Décisions et Jeux

Jeux répétés, jeux évolutionnaire, jeux coopératifs

Pierre-Henri WUILLEMIN

LIP6
pierre-henri.wuillemin@lip6.fr

moodle https://moodle-sciences-22.sorbonne-universite.fr/course/view.php?id=4521
mattermost https://channel.lip6.fr/etudmasterandro/channels/coursdj23fevv

Jeux répétés

Bonnie \ Clyde	N	A
N	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
A	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

Constat : Un comportement 'rationnel' peut aboutir à une conclusion peu satisfaisante : (A, A).

- équilibre de Nash,
- équilibre en stratégie strictement dominante,
- mais *strictement* Pareto-*dominé* !

conflit entre rationalité individuel et rationalité collective.

Hypothèse du super-jeu

C'est par la répétition de situations de jeux de structures semblables que peut s'élaborer une coopération entre les joueurs. Dans ce super-jeu, la stratégie du jeu initial peut alors évoluer dans le cadre de la stratégie globale.

Jeu répété à horizon fini

Définition (Super-jeu des prisonniers)

- *Deux joueurs jouent T fois au dilemme du prisonnier, à des dates $t = 1, 2, \cdots, t, \cdots, T$.*
- *Les gains des différentes parties s'additionnent pour constituer les paiements du super-jeu.*

Une stratégie $\mathcal{S}$ de l'un des joueurs dans le super-jeu est donnée par :

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}^{\mathbf{1}}, \cdots, \mathcal{S}^{t}, \cdots, \mathcal{S}^{T}) \text{ avec } \forall i, \mathcal{S}^{i} \in \{A, N\}$$

NB- Pour chaque joueur, nombre de stratégies pures $= 2^T$

Prise en compte de l'historique

Soit $\mathcal{R}$ la stratégie du second joueur,
$\forall t \in \{2, \cdots, T\}, \exists \phi^t : \{A, N\}^{\mathbf{2}(t-\mathbf{1})} \longrightarrow \{A, N\}$ telle que :

$$\mathcal{S}^t = \phi^t_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}^{\mathbf{1}}, \mathcal{R}^{\mathbf{1}}, \cdots, \mathcal{S}^{t-\mathbf{1}}, \mathcal{R}^{t-\mathbf{1}}).$$

Ce super-jeu est un *jeu fini à information imparfaite* puisqu'à chaque date t les deux joueurs jouent à l'insu l'un de l'autre.

Stratégie optimale dans le jeu répété à horizon fini

Soit le dernier jeu simple, à la date T, on suppose Bonnie et Clyde ont actuellement des gains respectifs m_B et m_C. Donc le jeu a la forme :

Bonnie \ Clyde	N	A
N	$(-1 + m_B, -1 + m_C)$	$(-10 + m_B, 0 + m_C)$
A	$(0 + m_B, -10 + m_C)$	$(-8 + m_B, -8 + m_C)$

Il est évident que la translation des gains de (m_B, m_C) ne change rien à l'analyse du jeu élémentaire. $\Rightarrow$La solution choisie sera (A, A).
Par récurrence, la solution du super-jeu sera $A_{rep} = (A_1, \cdots, A_T)$ pour les deux joueurs.
Alors que (A_{rep}, A_{rep}) est clairement Pareto-dominé par un grand nombre de stratégies : par exemple, par (N_{rep}, N_{rep}).

Contrairement au jeu simple, le jeu itéré doit permettre de faire apparaître des comportements prenant partie des choix antérieurs des autres joueurs, et donc de faire émerger des phénomènes comme de la coopération, mais aussi de la punition (exécution de menaces).

Jeux répétés et stratégies collaboratives

Un joueur peut être rationnel et pourtant avoir un comportement coopératif, s'il prend en compte d'autres éléments que la simple description du jeu.

Tit For Tat (donnant-donnant)

Soit la stratégie $\mathcal{T}$ suivante :

- $\mathcal{T}^1 = N$
- $\forall \mathcal{S}, \forall t \in \{2, \cdots, T\}$,
  $$\mathcal{T}^t = \phi^t_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}^1, \mathcal{S}^1, \cdots, \mathcal{T}^{t-1}, \mathcal{S}^{t-1}) = \mathcal{S}^{t-1}$$

Punition définitive (stratégie coopérative à déclenchement)

Soit la stratégie P suivante :

- $\mathcal{P}^1 = N$
- $\forall \mathcal{S}, \forall t \in \{2, \cdots, T\}$,
  $$\mathcal{P}^t = \phi^t_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}^1, \mathcal{S}^1, \cdots, \mathcal{P}^{t-1}, \mathcal{S}^{t-1}) = \max_{i \leq t-1} \mathcal{S}^i$$

Avec $\forall i \in \{A, N\}$, $\max(A, i) = A$ **et** $\max(N, i) = i$ **(i.e.** $'A > N'$**).**

$(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ et $(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ permettent d'atteindre l'optimum de Pareto (N_{rep}, N_{rep}).

