

1. Funciones trigonométricas

1.1 Funciones seno y coseno

En este módulo nos ocuparemos, en primer lugar, de las funciones trigonométricas.

$\theta \rightarrow \text{sen}(\theta)$

$\theta \rightarrow \text{cos}(\theta)$

Son funciones donde la variable independiente θ se refiere a la medida de un ángulo θ (medido en radianes); y donde los valores de las funciones, $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ se calculen con las relaciones trigonométricas usuales.

La primera observación que hacemos en el estudio de las funciones trigonométricas se refiere a que son funciones cuyos valores se **repiten** cada cierto intervalo de la variable independiente. En el caso particular de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ los valores se repiten cada 2π .

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta)$$

$$\text{cos}(\theta + 2\pi) = \text{cos}(\theta)$$

Los valores de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ están determinados por las coordenadas del punto sobre la **circunferencia unidad** (la circunferencia de radio 1 centrada en el origen) como se muestra en la Figura 1.1.

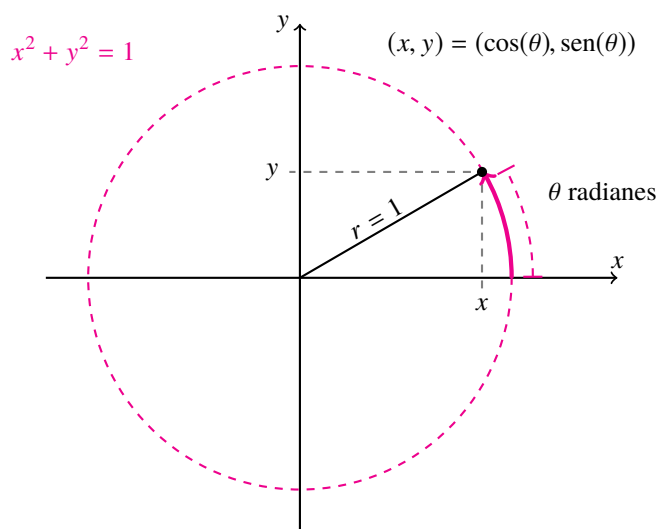


Figura 1.1: Circunferencia unidad.

Las coordenadas del punto determinan los valores de las funciones trigonométricas.

Actividad 1.1 Completen la Tabla 1.1 con los valores de las funciones trigonométricas $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ en los ángulos más usuales comprendidos entre 0 y 2π .

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\text{sen}(\theta)$																	
$\text{cos}(\theta)$																	

Tabla 1.1: Valores de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ en los ángulos más usuales comprendidos entre 0 y 2π .

Durante todo el curso usaremos principalmente la medición de ángulos en **radianes**.

Recuerden que π radianes equivale a 180° sexagesimales. La conversión del resto de los ángulos, de un sistema al otro, se hace por proporción directa.

$$\pi \text{ rad} \equiv 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} \equiv \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$\frac{\pi}{180} \text{ rad} \equiv 1^\circ$$

Las gráficas de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ se presentan en las Figuras 1.2 y 1.3.

Actividad 1.2 Utilicen las gráficas de las Figuras 1.2 y 1.3 para corroborar los valores calculados de la Tabla 1.1.

