二、函数极限的计算

1). 判别是七种未定式

2). 化简

3). 洛必达 & 泰勒

4). 无穷小(大)比阶 [题型]

简单下放

$$\underbrace{\frac{0}{0}\quad\frac{\infty}{\infty}\quad\infty\cdot 0}_{一组}\qquad \underbrace{\infty-\infty}_{二组}\qquad \underbrace{\infty^0\quad 0^0\quad 1^\infty}_{三组}$$

二组: ~~有分母~~ 通分 / 无分母 创造分母去

三组: $u^v=e^{v\ln u}$

~~而且~~七种未定式是间接给出的

判别是未定式 ← 题目给的不一定就是未定式,

例1.9 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x>0, y>0$.

求 $g(x)=\underset{\substack{y\to+\infty\\ \downarrow}}{\lim} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

[x is considered as a constant].

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}\right)-\left(\frac{1}{\arctan x}\right)+\lim_{y\to+\infty}\frac{y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty} y\cdot\frac{\pi x}{y}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)\overset{\infty-\infty}{\underset{通分}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\arctan x-x)+\pi x^2}{x\cdot\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\pi x^2}{x^2}=\pi$$

1. 化简先行.

等价无穷小、1) 常见等价无穷小、(略)

2) 找"带头大哥". $\boxed{\alpha+\beta,\ \alpha=o(\beta) \to \beta}$

[无穷小比阶]

例1.6. 当 $x\to0$ 时, $(3+2\tan x)^x-3^x$ 是 $3\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}$ 的( ).

$$=\lim_{x\to0}3^x\left[\left(1+\tfrac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\tfrac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[e^{x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0}x\ln\left(1+\tfrac{2}{3}\tan x\right)=\lim_{x\to0}x\cdot\tfrac{2}{3}\tan x\sim\boxed{\tfrac{2}{3}x^2}$$

$u^v \to e^{v\ln u}$

$3\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}$: $3\sin^2 x\to 0$, $\cos\frac{1}{x}$ 振荡

"找大哥": $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cos\frac{1}{x}}{3\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{1}{x}=0.$

$\therefore x^3\cos\frac{1}{x}\sim o(3\sin^2x)$

$\therefore 3\sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}\sim 3\sin^2x\sim\boxed{3x^2}$

同阶非等价

例1.16.

当 $x\to0$ 时, $e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小量,则 n=?

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left(e^{x\cos x^2-x}-1\right)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x^2-x}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{x^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^{n-1}}=\alpha\cdot x^0\Rightarrow n=5$$

(2) 恒等变形.

• **换元**: eg. $x=\frac{1}{t}$ eg. 见到 $\int f(x-t)$, 令 $x-t=u$.

[例1.7 1.8 1.18] eg. $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2t^2}\,dt \rightarrow$ 见到 xt, $xt=u$.

eg. 若 $x^2-t^2=u$.

• **提公因式**

• **中值定值**

例1.8. 换元.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\, e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$$ [这里x认为成常数!]

令 $x-t=u$, ~~$x=u+t$~~ $t=x-u$

$$= \lim \frac{\int_x^0 \sqrt{u}\, e^{x-u}\, d(-u)}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x \sqrt{u}\, e^{-u}\,du}{\sqrt{x^3}}$$ [必考]

$$\overset{洛}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}$$

← **通分** [例1.9]

← • $u^v = e^{v\ln u}$ [例1.6]

• **因式分解** $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

[1.7] (eg. $A^3-E=(A-E)(A^2+AE+E)$

如果 A^3是0. $A-E$ 可逆 A^2+A+E 可逆.)

• **分子有理化** [见根号差, 用有理化]

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

• 中值定理★ [例1.10解法一, 例1.11].

[1.10][1.11]☆ 拉式定理 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ } 1° f与f'

☆ N-L公式 $\int_{x_0}^x f'(t)\,dt = f(x)-f(x_0)$ } 2° $f-f$

[1.13]☆ 积分中值定理 $\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\xi)(x-x_0)$

$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$. } 1° 见到抽象 $\int_a^b f(x)dx$, 用一下再说

2° 往往是为了统一函数形式.

☆ 泰勒公式处理高阶问题

例1.10 [2018] —— 具体型用"f−f" ⇒ 拉氏

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

$\arctan(x+1)-\arctan x = f'(\xi)\cdot 1 = \frac{1}{1+\xi^2}$, $x<\xi<x+1$

$\therefore$ 原式 $= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2} < \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$

原式 $= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2} > \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(1+x)^2} = 1.$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x] = 1$

例1.13.

设$f(x)$连续,且$f(0)\neq0$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$. 上拆积分 换元

[分析] 直接求导形 $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$

拆分求导形 $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$
$= x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$

换元求导形 $\int_0^x f(x-t)\,dt \xlongequal[t=x-u]{令x-t=u} \int_0^x f(u)\,du$

solution.

原 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du} \xlongequal{洛} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,du + xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du + xf(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,du}{\int_0^x f(u)\,du + xf(x)} \xlongequal{积分中} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\xi)\cancel{(x-0)}}{f(\xi)\cancel{(x-0)}+f(x)\cdot\cancel{x}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \xi\to0}}\dfrac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\dfrac12$

<3> 及时提出极限存在且不为0因式

例1.12 设$x\neq0$时, $f(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{\frac x2}}{2}\right)^{\frac1x}$, 记 $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $I_3=\lim\limits_{x\to0}f(x)$, 则( ). $I_1\ I_2\ I_3$大小关系

[分析]. $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{\frac x2}}{2}\right)^{\frac1x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-\frac1x}}_{1}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+e^{\frac x2}\right)^{\frac1x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\left(1+e^{-\frac x2}\right)\right)^{\frac1x} = e\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\underbrace{\left(\tfrac{\sqrt e}{e}\right)^x}_{0}\right]^{\underbrace{\frac1x}_{0}}$ $0<\frac{\sqrt e}{e}<1$

