§5. 一元函数微分学的应用 — 几何应用

一、极值及单调性. [例5.7~5.13]

1). 费马定理：极值则导数为0.

2). 左 $f'(x)<0$ 右 $f'(x)>0$. $x=x_0$ 极小..

3) 二阶可导 $f'(x_0)=0$ $f''(x_0)>0$. 极小.

4) n阶可导 $1\sim n-1$ 阶全 $=0$ $\wedge$ $f^{(n)}(x_0)>0$. 极小.
且 n是偶数.

二、拐点与凹凸性. [例5.16~5.14]

凹:  凸 

三、渐近线. [例5.17~5.18]

铅垂 $x\to x_0^{\pm}$ $=\infty$

水平 $x\to\pm\infty$ $=C$

斜 $\frac{f(x)}{x}\to k$ $f(x)-kx\to b$.

四、求最值 略

五、曲率: $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ 曲率半径 $\frac{1}{k}=R$.

六、相关变化率:

$$\frac{dA}{dB}=\frac{dA}{dC}\cdot\frac{dC}{dB}$$ [例5.24]

例1 5.3 ☆

曲线极坐标方程 $r=1-\cos\theta$

求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程

[分析]. $r=1-\cos\theta$

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=-\frac{\cos\theta-\cos2\theta}{\sin\theta-\sin2\theta}$$

[注: $r=1+\cos\theta$, $k=-\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}$]

$k_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1 \Rightarrow y-y_0=k(x-x_0)$

$x_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt3}{2}-\frac34$ 切 $y-(\frac12-\frac{\sqrt3}{4})=x-(\frac{\sqrt3}{2}-\frac34)$

$y_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac12-\frac{\sqrt3}{4}$ 法 $y-(\frac12-\frac{\sqrt3}{4})=-(x-(\frac{\sqrt3}{2}-\frac34))$

例1 5.1

$f(x)$ 是周期为5的连续函数,它在 $x=0$ 某邻域内:

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求 $y=f(x)$ 在 $(6,f(6))$ 处切线方程

$f(6)=\underline{f(1)}$ $\quad f'(6)=\underline{f'(1)}$

$\lim_{x\to0}$: $f(1)-3f(1)=0+\alpha(x)$

$\Rightarrow f(1)=0$.

$$\lim_{x\to0}f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=\lim_{x\to0}\alpha(x)+8x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=8.$$

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin}$$

$$=8+\lim_{x\to0}\frac{3f(1-\sin x)+f(1)}{\sin x}=8+\lim_{x\to0}\frac{3f(1-\sin x)-3f(1)}{\sin x}$$

$\Rightarrow 4f'(1)=8 \quad \Rightarrow f'(1)=2$

切线方程 ~~$x-6=2(y-0)$~~ $y-0=2(x-6)$

例1 5.2

$$\begin{cases} x=\int_0^{1-t}e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$$ 在(0,0)切线方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t\ln(2-t^2)+\frac{t^2\cdot(-2t)}{2-t^2}}{e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)}$$

$y=0\Rightarrow t=0$ 或 $t=\pm1$

$\int_0^1 e^{-u^2}du\neq0$ $\quad\int_0^2 e^{-u^2}du\neq0$. $\Rightarrow t=1$

$k=\frac{0+(-2)}{1\cdot -1}=2 \qquad y=2x$

例1 5.4 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos xy=e-1$ 所确定,则 $y=f(x)$ 在(0,1)处法线方程.

$e^{2x+y}(2+y')+\sin xy\cdot(y+xy')=0.$

$x=0\ y=1 \qquad y'=-2 \qquad y-1=-2(x-0).$

例5.5 ☆☆☆

曲线 $(2-x^{n^2})y=1$ 在(1,1)处切线与x轴交点为 $(x_n, 0)$，$n=2,3,\dots$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\frac{n^2}{2}}=$?

$\boxed{\text{截距，可正可负}}$

[分析、函数族.(曲线族).

