Rapport Approfondi sur le Calcul des Sensibilités (Greeks) dans le Modèle de Volatilité Stochastique de Jacobi

Charles Lambert

September 26, 2025

Contents

1 Introduction

La gestion des risques financiers associés aux produits dérivés est une préoccupation centrale pour les praticiens et les régulateurs. Les sensibilités des prix des options aux variations des paramètres de marché et du modèle sous-jacent, communément appelées "Greeks" (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho), jouent un rôle crucial dans la construction de stratégies de couverture, l'évaluation des risques et la prise de décision.

Le modèle de volatilité stochastique de Jacobi, proposé par Ackerer, Filipović et Pulido [1], se distingue par sa capacité à modéliser une volatilité évoluant dans un intervalle compact $[v_{min}, v_{max}]$, offrant une alternative aux modèles classiques comme ceux de Heston ou Black-Scholes. L'article de référence développe une méthodologie de pricing d'options basée sur la propriété polynomiale du modèle et les expansions de Gram-Charlier A.

Ce rapport vise à fournir une exploration des techniques de calcul des Greeks dans ce cadre. Nous nous appuierons sur le formalisme d'Ackerer et al. pour les méthodes de différentiation analytique/semi-analytique et des différences finies. De plus, nous introduirons rapidement et de manière théorique l'application du calcul de Maliavin aux calculs des greeks. Enfin, nous aborderons la simulation de stratégies de couverture dynamique.

2 Le Modèle de Volatilité Stochastique de Jacobi (Ackerer et al., 2018)

2.1 Dynamique du Modèle sous la Mesure Risque-Neutre

Le modèle de Jacobi est défini par le système d'équations différentielles stochastiques (EDS) suivant, sous une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour le carré de la volatilité instantanée $V_t \in [v_{min}, v_{max}]$ et le logarithme du prix de l'actif $X_t = \log(S_t)$:

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{Q(V_t)}dW_{1t}^{\mathbb{Q}} \tag{2.1}$$

$$dX_t = (r - \delta - V_t/2)dt + \rho\sqrt{Q(V_t)}dW_{1t}^{\mathbb{Q}} + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}dW_{2t}^{\mathbb{Q}} \tag{2.2}$$

La fonction $Q(v)$ est un polynome de degré 2 qui s'annule aux bornes v_{min} et v_{max}:

$$Q(v) := \frac{(v - v_{min})(v_{max} - v)}{(\sqrt{v_{max}} - \sqrt{v_{min}})^2}$$

La condition $V_t - \rho^2 Q(V_t) \geq 0$ doit être assurée pour que la racine carrée soit bien définie. L'article montre que $v \geq Q(v)$ pour $v \in [v_{min}, v_{max}]$, donc si $|\rho| \leq 1$, cette condition est satisfaite car $V_t - \rho^2 Q(V_t) \geq V_t - Q(V_t) \geq 0$.

2.2 Propriétés Clés du Modèle

- **Bornes de la volatilité**: V_t reste confiné dans $[v_{min}, v_{max}]$, ce qui peut être plus réaliste que des modèles où la volatilité peut atteindre zéro ou l'infini (comme Heston, bien que Feller condition évite 0).

- **Cas Limites**:
  - Si $V_0 = \theta = v_{max}$ (et κ approprié ou $Q(v_{max}) = 0$), $V_t = V_0$ et le modèle se réduit au modèle de Black-Scholes avec volatilité constante $\sqrt{V_0}$.
  - Pour $v_{min} = 0$ et $v_{max} \to \infty$, $Q(v) \to v$, et le modèle de Jacobi converge faiblement vers le modèle de Heston (Théorème 2.3 [1]).
- **Non-atteinte des bornes (sous conditions)**: Le Théorème 2.1 [1] donne des conditions (Eq. (2.3)) pour que V_t reste strictement dans (v_{min}, v_{max}) si V_0 y est.

2.3 Propriété Polynomiale et Générateur Infinitésimal

Le processus bidimensionnel $Z_t := (V_t, X_t)$ est une *diffusion polynomiale.* Cela signifie que son générateur infinitésimal $\mathcal{G}$ applique l'espace des polynômes en (v, x) de degré total au plus k dans lui-même. Le générateur est défini par:

$$\mathcal{G}f(v,x) := \underbrace{\begin{pmatrix} \kappa(\theta - v) \\ r - \delta - v/2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \partial_v f \\ \partial_x f \end{pmatrix}}_{b(v,x)^\top \nabla f(v,x)} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 Q(v) & \rho\sigma Q(v) \\ \rho\sigma Q(v) & v \end{pmatrix}}_{a(v,x)} \begin{pmatrix} \partial_{vv} f & \partial_{vx} f \\ \partial_{xv} f & \partial_{xx} f \end{pmatrix} \right)$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de calculer $\mathbb{E}[p(V_T, X_T)|\mathcal{F}_t]$ pour tout polynôme p en résolvant un système d'EDOs linéaires pour les coefficients des moments (Théorème 2.4 [1]). Plus précisément, si $p \in \mathrm{Pol}_N$, et $\mathbf{p}$ est sa représentation vectorielle dans une base $h_1, \ldots, h_M$ de Pol_N, alors

$$\mathbb{E}[p(V_T, X_T)|\mathcal{F}_t] = (h_1(V_t, X_t) \ldots h_M(V_t, X_t))e^{(T-t)G}\mathbf{p}$$

où G est la représentation matricielle de $\mathcal{G}$ dans cette base.

