§2

- 求分布
  - 分布函数
  - 概率分布(律)
  - 概率密度
  - 反问题(求参数) 伯努力 1 — n — ∞
- 求分布
  - 离散(五个分布) 01，二项，几何(超几何) 泊松
  - 连续(三个)，均匀 指数 正态
  - 混合
- 用分布
  - $X \sim F(x)$ 分布 → 概率 $P(X \le a)$，$P(X<a)$，$P(X=a)$，$P(a<X<b)$ …
  - $X \sim p_i$ $P(X \in I) = \sum$
  - $X \sim f(x)$ $P(X \in I) = \int$ ☆
  - 反问题 [看成构成，算积分，用几何]
- 求函数分布
  - 离散 → 离散
  - 连续 → 连续
  - 连续 → 离散 [ ]

一 求分布

① 统一化，数量化

② 用微积分. $F(x) \triangleq P\{X \le x\}$

$F(x)$ 三个性质 ①单调性 ②有界性 ③右连续

例2.2

$F_1(x)$ $F_2(x)$ $f_1(x)$ $f_2(x)$

(必为概率密度的是：

$f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

① $d(F_1(x)F_2(x)) = \underbrace{f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x))dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\, F_1(x)F_2(x)$

$= F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$

例2.3 (略).

二. 求分布 ☆

二.一 0-1分布 / 两点分布

$\underline{\underline{X \sim B(1,p)}}$ X(伯努利计数变量)

二.二 二项分布

$\underline{\underline{X \sim B(n,p)}}$
① n次独立实验
② $P(A)=p$
③ 只有 A 与 $\bar{A}$ 两结果

$P(X=k)=\underbrace{C_n^k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$

▲ $\frac{U_k}{U_{k-1}}=\frac{C_n^k\ p^k\ (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}\ p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}\cdots\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \boxed{(n+1)p-1\leqslant k\leqslant (n+1)p}$

eg. 投球10次，中的概率0.8

最有可能中几次？

$(10+1)0.8-1\leqslant k\leqslant (10+1)0.8$

$7.8\leqslant k\leqslant 8.8\rightarrow 8$次

二.三 几何分布（首中即停止）.

$\underline{X\sim G(p)}$ $P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{n-1}$ (n是正整数)

二.四 超几何分布

$P(X=k)=\frac{C_M^k\ C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ← 好的取k个，坏的取n-k个 ← N里取n个

二.五 泊松分布 源源不断 质点流个数

$\underline{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,\cdots)\quad EX=\lambda\ 强度}$ eg. 商场呈射人

当 $n\geqslant 100$，$np\leqslant 10$时，

用泊松分布表示二项分布.

$C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k}\sim\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $\lambda=np$

eg. 500页书，500个错. 求第100页上至少3个错的概率.

$n\geqslant 100$, $np=500\times\frac{1}{500}=1$

$P=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

$=1-\frac{1}{0!}e^{-1}-\frac{1}{1!}e^{-1}-\frac{1}{2!}e^{-1}$

2. 连续

$X\sim f(x)$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

例2.4

$f(x)=ae^{-|x|}$, $-\infty<x<+\infty$ 求 $F(x)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^{+\infty}ae^{-x}dx=\frac{1}{2}$ $(x>0)$.

$-ae^{-x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}=0+a$

$F(x)=\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-|x|}}{2}dx=\frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-\infty}^{x}=-\frac{1}{2}e^{+x}$ $x<0$

$\cdots=-\frac{1}{2}e^{-x}+1$ $x\geqslant 0$.

求 $P(B_k)$. $P(A_0)P(B_k|A_0)$ 0

$$P(B_k) = P(A_1)P(B_k|A_1) + P(A_2)P(B_k|A_2) + \cdots$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)P(B_k|A_n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

下标减几 前项加几

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!} p^k \frac{q^n}{n!} \quad e^q$$

$$= \frac{e^{-1}}{k!} p^k e^q$$

例2.7

时间t内故障次数. $N(t) \sim \lambda t$ 泊松分布

(1) 求相继出现两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布.

泊松分布 $P\{N(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k=1,2,3$

$\cancel{F(x)=}$ $F(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\}$

$= 1 - P\{N(t)=0\} = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$.

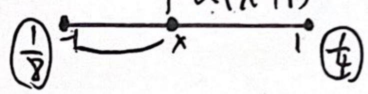
例2.9

$|X| \le 1$, $P\{X=-1\} = \frac{1}{8}$, $P\{X=1\} = \frac{1}{4}$.

