TD 6 - Utilités additives

Exercice 1 – Cancellation axiom

Q 1.1 Montrer que si une relation binaire $\succsim$, dans $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ satisfait la condition d'annulation d'ordre 3, (C_3), elle est nécessairement transitive.

> Condition d'annulation d'ordre 3, (C_3) :
> $[(r_1,\ s_1,\ t_1)$ permutation de $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ et $(r_2,\ s_2,\ t_2)$ permutation de $(a_2,\ b_2,\ c_2)]$
> entraînent : $a \succsim r$ ET $b \succsim s \;\Rightarrow\; c \precsim t$
>
> $\forall x, y, z,\ (a, b, c) = (x, y, z)$ et $(r, s, t) = (y, z, x)$ satisfont les conditions de permutation ; donc par (C_3), $x \succsim y$ ET $y \succsim z \;\Rightarrow\; z \precsim x$.

Q 1.2 Que serait (C_2) ? Quelles sont toutes les implications de (C_2) ? Montrer que si $\succsim$ est réflexive, $(C_3) \Rightarrow (C_2)$.

> Par analogie, (C_2) serait :
> $[(r_1,\ s_1)$ permutation de $(a_1,\ b_1)$ et $(r_2,\ s_2)$ permutation de $(a_2,\ b_2)]$
> entraînent : $a \succsim r \;\Rightarrow\; b \precsim s$
> Si $(r, s) = (a, b)$, la propriété dit que $a \succsim a \;\Rightarrow\; b \precsim b$, ce qui est logiquement équivalent à dire, puisque c'est vrai $\forall a, b \in \mathcal{X}$, que $\succsim$ est soit réflexive, soit irréflexive.
> Si $(r, s) = (b, a)$, la propriété est tautologique : $a \succsim b \;\Rightarrow\; b \precsim a$.
> Si $r = (b_1,\ a_2)$ et $s = (a_1,\ b_2)$, la propriété dit que : $(a_1,\ a_2) \succsim (b_1,\ a_2) \;\Rightarrow\; (b_1,\ b_2) \precsim (a_1,\ b_2)$, $\forall a_2,\ b_2$, c-à-d que $\succsim$ est $\{1\}$-indépendante ;
> le dernier cas, $r = (a_1,\ b_2)$ et $s = (b_1,\ a_2)$, donne la $\{2\}$-indépendance.
>
> Pour montrer que $(C_3) \Rightarrow (C_2)$, il suffit de considérer le cas particulier où $b = s$ dans (C_3) ; en effet, $(r_1,\ s_1)$ est alors une permutation de $(a_1,\ b_1)$ et $(r_2,\ s_2)$ une permutation de $(a_2,\ b_2)$.

Q 1.3 Montrer que (C_4) :

Si les 4 choix $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$, $d = (d_1, d_2)$
ont globalement les mêmes premières et secondes composantes
que les 4 autres choix $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2)$, $v = (v_1, v_2)$, alors
$a \succsim r$ ET $b \succsim s$ ET $c \succsim t \Rightarrow d \precsim v$

est aussi une condition nécessaire d'existence d'une utilité additive.

> (C_4) :
> " Si $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$, $d = (d_1, d_2)$ ont globalement les mêmes premières et secondes composantes que $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2)$, $v = (v_1, v_2)$, alors $[a \succsim r$ ET $b \succsim s$ ET $c \succsim t] \Rightarrow d \precsim v$ "
> La démonstration que c'est une condition nécessaire d'existence d'une utilité additive

est la même que pour (C_3) :

$$\begin{aligned} u(a)+u(b)+u(c)+u(d) &= \\ [u_1(a_1)+u_1(b_1)+u_1(c_1)+u_1(d_1)]+[u_2(a_2)+u_2(b_2)+u(c_2)+u(d_2)] &= \\ [u_1(r_1)+u_1(s_1)+u_1(t_1)+u_1(v_1)]+[u_2(r_2)+u_2(s_2)+u(t_2)+u(v_2)] &= \\ u(r)+u(s)+u(t)+u(v) \end{aligned}$$

d'où :

Si $a \succsim r$ ET $b \succsim s$ ET $c \succsim t$
i.e. $u(a) \geq u(r), u(b) \geq u(s), u(c) \geq u(t)$,
Alors $u(d) \leq u(v)$
i.e. $d \precsim v$

Q 1.4 Montrer que $(C_4) \Rightarrow (C_3)$.

