第八讲

一、相关三代

例8.1

$$\int_0^x \underbrace{t}_{奇}\underbrace{[f(t)+f(-t)]}_{偶}\,dt$$

奇 —— 偶.

设奇偶数 f(x) 有连续导数.

则 $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)]\,dt$ 为 ___ 偶数

$\boxed{外偶则偶}$ 偶 奇.

$\int_0^x du\int_0^u f'(t)\,dt$ 是 ___ 函数, f(x) 奇.

f(x)奇, $\int_0^u f'(t)\,dt$ 偶奇 $\int_0^x g(u)\,du$ 偶.

f'(x)偶 g(u)

例8.2

f(x). T.

则 $\int_a^x f(t)f'(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,df(t) = f^2(t)\Big|_a^x - \int_a^x f(t)\,df(t)$

以T为周期 = 原 = $\frac{1}{2}f^2(t)\Big|_a^x$

例8.3

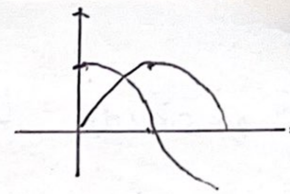
求 $I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

$1=\cos^2x+\sin^2x$

$1-\sin 2x=\cos^2x+\sin^2x-2\sin x\cos x=(\cos x-\sin x)^2$

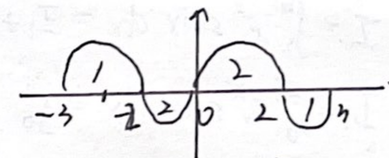
$I=\int_0^{n\pi}|\cos x-\sin x|$ 以π为周期

$$I=n\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx\right]$$



二、积分比大小.

例8.4.



[-3,-2] [2,3] d=1 圆

[0,2],[-2,0] [0,2] d=2 圆

~~$F(3)=f(3)-f(2)$~~ $F(-2)=$ ~~$F(-2)=\frac{1}{2}\pi\cdot 1=\frac{\pi}{2}$~~

~~$F(-2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 4=\pi$~~ ~~$F(-3)=0$~~

~~$F(2)=\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\cdot 4=\frac{7}{2}\pi$~~ $F(0)=\frac{1}{2}(\pi\cdot 4-\pi)=\frac{3}{2}\pi$

~~$F(3)=3\pi$~~

$F(2)=\frac{1}{2}\pi\cdot 4=2\pi$ $F(3)=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

$F(-2)=2\pi$ $F(-3)=\frac{3}{2}\pi$ (⇒C).

2. 用函数保号性. 看正负. 作差. $|x|\geq 0$; $x\in[\pi,2\pi]$ $\sin x\leq 0$等

I_1-I_2 再换元

(常用 $x=\pi+t$. $x=\frac{\pi}{2}\pm t$)

诱导公式.

例8.6 例8.7

例8.6

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$ $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\,dx.$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,dx$

$1+x\leq e^x$ $K>\pi$

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\pi$ $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\,dx<\pi$ ⇒ $K>M>N$.

例 8.7

$I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx \quad (k=1,2,3)$. $I_1\ I_2\ I_3$ 大小

$I_1=\int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$

$I_2=\int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = I_1+\int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx < I_1$

$I_3=\int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_0^{\pi} + \underbrace{\int_\pi^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx}$

$\int_\pi^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \underbrace{\int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx}_{\text{同阳}} + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$ （积分与字母无关）

$\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx \xrightarrow[x=\pi+y]{\text{令}x-\pi=y} \int_\pi^{2\pi} -e^{(\pi+x)^2}\sin x\,dx$

$=\int_\pi^{2\pi}[e^{x^2}\sin x - e^{(\pi+x)^2}\sin x]dx > 0$.

$\therefore\ I_2<I_1<I_3$

三. 定积分定义.

1. 基本型. $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(0+\frac{1}{n}\cdot i)\cdot\frac{1}{n}$

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+6}+\cdots+\frac{1}{2n+3n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2n+3i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2+3(\frac{i}{n})_x}\cdot\frac{1}{n}_{dx}$

$\boxed{\text{step1. 提}\frac{1}{n}}$ $\boxed{\text{step2. 凑}\frac{i}{n}}$ $=\int_0^1\frac{1}{2+3x}dx$

① $n+i=n(1+\frac{i}{n})$

② $n^2+i^2=n^2[1+(\frac{i}{n})^2]$

③ $n^2+ni=n^2[1+\frac{i}{n}]$

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+in}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx$

例 8.8

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x\,dx$

例 8.9

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\sim\pi$

$=\pi\int_0^1\frac{1}{2+\cos(\pi x)}\cdot dx$

2. 放缩型（凑不成 $\frac{i}{n}$）

(1) 夹逼准则 $\underline{n^2+i}$ 凑不成 $\frac{i}{n}$（见第2讲）.

