

1 Généralité

- Fonction de perte : quantifie l'erreur associé à une décision. Erreur simple : A chaque fois qu'on se trompe, on compte 1 : 0-1 loss
- Risque : Proba de se tromper, $R(y_i|x) = \sum_j l(y_i, y_j) P(y_j|x) =$ Moyenne de la Loss pondéré par les probas à post
- Risque continue? : $R(f) = \int_{x \in \mathcal{X}} R(f(x)|x) p(x) dx$ ($p(x) = ???$) = Esperance du X sur notre domaine continue
- iso-contours == courbe de niveau
- Une epoque = on a vu une fois tous les exemples dans le gradient
- Hinge-loss = $\max(0, 1 - y f_w(x))$
 - the Hinge loss penalizes predictions $y < 1$, corresponding to the notion of a margin in a support vector machine.
 - When y and $f_w(x)$ have the same sign (meaning y predicts the right class) and $|f_w(x)| \geq 1$, the hinge loss = 0
 - When they have opposite signs, the hinge loss increases linearly with $f_w(x)$ and similarly if $|f_w(x)| \geq 1$, even if it has the same sign (correct prediction, but not by enough margin).
- Lorsque les données sont de petites dimensions, le risque de sur-apprentissage est plus petit.
- Lors d'une batch de gradient, il n'est pas nécessaire de mélanger les exemples car tous les exemples sont utilisés dans chaque mise à jour de poids. VS En général, il est recommandé de mélanger les exemples lors d'une descente de gradient stochastique (SGD) afin de garantir une convergence plus rapide et une meilleure généralisation.
- Langrangien : contrainte : $g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x)$
- Condition d'optimalité KKT : x solution ssi
$$\begin{cases} \delta f(x^*) - \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \Delta g_i(x^*) - \sum_{j=1}^q \mu_j^* \Delta h_j(x^*) \\ \mu_j^* \leq 0, j = 1, \dots, q \\ \mu_j^* h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, q \end{cases}$$

1.1 Point algèbre linéaire

$$x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$$

$$\|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\text{Unit vector} = \frac{x}{\|x\|}$$

$$\text{With matrix : } x \cdot y = X^T Y$$

$$(Ax) \cdot y = x \cdot (A^T y)$$

$$\frac{d}{dt}(x \cdot y) = x \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \cdot y$$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle$ forme bilinéaire symétrique défini positive

$$\Leftrightarrow c \langle x, y \rangle = \langle cx, y \rangle = \langle x, cy \rangle, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, c^2 \langle x, y \rangle = \langle cx, cy \rangle$$

λ valeur propre de M ssi $Mx = \lambda x$

1.2 Descente de gradient

Point initial x_0 et $\epsilon \geq 0$.

1. Calcul de $\nabla f(x_k)$
2. Test d'arrêt : si $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$
3. Calcul d'un pas $\alpha_k > 0$ par une règle de recherche linéaire en f en x_k le long de la direction $-\nabla f(x_k)$
4. Nouvel itéré : $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

1.3 Dérivé des matrices

$$\frac{\partial(vMv)}{\partial v} = (M + M^T)V = 2MV \text{ si } M \text{ symétrique}$$

$$\frac{\partial(v^T a)}{\partial v} = \frac{\partial(a^T v)}{\partial v} = a$$

$$\frac{\partial(\log \det M)}{\partial v} = M^{-1}$$

$$\frac{\partial(\text{Tr}(AM))}{\partial v} = A$$

1.4 Multiplicateur de Lagrange

Soit $f(x)$ fonction à optimiser, sous $g(x) = 0$ contraintes d'égalités. On pose : $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda(x)$ nouvelle fonction de plus grande dimension à optimiser comme on a l'habitude en annulant le gradient : $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$. Légitimement on doit vérifier si le point est un min ou un max ou un point selle avec la matrice hessienne mais osez.