$y=\dfrac{1}{2-x^{n^2}}$ $\quad y'=-\dfrac{1}{(2-x^{n^2})^2}\cdot(-n^2)x^{n^2-1}$

$y'|_{x=1}=n^2=k(n)$.

切线族为 $y-1=k(n)\cdot(x-1)=n^2(x-1)$

$y=0 \Rightarrow x_n=1-\dfrac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{n^2}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^2}{2}(x_n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^2}{2}(-\frac{1}{n^2})}=e^{-\frac{1}{2}}$

(u^v), 1^∞ = $e^{v(u-1)}$

例5.6

证明 曲线弧 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0, y>0, a>0)$.

的切线在两坐标轴上的截距平方之和为常数

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$ $\quad x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$

$\Rightarrow y'=-\dfrac{x_0^{-\frac{1}{3}}}{y_0^{-\frac{1}{3}}}$，$x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，$y-y_0=-\dfrac{x_0^{-\frac{1}{3}}}{y_0^{-\frac{1}{3}}}(x-x_0)$.

$\begin{cases}\text{令 } x=0 & y_n=\dfrac{x_0^{\frac{2}{3}}}{y_0^{-\frac{1}{3}}}+y_0=y_0(y_0^{-\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}})\\ \text{令 } y=0 & x_n=\dfrac{y_0^{\frac{2}{3}}}{x_0^{-\frac{1}{3}}}+x_0=x_0(x_0^{-\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})\end{cases}$

$x_n^2+y_n^2=\cancel{x_0^2+y_0^2+2x_0^{\frac{2}{3}}y_0+2y_0^{\frac{2}{3}}x_0+y_0x_0^{\frac{4}{3}}+x_0y_0^{\frac{4}{3}}}$

$=y_0^2(y_0^{-\frac{4}{3}}+x_0^{\frac{4}{3}}+2y_0^{-\frac{2}{3}}x_0^{-\frac{2}{3}})+x_0^2(x_0^{-\frac{4}{3}}+y_0^{\frac{4}{3}}+2x_0^{-\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}})$

$=y_0^{\frac{2}{3}}(1+y_0^{\frac{4}{3}}x_0^{\frac{4}{3}}+2x_0^{-\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}})+x_0^{\frac{2}{3}}(1+y_0^{\frac{4}{3}}x_0^{\frac{4}{3}}+2y_0^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{2}{3}})$

$\sim ?\quad =(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^3$

例5.7 ☆

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$ 所确定.

在 $t=0$ 处，函数 $y=y(x)$

[分析] $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}\dfrac{10t+4t+4t}{2+1}=\dfrac{18t}{3}, & t\geq 0.\\ \dfrac{10t+4t-4t}{2-1}=\dfrac{10}{3}t, & t<0.\end{cases}$

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{dy}{dx}>0$. $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{dy}{dx}<0$. $\Downarrow$

导数不存在, ×

或 $\begin{cases}x=3t\\ y=9t^2\end{cases}$ $t\geq 0 \Rightarrow y=x^2$ $\quad\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$ $t<0 \Rightarrow y=x^2$

$\Rightarrow x=0$时 可导 极小.

例5.8

求 $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$ 的极值

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-(x-1)}, & x\geq 1 \\ xe^{(x-1)}, & x\in[0,1) \\ -xe^{(x-1)}, & x<0 \end{cases}$$

$x\geq 0 \quad x<0.$

$x\geq 1 \quad x<1.$

$$f'(x)=\begin{cases} e^{1-x}(1-x), & x>1 \\ e^{x-1}(x+1), & x\in(0,1) \\ -e^{x-1}(x+1), & x<0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=0.\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=e^{-1}$ $\neq$ $x=0$时不可导

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} e^{1-x}(1-x), & x\geq 1 \\ e^{x-1}(x+1), & x\in(0,1) \\ -e^{x-1}(x+1), & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

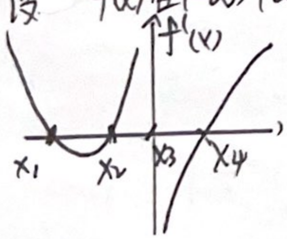
令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	↗	e^{-2}	↘	0	↗	1	↘
$f'(x)$	$+$	0	$-$	×	$+$	0	$-$
		极大		极小		极大	

$f(-1)=e^{-2}$ 是极大. $f(0)=0$ 是极小. $f(1)=1$ 是极大.