3 Méthodologie de Pricing d'Options dans le Modèle de Jacobi

La tarification d'options européennes dans le modèle de Jacobi, telle que développée par Ackerer et al. [1], repose sur l'expansion de Gram-Charlier A de la densité du log-prix terminal X_T.

3.1 Expansion de Gram-Charlier A et Densité du Log-Prix

La densité $g_T(x)$ du log-prix X_T peut être exprimée par rapport à une densité gaussienne de référence $w(x)$ avec moyenne μ_w et variance σ_w^2. Si $g_T(x)/w(x) \in L_w^2 = \{f : \int f(x)^2 w(x)dx < \infty\}$, alors on peut écrire :

$$g_T(x) = w(x) \sum_{n=0}^{\infty} l_n H_n(x)$$

où $H_n(x)$ sont les polynômes d'Hermite généralisés, orthonormés pour le produit scalaire $(f, g)_w = \int f(x)g(x)w(x)dx$. Ils sont définis par $H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\mathcal{H}_n\left(\frac{x-\mu_w}{\sigma_w}\right)$, où $\mathcal{H}_n(z) = (-1)^n e^{z^2/2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2/2}$ sont les polynômes d'Hermite standards (physicists'). Les coefficients l_n sont les moments d'Hermite:

$$l_n = (g_T/w, H_n)_w = \int_{\mathbb{R}} \frac{g_T(x)}{w(x)} H_n(x)w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)g_T(x)dx = \mathbb{E}[H_n(X_T)]$$

L'article (Corollaire 3.2) montre que $g_T(x)/w(x) \in L^2_w$ si $\sigma_w^2 > v_{max}T/2$.

3.2 Formule de Prix en Série

Le prix à $t = 0$ d'une option européenne avec payoff actualisé $f(X_T)$ est:

$$\pi_f = \mathbb{E}[f(X_T)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_T(x) dx$$

En utilisant l'expansion de $g_T(x)$ et en supposant que $f(x) \in L^2_w$:

$$\pi_f = \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x) \sum_{n=0}^{\infty} l_n H_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \int_{\mathbb{R}} f(x) H_n(x) w(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n l_n$$

où $f_n = (f, H_n)_w$ sont les coefficients de Fourier du payoff. Le prix est approché par une somme finie $\pi_f^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} f_n l_n$.
C'est en grande partie ce qui nous intéresse pour la suite. Dans la partie suivante, on donne un exemple de calcul des coéfficient de f_n et ln

3.3 Calcul Détaillé des Coefficients de Fourier f_n

L'article [1] fournit des expressions pour f_n pour des payoffs usuels.

- **Option d'Achat Européenne (Call)**: $f(x) = e^{-rT}(e^x - e^k)^+$. Le Théorème 3.7 donne:

$$f_0 = e^{-rT+\mu_w} I_0 \left(\frac{k - \mu_w}{\sigma_w}; \sigma_w \right) - e^{-rT+k} \Phi \left(\frac{\mu_w - k}{\sigma_w} \right)$$
$$f_n = e^{-rT+\mu_w} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sigma_w I_{n-1} \left(\frac{k - \mu_w}{\sigma_w}; \sigma_w \right), \quad n \geq 1$$

  où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard, et $I_n(\mu; \nu)$ sont définies par récurrence (Eq. (3.18) de [1]).

- **Option de Vente Européenne (Put)**: $f(x) = e^{-rT}(e^k - e^x)^+$. Les coefficients f_n peuvent être obtenus par la parité call-put sur les coefficients de Fourier, ou en calculant directement l'intégrale $(f, H_n)_w$.

- **Option Digitale (Cash-or-Nothing Call)**: $f(x) = e^{-rT} \mathbf{1}_{[k,\infty)}(x)$. Le Théorème 3.8 donne:

$$f_0 = e^{-rT} \Phi \left(\frac{\mu_w - k}{\sigma_w} \right)$$
$$f_n = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{n!}} \mathcal{H}_{n-1} \left(\frac{k - \mu_w}{\sigma_w} \right) \phi \left(\frac{k - \mu_w}{\sigma_w} \right), \quad n \geq 1$$

  où $\phi(\cdot)$ est la densité de la loi normale standard.

3.4 Calcul Détaillé des Moments d'Hermite l_n

Les moments $l_n = \mathbb{E}[H_n(X_T)]$ sont obtenus via la propriété polynomiale. $H_n(X_T)$ est un polynôme en X_T de degré n. On utilise la base de polynômes $h_{\pi(m,q)}(v, x) = v^m H_q(x)$ (Eq. (A.1) [1]). Le Théorème

A.1 [1] stipule:

$$l_n = \mathbf{h}(V_0, X_0)e^{TG}\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$$

où:

- $\mathbf{h}(V_0, X_0)$ est le vecteur ligne $(h_1(V_0, X_0), \ldots, h_M(V_0, X_0))$.
- G est la matrice (de taille $M \times M$) du générateur $\mathcal{G}$ dans cette base. Ses coefficients sont donnés explicitement dans l'Annexe A de [1] et dépendent des paramètres du modèle $(\kappa, \theta, \sigma, v_{min}, v_{max}, \rho, r, \delta)$ et de σ_w (via les dérivées des $H_q(x)$).
- e^{TG} est l'exponentielle de la matrice TG.
- $\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$ est le vecteur de la base canonique qui correspond au polynôme $H_n(X_T)$ (i.e., $m = 0, q = n$).

