Cours 5 – Méthodes simples pour l'optimisation multicritère

Master ANDROIDE – Décision et Jeux

Patrice Perny

LIP6 – Sorbonne Université

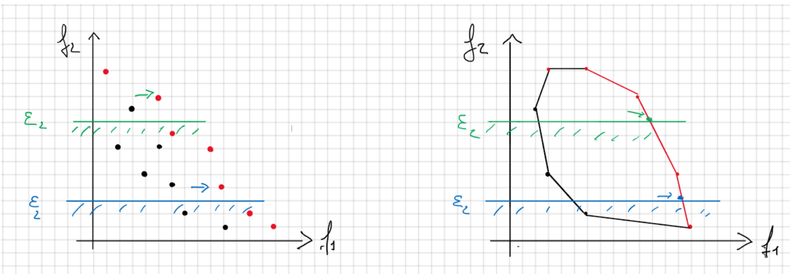
I) Méthodes de scalarisation

La méthode ε-contrainte

Idée : se ramener à un problème d'optimisation classique en mettant $n-1$ critères en contraintes.

$$max_{x \in x}\{f_k(x), f_i(x) \geq \varepsilon_i, \forall i \neq k\}$$

Exemple :



Heuristique pour engendrer des solutions Pareto optimales. Peut servir à approcher le front de Pareto dans le cas bi-critère mais devient impraticable lorsque le nombre de critère augmente.

Facile à implanter en PL. Plus difficile pour les algorithmes combinatoire (e.g., NP-difficile pour plus court chemin).

Quelques autres exemples simples de scalarisations

Exemples donnés dans le cas de critères à maximiser.

- scalarisation par somme pondérée : $\max_{x \in x} \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(x)$ mais laisse les solutions non-supportées hors d'atteinte.
- scalarisation par regret minimax : $\min_{x \in X} \max_i \{f_i^* - f_i(x)\}$ avec $f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x)$

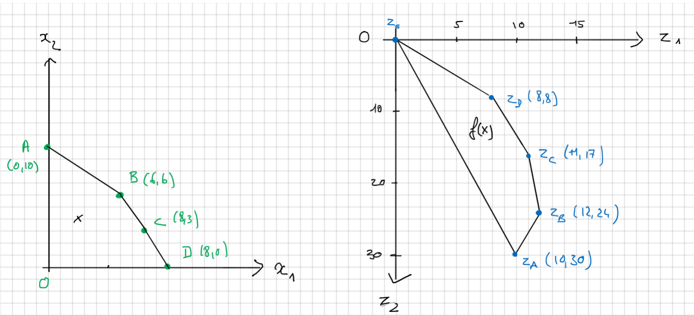
$$\begin{array}{l} \min z \\ z \geq f_i^* - f_i(x), \forall i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Scalarisation appliquée à la programmation linéaire

Retour sur l'exemple du cours 4

$$\max z_1 = x_1 + x_2 \qquad \min z_2 = x_1 + 3x_2$$
$$s.c. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & \leq & 8 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Représentation dans l'espace des solutions et dans l'espace des critères :



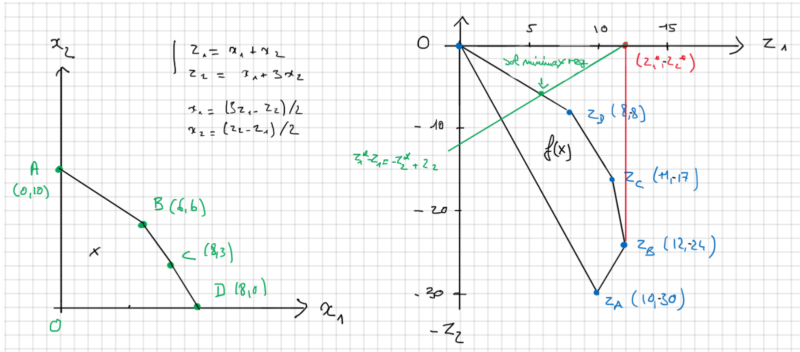
On peut remplacer la minimisation de l'objectif z_2 par la maximisation de l'objectif $-z_2$.