Présupposés de comportement

Un joueur peut utiliser des présupposés sur le comportement de l'autre joueur.

I \ II	N	A
N	(−1, −1)	(−10, 0)
A	(0, −10)	(−8, −8)

Les joueurs doivent choisir entre l'équilibre de Nash A_{rep} et $\mathcal{T}$ (*Tit for Tat*). Le joueur I présuppose que II a la probabilité ϵ de jouer $\mathcal{T}$ plutôt que A_{rep}.

- Si I joue A_{rep}, ses gains sont

$$\begin{cases} \epsilon \cdot \begin{bmatrix} A & A & A & \cdots & A \\ N & A & A & \cdots & A \end{bmatrix} \\ \qquad + \\ (1-\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} A & A & A & \cdots & A \\ A & A & A & \cdots & A \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{cases} \epsilon \cdot (0 - 8(T-1)) \\ \qquad + \\ (1-\epsilon) \cdot (-8T) \end{cases} = 8\epsilon - 8T$$

- Si I joue $\mathcal{T}$, ses gains sont

$$\begin{cases} \epsilon \cdot \begin{bmatrix} N & N & N & \cdots & N \\ N & N & N & \cdots & N \end{bmatrix} \\ \qquad + \\ (1-\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} N & A & A & \cdots & A \\ A & A & A & \cdots & A \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{cases} \epsilon \cdot (-T)) \\ \qquad + \\ (1-\epsilon) \cdot (-10 - 8(T-1)) \end{cases} = (7T+2)\epsilon - (8T+2)$$

- Avec $T > 1$, il vient que, pour I, $\mathcal{T} \succ A_{rep} \iff \epsilon > \frac{2}{7T-6}$

Jeu répété sans horizon fini

Dans le cadre d'un super-jeu, se voulant plus 'réaliste' que le jeu simple, l'existence d'un horizon fini est peu crédible. On voudrait donc étudier un super-jeu ∞.

Un équilibre de Nash d'un super-jeu ∞ est nécessairement parfait.

Problème : $\sum_{t=0}^{\infty} g_t$? Les gains risquent de devenir infini...

Actualisation d'un flux de gains

Soit x_t l'utilité d'avoir x à t. On peut supposer que $x_{t+1} \leq x_t$.

$\delta = \frac{x_{t+1}}{x_t} \leq 1$ est le facteur d'actualisation.

En supposant δ constant, on peut alors calculer un gain actualisé pour une séquence infinie de gain g_t :

$$G = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot g_t$$

Théorème

$(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ est un équilibre de Nash *parfait du super-jeu ∞ à condition que δ soit assez grand.*

$\mathcal{P}$ est la stratégie "Punition définitive".

Jeux évolutionnaires

J.Maynard Smith a utilisé formellement le modèle et les concepts de la théorie des jeux avec une sémantique nouvelle pour comprendre certains phénoménes en biologie, comme l'existence d'une diversité individuelle au sein de chaque espèce animale et l'évolution de cette diversité ; son approche a été étendue depuis à l'étude de phénomènes économiques et sociaux.

Exemple 1 : l'équipe de foot

En supposant que la meilleure équipe est celle qui gagne le plus de duels et que :

- un *Arrière* l'emporte toujours sur un *Avant*,
- un *Avant* sur un *Demi*,
- un *Demi* sur un *Arrière* **(pas de composition dominante évidente)**.

Y a-t-il une composition d'équipe qui va, peu à peu, dominer dans la tête du classement ?

Exemple 2 : Les po et les go

Les po et les go sont en compétition pour leur nourriture.

- po contre go : les go prennent les $\frac{3}{4}$ de la nourriture convoitée
- sinon : le partage est équitable entre les deux oiseaux.
- mais : les po se contentent d'un 1/4 de part ; les go, eux, ont besoin d'une part. Quel équilibre peut trouver cette population mixte ?