Le calcul de $e^{TG}\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$ peut se faire sans calculer explicitement e^{TG} en entier, mais plutôt en calculant l'action de l'exponentielle de matrice sur un vecteur, par exemple via des méthodes de Krylov (référence [5, 36] dans le papier original).
On remarque (en effet...) que les propriétés polynomiales du modèle de Jacobi semblent rendre toute les applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui va être utile pour la dérivation par la suite.

4 Calcul des Greeks par Différentiation de la Série de Prix

La formule de prix $\pi_f^{(N)} = \sum_{n=0}^N f_n l_n$ étant une somme de termes (semi-)analytiques, on peut obtenir les Greeks en la différenciant par rapport au paramètre d'intérêt P_j.

$$\frac{\partial \pi_f^{(N)}}{\partial P_j} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\partial f_n}{\partial P_j} l_n + f_n \frac{\partial l_n}{\partial P_j} \right)$$

4.1 Delta (Δ)

$\Delta := \frac{\partial \pi_f}{\partial S_0}$. Avec $S_0 = e^{X_0}$, on a $\Delta = \frac{\partial \pi_f}{\partial X_0} \frac{1}{S_0}$.

$$\frac{\partial \pi_f}{\partial X_0} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\partial f_n}{\partial X_0} l_n + f_n \frac{\partial l_n}{\partial X_0} \right)$$

- $\frac{\partial f_n}{\partial X_0}$: Pour un strike absolu k, f_n ne dépend pas de X_0, donc $\frac{\partial f_n}{\partial X_0} = 0$. Si k est relatif à S_0 (e.g., $K = \alpha S_0 \implies k = \log \alpha + X_0$), alors f_n dépend de X_0 via $k(X_0)$ dans ses arguments. Les dérivées des fonctions I_n et Φ seraient nécessaires.
- $\frac{\partial l_n}{\partial X_0}$: Comme $l_n = \mathbf{h}(V_0, X_0)e^{TG}\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$ et que X_0 n'apparaît que dans $\mathbf{h}(V_0, X_0)$:

  $$\frac{\partial l_n}{\partial X_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}(V_0, X_0)}{\partial X_0} \right) e^{TG}\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$$

  La $j = \pi(m, q)$-ème composante de $\mathbf{h}(V_0, X_0)$ est $V_0^m H_q(X_0)$. Sa dérivée par rapport à X_0 est $V_0^m H_q'(X_0)$. En utilisant la relation $H_q'(x) = \frac{\sqrt{q}}{\sigma_w} H_{q-1}(x)$ (valable pour les polynômes H_q normalisés L_w^2 et non les $\mathcal{H}_q$), le calcul est direct.

4.2 Gamma (Γ)

$\Gamma := \frac{\partial^2 \pi_f}{\partial S_0^2} = \frac{\partial}{\partial S_0}\left(\frac{\partial \pi_f}{\partial X_0}\frac{1}{S_0}\right) = \left(\frac{\partial^2 \pi_f}{\partial X_0^2} - \frac{\partial \pi_f}{\partial X_0}\right)\frac{1}{S_0^2}$. Cela requiert $\frac{\partial^2 l_n}{\partial X_0^2}$, impliquant $H_q''(X_0)$. On peut utiliser $H_q''(x) = \frac{\sqrt{q(q-1)}}{\sigma_w^2} H_{q-2}(x)$.

4.3 Vega ($\mathcal{V}$)

Le Vega principal est souvent la sensibilité à un paramètre global de volatilité. Dans le modèle de Jacobi, il n'y a pas un tel paramètre unique. On peut considérer la sensibilité aux paramètres de la dynamique de V_t, par exemple $\mathcal{V}_\sigma = \frac{\partial \pi_f}{\partial \sigma}$ (où σ ici est la vol-de-vol).

$$\mathcal{V}_\sigma = \sum_{n=0}^{N} f_n \frac{\partial l_n}{\partial \sigma}$$

(en supposant que f_n ne dépend pas de σ, ce qui est généralement le cas si μ_w, σ_w sont fixés indépendamment de σ). La dépendance de l_n à σ provient de la matrice G. Les coefficients de G (Annexe A [1]) contiennent σ et σ^2. Par exemple: $G_{\pi(m-2,n),\pi(m,n)} = -\frac{\sigma^2 m(m-1) v_{max} v_{min}}{2(\sqrt{v_{max}} - \sqrt{v_{min}})^2}$. La dérivée $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ peut être calculée. Cependant, la dérivée $\frac{\partial (e^{TG})}{\partial \sigma}$ est complexe:

$$\frac{\partial (e^{TG})}{\partial \sigma} = T \int_0^1 e^{sTG} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) e^{(1-s)TG} ds$$

Cette intégrale (Duhamel's formula) est rarement calculable analytiquement.