Solution du minimax regret

Les points efficaces sont : $[z_B, z_C] \cup [z_C, z_D] \cup [z_D, z_O]$

Les solutions Pareto optimales sont : $[B, C] \cup [C, D] \cup [D, O]$

$z_1^* = 12$ et $-z_2^* = 0$. La solution du minimax regret est sur la droite d'équation $z_1^* - z_1 = -z_2^* - (-z_2)$ c'est-à-dire $z_1 + z_2 = 12$ qui, dans l'espace $(z_1, -z_2)$, passe par les points (12, 0) et (0, -12).



Calcul de la solution du minimax regret

Comme on a deux critères on peut résoudre graphiquement. Il faut intersecter le segment $[z_O, z_D]$ d'équation $z_1 - z_2 = 0$ avec la droite d'équation $z_1 + z_2 = 12$ ce qui donne le point (6, 6) dans l'espace des critères, soit encore le point $(6, 0)$ dans l'espace des solutions.

On peut retrouver cette solution en résolvant le PL suivant :

$$\min z$$
$$s.c. \begin{cases} z & \geq & 12 - x_1 - x_2 \\ z & \geq & x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & \leq & 8 \end{cases}$$
$$z \in \mathbb{R}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Une méthode combinant ε-contrainte et somme pondérée

On peut combiner la scalarisation par somme pondérée et la méthode ε-contrainte pour tester si une solution réalisable $x_0 \in X$ est Pareto-optimale. Pour cela, on peut résoudre le problème suivant :

$$\max \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(x)$$
$$\text{s.c.} \quad f_i(x) \geq f_i(x_0), i = 1, \ldots, n$$
$$x \in X$$

Proposition

Si les poids w_i sont strictement positifs, alors $x_0 \in X$ est une solution optimale du problème ci-dessus si et seulement si elle est Pareto optimale.

Preuve

- $\Rightarrow$ Si x^0 est Pareto-optimale dans X, il n'existe pas de solution $x \in X$ telle que $f_i(x) \geq f_i(x_0)$ pour tout i avec $f_k(x) > f_k(x_0)$ pour au moins un k. Ainsi, toute solution réalisable du problème ci-dessus satisfait $f_i(x) = f_i(x_0), i = 1, \ldots, n$ et est optimale.
- $\Leftarrow$ Si x^0 est une solution optimale du problème ci-dessus. Alors, s'il existait une solution x qui la domine au sens de Pareto elle aurait une meilleure somme pondérée que x^0 (comme on l'a déjà vu, car les poids positifs) ce qui contredit l'optimalité de x^0. Donc x^0 est Pareto-optimale dans X.

Un exemple d'utilisation de la méthode hybride

Considérons le problème de sac-à-dos bi-critère suivant :

$$\max z_1 = 18x_1 + 12x_2 + 17x_3 + 2x_4$$
$$\max z_2 = 3x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 15x_4$$
$$\text{s.c. } 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Si $x^0 = (1, 0, 0, 1)$ et que l'on résout le problème :

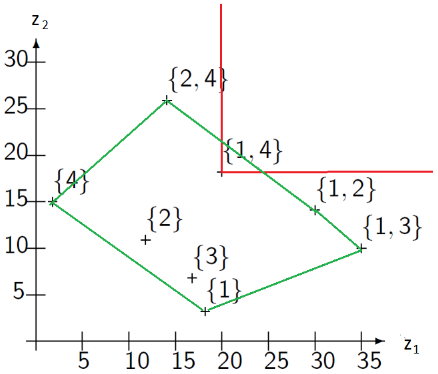
$$\max z_1 + z_2 = 21x_1 + 23x_2 + 24x_3 + 17x_4$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 18x_1 + 12x_2 + 17x_3 + 2x_4 & \geq & 20 \\ 3x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 15x_4 & \geq & 18 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

On trouve comme solution x^0 ce qui montre que c'est une solution Pareto-optimale. Cette solution est introuvable en maximisant simplement une somme pondérée des critères...

Explication

Il s'agit d'une solution Pareto-optimale non supportée comme le montre l'image des solutions du problème dans l'espace des critères.

$$\begin{array}{ll} \max & z_1 = 18x_1 + 12x_2 + 17x_3 + 2x_4 \\ \max & z_2 = 3x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 15x_4 \\ s.t. & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$



II) Algorithme pour le calcul de chemins Pareto Optimaux

Formulation du problème

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté (V ens. des somments, E ensemble des arcs) de racine v_1.