1.5 KKT & contrainte d'inégalité

Version complete de Lagrange : Fonction objectif f , g_i contrainte d'égalité, h_j contrainte d'inégalité tel que $h_i(x) \leq 0$.
Fonction duale : $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x)$. Les condition KKT pour un point x^* extremum sont

(aka résoudre le système)

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \mu_j^* \leq 0, j = 1, \dots, q \\ \mu_j^* h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, q \end{cases}.$$

2 Arbre de décision

Algo général :

1. Déterminer la meilleure caractéristique dans l'ensemble de données d'entraînement.
2. Diviser les données d'entraînement en sous-ensembles contenant les valeurs possibles de la meilleure caractéristique.
3. Générez de manière récursive de nouveaux arbres de décision en utilisant les sous-ensembles de données créés.
4. Lorsqu'on ne peut plus classer les données, on s'arrête.

Méthode de division des données : On va utiliser l'entropie [Entropie] [Origine de la formule de l'entropie](#) Soit X une variable aléatoire pouvant prendre n valeurs x_i

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \log(P(X = x_i)).$$

Mesure l'homogénéité d'un dataset. C'est également la moyenne de la surprise (voir la vidéo) [Gain d'information] Mesure la réduction espérée de l'entropie causée par le partitionnement des exemples.

En faisant un test T sur un des attributs, on obtient deux partitions d'exemples de X : X_1 qui vérifie le test et X_2 qui ne vérifie pas le test (resp. Y_1 et Y_2).

$$H(Y|T) = \frac{|X_1|}{|X|} H(Y_1) + \frac{|X_2|}{|X|} H(Y_2).$$

Gain d'information :

$$I(T, Y) = H(Y) - H(Y|T).$$

On veut maximiser le gain d'information par le split \Leftrightarrow minimiser $H(Y|T)$

3 KNN

- Prendre les K plus proches voisins pour classer
- K petit == noisy and subject to the effects of outliers == overfitting?
- K grand == underfitting

4 Classifieur bayésien

On a :

- $P(y)$ fréquence des classes dans le dataset
- $P(x|y)$ les points de notre jeu de données. Graphiquement : les points coloriés

On cherche :

$$\arg \max_y P(y|x) = \arg \max_y \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}.$$

Naïve Bayes : indépendance des dimensions de x , on peut développer le $P(x|y) = P(x_1|y) \dots P(x_d|y)$.

Puis rapport de vraisemblance **en utilisant le risque** pour prendre la décision.

Remarque :

- Classifieur bayésien = le classifieur qui minimise le risque = le meilleur classifieur possible
- Classifieur optimal car minimise l'erreur car en choisissant la plus grande proba, on ne peut pas réduire $1 - P(y|x)$ qui est déjà le plus grand possible
- $P(x)$ difficile à calculer = répartition des points dans l'espace, dans le graph 2d non colorié. En général très petit, uniquement utile pour générer des données, pas pour faire l'argmax (aka classer).

Autre truc important :

- On utilise classiquement une 0-1 loss
- Frontière de décision : $\frac{R(+|x)}{R(-|x)} > 1 \rightarrow$ Permet de prendre en compte les coûts asymétriques des classes. Forme dans \mathbb{R}^2 : cercle

5 Estimation de densité

5.1 Par histogramme

[Estimation par histogramme] Soit Y une v.a.r. nombre de point tombant dans un bin : $Y \sim \mathcal{B}(n, p_b V)$. On a donc $E(Y) = np_b V \Leftrightarrow p_b = \frac{k}{nV}$.

- Cas discret : Comptage dans chaque classe puis normalisation par le nombre d'exemple $N \rightarrow p_b = \frac{k}{nV} = \frac{\text{Nb dans le bin}}{\text{nb d'ech tot} * \text{Volume d'un bin}}$
- Cas continu : Discretisation des valeurs puis comptage et normalisation

Importance de la discrétisation :

- Petit \rightarrow sur-apprentissage, trou dans l'histogramme
- Trop grand \rightarrow sous-apprentissage

Limite :

- Grande dimension \rightarrow Perte de sens exponentiel (3 ou 4 max)
- Effet de bord : petit changement dans les bins, gros changement d'estimation.