Jeux évolutionnaire : formalisation

On propose un jeu sous forme normale où l'espèce joue contre elle-même :

- Une stratégie pure représente un des *types* de la population.
- Une stratégie mixte représente une composition possible de la population totale.

Les gains (g^I_{ij}, g^{II}_{ij}) de ce jeu vérifie : $g^I_{ij} = g^{II}_{ji}$.
Même si le jeu n'est pas à somme nulle, cette symétrie permet de représenter le jeu par une matrice carrée des gains G (non symétrique) :

Exemple 1 : l'équipe de foot

$I \setminus II$	*Avant*	*Demi*	*Arrière*
Avant	$(0, 0)$	$(4, -2)$	$(-2, 3)$
Demi	$(-2, 4)$	$(0, 0)$	$(3, -2)$
Arrière	$(3, -2)$	$(-2, 3)$	$(0, 0)$

ou

$I \setminus II$	*Av*	*De*	*Ar*
Avant	0	4	−2
Demi	−2	0	3
Arrière	3	−2	0

Exemple 2 : po vs. go

$I \setminus II$	go	po
go	$(-1, -1)$	$(1, 0)$
po	$(0, 1)$	$(1, 1)$

ou

$I \setminus II$	go	po
go	−1	1
po	0	1

Ps : Si le jeu est à somme nulle, la matrice G est alors antisymétrique.

Mutation et Invasion

Si les joueurs jouent respectivement les stratégies mixtes (p, q), le gain moyen du joueur des lignes est $p \cdot G \cdot q$.
Soit une composition p de la population, en situation stable, elle est au niveau de gain : $p \cdot G \cdot p$.

Définition (Composition mutante)

Une composition q de la population est une mutation de p en j si on peut vérifier :

$$\exists \epsilon > 0, q = p_{\epsilon,j} = (1-\epsilon)p + \epsilon\, e_j$$

où e_j est le vecteur unitaire représentant le type j.

Un mutant $p_{\epsilon,j}$ représente donc une augmentation du type j dans la population.

Pour qu'un mutant envahisse une population, il faut que l'introduction de j dans $p_{\epsilon,j}$ soit intéressante par rapport à un retour à p :

$$\exists \eta > 0, \forall \epsilon < \eta, g(e_j, p_{\epsilon,j}) \geq g(p, p_{\epsilon,j})$$
$$\iff e_j \cdot G \cdot p_{\epsilon,j} - p \cdot G \cdot p_{\epsilon,j} \geq 0$$
$$\iff e_j \cdot G \cdot ((1-\epsilon)p + \epsilon\, e_j) - p \cdot G \cdot ((1-\epsilon)p + \epsilon\, e_j) \geq 0$$
$$\iff (1-\epsilon)\left[(e_j \cdot G \cdot p) - (p \cdot G \cdot p)\right] + \epsilon\left[(e_j \cdot G \cdot e_j) - (p \cdot G \cdot e_j)\right] \geq 0$$

Un mutant j peut envahir une configuration p de la population si et seulement si :

$$g(e_j, p) > g(p, p) \text{ ou } [g(e_j, p) = g(p, p) \text{ et } g(e_j, e_j) \geq g(p, e_j)]$$

Stratégie Évolutionnairement Stable

Définition (SES : Stratégie Évolutionnairement Stable)

Une stratégie mixte est dite stratégie (mixte) évolutionnairement stable (SES) lorsqu'aucun mutant ne peut l'envahir :

$$\forall j,\ t.q.\ e_j \neq p,\ \begin{cases} \text{soit } g(p,\ p) > g(e_j,\ p) \\ \text{soit } g(p,\ p) = g(e_j,\ p) \text{ et } g(p,\ e_j) > g(e_j, e_j) \end{cases}$$

Théorème

$$p\ SES \iff \forall q \neq p,\ \begin{cases} \text{soit } g(p,\ p)\ >\ g(q,\ p), \\ \text{soit } g(p,\ p)\ =\ g(q,\ p) \text{ et } g(p,\ q)\ >\ g(q,\ q)] \end{cases}$$

Démonstration :

$\Leftarrow$ Si p vérifie cette propriété, avec $q = e_j$, p est SES.

