SORBONNE UNIVERSITÉ

Décision & Jeux – Énoncés de TD

DJ's team

21 janvier 2023

TD 1 - Modélisation des préférences

Exercice 1 –

Soit R la relation binaire dans $\mathcal{X} = \{0,1,2\}$ satisfaisant $1R2$, $2R1$, $0R1$, $0R2$, $2R2$, et rien d'autre. R est-elle transitive ? réflexive ? irréflexive ? symétrique ? asymétrique ? antisymétrique ? acyclique ?

Exercice 2 –

Soit R une relation binaire dans $\mathcal{X}$, qui est symétrique, transitive et possède la propriété

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{X},\ y\,R\,x$$

Montrez que R est réflexive.

Exercice 3 –

Soit R une relation binaire dans $\mathcal{X}$. Montrez que :

(i) Si R est irréflexive et transitive, alors elle est acyclique ;
(ii) si R est acyclique et faiblement complète, alors elle est transitive ;
(iii) si R est asymétrique et négativement transitive, alors elle est transitive.

Exercice 4 –

Soit $\succ$ et $\sim$ deux relations binaires dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ définies par

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\ x \succ y \ \Leftrightarrow\ x \geq y+1 \ \text{ ET }\ x \sim y \ \Leftrightarrow |\, x-y \,| < 1$$

Q 4.1 - Proposez des interprétations de $\succ$ et $\sim$ lorsque les éléments de X sont des longueurs puis lorsque ce sont des sommes d'argent.

Q 4.2 - En utilisant ces définitions :

(i) À quel type de relation $\succ$ appartient-elle ?
(ii) $\sim$ est-elle une relation d'équivalence ?
(iii) La relation $\succsim$ définie par

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\ x \succsim y \ \Leftrightarrow\ [\, x \succ y \ \text{ OU } x \sim y\,]$$

est-elle transitive ?

Exercice 5 –

Etant donné deux relations binaires, R et S dans $\mathcal{X}$ on dit que S *prolonge* R lorsque $\forall x, y \in \mathcal{X},\ xRy \ \Rightarrow\ xSy$.

Q 5.1 - Soit $\succ$ une relation acyclique dans $\mathcal{X}$ et soit $\succ_T$ sa *fermeture transitive*, définie par

$$x \succ_T y \ \Leftrightarrow\ x \succ y \text{ OU } \exists n \geq 1 \text{ ET } z_i \in \mathcal{X}\ (i = 1,..,n), x \succ z_1 \succ z_2 \succ \cdots \succ z_{n-1} \succ z_n \succ y$$

Montrer que $\succ_T$ est un ordre strict.

Q 5.2 - Soit $\succ$ un ordre strict dans un ensemble *fini* $\mathcal{X}$. Montrer qu'il existe un ordre strict faiblement complet $\succ^*$ le prolongeant ; pour cela, on donnera un algorithme construisant $\succ^*$. $\succ^*$ est-il unique ?

Exercice 6 –

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$, l'ensemble constitué du polygone de sommets $L = (1,1)$; $M = (2,1)$; $N = (2,0)$; $O = (0,0)$; $P = (0,2)$ et $Q = (1,2)$ et de son intérieur.

Q 6.1 - On considère l'ordre naturel $\geq$:

$$x = (x_1, x_2) \geq y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

(i) Quel est l'ensemble, $Adm(E)$, des admissibles dans E ? Est-il complet dans E ?
(ii) Quel est l'ensemble, $Adm(E')$, des admissibles dans $E' = E \setminus [P,Q]$, où $[P,Q]$ désigne le segment d'extrémités P et Q ? Est-il complet dans E' ?

Q 6.2 - Mêmes questions (*i*) et (*ii*) qu'au 1), mais pour la relation $\succsim$ définie par

$$x \succsim y \Leftrightarrow x = y \text{ OU } \ [x_1 > y_1 \text{ET } x_2 > y_2]$$

Exercice 7 –

Une relation binaire $\succ$ dans $\mathcal{X}$ est appelée *ordre d'intervalle* lorsque :

(i) elle est irréflexive
(ii) $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}, [x \succ y \text{ ET} z \succ w] \ \Rightarrow\ [x \succ w \text{ OU} z \succ y]$

Q 7.1 -

(a) Montrer que $\succ$ est un ordre strict.
(b) Soit la relation $\succ$ définie dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^*$ par

$$x \succ y \ \Leftrightarrow\ x - \frac{1}{x} > y\,.$$

Est-elle un ordre d'intervalle ? Est-elle négativement transitive ? Tout ordre d'intervalle est-il la partie asymétrique d'un préordre total ?

Q 7.2 - On associe à l'ordre d'intervalle $\succ$ la relation $\succsim^1$ définie par :

$$x \succsim^1 y \ \Leftrightarrow\ [\, t \succ x \ \Rightarrow\ t \succ y\,]$$

(a) Montrer que $\succsim^1$ est réflexive et transitive.
(b) Montrer, par l'absurde que $\succsim^1$ est complète. De quel type de relation s'agit-il ?
(c) On note $\succ^1$ la partie asymétrique de $\succsim^1$. De quel type de relation s'agit-il ? Montrer que : $x \succ y \Rightarrow x \succ^1 y$.

Q 7.3 - On suppose qu'il existe $A \subseteq \mathcal{X}$, dénombrable tel que $x \succ y \ \Rightarrow\ \exists a \in A,\ x \succ a \succ y$.

(a) Montrer que $\succ^1$ a la même propriété.
(b) En déduire que $\succsim^1$ est représentable par une fonction d'utilité u.
(c) On associe à u la fonction v définie par $x \mapsto v(x) = \sup\{u(y) : y \in \mathcal{X} \text{ ET } x \succ y\}$.Montrer que : $x \succ y \ \Leftrightarrow\ v(x) > u(y)$.
(d) Vérifier ce résultat sur l'exemple du 1.b).

Exercice 8 –

Soit la relation $\succsim$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par

$$x = (x_1, x_2) \succsim y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} \geq \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2$$

(i) Montrer que $\succsim$ est un préordre total ? est-ce un ordre ?
(ii) Trouver une fonction d'utilité, u, représentant $\succsim$.
(iii) La fonction v définie par $v(x) = 2\ln x_1 + \ln x_2$ est-elle une fonction d'utilité ?
(iv) Représenter graphiquement quelques courbes d'indifférence.
(v) Montrer qu'en $x = (x_1, x_2)$ la variation Δx_2 de la 2^{eme} variable permettant de conserver le même niveau d'utilité $\bar{u} = u(x)$ lorsque la 1^{ere} variable augmente (algébriquement) de Δx_1 est telle que

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{-\Delta x_1} = \frac{2x_2}{x_1}$$

(taux marginal de substitution) de la 2^{eme} variable à la 1^{ere} en x).
(vi) Pourquoi le taux trouvé aurait-il été le même si l'on avait utilisé v au lieu de u ?

TD 2 - Préférences individuelles

Exercice 9 – Axiome de Houttaker

Soit $Ch(.)$ une fonction de choix sur un ensemble $\mathcal{X}$. Considérons la propriété suivante, (H), dite *axiome de Houttaker* :

$$\forall x,\ y \in A \cap B,\ [x \in Ch(A) \text{ ET } y \in Ch(B)] \Leftrightarrow [x \in Ch(B) \text{ ET } y \in Ch(A)]$$

Q 9.1 - Montrer que (H) entraine la propriété (α) de Sen :
$[x \in B \subseteq A \text{ ET } x \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(B)$.

Q 9.2 - Montrer que (H) entraine la propriété (β) de Sen :
$[x, y \in Ch(B) \text{ ET } B \subseteq A \text{ ET } y \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(A)$.

Q 9.3 - Montrer que conjointement les propriétés (α) et (β) de Sen entrainent la propriété (H).

Exercice 10 – Paradoxe de Saint-Petersbourg

Un casino vous propose le jeu suivant [1]. Une pièce de monnaie non truquée ($Pr(Pile) = Pr(Face) = \frac{1}{2}$) va être lancée autant de fois que nécessaire ; les tirages sont supposés indépendants. Si $Face$ sort au 1^{er} lancer, le casino vous verse 2€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 2^e lancer ; si $Face$ sort à ce 2^e lancer, le casino vous verse $2^2 = 4$€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 3^e lancer ; etc. : la règle est que le jeu s'arrête au n^e lancer si $Face$ y sort pour la première fois et que vous recevez alors 2^n€ .
Pour prendre part au jeu on vous demande de miser une somme de M€ .

a) Pour quelles valeurs de M accepteriez-vous de miser ? (*réponse personnelle*)

b) Que valent vos espérances de gain (EG) brut et net (pour une mise de M€) à ce jeu.

c) Supposons que vous ayez la possibilité de jouer *pour une mise nulle*. Quel serait pour vous l'équivalent-certain du jeu, c.-à-d. la somme certaine $\bar{c}$ qu'il faudrait vous proposer, au moins, pour que vous renonciez à jouer ? (*réponse personnelle*)
M du (a) et $\bar{c}$ sont-ils du même ordre de grandeur ?

d) Selon D.Bernoulli, votre critère pour des gains $x > 0$ est en fait l'espérance d'utilité, avec pour fonction d'utilité ("de vNM", mais c'est un anachronisme !) $u(x) = \log_2(x)$.
Utilisant le fait que : $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4$,
montrer que $\bar{c} = 4$.

Exercice 11 – Satellite et préférences

Un satellite météorologique est capable à tout moment de recueillir et de transmettre de l'information, mais ne peut pas faire les deux simultanément. Il transmet les données dix

1. dû à Nicolas Bernoulli en 1713 ; Daniel Bernoulli, son neveu, en proposa une solution en 1738

fois plus vite qu'il les recueille.
On a choisi l'unité d'information pour qu'en une heure il puisse recevoir 1 unité et en transmettre 10.
Il ne peut évidemment transmettre des données qu'il n'a pas.

(i) Quelle est la quantité maximum $q(t_1, t_2)$ qu'il peut transmettre s'il consacre t_1 heures à recueillir de l'information et t_2 à en transmettre.
(ii) Tracer quelques courbes $q(t_1, t_2) = \text{cte}$.
(iii) Comment doit-il choisir t_1 et t_2 pour transmettre le maximum d'information en une journée ? en une semaine ?

Exercice 12 – Échange de ressources par deux agents (Boîte d'EDGEWORTH)

Les couloirs d'une station de métro sont nettoyés chaque nuit par deux robots appartenant l'un à une entreprise A, l'autre à une entreprise B. La capacité de nettoyage d'un robot, évaluée en hectomètres de couloir nettoyés par nuit, est fonction de ses disponibilités en énergie électrique (ressource 1, en dizaines de kWh) et produit nettoyant (ressource 2, en m^3). Elles valent initialement $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (2, 9)$ pour A et $y^0 = (y_1^0, y_2^0) = (22, 6)$ pour B. Avec $x = (x_1, x_2)$, A peut nettoyer une longueur $f(x) = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1.x_2}$; de même, avec $y = (y_1, y_2)$, B peut nettoyer une longueur $f(y) = f(y_1, y_2) = \sqrt{y_1.y_2}$.

Q 12.1 - A et B ont tous deux pour objectif de nettoyer la plus grande longueur de couloir possible. Ils ont la possibilité d'échanger entre eux des quantités quelconques des deux ressources.

(a) Montrer que les préférences de A et B dans l'espace des ressources peuvent être exprimées par les fonctions d'utilité $u(x) = u(x_1, x_2) = x_1.x_2$ et $u(y) = u(y_1, y_2) = y_1.y_2$.
(b) Montrer que le niveau d'utilité atteint par B après échange s'exprime en fonction des quantités $x = (x_1, x_2)$ possédées par A par la fonction $v(x) = v(x_1, x_2) = (24 - x_1)(15 - x_2)$.
(c) Montrer que les quantités de ressources dont disposent A et B après échange peuvent être représentées dans le plan des (x_1, x_2) par un point d'un rectangle (la *boîte d'Edgeworth*). Tracer dans ce rectangle quelques courbes d'indifférence de A et de B et, en particulier, celles qui correspondent à leurs niveaux d'utilité initiaux.
(d) Un *optimum de Pareto* est une répartition des ressources telle que l'on ne puisse augmenter strictement l'utilité d'un agent sans diminuer strictement celle de l'autre.
La répartition initiale des ressources entre A et B correspond-elle à un optimum de Pareto ?
(e) Comparer les taux marginaux de substitution (TMS) initiaux de la ressource 2 à la ressource 1 de A et B. Quels sont les taux d'échange $\frac{\Delta x_2}{-\Delta x_1}$ qui sont localement bénéfiques à la fois à pour A et pour B.
(f) Quels sont les points de la boîte où les taux de substitution de la ressource 2 à la ressource 1 sont les mêmes pour les deux agents ? En déduire l'ensemble de tous les optimums de Pareto, puis le sous-ensemble de ceux qui seraient acceptables à la fois par A et B.

