微分不等式

1. 用单调性

$\lim\limits_{x\to a^+} F(x) \geq 0$ 当 $x\in(a,b)$ 时 $F'(x) \geq 0$.（$\leq$）

则 (a,b) 内 $F(x) \geq 0$.（$\leq$）若 $x=a$ 右侧邻域 $F'(x) > 0$.（$<$）

则 $F(x) > 0$.（$<$）若 $x=a$ 处 $F(x)$ 右连续

则 $\lim\limits_{x\to a^+} F(x) \geq 0 \Rightarrow F(a) \geq 0$.（$\leq$）

例 6.23　6.24　6.33　习 6.9　6.10 ~~解法~~一.

例 6.33

证明 $\dfrac{e^a-e^b}{a-b} < \dfrac{e^a+e^b}{2}$ $(a\neq b)$.　设 $a>b$　$x=a-b>0$.

$$\Rightarrow \frac{e^{a-b}-1}{a-b} < \frac{e^{a-b}+1}{2} \overset{a-b\neq 0}{\Rightarrow} \frac{e^x-1}{x} < \frac{e^x+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1} < \frac{x}{2}$$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}-\frac{x}{2} \qquad f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{2}\overset{令}{=}0$$

$$4e^x = e^{2x}+2e^x+1 \qquad e^{2x}-2e^x+1=0$$

$\Rightarrow (e^x-1)^2=0 \Rightarrow x=0$. 与 $x\neq 0$ 矛盾

$\therefore$ ~~$f'(x)$~~ $(e^x-1)^2>0$　$4e^x-e^{2x}-2e^x-1>0$　$f'(x)<0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$　$f'(x)<0$　$f(x)\downarrow$.

$\therefore \dfrac{e^a-e^b}{a-b} < \dfrac{e^a+e^b}{2}$

2. 用最值.

例 6.25　6.27

例 6.27

已知 ~~常数~~ $k \geq \ln 2-1$　证明 $\underbrace{(x-1)}_{f(x)}\underbrace{(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)}_{g(x)} \geq 0$.

[分析]. $x=1$ 时　$f(x)\cdot g(x)=0$.

$x>1$ 时　$g'(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{1}{x}(x-2\ln x+2k)$

令 $\varphi(x)=x-2\ln x+2k$　$\varphi'(x)=1-\dfrac{2}{x}\overset{令}{=}0$.

$x_0=2$　$x\in(1,2)$　$g(x)\downarrow$

$x\in(2,+\infty)$　$g(x)\nearrow$

~~$g(2)=$~~ $\varphi(2)=2-2\ln 2+2k$

$\geq 2-2\ln 2+2\ln 2-2=0$.

$\therefore \varphi(x)\geq 0$.　$\therefore g'(x)\geq 0$.　$g(x)$ 在 $(1,+\infty)\nearrow$

$g(1)=1-0+0-1=0$,　$f(x)g(x)\geq 0$ ~~$x\in(1,+\infty)$~~

$0<x<1$ 时　$\varphi'(x)<0$　$\varphi(x)\downarrow$　$\varphi(1)=0$.

$\varphi(x)$ ~~$x\in(0,1)$~~ >0.　$x\in(0,1)$,　$g(x)>0$.

$\therefore$ ~~$f(x)$~~ $f(x)\cdot g(x)>0$.

3. 用凹凸性

$F''(x)\geq 0$ $\left\{ \dfrac{F(x_1)+F(x_2)}{2} \geq F\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \right.$

推广:　$\lambda_1+\lambda_2=1$　$\lambda_1F(x_1)+\lambda_2F(x_2)\geq F(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$.

例 6.30.　习 6.10.

例6.30

$f(x)$ 为二阶可导正值函数，$f(0)=f'(0)=1$. $f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$

$f(2)$ e^2 $\sqrt{f(1)f(3)}$ 大小关系、

[solution]. step1.

$$f(x)f''(x)-[f'(x)]^2\geq 0.$$

$$F(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad F'(x)=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}\geq 0.$$

$$F(x)\nearrow \qquad F(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=1$$

$$G(x)=\ln f(x) \qquad G'(x)=F(x)>0 \quad G(x)\nearrow$$

$$G''(x)=\cdots\geq 0 \quad 凹$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\cancel{g(x)}+G(1)+G(3))\geq G(2)$$

$$\frac{1}{2}(\ln f(1)f(3))\geq \ln f(2)$$

$$f(1)f(3)\geq f^2(2) \longrightarrow \sqrt{f(1)f(3)}\geq f(2).$$

step2 2阶以上用泰勒

$$g(x)=g(0)+g'(0)(x-0)+\frac{g''(\xi)}{2}(x-0)^2$$

$$=\underbrace{\ln(f(0))}_{0}+1\cdot x+\frac{x^2}{2}\cdot g''(\xi)\geq x$$

$$\Rightarrow \ln f(x)\geq x \Rightarrow f(x)\geq e^x \Rightarrow f(2)\geq e^2$$

$$\therefore e^2\leq f(2)\leq\sqrt{f(1)f(3)}$$

4. 用拉格朗日

$$F(b)-F(a)\geq A(b-a).$$

$$F'(\xi)\geq A$$

例6.26 6.28 习6.10 解法二

已知 $f(a)=0$ $f'(x)>0$. $f''(x)>0$.

则 $\frac{(b-a)f'(b)-f(b)}{f'(b)}$ ___ 0.

[分析] $\int_0^x f(t)dt$ f f'

$\int_0^x f(t)dt - f$：用积分中值定理

$f - f'$：用拉中值 ...

$$f(b)=f(b)-\underbrace{f(a)}_{0}=f'(\xi)(b-a) \quad \xi\in(a,b)$$

$$\frac{(b-a)f'(b)-f(b)}{f'(b)}=(b-a)\frac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)} \quad >0. \quad >0. \quad >0.$$

5. 用柯西中值定理.

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\geq A \quad (或\leq A).$$

eg. P94 例6.7 ★★★ $f(\xi)>M\cdot\frac{e^{\xi-3}}{e-1} \Rightarrow f(\xi)>M\frac{e^\xi}{e^4-e^3}$

$$\Rightarrow A\geq\frac{f(\xi)}{e^\xi}>\frac{M}{e^4-e^3}\geq A$$

找准放缩.

6. 拉格朗日余项的泰勒

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}F''(\xi)(x-x_0)^2$$

ξ 在 x,x_0 之间.