\rightarrow Solution : Estimation par noyaux

5.2 Estimation de densité par noyaux

Intuition figure [intuitionnoyaux] : Plutôt que de décider d'une discrétisation a priori, l'estimation est faite en centrant une fenêtre autour du point d'intérêt x_0 (dans un espace de dimension d) à posteriori. \rightarrow Problème : pas continue (si on bouge la boîte et qu'un point rentre dedans, ça fait faire un saut à la fonction)

5.2.1 Fenêtre de Parzen

On combine la solution précédente avec une densité/noyaux. Classiquement Gaussien. pour obtenir un truc lisse et continue [Fenêtre de Parzen] Soit $(x_1, \dots, x_N) \sim f$ iid

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{N * h} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Avec K le noyaux **centrée et réduit sur x** , souvent une fonction gaussienne. Si c'est une fonction rectangle ça fonctionne aussi. Puis y'a plein d'autre noyaux possible.

6 Régression Linéaire

- MSE : $(XW - Y)^T(XW - Y) = W^T X^T XW - (Y^T XW)^T - Y^T XW + Y^T Y$

$$\begin{aligned} \nabla_W MSE &= 2X^T XW - X^T Y - Y^T X \\ &= 2X^T XW - X^T Y - X^T Y \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^T = \lambda \\ &= 2X^T(XW - Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow W = (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

- Sinon descente de gradient

7 Régression Logistique

- On peut pas utiliser la MSE car distance à la frontière de décision peut être très grande pour un point qui est très très certainement dans une classe
- On va plutôt essayer de modéliser la confiance qu'on a dans la classif d'un point \rightarrow Proba : $p(y = 1|x) = \mu(x)$
- Modélisation de cette proba par un truc linéaire qu'on projette entre 0 et 1 avec la sigmoïde ou tanh
- On remarque que le log ratio : $\log \frac{\mu(x)}{1-\mu(x)} = f_w(x)$ pour la sigmoïde
- Pas de solution analytique à la log vrais : descente de gradient

8 SVM

- Donnée non linéaire \rightarrow Projection, dim ++ \rightarrow Attention sur apprentissage + quel dim choisir \rightarrow SMV do this auto
- Résous le problème de l'unicité de la solution également
- Maximiser la marge $\gamma \Leftrightarrow$ minimiser $\|w\|$ sous la contrainte $\forall i, (wx^i + b)y^i \geq 1$ par des calculs obscures (≥ 1 car on veut que la distance entre la droite de régression et ces deux marges soit supérieur 1)
- Prise en compte des erreurs :
 - ξ variable de débordement par rapport à sa marge pour chaque point mal classé \rightarrow Raison obscure $\rightarrow \xi = \max(0, 1 - (wx^i + b)y^i)$ Hinge loss
 - On avait $\min \|w\|^2$ maintenant $\min \|w\|^2 + K \sum \xi$ avec K hyper param nombre d'erreur
- Optimisation avec lagrangien cas simple

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{s.c. } y^i (wx^i + b) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_i \alpha_i (y^i (wx^i + b) - 1).$$

- Optimisation avec Lagrangien cas complexe

$$\begin{cases} \min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 + K \sum_i \xi_i \\ \text{s.c. } y^i (wx^i + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{L}(w, b, \alpha, \nu) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + K \sum_i \xi_i - \sum_i \alpha_i (y^i (wx^i + b) + \xi_i - 1) - \sum_i \nu_i \xi_i$$

Kernel Tricks :

- Kernel Function : $k(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$
- Mesure la similarité entre 2 objets
 - $-$ = vecteur opposé = éloigné
 - $= 0$ = produit orthogonal = éloigné
 - $++$ = vecteur aligné = proche
- Stable pas addition, multiplication, composition avec f polynome, exponentiel
- La complexité de calcul d'un noyau polynomial est linéaire par rapport d le degré du polynome. Mais pas la dimensionnalité de la projection

Généralité SVM

- The support vectors are the data points that lie on the margin, which is the region between the decision boundary and the closest data points of each class. Support vectors are critical in SVM because they determine the location and orientation of the decision boundary. All other data points that are not support vectors are not used to construct the decision boundary, which means that SVM is robust to noise and outliers in the data.
- La taille de la marge est un hyper-paramètre important : marge grande == underfitting // marge petite == overfitting (séparation linéaire plus proche des points, moins centrée)
- K petit = $K \sum \xi$ petit = petite pénalisation des erreurs = tolérance de celle-ci = underfitting // inverse