Q 12.2 - Les échanges entre A et B sont réalisés par l'intermédiaire de l'annonce de prix unitaires $p = (p_1, p_2)$ des deux ressources : le vecteur prix p est dit *prix d'équilibre* lorsque les quantités de chacune des ressources que A et B souhaitent acheter ou vendre à ces prix sont exactement oppposées les unes des autres.

(a) Montrer que $p = (1, 3)$ n'est pas un prix d'équilibre.
(b) Montrer que $p^* = (5, 8)$ est un prix d'équilibre. Quelles sont les dotations correspondantes $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ et $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ de A et B ?
(c) Montrer que p^* est l'unique prix d'équilibre (à une constante multiplicative positive près).

Exercice 13 – Paradoxe d'Allais

On demande aux sujets d'une expérience sur les préférences dans le risque ce qu'ils choisiraient entre les deux propositions suivantes :

A : *gagner* 10 000€ *avec certitude* ;

B : *gagner* 50 000€ *avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{1}{11}$.

C : *gagner* 10 000€ *avec probabilité* $\frac{11}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{89}{100}$;

D : *gagner* 50 000€ *avec probabilité* $\frac{10}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{90}{100}$.

(a) Que choisiriez-vous entre A et B ? entre C et D ?
(b) On note P' la *perspective aléatoire*, ou *loterie* (lois de probabilités sur les gains) offerte par la proposition A et P'' celle offerte par la proposition B ; on note Q la loi (presque) certaine en 0€. exprimer les perspectives aléatoires offertes par les propositions C et D comme mixages de P', P'' et Q.
(c) Qu'exigerait le respect de l'axiome d'indépendance de la théorie de vNM ? Vos choix le respectent-ils ? Si ce n'est pas le cas essayez d'analyser les raisons de vos choix.

Exercice 14 – Loteries et utilités

L'ensemble des résultats (gains) est un intervalle borné $[0, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$; Les décisions engendrent toutes des loteries (lois de probabilité à support fini) sur $\mathcal{C}$. Les préférences $\succsim$ du décideur sont représentables par la fonction d'utilité V définie par :

$$P, \text{ loterie de support}\{c_i,\ i \in I(P)\} \mapsto V(P) = \prod_{i \in I(P)} [c_i^2]^{P(c_i)}$$

Q 14.1 -

(a) Montrez, à l'aide d'un exemple utilisant des loteries simples que V n'est pas une fonction d'utilité linéaire.
(b) $W = \ln \circ V$ est-elle une fonction d'utilité ? Est-elle une fonction d'utilité linéaire ?
(c) La fonction $u : c \mapsto \ln c$ est-elle une fonction d'utilité de vNM ? Quelle est l'attitude du décideur vis-à-vis du risque ?

Q 14.2 - Deux décideurs ayant tous deux V comme fonction d'utilité reçoivent :

- l'un un gain de 1 000€ si l'événement E_1 se produit, un gain de 3 000€ sinon ;
- l'autre un gain de 1 000€ si l'événement E_2 se produit, un gain de 3 000€ sinon.

(a) Sachant que $Pr(E_1) = Pr(E_2) = \frac{1}{3}$ et que $Pr(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9}$, ont-ils intérêt à s'entendre pour que le premier verse 1 000€ au deuxième si l'événement $\bar{E}_1 \cap E_2$ est réalisé et en reçoive la même somme si $E_1 \cap \bar{E}_2$ l'est[2].
(b) Quel principe général, lié à l'attitude des décideurs vis-à-vis du risque, ceci illustre-t-il ?

2. on note $\bar{E}$ le complémentaire de E.

TD 3 - Utilités de vNM

Exercice 15 –

Le Décideur (un patron-pêcheur) a la possibilité d'assurer son bateau, valant 100 k€ (milliers d' €) et constituant sa fortune initiale, contre :
- une panne (événement A_1), de probabilité $p_1 = 1/10$, de coût 10 k€ ;
et
- un naufrage (événement A_2), de probabilité $p_2 = 1/100$, de coût 100 k€ .

A_1, A_2 et $A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$ forment une partition (en particulier : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$). Le décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM $u(.)$ la fonction :

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 100(x-75) & \text{pour } x \geq 75 \\ 200(x-75) & \text{pour } x < 75 \end{cases}$$

où x est son état de fortune (exprimé en 100 k€).
Il a le choix entre :
- ne pas s'assurer (décision δ);
- s'assurer complètement avec une franchise de 5 k€ (décision d_1) (l'assurance rembourse le coût du sinistre moins la franchise) ;
- s'assurer à 70% (décision d_2) (l'assurance ne rembourse que 70% du coût du sinistre).

S'il s'assure, il doit payer une prime d'assurance c_1 pour d_1 et c_2 pour d_2.

Q 15.1

a) L'Assureur fixe les montants des primes de façon que son espérance mathématique de gain soit nulle (*valeur actuarielle)*. Calculer c_1 et c_2.
b) Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ? Que préfère-t-il entre les décisions δ, d_1 et d_2 ?

Q 15.2 On se place désormais dans l'hypothèse suivante : le Décideur pense que si l'Assureur a à lui rembourser une somme supérieure à 5 k€ , il y a une probabilité 1/2 qu'il lui rembourse bien toute cette somme et une probabilité 1/2 qu'il ne soit pas solvable et ne lui rembourse que 5 k€ .

(a) Quelle est maintenant la meilleure décision ?

(b) Est-il prêt à payer, avant de prendre sa décision, 1 k€ à un expert capable de lui dire, immédiatement et avec certitude, si l'Assureur est solvable ? (On construira l'arbre de décision correspondant à ce problème).

Exercice 16 –

Un décideur a EU pour critère, avec une fonction d'utilité de vNM sur un ensemble de résultats $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ de la forme :

$u : x \mapsto u(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$;

on sait de plus que ses préférences dans le certain croissent strictement avec les résultats et qu'il est adversaire strict du risque.

Q 16.1

(a) Que peut-on en déduire sur la valeur de α et sur l'ensemble $\mathcal{C}$?
(b) On impose dorénavant $\alpha = -1$ et $\gamma = 0$; expliquer pourquoi ce n'est pas une restriction.

Q 16.2 Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des lois de probabilité à support dans $\mathcal{C}$ qui possèdent une variance. Montrer que les préférences du décideur dans $\mathcal{P}_0$ sont représentables par la fonction d'utilité linéaire :

$$U : P \mapsto U(P) = \beta E_P - E_P^2 - V_P$$

où E_P et V_P désignent respectivement l'espérance et la variance de P.

Décrire la famille des courbes d'indifférence du décideur dans la partie accessible (que l'on déterminera) du plan des (E, V).

Q 16.3 On sait que $\beta \geq 0$. On suppose que le décideur s'il répartit un certain capital en proportions λ et $(1-\lambda)$, respectivement, entre deux investissements obtiendra un résultat aléatoire $Y_\lambda = \lambda X' + (1-\lambda) X''$, où X' et X'' sont deux variables aléatoires de moyennes $E' = 0$ et $E'' = 1$ et de variances $V' = 0$ et $V'' = 1$.

a) Quelles sont la moyenne E_λ et la variance V_λ de Y_λ ? Exprimer V_λ en fonction de E_λ.

b) Déterminer pour chaque valeur possible de β la valeur de λ qui maximise l'utilité du décideur.

Exercice 17 –

Un décideur a EU pour critère, avec une fonction d'utilité de vNM

$u : x \mapsto u(x) = \lambda[1 - \exp(-\frac{x}{\lambda})]$.

dans l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles EU existe.

On note $\mathcal{N}(m, \sigma)$ la loi normale de densité

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]$

et $\mathcal{N}$ l'ensemble des lois normales ;

Q 17.1 Montrer que le décideur a pour fonction d'utilité dans $\mathcal{N}$ la fonction U :

$N(m, \sigma) \mapsto U(\mathcal{N}(m, \sigma)) = \lambda[1 - \exp[-\frac{1}{\lambda}(m - \frac{\sigma^2}{2\lambda})]$

Q 17.2 a) Déterminer l'équivalent-certain de $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

b) En déduire une fonction d'utilité simple représentant les préférences du décideur dans $\mathcal{N} \cup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des lois certaines.

Q 17.3 Un premier investissement peut apporter un gain aléatoire X_1 de loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et un deuxième X_2 de loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$; la réalisation simultanée de ces deux investissements rapporterait $X_1 + X_2$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

a) Le décideur préfère X_1 au *statu quo* ; il préfère aussi X_2 au *statu quo*. Préfère-t-il alors nécessairement $X_1 + X_2$ à X_1 et à X_2 ?

b) Que doit-il faire s'il a en outre la possibilité de réaliser (seul ou simultanément aux autres) un troisième investissement apportant un gain certain $x_0 > 0$?

Exercice 18 –

Le décideur, D, propriétaire d'un petit terrain dans une zone pétrolifère, doit choisir entre forer (F) et ne pas forer ($\overline{F}$) un puits, qui pourra se révéler non-productif (N), assez productif (A), ou très productif (T).
Les probabilités a priori de ces événements et les gains (algébriques) possibles pour chacune des deux décisions sont donnés par le tableau suivant :

Evénement E	N	A	T
Probabilité a priori de E	0,5	0,25	0,25
Gain apporté par F si E	-100	100	500
Gain apporté par $\overline{F}$ si E	0	0	0

Tous les gains sont exprimés dans une même unité monétaire.

Avant de choisir entre F et $\overline{F}$, D peut faire procéder à un sondage sismique (S), qui lui coûterait 10 unités, ou ne pas y avoir recours ($\overline{S}$).
Le pronostic résultant du sondage peut être bon (B) ou mauvais (M).

Par expérience, on sait que les probabilités d'un bon et d'un mauvais pronostic pour les puits non-productifs, assez productifs et très productifs sont les suivantes :

Evénement E	N	A	T
Probabilité de B si E	0,2	0,6	0,8
Probabilité de M si E	0,8	0,4	0,2

Q 18.1 Construire l'arbre de décision du problème en indiquant les probabilités conditionnelles de chaque branche issue d'un sommet événementiel.

Q 18.2 D a pour critère EU et sa fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern, u, définie sur l'intervalle de gains $]-200, +\infty[$, est $x \mapsto u(x) = \frac{x}{x+200}$.

(a) Quelle est l'attitude de D vis-à-vis du risque ?
Montrer que pour toute probabilité $p > 0$, il existe une perte M_p (= un gain algébrique $-M_p$) telle qu'il préfère le statu quo à toute décision entraînant avec la probabilité p la perte M_p (quels que soient ses autres gains et pertes).

(b) Déterminer la stratégie de décision optimale de D.

Q 18.3 On suppose que la fonction u est initialement inconnue de l'analyste, A, qui, par interrogation interactive de D, va chercher à obtenir une information partielle sur u suffisante pour déterminer la stratégie de décision optimale de D.

(a) Pourquoi peut-on toujours supposer que A connaît : "$u(0) = 0$; $u(800) = 0,8$"?

(b) Montrer que pour déterminer la décision optimale dans l'option $\overline{S}$, A peut se contenter de l'information "$u(-100) \leq -0,8$". Quelle question peut-il poser au décideur pour s'en assurer ?

(c) Montrer que l'information supplémentaire "$u(-10) \geq -\frac{4}{11}$" détermine de plus la décision optimale dans l'option S lorsque le pronostic est M.
Montrer que l'information "$u(-110) \geq -\frac{5}{4}$; $u(490) \geq \frac{2}{3}$" détermine la décision optimale dans cette même option lorsque le pronostic est B.

d) Que suffit-il de savoir de plus pour pouvoir déterminer complètement la stratégie de décision optimale ?

TD 4 - Décision multicritère

Exercice 19 – Relations de préférence

Q 19.1 Démontrer que la relation $\succsim$ de dominance faible de Pareto définie par

$$x \succsim y \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, n, x_i \geq y_i)$$

est réflexive, transitive.