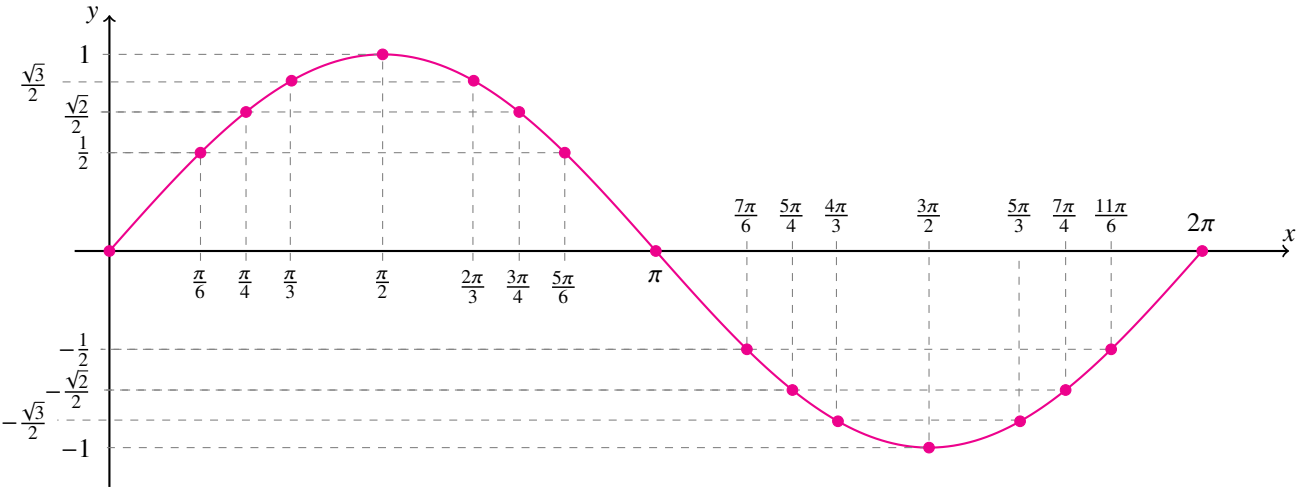


Figura 1.2: Gráfica de la función $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

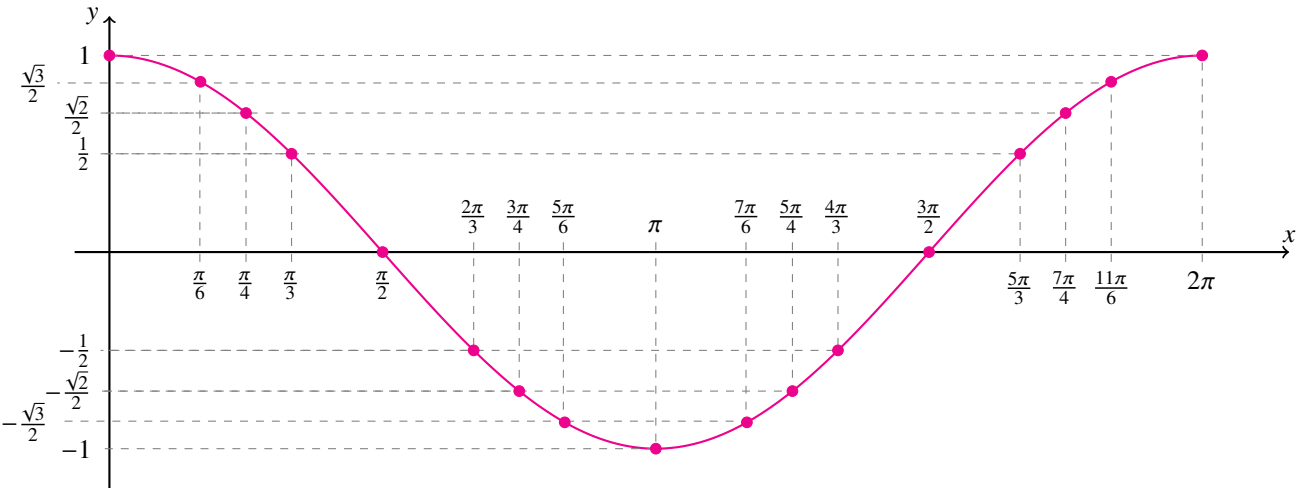


Figura 1.3: Gráfica de la función $\text{cos}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Actividad 1.3 Las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ pueden tomar valores positivos o negativos según el cuadrante al que pertenezca el ángulo θ . Completen la Tabla 1.2.

	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
$\text{sen}(\theta)$	positiva			
$\text{cos}(\theta)$	positiva			

Tabla 1.2: Positividad y negatividad de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$.

Al considerar la **periodicidad** de las funciones trigonométricas, la gráfica que tenemos en el intervalo $[0, 2\pi]$ se copia en los intervalos (de longitud 2π) siguientes y anteriores para ocupar todo el eje horizontal como se ve en las Figuras 1.4 y 1.5.

