TD 8 - Théorie des jeux (extrait)

Exercice 1 – Équilibre itéré en stratégies strictement dominantes

Soit la matrice de jeu :

$$\begin{array}{c|ccc|} & G & C & D \\ \hline H & (73,25) & (57,42) & (66,32) \\ M & (80,26) & (35,12) & (32,54) \\ B & (28,27) & (63,31) & (54,29) \\ \hline \end{array}$$

Q 1.1 Existe-t-il un équilibre en stratégies strictement dominantes ? Existe-t-il un équilibre de NASH ?

Il n'existe pas équilibre en stratégies strictement dominantes (double raison : 1) aucune ligne ne donne strictement plus, composante par composante, que toutes les autres lignes ; 2) aucune colonne ...)
Un seul équilibre de NASH : (B, C) pour un paiement $(63, 31)$ (63 est maximum dans sa colonne et 31 maximum dans sa ligne).

Q 1.2 Chercher un équilibre itéré en stratégies strictement dominantes. Qu'obtient-on ?

On élimine successivement :

G str^t dominé par D $\rightarrow$ $\begin{array}{c|cc|} & C & D \\ \hline H & (57,42) & (66,32) \\ M & (35,12) & (32,54) \\ B & (63,31) & (54,29) \\ \hline \end{array}$;

M str^t dominé par H et B $\rightarrow$ $\begin{array}{c|cc|} & C & D \\ \hline H & (57,42) & (66,32) \\ B & (63,31) & (54,29) \\ \hline \end{array}$;

D str^t dominé par C $\rightarrow$ $\begin{array}{c|c|} & C \\ \hline H & (57,42) \\ B & (63,31) \\ \hline \end{array}$;

H str^t dominé par B $\rightarrow$ $\begin{array}{c|c|} & C \\ \hline B & (63,31) \\ \hline \end{array}$.

Reste (B, C) qui est l'équilibre de NASH.

(N.B. un équilibre itéré en stratégies strictement dominées, ou d'ailleurs en stratégies dominées, est nécessairement un équilibre de NASH ; en revanche, un équilibre de NASH ne peut pas toujours s'obtenir ainsi)

Exercice 2 – Équilibre itéré en stratégies dominantes

Soit la matrice de jeu :

$$\begin{array}{c|ccc|} & G & C & D \\ \hline H & (1,0) & (-2,-1) & (0,1) \\ B & (1,2) & (-5,-1) & (0,0) \\ \hline \end{array}$$

Q 2.1 Chercher un équilibre itéré en stratégies dominantes.

Recherche d'un équilibre itéré en stratégies dominantes.

On peut observer que le joueur 1 peut éliminer B dominée par H ; le joueur 2 peut alors éliminer G et C, (strictement) dominées par D ; on trouve donc un équilibre itéré (H, D).

Mais on peut observer d'abord que le joueur 2 peut éliminer C (strictement) dominée par D ; dans la sous-matrice restante, H et B sont équivalentes ; on ne peut poursuivre l'élimination et ne trouve donc pas d'équilibre.

Autrement dit, chaque joueur ne peut pas être sûr que l'autre fera les mêmes éliminations que lui ; donc, même s'il trouve un équilibre itéré, il n'aura aucune garantie qu'il sera effectivement joué, son adversaire pouvant jouer une autre stratégie que la stratégie d'équilibre ; lui-même n'a alors plus de raison de jouer sa stratégie d'équilibre.

Q 2.2 Trouver le (ou les) équilibre(s) de NASH . Qu'en concluez-vous ?

Il y a deux équilibres de NASH : (B, G) et (H, D) ; le second est l'équilibre itéré trouvé au (a) ; le premier ne s'obtient pas comme équilibre itéré (cf le N.B. à la fin de l'exercice précédent).

La conclusion générale est que, alors que l'on peut être sûr que des joueurs rationnels joueront l'équilibre itéré en stratégies *strictement* dominées, s'il existe, ce n'est pas le cas pour un équilibre itéré en stratégies dominées.

Exercice 5 – Résolution d'un jeu à somme nulle par la méthode d'élimination de FOURIER

On donne le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice G suivante :

j. I \ j. II	(1)	(2)
(1)	3	−1
(2)	1	4

Q 5.1 Que valent le MAXIMIN et le MINIMAX en stratégies pures. Les stratégies les donnant forment-elles un équilibre de NASH ?

En stratégies pures, MAXIMIN$= 1$; MINIMAX$= 3$; ils correspondent au couple de stratégies $(2, 1)$ qui n'est pas un équilibre de NASH, car le joueur I a intérêt à en dévier.

Q 5.2 Écrire le système d'inéquations (S_1) exprimant qu'une stratégie mixte $p = [p^1, p^2]$ assure au joueur I une espérance mathématique de gain au moins égale à un nombre v.

