§2 数列极限

一、定义与使用

1. 定义.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$ 当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

2. 使用　常数 ① 唯一，有界，保号号，收敛的必要条件.

↓所有子列收敛于 A

例2.2 ☆ [单调有界准则].

设 $\{a_n\}\downarrow$ $\{b_n\}\uparrow$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 则.

1) $C_n=\{a_n-b_n\}$ 有界
$\Downarrow$ $a_n\downarrow$ $(-b_n)\downarrow$
$C_n\downarrow$
有界且↓，极限存在 $=A$

2). $a_n \geqslant A+b_n \geqslant A+b_1$ (下界) $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在　a.

$b_n \leqslant a_n-A \leqslant a_1-A$ (上界) $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在　b.

3). $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n \Rightarrow a=b$.

例2.3. [保号性].

$\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 则. $\Rightarrow \{a_n\}$ 当 $n>N$ 时 +.

$\Rightarrow$ "$\{a_n\}$ 自某项起同号"

例2.4 [收敛的必要条件]

A: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则 $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}}_{\text{子列}}=a$ ✓

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ✓

C. —— x_n 则. —— x_{3n} —— x_{3n+1} $=a$ ✓

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ✗.

二、存在性与计算 ☆☆☆

1. 归结原则的使用 (变量连续化).

① 归结原则　$f(x)$ $\underset{x_0-\delta}{\longleftarrow}\ \underset{x_0}{\circ}\ \underset{x_0+\delta}{\longrightarrow}$ 有定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall$ 以 x_0 为极限的 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$
均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

② 考点1：当 $x\to0$ 时，取 $x_n=\frac{1}{n}$，那若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=A$.　[例2.5]

例2.5

$\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})$

$\boxed{\begin{array}{l}\frac{1}{n}\longrightarrow x\\ n\to\infty\longrightarrow x\to0\end{array}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$

③ 考点2. 当 $x\to a$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

例2.6. ☆

设 $a_1>0$，$\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，$n=1,2,\cdots$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求其值　　$\boxed{\ln(1+x)<x \quad x\neq 0}$

$a_1>0$，设 $a_{k-1}>0$，则

$a_k=\ln(1+a_{k-1})>0 \Rightarrow \{a_n\}$ 有下界 0.

$a_{n+1}=\ln(1+a_n)<a_n \Rightarrow \{a_n\}\downarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\text{存在}}{=} a$

$a=\ln(1+a) \Rightarrow a=0.$

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}a_n}{a_n-a_{n+1}}$　　"给出 $\{a_n\}$ (某个) 以 a 为极限的" 要，求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$

$\lim\limits_{x\to a=0} \dfrac{\ln(1+x)\,x}{x-\ln(1+x)} \overset{\text{泰勒}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

2. 直接计算法

例12.7

设 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}\right)$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

$a_{n+1}=a_n^2+a_n>a_n$　$\{a_n\}\nearrow$

若 $\{a_n\}$ 有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

则 $A=A^2+A \Rightarrow A=0$.　$\because a_1=3 \ \therefore a_n>3$. 矛盾，$\therefore$ 无上界

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

(2) $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n(1+a_n)}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{1+a_n}$

$\therefore \dfrac{1}{1+a_n}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

$\Rightarrow$ 原 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{3}$

3. 定义法 ("先斩后奏")，可以先求出 a

构造 $|x_n-a|$，证 $|x_n-a|\to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

例12.8 已知 $x_1=\frac{1}{2}$，$2x_{n+1}+x_n^2=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\boxed{\text{证求极限，一定要先确认极限存在，要不就是用定义法}}$

$\begin{cases} 2x_{n+1}+x_n^2=1 \\ 0<x_{n+1}=\dfrac{1-x_n^2}{2}<\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$2A+A^2=1$

$A=\sqrt{2}-1$ ← 先斩后奏　草稿纸

作 $|x_{n+1}-A|=\left|\dfrac{1-x_n^2}{2}-\dfrac{1-A^2}{2}\right|=\dfrac{1}{2}|x_n^2-A^2|$

$=\dfrac{1}{2}|x_n+A|\,|x_n-A|$　　$x_n+A<\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1$