9 Perceptron

- $f_w(x) = \langle x, w \rangle$, décision : $\text{sign}(f_w(x))$
- Hinge-loss = $\max(0, -yf_w(x))$, vaut 0 quand bonne prédiction
- gradient Hinge loss

$$\nabla H_w = \begin{cases} 0 & \text{si } -yxw < 0 \\ -yx & \text{sinon} \end{cases}.$$

- into descente de gradient
- le vecteur de poids w est normal à l'hyperplan de la séparatrice, $\langle w, x \rangle$ mesure l'angle entre les deux vecteurs, maj : on fait bouger l'hyperplan en fct de cet angle

Théorème de convergence : si

- $\exists R, \forall x \|x\| \leq R$
- Les données peuvent être séparées avec une marge p
- L'ensemble d'apprentissage est présenté au perceptron un nombre suffisant de fois

Alors : après au plus $\frac{R^2}{p^2}$ correction, l'algo converge

Point méthode exo du TD XOR :

- Nombre de neurone en entrée = nombre de droite séparatrice
- Trouver les équations de ces droites pour la première couche
- La sortie = binaire à gauche ou à droite de chaque séparatrice : $f_w(x) < 0$, permet de situer le point
- \rightarrow Nouvelle espace de point possible à dessiner \rightarrow nouvelle séparatrice \rightarrow nouveau poids \rightarrow décision

10 Réseau de neurone

10.1 Les bases

$$\frac{\partial L}{\partial w_i^h} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial z_k^h} \frac{\partial z_k^h}{\partial w_i^h} = \sum_k \delta_k^h \frac{\partial z_k^h}{\partial w_i^h}, \text{ soit } \nabla_{\mathbf{w}^h} L = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1^h}{\partial w_1^h} & \frac{\partial z_2^h}{\partial w_1^h} & \dots \\ \frac{\partial z_1^h}{\partial w_2^h} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}^h} L$$

$$\delta_j^{h-1} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{h-1}} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial z_k^h} \frac{\partial z_k^h}{\partial z_j^{h-1}}, \text{ soit } \nabla_{\mathbf{z}^{h-1}} L = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1^h}{\partial z_1^{h-1}} & \frac{\partial z_2^h}{\partial z_1^{h-1}} & \dots \\ \frac{\partial z_2^h}{\partial z_2^{h-1}} & \ddots & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}^h} L$$

You can intuitively understand the delta as the difference between where a neuron weight is at the moment and where you want it to be.

10.2 Les modules, leurs dérivées, leurs atoux

Paramètres :

Formule : $M^h(z^h) =$

Dérivé : $\frac{\partial M^h}{\partial w} =, \frac{\partial M}{\partial z^h} =$

Atoux :

10.2.1 Linear

Paramètre : $W \in \mathbb{R}^{input \times output}$

Formule : $M^h(z^h) = z^{hT} * W$

Dérivé : $\frac{\partial M^h}{\partial w}(z^h) = z^h, \frac{\partial M}{\partial z^h} = W$

10.2.2 TanH

Paramètre :

Formule : $M^h(z^h) = \tanh(z^h) = \frac{\sinh z^h}{\cosh z^h} = \frac{\exp(z^h) - \exp(-z^h)}{\exp(z^h) + \exp(-z^h)} = \frac{e^{2z^h} - 1}{e^{2z^h} + 1}$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} = 1 - \tanh^2(z^h)$

Atoux : Entre -1 et 1

10.2.3 Sigmoid

Paramètre :

Formule : $M^h(z^h) = \sigma(z^h) = \frac{1}{1 + \exp(-z^h)} = \frac{e^{z^h}}{1 + e^{z^h}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{z^h}}$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} = \sigma(z^h) * (1 - \sigma(z^h)) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

Atoux : Entre 0 et 1. Evite l'explosion de l'activation

Formule :

$$1 - \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \sigma'(x) / \sigma(x) = \sigma(-x)$$

$$\sigma'(x) * \sigma(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^3} = \frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

10.2.4 SoftMax

Paramètres :

Formule : $M^h(x_i) = \frac{\exp(x_i)}{\sum_j \exp(x_j)}$

Dérivé : $\frac{\partial M(x_i)}{\partial x_i} = M^h(x_i) * (1 - M^h(x_i))$ plus précisément

$$\frac{\partial M^h(x_i)}{\partial x_j} = \begin{cases} M^h(x_i) * (1 - M^h(x_j)) & \text{si } i = j \\ -M^h(x_j) M^h(x_i) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Atoux : Combo cross entropy pour plus de perf en dernière couche je crois ça se calcule mieux. Y'a une interprétation proba aussi.