4.4 Theta (Θ)

$\Theta = -\frac{\partial \pi_f}{\partial \tau}$, où $\tau = T - t_0$ est le temps à maturité (en supposant que le prix est calculé à $t_0 = 0$). Si l'on dérive par rapport à T:

$$\frac{\partial \pi_f}{\partial T} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\partial f_n}{\partial T} l_n + f_n \frac{\partial l_n}{\partial T}\right)$$

- $\frac{\partial f_n}{\partial T}$: Les coefficients f_n contiennent e^{-rT}. Par exemple, pour un call, $\frac{\partial}{\partial T}(e^{-rT+\mu_w} \dots) = -r(e^{-rT+\mu_w} \dots) + e^{-rT+\mu_w} \frac{\partial}{\partial T}(\dots)$. Si μ_w, σ_w dépendent de T (e.g., $\sigma_w^2 = c_1 T$ pour satisfaire $\sigma_w^2 > v_{max} T/2$, ou $\sigma_w^2 = \mathrm{Var}(X_T)$ pour le matching de moments), la dérivation des fonctions I_n et Φ, ϕ par rapport à $\sigma_w(T)$ est nécessaire.

- $\frac{\partial l_n}{\partial T}$: $l_n = \mathbf{h}(V_0, X_0) e^{TG} \mathbf{e}_{\pi(0,n)}$. Donc,

$$\frac{\partial l_n}{\partial T} = \mathbf{h}(V_0, X_0)(G e^{TG}) \mathbf{e}_{\pi(0,n)}$$

  C'est calculable : c'est la même forme que l_n mais avec G multiplié à gauche de e^{TG}.

Le Theta est alors $-\frac{\partial \pi_f}{\partial T}$ (si on considère une diminution du temps à maturité).

4.5 Rho (ρ_{rate})

$\rho_{rate} \coloneqq \frac{\partial \pi_f}{\partial r}$.

$$\frac{\partial \pi_f}{\partial r} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\partial f_n}{\partial r} l_n + f_n \frac{\partial l_n}{\partial r} \right)$$

- $\frac{\partial f_n}{\partial r}$: f_n contient e^{-rT}. Par exemple, $\frac{\partial}{\partial r}(e^{-rT+\mu_w} \dots) = -T(e^{-rT+\mu_w} \dots)$.
- $\frac{\partial l_n}{\partial r}$: Le taux r apparaît dans le drift de X_t, $(r - \delta - V_t/2)$. Cela affecte les coefficients de la matrice G, spécifiquement (Annexe A [1]): $G_{\pi(m,n-1),\pi(m,n)} = \frac{(r-\delta)\sqrt{n}}{\sigma_w} + \dots$. Le calcul de $\frac{\partial (e^{TG})}{\partial r}$ via $\frac{\partial G}{\partial r}$ est complexe, comme pour Vega.

4.6 Conclusion de la différentiation de la série de prix

Bien que tout semble dérivable (ce qui justifie cette méthode pour le calcul des greeks) certains calculs numériques peuvent être coûteux (notemment le calcul de Vega). C'est pour cela que nous allons aborder de manière théorique (parce que je n'ai pas tout compris) une autre façon de calculer les greeks

5 Calcul des Greeks par le Calcul de Malliavin

Remarque 5.1. *Cette section a plus pour but d'apporter des pistes de recherches au calcul des greeks pour le modèle de Jacobi mais pas de réellement aboutir à une conclusion.*

5.1 Introduction Théorique au Calcul de Malliavin

Le calcul de Malliavin, ou calcul stochastique des variations, étend les concepts de la différentiation aux fonctionnelles de processus stochastiques, typiquement des fonctionnelles du mouvement Brownien. Ses outils principaux sont la dérivée de Malliavin, l'intégrale de Skorokhod (son adjoint), et la formule d'intégration par parties (IPP).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ un mouvement Brownien standard. On s'intéresse à une variable aléatoire $F = \Phi((W_s)_{s\in[0,T]})$, fonctionnelle du chemin du Brownien.

- **Dérivée de Malliavin**: L'opérateur de dérivée de Malliavin $D_t F$ mesure la sensibilité de F à une perturbation infinitésimale du chemin de W au temps t. C'est un processus stochastique indexé par $t \in [0,T]$. Pour des fonctionnelles "simples" $F = \sum_{i=1}^{n} f_i \int_0^T h_i(s) dW_s$, on a $D_t F = \sum_{i=1}^{n} f_i h_i(t)$. L'opérateur D s'étend à un espace plus large de variables aléatoires (domaine de D, souvent noté $\mathbb{D}^{1,2}$).
- **Intégrale de Skorokhod**: L'opérateur de divergence (ou intégrale de Skorokhod) $\delta(u)$ est l'adjoint de D. Si $u = (u_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus stochastique adapté, $\delta(u) = \int_0^T u_s dW_s$ coïncide avec l'intégrale d'Itô. Mais δ est défini pour des processus non-adaptés aussi. La relation d'adjonction est $\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\int_0^T D_t F u_t dt]$.
- **Formule d'Intégration par Parties (IPP)**: C'est le résultat clé pour les Greeks. Pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et une fonction f différentiable, si l'on s'intéresse à $\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathbb{E}[f(F_\lambda)]$ où F_λ est une v.a.

