TD 2

Exercice 1 – Exercice 1 : Classifieur bayésien

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de description dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{Y}$ l'ensemble des labels $\{y_1, ..., y_l\}$.

Q 1.1 Rappeler ce qu'est un classifieur bayésien.

Q 1.2 Exprimer l'erreur faite par le classifieur bayésien à un point $\mathbf{x}$. L'erreur est-elle minimale ?

Q 1.3 Soit $\lambda(y_j, y_i)$ le coût d'une erreur consistant à prédire le label y_j plutôt que y_i. Que valent les λ dans le cas de l'erreur 0-1 ? Donner quelques exemples de coûts asymétrique et des contextes d'utilisation.

Q 1.4 Quelle est l'expression du risque $R(y_i|\mathbf{x})$ de prédire y_i sachant $\mathbf{x}$ en fonction de λ et des probabilités a posteriori ? Dans le cas 0-1 ?

Q 1.5 Donner l'expression du risque sur $\mathcal{X}$ associé au classifieur f, $R(f)$.

Q 1.6 On se place dans le cas binaire. Exprimer le critère de décision en fonction de λ et des probabilités a posteriori, puis donner un critère de décision en fonction de λ, la distribution des classes et la vraissemblance.

Exercice 2 – Exercice 2 : Estimation de densité

Q 2.1 Donner l'estimation de la densité $p_{\mathcal{B}}$ d'une variable aléatoire X à l'intérieur d'une région d'intérêt $\mathcal{B}$ de volume V, en fonction d'un nombre k d'échantillons observés dans cette zone parmi n échantillons tirés.

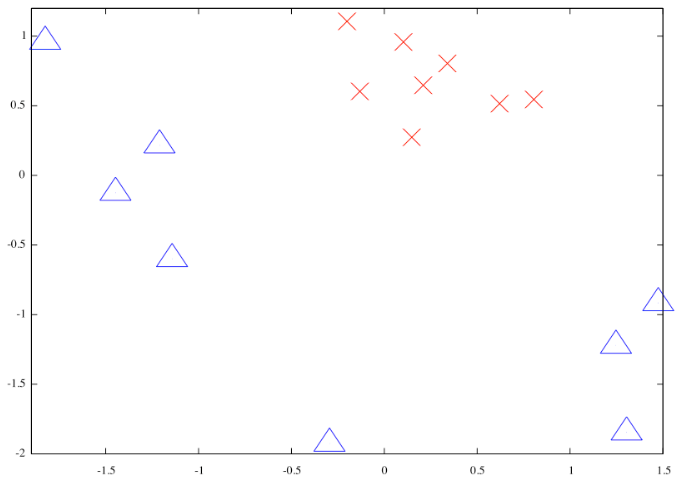
Q 2.2 Soit une variable aléatoire $X \in \mathcal{X}$. On souhaite estimer la densité p_X de cette variable à partir d'un ensemble d'observations $\mathcal{X}_o$. Décrire la manière de procéder pour réaliser cette estimation selon la méthode des histogrammes.

Q 2.3 Discuter des méthodes d'estimation de densité à noyaux

Exercice 3 – Exercice 3 : Classification selon voisinage

Q 3.1 Quelle différence entre les fenêtres de Parzen et les k-nn ? Que vérifie-t-on quand le nombre d'échantillons tend vers l'infini ?

Q 3.2 Sur l'exemple suivant, tracez la frontière de décision pour $k = 1$. Quel problème peut se poser pour des valeurs de k ?



Q 3.3 Ajouter un *outlier* en $(-0.5, -0.5)$. Comment évolue la frontière ?

Q 3.4 Et si $k = 3$? Que se passe-t-il quand k tend vers l'infini ?

Q 3.5 Soit $\mathbf{x}$ un exemple à classifier, $(\mathbf{x}_i)_{i=1}^n$ une suite d'échantillons aléatoires et $(\mathbf{x}'_j)_{j=1}^n$ la suite extraite de l'ensemble précédent tel que $\mathbf{x}'_j$ soit le plus proche voisin de $\mathbf{x}$ à l'étape j parmi les $\{\mathbf{x}_i\}$. Montrer que la séquence $(\mathbf{x}'_i)_{i=1}^n$ converge vers $\mathbf{x}$.

Q 3.6 Exprimez le risque $r(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_n)$, la probabilité de faire une erreur de classification sur $\mathbf{x}$ à l'étape n en considérant le plus proche voisin $\mathbf{x}'_n$, en fonction des $q_k(\mathbf{x}) = P(y = k|\mathbf{x})$.

Q 3.7 Vers quoi converge $r(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_n)$ quand le nombre d'échantillons tend vers l'infini ? Nous noterons $r(\mathbf{x})$ cette limite.

Q 3.8 Simplifier l'expression de $r(\mathbf{x})$.

Q 3.9 Montrer que $r(\mathbf{x}) \leq 2r_b(\mathbf{x})(1 - r_b(\mathbf{x}))$ dans le cas à 2 classes, avec $r_b(\mathbf{x})$ l'expression du risque bayésien pour x. Monter que $r(\mathbf{x}) \leq r_b(\mathbf{x})(2 - \frac{K}{K-1} r_b(\mathbf{x}))$ dans le cas à K classes.
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy $|\sum_{i=1}^n u_i v_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \sum_{j=1}^n |v_j|^2$ en l'utilisant sur $K-1$ q_i et en choisissant $v_j = 1$.