10.2.5 LogSoftMax

Paramètres :

Formule : $M^h(z^h) = \log\left(\frac{\exp(x_i)}{\sum_j \exp(x_j)}\right)$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} =$

Atoux : When used for classifiers the log-softmax has the effect of heavily penalizing the model when it fails to predict a correct class.

11 Non supervisé

Idee : toujours minimiser une distance intra cluster, maximiser l'extra cluster, construire une projection des points dans un nouvel espace.

Clustering hiérarchique :

- approche agglomératives (bottom-up) VS division des cluster (top down)
- Distance : linkage
 - Simple linkage : $d(c_1, c_2) = \min d(x, x')$ avec $x \in c_1, x' \in c_2$
 - Complete linkage : $d(c_1, c_2) = \max d(x, x')$ avec $x \in c_1, x' \in c_2$
 - $d(c_1, c_2) = \mathbb{E}(d(x, x'))$ avec $x \in c_1, x' \in c_2$

Choix du nombre de cluster :

- Elbow method : nombre de cluster en abscisse, ration entre moyenne des distance intra-cluster et variance total du dataset → étude de la variance expliquée par le clustering en fonction du nombre de cluster
- Coefficient silhouette :
 - en fonction du nombre de cluster
 - Silhouette d'un point i : Mesure de l'homogénéité des clusters
 - $= \frac{b(i) - a(i)}{\max(a(i), b(i))}$ avec $a(i)$ moyenne de la distance intra-cluster d'un point (?) et $b(i)$ le minimum des distances d'un point aux autres clusters

10.2.6 ReLU

Paramètres :

Formule : $M^h(z^h) = \max(0, x)$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} = 1$ if $x > 0$ else 0

Atoux : Evite l'évanouissement du gradient, plus léger à calculer que la sigmoïde, meilleure convergence que la sigmoïde; dying relu : si trop de neurone passe à zéro, ça se propage dans le réseau (solution : leaky relu). Je crois que la ReLU est utile pour les attributs binaire.

10.2.7 SoftPlus/SmoothReLU

Paramètres :

Formule : $M^h(z^h) = \ln(1 + e^x)$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} = \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Atoux : Approxime la relu d'une manière dérivable partout

10.2.8 LeakyReLU

Paramètres :

Formule : $M^h(z^h) = \max(\alpha x, x)$

Dérivé : $\frac{\partial M}{\partial z^h} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ \alpha & \text{otherwise.} \end{cases}$

Atoux : Leaky ReLUs allow a small, positive gradient when the unit is not active.

10.2.9 MSELoss

$$MSE = ||y - \hat{y}||^2$$

10.2.10 Cross Entropy Loss

$CE = -\sum_{i=1}^n y_i \log p_i$ for n classe, avec p_i proba soft max pour la classe i

10.2.11 Binary CE Loss

CE loss mais pour deux class : $BCE = -[y \log p + (1 - y) \log(1 - p)]$

10.2.12 CELog Soft Max

$$CE(y, \hat{y}) = -\log \frac{e^{\hat{y}_y}}{\sum_{i=1}^K e^{\hat{y}_i}}$$

11.1 K-mean

- Résultat très sensible de l'initialisation + converge vers min local → multiple tentatives et prendre la meilleure
- Minimiser $\arg \min_{\pi=(D_1, \dots, D_k)} \sum_{i=1}^K \sum_{x_i \in D_i} d(x_j, \mu_i)$ avec $\mu_i = \frac{1}{|D_i|} \sum_{x_i \in D_i} x_j$ centroïde cluster i
- Fonction de coût : $F(\mu, C) = \sum_j \|\mu_{C(x_j)} - x_j\|^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j, C(x_j)=i} \|\mu_i - x_j\|^2$
- Pas de hiérarchie : on ne peut pas fusionner/diviser des clusters