Q 19.2 Démontrer que la dominance de Pareto $\succ$ définie par

$$x \succ y \Leftrightarrow (x \succsim y \text{ et non } y \succsim x)$$

est irréflexive, asymétrique et transitive.

Q 19.3 Démontrer que la relation de préférence lexicographique $\succsim_{lex}$ définie par

$$\begin{aligned} x \succ_{lex} y &\Leftrightarrow x_k > y_k \text{ où } k = \min\{i \mid x_i \neq y_i\} \\ x \sim_{lex} y &\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, x_i = y_i \end{aligned}$$

est transitive, réflexive et totale.

Q 19.4 Démontrer que la relation $\succsim^w_{SP}$ définie par

$$x \succsim^w_{SP} y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

est réflexive, transitive et complète.

Q 19.5 Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n$ fermé convexe, pour tout vecteur Pareto non-dominé x^*, il existe $w \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que x^* est optimal pour $\succsim^w_{SP}$.

Exercice 20 – Espaces de décisions et critères

Considérons le problème suivant :
$\min\ (f_1(x), f_2(x))$ t.q. $x \in [-1, 1]$, avec $f_1(x) = \sqrt{5 - x^2}$ et $f_2(x) = \frac{x}{2}$.

Q 20.1
Représenter le problème dans l'espace des décisions et dans l'espace des critères puis déterminer l'ensemble des points non-dominés et les solutions de Pareto.

Exercice 21 – Relation de préférence multicritère

En fin d'année scolaire, les meilleurs étudiants d'une classe de troisième ont les notes suivantes (moyenne sur l'année) :

	Français	Mathématiques	Histoire	Sciences physiques
E_1	15	14	14	16
E_2	10	12	16	13
E_3	19	10	19	12
E_4	10	19	11	15
E_5	13	16	14	16
E_6	14	13	15	15
E_7	11	14	12	14
E_8	12	12	16	13
E_9	13	17	14	16

Q 21.1 Quels sont les meilleurs étudiants au sens de la dominance de Pareto ?

Q 21.2 En conseil de classe, on souhaite affecter ces étudiants en filière scientifique ou en filière littéraire.
Comme première approche, on classe les étudiants en faisant une moyenne de leurs notes dans les différentes matières. Peut-on avec cette approche affecter les étudiants dans une filière de manière satisfaisante ?
Pour sélectionner les étudiants pour la filière scientifique, on propose alors de classer les étudiants selon leurs moyennes pondérées avec les coefficients suivants :
0.15 pour le français, 0.4 pour les mathématiques, 0.15 pour l'histoire, 0.3 pour les sciences physiques.
Le classement obtenu vous paraît-il plus judicieux ?

Q 21.3 Au lieu d'utiliser une moyenne pondérée, on souhaite classer les étudiants selon un ordre lexicographique. Pour cela, proposer un ordre d'importance sur les matières permettant de trouver les meilleurs étudiants pour la filière scientifique. Donner le classement induit par cet ordre. Faites de même pour la filière littéraire.
Est-ce que cette approche vous semble satisfaisante ?

Q 21.4 Pour la filière scientifique, on souhaite seulement spécifier les informations suivantes :
mathématiques > francais, mathématiques > histoire, physique > français et physique > histoire.
Comment trouver le ou les meilleurs étudiants selon cet ordre d'importance sur les matières ? Donner le classement.
Pour la filière littéraire, on spécifie :
français > mathématiques, français > histoire, français > physique, histoire > mathématiques et histoire > physique.
Donner le classement selon cet ordre d'importance.

Exercice 22 – Lex, Max et Lexmax

Soit X, un ensemble fini et $(f_1, \dots, f_n)$, n fonctions critères à minimiser. Pour tout $x \in X$, on note x_i la performance $f_i(x)$. On considère alors les trois relations de préférence suivantes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x <_{lex} y &\Longleftrightarrow x_q < y_q \text{ avec } q = \min\{i : x_i \neq y_i\} \\ x <_{max} y &\Longleftrightarrow \max_i x_i < \max_i y_i \\ x <_{lexmax} y &\Longleftrightarrow \tilde{x} <_{lex} \tilde{y} \end{aligned}$$

où $\tilde{x}$ est le vecteur des $x_i, i = 1, \dots, n$, triés par ordre décroissant ($\tilde{x}_i \geq \tilde{x}_{i+1}$).

Q 22.1 Pour une relation de préférence $\prec$ sur X on note l'ensemble des meilleurs éléments :

$$M(X, \prec) = \{x \in X : \forall y \in X, \text{non}(y \prec x)\}$$

Montrer que les ensembles $M(X, <_{lex})$, $M(X, <_{max})$, $M(X, <_{lexmax})$ sont non-vides.

Q 22.2 Montrer que $M(X, <_{lexmax}) \subseteq X^P \cap M(X, <_{max})$ et que cette inclusion peut être stricte (X^P désigne les optima de Pareto) ; pour le second point, on s'appuiera sur l'exemple suivant :

$X = \{a, b, c, d, e\}$ avec

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
a	1	3	8	2	4
b	4	3	8	1	1
c	7	5	4	6	1
d	3	7	4	6	5
e	4	7	5	6	5

Exercice 23 – Robot et TSP

Un robot de surveillance doit visiter en boucle 5 points stratégiques dans un espace qu'il supervise. On sait que le coût d'une transition possible d'un point i à un point j est $f_1(i, j)$ selon un premier critère (temps) et $f_2(i, j)$ selon un deuxième critère (consommation d'énergie), avec $i \in \{1, \ldots, 5\}, j \in \{1, \ldots, 5\}$ et $i \neq j$.
La topographie du relief interdit certaines transitions directes d'un point à un autre. Les transitions autorisées sont indiquées dans la matrice suivante qui donne, pour tout déplacement admissible d'un point i à un point j, le couple $(f_1(i, j), f_2(i, j))$ à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, et "–" en cas de transition impossible :

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	–	(10,8)	(4,5)	(10, 8)	–
2	(4,7)	–	(2,10)	–	(3,8)
3	(7,6)	(8,8)	–	(14,12)	(3,1)
4	(14,2)	–	(12,7)	–	(1,5)
5	–	(3,7)	(4,4)	(16,1)	–

Le robot est initialement situé au point 1 et doit visiter chacun des autres points (il ne doit passer qu'une seule fois par chaque point) avant de retourner au point de départ. On s'intéresse ici à optimiser le premier tour, les autres se faisant sur le même modèle.

Q 23.1 Représenter les possibilités de transition et leurs coûts par un graphe muni d'une valuation multicritère puis énumérer les solutions admissibles du problème, c'est-à-dire les circuits hamiltoniens de ce graphe (circuits qui passent une fois et une seule par chaque sommet du graphe).
Indication : on partira du sommet 1 et on développera l'arborescence des choix possibles.

Q 23.2 Représenter l'image de l'ensemble des circuits admissibles dans l'espace des critères et déterminer :

a les circuits Pareto-optimaux (les deux critères sont à minimiser),

b les circuits optimaux au sens d'une agrégation lexicographique (on supposera tout d'abord que le critère 1 est plus important que le critère 2, puis on fera l'hypothèse inverse).

Q 23.3 On considère maintenant une nouvelle fonction coût f_α définie, pour tout arc (i, j) du graphe de la question 1 par : $f_\alpha(i, j) = \alpha f_1(i, j) + (1 - \alpha) f_2(i, j)$ où $\alpha \in [0, 1]$. Déterminer, en fonction des valeurs de α, les circuits minimisant la fonction f_α. Obtient-on ainsi la totalité des circuits Pareto-optimaux ? Pourquoi ?

Q 23.4 On considère deux nouvelles fonctions coût définies de la manière suivantes :

$$\begin{aligned} f'_1(i, j) &= \max\{f_1(i, j), f_2(i, j)\} \\ f'_2(i, j) &= f_1(i, j) + f_2(i, j) \end{aligned}$$

Montrer que toute solution Pareto-optimale pour les critères (f'_1, f'_2) est Pareto-optimale pour les critères (f_1, f_2). En déduire l'ensemble des circuits Pareto-optimaux pour (f'_1, f'_2).

TD 5 - Résolution de problème multicritère

Exercice 24 – Arbres couvrants minimum multi-critère

Une entreprise dont les locaux sont répartis sur 4 sites a, b, c et d souhaite se munir d'un réseau informatique permettant de connecter entre eux tous les ordinateurs de tous les sites. Sur chaque site, les ordinateurs sont déjà connectés entre eux par un réseau local. Il suffit donc de relier les sites entre eux par un réseau à haut débit.
Pour choisir la meilleure configuration du réseau, on dispose de deux types d'informations :
- le coût d'installation de chaque ligne exprimé en K€,
- le temps nécessaire à l'installation de chaque ligne, exprimé en semaines.

L'entreprise peut envisager de créer tout ou partie des 5 lignes suivantes :

Lignes	Coût (K€)	Temps (sem.)
$(a,\ b)$	16	4
$(a,\ c)$	8	2
$(b,\ c)$	12	8
$(b,\ d)$	7	8
$(c,\ d)$	6	10

On peut donc construire deux critères d'évaluation pour le réseau R. On considère d'une part une fonction $f_1(R)$ évaluant le "coût d'installation" d'un réseau R, défini comme la somme des coûts de chacune des lignes qui le composent, et d'autre part une fonction $f_2(R)$ évaluant le "temps d'installation" du réseau R, défini comme la somme des temps d'installation des lignes qui le composent (on suppose qu'on ne dispose pas de moyens suffisants pour installer les lignes simultanément).
Ainsi le réseau constitué des arcs (a,b), (b,c), et (c,d) coûte 34 Keuro et nécessite 22 semaines de travaux d'installation.
On souhaite disposer d'un réseau dans les meilleurs délais et pour un coût le plus réduit possible. Le but de cet exercice est de déterminer la (ou les) meilleure(s) configuration(s) sur la base des informations ci-dessus.

Q 24.1 Les configurations admissibles du réseau sont celles qui permettent à chaque site d'être relié aux autres (directement ou indirectement). Montrer (sans les énumérer) que toute configuration non-dominée est un arbre couvrant du graphe.

Q 24.2 Pour obtenir une configuration non-dominée, on envisage l'algorithme suivant :

1. Choisir une ligne L_1 non-dominée dans l'ensemble L des 5 lignes proposées,
2. Choisir une ligne L_2 non-dominée dans l'ensemble $L \setminus L_1$,
3. Choisir une ligne L_3 distincte des deux précédentes et non-dominée dans l'ensemble des arêtes qui ne créent pas de cycle avec les deux précédentes.

L'algorithme ci-dessus produit-il nécessairement un réseau $\{L_1, L_2, L_3\}$ Pareto-optimal ? (on raisonnera dans le cas général et non pas avec les performances données dans le problème)

Q 24.3 En utilisant l'algorithme de Kruskal, déterminer la configuration R_1^* de coût minimum et la configuration R_2^* la plus rapide à mettre en place. Déterminer le point I de coordonées $(f_1(R_1^*), f_2(R_2^*))$.

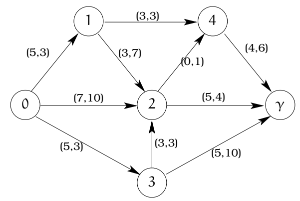
Q 24.4 Énumérer les configurations admissibles constituées de trois lignes et les représenter dans l'espace des critères. En déduire les configurations non-dominées. Déterminer

le réseau non-dominé R dont l'image dans l'espace des critères est la plus proche du point I (au sens de la norme infinie).

Q 24.5 On envisage maintenant d'appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe initial en valuant chaque arête e par un scalaire $f_\alpha(e) = \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e)$, $(\alpha \in [0,1])$. En utilisant ces valuations scalaires, déterminer en fonction de α l'évaluation de chaque réseau non-dominé du graphe. En déduire quels réseaux de R peuvent (ou ne peuvent pas) être obtenus en optimisant une combinaison linéaire des critères. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 25 – Plus court chemin multi-critère

Dans le réseau routier représenté ci-dessous, les sommets $\{0,1,2,3,4,\gamma\}$ représentent des sites particuliers d'une ville et les arcs des routes à sens unique pour joindre un site à partir d'un autre. On suppose qu'un individu est situé sur le site 0 et souhaite atteindre le site γ de manière efficace. Pour apprécier l'intérêt d'emprunter une route particulière représentée par un arc a qui joint deux sommets x et y, on considère 2 critères :
- $g_1(a)$: temps nécessaire (en minutes) pour aller de x à y en empruntant la route a
- $g_2(a)$: distance parcourue (en km) pour aller de x à y en empruntant la route a



Pour chaque arc a représentant une route, les temps et distances pour a sont donnés sur le graphe sous la forme $[g_1(a), g_2(a)]$.
On cherche alors l'itinéraire le plus approprié parmi les chemins allant de 0 à γ sachant que la valeur d'un chemin C est évaluée par les deux critères : $g_1(C) = \sum_{a \in C} g_1(a)$ et $g_2(C) = \sum_{a \in C} g_2(a)$.