$<\dfrac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\right)}_{<1}|x_n-A|<\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2|x_{n-1}-A|$

$\cdots<\underbrace{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\right)^n}_{0}\underbrace{|x_1-A|}_{\text{常数}}=0.$

$\therefore A=\sqrt{2}-1$

例12.9

设 $x_{n+1}=\cos x_n$，$n=1,2,\cdots$ $x_1=\cos x$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且其极限是方程 $\cos x-x=0$ 的根

[分析]. 令 $f(x)=\cos x-x$ $\left| \begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}<0. \end{array}\right.$

$f'(x)=-\sin x-1$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]<0$，$f(x)\downarrow$.

∴方程 $\cos x-x=0$ 根有唯一性，记为 $a\in[0,\frac{\pi}{3}]$

构造 $\cancel{|x_n-a|}$ $|x_{n+1}-a|=|\cos x_n-\cos a|$

$\overset{中}{=}|\sin\xi||x_n-a|$

$a\in[0,\frac{\pi}{3}]$，$x_n\in[0,\frac{\pi}{3})$ $\quad$ $0\le x_2=\cos x_1\le 1<\frac{\pi}{3}$

$\therefore \xi\in(0,\frac{\pi}{3})$.

$<\sin\frac{\pi}{3}|x_n-a|$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}|x_n-a|<(\frac{\sqrt{3}}{2})^2|x_{n-1}-a|$

$\cdots<(\frac{\sqrt{3}}{2})^n|x_1-a|\overset{\lim n\to\infty}{=}0.$

$n\to 0$ $|x_1-a|\to 0.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

4. 单调有界准则 ~~…~~.

证明: $\left|\begin{array}{l} 单调 \quad x_{n+1} 与 x_n. \\ 有界. \ \exists M>0, |x_n|\le M. \ 或 \ A\le x_n\le B. \end{array}\right.$

$x_n=\frac{A_n}{B_n}$.

您证: ① 用已知不等式.

- $\sin x\le x$ $\quad x_{n+1}=\sin x_n\le x_n.$ $\quad \{x_n\}\downarrow.$
- $e^x\ge x+1$ $\quad x_{n+1}=e^{x_n}-1\ge x_n$ $\quad \{x_n\}\uparrow$
- $x-1\ge\ln x$ $\quad x_{n+1}=\ln x_n+1\le x_n$ $\quad \{x_n\}\downarrow$
- $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ $\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+3-x_n}{2}=\frac{3}{2}$, $\{x_n\}$ 有上界

例12.10. 已知 $(2+\sqrt{2})^n=A_n+\sqrt{2}B_n$,

A_n, B_n 为整数，$n=1,2,3\cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$

[分析]. $\boxed{双面项 \Rightarrow 单面项}$

$(2+\sqrt{2})^1=2+1\cdot\sqrt{2}$ $\quad A_1=2 \quad B_1=1$

$(2+\sqrt{2})^2=4+4\sqrt{2}+2=6+4\sqrt{2}$ $\quad A_2=6 \quad B_2=4$

$A_n, B_n>0.$

$\frac{A_n}{B_n}=x_n$ $\quad \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}=x_{n+1}$

$A_{n+1}+\sqrt{2}B_{n+1}=(2+\sqrt{2})^{n+1}=(A_n+\sqrt{2}B_n)(2+\sqrt{2})$

$=2A_n+2B_n+\sqrt{2}(A_n+2B_n)$

$\Rightarrow A_{n+1}=2A_n+2B_n \quad B_{n+1}=A_n+2B_n$

$$\Rightarrow \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{2A_n+2B_n}{A_n+2B_n} = \frac{2\frac{A_n}{B_n}+2}{\frac{A_n}{B_n}+2}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{2x_n+2}{x_n+2} = 2-\frac{2}{x_n+2} < 2$$

$x_n>0$ $x_n<2$ (有界).

$$x_{n+1}-x_n = \left(2-\frac{2}{x_n+2}\right)-\left(2-\frac{2}{x_{n-1}+2}\right)$$

$$= \frac{2(x_n-x_{n-1})}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)} \quad >0$$

∴ $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号. $\longleftrightarrow$ 单调.

