§3 一元函数微分学的概念

一、定义（求导数）

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$ ☆

增量式　　　差值式

(1) $f'(x_0)$ 是 f 在 x_0 处的瞬时变化率

☆(2) $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$（左导 = 右导）

(3) 高阶导数 $f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$

二、出题方式

① 分段函数（含绝对值函数）在分段点、

[3.1～3.5 + 3.8]

小结：① 判断某点是否可导，可以用定义：$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

② 函数自变量 x 的取值范围也是个不等式，看到不等式想到可能有夹逼定理。

③ 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则 $f(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导的充要条件。

② 抽象函数在一点（x_0 或 x）

[例3.4, 3.7] [例3.6]

小结：

① $f(x+y)=\cdots$ 直接代

$f(xy)=\cdots$

$\Rightarrow x+\Delta x=x(1+\frac{\Delta x}{x})$ 再代入

见例3.6.

② 注意隐藏条件：比如：$f(xy)=yf(x)+xf(y)$

令 $x=1\Rightarrow f(1)=0$.

比如 $f(\lambda)-\lambda f(1)>0$

$\Rightarrow \frac{f(\lambda)}{\lambda}>\frac{f(1)}{1}$

③ 可以与 限制条件结合 $\Rightarrow$ 例3.7

③ 四则运算中的特殊点、

太复杂的点、 $f=f_1+f_2$ 例3.9

$f=f_1f_2\cdots f_n$ 例3.10

不成立的点、 例3.11

小结 ① $f=f_1+f_2$：分别拆开运算，f_i 用定义法或直接求导。

② $(uv)'=uv'+u'v$ 只在成立的点、使用算。在不成立的点，用导数定义计算。

三 微分定义

$dy=y'(x)dx$　　（例3.12）

$dy|_{x=x_0}=y'(x_0)dx$

例3.1 下列函数在 $x=0$ 处不可导的是.

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\sin|x|}{x}=0$ 无穷小 有界

∴可导

(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}-0}{x}=0$. 可导.

(C) $f(x)=\cos|x|$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}=0$.

(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{|x|}{2}}{x}$ ← 不存在

例3.2 ☆☆☆

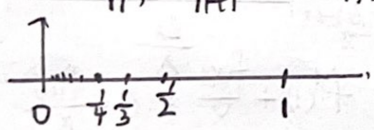
已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le0 \\ \frac{1}{n}, & \boxed{\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}},\ n=1,2,\dots \end{cases}$ 则.

[典型的综合题].

($x=0$ 是第几类间断点 / $f(x)$，$x=0$ 可导/不可导/连续？‥)

[分析]. $f(x)=x$，$x\le0 \Rightarrow f'_-(0)=1$

$f(x)=\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$，$n=1,2,\dots$



$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\boxed{看到\ a<b<c}$! ⇒ 夹逼!! $f(x)=\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$

$\frac{n}{n}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}<\frac{n+1}{n}$

$n\le\frac{1}{x}<n+1$

$f(x)$ 在 $x=0$ 可导 ⇐ 1 ⟶ 1 ⟵ 1

例3.3

已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt}{x}, & x\ne0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，$f'(0)$.

[分析]. 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}2e^{(2x)^2}-e^{x^2}=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}(2e^{3x^2}-1)$

$=1(2-1)=1=a$.

2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(2e^{4x^2}-e^{x^2})-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(2e^{4x^2}-2)-(e^{x^2}-1)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot4x^2-x^2}{2x}=0$.

[特殊]

例3.4

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则 $f(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的（　　）.

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)|x-a|-0}{x-a}=\pm0$

$F(x)=\begin{cases} f(x)(x-a) & x>a \\ 0 & x=a \\ f(x)(a-x) & x<a \end{cases}$

2). 可导 $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)|x-a|}{x-a}=\pm f(x)\Rightarrow f(a)=0$.

⇒ 充要条件.

