est indifférent entre $(10, 5)$ et $(5, 20)$ d'une part, entre $(15, 20)$ et $(10, 25)$ d'autre part.

Q 2.1 Que peut-on en déduire concernant les couples $(15, 5)$ et $(5, 25)$?
Peut-on prévoir leur classement par rapport au couple $(10, 20)$?

$a)$ Dans les trois paires de couples $\begin{cases} (10,5);(5,20) \\ (15,20);(10,25) \\ (5,25);(15,5) \end{cases}$

les premières (resp. deuxièmes) composantes des couples de gauche forment une permutation des premières (resp. deuxièmes) composantes des couples de droite ;
donc, d'après la condition de Thomsen,

$$\begin{cases} (10,5) \sim (5,20) \\ (15,20) \sim (10,25) \end{cases} \Longrightarrow (5,25) \sim (15,5).$$

Par rapport au niveau d'utilité de $(5, 5)$, $(10, 5)$ et $(5, 20)$ sont à $+\Delta u$, $(5, 25)$ et $(15, 5)$ sont à $+\Delta u + \Delta u'$, $(15, 20)$ et $(10, 25)$ à $+2\Delta u + \Delta u'$ et $(10, 20)$ est à $+2\Delta u$.

Comme on n'a aucune indication sur les valeurs relatives de Δu et $\Delta u'$, on ne sait rien sur le classement de $(10, 20)$ par rapport à $(5, 25)$ et $(15, 5)$.

Q 2.2 On apprend de plus que le D. est indifférent entre $(10, 13)$ et $(15, 5)$ d'une part, $(15, 13)$ et $(10, 20)$ d'autre part.
Proposez une fonction d'utilité $u = u_1 + u_2$ sur $\{5, 10, 15\} \times \{5, 13, 20, 25\}$ compatible avec l'ensemble des données précédentes.

On peut fixer $u_1(5) = u_2(5) = 0$ et $u_1(10) = 1$. D'où $u_2(20) = 1$.

$(10, 13) \sim (15, 5) \sim (5, 25) \Longrightarrow 1 + u_2(13) = u_1(15) + 0 = 0 + u_2(25)$;

$(15, 13) \sim (10, 20) \Longrightarrow u_1(15) + u_2(13) = 1 + u_2(20) = 1 + 1 = 2.$

D'où $1 + 2u_2(13) = 2 \Longrightarrow u_2(13) = 1/2$; puis $u_1(15) = u_2(25) = 3/2$.

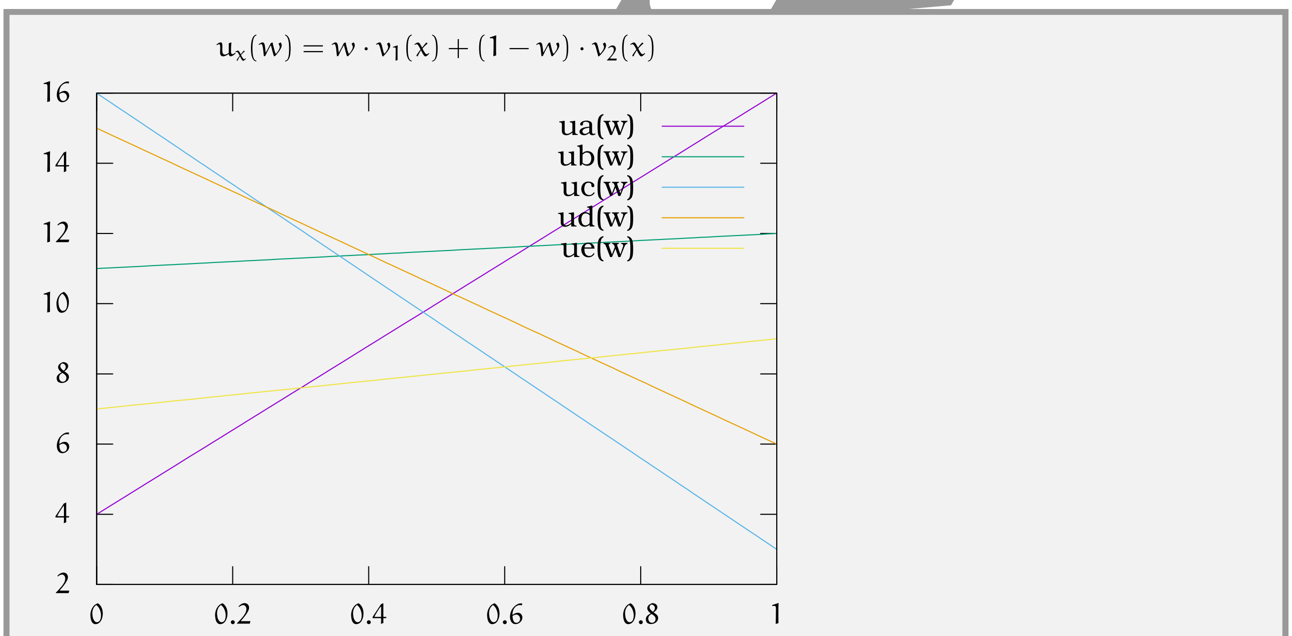
Exercice 4 – Elicitation de préférences

On s'intéresse à l'élicitation d'une fonction additive $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$, dans un contexte de décision bi-attribut pour faciliter la prise de décision d'un décideur dont les préférences se conforment à ce modèle. L'ensemble des alternatives est $A = \{a, b, c, d, e\}$. Pour l'instant, on est parvenu à éliciter les préférences séparément sur les attributs 1 et 2 ce qui a permis de construire deux fonctions d'utilité $v_1(x_1)$ sur l'attribut X_1 et $v_2(x_2)$ sur l'attribut X_2. Les valeurs des fonctions v_1, v_2 sont données dans le tableau suivant :

