第十讲 一元函数积分学.

一. 研究对象

☆ 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ⇒ $f(x,y)\overset{?}{=}0$. $y=y(x)$.

例10.16 (综合)

☆ 微分方程解函数 $f(x)$ 例10.17 (综合).

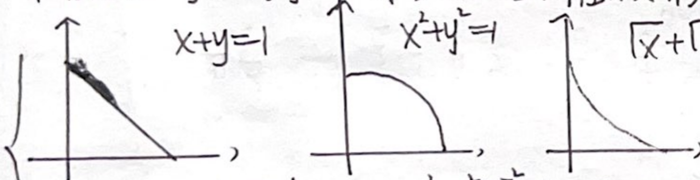
二. 面积.

例10.6 [会画图]

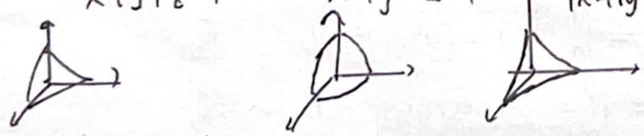
求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与坐标轴所围图形面积.

常见画图

$x+y=1$ $x^2+y^2=1$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$



$x+y+z=1$ $x^2+y^2+z^2=1$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$



非常见图

a. 描特殊点、 例10.5

b. 图像换变换

c. 导数工具

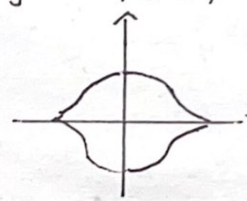
例10.5 $y^2=(1-x^2)^3$ 所围面积

$(0,1)$ $(0,-1)$ $(1,0)$ $(-1,0)$.

关于 x,y 轴对称.

$y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ $y'=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)=-3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y''=-3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}0$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$S=4\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

$\underline{\underline{x=\cos t}}$ $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt$

$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$

极坐标系 → 描点法; 用直角系观点、画极坐标系图.

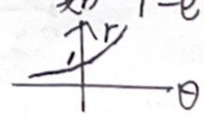
例10.11. $r=a\theta$ $(a>0)$ 第一圈与极轴 S.

① 阿氏螺线. $r=a\theta$ 取 $a=1$.. $r=\theta$

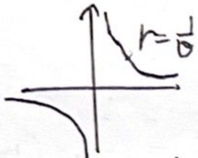
$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2d\theta$

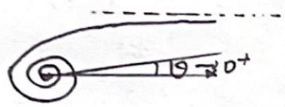
② 对数螺线

$r=ae^{k\theta}$ 如 $r=e^{\theta}$



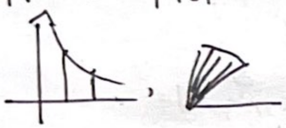
③ 双曲螺线. $r=\frac{a}{\theta}$ 如 $r=\frac{1}{\theta}$





$y=r\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\theta}\xrightarrow[r\to\infty]{\theta\to0^+}1$

例10.22 P181 $r\theta=1$, $\theta=\frac{3}{4}\to\theta=\frac{4}{3}$

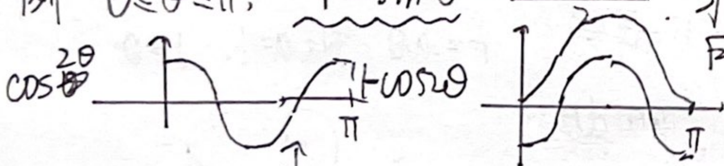


$S=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2 d\theta$.

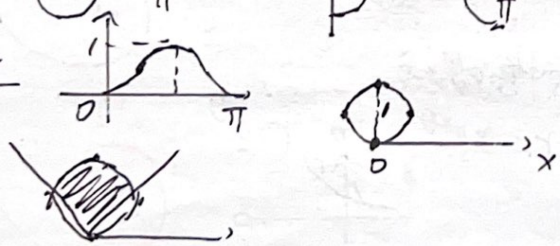
例10.12

曲线 $r=1+\cos\theta$ 与 $\left(\frac{\pi}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线及x轴所围面积.