dépendant d'un paramètre λ: Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, alors pour "presque tout" $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{F>x\}}H] = \mathbb{E}[f_F(x)H]$$

où $f_F(x)$ est la densité de F. Une version plus générale est:

$$\mathbb{E}[f'(F)G] = \mathbb{E}[f(F)\mathcal{W}(F,G)]$$

où $\mathcal{W}(F,G)$ est un "poids de Malliavin" qui dépend de F, G et de leurs dérivées de Malliavin, et souvent de l'inverse de la variance de Malliavin de F, $\langle DF, DF\rangle^{-1}_{L^2([0,T])}$. Plus spécifiquement pour les Greeks : si $P(\theta) = \mathbb{E}[\text{Payoff}(X_T(\theta))]$, alors

$$\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta} = \mathbb{E}\left[\text{Payoff}(X_T(\theta)) \times \text{PoidsMalliavin}_\theta\right]$$

où le PoidsMalliavin$_\theta$ est typiquement de la forme $\delta(DX_T(\theta)\frac{\partial X_T(\theta)}{\partial\theta}/\langle DX_T(\theta), DX_T(\theta)\rangle_{L^2})$.

5.2 Application Générale aux Greeks

- **Delta**: Pour $\Delta = \frac{\partial}{\partial s_0}\mathbb{E}[f(S_T)]$, où $S_T = s_0\exp(X_T - X_0)$, si X_T est solution d'une EDS $dX_t = \mu dt + \nu dW_t$. On exprime S_T en fonction de W_t. La formule IPP donne $\Delta = \mathbb{E}[f'(S_T)\frac{S_T}{s_0\nu_T\sqrt{T}}\frac{W_T}{\sqrt{T}}]$ (cas Black-Scholes simplifié) ou plus généralement $\Delta = \mathbb{E}[\text{Payoff} \times \text{Poids}_\Delta]$.
- **Vega**: Si la volatilité ν est un paramètre $\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbb{E}[f(S_T(\nu))]$, l'IPP donne une expression $\mathbb{E}[\text{Payoff} \times \text{Poids}_\nu]$.

Ces poids peuvent être complexes. L'avantage est qu'on obtient le Greek comme une seule espérance, souvent plus stable en Monte Carlo que les différences finies, surtout pour des payoffs discontinus.

5.3 Application Conceptuelle au Modèle de Jacobi

Le modèle de Jacobi (2.1)-(2.2) est piloté par deux mouvements Browniens W_1, W_2. Le calcul de Malliavin doit être étendu au cas multidimensionnel. Soit $F = (X_T, V_T)$. La dérivée de Malliavin D_sF serait un vecteur de processus $((D_s^{(1)}X_T, D_s^{(2)}X_T), (D_s^{(1)}V_T, D_s^{(2)}V_T))$ où $D^{(j)}$ est la dérivée par rapport à W_j.

- **Calcul des Dérivées de Malliavin**: Il faudrait appliquer l'opérateur $D^{(j)}$ aux EDS. C'est un processus linéaire pour DX_T, DV_T. Les coefficients de ces EDS dépendront de X_t, V_t et de leurs dérivées par rapport à v, x (car les coefficients $\sigma\sqrt{Q(V_t)}$, etc. dépendent de V_t).
  $D_s^{(1)}V_t = \sigma\sqrt{Q(V_s)} + \int_s^t[-\kappa D_s^{(1)}V_u + \sigma\frac{Q'(V_u)}{2\sqrt{Q(V_u)}}D_s^{(1)}V_u]dW_{1u}$.

  Notons que si $Q(V_u)$ se rapproche de 0 (i.e. V_u se rapproche de v_{min}, v_{max}, $\sqrt{Q(V_u)}$ n'est plus différentiable, il pourrait donc être interessant de calculer la probabiliter de V_t rencontre $\{v_{min}, v_{max}\}$
- **Matrice de Covariance de Malliavin**: Pour une fonctionnelle $\Psi(X_T)$, on aurait besoin de la "variance conditionnelle" ou de la structure de covariance des dérivées de Malliavin de X_T.

- **Poids de Malliavin**: L'obtention de poids explicites pour les Greeks (Delta, Vega par rapport aux paramètres $\sigma, \kappa, \theta, \rho, v_{min}, v_{max}$) serait un travail de recherche considérable. Pour Delta (S_0 ou X_0): $\frac{\partial}{\partial x_0}\mathbb{E}[\text{payoff}(X_T)]$. X_T dépend de x_0 additivement si $X_t = x_0 + \int_0^t \dots$. Dans ce cas, la "dérivée du shift" est plus simple et peut parfois éviter Malliavin. Cependant, la dépendance de V_t n'est pas affectée par x_0. Pour Vega (e.g., $\partial/\partial\sigma$): la dépendance de X_T (et V_T) à σ est complexe. Le calcul des poids de Malliavin serait difficile.

En résumé, bien que théoriquement applicable, le calcul de Malliavin pour le modèle de Jacobi est hautement non-trivial à mettre en œuvre explicitement et n'est pas une voie explorée dans [1].