例5.9

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, (2)个极小, (2)个极大.



[分析] $f'(x)$ $\begin{cases} =0\text{的点} \\ \text{不存在的点} \end{cases}$

x_1 极大 x_2 极小 x_4 极小

x_3 极大

例5.10.

$f(x)=\int_0^x \frac{(t+3)(t^2-1)}{e^{t^2}\sqrt{1+t^2}}dt$, 则 $f(x)=$? 极大 ? 极小.

$f'(t)=\frac{(t+3)(t-1)(t+1)}{e^{t}\sqrt{1+t^4}} \overset{令}{=} 0.\quad t_1=-3 \quad t_2=1 \quad t_3=-1$

-3 极小, 极大, 1 极小.

$\Rightarrow$ 2极小 1极大

例5.11

求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

$=\int_1^{x^2}x^2e^{-t^2}-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

$=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

$f'(x)=x^2e^{-t^2}\cdot 2x+\underbrace{2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt}-2x\cdot x^2\cdot e^{-t^2}$

$=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt \overset{令}{=} 0.\Rightarrow x=0,\ x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗
		0				0	

$\int_0^1 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t^2}d(t^2)=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^{u}du=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

例5.12.

$x^3+y^3-3x+3y-2=0$. 确定 求 $y(x)$ 极值.

$3x^2+3y^2\cdot y'-3+3\cdot y'=0 \Rightarrow y'=\frac{1-x^2}{1+y^2} \overset{令}{=} 0 \Rightarrow x=\pm 1$, $1+y^2>0$

后略

例5.13.

设f(x): $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，$f''(x)$

(1). 如果f(x)在点 $x=c$ $(c\neq 0)$处有极值，证明它是极小值.

$\Downarrow$

$f'(c)=0.$

$$cf''(c)+3c\cdot 0=1-e^{-c}$$

$$\Rightarrow f''(c)=\frac{1-e^{-c}}{c}$$

$c>0.$ $f''(c)>0$

$c<0.$ $f''(c)>0$ $\Rightarrow$ 极小值

(2). 如果f(x)在x=0处有极值 极大/小?

$\downarrow$

$f'(x)=0.$ 本来有 $(-3[f'(x)]^2)$

$$\lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}(-1)}{1}=1>0\Rightarrow \text{极小值}$$

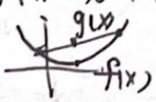
例5.15.

f(x) 二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x.$

在[0,1]上 ( )

[分析]. $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\sim\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$

$$g(x)=f(0)\underbrace{(1-x)}_{\lambda_1}+f(1)\cdot\underbrace{x}_{\lambda_2}\sim f((1-x)0+1\cdot x)=f(x).$$



当 $f''(x_0)\geqslant 0$，$f(x)\leqslant g(x)$.

$\uparrow$

凹

例5.14.

$$y(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ (3-x)\sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

凸 凹区间与拐点.

$$y'(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{-x^2}, & x<0\\ -\sqrt{x}+\frac{3-x}{2}x^{-\frac{1}{2}}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$y''(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}+2e^{\frac{1}{x}}x^{-3}=e^{\frac{1}{x}}(x^{-4}+2x^{-3})\\ -x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(x-3)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4}(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})\end{cases}$$

令 $y''(x)=0$ $x=-\frac{1}{2}$

当x>0时

$y''(x)<0$ 凸

$\lim\limits_{x\to 0^+}y'(x)=0.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}y'(x)=+\infty.$ $\Rightarrow f'(0)$不存在

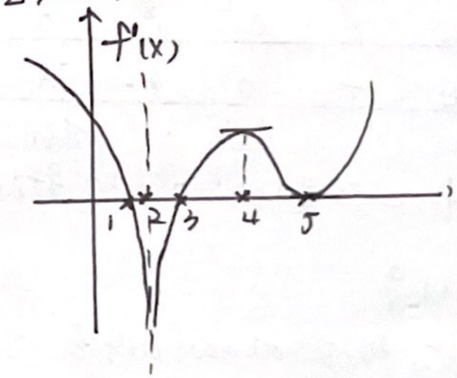
当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 凸

$x\in(-\frac{1}{2},0)$ 凹

拐点: $(0,0)$，$(-\frac{1}{2},e^{-2})$.