例 $0\le\theta\le\pi$, $r=\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$ 与 $|x|=y$. 所围面积

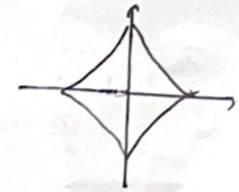


$r=\frac{1-\cos2\theta}{2}$



例10.9

求星形线 $\begin{cases}x=\cos^3t\\ y=\sin^3t\end{cases}$ S.



$S=4\int_0^1 y\,dx$ 换元 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

例 $\int_a^b f(x)dx$.

$\left[\cancel{}=\int_\alpha^\beta f(x)\,d\cos^3t=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right]$

$S=4\int_0^1 f(x)dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3t\cdot3\cos^2t\cdot(-\sin t)dt$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cdot\cos^2t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t-\sin^6t\,dt$

$=12\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{3}{8}\pi$.

三. 弧长

$S=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$ 直

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$ 参

$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\,d\theta$ 极.

例10.19 $\ln(\sqrt{2}+1)$

$y=\int_0^x\tan t\,dt$ $(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 弧长 $\|$

$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

例10.20 ☆

求 $y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt$ 全长

[solution]. $(0,0)$. , $\cos t\ge 0$. →  $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$y'=\sqrt{\cos x}$ $\quad S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=4$?

例10.21

当 $x\ge 0$ 时, $y=\frac{1}{4}\int_0^2 x\sqrt{12-x^2t^2}\,dt$ 全长

[x与t纠缠, 一定要换元]

令 $xt=u$ $\quad t=\frac{u}{x}$

$y=\frac{1}{4}\int_0^{2x}x\sqrt{12-u^2}\,d\frac{u}{x}=\frac{1}{4}\int_0^{2x}\sqrt{12-u^2}\,du$

$12-u^2\ge 0$. $\quad u\le 2\sqrt{3}$. $\quad u\le 2x \Rightarrow x\le\sqrt{3}$

$S=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+[\frac{1}{4}\sqrt{12-4x^2}\cdot 2]^2}\,dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}$ $\quad a=2$

$=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例10.22

求 $r\theta=1$ 自 $\frac{3}{4}$ 至 $\theta=\frac{4}{3}$ 一段弧长 

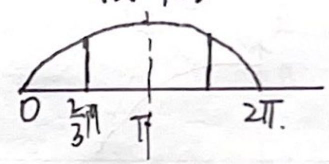
$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

$=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{(\frac{1}{\theta})^2+(\frac{1}{\theta})^4}\,d\theta$

面积

例10.23

$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 求一点 → 旋轮线第一拱分成 1:3



$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\underbrace{x'(t)}_{1-\cos t}]^2+[\underbrace{y'(t)}_{1+\sin t}]^2}\,dt.$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt.$ $\quad 2\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\cancel{2}}$

$=\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=8.$

$2=S_1=\int_0^{t_0}2\sin\frac{t}{2}\,dt\to t_0=\frac{2}{3}\pi$ $\quad\begin{cases}x_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\\ y_0=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$6=S_2=\int_0^{t_1}2\sin\frac{t}{2}\,dt\Rightarrow t_1=\frac{4}{3}\pi.$ $\quad\begin{cases}x_1=\\ y_1=\end{cases}$ 二.

例10.24

l_1 椭圆 $x^2+2y^2=2$ 周长,

l_2 $y_1=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的弧长.

l_3 $y_2=\frac{1}{2}\sin 2x$ $\quad 0\le x\le 2\pi$ 弧长.