x	a	b	c	d	e
$v_1(x)$	16	12	3	6	9
$v_2(x)$	4	11	16	15	7

On fait maintenant l'hypothèse qu'il existe un paramètre $w \in [0, 1]$ tel que $u_1(x) = w \cdot v_1(x)$ et $u_2(x) = (1 - w) \cdot v_2(x)$ de sorte que $u_w(x) = w \cdot v_1(x) + (1 - w) \cdot v_2(x)$. L'objet de cet exercice est maintenant de voir comment éliciter le paramètre w pour déterminer la fonction d'utilité qu'il convient d'utiliser dans l'ensemble $\mathcal{U} = \{u_w(x) = w \cdot v_1(x_1) + (1 - w) \cdot v_2(x_2), w \in [0, 1]\}$.

Q 4.1 Pour toute alternative $x \in A$, représenter la droite d'équation $u_w(x) = w \cdot v_1(x) + (1 - w) \cdot v_2(x)$ en fonction de $w \in [0, 1]$. Montrer que dès lors que la fonction d'utilité du décideur appartient à $\mathcal{U}$, une ou plusieurs alternative(s) peuvent être éliminées.



Q 4.2 Calculer le tableau MR des regrets par paires, où les regrets sont définis, pour toute paire (x, y) d'alternatives par :

$$MR(x, y, \mathcal{U}) = \max_{u_w \in \mathcal{U}} \{u_w(y) - u_w(x)\}$$

Les fonctions étant affines, les MR sont obtenues nécessairement en $w = 0$ ou $w = 1$.

	a	b	c	d	e
a	0	7	12	11	3
b	4	0	5	4	−3
c	13	9	0	3	6
d	10	6	1	0	3
e	7	4	9	8	0

Q 4.3 Calculer, pour toute alternative $x \in A$, le regret maximum qu'on puisse avoir en recommandant x, ce regret étant défini par :

$$MR(x, \mathcal{U}) = \max_{y \in X} MR(x, y, \mathcal{U})$$

	a	b	c	d	e
MMR	12	5	13	10	9

Q 4.4 Déterminer quelle est l'alternative qui minimise le regret maximum :

$$x^*_{\mathcal{U}} = \arg\min_{x \in X} MR(x, \mathcal{U})$$

et la valeur du regret associé :

$$MMR(\mathcal{U}) = \min_{x \in X} MR(x, \mathcal{U})$$

Représenter la quantité $MMR(\mathcal{U})$ sur le graphique de la question 1.

$x^*_{\mathcal{U}} = b$ et $MMR(\mathcal{U}) = 5$.

Q 4.5 Soit x^* la solution trouvée à la question précédente. On envisage de la proposer au décideur. Si l'on choisissait x^*, déterminer dans A quel serait son pire adversaire potentiel, défini par

$$y^* = \arg\max_{y \in Y} MR(x^*, y, \mathcal{U})$$

$y^* = c$

Q 4.6 On demande au décideur s'il préfère $x^* \succsim y^*$. Si la réponse est négative, montrer qu'on peut réduire l'ensemble $\mathcal{U}$ des utilités pertinentes et déterminer la nouvelle valeur de $MMR(\mathcal{U})$. Si on voulait stopper le processus d'élicitation ici, quelle solution recommanderait-on ? Si on souhaitait le poursuivre, quelle serait la prochaine question ?

On peut se limiter à l'intervalle $[0, \lambda]$ où $\lambda = 5/14$ est déterminé par l'intersection des droites $u(b, w)$ et $u(c, w)$.
On recommence la procédure ci-dessus restreinte à cette intervalle. On obtient le ta-

bleau des regrets suivants :

	a	b	c	d	e
a	0	7	12	11	3
b	−43/14	0	5	4	−51/14
c	−43/14	0	0	3/7	−51/14
d	−49/14	−3/7	1	0	−57/14
e	4/7	4	9	8	0

Les regrets maximums sont :

	a	b	c	d	e
MMR	12	5	3/7	1	9

On recommanderait d et la question à poser serait : $d \succsim c$?

Q 4.7 Sur la base des questions précédentes, proposer un processus d'élicitation de la fonction d'utilité et préciser les avantages que vous voyez à une telle procédure par rapport à une énumération exhaustive.

On pourrait itérer la procédure précédente jusqu'à trouver une solution qui domine toutes les autres dans l'intervalle des poids possibles. Cette procédure peut permettre d'éliminer de nombreuses solutions dominées à chaque itération.
Les avantages de cette approche est :
- de chercher à minimiser le nombre de question car le minimax cherche à nous protéger le plus possible de réponses peu informatives. On se place toujours dans l'hypothèse ou le décideur serait un adversaire et que ses préférences seraient toujours les plus éloignées de ce que l'on avait anticipé.
- on n'a pas besoin de converger sur une seul utilité, si la famille d'utilités restantes est suffisamment cohérente, ca n'impacte plus guères sur les utilités des alternatives et donc sur les choix. On a même une garantie de performances grace au MMR.
inconvénient éventuel : l'élicitation est dédiée à un ensemble donné d'alternatives. Face à un autre ensemble, on peut considérer que l'élicitation faite peut reservir mais peut etre faut il la continuer car l'ensemble des utilités restantes est peut se révéler encore trop large pour discriminer sur de nouvelles alternatives. C'est qd meme moins embetant que pour la méthode "even swaps" ou il faut repartir à 0