§2 习题与1000题总结.

习2.1 已知$\{a_n\}$单调：

A $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{a_n}-1)$ 存在 × 需要 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n^2}$ 存在 $n\to+\infty$. $\dfrac{1}{n}\to 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$.

C $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$ ← 振荡不存在

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a_n^2}$ $a_n\to\pm A$ ✓ $a_n\to\pm\infty$.

$\boxed{\text{构造 } a_n=\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}\uparrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}=\infty.}$

习2.2 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=?$ 令 $\dfrac{1}{n}=t$ $t\to 0$.

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to 0}}\frac{1}{t}\cdot\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{1+t}}x^{\frac{1}{t}-1}\sqrt{1+x^{\frac{1}{t}}}\,dx$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{1+t}}\sqrt{1+x^{\frac{1}{t}}}\,d\,x^{\frac{1}{t}}$$

$x^{\frac{1}{t}}=u$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\int_0^{\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{t}}}\sqrt{1+u}\,du=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[1+\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{3}{2}}-1$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{1+t}}=e^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n=(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$$

[答案方法：]

$$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx=\frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,d(x^n+1)$$

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\underbrace{\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}}_{n a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n+1\right]^{\frac{3}{2}}-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=e^{-1}.$$

习2.3

设 $a_1=1$, $a_2=2$ $a_{n+2}=\dfrac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$

(1) 求 $b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ 表达式.

$$b_n=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}$$

$$a_{n+2}=\frac{(a_n+a_{n+1})^2-a_n^2-a_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}}=(a_n+a_{n+1})-\frac{(a_n+a_{n+1})(a_n-a_{n+1})}{a_n+a_{n+1}}=(a_n+a_{n+1})-\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2a_na_{n+1}}$$

$$b_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2a_na_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{2a_na_{n+1}}=-\frac{1}{2}b_n$$

$$b_1=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) 求 $\sum\limits_{k=1}^n b_k$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$$\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)^n<\sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{2}\right)^k<\left(-\frac{1}{2}\right)^n n}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{(-\frac{1}{2})^n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\frac{3}{2}$$

习2.4 设 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$

(1) $f(x)\min$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\overset{令}{=}0 \quad x=1$

$x<1.\ f'(x)<0 \quad x>1\ f'(x)>0.\ f(x)\min=f(1)=1.$

(2) 设 $\{a_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 证明

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求极限。

~~构造 $|x_{n+1}-1|$~~ 由1)：$\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1$

$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leq \ln x_n+\frac{1}{x_n}$

$\therefore \frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n} \Rightarrow x_{n+1}>x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 递增.

$x_n>0$

$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1 \Rightarrow \ln x_n<1 \Rightarrow x_n<e$ 有上界

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 A：$\ln A+\frac{1}{1+A}\overset{=}{\leq}1$

$A=1$

习2.5 $n\in Z^+$

(1) 证明对 $\forall n$，$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立

~~$f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(\frac{x+1}{x})$~~

$f(n)=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$

$=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)$

$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\xi}\cdot 1 \quad \xi\in(n,n+1).$

$<0.$

同理 $g(n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{\xi}>0.$

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,3\ldots)$

证明 $\{a_n\}$ 收敛

① $a_n=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-\ln n$

$a_{n+1}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right)-\ln (n+1)$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)$

$=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0.$ 单减

② $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots$

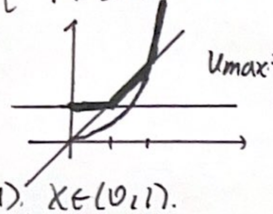
$\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln(1+n)-\ln n>0.$ 有下界

习2.6.（夹逼）

求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geq 0)$ 表达式.

[有限项放缩：$u_{max}\leq u_1+u_2+u_3\leq n\,u_{max}$]



$$u_{max}=\begin{cases}1 & x\in(0,1)\\ x & x\in(1,2)\\ \frac{x^2}{2} & x\in(2,+\infty).\end{cases}$$

1). $x\in(0,1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 1^n}$$

$\Rightarrow f(x)=1$

2) $x\in(1,2)$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot x^n}$$

$\Rightarrow f(x)=x$

3) $x\in(2,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^n}$$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}$

习2.7

(1) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f'(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$

证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单增.

[分析] 用拉氏.

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\forall b>a>0$.

