微分等式问题.

例6.19 [证明恒等式].

证明 当$x\geq 1$时, $\underline{\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{\pi}{4}$.

令 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2x}{1+x^2}}{1+\cos^2\frac{2x}{1+x^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}=0.$$

$f(1)=\frac{\pi}{4}$. 故 $f(x)$ 恒等于$\frac{\pi}{4}$

函数的零点个数 (方程根的个数, 曲线交点个数).

① 至少几个 ② 至多几个 ③恰有几个

例6.21

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间$(0,1)$内有实根

求常数k取值范围.

[分析]. 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$

$$f'(x)=-\frac{1}{[\ln(1+x)]^2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2}{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2}>0.$$

$g(x)=(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2$

$g'(x)=[\ln(1+x)]^2+2\ln(1+x)-2x$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0.$$

$$g(x)=\underbrace{g(0)}_{=0}+\underbrace{g'(0)}_{=0}(x-0)+\underbrace{\frac{g''(\xi)}{2}}_{<0}(x-0)^2\Rightarrow g(x)<0$$

$\therefore f'(x)<0$

$\therefore f(x)\downarrow$

$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k\quad(0,1]$

$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1-k<0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\overbrace{\ln(1+x)}^{\sim\frac{x^2}{2}}}{\underbrace{x\ln(x+1)}_{\sim x^2}}-k=\frac{1}{2}-k>0$$

$\Rightarrow k\in\left(\frac{1}{\ln 2}-1,\frac{1}{2}\right)$

例6.22 [含参数问题]

求 $k\arctan x-x=0$. 不同实根的个数. k为参数.

$f(x)=k\arctan x-x$ 奇函数. $(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1$ 偶函数 $\Rightarrow$ 只看正区间

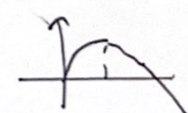
$=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$

① $k\leq 1$ $f'(x)<0$. $f(0)=0$. 有且仅有一个根

② $k>1$ 令$f'(x)=0$ $x=\sqrt{k-1}$

$x\in(0,\sqrt{k-1})\Rightarrow f'(x)>0$

$x\in(\sqrt{k-1},+\infty)\Rightarrow f'(x)<0$.



$\lim_{x\to+\infty}k\arctan x-x=-\infty$. $\Rightarrow$ 有且仅有三个根