§14 二重积分、一、概念、

一、和式极限

一维：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

二维：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i,\ c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$

$=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

例14.1

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 提 $\frac{1}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+\frac{j^2}{n^2})}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$=\iint\limits_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\ln(1+x)\big|_0^1\ \arctan y\big|_0^1$

$=\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}$.

练习 ☆☆☆

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{j}{n}\frac{1}{n^2}=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\ \frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$

二、普通对称性

① 关于y轴对称

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$

② 关于x轴对称

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_D f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y)\end{cases}$

③ 关于原点对称

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_D f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y)\end{cases}$

④☆ 关于 $y=x$ 对称

$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_D f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(y,x)\\ 0, & f(x,y)=-f(y,x)\end{cases}$

与轮换对称性区分！

→ 三. 轮换对称性. ⟸ 主动换 x, y

⟹ 积分与字母无关 } → 轮换对称性

积分区域不变 } → D关于 $y=x$ 对称.

$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(y,x)\,dxdy$$

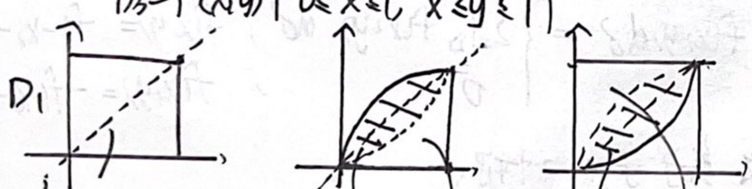
例14.2 ★★★

设 $J_i=\iint_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy$ $(i=1,2,3)$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

$D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{x}\}$

$D_3=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$



关于 $y=x$ 对称

$f(x,y)=\sqrt[3]{x-y}$

$f(y,x)=\sqrt[3]{y-x}$

$f(x,y)=-f(y,x)$

→ 奇偶对称性 → $J_1=0$

$x>y$

→ $x-y>0$

$\sqrt[3]{x-y}>0$

$J_2>0$.

$x<y$

→ $J_3<0$.

例14.3

设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 位于第k象限的部分. 记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)\,dxdy$ $(k=1,2,3,4)$ 则 $I_2>0$?

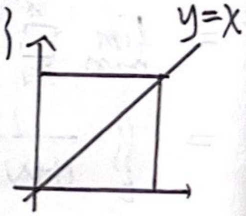
作 $y=x$ $y-x>0$: $y>x$

$I_2>0$.

例14.4

证明 $\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dxdy\ge 2\pi^2$

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$



$$I=\iint_D e^{\sin y}\,dxdy+\iint_D e^{-\sin x}\,dxdy$$

$\boxed{主动换\ x, y}$

$$I=\iint_D e^{\sin x}\,dxdy+\iint_D e^{-\sin y}\,dxdy$$

$$\Rightarrow 2I=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x}+e^{\sin y}+e^{-\sin y})\,dxdy$$

$$\ge\iint_D (2+2)\,dxdy=4S_D=4\pi^2$$

$I\ge 2\pi^2$

[二,续].

⑤ D关于 $y=a$ 对称.

$$\iint f(x,y)\,d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,y)=f(x,\underline{2a-y})\\ 0, & f(x,y)=-f(x,\underline{2a-y})\end{cases}$$

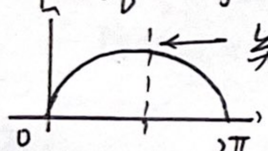
⑥ D关于 $x=a$ 对称

$$\iint f(x,y)\,d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,y)=f(2a-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(2a-x,y)\end{cases}$$

例14.13.

曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与x轴围成,

计算 $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$



← 关于 $x=\pi$ 对称.

$f(x,y)=x+2y \longrightarrow$ 构造 $f(2\pi-x,y)=2\pi-x+2y$

$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(2\pi-x,y)\,dx\,dy$

$\rightarrow I=\frac{1}{2}\iint_D 2\pi+4y\,dx\,dy=\iint_D(\pi+2y)\,d\sigma.$

例14.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$.

证明 $\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$

$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$

$=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{dy}{f(y)}$

$=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy=\!=\!=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\,dx\,dy=I$

$I=\frac{1}{2}\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\,dx\,dy\ge\frac{2}{2}S_D=(b-a)^2$

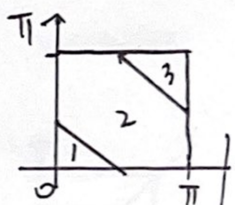
~~例14.6.~~

5. 周期性. ☆☆☆

设例14.6.

设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$,

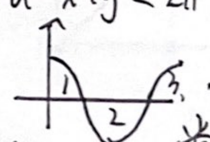
计算 $I=\iint_D|\cos(x+y)|\,d\sigma$.



$I=\iint_D|\cos(x+y)|\,d\sigma$

$0\le u=x+y\le 2\pi$

$=\int_0^\pi dx\int_0^\pi|\cos(\overset{a}{x}+y)|\,dy$



常规做法

$=\int_0^\pi 2\,dx$ $\quad|\cos(a+y)|$ 是 $|\cos y|$ 的平移

$=2\pi$ $\quad\int_0^\pi|\cos(a+y)|\,dy=\int_0^\pi|\cos x|\,dx=2$

注: $I=\iiint_D|\cos(x+y+z)|\,d\sigma$

$\rightarrow I=2\pi^2$