Pour montrer que $(C_4) \Rightarrow (C_3)$, il suffit de considérer le cas particulier où $d = v$ dans (C_4) ; en effet, (r_1, s_1, t_1) est alors une permutation de (a_1, b_1, c_1) et $(r_2, s_2, , t_2)$ une permutation de (a_2, b_2, c_2).

Q 1.5 Montrer que (C_4) contient en particulier la *condition de Reidemeister* :

$$\text{Soit } x_1, y_1, z_1, w_1 \in \mathcal{X}_1, x_2, y_2, z_2, w_2 \in \mathcal{X}_2 \text{ et tels que :}$$
$$(x_1,x_2),\ (y_1,y_2),\ (y_1,w_2),\ (x_1,z_2),\ (w_1,y_2),\ (z_1,x_2),\ (z_1,z_2)\ (w_1,w_2) \in \mathcal{X} \text{ alors}$$
$$(x_1,x_2) \sim (y_1,y_2) \text{ ET } (y_1,w_2) \sim (x_1,z_2) \text{ ET } (w_1,y_2) \sim (z_1,x_2) \Rightarrow (z_1,z_2) \sim (w_1,w_2)$$

Condition de Reidemeister :
$[(x_1,x_2) \sim (y_1,y_2) \text{ ET } (y_1,w_2) \sim (x_1,z_2) \text{ ET } (w_1,y_2) \sim (z_1,x_2)] \Rightarrow (z_1,z_2) \sim (w_1,w_2)$.

Il suffit d'appliquer (C_4) à :
- $a = (x_1, x_2)$,
- $r = (y_1, y_2)$,
- $b = (y_1, w_2)$,
- $s = (x_1, z_2)$,
- $c = (w_1, y_2)$,
- $t = (z_1, x_2)$,
- $d = (z_1, z_2)$ et
- $v = (w_1, w_2)$.

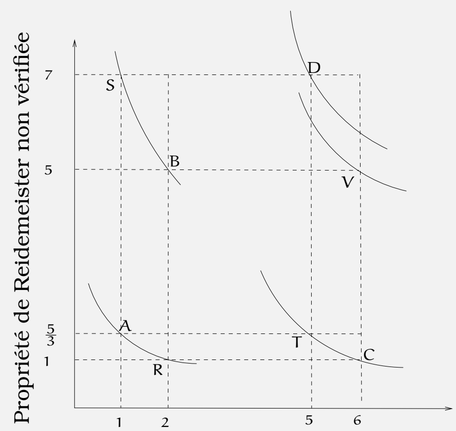
Q 1.6 On suppose que $\mathcal{X}$ ne contient que les 8 couples suivants : $\begin{vmatrix} (1,\frac{5}{3}) & (2,1) & (2,5) & (1,7) \\ (6,1) & (5,\frac{5}{3}) & (5,7) & (6,5) \end{vmatrix}$
et que les préférences y sont représentables par la fonction d'utilité :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^2 + 2x_2 + x_1.x_2$$

(*i*) Montrer que les préférences sont $\{1\}$-indépendantes et $\{2\}$-indépendantes.
(*ii*) Montrer que la condition de Reidemeister n'est pas vérifiée.
(*iii*) Montrer que la condition de Thomsen est vérifiée trivialement. (C_3) l'est-elle ? Qu'en concluez-vous ?

On calcule $u(1,\frac{5}{3}) = u(2,1) = \frac{16}{3}$; $u(2,5) = u(1,7) = \frac{64}{3}$; $u(6,1) = u(5,\frac{5}{3}) = 20$; $u(5,7) = \frac{172}{3} \neq u(6,5) = 42$.

(*i*) Comme $u(5,\frac{5}{3}) > u(1,\frac{5}{3})$ et $u(5,7) > u(1,7)$ d'une part, $u(6,1) > u(2,1)$ et $u(6,5) > u(2,5)$ d'autre part, les préférences sont 1-indépendantes.
Comme $u(1,7) > u(1,\frac{5}{3})$ et $u(5,7) > u(5,\frac{5}{3})$ d'une part, $u(2,5) > u(2,1)$ et $u(6,5) > u(6,1)$ d'autre part, les préférences sont 2-indépendantes.