Le système d'inéquations exprimant qu'une stratégie mixte $p = [p^1, p^2]$ assure au joueur I une esp. de gain au moins égale à un nombre v est :

$$\begin{cases} 3p^1 + p^2 \geq \nu \\ -p^1 + 4p^2 \geq \nu \\ p^1 + p^2 \geq 1 \\ -p^1 - p^2 \geq -1 \\ p^1 \geq 0\,;\, p^2 \geq 0 \end{cases} \qquad (S_1)$$

Q 5.3 En déduire quel système d'inéquations (S_2) doit être vérifié par p^2 pour que (S_1) soit compatible.

On forme 3 groupes d'inéquations : celles de type "$p^1 \geq$" ; celles de type "$p^1 \leq$" ; celles où "p^1" ne figure pas.

$$\begin{cases} p^1 \geq \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{3}p^2 \\ p^1 \geq 1 - p^2 \\ p^1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p^1 \leq 4p^2 - \nu \\ p^1 \leq 1 - p^2 \end{cases} \qquad p^2 \geq 0$$

Q 5.4 En déduire l'ensemble des valeurs de ν pour lesquelles (S_1) est compatible.

p^2 et ν peuvent être complétés par un nombre p^1 de façon à satisfaire (S_1) si et seulement si :
$p^2 \geq 0$ et $\max\{\frac{1}{3}\nu - \frac{1}{3}p^2, 1 - p^2, 0\} \leq \min\{4p^2 - \nu, 1 - p^2\}$
ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} 4p^2 - \nu \geq \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{3}p^2 \\ 4p^2 - \nu \geq 1 - p^2 \\ 4p^2 - \nu \geq 0 \\ 1 - p^2 \geq \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{3}p^2 \\ 1 - p^2 \geq 1 - p^2 \\ 1 - p^2 \geq 0 \\ p^2 \geq 0 \end{cases} \quad (S_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p^2 \geq \frac{4}{13}\nu \\ p^2 \geq \frac{1}{5}\nu + \frac{1}{5} \\ p^2 \geq \frac{1}{4}\nu \\ p^2 \geq 0 \\ p^2 \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu \\ p^2 \leq 1 \end{cases}$$

ν peut être complété par un nombre p^2 de façon à satisfaire (S_2) si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu \geq \frac{4}{13}\nu \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu \geq \frac{1}{5}\nu + \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu \geq \frac{1}{4}\nu \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu \geq 0 \\ 1 \geq \frac{4}{13}\nu \\ 1 \geq \frac{1}{5}\nu + \frac{1}{5} \\ 1 \geq \frac{1}{4}\nu \\ 1 \geq 0 \end{cases} \quad (S_3) \quad \Leftrightarrow \quad \nu \leq \min\{\frac{13}{7}, 2, \frac{13}{4}\, 4\} = \frac{13}{7}$$

Q 5.5 Quelle est la valeur du jeu ? Trouver une stratégie mixte optimale du joueur I.

La valeur du jeu correspond à la valeur la plus élevée possible pour ν, donc $\nu^* = \frac{13}{7}$. En reportant cette valeur dans (S_2), on trouve une unique solution, $(p^{*2}) = \frac{4}{7}$; la stratégie mixte optimale de I est donc $(p^*) = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$.

Q 5.6 Montrer qu'il existe une stratégie mixte du joueur II lui donnant, en espérance mathématique, la valeur du jeu quoi que joue I.

Une stratégie mixte du joueur II lui donnant, en esp. math., la valeur du jeu quoi que fasse I est solution de :

$$\begin{cases} 3q_1 - q_2 = \frac{13}{7} \\ q_1 + 4q_2 = \frac{13}{7} \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1 \geq 0\,;\ q_2 \geq 0 \end{cases}$$

On trouve l'unique solution $q^* = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$.

Exercice 6 – Jeu à somme nulle

Deux joueurs choisissent chacun, à l'insu l'un de l'autre, une pièce de monnaie de 10 cent. d'€ 50 cent. d'€ , ou 1 € et se les montrent simultanément.
Si les deux pièces présentées sont de même valeur, le joueur I (qui sera le joueur des lignes) gagne la pièce du joueur II ; si elles sont de valeurs différentes, c'est le joueur II qui gagne celle du joueur I.

Q 6.1
a) Construire la matrice du jeu (gains du joueur I)

Matrice du jeu (gains du joueur I)

j. I \ j. II	(10)	(50)	(100)
(10)	10	−10	−10
(50)	−50	50	−50
(100)	−100	−100	100

b) Que valent le MAXIMIN et le MINIMAX en stratégies pures.

