Examen réparti 1

Durée : 2H

Seuls documents autorisés : Supports & notes de cours
– Barême indicatif –

Exercice 1 (4pts) – Affectation multiagent

On considère un problème d'affectation de n objets à n agents. Dans l'exercice on traitera le cas $n = 3$ et on considère une instance avec trois objets $\{a, b, c\}$ et trois agents $\{x, y, z\}$ (chaque agent doit recevoir exactement un objet). Les utilités des différents objets pour chaque agent sont données dans le tableau suivant :

	a	b	c
x	3	4	1
y	4	3	1
z	3	4	1

On considère un critère par agent pour évaluer les solutions du problème d'affectation ; ces critères consistent à définir l'utilité d'une affectation pour un agent comme l'utilité de l'objet qui lui est affecté. Ainsi l'affectation $\{(x, a), (y, b), (z, c)\}$ conduit au vecteur d'utilités $(3, 3, 1)$.

Q 1.1 Pour toute affectation α donnée, on peut construire un graphe bi-parti G_α dit "graphe d'échange de α" et défini comme suit :

- on a $2n$ sommets dont n sommets-agent (un sommet par agent) et n sommets-objet (un sommet par objet),
- on a n arcs allant de chaque sommet-agent vers le sommet correspondant à son objet préféré,
- on a n arcs allant de chaque sommet-objet vers le sommet correspondant à l'agent qui le détient dans l'affectation α.

Construire les graphes d'échange G_α et $G_{\alpha'}$ associés aux affectations $\alpha = \{(x, a), (y, b), (z, c)\}$ et $\alpha' = \{(x, c), (y, b), (z, a)\}$. Montrer que chacun de ces graphes contient un circuit de longueur strictement supérieure à 2 et en déduire que α et α' ne sont pas des affectations Pareto-optimales (on expliquera précisément pourquoi).

Q 1.2 Proposer un algorithme itératif simple permettant de construire, pour une permutation donnée des critères, une affectation optimale au sens de l'agrégation lexicographique. Utiliser cet algorithme pour construire l'ensemble des solutions optimales au sens d'une agrégation lexicographique dans l'instance donnée ci-dessus (on considérera toutes les permutations des critères). En déduire l'ensemble des affectations Pareto-optimales pour l'instance considérée.

Exercice 2 (4pts) – Pari & utilité

Soit une variable binaire X qui suit une loi de probabilité vérifiant $p(X = 0) = p$, $(p(X = 1) = 1 - p$.
On propose à un parieur le jeu suivant : étant donnée une somme S qui lui est fournie, le parieur choisit quelle partie (f) de la somme il parie sur "$X = 0$" et quelle partie ($S - f$) il parie sur "$X = 1$". Bien évidemment, à l'issue du jeu, le parieur gagne la partie associée à

l'évènement qui se réalise effectivement. On suppose l'existence de $u(\cdot)$, la fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern du joueur sur ses gains.

Q 2.1 Écrire la loterie L_f qui représente ce jeu sous la forme d'un mixage de distributions certaines et en déduire son utilité $U(L_f)$.

Q 2.2 Recherche de f optimal.

Q 2.2.1 En remarquant que $U(L_f)$ est une fonction de f uniquement, quel est son domaine de définition $\mathcal{D}$? En supposant $u(.)$ dérivable, où peut-se trouver dans $\mathcal{D}$ la valeur de f que doit choisir le joueur ?

Q 2.2.2 Quelle valeur de f devrait choisir le joueur si son utilité de Von Neumann-Morgenstern était linéaire (discussion en fonction de p) ?

Q 2.2.3 Quelle valeur de f devrait choisir le joueur si son utilité de Von Neumann-Morgenstern était $u(x) = \log(x)$?

Q 2.2.4 Si on ne connaît pas la forme de u, l'observation du choix du décideur pour f peut-elle indiquer son comportement vis-à-vis du risque ?

Exercice 3 (6pts) – Recherche de meilleur chemin

On considère un problème de recherche de meilleur chemin dans le graphe représenté sur la figure 1. Chaque sommet numéroté de 1 à 10 représente une position de référence sur un massif de haute montagne et chaque arc (i, j) représente un passage permettant d'aller de i à j. Les passages ne sont pas ouverts tous les jours et on ne connaît que la probabilité p_{ij} que le passage (i, j) soit ouvert le jour où le problème se pose. Par ailleurs, chaque passage est plus ou moins long et difficile à emprunter et on ne connaît que le temps moyen ℓ_{ij} pour traverser le passage (i, j) si le passage est ouvert. Ces données sont précisées dans les étiquettes des arcs du graphe sous la forme (t_{ij}, p_{ij}).