(*ii*) Les quadruplets $((1,\frac{5}{3}), (2,5), (6,1), (5,7))$ et $((2,1), (1,7), (5,\frac{5}{3}), (6,5))$ ayant globalement les mêmes composantes, la condition de Reidemeister n'est pas vérifiée.

(*iii*) La condition de Thomsen est vérifiée trivialement parce que on ne peut trouver deux triplets distincts satisfaisant la propriété de permutation des composantes.
(C_3) est également vérifiée, car elle équivaut à l'ensemble condition de Thomsen + transitivité+i-indépendances.

On peut en conclure que NON[$(C_3) \Rightarrow (C_4)$]

Exercice 3 – Existence d'utilités additives

Soit $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ un ensemble de 8 voitures dont les caractéristiques sont analysées par un acheteur potentiel. Pour simplifier on considère que les voitures sont caractérisées par 3 attributs qui sont leur couleur, leur marque et le type de moteur (essence, diesel, hybride) :

	Couleur	Marque	Moteur
a	bleu	peugeot	essence
b	rouge	citroen	diesel
c	vert	renault	hybride
d	bleu	peugeot	diesel
e	rouge	citroen	hybride
f	rouge	renault	diesel
g	vert	peugeot	hybride
h	bleu	citroen	essence

Q 3.1 Sachant que l'acheteur a les préférences suivantes : $g \succ c \succ b \succ f \succ e \succ a \succ h \succ d$ on souhaite trouver une représentation de ses préférences par une utilité additive, si elle existe. Dans l'hypothèse où une telle représentation existe, quelles seraient les préférences selon chaque attribut.

Les voitures réordonnées selon les préférences décroissantes pour y voir plus clair :

	Couleur	Marque	Moteur
g	vert	peugeot	hybride
c	vert	renault	hybride
b	rouge	citroen	diesel
f	rouge	renault	diesel
e	rouge	citroen	hybride
a	bleu	peugeot	essence
h	bleu	citroen	essence
d	bleu	peugeot	diesel

Si les préférences sont représentables par une utilité additive, on obtient les préférences suivantes sur les attributs (dans l'ordre de difficulté croissante) :

- Marque : peugeot $\succ$ citroen (car $a \succ h$) $\succ$ renault (car $b \succ f$). Et utile pour la dernière question : peugeot $\succ$ renault confirmé par $g \succ c$.
- Moteur : essence $\succ$ diesel (car $a \succ d$) $\succ$ hybride (car $b \succ e$).
- Couleur : vert $\succ$ rouge (car $c \succ e$ et renault $\prec$ citroen) $\succ$ bleu (car $b \succ d$ et citroen $\prec$ peugeot).

Q 3.2 Écrire un programme linéaire qui permette de tester s'il existe une utilité additive permettant de représenter le classement de l'acheteur et qui, si elle existe, renvoie une solution entière. Si elle n'existe pas comment modifier le programme linéaire pour trouver une fonction d'utilité additive qui approxime au mieux les préférences observées.

On introduit les variables $u^c_v, u^c_r, u^c_b, u^m_p, u^m_c, u^m_r, u^t_e, u^t_d, u^t_h$ représentant les utilités

$$u^c(vert), u^c(rouge), u^c(bleu), u^m(peugeot), u^m(citroen), u^m(renault), u^t(essence), u^t(diesel), u^t(hybride)$$

où les exposants c, m, t représentent respectivement les attributs couleur, marque et type de moteur.
En traduisant les préférences en contraintes, le programme linéaire s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{ll}
\min & \max(u^c_v, u^c_r, u^c_b, u^m_p, u^m_c, u^m_r, u^t_e, u^t_d, u^t_h) \\
\text{s.c.} & u^m_p \geq u^m_r + \epsilon \\
& u^c_v + u^m_r + r^t_h \geq u^c_r + u^m_c + u^t_d + \epsilon \\
& u^m_c \geq u^m_r + \epsilon \\
& u^m_r + u^t_d \geq u^m_c + u^t_h + \epsilon \\
& u^c_r + u^m_c + u^t_h \geq u^c_b + u^m_p + u^t_e + \epsilon \\
& u^m_p \geq u^m_c + \epsilon \\
& u^m_c + u^t_e \geq u^m_p + u^t_d + \epsilon \\
& u^c_v, u^c_r, u^c_b, u^m_p, u^m_c, u^m_r, u^t_e, u^t_d, u^t_h \geq 0
\end{array}$$