Q 25.1 Déterminer les chemins préférés au sens de préférences lexicographiques, tout d'abord en supposant que le premier critère est plus important que le second, puis en faisant l'hypothèse inverse.

Q 25.2 En utilisant l'algorithme de Corley et Moon, déterminer les chemins efficaces allant de 0 à γ et donner les points efficaces associés dans l'espace bi-critère (g_1, g_2). Parmi ces points, quel est, selon vous, le meilleur compromis.

Q 25.3 On considère une fonction d'évaluation qui à tout chemin C associe la valeur par : $g(C) = w_1 g_1(C) + w_2 g_2(C)$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$. Expliquer comment obtenir le chemin optimal au sens d'une telle fonction. Montrer qu'il existe un chemin Pareto-optimal qui ne pourra être détecté en minimisant la fonction g.

Exercice 26 – Décisions multi-critères

Un organisme d'aide internationale, la F.A.O., étudie des projets agricoles concernant deux pays en voie de développement (P_1 et P_2), pour lesquels l'une des premières urgences est d'accroître leur production alimentaire. C'est pourquoi des experts en agronomie seront détachés sur place, chargés de développer des projets "pilotes" permettant de présenter et enseigner des techniques agricoles aux populations locales.

Le nombre de projet pouvant être entrepris est restreint en raison des ressources limitées de la F.A.O. De plus, les projets, pour être menés à bien, ne nécessitent pas les même ressources dans les deux pays. Les données sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

type de ressource	Quantité requise par projets		quantité disponible
	Pays P_1	Pays P_2	
Equipement	0	5	25
Experts	1	3	18
Moyens (en M d'Euros)	60	20	600

On estime que chaque projet entrepris dans le pays P_1 (respectivement P_2) permettra d'accroître la production alimentaire de façon à satisfaire les besoins nutritifs de 2000 personnes supplémentaires (respectivement 3000). Il est possible de considérer des fractions de projets et nous supposons que les fractions de projets affectent proportionnellement les données du tableau ci-dessus.

Q 26.1 Définir les variables permettant de caractériser un plan d'action de la F.A.O. et les contraintes portant sur ces variables. Représentez graphiquement l'ensemble des plans qui peuvent être envisagés.

Q 26.2 On note Z_1 (respectivement Z_2) l'accroissement de production alimentaire dans le pays P_1 (respectivement P_2) suite à l'action de la F.A.O. Une première façon de prendre en compte les deux objectifs concurrents représentés par Z_1 et Z_2 consiste à attribuer les ressources de manière prioritaire à l'un des pays. En utilisant ce principe, on demande pour chaque cas $(i = 1, 2)$ de :

- Déterminer le point A_i représentant la solution optimale lorsque P_i est prioritaire,
- Expliciter le plan d'action représenté par A_i. En déduire l'accroissement de population maximal Z_i^* qu'il est possible d'atteindre dans P_i.

Q 26.3 Aucune des solutions liées aux points A_1 et A_2 ne pouvant satisfaire à la fois les représentants des deux pays, les membres de la F.A.O. décident d'orienter l'investigation vers la recherche d'une solution de compromis.

a) Déterminer les points efficaces et les solutions de Pareto associées pour le problème bi-critère caractérisé par les objectifs (Z_1, Z_2).
b) On considère maintenant une fonction objectif de la forme $Z(\alpha) = \alpha Z_1 + (1 - \alpha)Z_2$ où $\alpha \in [0, 1]$ représente l'importance relative accordée à P_1 par rapport à P_2. Soit $\Pi(\alpha)$ le programme linéaire relatif à la fonction $Z(\alpha)$. Formulez $\Pi(\alpha)$ et discutez les solutions optimales en fonction de α. En déduire le plan d'action auquel on aboutit si l'on accorde aux deux pays la même importance. Placez sur le graphique le point A_3 représentant ce plan d'action.

Q 26.4 Le représentant de P_2 fait remarquer que la solution liée à A_3 est trop déséquilibrée. La F.A.O. décide de trouver le plan d'action réalisable pour lequel le minimum des accroissements de production alimentaire de chaque pays est le plus grand possible.

a) Modélisez ce nouveau problème par un programme linéaire Π_4.
b) Montrer que A_3 n'est pas une solution optimale de Π_4.
c) Déterminez la solution optimale de Π_4. Placez ce point A_4 lié à cette solution sur le graphique et déterminer son impact sur la production alimentaire de chaque pays ?
d) Dimensionner les ressources supplémentaires nécessaires pour être en mesure de nourrir 14000 personnes dans chaque pays.

Q 26.5 Face à la solution proposée, le représentant de P_1 fait remarquer que la problématique retenue en 4) ne tient pas compte des possibilités d'accroissement dans chaque pays, et notamment du fait que $Z_1^* > Z_2^*$. Afin de prendre en compte cette remarque, il faudrait chercher le plan d'action pour lequel le maximum des quantités $Z_1' = (Z_1^* - Z_1)$ et $Z_2' = (Z_2^* - Z_2)$ est le plus petit possible.

a) Montrez que ce problème revient à résoudre un programme linéaire Π_5 qui se déduit de Π_4 en changeant un coefficient du second membre des contraintes.
b) En déduire le plan d'action optimal. Placez sur le graphique le point A_5 correspondant.
c) Soit c_1 une nouvelle estimation de l'accroissement de production de nourriture consécutif à la mise en oeuvre d'un projet dans le pays P_1 (on avait $c_1 = 2000$ avant). Pour quelle valeur de c_1 les problèmes liés à (Π_4) et (Π_5) conduisent-ils au même plan d'action ?

Exercice 27 – Décision multicritère

On considère un problème d'affectation où 3 tâches doivent être affectées à 3 agents (une seule tâche par agent et un seul agent par tâche) de manière à minimiser les deux fonctions coûts suivantes :

$$f_k(X) = \sum_{i,j} c_{ij}^k x_{ij}, \quad k = 1, 2$$

où X est une matrice de booléens dont le terme x_{ij} (ligne i, colonne j) vaut 1 si l'on affecte la tâche j à l'agent i et 0 sinon ; les coefficients $c_{ij}^k, k = 1, 2$ sont donnés par les matrices suivantes :

$$C^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple l'affectation qui consiste à attribuer les tâches 3, 2, et 1 respectivement aux agents 1, 2 et 3 est représentée par la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et est telle que $f_1(X) = 2 + 2 + 0 = 4$ et $f_2(X) = 2 + 0 + 2 = 4$ donnant lieu au vecteur coût $(4, 4)$ représentant l'image de X dans l'espace des critères.

Q 27.1 Déterminer les affectations réalisables de ce problème et les vecteurs coûts associés dans l'espace des critères.

Q 27.2 Déterminer l'ensemble des affectations Pareto-optimales (attention les critères sont à minimiser).

Q 27.3 On cherche à minimiser une fonction $f_\lambda = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ avec $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer, pour chaque affectation Pareto-optimale X du problème, la fonction $g_X(\lambda)$ qui donne, pour toute valeur de λ, le coût de X selon f_λ. Discuter alors en fonction de λ quelle sera l'affectation optimale au sens de f_λ. En déduire la liste des affectations qui sont des optima potentiels pour la somme pondérée, c'est-à-dire l'ensemble X_{SP} des affectations qui minimisent f_λ pour au moins une valeur de $\lambda \in]0, 1[$.

Q 27.4 Dans ce problème, existe-t-il des affectations Pareto-optimales qui ne sont pas dans X_{SP}. Expliquez pourquoi.

Q 27.5 À tout vecteur coût $x = (x_1, x_2)$ d'une affectation X on associe le vecteur $x^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}, x_2^{\downarrow})$ qui est obtenu à partir de x en triant ses composantes par ordre décroissant. On définit alors la fonction $h_\lambda(x) = \lambda x_1^{\downarrow} + (1 - \lambda) x_2^{\downarrow}$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$. Par exemple si $x = (6, 9)$ on a $x^{\downarrow} = (9, 6)$ et $h_\lambda(x) = 9\lambda + 6(1 - \lambda) = 6 + 3\lambda$. Montrer dans le cas général que les solutions minimisant h_λ pour au moins une valeur de $\lambda \in]0, 1[$ sont nécessairement Pareto-optimales. Déterminer ces solutions en fonction de λ dans le cas de l'exercice.

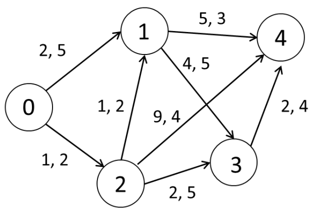
Exercice 28 – Chemins robustes

On suppose qu'un individu est situé sur le sommet 0 d'un graphe orienté et souhaite atteindre le sommet but n de manière efficace. Deux scénarios sur les temps de trajets sont considérés, notés s_1, s_2 donnant lieu à deux temps différents pour le même chemin. Soit t_i^* le temps de parcours du chemin le plus rapide de 0 à n dans le scénario s_i pour $i = 1, 2$. Soit $R_i(t_i) = t_i - t_i^*$ le regret engendré par le choix d'un chemin dont le temps de parcours est t_i dans le scénario $s_i, i = 1, 2$. On s'intéresse alors à la recherche d'un chemin robuste dans le graphe, c'est-à-dire un chemin dont les temps de parcours (t_1, t_2) dans les deux scénarios envisagés minimisent la quantité $R(t_1, t_2) = \max\{R_1(t_1), R_2(t_2)\}$ sur l'ensemble des couples (t_1, t_2) réalisables (chemin de regret minimax).

Q 28.1 Montrer que, dans le cas général, un tel chemin n'est pas nécessairement Pareto optimal. Montrer ensuite, toujours dans le cas général, qu'il existe nécessairement un chemin Pareto-optimal qui minimise $R(t_1, t_2)$.

Q 28.2 Soit la relation de préférence définie sur les valuations des chemins par $(t_1, t_2) \precsim (t_1', t_2')$ (lire (t_1, t_2) est préféré à (t_1', t_2')) si $R(t_1, t_2) \leq R(t_1', t_2')$. En utilisant un exemple sur un petit graphe de votre choix où chaque arc est valué par deux temps (un dans chaque scénario), montrer que cette relation ne vérifie pas nécessairement le principe de Bellman.

Q 28.3 En vous appuyant sur l'algorithme de Coorley et Moon, proposer une méthode pour déterminer un chemin de regret minimax et appliquer la méthode à l'exemple suivant (0 est le sommet initial et 4 est le sommet but) :



Note : les valuations des arcs représentent les temps dans les différents scénarios. Ainsi le temps de parcours de l'arc (0,1) sera 2 dans le scénario s_1 et 5 dans le scénario s_2.

Q 28.4 On suppose que les deux scénarios sont équiprobables. Montrer que la solution trouvée à la question précédente minimise l'espérance du coût. Est-ce toujours le cas ? (justifier votre réponse).

TD 6 - Utilités additives

Exercice 29 – Cancellation axiom

Q 29.1 Montrer que si une relation binaire $\succsim$, dans $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ satisfait la condition d'annulation d'ordre 3, (C_3), elle est nécessairement transitive.

Q 29.2 Que serait (C_2) ? Quelles sont toutes les implications de (C_2) ? Montrer que si $\succsim$ est réflexive, $(C_3) \Rightarrow (C_2)$.

Q 29.3 Montrer que (C_4) :

Si les 4 choix $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$, $d = (d_1, d_2)$
ont globalement les mêmes premières et secondes composantes
que les 4 autres choix $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2)$, $v = (v_1, v_2)$, alors
$a \succsim r$ ET $b \succsim s$ ET $c \succsim t \Rightarrow d \precsim v$

est aussi une condition nécessaire d'existence d'une utilité additive.

Q 29.4 Montrer que $(C_4) \Rightarrow (C_3)$.