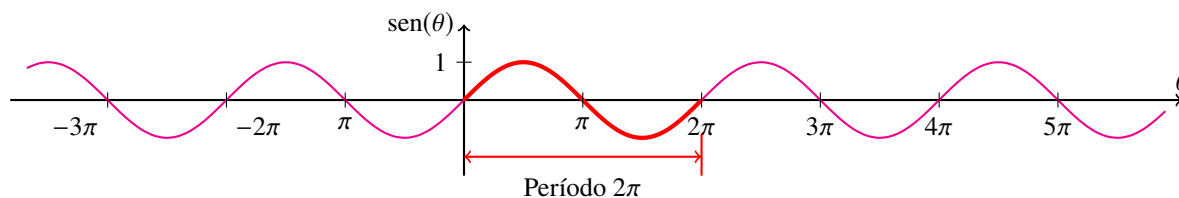


Figura 1.4: Gráfica de la función $\text{sen}(x)$ en todo \mathbb{R} .

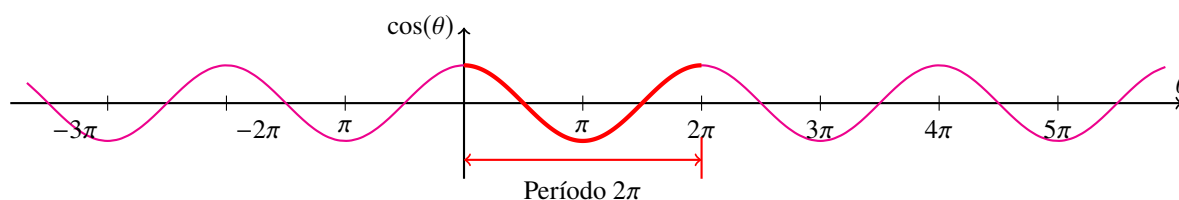


Figura 1.5: Gráfica de la función $\text{cos}(x)$ en todo \mathbb{R} .

Las funciones trigonométricas cumplen las siguientes identidades básicas.

Propiedad 1.1.1 — Propiedades de las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$.

Continuidad: Las funciones son continuas en todo \mathbb{R} .

Identidad principal: $\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$

Los valores están acotados: $-1 \leq \text{sen}(\theta) \leq 1$ $-1 \leq \text{cos}(\theta) \leq 1$

Simetrías: $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ $\text{cos}(-\theta) = \text{cos}(\theta)$

Suma y resta:

$$\text{sen}(\theta_1 \pm \theta_2) = \text{sen}(\theta_1)\text{cos}(\theta_2) \pm \text{cos}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)$$

$$\text{cos}(\theta_1 \pm \theta_2) = \text{cos}(\theta_1)\text{cos}(\theta_2) \mp \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)$$

Desplazamiento: $\text{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \text{cos}(\theta)$

Por convención se escribe

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) &= (\cos(\theta))^2 \\ &= \cos(\theta) \cdot \cos(\theta)\end{aligned}$$

que es diferente a

$$\cos(\theta^2) = \cos(\theta \cdot \theta)$$

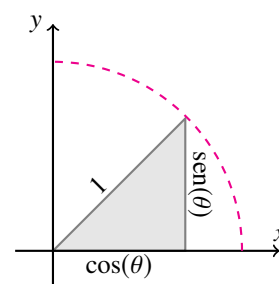


Figura 1.6: Identidad principal.

No desarrollaremos las demostraciones de estas propiedades pero haremos algunos comentarios y comparaciones como guías.

En primer lugar, para ángulos en el primer cuadrante, la **identidad principal** se deduce del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo de la Figura 1.6 dado que la hipotenusa mide 1 unidad de longitud.

Respecto a las simetrías, en la Figura 1.7 se presenta la relación entre los valores de la función $\text{cos}(\theta)$ en ángulos opuestos.

