拉格朗日.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b\neq 0.$$

则 $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=?$

原 $=\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi\cdot[f(x)-a]}{x-a}=b.$ $\xi\in(f(x),a).$

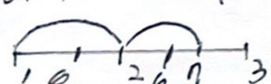
当 $x\to a$ 时 $\xi\to a.$

原 $=\lim_{x\to a}\cos\xi\cdot\frac{f(x)-a}{x-a}=b\cdot\cos a.$

习6.3(2). [三次拉氏]

若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$, $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$, 证明至少存在一点 $\xi\in(1,3)$. $\varphi''(\xi)<0$.

[分析]. 高阶导数 $\rightleftharpoons$ 泰勒 / 三次拉氏.



1) $\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}=\varphi'(\xi_1)>0.$

2) 积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$

$\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)(3-2)<\varphi(2)$

$\frac{\varphi(2)-\varphi(\eta)}{2-\eta}=\varphi'(\xi_2)<0.$

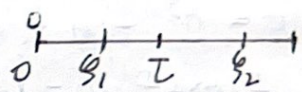
3). $\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$

例6.16. [证 $F(f'(\eta),f'(\zeta))=0$]

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导, $f(0)=0$. $f(1)=1$.

证明不同的 $\underbrace{\xi_1,\xi_2}_{\text{划成区间}}\in(0,1)$. 使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$

[分析 划成区间.]



$f'(\xi_1)=\frac{f(\tau)-0}{\tau}=\frac{f(\tau)}{\tau}$

$f'(\xi_2)=\frac{1-f(\tau)}{1-\tau}$

$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\tau}{f(\tau)}+\frac{1-\tau}{1-f(\tau)}$

∴根据介质定理 $f(\tau)=\frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$

根据介质定理 $f(0)=0$ $f(1)=1$ $[0,1]$ 连续.

∴ 存在 $\cancel{f(\eta)}$ $f(\tau)=\frac{1}{2}$

$f'(\xi_1)=\frac{f(\tau)-0}{\tau-0}=\frac{\frac{1}{2}}{\tau}$ $f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\tau)}{1-0}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\tau}$

$\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{\tau}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\tau}{\frac{1}{2}}=2.$

例6.3

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $f(1)=1$, 又曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\arctan x$ 在 $(0,0)$ 具有公共切线. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)+f'(\xi)=1$

[solution].

公共切线: $\Rightarrow f(0)=0$ $f'(0)=0.$

$f(0)=0$ $f(1)=1$ 由拉氏 $\Rightarrow f'(\eta)=1$ $(\eta\in(0,1))$

令 $\varphi(x)=e^x[f'(x)-1]$ ← 怎么想到？

$\varphi(x)$ 在 $[0,\eta]$ 连续 $(0,\eta)$ 可导.

$\varphi(0)=\varphi(\eta)=0$ 由罗尔定理：$\varphi'(\xi)=0$ $\xi\in(0,\eta)$.

$\therefore \varphi'(\xi)=e^{\xi}(f'(\xi)-1+f''(\xi))=0$

$\Rightarrow f'(\xi)+f''(\xi)=1$.

例 6.7(1).

设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 一阶可导且 $f'(x)\geq M>0$, $f(2)>0$.

证明 $\forall x\in[3,4]$. 均有 $f(x)>M$.

[solution]. [Tip. 2,3,4 3-2=1 $\int_2^3 M\,dx=M$]

$x\in[2,3]$，中值定理： $f(3)-f(2)=f'(\eta)\geq M>0$.

$\eta\in(2,3)$, 又$\because f(2)>0$.

$\therefore f(3)=f(2)+f'(\eta)>M$.

又$\because f'(x)$在 $[2,4]$ $f'(x)>0$.

$\therefore$ 对于任意 $x\in[3,4]$, $f(x)>M$.

例 6.9

设 $f(x)$ 处处可导，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，

必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

[solution].

$\underbrace{f(x)}_{+\infty}-\underbrace{f(x_0)}_{常数}=\underbrace{f'(\xi)}_{\to+\infty}\underbrace{(x-x_0)}_{常数>0}$

例 6.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，若在 (a,b) 内有一个数 c，使得 $f'(c)=0$.

证明：在 (a,b) 内必可找到一点 ξ

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

[solution].

1) 连续 ~~导数~~ → M,m

$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续 → 必有最大值 M, 最小值 m.

2) 对 M,m 讨论

- $M=m$ 时 $f'(x)\equiv0$. ξ 取 (a,c) 上任一点.
- $M>m$ 时， $M\neq f(a)$ 或 $m\neq f(a)$

  不妨设 $M>f(a)$

  令 $f(x_2)=M$ 则 $f'(x_2)=0$.

3). 辅助函数

$F(x)=f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{b-a}$

$F(x_2)=f'(x_2)-\dfrac{f(x_2)-f(a)}{b-a}=-\dfrac{f(x_2)-f(a)}{b-a}=-\dfrac{M-f(a)}{b-a}<0$

~~$F(x_1)=f'(x_1)-\dfrac{f(x_1)-f(a)}{b-a}$~~

4). 拉氏

$f(x_2)-f(a)=f'(x_1)(x_2-a)$ $x_1\in(a,x_2)$.

$F(x_1)=f'(x_1)-\dfrac{f(x_1)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}-\dfrac{f(x_1)-f(a)}{b-a}$

$\geq\dfrac{f(x_2)-f(a)}{b-a}-\dfrac{f(x_1)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{b-a}\geq0$.

由零点定理，$\xi\in[x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $F(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

例16.8

设在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，$f(0)<0$.

证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 分别在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ $\nearrow$.

[分析].

$f''(x)>0$ 凹函数. $f''(\xi)=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

按: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\rightarrow f(x)=xf'(\xi)+f(0)$

$\xi\in(0,x)$.

$\therefore g'(x)=\dfrac{xf'(x)-xf'(\xi)-f(0)}{x}=f'(x)-f'(\xi)-\dfrac{f(0)}{x}$

$\because f''(x)>0$ $\therefore f'(x)-f'(\xi)>0$. $-\dfrac{f(0)}{x}\ (x>0)>0$.

$\therefore g'(x)>0$ $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ $\nearrow$

同理 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ $\nearrow$.

习6.4

数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界且可导.

当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时. 必有 $f'(x)=0$

反证法. 设 $f'(x)\neq0$.

$f'(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m.\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$

$f(x)\to+\infty$ 与有界矛盾