$=e$

$I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{\frac x2}}{2}\right)^{\frac1x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\tfrac12\right)^{\frac1x}}_{1}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{\frac x2}\left(1+e^{\frac x2}\right)\right]^{\frac1x}$

~~$=e\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\left(\tfrac{\sqrt e}{e}\right)^x\right]^{\frac1x}$~~ $=\sqrt e\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\left(\tfrac{\sqrt e}{e}\right)^{-x}\right]^{\frac1x}=\sqrt e$

$I_3=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{\frac x2}}{2}\right)^{\frac1x}$ $\boxed{\lim u^v \xlongequal{1^\infty} e^{\lim v(u-1)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac1x\cdot\frac{e^x-1+e^{\frac x2}-1}{2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1)}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{\frac x2}-1)}{2x}} = e^{\frac12+\frac14}=e^{\frac34}$.

$\therefore\ I_1>I_3>I_2$

2. 洛必达法则

$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ [例1.10解法二]

$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ [例1.13]

$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\int_a^{\varphi(x)}f(t)\,dt}{\int_a^{\psi(x)}g(t)\,dt}=\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f[\varphi(x)]}{g[\psi(x)]}\cdot\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$

三条件. 1) $\frac00$, $\frac\infty\infty$ 2). 分子、分母均可导.

3). 结果为 $0, C(\neq0), \infty$. 有效(洛后)

3. 泰勒公式

1. 十大公式.

2. 展开原则.

① $\frac{A}{B}$ 型. 适用于"上下同阶"原则.

② A−B型. 适用于"幂次最低"原则

1). 如果是 A+B, 写成 A−(−B). 展开到系数不同的最低次幂.

2). eg. $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$ 系数不同了.

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$\Rightarrow \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

4. 无穷小比阶

$$\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{若}{=} \begin{cases} 0 \\ c \neq 0. \\ \infty. \end{cases}$$

f(x)是g(x)的高阶无穷小

— — — — 同 — —

— — — 低 — —

[1.16~1.18]

例1.7. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

[分析] 令 $\sqrt[6]{\cos x} = t$. $\Leftarrow$ $\sqrt[2]{\ }$ 与 $\sqrt[3]{\ }$ 最小公倍数 $\sqrt[6]{\ }$ ☆

$\therefore \cos t = t^6. \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^{12}$

$$原 = \lim_{t\to1} \frac{t^3 - t^2}{1 - t^{12}} \overset{洛}{=} \lim_{t\to1} \frac{3t^2 - 2t}{-12t^{11}} \overset{洛}{\cancel{=}} \cancel{\lim_{t\to1} \frac{6t-2}{}} = -\frac{1}{12}$$

$$\boxed{\lim u^v \overset{1^\infty}{=\!=} \lim e^{v(u-1)}}$$

例1.14

若 $\lim_{x\to0}(e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ 则 a=? b=?

[分析]. $\lim_{x\to0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=\!=} \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}(e^x + ax^2 + bx - 1)}$

$$= e^{\lim_{x\to0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+ax^2}{x^2} + a + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to0} \frac{(1+b)x + (\frac{1}{2}+a)x^2 + o(x^2)}{x^2}} = 1$$

$\Rightarrow b = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$

例1.15.

设 $f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $x\to0$. $f(x), g(x)$ 是等价无穷小, 求 a, b, k.

[分析] $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\lim_{x\to0} \frac{x + a\ln(1+x) + bx\sin x}{kx^3} = \lim_{x\to0} \frac{(a+1)x + (b - \frac{a}{2})x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3)}{kx^3}$$

kx^3 ← 保隐3次方

$$\frac{a}{3} = k, \quad a+1 = 0, \quad b - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

例11.17. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量

$$\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt \qquad \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt \qquad \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$$

排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小量，排列次序？

方法一：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\alpha}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan\sqrt{x^2})\cdot 2x}{\cos x^2}=0 \Rightarrow \beta=o(\alpha)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[\sin(\sqrt{x})^3]\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\underset{\to 1}{\cos x^2}}=0 \Rightarrow \gamma=o(\alpha)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\beta}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[\sin x^{\frac{3}{2}}]\cdot 2x^{-\frac{1}{2}}}{(\tan\sqrt{x^2})\cdot 2x}=\infty \Rightarrow \beta=o(\gamma)$$

次序： α,γ,β

方法二 洛必达成立条件下，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha'=\cos x^2 & \lim\limits_{x\to 0}\alpha'=1 & (0\text{阶}). \\ \beta'=\tan\sqrt{x^2}\cdot 2x & \lim\limits_{x\to 0}\beta'=0 & (2\text{阶}). \\ \gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot 2x^{-\frac{1}{2}} & \lim\limits_{x\to 0}\gamma'=0 & (1\text{阶}). \end{array}\right\} \begin{array}{c}\alpha',\gamma',\beta' \\ \downarrow \\ \alpha,\gamma,\beta\end{array}$$

例11.18 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{(1+\frac{1}{x})^{\alpha}-(1+\frac{1}{x})}=A\neq 0$. 的充要条件.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{(1+\frac{1}{x})^{\alpha}-(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x})^{\alpha}-(1+\frac{1}{x})}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^{\alpha-1}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(\alpha-1)t}=\frac{1}{\alpha-1}\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq 1$$

例11.11 [中值定理—抽象型]

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)] \quad 求 c.$$

[分析]. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}[x-(x-1)]\cdot f'(\xi) \quad \xi\in(x-1,x)$

$$=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-c+2c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}=e \Rightarrow c=\frac{1}{2}.$$