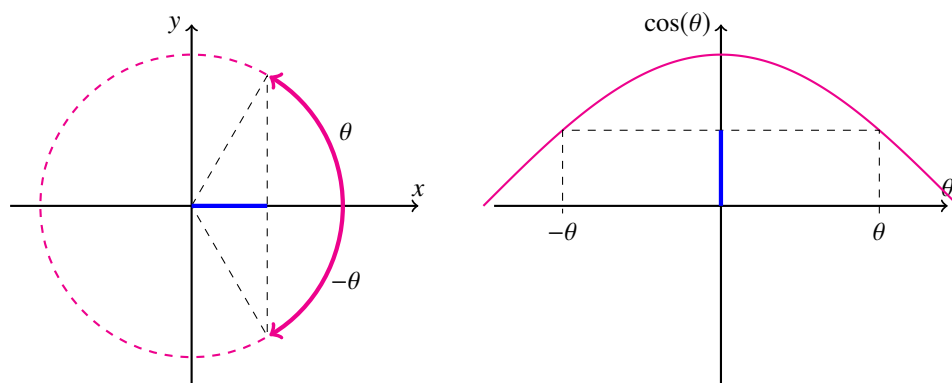


Figura 1.7: Relación entre los valores de la función $\cos(\theta)$ en ángulos opuestos θ y $-\theta$.

Actividad 1.4 ¿Cómo realizarían un diagrama similar a la Figura 1.7 para analizar la simetría de la función $\sin(\theta)$? Utilicen la Figura 1.8.

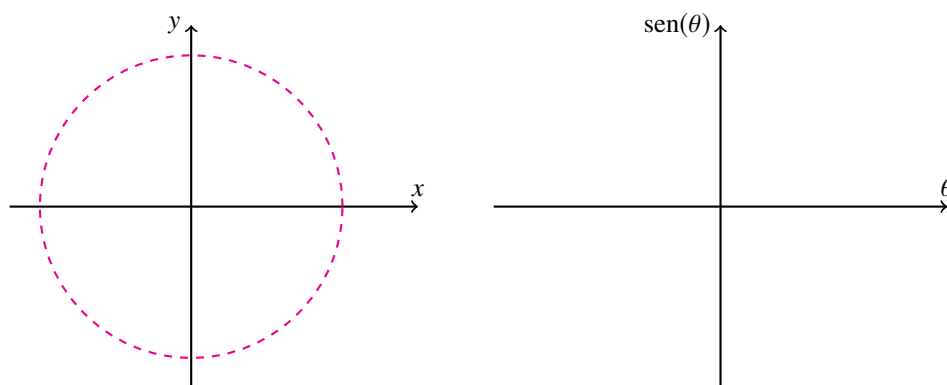


Figura 1.8: Relación entre los valores de la función $\sin(\theta)$ en ángulos opuestos θ y $-\theta$.

Por último, en la Figura 1.9 se presenta la relación de **desplazamiento** que relaciona los valores $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ y $\cos(\theta)$.

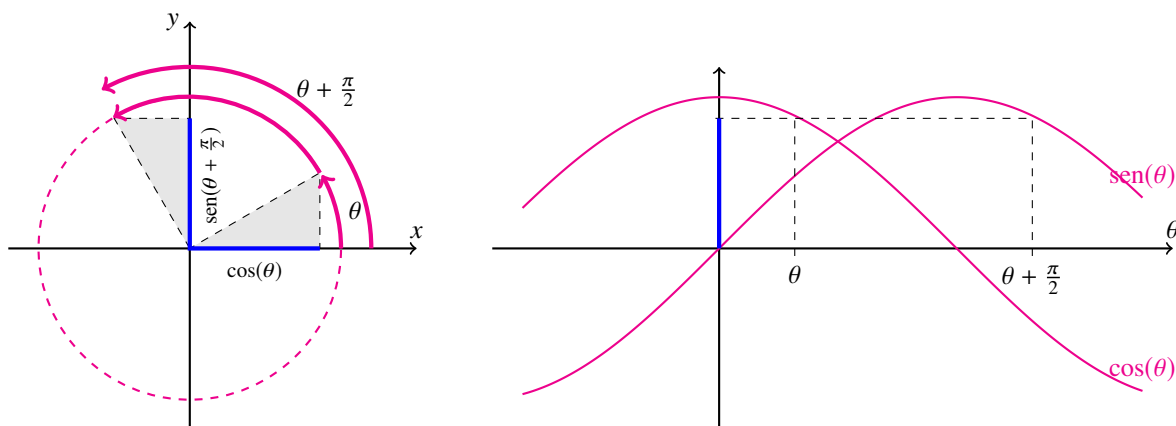


Figura 1.9: Relación entre los valores de la función $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ y $\cos(\theta)$.