11.2 Clustering par densité : DBSCAN

- HP : régions denses sont séparées par des régions de faible densité :
- Estimer densité d'une région (par noyaux), trouver ces points, en faire un cluster
- DBSCAN :
 - Hyperparam : Région : ϵ rayon de la boule de recherche de point, région dense m nombre de voisin dans cette région
 - Algo : Calculer le voisinage à ϵ point, si ce voisinage contient plus de m point, calculer le voisinage de chacun de ces points, jusqu'à stabilisation du cluster.
 - Si point isolé = bruit
 - Pour / Contre :
 - pas de k cluster à définir mais hyperparam plus difficile encore.
 - Pas d'effet single link (clusters connectées par une connexion fine)
 - Evite les problèmes avec les outlier/bruit qui sont introduit naturellement dans l'algo
 - curse of dimensionality : marche mal en haute dimension

11.3 Spectral clustering

- projection sur un graph pour bypass limite des approche utilisant une métrique (cluster sphériques, pas d'encodage d'une structuration des données, des relation de voisinages)
- Noyaux pour pondérer les arêtes (noyaux gaussien : $w_{ij} = \exp(-\|x_i - x_j\|^2 / \sigma^2)$)
- Notion de coupe : $cut(C_1, C_2) = \sum_{i \in C_1, j \in C_2} w_{ij}$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- Coupe normalisé : pour avoir des clusters de même taille $NormCut(C_1, C_2) = \frac{Cut(C_1, C_2)}{Vol(C_1)} + \frac{Cut(C_1, C_2)}{Vol(C_2)}$ avec $Vol(C) = \sum_{i, j \in C} w_{ij}$
- NP difficile
- **TODO** : Ficher l'exo de TD

12 Réduction de dimension

- Curse of dimensionality : $d^{-1/2}(\max \|X_i - X_j\| - \min \|X_i - X_j\|) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\max \|X_i - X_j\|}{\min \|X_i - X_j\|} \rightarrow_{d \rightarrow +\infty} 1$ tout les points son quasiment équidistants
- Moins de dimension → meilleurs explicabilité
- Deux approche : sélectionner des dimensions VS construire de nouvelles dimensions (erreur de reconstruction ou conservation des distances)

12.1 Principal Component Analysis : PCA

Combinaison linéaire des dimension, projection dans une nouvelle base/dimension qui maximise la variance
Variance corrigé projeté :

$$\begin{aligned}\sigma_v^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\pi(x_i - g))^T (\pi(x_i - g)) \\ &= v^T \Sigma v\end{aligned}$$

Avec $\Sigma = (n-1)^{-1} X X^T$, $X = (x_1 - g, x_2 - g, \dots, x_n - g) = X - g$ matrice de covariance variance des données

$$\begin{cases} \max v^T \Sigma v \\ \text{s.c. } v^T v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Sigma v = \lambda v.$$

Par définition de la diagonalisation : λ valeurs propre et v vecteur propre de Σ

⇒ Composant principal = les vecteurs propres ayant les plus grandes valeurs propre. On peut choisir de garder 95% de la variance par exemple.

Analyse :

- Graph pourcentage de variance expliquée par dimension
- Cercle de corrélation : les variables corrélées positivement sont groupées, négativement sont positionnées à l'opposé, loin de l'origine sont bien représentées

12.2 Multi-dimensional Scaling (MDS)

But : conservation des distances deux à deux des points

- $x' = U^T(x - m)$, U matrice orthonormale, m = moyenne des x_i
- $\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\langle x_i - m, x_j - m \rangle - \langle x'_i, x'_j \rangle)^2$
- $\Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\langle x_i - m, x_j - m \rangle - (x_i - m)^T U U^T (x_j - m))^2$

- Solution : vecteur propre de la matrice de Gram : $G = (X - m)(X - m)^T$
- Proche PCA mais XX^T à la place de $X^T X$

Inconvénients : prends en compte toutes les dimensions (bruit, corrélation), applicable que si $N \leq d$ et d petit (?)

