§18.

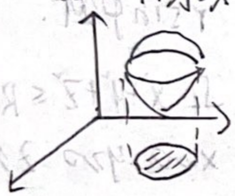
三重积分

▲ 计算 先一后二法

$\Rightarrow$ $z = z_1(x,y)$ 上曲面

$z = z_1(x,y)$ 下曲面

无侧面或侧面为柱面

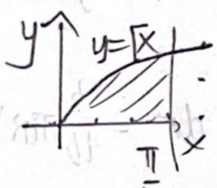


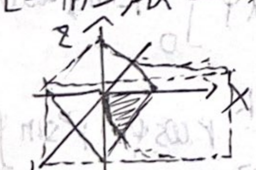
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$$

例18.3

计算 $I = \iiint_\Omega \frac{y\sin x}{x}\,dv$，其中Ω由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，平面 $x+z=\frac{\pi}{2}$，$y=0$，$z=0$ 所围成.

[solution]. 先一后二法 $\longrightarrow$ 关注上下曲面.





$$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pi/2 \\ y=\sqrt{\pi/2} \\ z=0. \end{cases}$$

$$I = \iint_\sigma dxdy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{y\sin x}{x}\,dz = \iint_\sigma \frac{y}{x}\sin x\left(\frac{\pi}{2}-x\right) d\sigma$$

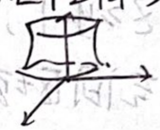
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

▲ 计算 先二后一法，定限截面法

$\longrightarrow$ Ω是旋转体，其旋转曲面方程 Σ: $z=z(x,y)$

如图.

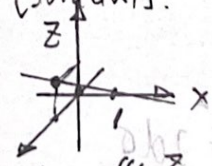


后积先定限，限定截个面

例18.11

求 L 过两点 A(1,0,0) 和 B(0,1,1) 两点，将L绕 z 一周，得到旋转曲面方程，并求形心坐标.

[solution]. l: $1-x=y=z \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$



曲面: $x^2+y^2 = 2t^2-2t+1 = 2z^2-2z+1$

$x^2+y^2 = 2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z\,dv}{\iiint dv} = \frac{\int z\,dz \iint_\sigma d\sigma}{\int dz \iint_\sigma d\sigma} = \frac{\cancel{\int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z^2-2z+1}} \rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho}}{\int_0^2 2z^2-2z+1\,dz} = \frac{7}{5}$$

$\bar{x}=\bar{y}=0$. $\Rightarrow$ 形心 $(0,0,\frac{7}{5})$

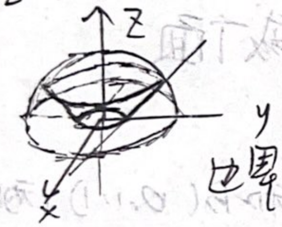
▲ 柱面坐标系

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \iiint_\Omega f(r\sin\theta, r\cos\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$

例 18.5

计算 $I=\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dv$. 其中 Ω 是 yOz 平面上的区域 D: $y^2+z^2\le 5$, $z\ge y-1$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

绕 z 轴旋转一周所得的空间区域.



$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=\sqrt{x^2+y^2}-1 \end{cases} \Rightarrow z=1$

边界: $x^2+y^2=4$

$\therefore I = I_1 + I_2$ ← 采用  + 

$I_1=\iint_{D_1: x^2+y^2\le 1} d\sigma \int_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz$

$I_2=\iint_{D_2: 1<x^2+y^2\le 2} d\sigma \int_{\sqrt{x^2+y^2}-1}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz$

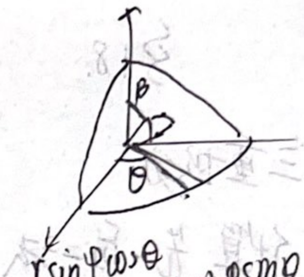
$I=\iint_{D_1} \frac{5-(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma+\iint_{D_2}\left[\frac{5-(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right]d\sigma$

$=\pi\int_0^1 (5-r^2)\,dr+\pi\int_1^2 [(5-r^2)-(r-1)]\,dr = 7\pi$

▲ 球面坐标系

dr, $r\,d\varphi$, $r\sin\varphi\,d\theta$

$r^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr$



按像吧（喇叭花开花）

☆ $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int_{r_1}^{r_2} f(\ ,\ ,\ )\, r^2\sin\varphi\,dr.$

例 18.2

计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)\,dxdydz$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$, $x\ge 0$ $y\ge 0$ $z\ge 0$

[轮换对称性]

$\iiint_\Omega x\,dxdydz=\iiint_\Omega y\,dxdydz=\iiint_\Omega z\,dxdydz$

$\Rightarrow I=3\iiint_\Omega x\,dxdydz$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^R r\sin\varphi\cos\theta\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