$\Rightarrow$ Toute stratégie mixte q est c.l.c. des stratégies pures e_j : $q = \sum_j q_j e_j$ donc

- $[\forall j, g(p,\ p) \geq g(e_j,\ p)] \Rightarrow g(p,\ p)\ \geq\ \sum_j q_j g(e_j,\ p)\ = g(\sum_j q_j e_j,\ p)\ = g(q,\ p)$
- $g(p,\ p)\ =\ g(q,\ p) \Rightarrow \forall j,\ g(p,\ p) = g(e_j,\ p)$ et donc $g(p,\ e_j) > g(e_j, e_j)$;
- $[\forall j,\ g(p,\ e_j) > g(e_j, e_j)] \Rightarrow g(p,\ q)\ =\ g(p,\ \sum_j q_j e_j)\ >\ g(e_j,\ \sum_j q_j e_j)\ =\ g(e_j,\ q)$

  d'où $g(p,\ q)\ >\ \sum_j q_j g(e_j,\ q)\ = g(\sum_j q_j e_j,\ q)\ =\ g(q,\ q)$ ■

Calculs pour les exemples

L'équipe de football. En tenant compte de $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, on calcule
$g(p,p) = (p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2)$; puis,
$g(q,p) = g(p,p) + [q_1 - p_1][8p_2 - p_1 - 2] + [q_2 - p_2][3 - 8p_1 - p_2]$.
On ne peut avoir $\forall q,\ g(p,p) \geq g(q,p)$ en $p >> 0$ que si
$8p_2 - p_1 - 2 = 0$; $3 - 8p_1 - p_2 = 0$; seule solution $\bar{p} = (\frac{22}{65}, \frac{19}{65}, \frac{24}{65})$.
(on doit vérifier de plus qu'il n'ya pas de solution avec l'un des p_i nul).
En fait, $\forall q,\ g(q,\bar{p}) = g(\bar{p},\bar{p})$; on doit alors prouver que $\forall q \neq \bar{p},\ g(\bar{p},q) > g(q,q)$ ce qui équivaut à :

$$q_1^2 + q_2^2 - 2.\frac{22}{65}q_1 - 2.\frac{19}{65}q_2 + \frac{13}{65} > 0.$$

Le premier membre est une forme quadratique définie positive dont le minimum vaut 0 et est atteint pour l'unique couple $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (\frac{22}{65}, \frac{19}{65})$.
$\bar{p}$ est donc l'unique SES du jeu. Les proportions entières les plus proches des proportions idéales sont donc 3*Avants*-3*Demis*-4*Arrières*.

L'espèce aviaire. En posant $p_1 = \alpha,\ p_2 = 1 - \alpha$, on obtient $g(p,p) = 1 - \alpha - \alpha^2$;
pour $q = (\alpha + \delta, 1 - \alpha - \delta)$, $g(q,p) = g(p,p) + \delta \times [-\alpha]$;
on ne peut avoir $\forall q,\ g(p,p) \geq g(q,p)$ avec $\alpha \in]0,1[$, ni avec $\alpha = 1$;
pour $\alpha = 0$, c-à-d $p = (0,1)$, on a alors $\forall q,\ g(p,p) = g(q,p)$ et aussi $\forall q \neq p$ c-à-d $\forall q_1 > 0$, $g(p,q) = 1 - q_1 > 1 - q_1 - {q_1}^2 = g(q,q)$.
$p = (0,1)$ (population composée exclusivement de po) est donc l'unique SES du jeu.

SES et Nash

Propriétés

- Une SES conduit toujours à un équilibre de Nash symétrique (en stratégies mixtes) et même un équilibre de Nash *strict*, c-à-d où toute déviation est coûteuse.
- Tout équilibre de Nash symétrique strict est engendré par une SES.
- En revanche, la stratégie commune aux deux joueurs d'un équilibre de Nash symétrique qui n'est pas strict peut ne pas être une SES.

Exemple

Dans une société, il y a deux types d'agents les *Paresseux* et les *Travailleurs*.Chaque type d'agent fabrique un produit que l'autre est seul à consommer. Un *Travailleur* produit une quantité double de ce que produit un *Paresseux*.Les échanges entre deux individus ne se font qu'entre quantités égales des deux produits.
La matrice M du jeu est :

$j.I \setminus j.II$	*Paresseux*	*Travailleur*
Paresseux	1, 1	1, 1
Travailleur	1, 1	2, 2

La stratégie pure *Travailleur* est SES ; elle conduit bien à un équilibre de Nash symétrique strict. Il y a un autre équilibre de Nash symétrique, $(Paresseux, Paresseux)$, qui n'est pas strict ;*Paresseux* n'est pas SES (prendre $q = $ *Travailleur*).

