§13. 多元函数微分学

一、概念.

偏导数连续 → 可微 → 偏导存在（某方向双侧）.

可微 → 连续 → 极限存在（全方向）

可微 → 方向导数存在（某方向单侧）.

1) 默认排除无定义区域.

2). 单调有界准则不可用

3). 可用其他一元的方法.

① 例13.1.

证明: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 不存在.

$$原=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy(\sqrt{x+y+1}+1)}{x+y} = 2\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{x+y}$$

找不同路径 $x+y=kx^2$

$$原=2\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x(kx^2-x)}{x+kx^2-x} = -\frac{1}{k}$$ 与k有关

① $\lim\limits_{x,y\to0} \frac{xy}{x+y}$ 不存在，取 $y=kx^2-x$

② $\lim\limits_{x,y\to0} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 取 $y=kx$

③ $\lim\limits_{x,y\to0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$ $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$

$|ab|=\sqrt{a^2b^2}\le\frac{a^2+b^2}{2}$ 均值.

$$0.\le\lim_{x,y\to0}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\lim_{x,y\to0}\frac{|xy|}{\sqrt{2}\sqrt{|xy|}}=\lim_{x,y\to0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}=0$$

例13.2

$$0\le\lim_{x,y\to\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$ $|ab|\le\frac{a^2+b^2}{2}$

$$\le\lim_{x,y\to\infty}\left[\frac{|x^2+y^2|}{2(x^2+y^2)}\right]^{x^2}=\lim_{x,y\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0.$$

② 连续.

[往往是 告之连续，求函数值].

例13.4

连续，$z=f(x,y)$. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0.$

求 $f(0,1)$. → $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}[f(x,y)-2x+y-2]=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=0$$

$f(x,y)=1$

③ 偏导数.

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

例13.5

已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 则.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\begin{cases}+1\\-1\end{cases}$$ 不存在

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=0.$$ 存在

练习.

$f(x,y)=x^y$ 求 $f'_x(x,y)=$.

$(x^k)'=kx^{k-1}\to\quad yx^{y-1}$

$f'_y(x,y)=$

$(a^x)'=a^x\ln a\to x^y\ln x.$

$f''_{xx}(x,y)=$ _ $f''_{yy}(x,y)=$ _ $f''_{xy}(x,y)=$ _

例13.6.

$f(x,y)=(xy+xy^2)e^{x+y}$

则 $\dfrac{\partial^{10}f}{\partial x^5\partial y^5}=?$

$f(x,y)=xe^x\cdot(y+y^2)e^y$

$$=\left[C_5^0\,x(e^x)_x^{(5)}+C_5^1\,1\cdot(e^x)_x^{(4)}\right]\cdot\left[C_5^0(y+y^2)(e^y)_y^{(5)}+C_5^1(1+2y)(e^y)_y^{(4)}+C_5^2\,2(e^y)_y^{(3)}\right]$$

$$=\left((5+x)e^x\right)\left(y^2+11y+25\right)e^y$$

$$=(5+x)(y^2+11y+25)e^{x+y}$$

例13.5 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f'_x(x_0,y_0)$
1) 定义法
2) 先求导,再代(x_0,y_0).

$$\left(e^{\sqrt{x^2+y^4}}\right)'_x=e^{\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^4}}$$ ← 代不了值,只能用定义

④ 可微.

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

$A=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx$

$B=\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

是否可微:
1) 写全增量: $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$
2) 写线性增量: $A\Delta x+B\Delta y$.
3) 作极限 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

例13.7.

已知 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

①. $\cancel{\Delta z=}\ \Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)$

$$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0$$

② $\Delta z=\cancel{\Delta f}\ A\Delta x+B\Delta y$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x^2}=0$$ (无穷小·有界).

$$B=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-0}{\Delta y}=0.$$

$\Rightarrow \Delta z=0.$ $\quad \Delta z-\Delta f$

③. $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$ 可微. $\leftarrow \rho$

例13.4.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0.$$

则 $dz|_{(0,1)}=?$ $\quad$ ⓪ $f(0,1)=1$

① $f(x,y)-\underbrace{2x+y-2}=o\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\right)=o(\rho)$

② $f(x,y)-f(0,1)-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\rho).$

$=\underbrace{f(x,y)-f(0,1)}_{\Delta z}-\underbrace{\left(2(x-0)+(-1)(y-1)\right)}=o(\rho).$

$\therefore dz|_{(0,1)}=2dx-dy$

⑤ 偏导数连续.

step1. 定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

step2. 公式法求 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

step3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)$ $\quad$ step 8 4

例13.8

二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微的充分条件.

偏导数连续 ⟶ 可微 ⟸ 用定义☆

(A). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0.$

连续定义 $\quad$ 连续 ⇏ 可微

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$

且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ $\quad$ 偏导定义

偏导存在 ⇏ 可微

(C). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=0$

$\underbrace{f(x,y)-f(0,0)}_{\Delta f}-\underbrace{0}_{A\Delta x+B\Delta y\ ?}$

取 $y=0$，$x\to 0$ 路径

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}=0.$ 同理 $B=0$

(D). $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$

表达式错 — $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)=f'_x(0,0)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_y(x,y)=f'_y(0,0)$.