改z

$I=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{3}{16}\pi R^4$

☆ 18.12, 18.9

第一型曲线积分

一投二代三计算

$$\left[\begin{array}{l}一投:\\ 二代:\\ 三计算\end{array}\right] \quad ① \int_L \to \int_a^b f[x, y(x)] \cdot \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

$$② \int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t)]\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

$$③ \int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta] \cdot \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\int_L ds} \quad y, z \text{ 同理}$$

例 18.5(3)

$$\oint_L (2yz+2zx+2xy)\,ds.$$

L 是空间圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x+y+z = \frac{3}{2}a \end{cases}$

$$\oint_L (2yz+2zx+2xy)\,ds = \oint_L \left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right) ds.$$

$$= \oint_L \cancel{x+y+z}\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 - a^2\,ds = \frac{5}{4}a^2 \oint_L ds = \frac{5}{4}a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2}$$

例 18.5(4).

$\oint_L (x^2+y^2)\,ds$ 　L 是空间圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0. \end{cases}$

$$\oint_L (x^2+y^2)\,ds = \oint_L (y^2+z^2)\,ds = \oint_L (z^2+x^2)\,ds$$

$$原 = \cancel{\tfrac{1}{3}}\,\frac{2}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{2}{3}\oint_L ds = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{4\pi}{3}$$

例 18.19

悬链线 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ $(a>0)$ 上每一点的密度与该点的纵坐标成反比，且在点 $(0, a)$ 处密度 $= \delta$

求 $x_1=0$ 　$x_2=a$ 之间一段 L 的质量

[solution] $\rho = \frac{k}{y}$ 且 $\frac{k}{a} = \delta \Rightarrow \rho = \frac{a\delta}{y}$

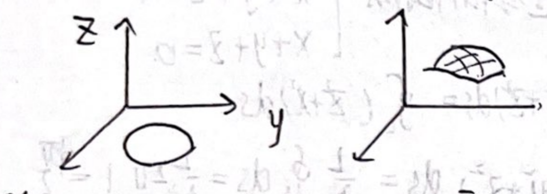
$$m = \int_L \rho\,ds = \int_L \frac{a\delta}{y}\,ds$$

$$= a\delta\int_L \frac{1}{y}\,ds = \cancel{a\delta\int_L \frac{1}{\frac{a}{2}}}$$

$$= a\delta\int_0^a \frac{1}{\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})}\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx.$$

$$y'_x = \left(\frac{a}{2}\right)^2\left[e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} + e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

三. 一型曲面积分. ☆ 大题可能考.



二　　　　三

☆ 所有, 一二型 曲线曲面 积分.
都可将边界方程代入 ☆

轮换对称性: 向哪个面投, 那个面的两个变量可以对换.

① $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$

② 曲面面积 ↓ $f(x,y,z)=1$.

$\iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$

例18.23 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分. 点 $P(x,y,z)\in\Sigma$, π 为 Σ 在 P 处切平面 $\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 距离. 求 $\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\,dS$

① $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1=0.$

$\to \vec{n}=\{x,y,2z\}$

$\to$ 切平面 $x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$

$\to xX+yY+zZ-x^2-y^2-2z^2=0$

$xX+yY+zZ-2=0$

② $d=\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+(2z)^2}}$

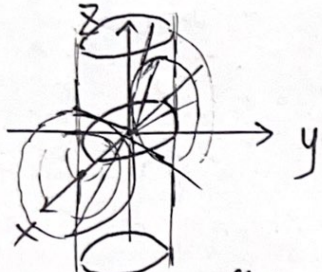
③ $I=\iint_{\Sigma}\frac{z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}{2}\,dS$　　$z=\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}$

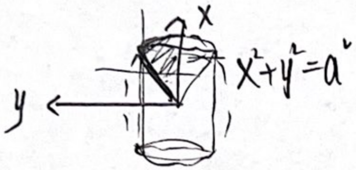
$=\iint_{x^2+y^2\le 2}\frac{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}{\cancel{2\sqrt{(}}}$ $dxdy$　　$dS=\underbrace{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}_{\sqrt{1+\left(\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}}\right)^2+\left(\frac{-y}{4\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}}}\right)^2}}dxdy$

$=\cancel{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{2}}}{2}\cdot\sqrt{4-r^2}\,rdr}$

$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}[4-(x^2+y^2)]\,dxdy$　　$=\frac{3}{2}\pi$

例18.24
求曲面面积.
锥面 $y^2+z^2=x^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 的部分.





$$S = 8S_1 = 8\iint_{\Sigma} dS$$

$$z = (x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 8\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy$$

$$z'_x = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$z'_y = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)$$

$$= 8\iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\, dxdy = 8\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx.$$