On pose $n = |V|$ et $m = |E|$. Les arcs sont munis de poids vectoriels :

$$w : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{Z}^q \\ e & \mapsto & (w_1(e), \ldots, w_q(e)) \end{array}$$

$w_i(e)$ est le poids de l'arc e selon le critère i. Le vecteur poids d'un chemin P est donné par $w(P) = \sum_{e \in P} w(e)$

Le Problème des chemins Pareto-optimaux

Déterminer les points efficaces dans l'ensemble des vecteurs associés aux chemins du graphe de v_1 vers les autres sommets v_i de $V \setminus \{v_1\}$, et pour chacun de ces points un chemin associé (chemin Pareto-optimal).

Problème NP-difficile et "intraitable" même pour $q = 2$

Proposition

Même dans le cas bi-critère et pour un graphe sans circuit, le problème de décision suivant est NP-complet : étant donné $(b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$, existe t-il un chemin P de v_1 à v_n dans G tel que $w_1(P) \leq b_1$ et $w_2(P) \leq b_2$?

Preuve. Réduction à partir de Partition.

Définition

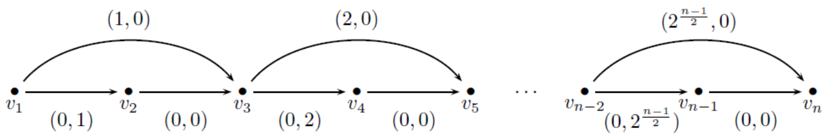
Un problème d'optimisation multicritère est dit intraitable *si la taille de l'ensemble des vecteur optimaux peut être exponentielle en la taille de l'instance.*

Proposition

Le problème des chemins Pareto-optimaux est intraitable même pour le cas de deux critères.

Preuve. On construit une instance de taille n où le cardinal de l'ensemble des points efficaces est expontentiel en n.

Une instance avec un ensemble efficace exponentiel en n



Noter que pour tout chemin P de ce graphe on a :

$$w_1(P) + w_2(P) = \sum_{e \in P} (w_1(e) + w_2(e)) = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-2} 2^{\frac{i-1}{2}} = \sum_{i=0}^{(n-3)/2} 2^i = 2^{\frac{n-1}{2}} - 1$$

Les vecteurs images des chemins sont donc tous alignés sur une droite d'équation $x + y = cte$ normale au vecteur $(1, 1)$. Ils sont donc tous efficients.

Pour tout $z \in \{0, \ldots, 2^{\frac{n-1}{2}} - 1\}$ il y a un chemin distinct de v_1 à v_n de coût $(z, 2^{\frac{n-1}{2}} - 1 - z)$. Tous les vecteurs images sont donc distincts et ils sont en nombre $2^{\frac{n-1}{2}}$. On obtient donc un ensemble de points efficaces de taille exponentielle en n.

Calcul des points efficaces associés aux chemins

Soit $G = (V, E)$ un graphe tel qu'il n'existe pas de circuit de valeur strictement négative sur un critère, i.e.,

$$\forall C \text{ un circuit}, \forall i = 1, \ldots, q, \sum_{e \in C} w_i(e) > 0$$

Alors on a le résultat suivant :

Proposition

Soit P_{st} un chemin Pareto-optimal de s à t dans G. Soit i un sommet de P_{st} différent de s et t, alors le sous-chemin P_{si} de P_{st} est Pareto-optimal dans l'ensemble des chemins de s à i.

Preuve.

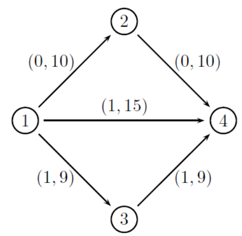
Supposons que P_{si} ne soit pas Pareto-optimal. Alors il existe un autre chemin P'_{si} de s à i tel que $w(P'_{si}) \succ_P w(P_{si})$ et donc $w(P'_{si}) + w(P_{it}) \succ_P w(P_{si}) + w(P_{it}) = w(P_{st})$ où P_{it} est le sous-chemin de P_{st} de i à t. On aurait alors un autre chemin de s à i qui domine P_{st} ce qui contredit sa Pareto-optimalité □

Calcul des points efficaces associés aux chemins

La proposition précédente montre que la dominance de Pareto est une préférence qui vérifie le principe de Bellman : "tout sous-chemin d'un chemin (Pareto-)optimal est (Pareto-)optimal."

Cela suggère qu'une extension multicritère de l'algorithme de Bellman peut être envisagée. Mais attention, il y a quelques différences avec le cas monocritère !