1.2 Transformaciones de las gráficas $\sin(x)$ y $\cos(x)$

Definición 1.2.1 — Forma general de las funciones trigonométricas. La forma general de las funciones trigonométricas es

$$f(x) = A \sin(\omega(x - \phi)) + c \quad g(x) = A \cos(\omega(x - \phi)) + c \quad (1.1)$$

en donde utilizamos a x como variable independiente.

Describiremos las constantes A , ω , ϕ y c presentes en la definición 1.1.

Amplitud:

Representa un cambio en los valores máximos y mínimos de las funciones. Para los casos

$$A \sin(x)$$

$$A \cos(x)$$

los valores máximos y mínimos son A y $-A$.

Si A es positivo, la **amplitud** es A y se cumple que

$$-A \leq A \sin(\omega(x - \phi)) \leq A$$

$$-A \leq A \cos(\omega(x - \phi)) \leq A$$

Si A es negativo, la **amplitud** es $-A$. La gráfica debe **reflejarse** también respecto al eje x . Ver Figura 1.11.

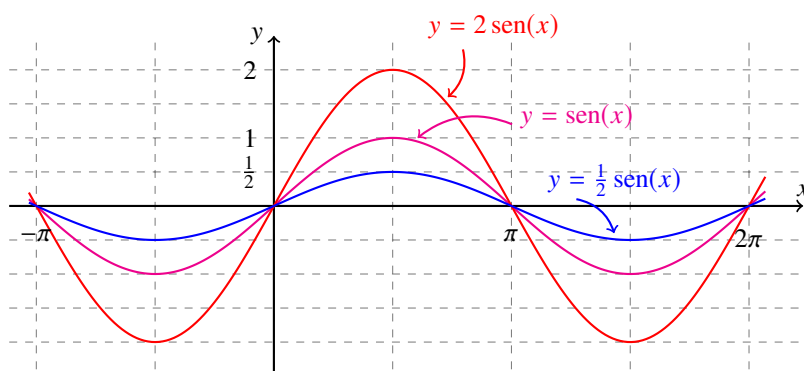


Figura 1.10: Gráficas de las funciones $\sin(x)$, $2 \sin(x)$ y $\frac{1}{2} \sin(x)$.

En todos los desarrollos anteriores utilizamos como variable independiente a θ porque consideramos necesario diferenciar los diagramas con ejes coordenados x - y donde θ se representa como el ángulo, y los diagramas con ejes coordenados θ - $f(\theta)$ donde se representaron las relaciones funcionales.

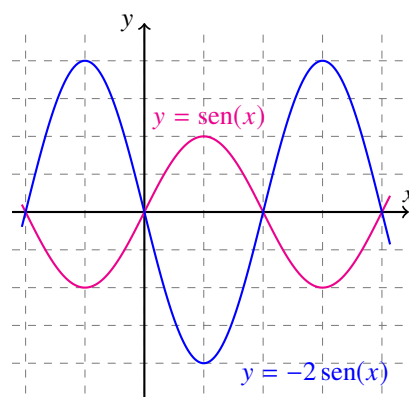


Figura 1.11: Reflejo respecto al eje x en el caso de $A < 0$.

Valor promedio c :

Representa el **promedio** entre los valores máximos y mínimos que toma la función. En el caso más sencillo, las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ tienen valores máximos y mínimos iguales a 1 y -1 (respectivamente). Por lo tanto el valor promedio es 0. Gráficamente, el valor de c representa una traslación en sentido vertical en c unidades de la gráfica. Por ejemplo,

$$h(x) = \cos(x) + 2$$

tiene un valor promedio $c = 2$; la gráfica de $h(x)$ debe trasladarse en 2 unidades hacia arriba y sus valores máximos y mínimos de la función son 3 y 1 respectivamente. Ver Figura 1.12.