例5.16.

f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 连续:



一阶导 =0 x_1 x_3 x_5

不∃ x_2

二阶导 =0 x_4 x_5

不∃ x_2

极值点 (f'(x)变号) $\Rightarrow$ x_1 x_3 2个

拐点 (f''(x)变号) $\Rightarrow$ x_2 x_4 x_5 3个

例 5.17

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x\left[\frac{1}{x}\right]$，求渐近线条数？

$=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x-5)(x+1)}+x\left[\frac{1}{x}\right]$

step1 定义域：$x\neq 0$.

① $x>1$. $0<\frac{1}{x}<1$. $\left[\frac{1}{x}\right]=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]=0$.

② $x\leqslant -1$ $-1\leqslant\frac{1}{x}<0$, $\left[\frac{1}{x}\right]=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]=+\infty$.

③ $x\in(0,1)$ $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$

$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. (夹逼)

step2.

(1) 铅垂：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\overset{+\infty}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{>0}{\sqrt{(x-5)(x+1)}}+\underset{0}{x\left[\frac{1}{x}\right]}\right|=+\infty$. $x=0$ 是一条铅垂

(2) 水平：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{\frac{1}{x}}\underset{\infty}{\sqrt{(x-5)(x+1)}}+x\left[\frac{1}{x}\right]\right|=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left|e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x-5)(x+1)}+x\left[\frac{1}{x}\right]\right|=+\infty$ 无水平

(3) 斜：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x-5)(x+1)}+x\left[\frac{1}{x}\right]}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x-5)(x+1)}}{x}+\overset{0}{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x-5)(x+1)}-x\right]=-1$

$y=x-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\overset{-1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}}{-x}-1$

$=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x\left[\frac{1}{x}\right]+2x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x\right]+x\overset{0}{\left[\left[\frac{1}{x}\right]+1\right]}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right]+e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\overset{1}{e^{\frac{1}{x}}}\left[\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x}\right)}_{(1+x)^a-1}+\underset{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\right]$

$=-1-2+1=+1$ $y=-2x+1$

例 5.18.

求曲线 $x^3+y^3=3xy$ 的斜渐近线方程

1) 设 $y=ax+b$.

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 令 $\frac{y}{x}=u$ 则 $y=ux$

$x^3+u^3x^3=3ux^2 \Rightarrow 1+u^3=\frac{3u}{x}$

$\Rightarrow u^3=\frac{3u}{x}-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3u}{x}-1=-1 \Rightarrow a=-1$

2) $b=\lim\limits_{x\to\infty}y-ax=\lim\limits_{x\to\infty}y+x$ 令 $y+x=t$ 则 $y=t-x$

$\Rightarrow x^3+(t-x)^3=3x(t-x) \Rightarrow t^3+3x^2t-3t^2x=3xt-3x^2$

$\overset{\div x^2}{\Longrightarrow}\frac{t^3}{x^2}+3t-\frac{3t^2}{x}=\frac{3t}{x}-3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}t=\frac{1}{3}\left[\overset{0}{\frac{3t+3t^2-t^3}{x}}-3\right]$

$=-1$

3) $\Rightarrow y=-x-1$

例5.20

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\, dt$

(1) 证明 f(x) 是以π为周期的周期函数.

(2) 求 f(x) 的值域.