$\cancel{x_2=x_1}$

$\Rightarrow \lim = A$

$$A = \frac{2A+2}{A+2} \Rightarrow A=\sqrt{2}.$$

★例2.11

(1) 设 $f(x)=x+\ln(2-x)$ 求 $f(x)$ 最大值

$$f'(x) = 1+\frac{-1}{2-x} = \frac{x-1}{x-2} \overset{令}{=} 0. \Rightarrow x=1.$$

当 $x<1$ 时 $f'(x)>0$ 当 $1<x<2$ 时 $f(x)<0$.

$\Rightarrow x=1$ 为唯一极大值点，即为最大值.

∴ $f(x)_{max} = f(1)=1$

(2) 设 $x_1=\ln 2$, $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\ln(2-x_i)$. $n=2,3,\cdots$

证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其极限值

$$x_n = \ln(2-x_1)+\ln(2-x_2)+\dots+\ln(2-x_{n-1})$$

$$x_{n+1} = \ln(2-x_1)+\ln(2-x_2)+\dots+\ln(2-x_{n-1})+\ln(2-x_n)$$

$\Rightarrow x_{n+1}=x_n+\ln(2-x_n) \le 1$ $\{x_n\}$ 有上界. ①

$x_{n+1}-x_n = \ln(2-x_n)$, $x_n\le 1$, $2-x_n\ge 1$, $\ln(2-x_n)\ge 0$.

单增 ②

$\Rightarrow$ 极限存在 A.

$A-A=\ln(2-A) \Rightarrow A=1$

★例2.12.

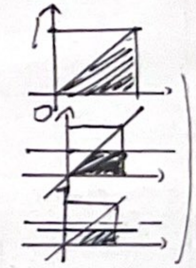
设 $x_1=1$, $x_n=\int_0^1 \min\{x,x_{n-1}\}dx$, $n=2,3,\cdots$

证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其极限值.

[分析]. eg. $x_2=\int_0^1\min\{x,1\}dx = \frac{1}{2}$

$x_3=\int_0^1 \min\{x,\frac{1}{2}\}dx = \frac{3}{8}$

$x_4 = \int_0^1\min\{x,\frac{3}{8}\}dx =$ ___.



设 $0<x_{n-1}<1$ 则.

$$x_n = \int_0^1\min\{x,x_{n-1}\}dx = \int_0^{x_{n-1}}x\,dx + \int_{x_{n-1}}^1 x_{n-1}\,dx$$

$$= \frac{x_{n-1}^2}{2} + x_{n-1}(1-x_{n-1})$$

$$= x_{n-1}-\frac{1}{2}x_{n-1}^2 \quad >0. \quad \cancel{<x_{n-1}}$$

∵ $0<x_{n-1}<1$

∴ $\frac{1}{2}x_{n-1}^2 < x_{n-1}$.

∴ 上界下界都有 且 $x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}x_{n-1}^2<0$. 单减

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,记为A.　$A=\int_0^1 \min\{x, A\}\,dx$

$A = A-\frac{1}{2}A^2 \Rightarrow A=0$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = 0$.

例 2.13.

设$\{x_n\}$: $x_1>0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$

证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

[分析]. $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0} = e^{\xi}$,

~~$x_{n+1} = \ln(e^{x_n}-1) - \ln(x_n)$~~　$\xi\in(0,x_n)$

∴ $x_{n+1} = \xi < x_n$, $x_1>0$ ⇒ 单减有下界　存在$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$

$Ae^A = \cancel{A}e^A - 1 \Rightarrow A=0$.

例2.14

(1). 证明 $x=2\ln(1+x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根ξ.

$f(x)=2\ln(1+x)-x$

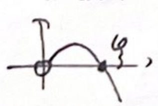
$f'(x)=\frac{2}{1+x}-1 \stackrel{令}{=} 0 \Rightarrow x=1$.

$f(1)=2\ln2-1>0$.