On peut fixer $\epsilon = 1$ car on peut tout "rescaler". La fonction objectif indique qu'on recherche les plus petites valeurs possibles pour les utilités. On aurait pu choisir autre chose.
Ici, on utilise la linéarisation classique du $\min\max$ en introduisant une variable supplémentaire.
Le programme a bien une solution : $u^c_v = 10, u^c_r = 6, u^c_b = 0, u^m_p = 2, u^m_c = 1, u^m_r = 0, u^t_e = 4, u^t_d = 2, u^t_h = 0$. Les utilités des voitures vont de 12 à 4.

Q 3.3 Reprendre la question précédente dans l'hypothèse où le décideur changerait d'avis et permuterait les positions de g et c dans son classement.

On introduit les variables $u_v^c, u_r^c, u_b^c, u_p^m, u_c^m, u_r^m, u_e^t, u_d^t, u_h^t$ représentant les utilités

$$u^c(vert), u^c(rouge), u^c(bleu), u^m(peugeot), u^m(citroen), u^m(renault), u^t(essence), u^t(diesel), u^t(hybride)$$

où les exposants c, m, t représentent respectivement les attributs couleur, marque et type de moteur.
En traduisant les préférences en contraintes, le programme linéaire s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{rl}
\min & \max(u_v^c, u_r^c, u_b^c, u_p^m, u_c^m, u_r^m, u_e^t, u_d^t, u_h^t) \\
\text{s.c.} & u_r^m \geq u_p^m + \epsilon \\
& u_v^c + u_r^m + r_h^t \geq u_r^c + u_c^m + u_d^t + \epsilon \\
& u_c^m \geq u_r^m + \epsilon \\
& u_r^m + u_d^t \geq u_c^m + u_h^t + \epsilon \\
& u_r^c + u_c^m + u_h^t \geq u_b^c + u_p^m + u_e^t + \epsilon \\
& u_p^m \geq u_c^m + \epsilon \\
& u_c^m + u_e^t \geq u_p^m + u_d^t + \epsilon \\
& u_v^c, u_r^c, u_b^c, u_p^m, u_c^m, u_r^m, u_e^t, u_d^t, u_h^t \geq 0
\end{array}$$

pas de solution, notamment l'inversion de préférences entre g et c entraîne une contradiction avec peugeot $\succ$ citroen (car $a \succ h$) $\succ$ renault (car $b \succ f$).
On cherche maintenant à trouver une utilité additive qui minimise les erreurs :

$$\begin{array}{rl}
\min & \sum_i \epsilon_i \\
\text{s.c.} & u_r^m + \epsilon_1 \geq u_p^m + 1 \\
& u_v^c + u_p^m + r_h^t + \epsilon_2 \geq u_r^c + u_c^m + u_d^t + 1 \\
& u_c^m + \epsilon_3 \geq u_r^m + 1 \\
& u_r^m + u_d^t + \epsilon_4 \geq u_c^m + u_h^t + 1 \\
& u_r^c + u_c^m + u_h^t + \epsilon_5 \geq u_b^c + u_p^m + u_e^t + 1 \\
& u_p^m + \epsilon_6 \geq u_c^m + 1 \\
& u_c^m + u_e^t + \epsilon_7 \geq u_p^m + u_d^t + 1 \\
& u_v^c, u_r^c, u_b^c, u_p^m, u_c^m, u_r^m, u_e^t, u_d^t, u_h^t \geq 0 \\
& \epsilon_i \geq 0
\end{array}$$

Les deux premières contraintes doivent être changées.
En mettant une borne supérieure (1000) sur les valeurs des variables, on trouve : $u_v^c = 1000, u_r^c = 2, u_b^c = 0, u_p^m = 0, u_c^m = 0, u_r^m = 1, u_e^t = 1, u_d^t = 0, u_h^t = 0$. Les utilités des voitures valent alors dans l'ordre décroissant des préférenes : $1001, 1000, 2, 3, 2, 1, 1, 0$.