空间曲线的切线与法平面.

一、参数方程给出曲线.

曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I$

$\downarrow$

切向量. $\vec{\tau} = (x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$.

切线. $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面. $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$.

二、用方程组给出曲线.

曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \leftarrow$ 用x当t.

求切向量. $\tau = (1,\ y'(x_0),\ z'(x_0))$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

切线. $\dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{y'(x_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$.

法平面 $x'(x_0)(x-x_0) + y'(x_0)(y-y_0) + z'(x_0)(z-z_0) = 0$.

☆背. $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$. 交出来的曲线.

切线: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}$

例17.1

求切线与法平面 在$t=\frac{\pi}{2}$

1). $\begin{cases} x = \cos t + \sin^2 t \\ y = \sin t(1-\cos t) \\ z = \cos t \end{cases}$

$x'_t = -\sin t + 2\sin t\cos t$

$y'_t = \cos t(1-\cos t) + \sin^2 t$

$z'_t = -\sin t$

切线. $\dfrac{x-x_0}{x'_{t_0}} = \dfrac{y-y_0}{y'_{t_0}} = \dfrac{z-z_0}{z'_{t_0}}$.

令$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{\tau} = (x'_t, y'_t, z'_t) = (-1, 1, -1)$

$(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$

切线. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{-1}$

法平面 $-(x-1) + (y-1) - z = 0$.

2) $\begin{cases} x = y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$.

令$t=y$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x=t^2\\ y=t\\ z=t^4\end{cases}\quad\begin{cases}x'_t=2t\\ y'_t=1\\ z'_t=4t^3\end{cases}\ \xrightarrow{t=1}\ \begin{cases}x'_t=2\\ y'_t=1\\ z'_t=4\end{cases}\quad\begin{cases}x_0=1\\ y_0=1\\ z_0=1\end{cases}$$

切. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{4}$

法平. $2(x-1)+(y-1)+4(z-1)=0$.

例 17.2

$f'_x(0,0)=3$, $f'_y(0,0)=1$. $z=f(x,y)$在$(0,0)$附近有定义

$\longrightarrow dz|_{(0,0)}=3dx+dy$ 错.

$\longrightarrow$ 令 $\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=f(t,0)\end{cases}$ $\longrightarrow \vec{\tau}=\{1,0,f'_x(0,0)\}$

$\therefore$切向量是$(1,0,3)$

曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0.\end{cases}$ 切线向. 写参数方程

~~例17.7~~

二. 空间曲面的切平面与法线.

(1). 用隐式方程给出曲面. $F(x,y,z)=0$.

法向量 $(F'_x|_{P_0},\ F'_y|_{P_0},\ F'_z|_{P_0})$.

切平面. $F'_x|_{P_0}(x-x_0)+F'_y|_{P_0}(y-y_0)+F'_z|_{P_0}(z-z_0)=0$.

法线 $\dfrac{x-x_0}{F'_x|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{F'_y|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{F'_z|_{P_0}}$

(2). 显式方程给出曲面.

$z=f(x,y)\Longrightarrow f(x,y)-z=0$

法向量. $\vec{n}=(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1)$

$\vec{n}$向下

切平面. $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$. 的情况

法线 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

(3). 参数方程.

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v).\end{cases}\longrightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}=(A,B,C)$$

例17.3. 考得最多

曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在(1,0,1)切平面

[solution]

$F(x,y,z)=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z$

$$\begin{cases} F'_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x \\ F'_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x) \\ F'_z=-1 \end{cases}$$

在 (1,0,1)

(2, -1, -1)

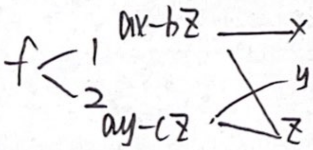
切平面 $\cancel{\frac{x-a}{2}}$ $2(x-1)-1(y-0)-1(z-1)=0.$

$2x-y-z=1$

例17.4.

设 $f(u,v)$ 可微，证明 $f(ax-bz, ay-cz)=0$ 上任一点的切平面都与某一定直线平行，→柱面

a,b,c 是不同为零的常数 法向量→垂直



$\vec{n}=(f'_x, f'_y, f'_z)$

$=(\underset{ab}{af'_1}, \underset{ac}{af'_2}, \underset{ab\quad ac}{-bf'_1-cf'_2})$

取 $\vec{\tau}=\{b, c, a\}$ 使 $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0.$

例17.5 ★(特殊性) 柱面

证明曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$ 是柱面，f 可微.

令 $F(x,y,z)=f(\pi y-\sqrt{2}z)-e^{2x-z}$

$\vec{n}=(F'_x, F'_y, F'_z).$

$=(-2e^{2x-z}, \pi f', -\sqrt{2}f'+e^{2x-z})$

取 $\vec{\tau}=(a,b,c).$

s.t. $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0.$ $0=-2ae^{2x-z}+\pi bf'-\sqrt{2}cf'+ce^{2x-z}$

$c-2a=0.$ $\sqrt{2}c-\pi b=0.$

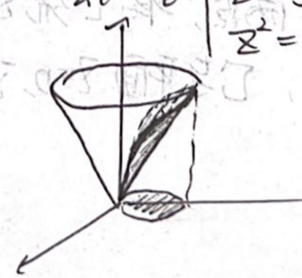
令 $c=1$ 则 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{cases}$ ∴如果 $\vec{\tau}=\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=1 \\ c=\frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{cases}$ 则 $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0.$

三、空间曲线在坐标面上的投影

投影，没有哪个字母就消去哪个字母。

例17.6

求 $\Gamma: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程



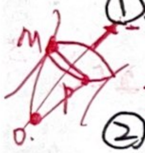
step1. 消 z.

$x^2+y^2=2x$

Step2. 联立 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \longrightarrow (x-1)^2+y^2=1. \\ z=0. \end{cases}$

四. 旋转曲面.

1. 任意一曲线 绕另一曲线.



① 曲线 $\Gamma = \boxed{\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}}$ 绕 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$.

$MP \perp l$

② $m(x-x_1)+n(y-y_1)+l(z-z_1)=0$

$MO=PO$

③ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$

eg. 绕z轴 → $m,n,l = 0,0,1$.

$\Downarrow$

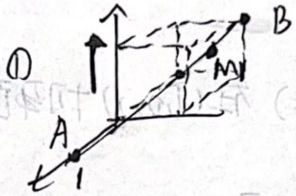
得 $\begin{cases} F(x_1,y_1,z)=0 \\ G(x_1,y_1,z)=0 \\ x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 \end{cases}$ 消去 x_1^2, y_1^2 得到方程

例18.11

设 l 过 $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(1). 求曲面 Σ 的方程

①



L: ① $\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-0}{-1}$

过 $A(1,0,0)$ $\vec{\tau}=(1,-1,-1)$.

$M_1:(x_1,y_1,z_1)$. ②

1) 到原点距离相等. $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$

2) 垂直 $0(x-x_1)+0(y-y_1)+1(z-z_1)=0$

$\Rightarrow$ ② $z=z_1$

$\Rightarrow$ $\cancel{x^2+y^2}$ $\begin{cases} x_1=1-z \\ y_1=z \\ z_1=z \end{cases}$