§1. 练习总结.

1000.1.10.

$f(x)$ 连续、$f(0)=1$ 且 $x\to 0$ 时 $\int_0^{x-\tan x} f(t)dt$

与 $(1+\sin^a x)^b-1$ 等价无穷小, $a,b=?$

①. $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{x-\tan x} f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{-\frac{x^3}{3}} f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot\frac{-x^3}{3}\sim\frac{-x^3}{3}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{若 } f(x)\sim ax^m,\ g(x)\sim bx^n,\quad f(x),g(x),a,b\neq 0.\\ \text{则 } f[g(x)]\sim a(bx^n)^m=ab^m x^{mn}\end{array}}$$

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^a x)^b-1=\lim\limits_{x\to 0} b\cdot\sin^a x=\lim\limits_{x\to 0} b\cdot x^a$

$\therefore\ b=-\frac{1}{3},\ a=3$

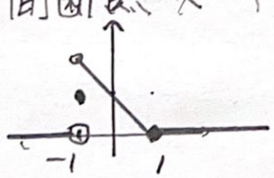
1000.1.14.

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x}{1+x^{2n}}$ 则 $f(x)$ (   ).

(A). 无间断点 (B) 间断点、$x=1$

(C). 间断点、$x=0$ (D) 间断点、$x=-1$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=1.\\ 1, & x=-1\\ 0, & |x|>1\\ 1-x, & |x|<0\end{cases}$$



$\Rightarrow$ D.

1000.1.23

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,dt}{x(e^{x^2}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(\sin x)}{x^3}$ $=F'(\xi)(x-\sin x)$

$(\int\sqrt{3+t^2}\,dt=F(x))$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+\xi}\,(x-\sin x)}{x^3}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$ $\frac{x^3}{6}$

1000.1.24

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}$

$=e^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}\overset{洛}{=}e^2\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1+x)^{-1}}{2x}\overset{洛}{=}-e^2\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-2}=-e^2$

1000.1.28.(1).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+7}+\frac{\sin^4 x}{\sqrt{x}}\right).$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+7})(\sqrt{x^2-5x}+\sqrt{x^2+7})}{\sqrt{x^2-5x}+\sqrt{x^2+7}}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin^4 x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-x^2-7}{\sqrt{x^2-5x}+\sqrt{x^2+7}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5-\frac{7}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{7}{x}}}=-\frac{5}{2}$

1000.1.28(4).

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-6}{x^2-4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{8}$

1000.1.28(5) [换元]

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} \qquad \cancel{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{-x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\underline{\underline{令t=\frac{1}{x}}}\ \lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}} \overset{洛}{=} \lim_{t\to0} e^{\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

1000.1.28(6). [洛+中值].

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\cos x\,\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)} = \cos3\lim_{x\to3^+}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$$

$$\overset{洛}{=} \lim_{x\to3^+}\frac{e^x-e^3}{x-3}\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{1}{e^x}\cdot\cos3$$

$$=\frac{\cos3}{e^3}\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{e^x-e^3}{x-3}, \qquad f(x)=e^x,\quad f(x)-f(3)=f'(\xi)(x-3)$$

$$=\frac{\cos3}{e^3}e^3=\cos3$$

1000.1.28.17

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, a_i>0, 且a_i\neq1, \ i=1\sim n, \ n\geq2$$

[solution].

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\because \lim_{x\to0}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{nx}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\lim_{x\to0}\frac{a_1^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to0}\frac{a_n^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots\ln a_n)$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)=k$$

$$\therefore 原=\lim_{x\to0}\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^k=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

1000.1.30(1)

$\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$ $x\to 0^+$ x的几阶无穷小.

[solution]

$$\lim_{x\to 0^+}\tan\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{2}+1}-1\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\tan\left[\sqrt{2}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\right]=\lim_{x\to 0^+}\tan\left[\sqrt{2}\,\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}}{4}x$$

$\to$ 1阶.

1000.1.32

$a>0,\ b>0,\ c>0$ 且

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ c, & x=0.\end{cases}$$

(1). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$ 当 $c=\sqrt{ab}$ 时连续

(2). 判断 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to 0}f(x)$, $f(-1)$, $f(1)$ 大小.

