

A 题:

容斥原理, 答案是 $\lfloor n/a \rfloor + \lfloor n/b \rfloor - \lfloor n/\text{lcm}(a, b) \rfloor$

B 题:

对于每个数字能够转移到的数字有六种, 由于每一步转移代价为 1, 因此直接 bfs 即可

C 题:

想直接看做法的请跳到最后一段, 下面主要是证明这样 $\neg(\neg\Delta\neg)\vdash$ 。

以下为了方便, 用甲代表张老师, 用乙代表石头, 定义根节点在树的第 1 层。

首先不考虑码头和船票, 那么问题就是最基本的树上博弈的问题, 思路就是如果一个点 u 是叶子节点, 那么这个节点是先手必败的; 如果 u 不是叶子节点, 那么如果这个点的儿子 v 全部是先手必胜的, u 就是先手必败的, 否则 u 是先手必胜的。

接着考虑有码头和船票的情况。令一个局面 $\langle a, b \rangle$ 代表甲手上有 a 张船票, 乙手上有 b 张船票, 甲在根节点先手这样一个局面。那么首先可以证明 $\langle a+1, b+1 \rangle$ 的胜负情况和 $\langle a, b \rangle$ 的胜负情况相同。这是因为可以观察到: 在甲没有使用船票的情况下, 乙如果使用船票, 回到根以后甲还是先手, 这样相当于乙白白浪费了一张船票, 因此偶数层的码头都可以当作不存在。继续这个思路, 如果在不考虑码头和船票的情况时 (称为在原图上) 甲先手必胜, 那么甲不可能主动使用船票, 因此只有甲在原图上先手必败的时候才有可能使用船票。那么双方都采取最优走法的情况下, 甲如果能够在奇数层用掉一张船票达到交换先后手的目的, 那么乙也能且必须用掉一张船票重新交换回来, 这样情况就从 $\langle a+1, b+1 \rangle$ 转到了 $\langle a, b \rangle$, 证明完毕。

由于 $\langle a+1, b+1 \rangle$ 的胜负情况等价于 $\langle a, b \rangle$, 因此两边每次同时减一, 那么最后的答案可以归纳为 $\langle a', 0 \rangle$, $\langle 0, 0 \rangle$ 和 $\langle 0, b' \rangle$ (其中 $a', b' > 0$) 这三种情况中的一种。对于 $\langle 0, 0 \rangle$ 和 $\langle 0, b' \rangle$ 这两种情况, 由以上讨论我们知道乙不会主动使用船票, 因此这两种情况的胜负和在原图上的胜负情况是一样的。也就是说, 如果 $a \leq b$, 那么答案就是原图胜负。

还剩下一情况就是 $\langle a', 0 \rangle$, 也就是甲手上的船票大于乙手上的船票。那么这时候如果甲在原图上先手必胜, 那么答案显然就是甲胜; 如果甲在原图上先手必败, 那么甲如果有办法在双方都采取最优策略的情况下通过码头回到根, 这样变成了乙先手, 由于原图上先手必败, 因此乙败甲胜。这种情况的解法是: 由于未使用船票时, 甲只能在奇数层做决定, 因此对于奇数层的码头, 全部连一个假儿子来强制这些码头是先手必胜的点, 然后对于这个新图重新计算一遍胜负即可。而且可以证明, 甲在原图上先手必胜的情况下, 新图上也是先手必胜的。

那么综上所述, 本题的做法是: 如果 $a \leq b$, 那么最终的答案就是原图的胜负; 如果 $a > b$, 那么给所有奇数层的码头全部连一个假儿子构成一个新图, 那么最终的答案就是新图的胜负。

D 题:

DP 题, 令 $f[i][j][k]$ 表示前 i 篇论文, 读了 j 篇, 当前灵感为 k 的情况下所需要的最少时间, 那么 $f[i][j][k] = \min(f[i-1][j-1][k-1] + a[i], f[i-1][j-1][k+1] + [a[i]/2], f[i-1][j][k+3])$, 然后所有 $f[i][j][k] \leq t$ 的解都是可行解, 当中取个最大的 j 就是答案了。

E 题:

将所有题目按照难度排序, 并记录每个题目属于的类别, 设为数组 a 。题目所求即为求最小的一个区间, 在这个区间中包含 1-n 每个题目至少一道。

做法是用 vis 数组记录每道题目出现的次数，初始值为 0。首先将区间左端点设为 $l=1$ ，向右遍历数组直到满足每种类型题目至少出现一次，记此时右端点为 r ，可以证明以 l 为左端点的最小区间为 $a[r]-a[l]$ ，此时，固定右端点，更新 l ，找到以 r 为右端点的能满足题意的最大 l ，更新答案，再固定左端点，不断执行此过程并更新答案，直到 $r=n$ 。