6 Simulation d'une Stratégie de Couverture Dynamique

6.1 Objectifs et Principes du Delta-Hedging

Le Delta-hedging vise à répliquer le payoff d'une option en ajustant dynamiquement une position sur l'actif sous-jacent et un compte de trésorerie. Pour une position courte sur une option, le portefeuille de couverture est long Δ unités de sous-jacent, financées par emprunt. Théoriquement, si le modèle est correct et que la couverture est continue, le P&L de la stratégie est nul. En pratique, la couverture est discrète et le modèle est une approximation, menant à une erreur de couverture.

6.2 Changement de Mesure de Probabilité de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{P}$

Pour évaluer la performance d'une stratégie de couverture de manière réaliste, il est indispensable de simuler l'évolution des actifs financiers sous la mesure de probabilité historique (ou "réelle"), notée $\mathbb{P}$. En effet, c'est sous cette mesure que les prix sont observés sur le marché et que les profits et pertes de la stratégie de couverture se matérialisent. La mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, quant à elle, est une construction mathématique utilisée pour la tarification des actifs dérivés, garantissant l'absence d'opportunités d'arbitrage en postulant que le rendement espéré de tous les actifs est le taux sans risque.

Le passage de la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ à la mesure historique $\mathbb{P}$ s'effectue grâce au **théorème de Girsanov**. Ce théorème permet de modifier le drift des processus stochastiques tout en conservant leur structure de volatilité, en introduisant des termes qui représentent les **primes de risque** associées aux différentes sources d'aléa du modèle.

6.2.1 Dynamique sous la Mesure Risque-Neutre $\mathbb{Q}$

Rappelons la dynamique du modèle de Jacobi sous $\mathbb{Q}$ pour le carré de la volatilité V_t et le log-prix $X_t = \log(S_t)$ (Eqs. (2.1) et (2.2) du document de référence [1], ici référées comme 2.1 et 2.2 dans ce rapport):

$$\mathrm{d}V_t = \kappa(\theta - V_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Q(V_t)}\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{Q}} \tag{6.1}$$

$$\mathrm{d}X_t = (r - \delta - V_t/2)\mathrm{d}t + \rho\sqrt{Q(V_t)}\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{Q}} + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}\mathrm{d}W_{2t}^{\mathbb{Q}} \tag{6.2}$$

où $W_{1t}^{\mathbb{Q}}$ et $W_{2t}^{\mathbb{Q}}$ sont des mouvements Browniens indépendants sous $\mathbb{Q}$.

6.2.2 Introduction des Primes de Risque

Pour passer à la mesure $\mathbb{P}$, nous introduisons des processus $\lambda_1(t, V_t, X_t)$ et $\lambda_2(t, V_t, X_t)$, appelés les **prix de marché du risque** (ou primes de risque instantanées) associés respectivement aux mouvements Browniens $W_{1t}^{\mathbb{Q}}$ et $W_{2t}^{\mathbb{Q}}$. Selon le théorème de Girsanov, il existe des mouvements Browniens $W_{1t}^{\mathbb{P}}$ et $W_{2t}^{\mathbb{P}}$ sous la mesure $\mathbb{P}$ tels que :

$$\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{Q}} = \mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{P}} - \lambda_1(t, V_t, X_t)\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

$$\mathrm{d}W_{2t}^{\mathbb{Q}} = \mathrm{d}W_{2t}^{\mathbb{P}} - \lambda_2(t, V_t, X_t)\mathrm{d}t \tag{6.4}$$

La spécification de λ_1 et λ_2 est cruciale et doit être basée sur des considérations économiques ou des calibrations empiriques. Par exemple, λ_1 pourrait être lié à la prime de risque de la volatilité et λ_2 à la prime de risque de l'actif sous-jacent non expliquée par W_1.

6.2.3 Dynamique sous la Mesure Historique $\mathbb{P}$

En substituant les expressions (6.3) et (6.4) dans les dynamiques sous $\mathbb{Q}$ (6.1) et (6.2), nous obtenons les dynamiques sous $\mathbb{P}$:

Dynamique de la Variance V_t sous $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t &= \kappa(\theta - V_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Q(V_t)}(\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{P}} - \lambda_1(t, V_t, X_t)\mathrm{d}t) \\ &= \left[\kappa(\theta - V_t) - \sigma\sqrt{Q(V_t)}\lambda_1(t, V_t, X_t)\right]\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Q(V_t)}\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{P}} \end{aligned} \tag{6.5}$$

On peut réécrire le drift sous la forme $\kappa_{\mathbb{P}}(\theta_{\mathbb{P}}(V_t) - V_t)$, où $\kappa_{\mathbb{P}}$ et $\theta_{\mathbb{P}}$ peuvent maintenant dépendre de V_t (et potentiellement X_t) si λ_1 n'est pas une simple constante ou proportionnelle à $\sqrt{Q(V_t)}$. Si $\lambda_1(t, V_t, X_t) = \lambda_{1,c}/\sigma\sqrt{Q(V_t)}$, alors le drift devient $\kappa(\theta - V_t) - \lambda_{1,c}$. Plus communément, λ_1 peut être supposé être de la forme $\lambda_1^*(V_t)\sqrt{Q(V_t)}$ ou $\lambda_1^{**}(V_t)V_t$, ce qui modifie κ et θ.