- Concaténer deux chemins Pareto-optimaux ne produit pas nécessairement un chemin Pareto-optimal



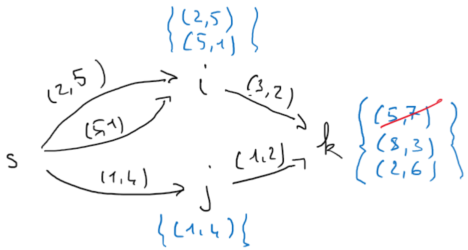
- Plusieurs chemins optimaux incomparables peuvent exister pour joindre deux sommets s et i. Ces chemins correspondent à plusieurs façons "optimales mais non équivalentes" d'arriver en i. Il faudra donc toutes les mémoriser.

Labels et principe du marquage

Principe de l'algorithme de Ford-Bellman adapté au cas multicritère.

Le label attaché à un sommet (marque) est un ensemble de vecteurs et non plus un scalaire.

Exemple :



En k (5, 7) est dominé par (2, 6) et doit être éliminé (un sous-chemin dominé ne peut mener à un chemin Pareto-optimal).

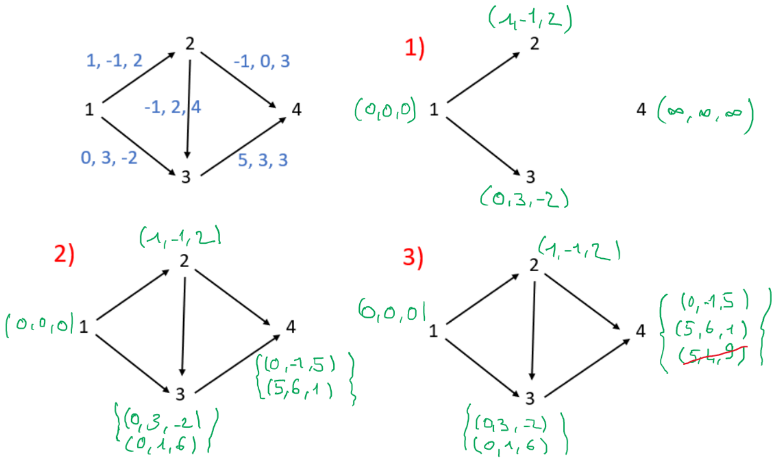
Algorithme de Corley et Moon (1985)

Calcule les points efficaces associés aux chemins du graphe.

$c_{ii} = (0, \dots, 0)$
$c_{ij} = (\infty, \dots, \infty)$ si $i \neq j$ et $(i,j) \notin E$
$\quad = (w_{ij}^1, \dots, w_{ij}^q)$ sinon
$k \leftarrow 1; L_i^1 \leftarrow \{c_{1i}\}, \forall i = 1, \dots, n$
for all $i = 1 \dots n$ **do**
  $L_i^{k+1} = M(\cup_{j=1}^n \{c_{ji} + l_j^k \mid l_j^k \in L_j^k\}, \succsim)$
end for
if $(k = n-1)$ ou $(L_j^{k+1} = L_j^k, \forall j = 1, \dots, n)$ **then**
  STOP
else
  $k \leftarrow k+1$
  aller en 2
end if

Lorsque l'algorithme est stoppé par $k = n-1$ et non par la stabilité des labels c'est qu'il existe un circuit absorbant.

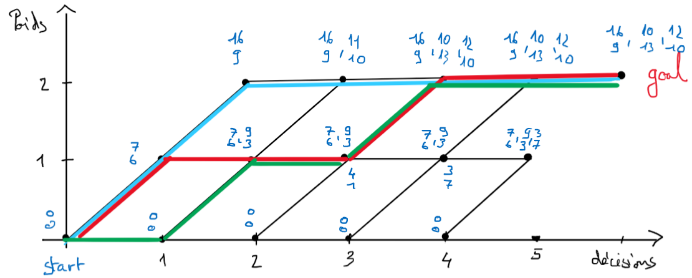
Un exemple d'execution



Un autre exemple : le sac-à-dos multicritère

Un problème de selection de comité (voir Exemple 3 du cours précédent).

$$\max z_1 = 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5$$
$$\max z_2 = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 5$$



3 solutions : $\{1,2\}, \{1,4\}$ et $\{2,4\}$ de coûts $(16,9), (10,13)$ et $(12,10)$