$\because f'(x)>0$，$x>0$

$\therefore f'(\xi)>0$　$b-a>0$ $\Rightarrow f(b)-f(a)>0\Rightarrow(0,+\infty)\nearrow$

(2). 证明$f(x)=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加

n为正整数

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}\ln(n^x+1)}$$

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}\ln(n^x+1)}\cdot\left[+\frac{\ln(n^x+1)}{x^2}-\frac{1}{x}\frac{n^x\ln n}{n^x+1}\right]\cancel{\geq 0}.$$

$$\cancel{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}}=\cancel{\frac{1}{x}\frac{n^x\ln n}{n^x+1}}\quad>\frac{1}{x^2}\cdot\ln n^x-\frac{1}{x}\cdot\ln n=0.$$

$\therefore f(x)\nearrow$.

(3). 设数列 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$$x_n=(n^1+1)^{-1}+(n^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(n^3+1)^{-\frac{1}{3}}+\cdots+(n^n+1)^{-\frac{1}{n}}$$

$(\because f(x)=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}\nearrow$，$\therefore$ $\xrightarrow{\text{递增}}$ $)$

放缩

$$n\cdot(n^1+1)^{-1}<x_n<n(n^n+1)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}<\lim_{n\to\infty}x_n<\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{1+n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+n^{-n}}}$$

$\downarrow$

1　　　　1

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\tfrac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}\ln\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]}$$

$=1$

1000.2.2.

设 $x>0, x\neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n-1]{x}-\sqrt[n]{x})$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n}}(x^{\frac{1}{n(n-1)}}-1)$$

$$\overset{等价}{=}\lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n(n-1)}\ln x=\ln x$$

1000.2.3.

$x_1=1 \quad x_{n+1}=\frac{x_n+3}{x_n+1}$ 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

step1. 若极限存在 $=A$:

$$A=\frac{A+3}{A+1} \Rightarrow A=\sqrt{3}$$

step2. $y_n=x_n-\sqrt{3}$.

$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|=\left|\frac{x_{n+1}-\sqrt{3}}{x_n-\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{\frac{x_n+3-\sqrt{3}x_n-\sqrt{3}}{x_n+1}}{x_n-\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{\cancel{(x_n-\sqrt{3})}(1-\sqrt{3})}{(x_n+1)\cancel{(x_n-\sqrt{3})}}\right|=\frac{\sqrt{3}-1}{x_n+1}$$

$$x_n+1>1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{x_n+1}<\sqrt{3}-1$$

$$0\leq|y_{n+1}|<(\sqrt{3}-1)|y_n|<(\sqrt{3}-1)^2|y_{n-1}|<(\sqrt{3}-1)^n|y_1|=(\sqrt{3}-1)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-1)^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|y_n|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x_n|=\sqrt{3}.$$

1000.2.5.2

记 $a_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$, $n=0\sim n$. 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=?$

[solution].

$$a_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=\underbrace{\left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0}+\int_0^{+\infty}ne^{-x}dx^{n-1}$$

$$=n\int_0^{+\infty}e^{-x}dx^{n-1}=na_{n-1}$$

$$a_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

$\therefore a_n=n!$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big|_{x=1}=e^x\Big|_{x=1}=e$$

1000.2.5.3

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

① $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

② 原 $=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right]^{\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

1000.2_5.5.

设当 $a\le x\le b$ 时, $a\le f(x)\le b$, 并设存在常数 k, $0\le k<1$, 对于 $[a,b]$ 上 $\forall$ 两点 x_1, x_2, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$

(1) 证明. 存在唯一的 $\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\xi$.

$x_1\to x$ $x_2\to x_0$ 固定:

$|f(x)-f(x_0)|\le k|x-x_0|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftarrow \because x\to x_0$ 时 $|f(x)-f(x_0)|\to 0$

$\therefore f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 连续 $\boxed{\text{证明}f(x)\text{连续}}$

令 $\varphi(x)=f(x)-x \longleftarrow$ [证明存在性]

则 $\varphi(a)=f(a)-a\ge 0$. 1)

$\varphi(b)=f(b)-b\le 0$. 2)

△若 1) 2) 至少一个等号成立:

如 $\varphi(a)=a \Rightarrow$ 取 $\xi=a\in[a,b]$ 有 $\varphi(\xi)=f(\xi)-\xi=0$.

△若两等号都不成立.

$\Rightarrow \begin{cases}\varphi(a)=f(a)-a>0 & \cancel{\Rightarrow f(a)>a}\\ \varphi(b)=f(b)-b<0 & \cancel{\Rightarrow f(b)<b}.\end{cases}$

由 介值定理 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

[证明唯一性], 用反证法

设 $\eta\in[a,b]$, $\eta\ne\xi$. s.t. $\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$.

于是 $f(\eta)-f(\xi)=(\eta-\xi)\cdot 1$

$\therefore f'(\xi)=1$ 又 $\because k<1$ 矛盾 $\therefore$ 唯一.

