Examen Réparti 2

Durée : 1H30

Seuls documents autorisés : Supports & notes de cours autorisés
Calculatrices autorisées
– Barème indicatif –

Exercice 1 (4pts) **– Even Swaps**

Un individu qui vient de terminer ses études cherche un premier emploi dans sa région. Il cherche à comparer 5 offres de contrats à durée déterminée A, B, C, D, E qui concernent la même durée d'embauche et les mêmes dates mais diffèrent par le montant du salaire proposé, la flexibilité des emplois du temps, le nombre de compétences qu'ils permettent de développer, le nombre de jours de congés qu'ils proposent et l'intérêt de la tâche à accomplir. Les évaluations sont rassemblées dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
1. Salaire mensuel	2000	2400	1800	1900	2200
2. Flexibilité des horaires	moyenne	faible	élevée	moyenne	aucune
3. Compétences développées	1	2	2	1	2
4. Jours de congés	14	12	10	15	12
5. Intérêt	++	+	+	++	—

L'objet de l'exercice est de déterminer le choix optimal en utilisant le modèle de l'utilité additive sachant que les valeurs des différents attributs sont toutes à maximiser.

Q 1.1 Déterminer les solutions optimales au sens de Pareto et éliminer toute solution qui ne l'est pas.

Q 1.2 Considérant la solution D, l'individu déclare qu'il serait prêt à rendre deux jours de vacances pour atteindre un salaire de 2000 euros. Expliquer alors ce que l'on peut en conclure concernant la solution D.

Q 1.3 L'individu fait ensuite les déclarations suivantes :

- Concernant l'emploi A, il serait tout aussi bien intéressé par une variante de l'emploi proposé permettant de développer une compétence de plus (on passerait de 1 à 2) quitte à ce que la tâche à effectuer soit légèrement moins intéressante (on passerait de ++ à +)
- Concernant l'emploi B, il serait prêt à accepter de baisser le salaire mensuel de 200 euros pour gagner un peu de flexibilité dans ses horaires (et obtenir une flexibilité moyenne)
- Concernant l'emploi C, il serait tout aussi bien intéressé par une variante payée à 2000 euros avec une flexibilité d'horaire moyenne

En déduire qu'on peut simplifier la table de décision pour comparer les solutions restantes (on justifiera précisément la suppression éventuelle de lignes en exploitant les spécificités du modèle de l'utilité additive).

Q 1.4 Concernant l'emploi A, l'individu déclare qu'il serait prêt à rendre 2 jours de vacances si on lui propose un salaire mensuel de 2100 par mois. Quelle est alors la meilleure offre d'emploi pour lui. Justifiez précisément votre réponse.

Exercice 2 (4pts) **– Elicitation incrémentale**

On considère un ensemble $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ de 7 alternatives dans un problème d'évaluation tri-critère (les critères sont à maximiser). Chaque alternative de X est caractérisée par un vecteur de performances $x = (x_1, x_2, x_3)$ comme indiqué dans le tableau suivant :

x	a	b	c	d	e	f	g
x_1	1	0	−1	0	−1	1	−1
x_2	0	−1	0	−1	0	−1	−2
x_3	−1	−1	−1	1	−2	−1	0

On s'intéresse alors à éliciter les poids w_i des critères $i = 1, 2, 3$ dans le cadre du modèle de la somme pondérée qui évalue tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ par la quantité $\sum_{i=1}^{3} w_i x_i$. On fait l'hypothèse que les poids sont tous non négatifs et somment à 1.

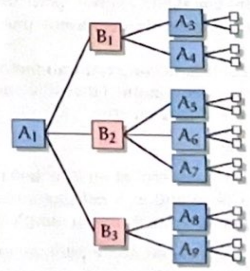
Q 2.1 Le décideur déclare les préférences suivantes : $b \succsim c$ et $g \succsim e$. Déduire de ces préférences les contraintes qui caractérisent le polyèdre convexe W des poids admissibles compte-tenu de cette information. Représenter ce polyèdre dans l'espace (w_1, w_2) (on notera qu'on n'a pas besoin de considérer explicitement w_3 puisqu'on sait que $w_3 = 1 - w_1 - w_2$). Déterminer alors les composantes des sommets du polyèdre obtenu (on précisera ici les trois composantes w_1, w_2, w_3 de chaque sommet). Dans la suite de l'exercice, on notera S l'ensemble des sommets de W.

Q 2.2 On se focalise alors sur un ensemble X' issu de X en supprimant les solutions c et e (du fait des déclarations du décideur) et les solutions dominées au sens de Pareto. Calculer, pour chaque paire d'alternatives (x, y) de X' et pour chaque vecteur poids $w \in S$, la quantité $R_w(x, y) = \sum_{i=1}^{3} w_i(y_i - x_i)$ mesurant le regret que le décideur aurait de choisir x plutôt que y si sa pondération était w.

Q 2.3 En s'appuyant sur le résultat de la question précédente déterminer, pour chaque paire (x, y) de X', le regret maximum par paire $PMR_W(x, y) = \max_{w \in W} \sum_{i=1}^{3} w_i(y_i - x_i)$ de choisir x plutôt que y sur l'ensemble W des poids admissibles. Proposer alors une solution prudente pour le décideur sur la base du critère de minimax regret (justifier précisément votre proposition).