Dynamique du Log-Prix X_t sous $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= (r - \delta - V_t/2)\mathrm{d}t + \rho\sqrt{Q(V_t)}(\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{P}} - \lambda_1(t, V_t, X_t)\mathrm{d}t) \\ &\quad + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}(\mathrm{d}W_{2t}^{\mathbb{P}} - \lambda_2(t, V_t, X_t)\mathrm{d}t) \\ &= \left[(r - \delta - V_t/2) - \rho\sqrt{Q(V_t)}\lambda_1(t, V_t, X_t) - \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}\lambda_2(t, V_t, X_t)\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + \rho\sqrt{Q(V_t)}\mathrm{d}W_{1t}^{\mathbb{P}} + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}\mathrm{d}W_{2t}^{\mathbb{P}} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Le terme de drift de X_t sous $\mathbb{P}$ peut être écrit comme $(\mu(t, V_t, X_t) - \delta - V_t/2)\mathrm{d}t$, où $\mu(t, V_t, X_t)$ est le taux de rendement instantané espéré de l'actif S_t sous $\mathbb{P}$ (avant dividende).

$$\mu(t, V_t, X_t) \coloneqq r - \rho\sqrt{Q(V_t)}\lambda_1(t, V_t, X_t) - \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}\lambda_2(t, V_t, X_t)$$

Notons que $\mu(t, V_t, X_t)$ inclut le taux sans risque r plus des compensations pour les risques associés à W_1 et W_2. Si l'on postule directement un taux de rendement espéré μ_{asset} pour l'actif S_t sous $\mathbb{P}$ (i.e.,

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathrm{d}S_t/S_t] = \mu_{\text{asset}}\mathrm{d}t$), alors le drift de dX_t est $(\mu_{\text{asset}} - \delta - V_t/2)\mathrm{d}t$. Cela impose une contrainte sur la combinaison de λ_1 et λ_2.

6.2.4 Implications pour la Simulation de Couverture

- **Simulation des trajectoires d'actifs**: Pour simuler de manière réaliste l'évolution future de S_t et V_t, les dynamiques (6.5) et (6.6) sous $\mathbb{P}$ doivent être utilisées. Cela nécessite de spécifier ou d'estimer les fonctions de prime de risque λ_1 et λ_2.

- **Calcul des Greeks pour la couverture**: Bien que les trajectoires soient simulées sous $\mathbb{P}$, les Greeks (comme le Delta) utilisés pour construire et rebalancer le portefeuille de couverture doivent toujours être calculés à partir des formules de pricing dérivées sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$. En effet, la stratégie de couverture vise à répliquer un payoff dont la valeur est déterminée par des arguments d'absence d'arbitrage, qui sont formulés dans le monde risque-neutre.

Cette distinction est fondamentale : on observe et on simule les "mouvements réels" sous $\mathbb{P}$, mais on se couvre en utilisant des sensibilités calculées dans le cadre de tarification $\mathbb{Q}$. L'efficacité de la couverture est ensuite jugée sur la base des résultats obtenus sous $\mathbb{P}$.

6.3 Étapes Détaillées de la Simulation de Delta-Hedging

1. **Initialisation de la Simulation**:

   - Définir l'option (e.g., call européen, strike K, maturité T).
   - Fixer les paramètres du modèle de Jacobi (2.1)-(2.2) et les conditions initiales S_0, V_0.
   - Calculer le prix initial de l'option $P_0 = \pi_f(S_0, V_0, T)$ en utilisant la série $\sum f_n l_n$.
   - Le portefeuille de couverture initial :
     - Calculer $\Delta_0 = \Delta(S_0, V_0, T)$.
     - Acheter Δ_0 actions de S_0.
     - Position de cash : $Cash_0 = P_0 - \Delta_0 S_0$. (Le vendeur de l'option reçoit P_0).
   - Valeur du portefeuille de couverture : $H_0 = \Delta_0 S_0 + Cash_0 = P_0$.

2. **Discrétisation Temporelle**: Choisir M intervalles de rebalance de longueur $\Delta t = T/M$. Dates $t_j = j\Delta t$.

3. **Simulation et Rebalance** ($j = 0, \ldots, M-1$): À chaque t_j:

   - Le portefeuille avant rebalance est (Δ_{t_j}actions, $Cash_{t_j}$). Sa valeur est $H_{t_j}^{avant} = \Delta_{t_j} S_{t_j} + Cash_{t_j} e^{r\Delta t}$ (le cash a fructifié depuis t_{j-1} si $j > 0$, ou $Cash_0$ si $j = 0$).
   - Simuler $S_{t_{j+1}}$ et $V_{t_{j+1}}$ à partir de S_{t_j}, V_{t_j} en utilisant une discrétisation des EDS (2.1)-(2.2) (e.g., Euler-Maruyama pour les deux EDS, en s'assurant que V reste dans ses bornes, par exemple par réflexion ou absorption si un schéma simple sort des bornes, bien que le terme