$l_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$ $\quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta & 导\ -\sqrt{2}\sin t \\ y = \sin\theta & 导\ \cos t \end{cases}$

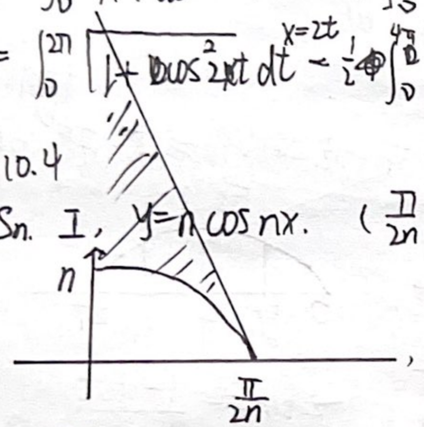
$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$

$l_2 = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$ $\quad \|$

$l_3 = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 2t}\,dt \overset{x=2t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \cdots = \quad l_1=l_2=l_3.$

例10.4

S_n. I, $y=n\cos nx$. $(\frac{\pi}{2n},0)$ 处切. 与~~x轴~~ ~~S~~ y



$\Rightarrow$ 同命题 $y_1=\cos x$ $\quad y_2=\cos 2x$ $\quad y_3=\cos 3x \ldots$

也 $S_1=S_2=S_3$

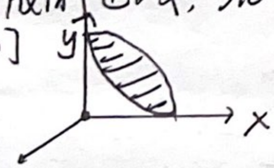
三. 侧面积

例10.27

D: $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\le x\le 1)$. 与 $\begin{cases} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$.

围成的区域, 绕x轴一周, 求 V与S表.

[solution]



$V = V_{大} - V_{小} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi 1^3) - \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx$

$= \frac{2}{3}\pi - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)\,x'(t)\,dt$

$= \frac{2}{3}\pi - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\cdot \sin t\,dt$

$= \frac{2}{3}\pi - 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t - \sin^9 t\,dt$

$= \frac{2}{3}\pi - 3\pi\left(\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{18}{35}\pi$

$S_{表} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) + 2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3 t\cdot\sqrt{[(\cos^3 t)_t']^2+[(\sin^3 t)_t']^2}\,dt$

$\cdots = \frac{16}{5}\pi$

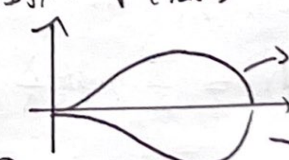
四. 形心

① $f(x)$ ② $\begin{cases} f(x)-g(x) \\ f^2(x)-g^2(x). \end{cases}$

例10.28. ☆ (大纲出题)

$y^2=x^3-x^4$ 所围成的平面图形的形心.

$x=0 \to y=0$
$x=1 \to y=0$



$\to y=\sqrt{x^3-x^4}$

$\to y=-\sqrt{x^3-x^4}$

上下对称, $\bar{y}=0$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\left[\sqrt{x^3-x^4}+\sqrt{x^3-x^4}\right]dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x^3-x^4}+\sqrt{x^3-x^4}\right)dx} = \frac{2\int_0^1 x\sqrt{x^3-x^4}\,dx}{2\int_0^1\sqrt{x^3-x^4}\,dx}$$

五. 旋转体体积.

绕 x 轴: → "πr^2" $\int_a^b \pi y^2 dx$

绕 y 轴: → "$2\pi r$" $\int_a^b 2\pi x \cdot |y| dx$

eg $x\in[0,\pi]$ $y(x)=\sin^4 x$ 绕y轴旋转一周 $V_y=?$

$$V_y=\int_0^{\pi} 2\pi x\cdot \sin^4 x\, dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} x\sin^4 x\, dx \overset{(10)}{=} 2\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\, dx = 2\pi^2\, \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

例 10.14

求曲线 $y=x\sqrt{4x-x^2}$ 在 $[0,4]$ 上与x轴所围图形绕y轴旋转一周所得旋转体体积.

$$V_y=\int_0^4 2\pi x\cdot x\sqrt{4x-x^2}\, dx$$

$$=2\pi\int_0^4 x^2\sqrt{4x-x^2}\, dx = 2\pi\int_0^4 x^2\sqrt{x(4-x)}\, dx$$

$$\underline{\underline{x=4\sin^2 t}}\ 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^4 t\sqrt{4\sin^2 t\cdot 4\cos^2 t}\, d\cdot 4\sin^2 t$$

$$=4\times 16\times 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\cdot 2\sin t\cdot\cos t\, dt$$

$$=64\times 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t(1-\sin^2 t)\, dt.$$

例 10.15 ☆.