12.3 Isomap

- Essai de préserver la distance géodésique, remplace MDS quand on veut pas la distance euclidienne
- Graph de voisinage (avec un KNN par exemple) → calcule la distance (chemin pondéré le plus court) entre les points deux à deux dans ce graphe → MDS sur le résultat

12.4 t-SNE

- Trouver une **projection** qui conserve le voisinage
- Soit un dataset de N point x_1, \dots, x_N , on construit une probabilité p_{ij} proportionnel à la similarité entre les points x_i et x_j
- Soit $P_{i|j} = \frac{\exp(-\|x_i - x_j\|^2 / 2\sigma_i^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-\|x_i - x_k\|^2 / 2\sigma_i^2)}$, $P_{i|i} = 0$
- The similarity of datapoint x_j to datapoint x_i is the conditional probability, $p_{j|i}$, that x_i would pick x_j as its neighbor if neighbors were picked in proportion to their probability density under a Gaussian centered at x_i .
- Now define $p_{ij} = \frac{p_{j|i} + p_{i|j}}{2N}$ car on estime que $P(i) = p_i \sim \text{Unif}(1/N)$
- Maintenant on veut faire matcher cette distribution de proba avec celle de notre espace d'arrivée $y_1, \dots, y_N, y_i \in \mathbb{R}^d$, d usuellement 2 ou 3
- $q_{ij} = \frac{(1 + \|y_i - y_j\|^2)^{-1}}{\sum_k \sum_{l \neq k} (1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1}}$ Mesure de la similarité entre deux point proche de celle d'avant mais cette fois par construction elle veut fortement éloigner les point dissimilaire.
- On mesure la distance entre les deux distribution de proba avec la KL divergence $KL(P||Q) = \sum_{i \neq j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$ + une descente de gradient

12.5 Compress sensing / Apprentissage de dictionnaire

- Objectif trouver D tel que $x \approx Dx'$ avec D sparse $\Leftrightarrow \|x'\|_0$ (la norme zéro compte les élément non zero)
- Ça force la simplicité (quelque atomes suffisent à expliquer x), signification, parcimonie (?)
- Problème d'opti assez simple : $\arg \min_D \|Dx' - x\| + \lambda \|x'\|_0$ (différente norme et différente variante)

13 Gaussien process

Basically, tu peux définir le résultat de ton processus gaussien uniquement par la matrice de variance covariance. Qui elle même se caractérise entièrement par un kernel. Elle vérifie les même propriétés qu'un kernel.

14 Théorie de l'apprentissage

- Algorithme universellement consistant : risque de la fonction apprise converge vers le risque bayésien. Si on peut overfit sur n'importe quel jeu de donnée (comme un arbre de décision ou un réseau de neurone avec nombre de paramètre infini).
- Biais : risque lié à la restriction de la taille de l'ensemble de fonction où on cherche la fonction optimal
- Variance : Risque lié à notre set de train et à la capacité de généralisation du modèle
- Compromis biais variance : Si on augmente la taille de \mathcal{F} alors on réduit le biais potentiel mais on augmente la variance potentielle
- Pour un ensemble discret \mathcal{F} , on peut trouver une vitesse de convergence logarithmique par rapport au nombre de fonction $\|\mathcal{F}\|$
- Pour un ensemble infini de fonction : de même mais utilise la VC-dimension de \mathcal{F} : $VC(\mathcal{F})$
- VC-dimension :
 - Un ensemble de points est shattered (pulvérisé) par un espace de fonction si pour tout partitionnement des points en deux ensembles il existe une fonction qui sépare les deux partitions.
 - La VC-dimension (Vapnik-Chervonenkis) de \mathcal{F} sur un espace de données \mathcal{X} est la taille du plus grand ensemble fini de points de \mathcal{X} pulvérisé par \mathcal{F} .
 - Fonctions linéaires : en dimension d , VC-dimension de $d + 1$
 - le nombre d'exemples doit être linéaire en fonction de $VC(\mathcal{F})$
 - **VC-dim grande** = modèle flexible = fit/overfit sur données complexe = plus sensible au bruit // **VC-dim faible** = fonction plus "général" = moins d'overfit mais moins de performance aussi = plus robuste au bruit