(2). 放缩后再凑 $\frac{i}{n}$

如通项中含 $\frac{i^2+1}{n^2}$ → $\left(\frac{i}{n}\right)^2 < \frac{i^2+1}{n^2} < \frac{(i+1)^2}{n^2}$

(定义)左端　(定义)右端

如: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{0+1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{1+1}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{(n-1)^2+1}{n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=A$　$\boxed{\frac{i^2}{n^2}<\frac{i^2+1}{n^2}<\frac{(i+1)^2}{n^2}}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}<A<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}<A<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$\therefore A=\frac{\pi}{4}$

(3). 变量形 $\boxed{\frac{x}{n}i}$ ☆☆☆

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(0+\frac{x-0}{n}i\right)\frac{x-0}{n}=\int_0^x f(t)dt$

例 8.10.

$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x\right) & x>0\\ 1 & x=0\\ f(-x) & x<0.\end{cases}$

$x>0$时

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\cos\frac{i}{n}x\right)\cdot\frac{x}{n}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x\cos t\,dt=\frac{\sin x}{x}$

四. 反常积分的判敛. ☆☆☆

(比阶).

一. 概念、

① $\int_a^{+\infty}f(t)dt$. 无穷区间上的反常积分.

② $\int_a^b f(x)dx$, $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$, a叫瑕点、

$+\infty$, $-\infty$, a 统称为奇点.

例 8.11

设 $a,b>0$. 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(2022+x)^b}dx$ 收敛. 则.

奇点: 0. $+\infty$.

$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(2022+x)^b}=\underbrace{\int_0^1\frac{1}{x^a(2022+x)^b}}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(2022+x)^b}}_{I_2}$

$I_1\to x\to0^+$　$x^a\to0$.　$(2022+x)^b\neq0$.

$a\in(0,1)$.

$I_2\to x\to+\infty$. $x^a\to\infty$　$(2022+x)^b\to\infty$.

$x^b\to\infty$.

x^{a+b}.

$a+b\in(1,+\infty)$

例1 设 $a>b>0$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx=\int_0^1\frac{1}{x^a+x^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}dx$$

$x\in(0,1)$：$x\to0^+$，$\frac{1}{x^a+x^b}\sim\frac{1}{x^b}\Rightarrow 0<b<1$.

$x\in(1,+\infty)$ $x\to+\infty$，x^a+x^b 等价无穷大 $x^a\Rightarrow 1<a$.

如反 $\int_0^1\frac{(\arctan x)^2}{x^{k-1}}dx$ 收敛 $\Rightarrow k$?

$(\arctan x)^2\sim x^2\xrightarrow{x\to0^+\text{时}}\sim\frac{1}{x^{k-3}}$

$\therefore k\in(3,4)$ （ $k-3\in(0,1)$ ）.

例8.14

(1). 证明 $\boxed{I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}p>1\text{ 时} & \text{收敛}\\ p\le1\text{ 时} & \text{发散}\end{cases}}$ 记.

(2). 当 $p>1$ 时，求 I_{min}.

solution

$p=1$ 时，$I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 发.

$p\neq1$ 时 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^p x}d\ln x=\int_{\ln2}^{+\infty}u^{-p}du=\frac{1}{1-p}u^{1-p}\Big|_{\ln2}^{+\infty}$.

$p>1$ 时 收敛 $p<1$ 时 发散.

(2). $p>1$ 时

$I=\frac{(\ln2)^{1-p}}{p-1}$ $I'(p)\overset{\text{令}}{=}0.=\frac{(\ln2)^{1-p}\ln2(p-1)-(\ln2)^{1-p}}{(p-1)^2}$

$\Rightarrow\ln2(p-2)=0$ $p=2$ $I(2)=\frac{1}{\ln2}$

例8.15

若反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 收敛，求 a,b 范围.

$a=0$ $b=0$ ①
$a=0$ $b\neq0$ ②
$a\neq0$ $b=0$ ③
$a\neq0$ $b\neq0$ ④

① $a=b=0$ $\int_0^{+\infty}1\cos0\,dx$ 发散

② $a=0$ $b\neq0$ $\int_0^{+\infty}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$ 发散.

③ $a\neq0$ $b=0$. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}$

$a>0$ 收敛 ~~$a\in(-\infty,0)$~~ $a\in(-\infty,0)$ 发散

④ $a\neq0,b\neq0$

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\left[\int_0^{+\infty}\cos bx\,de^{-ax}\right]\frac{1}{-a}$$

$$=-\frac{1}{a}\left[\cos bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+b\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{a}\left[\cos bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{-a}\left[\sin bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}-b\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx\right]\right]$$

$$=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)+\frac{a}{a^2+b^2}$$

$a>0$. 收敛 $a<0$ 发散.

综上 $a>0$. b 取任意值 收敛

习 8.3 8.4