Jeux coopératifs

Il s'agit de formaliser l'avantage que plusieurs joueurs ont à jouer ensemble en formant des coalitions.

Définition (Jeu coopératif)

un jeu coopératif est défini par la donnée :

i) $N = \{1, 2, \cdots, n\}$*, ensemble des joueurs, et de* $\mathcal{S} = 2^N$*, ensembles des coalitions ;*

ii) *de la fonction caractéristique du jeu* v : $\begin{cases} \mathcal{S} = 2^N \to \mathbb{R}^+ \\ S \mapsto v(S) \end{cases}$

En se formant, la coalition S peut obtenir $v(S)$.

- *v vérifie :*
  - $v(\emptyset) = 0$ **La coalition vide ne peut rien obtenir.**
  - $S \subset T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$ **Monotonie :Élargir une coalition augmente ses possibilités.**

Autres propriétés que peut avoir v :

- Symétrie : $v(S) = f(|S|)$
- Super-additivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.
- Convexité : $\forall S, T \in \mathcal{S}$, $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

Tout jeu super-additif à fonction caractéristique positive est monotone.
Tout jeu convexe est superadditif.

Jeu simple

Définition (jeu simple)

Un jeu coalitionnel est simple si $\forall S \subseteq N, v(S) \in \{0,1\}$.

- Si $v(S) = 1$ alors S est une coalition gagnante.
- Si $v(S) = 0$ alors S est une coalition perdante.
- Un joueur j a un droit de veto s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes : $v(S) = 1 \Rightarrow j \in S$.
- Un joueur j est un dictateur si une coalition est gagnante si et seulement il en est : $v(S) = 1 \iff j \in S$.
- Si le jeu est super-additif, alors

$$v(S) = 1 \Rightarrow v(N \setminus S) = 0 \text{ et } \forall T \supseteq S, v(T) = 1$$

Exemples : jeux simples à 3 joueurs

- Majorité simple : une coalition est gagnante si elle possède au moins 2 membres :
$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) = v(13) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

- Unanimité : tous les membres doivent appartenir à la coalition pour qu'elle soit gagnante :
$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = v(23) = 0 \\ v(123) = 1 \end{cases}$$

- Droit de veto (du joueur 2) : une coalition est gagnante si elle est majoritaire et contient 2 :
$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(13) = 0 \\ v(12) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

- Dictature (du joueur 2) : une coalition est gagnante ssi elle contient 2 :
$$\begin{cases} v(1) = v(3) = v(13) = 0 \\ v(2) = v(12) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

Jeu convexe

Convexité : $\forall S, T \in \mathcal{S},\ v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

Théorème

Un jeu est convexe si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{S},\ \forall i, j \notin A,\ v(A \cup \{i, j\}) - v(A \cup \{i\}) \ \geq\ v(A \cup \{j\}) - v(A).$$

Dans un jeu convexe l'apport marginal d'un joueur à une coalition dans laquelle il entre est d'autant plus grand que cette coalition est plus importante.

Démonstration

$\Rightarrow$ Un jeu convexe a cette propriété. Il suffit de prendre $S = A \cup \{i\}$ et $T = A \cup \{j\}$ dans la propriété de définition.

$\Leftarrow$ Par récurrence :
Posons $T \cap S^c = \{j_1, \cdots, j_l, \cdots, j_L\}$ et $S \cap T^c = \{i_1, \cdots, i_k, \cdots, i_K\}$

$$\forall k = 1, \cdots, K,\ v([S \cap T] \cup \{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_1\}) - v([S \cap T] \cup \{i_1, \cdots, i_{k-1}\} \cup \{j_1\}) \geq v([S \cap T] \cup \{i_1, \cdots, i_k\}) - v([S \cap T] \cup \{i_1, \cdots, i_{k-1}\})$$

d'où en sommant membre à membre,

$$v(S \cup \{j_1\}) - v([S \cap T] \cup \{j_1\}) \geq v(S) - v(S \cap T);$$

mais on montrerait de la même manière que :

$$v(S \cup \{j_1, j_2\}) - v([S \cap T] \cup \{j_1, j_2\}) \geq v(S \cup \{j_1\}) - v([S \cap T] \cup \{j_1\});$$

$$v(S \cup \{j_1, j_2, j_3\}) - v([S \cap T] \cup \{j_1, j_2, j_3\}) \geq v(S \cup \{j_1, j_2\}) - v([S \cap T] \cup \{j_1, j_2\});$$

etc.

d'où, par transitivité, le résultat cherché. ■

Allocations réalisables et cœur de jeu

On aimerait bien fournir à chaque joueur une portion de la fonction caractéristique, de façon à représenter les coalitions : Utilité transférable.