15 Bagging et Boosting

On veut pouvoir combiner des classiers, ils doivent être indépendants. Comment les rendre indépendants entre eux? Deux solutions

15.1 Bagging

- Sous échantillon du train, tirage avec remise
- Random forest = arbre de décision + bagging = randomisation du support de décision puis moyenne de tous les noeuds des arbres
- Chacun vas un peu apprendre une partie de l'espace, lié au hasard, puis les décisions se moyennent
- Très efficace à grande dimensionnalité

15.2 Boosting

- Correction des erreurs faite en $n - 1$ en n avec une pondération des exemples dans la loss

- Poids uniforme → On augmente le poids où il a fait des erreurs et baisse les poids des bons exemples
- → combinaison des frontières de décision
- Beaucoup d'overfit → garder des arbres de décision à faible profondeur
- Ecrit sous une forme gloutonne == descente de gradient pour les arbres de décision
- AdaBoost : Si l'erreur est supérieur à 0.5 on a pas su améliorer la classification alors on arrête

16 Reinforcement Learning

16.1 Policy iteration

Policy iteration : policy evaluation + policy improvement, and the two are repeated iteratively until policy converges.

- $V^\pi(s) = E[G_t | S_t = s] = E[\sum_{k \geq 0} \gamma^k R_{t+k}]$ avec R_{t+k} les récompenses obtenues à l'état $t + k$. V^π représente la moyenne des récompenses possible dans le futur, futur plus ou moins proche réglé par γ
- Par l'équation de Bellman

$$V_{k+1}(s) = (T^\pi V_k)(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V_k(s')].$$

- Une application répétée de l'opérateur de Bellman T^π fait converger V_k pour évaluer la policy π
- Puis mise à jour de la politique pour chaque état en choisissant l'action qui maximise $V^k(s)$ si j'ai bien compris.

$$\pi_{k+1}(s) = \operatorname{argmax}_a \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V^k(s')].$$

- L'étape d'évaluation de la policy est coûteuse. On peut la skip en évaluant directement chaque action pendant l'entraînement, ça fait sauter la première somme dans la formule donnant l'algorithme de Policy Iteration
- Convergence par le théorème de la convergence monotone de Howard. Condition
 - L'environnement doit être fini et le processus de décision de Markov (MDP) doit être stationnaire, c'est-à-dire que les probabilités de transition et les récompenses associées ne changent pas au fil du temps.
 - L'algorithme doit être initialisé avec une politique arbitraire.
 - Les valeurs initiales des états doivent être fixées à zéro.
 - Le coefficient de discount (gamma) doit être strictement inférieur à 1.

Application :

Evaluation d'une politique π

- Initialiser π^0 avec une loi uniforme par rapport au nombre d'action disponible dans chaque état et $V_0^\pi = 0$ partout. Les états finaux vont rester à zéros tout le long.
- Simplifier et écrire la formule pour notre MDP, en particulier pour les états stochastiques ou non, la somme avec la proba peut disparaître où bien se réduire.
- Tableau avec les états en colonne et les $V_k^\pi(s)$ en ligne, on va faire augmenter k
- Appliquer la formule à chaque étape

Exemple d'une formule simplifiée : Voir TD9 Question 2 avec une marche aléatoire.

$$\pi(\text{gauche} | s_i) (r(s_i, g, s_{i-1}) + \gamma V_k^\pi(s_{i-1})) + \pi(\text{droite} | s_i) (r(s_i, d, s_{i+1}) + \gamma V_k^\pi(s_{i+1}))$$

Mise à jour de π : Utiliser la formule.

16.2 Value iteration

Pareil mais :

- Random value function (d'après internet)
- pour la maj de V_k^p on donne directement la valeur max. On n'évalue plus la politique mais on fait directement converger la Value function pour ensuite seulement choisir la politique

$$V_{k+1}(s) = \max_a \sum_{s'} P(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V_k(s')].$$

- une update final de la politique uniquement après avoir fait converger la value function. Avec la même formule qu'en policy iteration.

Atoux

- Algo plus simple
- Plus lent à converger que policy iteration.