$\sqrt{Q(V_t)}$ aide à cela). Exemple Euler-Maruyama:

$$\Delta W_{1,j}, \Delta W_{2,j} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \text{ i.i.d.}$$
$$V_{t_{j+1}} = V_{t_j} + \kappa(\theta - V_{t_j})\Delta t + \sigma\sqrt{Q(V_{t_j})}\Delta W_{1,j}$$
$$V_{t_{j+1}} = \max(v_{min}, \min(v_{max}, V_{t_{j+1}})) \quad \text{(projection ad-hoc si nécessaire)}$$
$$X_{t_{j+1}} = X_{t_j} + (r - \delta - V_{t_j}/2)\Delta t + \rho\sqrt{Q(V_{t_j})}\Delta W_{1,j} + \sqrt{V_{t_j} - \rho^2 Q(V_{t_j})}\Delta W_{2,j}$$
$$S_{t_{j+1}} = e^{X_{t_{j+1}}}$$

- Calculer le nouveau Delta théorique à t_{j+1}: $\Delta^{th}_{t_{j+1}} = \Delta(S_{t_{j+1}}, V_{t_{j+1}}, T - t_{j+1})$. Le calcul de Δ utilise la série $\sum f_n l_n$, où l_n sont maintenant des espérances conditionnelles $\mathbf{h}(V_{t_{j+1}}, X_{t_{j+1}})e^{(T-t_{j+1})G}\mathbf{e}_{\pi(0,n)}$.
- Coût de rebalance: $(\Delta^{th}_{t_{j+1}} - \Delta_{t_j})S_{t_{j+1}}$.
- Mettre à jour le cash: $Cash_{t_{j+1}} = Cash_{t_j}e^{r\Delta t} - (\Delta^{th}_{t_{j+1}} - \Delta_{t_j})S_{t_{j+1}}$.
- La nouvelle position en actions est $\Delta_{t_{j+1}} \leftarrow \Delta^{th}_{t_{j+1}}$.

4. **Liquidation à la Maturité** $T = t_M$:

- Le portefeuille avant liquidation est $(\Delta_{t_{M-1}} \text{actions}, Cash_{t_{M-1}})$.
- Valeur finale du portefeuille de couverture: $H_T = \Delta_{t_{M-1}} S_T + Cash_{t_{M-1}} e^{r\Delta t}$.
- Payoff de l'option (pour un call vendu) : $P^{opt}_T = (S_T - K)^+$.
- P&L de la stratégie de couverture pour ce chemin : $P\&L = H_T - P^{opt}_T$.

Analyse des Résultats sur N_{sim} Chemins: Calculer la moyenne et la variance du $P\&L$. Une couverture parfaite donnerait $P\&L = 0$. En pratique:

- Erreur de discrétisation temporelle (rebalance discrète).
- Erreur de modèle (le modèle de Jacobi est une approximation de la réalité).
- Erreur d'estimation des paramètres du modèle.
- Erreur de calcul du Delta (troncature de la série, différences finies).
- Erreur de discrétisation des EDS dans la simulation des chemins.

On étudie la distribution du P&L pour évaluer l'efficacité de la couverture.

7 Défis, Limitations et Extensions Futures

- **Complexité Numérique et Stabilité**: Le calcul des moments d'Hermite l_n via l'exponentielle de la matrice G peut être coûteux si la dimension M de la base polynomiale est grande (nécessaire pour un N élevé dans la troncature de série). La stabilité des polynômes d'Hermite de haut degré est aussi un enjeu.

- **Convergence des Séries pour les Greeks**: Si la série pour le prix converge lentement, celle pour les Greeks (qui sont des dérivées) peut converger encore plus lentement ou poser des problèmes. Des bornes d'erreur pour les Greeks seraient utiles.
- **Choix Optimal de $w(x)$**: Le choix de μ_w, σ_w^2 affecte la vitesse de convergence. L'optimalité de ce choix pour les Greeks n'est pas garantie par l'optimalité pour le prix.
- **Extensions Futures**:
  - Étudier rigoureusement la convergence des séries pour les Greeks.
  - Développer des méthodes numériques plus efficaces pour les dérivées de e^{TG} par rapport aux paramètres de G.
  - Appliquer et tester le calcul de Malliavin spécifiquement pour le modèle de Jacobi (travail de recherche original).
  - Conduire des études empiriques approfondies sur la performance de couverture.

8 Conclusion Générale

La différentiation de la série de prix et les différences finies sont les approches les plus directement applicables. La première offre une élégance semi-analytique mais peut devenir complexe pour les sensibilités aux paramètres du modèle affectant la matrice G. La seconde est plus versatile mais potentiellement coûteuse et sujette à des choix de perturbation.

Nous avons également introduit conceptuellement le calcul de Malliavin comme une puissante alternative théorique, tout en soulignant que son application explicite au modèle de Jacobi n'est pas facile et représente une avenue de recherche. Enfin, la simulation d'une stratégie de couverture a été détaillée, montrant comment les Greeks calculés peuvent être mis en œuvre pour évaluer l'efficacité du hedging.

References

[1] Ackerer, D., Filipović, D., & Pulido, S. (2018). The Jacobi stochastic volatility model. *Finance and Stochastics, 22*(3), 667-700. Springer.

Autres articles notement sur le calcul de Maliavin