在 $\{-1<X<1\}$ 发生的条件下, X在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比, 求 $F(x)$. [~~全概率~~思想]

全集概率分解

$p \propto (X+1)$



① $P\{X=-1\} = \frac{1}{8}$ $P\{X=1\} = \frac{1}{4}$

$$f_X(x|A) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad A = \{-1<x<1\}$$

② $$F(x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \cancel{\frac{1}{8}, \ x=-1} \\ \frac{1}{8} + \boxed{\frac{5(x+1)}{16}}, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$F(x) = P\{X<x\}$

$= 0 + \frac{1}{8} + P\{-1<X\le x\}$

$= P\{-1<X\le x, \Omega\}$

$= P\{-1<X\le x, A\cup\bar{A}\}$

$= P\{-1<X\le x, -1<X<1\} + P\{-1<X\le x, X\notin(-1,1)\} = \varnothing$

$[P(A) = P(A\Omega) = P(A\cdot B\cup\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})]$

$= P\{-1<X<1\} \cdot P\{-1<X\le x \mid -1<X<1\}$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{x+1}{2}$

泊松

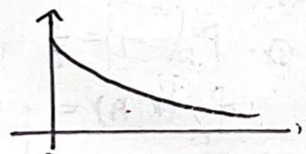
$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　　$k=0,1,\cdots$

$\longrightarrow C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \xrightarrow[np=\lambda]{\text{近似}} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

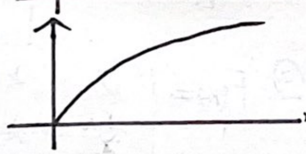
三.一　均匀分布

三.二　指数分布

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$



$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$



$EX=\frac{1}{\lambda}$　(失效率).

$P\{X\geq s+t \mid X\geq t\}=\frac{P\{(X\geq s+t, X\geq t)\}}{P\{X\geq t\}}$

$=\frac{P\{X\geq s+t\}}{P\{X\geq t\}}$

三.三　正态分布

标准：$X\sim\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$　$X\sim\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

普通：$X\sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$　　$N(0,1)$

$X\sim F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma}}dt$

☆ 标准化　$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$P(a)<X<P(b)$

$\Rightarrow P(\frac{a-\mu}{\sigma})<\frac{X-\mu}{\sigma}<P(\frac{b-\mu}{\sigma})$

四　混合型 —— 定义法

例12.5

生产线n件无故障概率$\frac{e^{-1}}{n!}$，$n=0,1,\cdots$

设优质p，求生产线两次故障间共生产k件优质品的概率.

$(\frac{e^{-1}}{n!}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　$(\lambda=1, k=n))$

$P(B_k|A_n)=\begin{cases}C_n^k p^k(n-p)^{n-k}, & k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$　"条件"

B_k：k个正品　A_n：生产成功了n个产品(正+次)

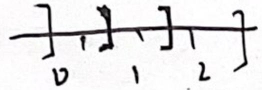
例 2.10

设 X $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$

给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 $Y\sim U(0,i)$

$(i=1,2)$，求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 和概率密度 $f_Y(y)$

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}\rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{3}{4} & 0\le y<1\\ \frac{1}{4} & 1\le y<2\\ 0 & y\ge 2\end{cases}$$

当 $0\le y<1$ 时

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,\Omega\}=P\{Y\le y,(X=1)\cup(X=2)\}$

$=P\{Y\le y, X=1\}+P\{Y\le y, X=2\}$

$=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$

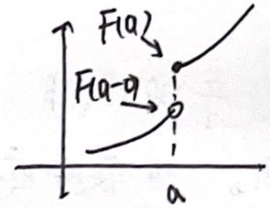
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y-0}{1-0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y-0}{2-0}=\frac{3}{4}y$

$1\le y<2$ 时

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0}{1-0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y-0}{2-0}=\frac{1}{2}+\frac{y}{4}$

三、用分布



$P\{X\le a\}=F(a)$

$P\{X<a\}=F(a-0)$

$P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$

$P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$

$P(a\le X\le b)=F(b\cancel{-0})-F(a-0)$ 细节

$X\sim p_i$ $P\{X\in I\}=\Sigma P\{X=x_i\}$

$X\sim f(x)$ $P\{X\in I\}=\int_I f(x)$

例 2.13 [看构成]

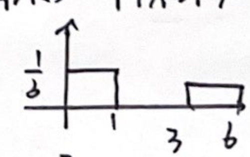
(1) X 的概率密度 $f(x)=Ae^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$ 且 $aX+b\sim N(0,1)$ $a>0$

求 A,a,b.

$X\sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\mu=-1$ $\sigma=\pm\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2}$

$\rightarrow X\sim f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$

(2) X: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le x\le 1\\ \frac{2}{9} & 3\le x\le 6.\\ 0, & \text{others}\end{cases}$ 求k，$P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$



[用几何]

$k\in[1,3]$

习2.11

正方体 充满液体，6个侧面随机部位有小孔。求~~流掉~~剩余液体高度 X 的分布函数F(x).

$P\{X=1\}=\frac{1}{6}$ $P\{X=2\}=P\{X=3\}=P\{X=4\}$ 

$=P\{X=0\}=\frac{1}{6}$ $P\{X=6\}=\frac{1}{6}.$

$\cancel{P\{}F(x)\cancel{=P_X(x)}\ \cancel{f_X(x)}$

$\cancel{F(0)=\frac{1}{6}}$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0. \\ \cancel{\frac{1}{6}}, & \cancel{x=0} \\ \frac{1}{6}+\boxed{\frac{2}{3}x} & 0<x<\frac{3}{4} \\ 1, & x\geq\frac{3}{4} \end{cases}$$

{A=底面顶漏}

$0<x<\frac{3}{4}$时 $F(x)=\cancel{f_X(x)}\ P\{X\leq x\}$

$=P\{A\}P\{X\leq x|A\}+P\{\bar{A}\}P\{X\leq x|\bar{A}\}$

$=0+\frac{2}{3}\cdot\frac{x-0}{1-0}$