§4 一元函数微分学的计算

point. $\begin{cases} d(x^n) = nx^{n-1}dx \\ dx^n = (dx)^n \end{cases}$

eg. 例 4.1 设 $f(x)=(\cos x-4)\sin x+3x$. 求 $\frac{df(x)}{d(x^2)} = \frac{d(f(x))}{2x\,dx} = \frac{1}{2x}\cdot f'(x)$.

三. 复合函数求导 [例4.3~4.4]

- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$ ← 对外面求导
- 注意求导位置: $f'[g(x)] = \frac{d\{f[g(x)]\}}{g(x)}$ ← 对内面求导.

四 隐函数求导. [例4.5]

$F(x,y)=0$. 两边对 x 求导. 注意 $y=y(x)$, y 看作中间变量, 解方程求 y'

五 反函数求导 [例4.6]

$y=f(x)$ 可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 则有反函数 $x=\varphi(y)$.

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ 一阶导

二阶导.

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{x''_{yy}}{-(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y} = \boxed{\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}}$$ ☆

六 分段函数求导(含绝对值). [例4.7~4.8]

(1) 在分段点处用导数定义求导(定义法).

(2) 在非分段点用导数公式求导(公式法)

七 多项乘除、开方、乘方.(对数求导法).

step1. $\ln|y| = \ln|f(x)|$ ← 注意加绝对值

step2. 两边对 x 求导.

$\frac{1}{y}y' = [\ln|f(x)|]' \Rightarrow y' = y[\ln|f(x)|]'$

视绝对值而不见.

八 幂指函数求导法

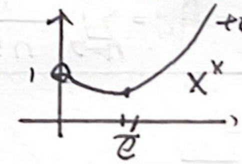
step1. $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$

step2. 对 x 求导

[注 x^x 图像 ⟶ 例30 1.5.11 $(2+x)e^{\frac{1}{x}}$

$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x\cdot(\ln x+1) \stackrel{令}{=} 0$.

$\Rightarrow x = \frac{1}{e}$.

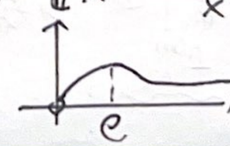


(同 x^{2x}, x^{3x}…).

$x^{\frac{1}{x}}$ 图像

$(x^{\frac{1}{x}})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} \stackrel{令}{=} 0$.

$\Rightarrow x = e$



← $y=1$ (水平渐近线).

九 参数方程确定的函数求导 [例4.11, 4.12]

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\mathcal{J}(t) \text{ 一阶导}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\mathcal{J}'(t)}{\varphi'(t)} = \text{二阶导}$$

十 高阶导数. [例. 4.13, 4.14]

1) 归纳法.

比如. $y=3^x$ $y'=3^x\ln 3$ $y''=3^x\ln^2 3$

$\cdots y^{(n)}=3^x\ln^{(n)}3$, $n=0,1,2,3,\cdots$.

2) 莱布尼茨公式. [例4.15]

$$(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v^{(1)}+\cdots+C_n^nu^0v^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^k$$

3). 展开式. [例4.16]

(无穷阶可导):
$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n.$$

$\downarrow x_0=0$

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

通过 [抽象展开] 与泰勒级数

$\Rightarrow$ 比较得出 $f^{(n)}(x_0)$.

例4.2 ☆

设 $f'(0)=1$、$f''(0)=0$. 证明在 $x=0$ 处,有 $\frac{d^2}{dx^2}f(x^2)=\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)$

[分析]

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y}{(dx)^2}=y''_{xx}\right)$$

记 $F(x)=f(x^2)$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x^2)\right|_{x=0}=F''(0)=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x^2)\cdot2x-0}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}f'(x^2)=2$$

$\because f''(0)=0\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Downarrow$ 连续

记 $G(x)=f^2(x)$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)\right|_{x=0}\quad G''(0)=\lim_{x\to0}\frac{G'(x)-G'(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)\cdot f'(x)-2f(0)f'(0)}{x}$$

(重要导数定义) $=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)\cdot f'(x)-f(x)+f(x)-f(0)}{x}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)[f'(x)-\underset{f'(0)}{1}]}{x}+\lim_{x\to0}2\,\boxed{\frac{f(x)-f(0)}{x}}$$

=二阶导定义　　一阶导定义

$$=2\underset{0}{\underset{\|}{f(0)}}f''(0)+2\underset{1}{\underset{\|}{f'(0)}}=2$$

(例4.3)

设 $y=\ln^3(\sin^2x+1)$ 求 y'

$$y'=3\ln^2(\sin^2x+1)\cdot\frac{2\sin x}{\sin^2x+1}\cdot\cos x$$

例4.4

设 $g(x)$ 可微, $h(x)=e^{1+g(x)}$, $h'(1)=1$, $g'(1)=2$, 则 $g(1)=?$

$h(x)=e^{1+g(x)}$　$h'(x)=e^{1+g(x)}\cdot g'(x)$

$h'(1)=e^{1+g(1)}\cdot g'(1)\Rightarrow 1=2e^{1+g(1)}\Rightarrow g(1)=-\ln2-1$

例4.5

设 $y=y(x)$ 隐函数 $\to$ $x^2-y+1=e^y$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=?$