(2). 对于给定的 $x_1\in[a,b]$, 定义 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

$$|x_{n+1}-\xi|=|f(x_n)-f(\xi)|\le k|x_n-\xi|\le\cdots\le \underbrace{k^{n-1}}_{0}\underbrace{|x_1-\xi|}_{\text{常数}}=0.$$

1000.2_5.6.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 满足 $0\le f(x)\le x$, $x\in[0,+\infty)$

设 $a_1\ge 0$. $a_{n+1}=f(a_n)$. $(n=1,2,\cdots)$

证明. (1) $\{a_n\}$ 为收敛数列.

$f(x)-x\le 0$.

$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n\le 0$. 单减

~~$a_{n+1}-a_n$~~ 又 $a_n=f(a_{n-1})\ge 0$. 下界 $\Rightarrow$ 收敛

(2). 证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$, 则有 $f(t)=t$.

$$t=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(t)$$

(3). 若条件改为 $0\le f(x)<x$, $x\in(0,+\infty)$ 则(2)中的 $t=0$.

$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n<0$. $\Rightarrow$ 收敛 $\{a_n\}$

$a_n=f(a_{n-1})\ge 0$

$0\le f(a_n)<a_n$ $\quad 0\le \underset{f(t)}{f(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)}<\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$ $\{a_n\}$ 收敛

由 $a_n \geq 0$ 及 $\lim_{n\to\infty} a_n = t \Rightarrow t \geq 0$.

若 $t \neq 0$，则 $t \in (0,+\infty)$ 且 $f(t) < t$.

但与 (2) $f(t) = t$ 矛盾 $\Rightarrow t = 0$.

1000.2.5.7

设 $\{x_n\}$ 满足 $0 \leq f(x) < x$ ~~$x\in(0,+\infty)$~~ $\ln(1+x_n) = e^{x_{n+1}} - 1$

(1) 证明：当 $0<x<1$ 时，$\ln(x+1) < x < e^x - 1$

① ~~$f(x) = x_n - x$~~

$f_1(x) = \ln(x+1) - x \quad f_1'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 \stackrel{\text{令}}{=} 0 \quad x = 0.$

$f_1(x)_{max} = f_1(0) = 0.$

$\therefore x \in (0,1)$ 时 $f_1(x) < 0 \Rightarrow \ln(x+1) < x$

② $f_2(x) = x - e^x + 1 \quad f_2'(x) = 1 - e^x \stackrel{\text{令}}{=} 0 \quad x = 0.$

$f_2(x)_{max} = f_2(0) = 0$

$x \in (0,1)$ 时 $f_2(x) < 0 \Rightarrow x < e^x - 1$

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限

~~构造 $|x_n - 0| <$~~

~~$\ln(x_n+1) < |x_n - 0| < e^{x_n} - 1$~~

~~$\ln(x_n+1) < |x_n - 0| < \ln(x_{n-1}+1)$~~

$\ln(x+1) < x < e^x - 1$

$\because \; 0 < e^{x_2} - 1 = \ln(x_1+1) < x_1 < 1$

同理：$0 < e^{x_n} - 1 = \ln(x_{n-1}+1) < x_{n-1} < 1$

$\therefore$ 有界.

$$\boxed{x_{n+1} < e^{x_{n+1}} - 1 < \ln(1+x_n) < x_n}$$

$\therefore x_n$ 单减、有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ 极限存在，记为 $A \geq 0$.

$\ln(1+a) = e^a - 1 \Rightarrow a = 0.$

1000.2.5.8.

设 $F(x,y) = \frac{f(y-x)}{2x}$，$F(1,y) = \frac{y^2}{2} - y + 5$，$x_0 > 0$，$x_1 = F(x_0, 2x_0)$

$\ldots\ldots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n)$，$n = 1,2,\ldots$

证 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求极限.

$F(1,y) = \frac{f(y-1)}{2} = \frac{y^2}{2} - y + 5$

$f(y-1) = y^2 - 2y + 10 = (y-1)^2 + 9$

$\Rightarrow F(x,y) = \frac{(y-x)^2 + 9}{2x}$

$x_1 = F(x_0, 2x_0) = \frac{x_0^2 + 9}{2x_0}, \ldots, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right)$

$x_{n+1} \geq 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x_n \cdot \frac{9}{x_n}} = 3.$ $\therefore \{x_n\}$ 有下界

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n \cdot x_n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ 单减.

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 A.

$A = \frac{A^2+9}{2A} \Rightarrow A = 3$

保号性，舍 -3