(1) $f(\pi+x)=\int_{\pi+x}^{\frac{3\pi}{2}+x}|\sin t|dt=\int_{\pi+x}^{\frac{3}{2}\pi+x}|\sin(t+\pi)|dt$

$\overset{令t+\pi=u}{\underset{t=u-\pi}{=}}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$

(2) 由(1) 只需研究 $[0,\pi]$ 即可

令 $f'(x)=0$ $f'(x)=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|-|\sin(x)|$

驻点: $=|\cos x|-|\sin x|=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}$ $x_2=\frac{3}{4}\pi$

端点: $x_3=0$ $x_4=\pi$.

$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}$ $f(\frac{3}{4}\pi)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|dt=2-\sqrt{2}$

$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=1$ $f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|dt=1$

$\therefore [2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

例5.21.

$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 在(1,1) 曲率半径?

[solution] $6y^2\cdot y'-4y\cdot y'+2y+2xy'-2x=0.$

$\Rightarrow y'=\frac{2x-2y}{2x+6y^2-4y}=\frac{x-y}{x+3y^2-2y}\overset{x=1,y=1}{=}0.$

$y''=\frac{(1-y')(x+3y^2-2y)-(x-y)(1+6y\cdot y'-2y')}{(x+3y^2-2y)^2}$

$x=1, y=1, y'=0$ $\frac{(1-0)(1+3-2)-0}{(1+3-2)^2}=\frac{1}{2}$

$R=\frac{1}{k}=\frac{1}{\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}}=2$

例1.5.22

求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 在 $M(\frac{\pi}{2},a)$ 处曲率.

$\frac{dy}{dx}=\frac{d[a\sin\theta(1+\cos\theta)]/d\theta}{d[a\cos\theta(1+\cos\theta)]/d\theta}=\left.\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-(\sin\theta+\sin2\theta)}\right|_{(\frac{\pi}{2})}=1$

$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\left.\frac{\left(\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}\right)'_\theta}{(\cos\theta+\cos2\theta)'_\theta}\right|_{(\frac{\pi}{2})}=-\frac{3}{a}$

$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}a}$

例5.23 ☆☆☆

求曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点，并在该点附近用 $y=ax^2+bx+c$ 近似代替 $y=\ln x$，求 a,b,c.

① $y'=\frac{1}{x}$ $y''=-\frac{1}{x^2}$

$$k=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$k'(x)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)^2}=-\frac{3}{4}\frac{-3x^{-\frac{5}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

令 $k'(x)=0 \Rightarrow 3x^{-\frac{5}{2}}=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k'<0$. $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$; $k'>0$.

$\Rightarrow k_{max}=k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

② $y_1=y_2$ $y_1'=y_2'$ $|y_1''|=|y_2''|$ $(\Leftarrow k_1=k_2)$

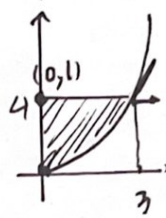
$$\left.\begin{cases}\ln x=ax^2+bx+c\\ \frac{1}{x}=2ax+b\\ -\frac{1}{x^2}=2a\end{cases}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=2\sqrt{2}\\ c=-\frac{1}{2}(\ln 2+3)\end{cases}$$

例5.24

已知L: $y=\frac{4}{9}x^2\ (x\geq 0)$. $O(0,0)$ $A(0,1)$.

P动点，S是OA与AP及L所围面积，

P至$(3,4)$ $v_x=4$. 求 $\frac{ds}{dt}$.



$P(m,\frac{4}{9}m^2)$

$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dm}\cdot\frac{dm}{dt}$， $k=\frac{\frac{4}{9}m^2-1}{m-0}$

$y-1=k(x-0)$

$y=\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)x+1$

$$S=\int_0^m\left[\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right]x+1\,dx$$

$$=\frac{2}{27}m^3+\frac{m}{2}$$

$\frac{ds}{dt}=\left(\frac{2}{9}m^2+\frac{1}{2}\right)4=\frac{8}{9}m^2+2$ $m=3$时 $\frac{ds}{dt}=10$.

	☆	☆	☆	☆	☆	☆☆☆
重点	5.2	5.4	5.5	5.8	5.10	5.14