Définition

- *Une allocation est un vecteur de* $\mathbb{R}^n$, $x = [x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n]$.
- *Une allocation est réalisable si* $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$.
- *Une allocation est bloquée par* S *si* $\sum_S x_i < v(S)$.
- *Le cœur du jeu est l'ensemble de toutes les allocations réalisables qui ne sont bloquées par aucune coalition :*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n x_i = v(N) \text{ et } [\forall S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)]\}$$

Le cœur d'un jeu peut être vide. Par exemple :

$$n = 2\,;\ v(\emptyset) = 0\,;\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = \tfrac{2}{3}\,;\ v(N) = 1.$$

Théorème

Le cœur d'un jeu convexe est non-vide.

cœur de jeu convexe

Théorème

Le cœur d'un jeu convexe est non-vide.

Démonstration

Rangeons (arbitrairement) les joueurs de 1 à n et introduisons

- les coalitions $S_k = \{1, 2, \cdots, k\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$;
- l'allocation x de composantes

$$x_1 = v(S_1)\,;\; x_2 = v(S_2) - v(S_1)\,;\cdots;\; x_k = v(S_k) - v(S_{k-1})\,;\cdots;\; x_n = v(S_n) - v(S_{n-1}),$$

- x est réalisable ; en effet $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(S_n) = v(N)$.
- D'autre part, soit T une coalition quelconque ;

$$\sum_{i\in T} x_i = \sum_{i\in T}[v(S_i) - v(S_{i-1})] \geq \sum_{i\in T}[v(S_i \cap T) - v(S_{i-1} \cap T)]$$

- $\exists i_0$ tel que $T \subseteq S_{i_0}$; pour $i \geq i_0$, $S_i \cap T = T$; et pour $i < i_0$, $S_i \cap T = S_{i-1} \cap T$; d'où

$$\sum_{i\in T} x_i \geq \sum_{i\leq i_0}[v(S_i \cap T) - v(S_{i-1} \cap T)] = v(S_{i_0} \cap T) = v(T).$$

x est donc dans le cœur. ■

Cœur de jeux simples

- Majorité simple

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases} \quad : \text{impossible} \Rightarrow \text{cœur } \emptyset$$

- Unanimité

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases} \quad : \text{cœur non vide.}$$

- Droit de veto (du joueur 2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases} \quad : \text{cœur} = \{(0, 1, 0)\}$$

- Dictature (du joueur 2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ \forall i, x_i \geq 0 \end{cases} \quad : \text{cœur} = \{(0, 1, 0)\}\,!\,!$$

Valeur de Shapley

Y a-t-il des allocations (du cœur) qui soient plus acceptables que les autres par tous les joueurs ?

Règles de Shapley

1. Neutralité : une permutation des joueurs ne modifient pas l'affectation.
2. Réalisabilité : l'allocation doit être réalisable. **Pareto-optimalité**
3. Additivité : u et v sont des jeux, alors $x(u+v) = x(u) + x(v)$
   (l'allocation du jeu $u+v$ est la somme des allocations des jeux u et v).

Définition (Somme de jeu)

Soit deux jeux, joués respectivement par les ensembles de joueurs R et S et de fonctions caractéristiques u et v,on appelle jeu-somme, joué par l'ensemble de joueurs $R \cup S$, le jeu de fonction caractéristique notée $u+v$, satisfaisant :

$$\forall T \subseteq R \cup S,\ [u+v](T) = u(T \cap R) + v(T \cap S)\,;$$

Valeur de Shapley et allocations

Théorème

Les régles précédentes sont satisfaites par une seule allocation, dite valeur de Shapley, *donnée par la formule :*

$$x_i = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \backslash \{i\})]$$

Concept de solution adapté aux problèmes de partage de ressources ou de répartition des coûts (télécommunications, copropriété, etc.) La valeur de Shapley est une somme pondérée des contributions marginales de chaque élément.

Prop. 1

La valeur de Shapley d'un jeu convexe est toujours dans le cœur du jeu.

Prop. 2

En revanche, il ne suffit pas qu'un cœur de jeu soit non vide pour que sa valeur de Shapley en soit.