$x^2-y+1=e^y\xrightarrow{x=0}1-y=e^y\Rightarrow y=0$

$2x-y'=\underset{1}{e^y}\cdot y'\xrightarrow{x=0}y'=0$

$2-y''=\underset{1}{e^y}(y')^2+\underset{1}{e^y}y''\xrightarrow{x=0}y''=1$

例4.6

设 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数, $y=f(x)$ 可导,

且 $f'(x)\neq0$, $f(3)=5$, $h(x)=f\left[\frac{1}{3}g^2(x^2+3x+1)\right]$ 求 $h'(1)$.

[分析] $h'(x)=f'\left[\frac{1}{3}g^2(x^2+3x+1)\right]\cdot\frac{2}{3}g(x^2+3x+1)\cdot g'(x^2+3x+1)\cdot(2x+3)$

$h'(1)=f'\left[\frac{1}{3}g^2(5)\right]\cdot\frac{2}{3}g(5)\cdot g'(5)\cdot5$

$f(3)=5\Rightarrow g(5)=3$.

$h'(1)=f'(3)\cdot g'(5)\cdot10$　互为倒数!

$=10$.

例4.7

设f(x)在$(-\infty,+\infty)$内连续且大于0

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1). 求$g'(x)$

(2). 证明 $g'(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

[分析] $x\neq 0$,

$$g'(x)=\frac{tf(t)\int_0^x f(t)dt-f(t)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

$x=0$时

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$$

$$\overset{洛}{=}\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{2f(x)+xf'(x)}}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=1$$

$$\therefore\ g'(x)=\begin{cases}\dfrac{tf(t)\int_0^x f(t)dt-f(t)\int_0^x tf(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

例4.8☆

$$设f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad \beta<0$$

(1). 在什么情况下，f(x)不是连续函数.

不连续 $\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\sin x^\beta=0$ 时连续

$\therefore$ $\alpha\le 0$时 f(x)不连续

$\alpha>0$时 f(x)连续

(2). 连续但不可导

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin x^\beta}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin x^\beta$$

$\alpha-1>0$ 存在极限

$\therefore$ $\alpha\in(0,1]$ 连续但不可导

(3). $\alpha>1$时 可导

可导但无界

$x>0$, $f'(x)=\underbrace{\alpha x^{\alpha-1}\sin x^\beta}_{有界}+\overset{\infty}{x^\alpha\cos x^\beta\cdot\beta x^{\beta-1}}$ 无界振荡

$x<0$, $f'(x)=0$

$x=0$, $f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ $(\alpha>1)$.

$\alpha+\beta-1<0$时 → 无界振荡 → 无界

4) 可导有界但导函数不连续 → $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(\underbrace{\alpha x^{\alpha-1}\sin x^\beta}_{0}+\beta x^{\alpha+\beta-1}\cos x^\beta)$

→ $\alpha+\beta-1\ge 0$.

$\alpha+\beta-1=0$时, $\exists$

⇒ 不连续

5). 导函数连续

⇒ $\alpha+\beta-1>0$.

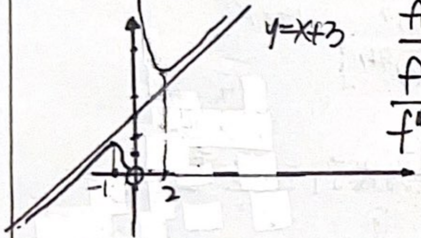
例 30. 1.5.11 ☆ [大组长出的题]

$f(x)=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$ 图像:

定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(2+x)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}\overset{令}{=}0.$$

$\Rightarrow x_1=1 \quad x_2=2$



X	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	↗		↘ ↘		↘	$4e^{\frac{1}{2}}$	↗
$f'(x)$	+		−		−	0	+
$f''(x)$	−		− +		+	+	+

$$\lim_{x\to0^-}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=0$$
$$\lim_{x\to0^+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$f''(x)=\frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}\overset{令}{=}0.\Rightarrow x=-\frac{2}{5}\quad f''(x)不存在: x=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}})'}{(\frac{1}{2+x})'}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{2}{x})e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(3+\frac{2}{x})}{-\frac{1}{x^2}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}e^t(3+2t)=3.$$

例 4.11.