~~$\lim f(x)=$~~ $f(x)$在$(0,1)\uparrow$, $(1,+\infty)\downarrow$

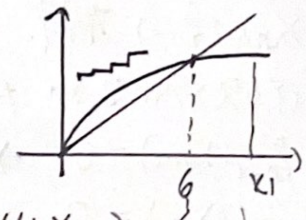
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(1+x)-x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.



(2). 对于(1)中的ξ, 任取$x_1>\xi$, 定义$\boxed{x_{n+1}=2\ln(1+x_n)}$,

$n=1,2,\cdots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$



$\xi = 2\ln(1+\xi)$.

当$x_1>\xi$,

$x_{n+1}-x_n = 2\ln(1+x_n) - 2\ln(1+x_{n-1})$

$= 2\ln\frac{1+x_n}{1+x_{n-1}} = 2\ln\left(\frac{1+2\ln(1+x_{n-1})}{1+x_{n-1}}\right)$

∵ 当$x>\xi$, $f(x)\downarrow$ ∴ $2\ln(1+x_{n-1}) < x_{n-1}$

∴ $x_{n+1}-x_n<0$. 单减

可知 $x_1>x_2>\xi$

设 $x_{n-1}>x_n>\xi$ 则 $x_n > 2\ln(1+x_n) = x_{n+1}$, 即$x_n>x_{n+1}>\xi$

∴单减有下界ξ. ⇒ 记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 则 $a=2\ln(1+a)$

由(1) ⇒ $\xi=2\ln(1+\xi)$.

⇒ $a=\xi$.

2.15 [方程列]

(1). 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ (n为大于1的整数)

在$(\frac{1}{2},1)$内有且仅有一个实根.

[分析]

令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, $n=2,3,\cdots$

$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2^n}<0$

$f(1)=n-1>0$.

$\exists x_n\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $f_n(x_n)=0$

$\Rightarrow f(x)\uparrow$ ⇒ 唯一

(2) 记(1)中实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限

$x_n\in(\frac{1}{2},1)$ 有界.

比较 x_{n+1} 与 x_n 大小

$f_{n+1}(x_{n+1})=0$ $\quad x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^{n}+\cdots+x_{n+1}=1$

$f_n(x_n)=0$ $\quad x_n^n+\cdots+x_n=1$

$x_{n+1}^{n+1}>0.$

$$1=\sum_{i=1}^{n}x_n^i>\sum_{j=1}^{n}x_{n+1}^j$$

令 $g(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x$

$g'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+1>0$

$\therefore g(x)\uparrow$

$\Rightarrow \because g(x_n)>g(x_{n+1})$ $\quad\therefore x_n>x_{n+1}$ 单减

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在记为 A

$A+A^2+\cdots+A^n=1$ $\quad \frac{A-A^n}{1-A}=1$

$\frac{1}{2}<x_n<x_2<1$ $\quad \frac{A-0}{1-A}=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

x_2：常数；为了保证 $A^n=0$

[注] 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{1^\infty}{=} e^{-1}\neq 0.$ ☆

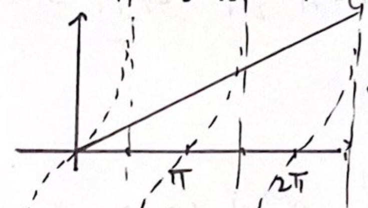
$\frac{n}{n+1}$ 也 <1，但 $0^n\neq 0$.

$A<1$ 不能保证 $A^n=0$，比如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}$

所以要用"x_2"来挡一下.

例2.16 [区间列] ☆☆☆

(1) 证明 $\tan x=x$ 在 $(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$ 内存在实根 ξ_n，$n=1,2,3\cdots$



⇐（证每一段区间上都有交点）.

