高等数学

物理应用

以A对B的变化率为核心写成dA/dB

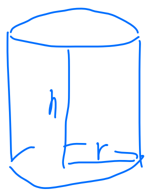
5'

例7.1

例 7.1 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s，−3 cm/s. 当底面半径为10 cm，高为 5 cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为（　　）.

(A) $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$　　(B) $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$

(C) $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$　　(D) $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$



$V = \pi r^2 h$

$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi h r \frac{dr}{dt} = 100\pi(-3) + 100\pi \cdot 2$

$= -100\pi$

$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$

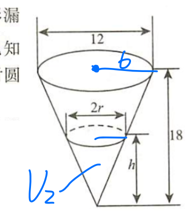
$\frac{dS}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt} h + 2\pi r \frac{dh}{dt} + 4\pi r \frac{dr}{dt} = 40\pi \quad \Rightarrow C$

例7.2

例 7.2 溶液自深为 18 cm、上端圆的直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗中，漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其液面下落的速率为 1 cm/min，问此时圆柱形筒中的液面上升的速率是多少？

$\frac{1}{3}$

w



$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r^3$

$\frac{dV_2}{dt} = 3\pi r^2 \frac{dr}{dt}\Big|_{\substack{dr/dt=\frac{1}{3} \\ r=4}} = 3\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 16 = 16\pi$

$h = \frac{V}{S} = \frac{V}{25\pi}$

$\frac{dh_w}{dt} = \frac{dV/dt}{25\pi} = \frac{16}{25}$

习7.1

7.1 （仅数学一、数学二）设一质点沿曲线 $r = 2\theta$ 运动，若角度 $\theta = t^2$（t 表示时间），当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，求质点的速度 v、加速度 a.

$t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\theta\cos\theta = 2t^2\cos t^2 \\ y = r\sin\theta = 2\theta\sin\theta = 2t^2\sin t^2 \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = 4t\cos t^2 - \underbrace{2t^2\sin t^2 \cdot 2t}_{4t^3}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 0 - \pi \cdot \sqrt{2\pi} = -\pi\sqrt{2\pi}$

$\frac{dy}{dt} = 4t\sin t^2 + \underbrace{2t^2\cos t^2 \cdot 2t}_{4t^3}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$v=\sqrt{8\pi+2\pi^3}$

$a=\sqrt{100\pi^2+(4+2\pi)^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\underline{4\cos t^2}-4t\sin t^2\cdot 2t-12t^2\cdot\sin t^2\underline{-4t^3\cos t^2\cdot 2t}=-20\frac{\pi}{2}$

$\frac{d^2y}{dt^2}=4\sin t^2+\underline{4t\cos t^2\cdot 2t}+\underline{12t^2\cos t^2}-4t^3\sin t^2\cdot 2t=4-8\frac{\pi^2}{4}$

习7.2

7.2 （仅数学一、数学二）设两地之间的直线距离 $|AB|=2\,700$ m，A 为起点，B 为终点，一司机驾车（当作质点看）由起点 A 从静止开始作直线运动至终点 B 停止，恰好用了 60 s，证明该车在行驶过程中至少有一时刻的加速度的绝对值不小于 3 m/s^2.

$y=y(t)$　　$y(0)=0$　　$y(60)=2700$

$v=y'(t)$　　$y'(0)=0$　　$y'(60)=0$

$a=y''(t)$　　$y=y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+\frac{y''(\xi)}{2}(t-t_0)^2$

$t_0=0$　　$y=0+0+\frac{y''(\xi)}{2}t^2$　　(1)

$t_0=60$　　$y=2700+0+\frac{y''(\eta)}{2}(t-60)^2$　　(2)

令 $t=30$　　(2)-(1)　　$0=2700+\frac{900}{2}\left(y''(\eta)-y''(\xi)\right)$

$\Rightarrow 2700=450\left(y''(\xi)-y''(\eta)\right)$

$=450\left|y''(\xi)-y''(\eta)\right|\leqslant 450\left[\left|y''(\xi)\right|+\left|y''(\eta)\right|\right]$

$\leqslant 450\cdot 2\max\left\{\left|y''(\xi)\right|,\left|y''(\eta)\right|\right\}=900\ y''(\xi)$

$\Rightarrow y''(\xi)\geqslant 3$

千7.1.1

2700×4

1. 球的半径以 5 cm/s 的速度匀速增长，问球的半径为 50 cm 时，球的表面积和体积的增长速度各是多少？

$S=4\pi r^2$　　$\frac{dS}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}=400\pi\cdot 5=2000\pi$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　　$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}=50000\pi$

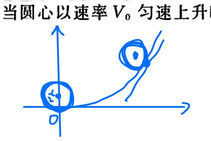
千7.1.2

2. 半径为$\boxed{\frac{1}{2}}$的圆在抛物线$\boxed{x=\sqrt{y}}$凹的一侧上滚动.

（1）求圆心(ξ,η)的轨迹方程；

（2）当圆心以速率 V_0 匀速上升时，求圆心的横坐标 ξ 的增长速度.

(1)



$y=x^2$　　$k=2x_0$　　$k'=-\frac{1}{2x_0}$

$$\begin{cases}\frac{\eta-x_0^2}{\xi-x_0}=-\frac{1}{2x_0}\\ \sqrt{(\eta-x_0^2)^2+(\xi-x_0)^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\eta=-\frac{\xi-x_0}{2x_0}+x_0^2=-\frac{\xi}{2x_0}+\frac{1}{2}+x_0^2$

$(4x_0^2+1)(\xi-x_0)^2=x_0^2$

$$\begin{cases}x & \xi=\sqrt{\frac{x_0^2}{4x_0^2+1}}+x_0\\ y & \eta=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4x_0^2+1}}+x_0^2\end{cases}\quad(x_0\geqslant 0)$$

$\frac{d\eta}{d\xi}=\cdots=\frac{1}{2x}$　　$\frac{d\eta}{dt}=V_0$　　$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}=\frac{V_0}{2x}$