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\sqrt[x]{a^x+b^x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\max\{a,b\}^x+\min\{a,b\}^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\max\{a,b\}\sqrt[x]{1+\left(\frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}\right)^x}=\max\{a,b\}$$

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt[-x]{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{b}\right)^{-x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}}$$

$$=\min\{a,b\}$$

- $\lim_{x\to 0}f(x)=\sqrt{ab}$
- $f(1)=\frac{a+b}{2}$ $\min\le f(-1)=\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\max$

$\therefore \lim_{x\to-\infty}f(x)\le f(-1)\le f(0)\le f(1)\le\lim_{x\to+\infty}f(x)$

1000.1.34

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$$ 间断点、与类型

[solution]

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1 & |x|\in(0,1)\\ x^2 & |x|>1\\ 0 & |x|=0.\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=-1$ $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1$. $\Rightarrow x=\pm 1$ 是跳跃间断点、偶

1000.1.36

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\pi}{4}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\pi}{4}\frac{t^2}{e^t}=0=\lim_{x\to 0^+}f(x).$$

$\therefore x=0$ 是可去间断点、$x=-1$ 跳跃

1.1000.37

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 连续，求 a, b.

[solution].

$|x|\in(0,1)$ $f(x)=ax^2+bx$

$|x|\in(1,+\infty)$ $f(x)=\frac{1}{x}$

$|x|=0$ $f(0)=0$

$|x|=1$ $f(1)=\frac{1}{2}(a+b+1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

$\frac{1}{2}(a+b+1)=1=a+b.$

1000.1t.3.

$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\lambda<>0?$ $k<>0?$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0.$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-kx}=\infty\Rightarrow k>0.$

若 $\lambda>0$，有 $\lambda=e^{-kx}$ ∴ $\lambda\le0.$

1000.1t.4

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x[x+(1-x)n\sin^2\pi x]}{1+n\sin^2\pi x}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}x^2\cdot\frac{1+\frac{1-x}{x}n\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$

当 $\sin\pi x=0$ 时 $f(x)=x^2$

当 x 不取整数时 $f(x)=x(1-x)$

当 $x\in Z$ 时 有第一类间断点.

1000.1t.6.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{1}{n^x}$ $(0<x<+\infty)$，则 $f(x)$ 在间断点处取值.

(solution) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\cos\frac{1}{n^x}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(\cancel{\cos\frac{1}{n^x}}-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\cancel{n}\,n\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2x}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2x-1}}}$

$x\in(0,\frac{1}{2})$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=0$

$x=\frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{2}}$

$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ $f(x)=1.$ $\Rightarrow$ 间断点处取值 $e^{-\frac{1}{2}}$

1000.1t.7

$f(x)=27x^3+5x^2-2$ 的反函数为 f^{-1}.

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(27x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$

① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=27x^3+o(x^3)$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f^{-1}(y)=\cancel{\frac{\sqrt[3]{y}}{3}}\ \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(27x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=1$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ 原 $=\frac{2}{3}$

1000.1t.8(2)

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\,dt}\,dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}}\,dt}{\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\,dt} \overset{洛}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\sqrt{4-x^2}}}{\underbrace{\sqrt{x+1}-1}_{(1+x)^\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{1}{2}x}=2$$

1000.1t.8(9)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$

$$\overset{t=x-1}{\underset{x=t+1}{=}}\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)-(t+1)^{(t+1)}}{-t+\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)-e^{(t+1)\ln(t+1)}+1-1}{\ln(t+1)-t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(e^{(t+1)\ln(t+1)}-1)+(t)}{\ln(t+1)-t}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\ln(t+1)-t}{t-\ln(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)+(1-1)}{1-\frac{1}{t+1}}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ln(t+1)+1=1$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)-e^{(t+1)\ln(t+1)}}{\ln(t+1)-t}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{(t+1)\ln(t+1)}(\ln(t+1)+1)}{\frac{1}{t+1}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)-(t+1)^{(t+2)}(1+\ln(t+1))}{-t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{(t+2)\ln(t+1)}(1+\ln(t+1))-(t+1)}{t}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to 0}(1+\ln(t+1))\,e^{(t+2)\ln(t+1)}\left[1+\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right]+e^{(t+2)\ln(t+1)}\cdot\frac{1}{t+1}-1$$

$$=\lim_{t\to 0}\underbrace{e^{(t+2)\ln(t+1)}}_{1}\left[\underbrace{[1+\ln(t+1)]}_{1}\left[\underbrace{1+\ln(t+1)}_{1}+\underbrace{\frac{1}{t+1}}_{1}\right]+\underbrace{\frac{1}{t+1}}_{1}\right]-1$$

$$=2$$

1000.1t.9

设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$，证明 存在常数 A,B 当 $x\to 0^+$ 时 恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$

[solution].