求曲线 $y=\sqrt{x(1-x)^9}$ 在 $[0,1]$ 上与x轴所围图形,绕x轴旋转一周所得体积.

$$V=\int_0^1 \pi\, \underline{\underline{x(1-x)^9}}\, dx$$

$$\underline{\underline{令\ 1-x=t}}\ \int_1^0 \pi(1-t)t^9 d(1-t) = \int_0^1 \pi(1-t)t^9\, dt$$

→ 曲线族 ⇒ $y_n=\sqrt{x(1-x)^n}$

$$V_{y_n}=\int_0^1 \pi x(1-x)^n \overset{令1-x=t}{=} \pi\int_0^1 (1-t)t^n dt$$

$$=\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}=x_n$$

⇓

求 $\sum_{n=1}^{\infty} V_{y_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

→ ☆☆☆ (2022).

求 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}V_{y_k}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{(k+1)(k+2)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\cdots+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{2}{n+2})}=e^{-2}$$

例 10.16 ★★★. (与偏微分~~方程~~结合)

设 ~~∂x~~ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y+1)$ 方程

且 ~~$f(x,y)$~~ $f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$

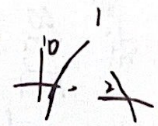
求曲线 $f(x,y)=0$. 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋一周旋转体体积.

[solution] $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y+1)$

积分 $f(x,y) = (y+1)^2 + \varphi(x)$

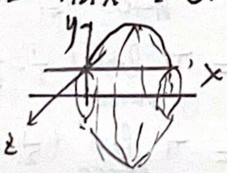
$f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$

$\Rightarrow f(x,y) = (y+1)^2 - (2-x)\ln x$



曲线 $f(x,y)=0 \Rightarrow (y+1)^2 = (2-x)\ln x \geq 0$.

$V = \int_a^b \pi (y+1)^2 dx$



$= \int_a^b \pi (2-x)\ln x \, dx$

$= \pi\int_1^2 (2-x)\ln x \, dx = \cancel{\pi(2-x)\ln x\Big|_1}$

$\pi\left[\ln x\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2$

$\ln x \;(+)\; \frac{1}{x}$

$2-x \quad 2x-\frac{x^2}{2} \;(-)$

$-\pi\int_1^2 2-\frac{x}{2}\, dx$

$= (2\ln 2 - \frac{5}{4})\pi.$

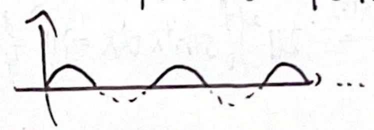
例 10.17 ★★★ (与微分方程结合).

设 $y'+y = \frac{e^{-x}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, 且 $f(\pi)=0$. 则 $y=f(x)$ $x\geq 0$ 绕 x 一周旋转体体积?

[solution].

$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q \, dx + C\right)$

$\cdots \Rightarrow f(x) = e^{-x}\sqrt{\sin x} \geq 0.$



$V_x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \pi \cdot e^{-2x} \sin x \, dx$

令 $x-2n\pi = t$. $\sum_{n=0}^{\infty}\pi\int_0^{\pi} e^{-4n\pi-2t} \sin t \, dt$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \pi e^{-4n\pi}\int_0^{\pi} e^{-2t}\sin t \, dt$

$= \pi\sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\pi} \frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5} = \frac{1}{1-e^{-4\pi}}\frac{\pi(1+e^{-4})}{5}$

$= \frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$

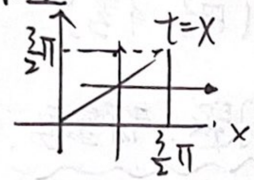
六 平均值

例10.18 ★★★

已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3}{2}\pi]$ 连续，在 $(0,\frac{3}{2}\pi)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$.

