# 零点定理.

例6.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)<1$, 则方程

$2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内.

[solution].

$\int_0^x f(t)dt=2x-1 \Rightarrow f(x)=\frac{\ln(2x-1)}{2}+C$

令 $f(1)=1$: $\frac{\ln 1}{2}+C=1 \Rightarrow C<1$

积分中值定理.

$F(x)=2x-1-\int_0^x f(t)dt$ $\quad F(0)=-1<0$,

由零点定理, 至少有一个零点 $\quad F(1)=1-\underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{<1}>0$.

$F'(x)=2-f(x)>0$ 单调 $\Rightarrow$ 有且仅有一个零点.

例6.6.(1)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $(a,b)$ 二阶可导且存在相等最大值. 又 $f(a)=g(a)$ $\quad f(b)=g(b)$

证明 $\eta\in(a,b)$ 使得 $f(\eta)=g(\eta)$.

$F(x)=f(a)-g(a)=0$.

设 $\max(f(x))=f(\xi_1)=M$

$\max(g(x))=f(\xi_2)=M$

如果 $\xi_1=\xi_2$, 则 $\xi_1=\xi_2=\eta$.

如果 $\xi_1\neq\xi_2$, 不妨设 $\xi_1>\xi_2$.

$F(\xi_1)=M-g(\xi_2)>0$.

$F(\xi_2)=f(\xi_2)-M<0$.

由零点定理

$F(\eta)=0$ $\eta$ 介于 $\xi_1,\xi_2$ 之间

$\Rightarrow f(\eta)=g(\eta)$.

例6.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数, 若在 $(a,b]$ 内有一个点 $c$, 使得 $f'(c)=0$. 证明: 在 $(a,b)$ 内必可找到 $\xi$, s.t. $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

① $M$ 最大值, $m$ 最小值

$x\in[a,c]$ $\quad m\leq f(x)\leq M$.

② $m=M$ 时, 常值函数, $\forall x\in(a,c)$ 成立

③ $m\neq M$ 时 不妨设

则至少有一个 $m, M$, 不等于 $f(a)$

不妨设 $M\neq f(a)$

令 $f(x_2)=M$. 则 $a<x_2\leq c$

若 $x_2=c$, 则 $f'(x_2)=0$. 若 $x_2<c$ 最值点也是极值点.

$\Rightarrow f'(x_2)=0$.

④ 辅助函数 $F(x)=f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$

$F(x_2)=f'(x_2)-\frac{f(x_2)-f(a)}{b-a}=-\frac{M-f(a)}{b-a}<0$

⑤ 中值定理.

$f(2)-f(a)=f'(x_1)(x-a)$ $\quad x_1\in(a,2)$.

$F(x_1)=f'(x_1)-\frac{f(x_1)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(a)}{x_1-a}-\frac{f(x_1)-f(a)}{b-a}$

$\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{b-a}\geq 0$.

⑥ 零点定理 $F(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

习 6.5(1)

设函数 f(x) 在区间 [0,1] 具有二阶导，且 $f(1)>0$，

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明 方程 $f(x)=0$ 在 (0,1) 至少一个实根

[solution]

① ∵ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)<0$. } ⇒ 至少一实根

② $f(1)>0$