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0^+}e\left[1-\frac{x}{2}+\overset{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{3}}+\frac{1}{2}\Big(\overset{\frac{1}{8}}{\frac{x^2}{4}}+\frac{x^4}{9}\Big)\right]+o(x^2)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow A=-\frac{e}{2}\quad B=\frac{11}{24}$$

1000.1t.10.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}, & x<0\\[2ex] \dfrac{e^{-x}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\frac{x}{6}}, & x>0.\end{cases}\qquad g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

求 $\lim_{x\to 0}f[g(x)]$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}\ e^{\frac{1}{x}}}{(1+)(e^{\frac{1}{x}})^2} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}} = \frac{0\cdot\frac{-\pi}{2}}{1} = 0.$$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x\to 0^+} f(0)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = \cancel{\to} 6.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+\frac{1}{2}x^2+x}{x^2/6} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x)+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+x}{x^2/6} = 6.$$

$\Rightarrow 6.$

1000.1t.11.

$a>5$ 且为常数，则 k 为何值时极限

$I = \lim_{x\to+\infty} [(x^a+8x^4+2)^k - x]$ 存在，并求此极限

~~$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^a+8x^4+2)^k}{x} = C = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^a+8x^4+2}{x^k}\right)^k$~~

当 $k\le 0$ 时

$I\to-\infty$

不存在，~~$a-k<0$.~~ ~~$k>a$~~

~~$= \lim_{x\to\infty}(x^{a-k}+8x^{4-k}+2x^{-k})^k$~~ ~~$I=2$~~

$k>0$ 时，

令 $t=\frac{1}{x}$

原式 $= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+8t^{a-4}+2t^a)^k - t^{ak-1}}{t^{ak}}$

当 $ak-1=0$ 时 为 $\frac{0}{0}$ 型 $\Rightarrow k=\frac{1}{a}$

$$I = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+8t^{a-4}+2t^a)^{\frac{1}{a}} - 1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{8t^{a-4}+2t^a}{at} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{a}(8t^{a-5}+2t^{a-1})$$

$a=5$ 时 $I = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{5}(8+0) = \frac{8}{5} \Rightarrow k=\frac{1}{5}.$

$a>5$ 时 $I=0 \Rightarrow k=\frac{1}{a}$

1000.1t.13

设 $x\ge 0$ 时，$f(x)$ 满足 $f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}$ 且 $f(0)=1$.

证明：$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。 $(f'(x)>0)$

$f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)} \le \frac{1}{x^2+1}$

$f(x)-f(0) = \cancel{\frac{1}{x^2+1}} \int_0^x f'(x)dx \le \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$

$f(x) \le 1+\arctan x < 1+\frac{\pi}{2}$ (上界) $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

$f(x)$ 单增

1000.1t.15.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(1+(2x)^n+[(x^n)]^2)}$$

洛 $= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln 2x\cdot(2x)^n + [x^n]^2\cdot 2\ln x}{1+(2x)^n+[x^n]^2}}$ $\quad 2x\to t$, $x\to 1$

$x\in[0,\frac{1}{2})$: $f(x) = e^{\ln 2x\cdot 0 + 0\cdot 2\ln x} = e^0 = 1.$

$x\in[\frac{1}{2},1)$ $f(x) = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^n\ln 2x}{(2x)^n+1}} = e^{\ln 2x} = 2x$

$x\in[1,+\infty)$ $f(x) = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{o(x^n)+2\ln x\cdot(x^n)^2}{o(x^n)+[x^n]^2}} = e^{\lim_{n\to\infty} 2\ln x} = x^2$