罗尔定理.

1)证 $F'(\xi)=0$. 例1 6.3, 6.4(2) 6.5 习6.5(2)

2)证 $F^{(n)}(\xi)=0$. $n\geq 2$. 例1 6.6(2)

例1 6.6(2)

设 $f(x)$ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 二阶可导且存在相等 max，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$

· 证明(1) 存在 $\eta\in(a,b)$. s.t. $f(\eta)=g(\eta)$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$

$F(a)=F(b)=0$.

设 $f(\eta_1)=M$，$g(\eta_2)=M$，如果 $\eta_1=\eta_2$ 则 $\eta_1=\eta_2=\eta$.

如果 $\eta_1\neq\eta_2$ 不妨设 $\eta_1>\eta_2$ 　 a —— η_2 —— η_1 —— b

$F(\eta_1)=M-g(\eta_1)>0$ 　 $F(\eta_2)=f(\eta_2)-M<0$.

由零点定理，$F(\eta)=f(\eta)-g(\eta)=0$ 　 $\eta\in(\eta_2,\eta_1)$.

· 证明(2) 存在 $\xi\in(a,b)$ s.t. $f''(\xi)=g''(\xi)$.

$$F'(\xi_1)=\frac{F(\eta)-F(a)}{\eta-a}=0. \quad F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(\eta)}{b-\eta}=0.$$

$$F''(\xi)=\frac{F'(\xi_2)-F'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=0.$$

(例1 6.4(2).)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，$f(0)=0$. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

存在 $a>0$，$f(a)=1$. 证明 存在 $\xi\in(0,a)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{1}{a}$

[证]. 0 —————— a 　 $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a}$.

例1 6.5

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$.

$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$. 证明 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同点 ξ_1 ξ_2.

s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

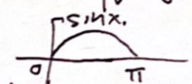
[solution]

1) $\cancel{\int_0^\pi f(x)dx}$ 构造 $F(x)=\int_0^x f(t)dt \Rightarrow F(0)=F(\pi)=0$.

罗尔 $F'(\xi_1)=0$ 　 $\xi_1\in(0,\pi)$

2) $\int_0^\pi f(x)\cos x=\int_0^\pi \cos x\,d[F(x)]=F(x)\cos x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi F(x)\,d\cos x$

$=0+\int_0^\pi F(x)\sin x\,dx=0$.



存在 $F(\xi_2)\sin\xi_2=0$. 否则 $\int_0^\pi F(x)\sin x\,dx$ 恒正或恒负.

$\xi_2\in(0,\pi)$ 　 $\sin\xi_2\neq0$ ∴ $F(\xi_2)=0$.

习6.5(2)

$f(x)$ $[0,1]$ 二阶导，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$.

$f(0)=$ $f(x)=0$. 在 $(0,1)$ 至少一实根

证：$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两不同实根

$F(x)=f(x)f'(x)$ 　 $F'(x)=f(x)f''(x)+(f'(x))^2$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在 $\Rightarrow$ $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$ 保号性 $a\in(0,1)$ 使得 $\frac{f(a)}{a}<0$. 即 $f(a)<0$.

$=0$ 　 <0 　 $=0$ 　 >0 　 零点定理 $b\in(a,1)$. $f(b)=0$.

0 —— a —— b —— 1

∴ $F(a)=F(b)=0$.

$F'(x_0)=0$ 　 $x_0\in(a,b)$.