# Examen Réparti 1

Durée : 1H30

*Seuls documents autorisés : Supports & notes de cours autorisés*
*Cal culatrices autorisées*
*– Barème indicatif –*

Merci de séparer les copies :
- d'une part les exercices 1,2 et 3 ;
- d'autre part, les exercices 4 et 5.

## Exercice 1 (3pts) – Utilité

Soit un individu ayant une richesse initiale $w_0 = 4$€. Il possède un billet d'une loterie qui peut rapporter 12€ avec la probabilité 0.5 et 0€ sinon. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité de vnm $u(w) = \sqrt{w}$ où $w > 0$ est *son état de richesse.*

**Q 1.1** Quel est son comportement dans le risque ?

**Q 1.2** Quel est le plus petit prix $p$ auquel il serait disposé à vendre son billet de loterie ?

**Q 1.3** Quel est la valeur de $p$ si son utilité de vnm est en fait $v(w) = 2\sqrt{w} + 4$ ?

## Exercice 2 (3pts) – Critère espérance-variance : utilité de Markowitz

Soit une loterie $L$ représentée par la distribution de probabilité $P = (p_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ sur les gains $(g_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, on note $E_L$ et $V_L$ respectivement la moyenne et la variance de cette loterie $L$.
On propose alors un critère espérance-variance qui associe à $L$ l'utilité :

$$U_k(L) = E_L - k \cdot V_L$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

**Q 2.1** Comment peut-on caractériser le comportement d'un décideur qui utiliserait un tel critère (discuter en fonction de $k$) ?

**Q 2.2** Soit une loterie $A$ : ($-60$€ avec probabilité 0.5 ;+100€ avec probabilité 0.5) et une loterie $B$ : ($-10$€ avec probabilité 0.5 ;+20€ avec probabilité 0.5), discuter de la préférence du décideur qui suivrait un tel critère espérance-variance.

## Exercice 3 (5pts+2pts) – Ski et décisions

Vous êtes un skieur olympique. Aujourd'hui, à l'entraînement, vous êtes tombé et vous vous êtes blessé à la cheville. D'après les résultats d'une radiographie, le médecin pense qu'elle est foulée avec une probabilité de 0.2. La question est donc de savoir si vous devez participer à la course de demain.
Si vous participez à la course, vous pensez que vous allez gagner avec une probabilité de 0.1 (quelque soit l'état de votre cheville). Mais si votre cheville est foulée et que vous skiez quand-même, vous l'endommagerez davantage.
On propose de représenter vos préférences par une utilité de VNM calculée en accumulant (si besoin) les valeurs suivantes :

- Gagner la course vous apporte +75
- Perdre la course vous apporte −25
- Skier avec une cheville foulée vous apporte −25
- Skier avec une cheville normale vous apporte +25
- Ne pas skier sans cheville foulée vous apporte 0 (status quo)
- Ne pas skier mais cheville foulée vous apporte −15

**Q 3.1** Tracer l'arbre de décision qui vous permet de répondre à la question : "Dois-je participer à la course demain ?". Quelle est la stratégie optimale ? Quelle est l'espérance d'utilité de l'arbre (celle de son nœud racine) ?

**Q 3.2** La décision précédente est prise en présence d'une double incertitude sur le résultat de la course et sur l'état de la cheville.
On appelle "valeur de l'information parfaite sur une incertitude" le gain en espérance d'utilité qu'on obtiendrait si on supposait cette incertitude levée au moment où on prend la décision (gain par rapport à la prise de décision avec incertitude).

**Q 3.2.1** Tracer et résoudre l'arbre de décision si on connaissait l'état de la cheville avant de prendre la décision de skier ou non. Quelle est la valeur de l'information parfait sur cette cheville ? (Attention : au moment de la décision, on connaît l'état de la cheville mais pas le résultat de la course).

**Q 3.2.2** Tracer et résoudre l'arbre de décision si on savait à coup sûr le résultat de la course. Quelle est la valeur de l'information parfaite sur le résultat de la course ? (Attention : au moment de la décision, on connaît le résultat de la course mais pas l'état de la cheville).

**Q 3.3** L'hypothèse que la probabilité de victoire ne dépende pas de l'état de la cheville semble improbable. Il est toutefois difficile de prédire quel impact aura exactement cet état. On considère donc un $\alpha \in [0,1]$ et on estime la probabilité de gagner en cas de fracture à $0.1\alpha$ (au lieu de 0.1 dans la première partie).

**Q 3.3.1** Tracer l'arbre de décision et discuter de la décision optimale en fonction de $\alpha$

**Q 3.3.2** (BONUS) Calculer la valeur de l'information parfaite sur le résultat de la course ? (Attention : au moment de la décision, on connaît le résultat de la course mais pas l'état de la cheville).

## Exercice 4 (5pts) – Problème de sac-à-dos bi-critère

On considère le problème de sac-à-dos bi-critère suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & z_1 = x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 9x_5 \\ \max & z_2 = 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \text{s.c.} & 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 17 \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

dans lequel $x_i$ est une variable de décision qui vaut 1 si l'on selectionne l'objet $i$ et 0 sinon.

**Q 4.1** Écrire un programme linéaire en variables 0-1 qui permette de tester si le sac-à-dos caractérisé par le vecteur $x = (1,0,0,1,1)$ est Pareto-optimal (on ne demande pas de résoudre le PL0-1 formulé mais on expliquera comment on se sert du résultat pour conclure).

**Q 4.2** En analysant le poids des objets, montrer que dans cette instance, aucun sac-à-dos réalisable ne peut contenir plus de trois objets et que tout sac-à-dos de moins de trois objets est nécessairement dominé au sens de Pareto. Dans la suite de l'exercice, on restreindra