§1 函数极限 —— 函数极限的定义及使用.

1. 是常数 $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x) = A \overset{\text{同理}}{\Longrightarrow} f'(x)=A,\ f'_x(x_0,y_0)=A$

(若存在). (若存在) $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = A$ …

例1.1 已知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3} + 2x^2e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1} f(x)$. 求 $f(x)$.

令 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = A$. $f(x) = \dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3} + 2Ax^2e^{x-1}$

$A = \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3} + 2A\lim\limits_{x\to1} x^2e^{x-1}$

• 令 $x-1=t \overset{①}{=} \lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\arcsin t}{t^3} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-(t+\frac{t^3}{6}+o(t^3))}{t^3} = -\dfrac{1}{6}$ $=②$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{x\to1} x^2e^{x-1} = 1$.

$\Rightarrow A = -\frac{1}{6} + 2A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$\therefore f(x) = \dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3} + \frac{1}{3}x^2e^{x-1}$

2. 唯一性. 左极限 = 右极限.

例1.2. 当 $x\to0$ 时, 函数 $x\left[\frac{1}{x}\right] + e^{\frac{1}{x}}$ 的极限.

$r-1 < [r] \le r$

$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$

$x\to0^+$ 时, $\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x} \Rightarrow 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$

$\Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Leftarrow 1$

$x\to0^-$ 时 $\Rightarrow 1 \Rightarrow 1 \Leftarrow 1$

$x[\frac{1}{x}]$ 极限是 1. , $e^{\frac{1}{x}}$ 极限 $\left\{\begin{matrix} 0^+ & +\infty \\ 0^- & 0 \end{matrix}\right\}$ 不唯一. 不唯一存在

3. 局部有界性 $[a,b]$ 连续, $[a,b]$ 有界, (a,b) 连续 $\not\Downarrow$ (a,b) 有界.

$x\to\cdot$ 时, $\exists M>0,\ |f(x)| \le M$

例1.3. $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在哪个区间内有界?

A $(-1,0)$? B $(0,1)$? C $(1,2)$? D $(2,3)$?

$\Rightarrow [a,b]$ 连续 $\longrightarrow [a,b]$ 有界.

$\left.\begin{array}{l} (a,b)\text{连续} \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \text{存在} \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\text{存在} \end{array}\right\} \longrightarrow (a,b)$ 有界.

▲ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{\sin 3}{-2\times9}$ 存在. ▲ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{\sin 2}{(-1)(-2)^2}$ 存在.

▲ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{\sin(-2)}{(-1)(-2)^2}$ 存在

▲ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin(-1)}{(x-1)}$ 不存在

....

方法二，排除法:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-2)^2}=\infty.$$

$x\to 2$，同理. 都是 $\infty\cdot$非零 $=\infty$.

4. 极限局部保号性. ☆.

$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A>0$ $(<)$ $\Longrightarrow$ $x\to\cdot$, $f(x)>0$ $(<)$. 脱帽法.

$x\to\cdot$ $f(x)\geq 0$ $(\leq)$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 若存在, ≥ 0 $(\leq)$ 戴帽法.

(巧记: 极限是过程，函数值是结果.

(自己能领悟) 过程不一定能确定结果，但结果能确定过程)

例1.1.4. 已知f(x)在x=0某个邻域内连续，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 则 f(x)在x=0处.

A 不可导 B. 可导且 $f'(0)\neq 0$. C 取极 max D 取极 min.

Solution $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ <0

$\Longrightarrow$ 当 $x\to 0$ 时 $\frac{\overset{<0}{f(x)}}{(1-\cos x)}<0$.

f(x)连续

又∵ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{\overset{<0}{f(x)}}{1-\cos x}\cdot(1-\cos x)=(-1)\cdot 0=0$.

☆常用方法: 缺啥补啥.

$f(0)=0$ 而也 <0.

∴ 极大值点 ⟹ C

5. 等式脱帽法.

$\lim f(x)=A \longrightarrow f(x)=A+\alpha$. $\lim\alpha=0$.

⟹ 往往是为了解出 f(x) 的表达式.

更多用于多元极限.

例1.1.5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为?

1. 解: 等式脱帽法:

$\Rightarrow$ $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$.

$\Rightarrow$ $f(x)=\alpha\cdot x^2-\frac{\sin 6x}{x}$ ⟵ 解出 f(x).

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+\alpha\cdot x^2-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}=\alpha-\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$

$=36.$

2. 拼凑方法:

假设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 存在 $=A$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=A-0$

$\Rightarrow A=36.$

1000.1.1

$$f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)}\quad\begin{cases}(-1,0) & f(x)=x\cdot\dfrac{\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}\xrightarrow{x\to0}=0.\\ (0,1) & f(x)=\dfrac{1}{x-1}\,\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-3)^2}\ \text{不存在}\ ①\\ (1,2) & f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}\,\dfrac{x\sin(x-3)}{x-1}\ \text{不存在}\ ③\\ (2,3) & \end{cases}$$

$\Rightarrow (-1,0)$ 有界. $\Rightarrow$ A

1000.1.2

设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a\ln(1+x)}=b\neq0$ 则 $a=?$ $b=?$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos 2x)^{\frac13}}{x^{a+1}}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac23(\cos 2x)^{-\frac23}\cdot\cancel{\sin x}\,\sin 2x}{(a+1)x^a}$$

$$\overset{\sin 2x\sim 2x}{=\!=}\frac{-2\cdot2}{3(a+1)}\,\frac{(\cos 2x)^{-\frac23}}{x^{a-1}}\Rightarrow\begin{aligned}a&=1\\ b&=-\frac23\end{aligned}$$