介质值定理

例 6.4(1).

f(x)在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

证明 存在 $a>0$, 使得 $f(a)=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2>1$ 所以存在 $x_0>0$, 使得 $f(x_0)>1$ 用保号法

又∵ $f(0)=0<1$ 根据连续函数介值定理,

存在 $a>0$. s.t. $f(a)=1$

习 6.3(1).

证明积分中值定理: 若 f(x) 在 $[a,b]$ 连续,

则存在 $\eta\in[a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$.

[证]:

f(x) 连续 → ~~由~~ $\cancel{\int_a^b}$ $\int_c^x f(x)\,dx$ 连续

$= F(x)$.

$$\left[\begin{array}{l} F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a) \\ \int_a^b f(x)\,dx = f(\eta)(b-a) \end{array}\right|$$

$m \le f(x) \le M$. $x\in[a,b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

$$\Longrightarrow \quad m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

由连续函数介值定理: $\eta\in[a,b]$

s.t. $f(\eta)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.