(1). 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3}{2}\pi]$ 平均值

$$\bar{f}=\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt\right)dx}{\frac{3}{2}\pi-0}$$



$$=\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx\right)dt$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{\cancel{2t-3\pi}_{-2}}\cdot\cancel{\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)}dt$$

$$=\frac{-1}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{3\pi}$$

(2). 证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3}{2}\pi)$ 内存在唯一零点

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\underbrace{2x-3\pi}_{<0}},\quad x\in(0,\frac{3}{2}\pi)$$

① $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ $f'(x)<0$. $f(0)=0$. 无根

② $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ $f(\frac{\pi}{2})<f(0)=0$.

[$f(\frac{3}{2}\pi)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx \gtrless 0$. 难]

积分中值定理.

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\frac{1}{3\pi},\quad a=0,\ b=\frac{3}{2}\pi$$

∴ 存在 $f(\xi)=\frac{1}{3\pi}>0$. 又∵ $(0,\frac{\pi}{2})$ $f(x)<0$ ∴ $\xi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$

又∵ $f(x)$, $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ ↗.

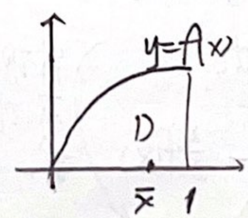
∴ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ 有且仅有一个零点

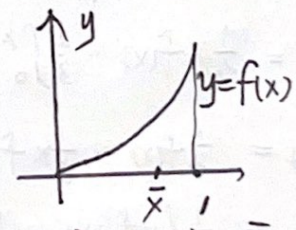
七. 形心.

例10.29. ★★★

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=0$. 均匀平板D 质心.

其占据区域是 $y=f(x)$ 与 $x=1$ 以及 X轴围成图形





(1). 若 $f'(x)>0$ $(0\le x\le 1)$ 则 $\bar{x}>\frac{1}{2}$

(2). 若 $f''(x)>0$ $(0\le x\le 1)$ 则 $\bar{x}>\frac{2}{3}$

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx>0.$$

令 $\boxed{F(x)=\int_0^x tf(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^x f(t)dt}$

则 $F(0)=0$

$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}f(x)$

$= \frac{1}{2}[\underbrace{xf(x)} - \underbrace{\int_0^x f(t)dt}]$

$= \frac{1}{2}[xf(x) - x\cdot f(\xi)] \quad 0<\xi<x$

$= \frac{x}{2}(f(x)-f(\xi)) = \frac{x}{2}f'(\eta)(x-\xi) > 0.$

(2)证 $\int_0^1 xf(x)dx - \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)dx > 0.$

令 $F(x)=\int_0^x tf(t)dt - \frac{2}{3}x\int_0^x f(t)dt$

$F'(x) = xf(x) - \frac{2}{3}\int_0^x f(t)dt - \frac{2}{3}xf(x)$

$= \frac{1}{3}xf(x) - \frac{2}{3}\int_0^x f(t)dt$

发现系数不一样，再求一阶导.

$F''(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}xf'(x) - \frac{2}{3}f(x)$

$= \frac{1}{3}(xf'(x) - f(x))$

用拉氏

$= \frac{1}{3}xf'(x) - \frac{1}{3}[f(x)-f(0)]$

$= \frac{1}{3}xf'(x) - \frac{1}{3}f'(\xi)(x-0)$

$= \frac{1}{3}x(\underbrace{f'(x)-f'(\xi)}_{f''(x)>0}) > 0.$ $F'(x)\uparrow$. $F'(0)=0$

$F(x)>0.$

七 平行截面面积已知的立体体积.（数二）.

（•例 10.30.）

底面 $r=2$ 圆柱体，被一个与圆柱的底面相交，夹角 $\frac{\pi}{4}$，AB平面所截. 求截剩的体积.

（略，不考）.

习题. 都重要.