令 $f(x)=\tan x-x$ $\quad x\in[n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$

$f(n\pi)=0-n\pi<0.$ $\quad \lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-}f(x)=+\infty.$

$\exists x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$，使 $f(x_n)>0.$

$\exists \xi_n\in(n\pi,x_n)\subset(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$ 使 $f(\xi_n)$ 存在

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)$ （⇐可猜出极限为 π，$\tan\pi=0$）

(1) $\tan\xi_n=\xi_n$ $\quad$ 为了构造 $\tan\xi_n$，$\tan\xi_{n+1}$

$$\tan(\xi_{n+1}-\xi_n)=\frac{\tan\xi_{n+1}-\tan\xi_n}{1+\tan\xi_{n+1}\tan\xi_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\tan(\xi_{n+1}-\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_{n+1}-\xi_n}{1+\xi_{n+1}\xi_n}=0,\ \theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$$

$\xi_{n+1}\in((n+1)\pi,(n+1)\pi+\frac{\pi}{2})$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty.$

$\xi_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$

$\frac{\pi}{2}<\xi_{n+1}-\xi_n<\frac{3}{2}\pi$ ① $\quad \lim\limits_{n\to\infty}1+\xi_{n+1}\xi_n=+\infty$ ②

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)=\pi$$

5. 夹逼准则

难点：放缩，$y_n \le x_n \le z_n$. 1) 已知不等式；2) 题设引导 [常见]

方法：1) 基本放缩方法

- $n \cdot u_{min} \le u_1+u_2+\cdots+u_n \le n \cdot u_{max}$.（无穷项相加）
- $u_i \ge 0$ 时 $1 \cdot u_{max} \le u_1+u_2+\cdots+u_n \le n \cdot u_{max}$.（有限项相加）

2) 题设给出

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}}$，$a>b>0$.

$\Rightarrow 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b} \Rightarrow \sqrt[n]{1\cdot(\frac{1}{b})^n} < \sqrt[n]{(\frac{1}{a})^n+(\frac{1}{b})^n} < \sqrt[n]{2\cdot(\frac{1}{b})^n}$

$\frac{1}{b} \to \frac{1}{b} \leftarrow \frac{1}{b}$

例2.17.

已知 $f_n(x)= C_n^1\cos x - C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$.

[分析]. $(1-\cos x)^n$

$= C_n^0 1^n(-\cos x)^0 + C_n^1 1^{n-1}(-\cos x)^1+\cdots+C_n^n 1^0(-\cos x)^n$

$= 1 - f_n(x) \Rightarrow f_n(x) = 1-(1-\cos x)^n$ ⇐ 函数列

(1) 证明方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仅有一个根 x_n，$n=1,2,3,\cdots$

$f_n(0)=1 \quad f_n(\frac{\pi}{2})=0 \overset{介}{\Rightarrow} \exists x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$.

$f_n'(x) = -n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0 \Rightarrow f_n(x)\downarrow \Rightarrow x_n$ 唯一.

得到 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\arccos\frac{1}{n})$

$f_n(\arccos\frac{1}{n}) = 1-(1-\frac{1}{n})^n$ $\boxed{u^v \overset{1^\infty}{=} e^{v(u-1)}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\arccos\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}[1-(1-\frac{1}{n})^n] = 1-\frac{1}{e} > \frac{1}{2}$

保号性 $\Rightarrow f_n(\arccos\frac{1}{n}) > \frac{1}{2} = f_n(x_n)$

(3) 设 $x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$ 满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$)

$0<\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$

$\exists N>0, n>N$ 时 $f_n(\arccos\frac{1}{n})>\frac{1}{2} = f_n(x_n)$

$\Rightarrow \arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{\pi}{2}$

例2.18

(1) 证明 $x\to 0^+$ 时，不等式 $0<\tan^2 x - x^2 < x^4$ 成立.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4} = \frac{2}{3}<1$

($\tan x+x \sim 2x$，$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$)

$\therefore x\to 0^+$ 时 $0<\tan^2 x-x^2<x^4$

121. 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

$\tan^2 x - x^2 < x^4$

$$\frac{1}{n+k} < \tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}} < \frac{1}{n+k}+\frac{1}{(n+k)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$$

其中 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}<n\cdot\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx}=\ln 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right)=\ln 2$$

$\Rightarrow$ 夹逼 $\lim_{n\to\infty} x_n=\ln 2$

用函数结合	2.11 2.14 2.15 2.17	习2.4 习2.7
积分	2.12 2.18	习2.2
中值	2.13	习2.5
方程列	2.14~2.17	
区间列	2.16	习2.6
极限	2.18	