设 $\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du,(t>1),\end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$

[分析] $\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2et}{(1+2\ln t)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e}{2(1+2\ln t)}=u(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{u'(t)}{4t}=\frac{\frac{-2e\cdot\frac{2}{t}}{4(1+2\ln t)^2}}{4t}=\frac{-4e}{16t^2(1+2\ln t)^2}$$

$x=9\longrightarrow t=2$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}=\frac{-e}{4\times4(1+2\ln2)^2}=\frac{-e}{16(1+2\ln2)^2}$$

例 4.12 ★★★

$$\begin{cases}x^x+tx-t^2=0\\ \arctan(ty)=\ln(1+t^2y^2)\end{cases}\longrightarrow 求\frac{dy}{dx}.$$

[分析].

$$x^x(\ln x+1)\cdot x'_t+x+tx'_t-2t=0.$$

$$\Rightarrow x'_t=\frac{2t-x}{t+x^x(1+\ln t)}$$

$$\frac{1}{1+t^2y^2}\cdot(y+ty'_t)=\frac{2ty^2+2yt^2\cdot y'_t}{1+t^2y^2}$$

$$\Rightarrow y'_t=\frac{y-2ty^2}{2yt^2-t}=\frac{y(1-2ty)}{-t(1-2ty)}=-\frac{y}{t}$$

$$dy/dx=\frac{(y-2ty^2)(t+x^x(1+\ln t))}{(2yt^2-t)(2t-x)}=\frac{y[(t-x)(\ln x+1)+1]}{x-2t}$$

例4.9

设 $\underbrace{y=\frac{x^3}{1-x}\cdot\sqrt[5]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_1}+\underbrace{e^{4x}}_{y_2}$ 求 y'

解

$$\ln|y_1|=3\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{5}(\ln|2-x|-2\ln|2+x|)$$

$$\frac{y_1'}{y_1}=\frac{3}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{2-x}-\frac{2}{2+x}\right)$$

场合：1) 大题一个步骤，2) 最大似然估计.

例4.10

设 $f(x)=\begin{cases}x^{3x}, & x>0\\ x+1, & x\le 0\end{cases}$ 求 $f''(x)$

$$\lim\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{3x}}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3x^2}}\to 0.$$

1) $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1 \Rightarrow f(x)$ 连续

2) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x\ln x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ln x-1}{x}=-\infty.$$

$\Rightarrow f'(0)$ 不存在 $\Rightarrow f''(0)$ 不存在

例4.13.

已知 $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(x)$

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}-1=-1+\frac{2}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right).$$ 化简

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=-\frac{-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''=-2\frac{-1}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$\vdots$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^n}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}=-(1+x)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)''=-(-2)(1+x)^{-3}\cdots\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

例4.14

求 $y=x\ln x$ 的 n 阶导数，n 为大于1的正整数

$y'=\ln x+1$

$y''=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$y^{(3)}=-1\cdot x^{-2}$

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3} \Rightarrow y^{(n)}=(-1)^{n-2}x^{-(n-1)}$，$n\geqslant 2$

例4.15

设 $f(x)=\arctan x$ 求 $f^{(n)}(0)$.

[分析]. $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow f'(x)\cdot(1+x^2)=1$ 两边求 $n-1$ 阶导.

$$C_{n-1}^0[f'(x)]^{(n-1)}\cdot(1+x^2)+C_{n-1}^1[f'(x)]^{(n-2)}(2x)+C_{n-1}^2[f'(x)]^{(n-3)}\cdot 2=0.$$

$$[f^{(n)}(x)(1+x^2)+\underline{nf^{(n-1)}(x)x}]=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)$$

$$\xRightarrow{x=0} f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)$$

$f^{(0)}(0)=\arctan 0=0 \Rightarrow f^{(2k)}(0)=0.$

$f^{(1)}(0)=1.\quad f^{(3)}(0)=-2\cdot1\cdot f'(x)=-2\cdot1$

$f^{(5)}(0)=-4\cdot3\, f^{(3)}(0)=(-4)\cdot3\cdot(-2)\cdot1$

$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!\quad ,k=0.1,2,\cdots.$

eg. $f(x)=\arctan x$，则 $f^{(4)}(0)=?$ $\quad f^{(4)}(0)=0.$

$f(x)$ 奇 $\to f'(x)$ 偶 $\to f''(x)$ 奇 $\to$ 偶 $\to$ 奇

例4.16

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的18阶导数 $f^{(18)}(0)$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$ (抽象).

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ (具体).

$\Rightarrow f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+1)!}\Rightarrow f^{(18)}(0)=\frac{-\cancel{(-1)}18!}{\cancel{18!}\,19!}=-\frac{1}{19}$

例4.17

$f(x)=(x-1)^5e^{-x}$ 求 $f^{(10)}(1)$.

$f^{(10)}(1)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(1)}{m!}(x-1)^m$ 抽象 $\boxed{凑出x-1}$

具体：$f(x)=e(x-1)^5e^{1-x}$ $\quad e^{-(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}(-1)^n(x-1)^{n+5}}{n!}$

$m=10,\ n=5$：

$\frac{f^{(10)}(1)}{10!}\cdot(x-1)^{10}=\frac{e^{-1}(-1)^5(x-1)^{10}}{5!}\Rightarrow f^{(10)}(1)=-e^{-1}\frac{10!}{5!}$

习4.1

$y=\arctan\frac{x-1}{x+1}$

$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+x^2}$ 背.

重点：4.3 4.4 4.7 4.8 4.9