Q 29.5 Montrer que (C_4) contient en particulier la *condition de Reidemeister* :

Soit $x_1, y_1, z_1, w_1 \in \mathcal{X}_1, x_2, y_2, z_2, w_2 \in \mathcal{X}_2$ et tels que :
(x_1, x_2), (y_1, y_2), (y_1, w_2), (x_1, z_2), (w_1, y_2), (z_1, x_2), (z_1, z_2) $(w_1, w_2) \in \mathcal{X}$ alors
$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ ET $(y_1, w_2) \sim (x_1, z_2)$ ET $(w_1, y_2) \sim (z_1, x_2) \Rightarrow (z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$

Q 29.6 On suppose que $\mathcal{X}$ ne contient que les 8 couples suivants : $\begin{vmatrix} (1, \frac{5}{3}) & (2,1) & (2,5) & (1,7) \\ (6,1) & (5, \frac{5}{3}) & (5,7) & (6,5) \end{vmatrix}$
et que les préférences y sont représentables par la fonction d'utilité :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^2 + 2x_2 + x_1.x_2$$

(*i*) Montrer que les préférences sont $\{1\}$-indépendantes et $\{2\}$-indépendantes.
(*ii*) Montrer que la condition de Reidemeister n'est pas vérifiée.
(*iii*) Montrer que la condition de Thomsen est vérifiée trivialement. (C_3) l'est-elle ? Qu'en concluez-vous ?

Exercice 30 – Indépendance

Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_n$ muni d'un préordre complet $\succsim$ faiblement indépendant. Pour tout vecteur $x \in \mathcal{X}$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, notons x_{-i} le vecteur obtenu à partir de x où la i-ème composante a été supprimée, i.e. $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, pour tout $y_i \in \mathcal{X}_i$, pour tout vecteur $x \in \mathcal{X}$, notons $(y_i, x_{-i}) \in \mathcal{X}$ le vecteur $(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$.
Comme le préordre est faiblement indépendant, les relations $\succsim_i$ sont bien définies pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\forall x_i, y_i \in \mathcal{X}_i, x_i \succsim_i y_i \Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{X}, (x_i, z_{-i}) \succsim (y_i, z_{-i})$$

Q 30.1 Montrer que $\succsim_i$ est un préordre complet.

Q 30.2 Montrer que $[\forall i = 1, \dots, n, x_i \succsim_i y_i] \Rightarrow x \succsim y$.

Q 30.3 Montrer que $[\forall i = 1, \dots, n, x_i \succsim_i y_i$ et $\exists j, x_j \succ_j y_j] \Rightarrow x \succ y$.

Exercice 31 – Existence d'utilités additives

Soit $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ un ensemble de 8 voitures dont les caractéristiques sont analysées par un acheteur potentiel. Pour simplifier on considère que les voitures sont caractérisées par 3 attributs qui sont leur couleur, leur marque et le type de moteur (essence, diesel, hybride) :

	Couleur	Marque	Moteur
a	bleu	peugeot	essence
b	rouge	citroen	diesel
c	vert	renault	hybride
d	bleu	peugeot	diesel
e	rouge	citroen	hybride
f	rouge	renault	diesel
g	vert	peugeot	hybride
h	bleu	citroen	essence

Q 31.1 Sachant que l'acheteur a les préférences suivantes : $g \succ c \succ b \succ f \succ e \succ a \succ h \succ d$ on souhaite trouver une représentation de ses préférences par une utilité additive, si elle existe. Dans l'hypothèse où une telle représentation existe, quelles seraient les préférences selon chaque attribut.

Q 31.2 Écrire un programme linéaire qui permette de tester s'il existe une utilité additive permettant de représenter le classement de l'acheteur et qui, si elle existe, renvoie une solution entière. Si elle n'existe pas comment modifier le programme linéaire pour trouver une fonction d'utilité additive qui approxime au mieux les préférences observées.

Q 31.3 Reprendre la question précédente dans l'hypothèse où le décideur changerait d'avis et permuterait les positions de g et c dans son classement.

Exercice 32 – Système de recommandation

Un système de recommandation de films de cinéma fonctionne avec une base d'utilisateurs réguliers partitionnés en différents groupes, chaque groupe étant caractérisé par une fonction d'utilité définie sur une base de films étalon. Pour simplifier, on supposera ici que l'on a seulement deux groupes dans la population, caractérisés par les fonctions d'utilités u_1 et u_2 qui représentent respectivement 60% et 40% des avis de la population. Lorsqu'un nouvel utilisateur se connecte au site, on cherche à éliciter ses préférences et pour cela à savoir sur quels films étalons il convient de l'interroger pour pouvoir le conseiller le plus efficacement possible. Pour simplifier, supposons que le nouvel utilisateur hésite entre trois films m_1, m_2, m_3 et sollicite un conseil.

Q 32.1 Sachant que les utilités des films m_1, m_2, m_3 pour chacun des deux groupes d'utilisateurs sont données dans le tableau suivant :

	m_1	m_2	m_3
u_1	16	12	7
u_2	4	11	14

Quelle est la recommandation a priori que pourrait faire le système ?

Q 32.2 Supposons que l'on veuille affiner le conseil en utilisant des films étalon et que l'on hésite entre les deux questions suivantes impliquant les films étalons m ou m' :

- Q : Avez-vous aimé le film m ($Q = q$ si oui, $Q = \overline{q}$ sinon) ?
- Q' : Avez-vous aimé le film m' ($Q' = q'$ si oui, $Q' = \overline{q'}$ sinon) ?

Sachant que les probabilités des réponses aux questions Q et Q' sont différentes selon que l'individu appartienne au groupe 1 (fonction d'utilité u_1) ou au groupe 2 (fonction d'utilité u_2), et sont données par $P(.|Q)$ et $P(.|Q')$ dans les tableaux ci-dessous, déterminer la probabilité que la réponse à la question Q soit affirmative puis la probabilité que la réponse à la question Q' soit affirmative. En déduire les probabilités qu'un nouvel individu ait les préférences u_1 ou u_2 en fonction de sa réponse à la question Q, puis en fonction de sa réponse à la question Q'.

$P(\cdot/u_j)$	q	$\overline{q}$
u_1	0.3	0.7
u_2	0.8	0.2

$P(\cdot/u_j)$	q'	$\overline{q'}$
u_1	0.3	0.7
u_2	0.4	0.6

Q 32.3 Calculer alors l'utilité espérée des films m_1, m_2, m_3 dans les cas suivants :

1. l'individu répond affirmativement à la question Q,
2. l'individu répond négativement à la question Q,
3. l'individu répond affirmativement à la question Q',
4. l'individu répond négativement à la question Q'.

Q 32.4 Calculer la valeur espérée de la recommandation que l'on pourra faire en utilisant la question Q ou la question Q'. En déduire la valeur de l'information véhiculée par la réponse à la question Q, puis à la question Q'. Ces questions sont-elles informatives ?

Q 32.5 Quelle question doit-on choisir entre Q et Q' ; et quel film faut-il recommander selon la réponse de l'utilisateur ?

TD 7 - Élicitation d'utilités additives

Exercice 33 – Détermination de préférences individuelles

Q 33.1 - L'été dernier, à Bac+3,vous trouviez des propositions d'embauche à un salaire mensuel de 1 500 euro avec 7 semaines de vacances par an.
Un autre employeur possible ne donne jamais que 5 semaines ; à partir de quel salaire auriez-vous trouvé sa proposition plus intéressante que les précédentes ?
Même question pour un autre employeur qui ne vous aurait laissé que 3 semaines de congés.

Q 33.2 - L'été prochain, à Bac+4, vous pourrez être embauchés à 2 000 euro mensuels avec 7 semaines de vacances par an.
Déterminez comme au Q1.1 les salaires qu'il faudrait vous proposer pour accepter de n'avoir que 5 ou que 3 semaines de vacances.

Q 33.3 - L'été suivant, à Bac+5, vous pourrez gagner 2 500 euro avec 7 semaines de vacances par an.
Déterminez comme au Q1.1 et au Q1.2 les salaires qu'il faudrait vous proposer pour accepter de n'avoir que 5 ou que 3 semaines de vacances.

Q 33.4 - A l'aide de vos réponses précédentes construire approximativement votre réseau de courbes d'indifférence dans l'orthant positif des $x = (x_1, x_2)$ où :

- x_1 = nombre de semaines de vacances par an ;
- x_2 = salaire mensuel net en euro.

Q 33.5 - Evaluez et comparez vos taux marginaux de substitution du salaire aux vacances aux différents points construits.

Q 33.6 - Essayez d'améliorer votre connaissance de vos propres préférences en essayant de construire une utilité additive les représentant. Vous choisirez vous-même la procédure. Si vos préférences se révèlent représentables par une utilité additive (à la précision de vos réponses près), comparez-les avec celles révélées précédemment. Vous semblent-elles mieux représenter la réalité ? Voyez-vous d'autres supériorités ?

Exercice 34 – Utilités additives

Un Décideur peut choisir entre temps consacré chaque quinzaine au sport et temps consacré aux activités culturelles [les couples (x_1, x_2) de nombres de $\mathbb{R}^2_+$ ci-dessous se lisent "(nombre d'heures de sport par quinzaine, nombre d'heures d'activités culturelles par quinzaine)"].
On admet que ses préférences $\succsim$ dans $\mathbb{R}^2_+$, qui croissent strictement avec $\geq$, sont représentables par une fonction d'utilité additivement séparable $u = u_1 + u_2$.
On sait de plus que le D. est indifférent entre $(10, 5)$ et $(5, 20)$ d'une part, entre $(15, 20)$ et $(10, 25)$ d'autre part.

Q 34.1 Que peut-on en déduire concernant les couples $(15, 5)$ et $(5, 25)$?
Peut-on prévoir leur classement par rapport au couple $(10, 20)$?

Q 34.2 On apprend de plus que le D. est indifférent entre $(10, 13)$ et $(15, 5)$ d'une part, $(15, 13)$ et $(10, 20)$ d'autre part.
Proposez une fonction d'utilité $u = u_1 + u_2$ sur $\{5, 10, 15\} \times \{5, 13, 20, 25\}$ compatible avec l'ensemble des données précédentes.

Exercice 35 – Utilités additives

Un chef d'entreprise se demande s'il doit récompenser ses employés pour les gains de productivité réalisés en augmentant leurs jours de congés ou en accroissant leurs primes. Il aimerait connaître leurs préférences et demande au psychologue de l'entreprise d'effectuer une enquête auprès de chacun d'eux. Voici les données recueillies en interrogeant l'un d'entre eux, D.
D. a actuellement droit à 30 jours de congés et une prime de 2 000 euros par an. On résume cette information par le couple $(x, y) = (30,\ 2\,000)$.
D. serait indifférent entre :

- passer à 35 jours de congés, la prime restant de 2 000 euros ;
- conserver 30 jours de congés, la prime passant à 4 000 euros.

On résume cette information par : $(35,\ 2\,000) \sim (30,\ 4\,000)$.
D. affirme également que $(35,\ 4\,000) \sim (30,\ 7\,000)$ et $(45,\ 4\,000) \sim (35,\ 7\,000)$.
Enfin ses préférences croissent strictement avec x et avec y.

Q 35.1 Quelles comparaisons supplémentaires pourrait-on proposer au D. pour tester la représentabilité de ses préférences dans $\mathbb{R}^2_+$ par une fonction d'utilité additivement séparable.

Q 35.2 On suppose les tests précédents réalisés et positifs. L'existence d'une fonction d'utilité $V : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$V(x, y) = (x + \gamma)^{\lambda}.(y + \delta) \quad (1)$$

où $x + \gamma$, λ et $y + \delta$ sont des réels positifs, est-elle compatible avec l'existence d'une fonction d'utilité additivement séparable ?

Q 35.3 Admettant l'existence d'une fonction d'utilité V de la forme (1), déterminer les valeurs de γ, λ et δ. La fonction obtenue est-elle compatible avec toutes les données recueillies sur D ?