En stratégies pures :
MAXIMIN $= -10$, obtenu en jouant la stratégie (10)
MINIMAX $= +10$, obtenu en jouant la stratégie (10)

Q 6.2 a) Quel majorant, $\bar{v}$, le joueur II peut-il imposer à l'espérance de gain du joueur I en jouant la stratégie mixte q, avec : $q_{10} = \frac{3}{26}$, $q_{50} = \frac{11}{26}$, $q_{100} = \frac{12}{26}$?

La stratégie mixte q, avec $q_{10} = \frac{3}{26}$, $q_{50} = \frac{11}{26}$ et $q_{100} = \frac{12}{26}$, donne au joueur I la même espérance de gain $\bar{v} = -\frac{100}{13}$ pour chacune de ses stratégies pures et donc aussi pour toute stratégie mixte.

b) Montrer que le joueur I peut s'assurer une espérance de gain $\bar{v}$ en jouant une unique stratégie mixte, que l'on déterminera.

Une stratégie mixte $p = [p^{10}, p^{50}, p^{100}]$ assure au joueur I une espérance de gain $\bar{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 10\,p^{10} - 50\,p^{50} - 100\,p^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ -10\,p^{10} + 50\,p^{50} - 100\,p^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ -10\,p^{10} - 50\,p^{50} + 100\,p^{100} \geq -\frac{100}{13} \\ p^{10} + p^{50} + p^{100} = 1 \\ p^{10} \geq 0 \,;\, p^{50} \geq 0 \,;\, p^{100} \geq 0 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les inéquations deux à deux, on obtient :
$p^{10} \leq \frac{10}{13}$; $p^{50} \leq \frac{2}{13}$; $p^{100} \leq \frac{1}{13}$, ce qui en présence de la contrainte $p^{10} + p^{50} + p^{100} = 1$ exige
$p^{10} = \frac{10}{13}$; $p^{50} = \frac{2}{13}$; $p^{100} = \frac{1}{13}$.

c) En déduire la valeur du jeu et des stratégies mixtes optimales pour les deux joueurs.

La valeur du jeu est donc $\bar{v}$ et $p = [\frac{10}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13}]$ et $q = [\frac{3}{26}, \frac{11}{26}, \frac{12}{26}]$ sont des stratégies mixtes optimales des joueurs I et II, respectivement.

Exercice 8 – Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Faut-il subventionner la recherche privée ?
Considérons le jeu à deux joueurs, l'Etat (joueur I) et une Entreprise (joueur II), sous forme normale suivant :

Etat \ Entr.	Recherche	pas de Recherche
Subvention	3, 2	−1, 3
pas de Subvention	−1, 1	0, 0

Commentaire : les paiements de l'Etat sont d'autant plus élevés que la recherche a été plus fructueuse (création d'emplois dans le pays, etc..)

Q 8.1 Vérifier qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures : pour chacun des 4 couples de stratégies, un des joueurs à intérêt à dévier comme indiqué par les $\Rightarrow$.

Q 8.2 Introduire des stratégies mixtes pour les deux joueurs, en notant p la probabilité d'une Subvention par l'Etat et q la probabilité que l'Entreprise fasse de la recherche. Exprimer l'espérance de gain de l'Etat en fonction de p et q ; à q donné, quelle valeur faut-il donner à p pour maximiser cette quantité ? On précisera de quelle façon le résultat dépend de la valeur de q.

$EU_I(p, q) = 3\,p\,q - p\,(1-q) - (1-p)\,q = p\,(5q-1) - q$
Le maximum par rapport à p de $EU_I(p, q)$ à q donné dépend de la valeur de q :

$$\begin{cases} q > \frac{1}{5} \Rightarrow p = 1 \\ q < \frac{1}{5} \Rightarrow p = 0 \\ q = \frac{1}{5} \Rightarrow p \text{ quelconque} \end{cases}$$

Q 8.3 Exprimer l'espérance de gain de l'entreprise en fonction de p et q ; à p donné, quelle valeur faut-il donner à q pour maximiser cette quantité ? On précisera de quelle façon le résultat dépend de la valeur de p.

$EU_{II}(p, q) = 2\,p\,q + 3\,p\,(1-q) + (1-p)\,q = q\,(1-2p) + 3\,p$
De même le maximum par rapport à q de $EU_{II}(p, q)$ à p donné dépend de la valeur de p :

$$\begin{cases} p > \frac{1}{2} \Rightarrow q = 0 \\ p < \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1 \\ p = \frac{1}{2} \Rightarrow q \text{ quelconque} \end{cases}$$

Q 8.4 En déduire l'existence d'un unique équilibre de NASH en stratégies mixtes.

Il existe un seul couple compatible avec ces exigences : $p^* = \frac{1}{2}$; $q^* = \frac{1}{5}$; donc un et un seul équilibre de NASH en stratégies mixtes.