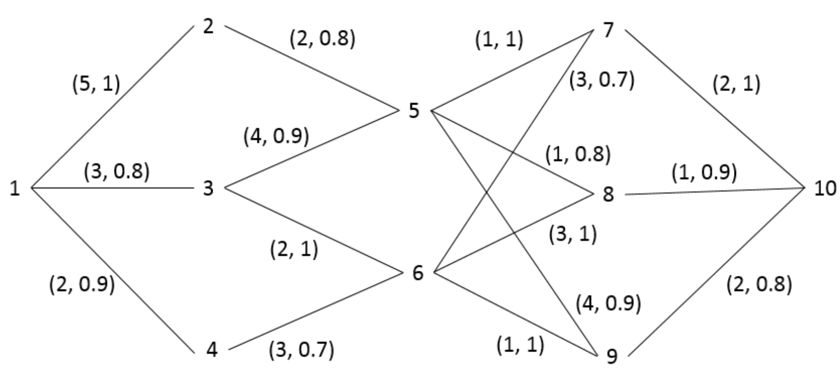

FIGURE 1 – Graphe des chemins de 1 à 10

On souhaite déterminer le meilleur chemin de 1 à 10 sachant que la qualité d'un chemin est appréciée selon deux critères distincts :

- ℓ la longueur définie par le temps moyen de parcours du chemin,
- p la probabilité du chemin définie comme la probabilité que tous les passages qui composent le chemin soient ouverts (l'ouverture d'un passage est indépendante de l'ouverture d'un autre passage).

Bien entendu, le premier critère est à minimiser et le second à maximiser.

Q 3.1 Soit x un chemin caractérisé par une ensemble X d'arcs, exprimer sa longueur $\ell(x)$ en fonction de $\{\ell_{ij} : (i, j) \in X\}$ et sa probabilité $p(x)$ en fonction de $\{p_{ij} : (i, j) \in X\}$. Etant donné deux chemins x et y évalués par les vecteurs $(\ell(x), p(x))$ et $(\ell(y), p(y))$, écrire les conditions à satisfaire pour que x domine y au sens de Pareto.

Q 3.2 En utilisant une adaptation de l'algorithme de Corley et Moon pour ce problème, déterminer les chemins Pareto-optimaux parmi les chemins de 1 à 10 dans le graphe de la figure 1

Q 3.3 Afin de déterminer un bon compromis entre les deux critères, on évalue chaque chemin de longueur ℓ et de probabilité p par la fonction coût $f_w(\ell, p) = (1 - w)\ell + 10w(1 - p)$ à minimiser ($w \in [0, 1]$). Déterminer quels sont les chemins minimisant f_w en fonction de w.

Q 3.4 Déterminer ℓ^* la longueur du chemin le moins long de 1 à 10, et p^* la probabilité du chemin le plus probable de 1 à 10. On souhaite maintenant minimiser l'écart normalisé au point idéal (ℓ^*, p^*) défini par la fonction $g(\ell, p) = \max\{\ell - \ell^*, 10(p^* - p)\}$. Déterminer le chemin optimal au sens de g.

Exercice 4 (6pts) – **Arbre de décision**

Soit le jeu suivant :

- *Au début du jeu, le joueur possède* 3 *pierres.*
- *À chaque tour, le joueur peut miser de* 1 *à toutes les pierres qu'il possède. En fonction du résultat du tirage, le joueur peut soit doubler sa mise (probabilité* p*) soit la perdre (probabilité* $1 - p$*).*
- *Le jeu comporte au maximum* 3 *tours.*
- *Le but du joueur est de finir la partie avec au moins* 5 *pierres.*

Si le joueur atteint ce but (5 pierres) avant la fin des 3 tours, le jeu s'arrête directement sur une victoire : il ne s'agit donc pas de maximiser le nombre de pierres.

Q 4.1 En tenant compte de l'objectif (au moins 5 pierres en au plus 3 parties), tracer l'arbre de décision. Montrer que cet arbre peut se compacter en un arbre de décision dont les nœuds de décision sont binaires et au nombre de 3 seulement. Quelles formes prennent alors les stratégies ?

Q 4.2 Quelle utilité de Von Neumann-Morgenstern pourriez-vous proposer dans ce jeu ?

Q 4.3 Résoudre cet arbre de décision pour $p = \frac{2}{3}$. Quelle est la valeur de l'utilité de ce jeu ? Que représente-elle ? En analysant la résolution, peut-on encore simplifier l'arbre de décision ?

Q 4.4 Discuter de la forme de la stratégie optimale en fonction de la probabilité p de doubler sa mise à chaque mini-jeu.