Exercice 36 – Elicitation de préférences

On s'intéresse à l'élicitation d'une fonction additive $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$, dans un contexte de décision bi-attribut pour faciliter la prise de décision d'un décideur dont les préférences se conforment à ce modèle. L'ensemble des alternatives est $A = \{a, b, c, d, e\}$. Pour l'instant, on est parvenu à éliciter les préférences séparément sur les attributs 1 et 2 ce qui a permis de construire deux fonctions d'utilité $v_1(x_1)$ sur l'attribut X_1 et $v_2(x_2)$ sur l'attribut X_2. Les valeurs des fonctions v_1, v_2 sont données dans le tableau suivant :

x	a	b	c	d	e
$v_1(x)$	16	12	3	6	9
$v_2(x)$	4	11	16	15	7

On fait maintenant l'hypothèse qu'il existe un paramètre $w \in [0,1]$ tel que $u_1(x) = w \cdot v_1(x)$ et $u_2(x) = (1-w) \cdot v_2(x)$ de sorte que $u_w(x) = w \cdot v_1(x) + (1-w) \cdot v_2(x)$. L'objet de cet exercice est maintenant de voir comment éliciter le paramètre w pour déterminer la fonction d'utilité qu'il convient d'utiliser dans l'ensemble $\mathcal{U} = \{u_w(x) = w \cdot v_1(x_1) + (1-w) \cdot v_2(x_2), w \in [0,1]\}$.

Q 36.1 Pour toute alternative $x \in A$, représenter la droite d'équation $u_w(x) = w \cdot v_1(x) + (1-w) \cdot v_2(x)$ en fonction de $w \in [0,1]$. Montrer que dès lors que la fonction d'utilité du décideur appartient à $\mathcal{U}$, une ou plusieurs alternative(s) peuvent être éliminées.

Q 36.2 Calculer le tableau MR des regrets par paires, où les regrets sont définis, pour toute paire (x,y) d'alternatives par :

$$MR(x,y,\mathcal{U}) = \max_{u_w \in \mathcal{U}} \{u_w(y) - u_w(x)\}$$

Q 36.3 Calculer, pour toute alternative $x \in A$, le regret maximum qu'on puisse avoir en recommandant x, ce regret étant défini par :

$$MR(x,\mathcal{U}) = \max_{y \in X} MR(x,y,\mathcal{U})$$

Q 36.4 Déterminer quelle est l'alternative qui minimise le regret maximum :

$$x^*_{\mathcal{U}} = \arg\min_{x \in X} MR(x,\mathcal{U})$$

et la valeur du regret associé :

$$MMR(\mathcal{U}) = \min_{x \in X} MR(x,\mathcal{U})$$

Représenter la quantité $MMR(\mathcal{U})$ sur le graphique de la question 1.

Q 36.5 Soit x^* la solution trouvée à la question précédente. On envisage de la proposer au décideur. Si l'on choisissait x^*, déterminer dans A quel serait son pire adversaire potentiel, défini par

$$y^* = \arg\max_{y \in Y} MR(x^*,y,\mathcal{U})$$

Q 36.6 On demande au décideur s'il préfère $x^* \succsim y^*$. Si la réponse est négative, montrer qu'on peut réduire l'ensemble $\mathcal{U}$ des utilités pertinentes et déterminer la nouvelle valeur de $MMR(\mathcal{U})$. Si on voulait stopper le processus d'élicitation ici, quelle solution recommanderait-on ? Si on souhaitait le poursuivre, quelle serait la prochaine question ?

Q 36.7 Sur la base des questions précédentes, proposer un processus d'élicitation de la fonction d'utilité et préciser les avantages que vous voyez à une telle procédure par rapport à une énumération exhaustive.

Exercice 37 – Elicitation de préférences

On considère un ensemble X de 8 alternatives dans un problème d'évaluation tri-critère (les critères sont à maximiser). Chaque alternative de X est caractérisée par un vecteur de performances $x^i = (x^i_1, x^i_2, x^i_3)$ comme indiqué dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x^i_1	3	2	2	1	2	1	4	1
x^i_2	2	1	2	2	1	2	1	0
x^i_3	1	1	2	1	3	0	1	2

On s'intéresse alors à éliciter les poids w_i des critères $i = 1,2,3$ dans le cadre du modèle de la somme pondérée. On fait l'hypothèse que les poids sont tous non négatifs et somment à 1.

Q 37.1 Le décideur déclare les préférences suivantes : $x^2 \succsim x^4$ et $x^6 \succsim x^8$. Déduire de ces préférences le polyèdre convexe qui caractérise l'ensemble W des poids admissibles compte-tenu de cette information. Représenter ce polyèdre dans l'espace (w_1, w_2) (on notera qu'on n'a pas besoin de considérer explicitement w_3 puisqu'on sait que $w_3 = 1 - w_1 - w_2$). Déterminer alors les composantes des sommets du polyèdre obtenu (on précisera ici les trois composantes w_1, w_2, w_3). Dans la suite de l'exercice, on notera S l'ensemble des sommets de W.

Q 37.2 Après avoir déterminé l'ensemble X' des solutions Pareto-optimales dans X, calculer, pour chaque paire d'alternatives (x,y) de X' et pour chaque vecteur poids $v \in S$, le regret $R_v(x,y) = v.(y-x)$ que le décideur aurait de choisir x plutôt que y.

Q 37.3 En s'appuyant sur le résultat de la question précédente déterminer, pour chaque paire (x,y) de X', le regret maximum $R(x,y)$ de choisir x plutôt que y sur l'ensemble W des poids admissibles (on prendra soin de bien justifier la réponse). Quel est alors le choix optimal pour le décideur ? Justifier précisément la réponse.

Q 37.4 On s'intéresse maintenant à un autre agrégateur qui évalue toute solution x^i par le critère

$$f_w(x^i) = w_1\tilde{x}^i_1 + w_2\tilde{x}^i_2 + w_3\tilde{x}^i_3$$

à maximiser, où $\tilde{x}^i$ est le vecteur obtenu à partir de x^i en triant ses composantes par ordre croissant. De plus, on impose que $w_1 \geq w_2$ et $w_2 \geq w_3$ et aussi que $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. En vous inspirant de la méthode des regrets utilisée dans les questions précédentes, déterminer le choix optimal dans X' selon le critère f_w.

TD 8 - Théorie des jeux

Exercice 38 – Équilibre itéré en stratégies strictement dominantes

Soit la matrice de jeu :

	G	C	D
H	$(73, 25)$	$(57, 42)$	$(66, 32)$
M	$(80, 26)$	$(35, 12)$	$(32, 54)$
B	$(28, 27)$	$(63, 31)$	$(54, 29)$

Q 38.1 Existe-t-il un équilibre en stratégies strictement dominantes ? Existe-t-il un équilibre de NASH ?

Q 38.2 Chercher un équilibre itéré en stratégies strictement dominantes. Qu'obtient-on ?

Exercice 39 – Équilibre itéré en stratégies dominantes

Soit la matrice de jeu :

	G	C	D
H	$(1, 0)$	$(-2, -1)$	$(0, 1)$
B	$(1, 2)$	$(-5, -1)$	$(0, 0)$

Q 39.1 Chercher un équilibre itéré en stratégies dominantes.

Q 39.2 Trouver le (ou les) équilibre(s) de NASH . Qu'en concluez-vous ?

Exercice 40 – Jeu de coordination pure

Trois joueurs doivent choisir indépendamment, à l'insu les uns des autres, un chiffre (de 0 à 9). Si tous les trois choisissent le même chiffre m, chacun reçoit m € ; dans tous les autres cas, ils ne reçoivent rien.

Q 40.1 Jouez à ce jeu par groupes de trois une dizaine de fois et notez les chiffres choisis (N.B. ne commentez pas entre vous les parties déjà jouées, cela fausserait l'analyse)

Q 40.2 Quels sont les équilibres de NASH du jeu. L'un d'eux est-il strictement dominant au sens de PARETO ?

Exercice 41 – Jeu de HEX

Les joueurs marquent alternativement des cases hexagonales de leur couleur.
Un joueur gagne s'il réussit à relier par une chaîne continue les deux bords de sa couleur du losange de jeu.

Q 41.1 Étudier le jeu 2×2 puis le jeu 3×3. Pour ce dernier on utilisera la forme extensive (arbre du jeu).

Q 41.2 On va montrer qu'il ne peut y avoir de partie nulle, c'est-à-dire que l'un des deux joueurs parvient nécessairement à relier les deux bords de sa couleur.

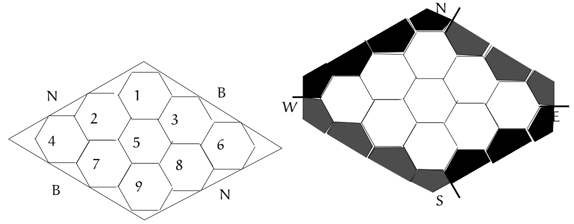


FIGURE 1 – Jeu de HEX 3×3 sans et avec bords et oreilles

Pour cela, on part d'une coloration complète du jeu et ajoute le long de chaque bord des demi-hexagones de la couleur de ce bord, ainsi que des "oreilles" aux quatre coins (cf Figure 1). On trace alors un chemin le long des bords des cases selon la règle suivante :
Départ en W ; à chaque intersection, tourner à gauche ou à droite de façon à toujours rester entre deux cases de couleurs opposées.
a) Montrer que la règle détermine un chemin unique.

b) Montrer que le chemin se termine nécessairement en N, S ou E.

c) Montrer que si le chemin se termine en S, il existe une chaîne noire et qu'il existe une chaîne blanche si c'est en N.

d) Montrer que le chemin ne peut se terminer en E.

e) Montrer que c'est le joueur des blancs qui a une stratégie gagnante. Pour cela supposer que c'est le joueur des noirs qui a une stratégie gagnante et montrer qu'alors le joueur des blancs pourrait gagner avec la stratégie suivante : Jouer initialement au hasard ; puis : jouer la stratégie gagnante des noirs quand c'est possible ; si cela ne l'est pas, parce que la case souhaitée est occupée, jouer au hasard.

Exercice 42 – Résolution d'un jeu à somme nulle par la méthode d'élimination de FOURIER

On donne le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice G suivante :

j. I \ j. II	(1)	(2)
(1)	3	-1
(2)	1	4

Q 42.1 Que valent le MAXIMIN et le MINIMAX en stratégies pures. Les stratégies les donnant forment-elles un équilibre de NASH ?

Q 42.2 Écrire le système d'inéquations (S_1) exprimant qu'une stratégie mixte $p = [p^1, p^2]$ assure au joueur I une espérance mathématique de gain au moins égale à un nombre ν.

Q 42.3 En déduire quel système d'inéquations (S_2) doit être vérifié par p^2 pour que (S_1) soit compatible.

Q 42.4 En déduire l'ensemble des valeurs de ν pour lesquelles (S_1) est compatible.

Q 42.5 Quelle est la valeur du jeu ? Trouver une stratégie mixte optimale du joueur I.

Q 42.6 Montrer qu'il existe une stratégie mixte du joueur II lui donnant, en espérance mathématique, la valeur du jeu quoi que joue I.

Exercice 43 – Jeu à somme nulle

Deux joueurs choisissent chacun, à l'insu l'un de l'autre, une pièce de monnaie de 10 cent. d'€ 50 cent. d'€ , ou 1 € et se les montrent simultanément.
Si les deux pièces présentées sont de même valeur, le joueur I (qui sera le joueur des lignes) gagne la pièce du joueur II ; si elles sont de valeurs différentes, c'est le joueur II qui gagne celle du joueur I.

Q 43.1
a) Construire la matrice du jeu (gains du joueur I)
b) Que valent le MAXIMIN et le MINIMAX en stratégies pures.

Q 43.2 a) Quel majorant, $\bar{v}$, le joueur II peut-il imposer à l'espérance de gain du joueur I en jouant la stratégie mixte q, avec : $q_{10} = \frac{3}{26}$, $q_{50} = \frac{11}{26}$, $q_{100} = \frac{12}{26}$?
b) Montrer que le joueur I peut s'assurer une espérance de gain $\bar{v}$ en jouant une unique stratégie mixte, que l'on déterminera.
c) En déduire la valeur du jeu et des stratégies mixtes optimales pour les deux joueurs.

Exercice 44 – Jeux à somme nulle symétriques

On dit qu'un jeu à deux joueurs à somme nulle est *symétrique* lorsque la matrice G du jeu est antisymétrique : $m = n$ et $\forall i, j \; g_{ij} = -g_{ji}$.

Q 44.1 Utilisant le théorème du MINIMAX, montrer que dans un jeu symétrique :

a) la valeur du jeu, v^*, est nécessairement nulle.
b) Une stratégie mixte du joueur des lignes,
vecteur-ligne $(1, n)$ $p = [p^1, \cdots, p^i, \cdots, p^n]$, tel que $p^i \geq 0$, $\forall i$ et $\sum_{i=1}^{n} p^i = 1$,
est optimale si et seulement si :

$$\forall j, \; p\,G^j = \sum_{i=1}^{n} p^i g_{ij} \geq 0 .$$

c) une stratégie mixte q^* du joueur des colonnes est optimale si et seulement si $q^* = {}^{\tau}p^*$, où p^* est une stratégie mixte optimale du joueur des lignes.

