四、函数极限的应用 —— 连续与间断

1. 研究位置：

① 无定义点（间断） ② 分段函数分段点（不定）

2. 连续 [例1.22 1.23]

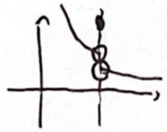
内点：左极限 = 右极限 = 函数值

端点：右端点谈左连续，左端点谈右连续。

3. 间断

① 前提：~~f(x)~~ x_0 左右两端侧有定义。

② (左：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 右 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 值 $f(x_0)$)



第一类
1) 左右存在且不等 $x=x_0$ 跳跃间断点、
2) 左右存在且相等 $x=x_0$ 但 $\neq f(x_0)$ 可去间断点、

第二类
3) 左右至少有一个不存在且为无穷大、 $x=x_0$ 无穷间断点、
4) 左右至少有一个不存在且为振荡。 $x=x_0$ 振荡间断点、

★★ 例1.22 设在 $x=0$ 的某去心邻域内 $f(x)=\dfrac{\int_0^3 x\sqrt{9-x^2t^2}\,dt-9x}{\arctan^3 x}$

又 $f(0)=a$. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ____

[分析] ⟹ 要求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(0) = a$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^3 x\sqrt{9-x^2t^2}\,dt-9x}{\arctan^3 x} \xlongequal[t=\frac{u}{x},\ du=x\,dt]{xt=u} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{3x}\sqrt{9-u^2}\,du\right)-9x}{\arctan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{3x}\sqrt{9-u^2}\,du\right)-9x}{x^3} \xlongequal{洛} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-9x^2}\cdot 3-9}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt{1-x^2}-3}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}^{-x^2}}{x^2\underbrace{(\sqrt{1-x^2}+1)}_{2}}=-\frac{3}{2}$$

∴ $a=-\frac{3}{2}$.

例1.23

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 连续性

[分析] 无定义点，$x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(x) = 0$. 讨论 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

如果 $a>0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a\sin\frac{1}{x} = 0$. （无穷小乘有界）. ⟹ 连续

如果 $a=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ ⟹ 振荡不存在 ⟹ 不连续

如果 $a<0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a\sin\frac{1}{x}$ ⟹ 不存在 ⟹ 不连续.

例1.24 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 可去间断点个数为

无定义点：$\pi x = n\pi \Rightarrow x=0,\pm1,\pm2,\cdots$

可去间断点：让它上边也 $\to 0$，才可能是个数，否则 $\frac{a}{0}$ 一定是 ∞.

$x-x^3=0 \Rightarrow x=0\quad x=\pm1$.

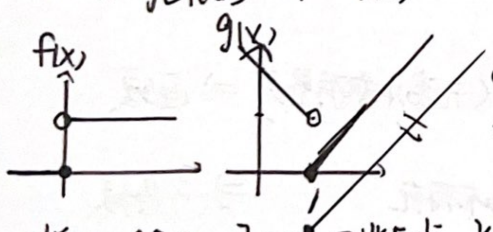
$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^3}{\pi x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi}=\frac{1}{\pi}$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-6x}{-\pi^2\sin\pi x}\overset{洛}{=}\frac{-6}{\pi^3}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x}{\pi^2\sin\pi x}\overset{洛}{=}\frac{6}{\pi^3}$ $\Rightarrow$ 3个.

例1.25. $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge1\\ 1-x & x<1\end{cases}$

(1). 证明 $g[f(x)]=1-f(x)$



~~$f(x)=1$ 时 $x>0$.~~

$g[f(x)]=\begin{cases}g(1), & x>0\\ g(0), & x\le0\end{cases}=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x\le0.\end{cases}=1-f(x)$.

(2). 指出 $f[g(x)]$ 的间断点，并指明间断点类型.

$f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)>0\\ 0, & g(x)\le0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\ne1\\ 0, & x=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ 可去间断点

例1.26.☆

求 a,b，$f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$，可去间断点 $x=1$

[分析] $\lim\limits_{x\to e}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}=\infty \Leftarrow \frac{常数}{0} \Rightarrow a=e$ 或 $b=e$.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}=A$ “间断” $\Rightarrow a=1$ 或 $b=1$

① $a=e\ b=1$ ✗ ② $a=1\ b=e$ ✓

$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-1}{(x-e)(x-1)}=\infty$ ✗ $\quad \lim\limits_{x\to e}\frac{e^e-e}{(x-e)(x-1)}=\infty \quad \lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{(x-e)(x-1)}\overset{洛}{=}\frac{e}{1-e}$ $\quad \frac{1}{1-e}$