柯西中值定理 ☆

- 两个具体函数满足的式子. (例6.7(2)) 例6.10.
- 一个具体函数与一个抽象函数满足的式子 ☆
- 与拉氏结合.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ g(x)往往是具体

例6.7 ☆☆☆ (2022)

设f(x)在[2,4]上一阶可导且 $f'(x) \geq M > 0$, $f(2)>0$.

证明: (1) 对任意 $x\in[3,4]$ 均有 $f(x)>M$.

[证明].

$\int_2^3 f'(x)dx + f(2) = f(2) + f'(x) \geq M$

∵ $f'(x)>0$ ∴ $x\in[3,4]$ $f(x)\uparrow$

∴ $x\in[3,4]$ 均有 $f(x)\geq M$

☆(2). 存在 $\xi\in(3,4)$ 使得 $f(\xi) > M\cdot\frac{e^{\xi-3}}{e-1}$

$\int_3^x f(t)dt \to$, $e^x \to$ $\underbrace{\frac{f(\xi)}{e^\xi}}_{\text{step1}} > \underbrace{\frac{Me^{-3}}{e-1} = \frac{M}{e^4-e^3}}_{\text{step2}}$

step3

step4: $\int_3^4 \underbrace{f(t)}_{\geq M}dt > \int_3^4 M dt = M$

令 $F(x)=\int_3^x f(t)dt$, $G(x)=e^x$

在[3,4]上用柯西

$\Rightarrow \frac{F(4)-F(3)}{G(4)-G(3)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$ $\xi\in(3,4)$

即 $\frac{\int_3^4 f(x)dx - 0}{e^4-e^3} = \frac{f(\xi)}{e^\xi} \Rightarrow \frac{f(\xi)}{e^\xi} = \frac{\int_3^4 f(x)dx}{e^3(e-1)} > \frac{\int_3^4 M dx}{e^3(e-1)} = \frac{Me^{-3}}{e-1}$

$\Rightarrow f(\xi) > M\cdot\frac{e^{\xi-3}}{e-1}$ ☆

例6.10.

证明: 对于 $b>a>0$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$b\ln a - a\ln b = (b-a)(\ln\xi - 1)$

[solution].

$\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac1a - \frac1b$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $g(x)=\frac1x$

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ $g'(x)=-\frac1{x^2}$

$\frac{\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}}{\frac1a-\frac1b} = \cancel{ab}\ \ln\xi - 1 = \frac{\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$