Q 44.2 Application au jeu de Morra

Les deux joueurs avancent en même temps leur main droite en ouvrant soit un seul doigt soit deux doigts et, simultanément, essaient de deviner le nombre total de doigts ouverts par l'un et l'autre, en annonçant un nombre (c'est donc 2, 3, ou 4) ; lorsqu'un joueur a deviné juste et que l'autre s'est trompé, le second verse au premier une somme en € égale à ce nombre ; dans tous les autres cas, personne ne verse rien.

On note (k, s) la stratégie pure consistant à ouvrir k doigts et deviner s.

a) Est-ce bien un jeu symétrique ? Quelle est la matrice du jeu ?

b) Ecrire le système d'inéquations caractérisant la (ou les) stratégie(s) mixte(s) optimale(s) du joueur des lignes.
(On posera : $Pr(1, 2) = \alpha$; $Pr(1, 3) = \beta$; $Pr(2, 3) = \gamma$; $Pr(2, 4) = \delta$)
c) Résoudre le système précédent et donner toutes les stratégies mixtes optimales.
d) Un joueur jouant optimalement peut-il obtenir un gain positif (en espérance mathématique) si son adversaire, lui ne joue pas optimalement ? Si oui, quand ?

Exercice 45 – Equilibre de NASH en stratégies mixtes

Faut-il subventionner la recherche privée ?
Considérons le jeu à deux joueurs, l'Etat (joueur I) et une Entreprise (joueur II), sous forme normale suivant :

Etat \ Entr.	Recherche	pas de Recherche
Subvention	3, 2	−1, 3
pas de Subvention	−1, 1	0, 0

Commentaire : les paiements de l'Etat sont d'autant plus élevés que la recherche a été plus fructueuse (création d'emplois dans le pays, etc..)

Q 45.1 Vérifier qu'il n'y a pas d'équilibre de NASH en stratégies pures.

Q 45.2 Introduire des stratégies mixtes pour les deux joueurs, en notant p la probabilité d'une Subvention par l'Etat et q la probabilité que l'Entreprise fasse de la recherche. Exprimer l'espérance de gain de l'Etat en fonction de p et q ; à q donné, quelle valeur faut-il donner à p pour maximiser cette quantité ? On précisera de quelle façon le résultat dépend de la valeur de q.

Q 45.3 Exprimer l'espérance de gain de l'entreprise en fonction de p et q ; à p donné, quelle valeur faut-il donner à q pour maximiser cette quantité ? On précisera de quelle façon le résultat dépend de la valeur de p.

Q 45.4 En déduire l'existence d'un unique équilibre de NASH en stratégies mixtes.

Exercice 46 – Equilibres de NASH en stratégies pures et mixtes : jeu de défi

Deux jeunes gens se défient mutuellement en voiture : ils vont rouler l'un vers l'autre sur une même route étroite à vive allure ; le premier à abandonner (braquer à droite vers le bas-côté) perdra la face et l'autre savourera sa victoire ; s'ils quittent la route simultanément, aucun n'aura de grande satisfaction ni insatisfaction ; enfin, s'ils continuent jusqu'à la collision, c'est pire que tout (hôpital ou cimetière). Ceci se traduit par la matrice de jeu suivante :

joueur I \ joueur II	Continuer	Abandonner
Continuer	−3, −3	2, 0
Abandonner	0, 2	1, 1

Q 46.1 Montrer qu'il y a deux équilibres de NASH en stratégies pures.

Q 46.2 Utilisant la symétrie du jeu, chercher un équilibre de NASH en stratégies mixtes où les deux joueurs jouent la même stratégie mixte.

Q 46.3 Existe-t-il un équilibre de NASH en stratégies mixtes où les deux joueurs joueraient des stratégies mixtes différentes ?

TD 9 - Jeux à somme nulle - Arbre de jeux

Exercice 47 – Équilibres de Nash parfaits

Un hypermarché (joueur I) et un marchand de matériel informatique (joueur II) sont dans un même centre commercial. L'hypermarché peut se mettre à vendre des PC (décision V), ou non (décision NV). Le marchand peut déclencher une guerre des prix (décision G) ou non (décision NG) sur tous leurs produits communs, qui ferait perdre 5×10^6 € à l'hypermarché mais également 2×10^6 € à lui-même par rapport au *statu quo* ; pour prendre sa décision, le marchand peut attendre de connaître celle de l'hypermarché ; si l'hypermarché a choisi V et qu'il choisit NG, l'hypermarché gagnera 4×10^6 € et le marchand perdra 1×10^6 € (toujours par rapport au *statu quo).* Dans le cas (NV,G), la guerre des prix sans raison du joueur II lui coûte 1 et coûte également 1 (en produits dérivés) au joueur I.

Q 47.1
a) Quelles sont les stratégies de I et II ? Tracer l'arbre du jeu.
b) Mettre le jeu sous forme normale ; existe-t-il des stratégies strictement dominantes ? dominantes ? Y a-t-il un équilibre par élimination de stratégies dominées ? Y a-t-il des équilibres de Nash ?
c) Montrer qu'il existe un seul équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

Q 47.2 Mêmes questions pour le jeu semblable où le marchand perdrait seulement $(1/2) \times 10^6$ € en cas de guerre des prix.

Exercice 48 – Le mille-pattes de Rosenthal

Les joueurs (1 et 2) possèdent initialement 2 € chacun. Ils jouent alternativement ; à chaque coup un joueur a le choix entre :
- continuer le jeu et recevoir 1 € de subvention extérieure ;
- arrêter le jeu en emportant son avoir plus 2 € pris à son adversaire.

Le jeu s'arrête automatiquement si les avoirs des joueurs atteignent 100 € chacun.

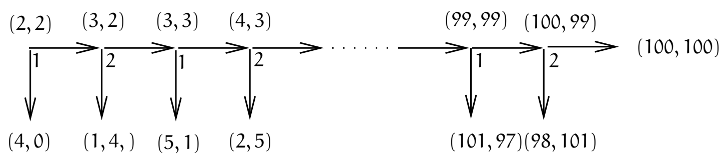


FIGURE 1 – Le mille-pattes

Montrer que dans le seul équilibre de Nash compatible avec l'induction arrière le premier joueur arrête le jeu dès le premier coup.

Exercice 49 – Fonctions de Grundy et jeu de Withoff-Isaacs

Soit $G = (X, \Gamma)$ un graphe orienté sans circuit ($\Gamma(x)$ désigne l'ensemble des successeurs directs de $x \in X$).
On appelle *fonction de* Grundy sur G toute application g de X dans $\mathbb{N}$ possédant la propriété suivante :
Pour tout $x \in X$, $g(x)$ est le plus petit entier qui n'appartient pas à $\{g(y),\ y \in \Gamma(x)\}$.

Q 49.1
a) Montrer que les ensembles $X(k)$ définies récursivement par :
$X(0) = \{x \in X, \Gamma(x) = \emptyset\}$; $X(1) = \{x \notin X(0), \Gamma(x) \subset X(0)\}$; $X(2) = \{x \notin X(0) \cup X(1), \Gamma(x) \subset X(0) \cup X(1)\}$;etc. forment une partition de X.
b) Montrer qu'une fonction de Grundy, g, vérifie nécessairement $g(x) = 0$ pour $x \in X(0)$ et $g(x) = 1$ pour $x \in X(1)$;
montrer que si pour tout $i = 0, \ldots, k$, $g(y)$ est définie de manière unique pour tout $y \in X(i)$ et vérifie $g(y) \leq i$, alors $g(x)$ est définie de manière unique pour tout $x \in X(k+1)$ et vérifie $g(x) \leq k+1$.
c) en déduire le *théorème de* Grundy :
Tout graphe orienté sans circuit possède une unique fonction de Grundy g ; de plus en tout sommet x, $g(x)$ n'excède pas la longueur du plus long chemin d'origine x.
d) On appelle *noyau* d'un graphe G tout ensemble de sommets S
- *stable* : $x \in S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \emptyset$ et
- *absorbant* : $x \notin S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S \neq \emptyset$.
Montrer que $S = \{x \in X, g(x) = 0\}$ est le noyau de G.

Q 49.2
On associe au graphe G un jeu à deux joueurs, jouant alternativement, où les positions du jeu sont les sommets de G et les seuls coups autorisés sont les déplacements d'un sommet x vers ses successeurs directs $y \in \Gamma(x)$.

a) Montrer qu'en toute position x appartenant à S, le premier coup à jouer fait nécessairement sortir de S et que le deuxième coup peut toujours ramener à une position dans S.
b) On suppose que le but du jeu est d'arriver à une feuille, c-à-d dans $X(0)$. Montrer que si la position initiale x_0 est dans $X \backslash S$, le premier joueur peut s'assurer la victoire.
Montrer également que dès que le but du jeu est d'arriver à un sous-ensemble donné de S, si $x_0 \in X \backslash S$ il peut s'assurer la victoire ou le match nul.
c) Étudier le jeu suivant (Withoff-Isaacs) :
$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ensemble des points à coordonnées entières du plan.
Deux joueurs jouent alternativement à partir d'un point initial x_0 ; un coup permet de passer d'un point donné x à l'un quelconque des points :
- en-dessous de x sur la même verticale ;
- à gauche de x sur la même horizontale
- en-dessous, à gauche de x sur la parallèle à 2^{eme} bissectrice passant par x.
Un joueur gagne s'il parvient à l'origine $(0, 0)$.

Exercice 50 – Fonctions de Grundy, jeux de Nim et de Marienbad

Q 50.1 La *somme digitale de deux nombres entiers* p et q est l'entier $p \dotplus q$ dont le k^{eme} chiffre à partir de la droite (le coefficient de 2^{k-1}) en écriture binaire est la somme modulo 2 des

k^{emes} chiffres des développements binaires de p et q (*c'est l'addition binaire "sans retenue"*).

Exemple : (les nombres en écriture décimale sont en gras)

$$\mathbf{6} \leftrightarrow 110 ; \mathbf{13} \leftrightarrow 1101 ; \mathbf{11} = \mathbf{6} \dotplus \mathbf{13} \leftrightarrow 1011.$$

a) Vérifier que $(\mathbb{N}, \dotplus)$ forme un groupe abélien (= groupe commutatif) : commutativité ; associativité ; existence d'un élément neutre ; existence d'un inverse unique (quel est-il ?).
b) En déduire que $\forall p, q \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}, p \dotplus r = q$. Que vaut-il ?

Q 50.2 La *somme cartésienne de* n *graphes orientés* $G_i = (X_i, \Gamma_i)$, $i = 1, \cdots, n$, est le graphe orienté $G = (X, \Gamma)$, noté $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$, d'ensemble de sommets $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ et de correspondance

$$\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (\{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times \Gamma_i(x_i) \times \{x_{i+1}\} \times \cdots \times \{x_n\}).$$

Autrement dit, d'un sommet x de G, qui est un n-uplet, à l'un de ses successeurs directs, seule une composante x_i est modifiée et remplacée par un de ses successeurs directs dans G_i.

On donne les deux graphes orientés :
$G_1 = (X_1, \Gamma_1)$, avec $X_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\Gamma_1(x_1) = \{y_1, z_1\}$ et $\Gamma_1(y_1) = \Gamma_1(z_1) = \emptyset$;
$G_2 = (X_2, \Gamma_2)$, avec $X_2 = \{x_2, t_2\}$, $\Gamma_2(x_2) = \{t_2\}$ et $\Gamma_2(t_2) = \emptyset$.
Construire leur somme cartésienne $G = G_1 + G_2$.

Q 50.3 La fonction de GRUNDY, g, d'un graphe G est caractérisable par l'ensemble des deux propriétés suivantes :
(P1) $y \in \Gamma(x) \Rightarrow g(y) \neq g(x)$;
(P2) $[s \in \mathbb{N}, s < g(x)] \Rightarrow [\exists y \in \Gamma(x), g(y) = s]$.