☆☆☆ 例13.5 ← 可以根据例13.4结论.

函数 $F(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点个数为.

$F(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$

$x=0$ $x=1$ $\cancel{x=-1}$ $\Rightarrow$ 2个

例13.8

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数 则 $f(x)$ 在 $x=0$.

$f(0)=0^2\cdot \underbrace{g(x)}_{有界}=0$ $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=0$. 连续

$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\overset{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{2}=0.$

$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0.$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 连续，可导.

例13.6 (抽象函数). ☆☆☆ 12'

已知 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 对任意正的 x,y 均成立，且 $f'(1)=e$，则 $f(x)$ 的极小值为( ).

可以分两步 ①证明: $f'(x)+(-\frac{1}{x})f(x)=e$, $x>0$.

②求 $f(x)$ 的极小值 (→ 第15讲).

x_0 I

$f'(x_0)$ $\exists x_0\in I$ ← 特指

$f'(x)$ $\exists x\in I$ ← 任指

$f(xy)=yf(x)+xf(y)$

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

☆ $=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}$

① $f(x+y)=\cdots$ 直接代

② $f(xy)=\cdots$

$x+\Delta x=x(1+\frac{\Delta x}{x})$ 再代入

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+(1+\frac{\Delta x}{x})f(x)-f(x)}{\Delta x}$ Δx无穷小·有界$(\frac{1}{x})$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+\frac{\Delta x}{x}f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}+\frac{f(x)}{x}$ 常数

$=f'(1)+\frac{f(x)}{x}=e+\frac{f(x)}{x}$

$\Rightarrow f'(x)+(-\frac{1}{x})f(x)=e$

令 $x=1$ $f(y)=yf(1)+f(y)$

$\Rightarrow yf(1)=0$

$\Rightarrow f(1)=0.$

隐藏条件

例3.7

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0$，

求 $f(0)$，并讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，求 $f'(0)$.

[分析]. 结合第一讲 脱帽法

若 $\lim\limits_{x\to} f(x)=A \Rightarrow f(x)=A+\alpha \quad \lim\limits_{x\to}\alpha=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0+\alpha \qquad \lim\alpha=0.$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}=\cos x-\sin x+\alpha\cdot x$$

$$f(x)=\ln(\cos x-\sin x+\alpha\cdot x)$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leftarrow f(0)=\lim_{x\to} f(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x-\sin x+\alpha\cdot x)}{x} \qquad =\lim\ln(\underset{1}{\cos x}-\underset{0}{\sin x}+\underset{0}{\alpha\cdot x})$$

$$=0.$$

$$\overset{\ln u\sim u-1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\sin x+\alpha\cdot x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}-\sin x+\alpha x}{x}=-1$$

例3.4

(设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则 $f(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的（ ） 充要条件，见例)

例3.9 ☆ $\Rightarrow f=f_1+f_2$

设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ 求 $f'(1)$

△ $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} \Rightarrow \ln f_1=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln x-(x-1)\right]$

求导

$$\frac{f_1'}{f_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2x}-1\right]$$

$$f_1'|_{x=1}=f_1|_{x=1}\cdot\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2x}-1\right]_{x=1}=0$$

△ $f_2(x)=\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f_2'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}-0}{x-1}\overset{等}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}{x-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例3.10 ☆☆☆

设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，则 $f'(0)=$?

直接带值

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}-0$$

$$=(-1)(-2)\cdots(-(n-1))=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

3.11 ☆

设$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\sin x$，求$f'(x)$

【分析】: $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sin x+x^{\frac{2}{3}}\cdot\cos x \quad (x\neq 0)$

$x=0$时:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}\overset{1}{\frac{\sin x}{x}}-0}{}=0.$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\sin x+x^{\frac{2}{3}}\cos x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

3.12

设$y=\arctan\frac{2x}{1+x^2}$，求$dy$

$$\left(\arctan\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$=\triangle$

$dy=\triangle dx.$