三、函数极限的存在性.

[洛的三个条件]

- 具体型 [1.19, 1.20] 不满足洛必达 → $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$；分子分母可导；结果为 0, $C\neq 0$, ∞ → $\boxed{\text{用夹逼}}$
- 抽象型 [1.21]. $\boxed{\text{用单调有界准则}}$

例1.19（考过了）.

设 ~~f~~ $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,dt$

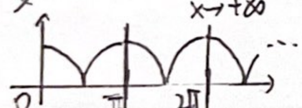
(1). 当 n 为正整数且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\le S(x)<2(n+1)$.

(2). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

原题：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos x|}{x}dx$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos x|dx}{x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{|\cos x|}{1}$$，不存在 ⇒ 洛.失效.

(1). $|\cos t|$



$S(n\pi)=\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=2n$

$S((n+1)\pi)=\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=2(n+1)$.

$S'(x)=|\cos x|\ge 0$.

∴ 当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，$2n\le S(x)<2(n+1)$

(2).
$$\left.\begin{array}{l} n\pi\le x<(n+1)\pi \\ 2n\le S(x)<2(n+1)\end{array}\right\}\rightarrow \frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

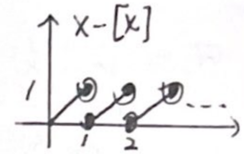
当 $x\to\infty$ 时，$n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$$

例1.20 ☆（尚未考过）.

设 $f(x)=x-[x]$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$



原 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x x-[x]\,dt}{x}$

当 $n<x<n+1$ 时
$$\left\{\begin{array}{l}\cancel{f(n)}=\int_0^n f(x)dx=\frac{n}{2}\\ \int_0^{n+1}f(x)dx=\frac{n+1}{2}\\ \left[\int_0^x f(t)dt\right]'=f(x)\ge 0,\ \int_0^x f(t)dt \text{ 增}\end{array}\right\}\quad \frac{n}{2}<\int_0^x f(t)dt<\frac{n+1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)}<\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}<\lim_{x\to+\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$\frac{1}{2}$ ⇒ $\frac{1}{2}$ ⇐ $\frac{1}{2}$

例1.21 ☆☆☆

(1). 证明当 $x\ge 1$ 时，$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$

(2). 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

① $\ln\frac{b}{a}=\underbrace{\ln b-\ln a}_{f-f}$

② 连续不等式
$A<B<C$
$a<\xi<b$

[分析]. $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln(\frac{x+1}{x})=\ln(x+1)-\ln x$

对 $\ln t$ 在 $[x,x+1]$ 上用拉氏 ⇒

$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{\xi}\cdot 1\quad \xi\in(x,x+1)$.

$\therefore \frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$.

(2). $\because \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

证单增

$\therefore \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} < \sqrt{\frac{1}{x}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} > 0.$

$\therefore f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+f^2(x)}}_{0<\bigcirc\leq 1}\left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right] > 0.$

证有上界

$\because f'(x) \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} < \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{1+x}}$

用N-L公式: $\int_1^x f'(t)\,dt < \int_1^x \left(\sqrt{\frac{1}{t}} - \sqrt{\frac{1}{1+t}}\right)dt < \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{t}} - \sqrt{\frac{1}{1+t}}\,dt$

$= \left[2\sqrt{t} - 2\sqrt{1+t}\right]_1^{+\infty} = 0 - (2-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$

又$\because \int_1^x f'(t)\,dt = f(x) - f(1) < 2\sqrt{2} - 2$

$\Rightarrow f(x) < 2\sqrt{2} - 2 + f(1)$. $\therefore f(x)$单调递增且有上界

$\therefore$ 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = M$ 存在.