On veut établir le résultat suivant :la fonction de GRUNDY de la somme cartésienne de n graphes orientés $G_i = (X_i, \Gamma_i)$ de fonctions de GRUNDY g_i est donnée par

$$g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = g_1(x_1) \dotplus \cdots \dotplus g_i(x_i) \dotplus \cdots \dotplus g_n(x_n).$$

a) Montrer que g satisfait (P1).
b) Montrer que g satisfait (P2) en passant par les étapes suivantes :
   (i) Étant donné $s \in \mathbb{N}, s < t = g(x)$ de représentations binaires $s^k s^{k-1} \cdots s^2 s^1$ et $t^{k'} t^{k'-1} \cdots t^2 t^1$, soit k_0 l'indice du premier chiffre en partant de la gauche pour lequel s et t diffèrent. Montrer que $s^{k_0} = 0$, que $t^{k_0} = 1$ et que r tel que $t \dotplus r = s$ a pour premier chiffre non-nul $r^{k_0} = 1$.
   (ii) Notant $t_i^l t_i^{l-1} \cdots t_i^2 t_i^1$ le développement de $t_i = g_i(x_i)$, montrer que

$$\dot{\sum_i} t_i^{k_0} = 1.$$

   En déduire que pour un i au moins $t_i^{k_0} = 1$.
   (iii) Supposer (sans perte de généralité) que $t_1^{k_0} = 1$. Montrer que $u_1 = t_1 \dotplus r$ vérifie $u_1^{k_0} = 0$; en déduire que $u_1 < t_1$.
   (iv) Montrer qu'il existe $y_1 \in \Gamma(x_1)$ tel que $g_1(y_1) = u_1$ et que nécessairement $g(y_1, x_2, \cdots, x_n) = s$.

Q 50.4 *Jeux de* NIM :
Des allumettes sont disposées de façon à former n rangées. La rangée i contient m_i allumettes.
Deux joueurs retirent à tour de rôle une ou plusieurs allumettes d'un quelconque des tas.
Le joueur qui retire la dernière allumette gagne.

a) Cas d'un jeu à une seule rangée de m_1 allumettes ($n = 1$). Quel est le graphe $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ du jeu ? Quelle est sa fonction de GRUNDY g_1 ? Quel est son noyau ?
b) Montrer que le jeu à n rangées a pour graphe la *somme cartésienne des* n *graphes* $G_i = (X_i, \Gamma_i)$ associés aux n jeux élémentaires à une rangée de m_i allumettes ($i = 1, \cdots, n$).
c) En déduire la valeur de la fonction de GRUNDY, g de ce graphe au sommet $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ correspondant à la position du jeu où il reste x_i allumettes dans la rangée i ($i = 1, \cdots, n$).
d) Quand est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Même question pour le deuxième joueur.

Q 50.5 *Jeu de* MARIENBAD 4 rangées de respectivement 1, 3, 5 et 7 allumettes. *Le joueur qui retire la dernière allumette perd.*

Soit $G = (X, \Gamma)$ le graphe du jeu de NIM avec les mêmes rangées d'allumettes, *où le joueur qui tire la dernière allumette gagne.*
Montrer que l'on peut associer au jeu de MARIENBAD le graphe G^M obtenu en ajoutant à X un sommet x^* et un arc, allant du sommet $(0, 0, 0, 0)$ à x^*, représentant un coup fictif effectué par le joueur qui a gagné après le dernier coup, perdant, de son adversaire.
Soit g^M la fonction de GRUNDY de G^M, définie donc sur $X \cup \{x^*\}$.

a) Montrer qu'en tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X$ tel que $\forall i, x_i \leq 1$ (i.e., aucune rangée n'a plusieurs allumettes) $g^M(x) = 1 - g(x)$ et, plus précisément que $g^M(x) = 0 \Leftrightarrow$ le nombre de 1 est impair $\Leftrightarrow g(x) = 1$ et $g^M(x) = 1 \Leftrightarrow$ le nombre de 1 est pair $\Leftrightarrow g(x) = 0$.
b) Montrer qu'en tout $x \in X$ tel que $\exists i_0, x_{i_0} > 1$ et $x_i \leq 1 \forall i \neq i_0$ (i.e., une seule rangée a plusieurs allumettes), $g^M(x) = g(x)$. On remarquera pour cela qu'un tel x a pour successeur direct un sommet à nombre pair de rangées, toutes à une allumette si et seulement si il a pour successeur direct un sommet à nombre impair de rangées toutes à une allumette.
c) Montrer enfin qu'en tout $x \in X$ tel que $\exists i_0 i_1$, t.q. $x_{i_0} > 1$ et $x_{i_1} > 1$ (i.e., deux rangées au moins ont plusieurs allumettes), $g^M(x) = g(x)$ également. On remarquera pour cela que si x a $k > 1$ rangées à plusieurs allumettes, ses successeurs directs ont eux-même tous entre une et k rangées à plusieurs allumettes et moins d'allumettes au total.
d) Quelles sont les positions gagnantes au jeu de MARIENBAD ? En particulier quel est le statut de la position initiale ?

TD 10 - Compétitions, coopérations

Exercice 51 – Paradoxe de la chaîne de magasins

Deux chaînes de magasins de matériel informatique se sont jusqu'à présent partagé géographiquement le pays. L'une d'elles (joueur I) envisage de créer une à une des succursales dans les 20 villes où son concurrent (joueur II) possède des magasins.
Dans chacune de ces villes, I peut soit décider d'ouvrir un magasin (décision M) ou non (décision NM); s'il choisit NM, il fera un profit nul et II fera un profit de 100×10^6€; s'il choisit M, II peut déclencher une guerre des prix (décision D) ou non (décision ND); s'il choisit D, I perdra 10×10^6€ et lui-même fera un profit nul; s'il choisit ND, tous deux feront des profits : 40×10^6€ pour I, 50×10^6€ pour II.

Q 51.1 On considère le jeu limité à une seule ville.

a) Tracer l'arbre du jeu. Quelles sont les stratégies de I et II? Quelles sont les stratégies optimales de I et II.
b) Mettre le jeu sous forme normale; existe-t-il des stratégies strictement dominantes? dominantes? Y a-t-il un équilibre par élimination de stratégies dominées? Montrer qu'il existe deux équilibres de Nash dont un seul est parfait en sous-jeux.

Q 51.2 On suppose maintenant que le jeu précédent se répète dans toutes les villes dans un ordre donné. Pour I comme pour II les divers profits s'ajoutent.

a) Montrer, par récurrence arrière, qu'à la dernière ville, et aussi à toutes les précédentes , II choisira ND et I choisira M.
b) Montrez que s'il suffisait à II de répliquer D quand I joue M un nombre k de fois pour dissuader définitivement I de le jouer, une telle stratégie pourrait être avantageuse pour II (préciser ce que devrait valoir k).
c) Que se passerait-il selon vous dans la réalité?

Exercice 52 – Dilemme du prisonnier répété

Deux fabricants de consoles de jeux (joueurs I et II) se partagent actuellement le marché mondial (50% chacun) avec des consoles de qualité comparables, vendues le même prix. Pour l'année prochaine, chacun d'eux doit choisir, à l'insu de l'autre, entre garder le même prix (stratégie coopérative C) ou baisser fortement son prix (stratégie agressive A). On prend pour gains de référence $(0,0)$ ceux offerts par le couple de stratégies de statu quo $[C,C]$. Si les joueurs choisissent $[A,A]$, ils vendent plus mais avec une marge plus faible, d'où des gains moins élevés $(-1,-1)$; enfin $[A,C]$ donnerait un avantage important à I (II réagirait, mais après avoir déjà manqué beaucoup de ventes) se traduisant par des gains $(1,-2)$; ce serait l'inverse pour $[C,A]$ [1]

Q 52.1

a) Montrer qu'il existe un seul équilibre de Nash et qu'il est Pareto-dominé par un autre couple de stratégies.
b) La question du prix de leurs consoles se pose chaque année, $t = 1,2,..,T$, à I et à II. Comment doit-on formuler une stratégie du jeu répété (super-jeu) correspondant?
c) Le critère de chaque joueur est la somme de ses gains des diverses années (pas d'actualisation). On note C_{REP} la stratégie consistant à jouer C chaque année, quoi que

1. l'unité est 10^9 €.

l'autre ait fait . Montrer que (C_{REP}, C_{REP}) n'est pas un équilibre de Nash du super-jeu..
d) I décide d'adopter la stratégie “TIT for TAT” (“oeil pour oeil, dent pour dent”) : à $t = 1$ il joue C; à $(t+1)$, il joue ce que II a joué à t.
Soit $(X_1, X_2, .., X_t, .., X_T)$, avec $X_t \in \{C, A\}$, la suite des coups joués par II. On appelle *séquence agressive terminée* tout sous-suite suivant un C et de la forme $(A, A, .., A, C)$. Quel est le gain apporté à II par une telle sous-suite? Comparez-le à celui qu'aurait donné une sous-suite formée uniquement de C et de même longueur.
e) Pensez-vous que la stratégie “TIT for TAT” de I va nécessairement induire un comportement coopératif chez II? En particulier, II peut-il toujours facilement se rendre compte que c'est ce que I a décidé d'appliquer?

Q 52.2 On considère maintenant le jeu *répété une infinité de fois* (super-jeu ∞) avec un taux d'actualisation $\rho > 0$, donc un facteur d'actualisation $\delta = \frac{1}{1+\rho}$.
Montrer que si les deux joueurs adoptent tous deux la stratégie :

"Alterner C et A (en commençant par C), tant que l'autre joueur ne dévie pas lui-même de cette stratégie; s'il en dévie, jouer A à tout jamais"

on aboutit à un équilibre de NASH du super-jeu ∞ pour δ suffisament proche de 1.

Exercice 53 – Faucons, colombes et bourgeois

Q 53.1 Soit le jeu de matrice

j.I \ j.II	Faucon	Colombe
Faucon	$-1, -1$	$2, 0$
Colombe	$0, 2$	$1, 1$

qui a la structure d'un *jeu de défi* (cf Ex.5 du TD9).
Il décrit ici la compétition pour de la nourriture (2 unités) à l'intérieur d'une espèce d'oiseaux, qui peuvent avoir un comportement agressif (comme un faucon) ou non (comme une colombe). Deux colombes se partagent la nourriture; un faucon la prend entièrement face à une colombe; enfin, deux faucons se battent jusqu'à dépenser plus d'énergie que celle fournie par la part qu'ils finiront chacun par avoir.

a) Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de NASH symétrique en stratégies pures, mais qu'il en existe un en stratégies mixtes.
b) Montrer que la stratégie mixte commune aux deux joueurs dans l'équilibre précédent est une SES.

Q 53.2 On introduit un troisième type de comportement, dit "bourgeois", consistant à se comporter en faucon si l'on est arrivé avant l'autre oiseau et en colombe si l'on est arrivé après. On suppose qu'à chaque rencontre, la probabilité d'arriver avant l'autre est $\frac{1}{2}$. La stratégie (pure) "bourgeoise" est-elle SES?

Exercice 54 – Les deux pêcheurs

Deux pêcheurs partagent chaque jour à parts égales leurs prises de poisson. La valeur totale des prises est de v si les filets ont été tendus la veille au soir; elle est nulle sinon. Un

pêcheur peut tendre les filets seul, avec un coût (pénibilité) c_1, mais s'ils le font à deux, le coût est de c_2 pour chacun. On suppose que $c_2 < c_1 < \frac{v}{2}$.
Chacun des pêcheurs a deux stratégies pures possibles : S (participer à la sortie des filets) et $\bar{S}$ (ne pas y participer).
Q 54.1 Construire la matrice du jeu.

Q 54.2 Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de NASH symétrique en stratégies pures, mais qu'il en existe un en stratégies mixtes.

Q 54.3 Montrer que la stratégie mixte commune aux deux joueurs dans cet équilibre est une SES.

Exercice 55 – Jeux coopératifs : jeu de marché

NB. Dans les jeux coopératifs, nous écrirons $v(ij)$ pour $v(\{i, j\})$; etc.
$N = \{1, 2, 3\}$. Un produit a un seul acheteur potentiel (le joueur 1) mais a deux fabricants (les joueurs 2 et 3). Les transactions impliquant nécessairement le joueur 1 et celui-ci pouvant obtenir tout ce qu'il souhaite d'un seul fabricant, la fonction caractéristique du jeu, v, est telle que : $v(123) = v(12) = v(13) = 1$; $v(S) = 0$ sinon.

Q 55.1 Quelles sont les contraintes caractérisant l'appartenance d'une allocation $x = (x_1, x_2, x_3)$ au cœur ? Quel est le cœur du jeu ?

Q 55.2 Quelle est la valeur de SHAPLEY du jeu ? Est-elle dans le cœur ?