Exercice 3 (3 points) **– Décisions séquentielles**

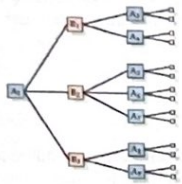
Soit un jeu séquentiel entre 2 joueurs A et B, dont l'arbre est le suivant :



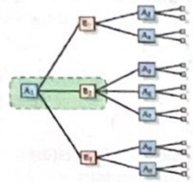
Chaque nœud A_i (resp. B_i) est un nœud de décision pour le joueur A (resp. B).

Ce jeu contient (ou non) des ensembles d'information (représentées sous la forme de zones vertes). Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si les ensembles d'informations sont valides, et si oui, quels sont les ensembles de stratégie des 2 joueurs.

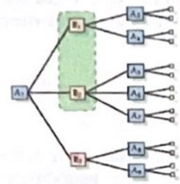
Q 3.1



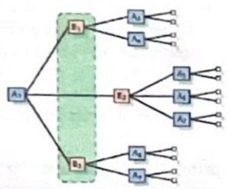
Q 3.2



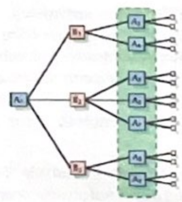
Q 3.3



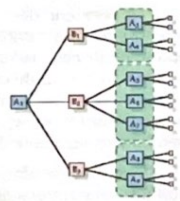
Q 3.4



Q 3.5



Q 3.6



Exercice 4 (5 points) – **Comité de pilotage**

Six investisseurs ont résolu de monter ensemble un projet. Ils décident que les décisions stratégiques de ce projet seront prises par vote dans un comité de pilotage, où chaque investisseur aura un nombre de voix proportionnel à sa participation dans le projet, dont voici ci-contre le tableau récapitulatif.

Membres	Participation
A	4
B	2
F	4
I	4
L	1
P	2
W	12 (/17)

Afin de stabiliser un peu le processus de décision, il est décidé que le nombre de voix nécessaire pour valider une décision sera plus élevé que dans le cas d'un vote majoritaire : il faudra $W = 12$ votes sur 17. Ainsi, si B,F et I votent pour une décision et les autres contre, BFI ont la majorité (10 voix sur 17) mais ne dépassent pas 12 et ne remportent donc pas l'élection.
On notera xyz[*] l'ensemble des coalitions contenant au moins les joueurs x, y et z. Ainsi F[*] représente l'ensemble des coalitions contenant l'investisseur F; IL[*] représente l'ensemble des coalitions contenant I et L; ILE[*] $\subset$ IL[*], etc.

Q 4.1 Analyse du processus de décision

Q 4.1.1 Un jeu coopératif est dit "pondéré" si on affecte à chaque joueur un poids $w_i \in \mathbb{R}$ et si il existe un $W \in \mathbb{R}$ tel qu'une coalition S est gagnante ($v(S) = 1$) si et seulement si $\sum_{i \in S} w_i \geq W$. Un jeu coopératif pondéré est-il un jeu simple?

Q 4.1.2 Le processus de décision du comité de pilotage en fait un jeu pondéré. Donner la fonction caractéristique de ce jeu pondéré.

Q 4.1.3 Y a-t-il droit de veto, dictateur?

Q 4.1.4 Montrer que ce jeu est monotone, symétrique, super-additif mais qu'il n'est pas convexe.

Q 4.1.5 Que peut-on dire du joueur L?

Q 4.2 Valeur de Shapley
Calculer les valeurs de Shapley pour ce jeu (en utilisant la formule du cours et en remarquant que les seuls sous-ensembles S à étudier pour calculer Xi sont ceux où $v(S) \neq v(S \cup \{i\})$). Les résultats pour le participant L confirment-t-ils ce que vous pensiez dans la question précédente?

Q 4.3 Prise de participation de nouveaux investisseurs

Trois nouveaux investisseurs décident de rejoindre le projet. Leur arrivée modifie forcément le processus de décision du comité de pilotage dont voici ci-contre les nouvelles données.

Membres	participation
A	10
B	5
D	3
E	3
F	10
I	10
L	2
P	5
R	10
W	41 (/58)

Q 4.3.1 Sans calculer exactement les valeurs, que peut-on dire du participant L et de sa valeur de Shapley dans ce nouveau comité de pilotage?

Q 4.3.2 En quoi est-ce paradoxal?

Exercice 5 (6pts) – **Stratégies mixtes**

Soit le jeu à somme nulle où les joueurs peuvent jouer des stratégies mixtes et dont la forme normale est la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Q 5.1 Avec quelle fréquence la ligne 1 est-elle jouée si le jeu est répété un grand nombre de fois et si le joueur 1 a choisi la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

Q 5.2 Quel est le gain moyen du joueur 1 si il joue la stratégie mixte $(0, 1)$ et si le joueur 2 joue la stratégie mixte $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$?

Q 5.3 En notant que toute stratégie mixte est une combinaison linéaire convexe des stratégies pures, quel est le plus petit gain moyen du joueur 1 si il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Q 5.4 En déduire les meilleurs réponses (en stratégie mixte) du joueur 2 à la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du joueur 1.

Q 5.5 Montrer que la seule stratégie mixte prudente du joueur 1 (celle qui maximise son gain minimum) est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Q 5.6 La stratégie $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ du joueur 2 fait-elle partie des meilleures réponses à la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du joueur 1. Est-elle prudente pour le joueur 2?