Período $\frac{2\pi}{\omega}$:

El cociente $\frac{2\pi}{\omega}$ (para $\omega > 0$) determina el tamaño del intervalo de **periodicidad** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Para $\omega > 0$, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen **período** $\frac{2\pi}{\omega}$ de modo que

$$f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad g(x) = g\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

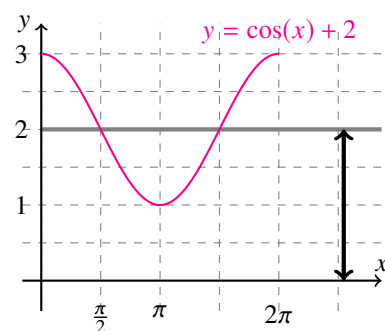


Figura 1.12: Gráfica de la función $\cos(x) + 2$ en $[0, 2\pi]$.

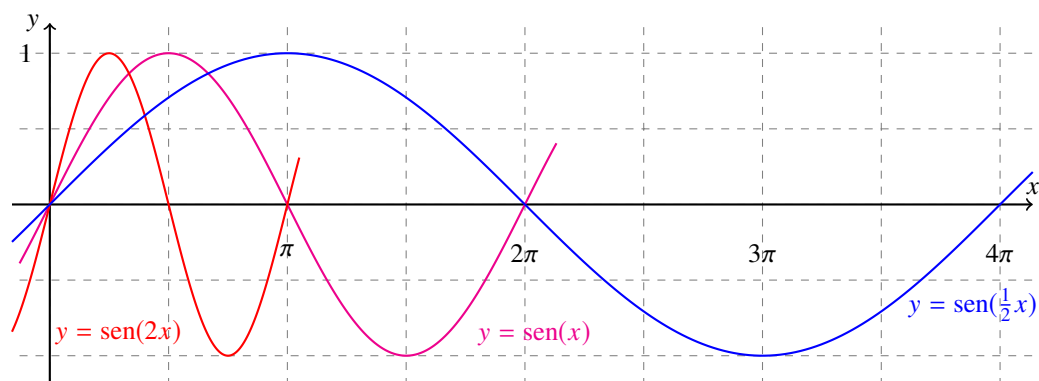


Figura 1.13: Gráficas de las funciones $\sin(2x)$, $\sin(\frac{1}{2}x)$ y $\sin(x)$.

Desplazamiento de la fase ϕ :

El valor de ϕ produce un **desplazamiento** de la gráfica. Si ϕ es **positivo** el desplazamiento se produce hacia la **derecha**. Si ϕ es **negativo** el desplazamiento se produce hacia la **izquierda**.

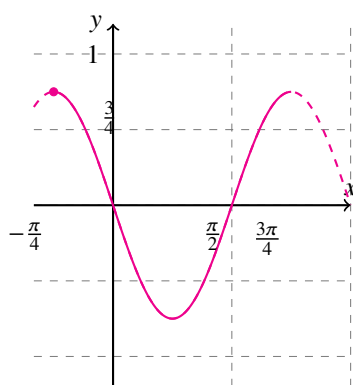


Figura 1.15: Gráfica de la función $\frac{3}{4} \cos(2x + \frac{\pi}{2})$.

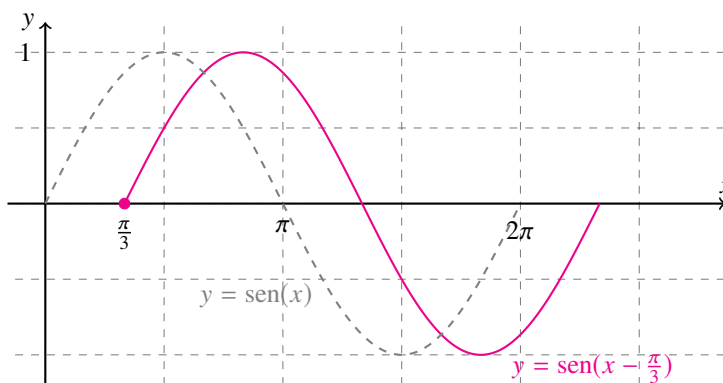


Figura 1.14: Gráfica de la función $\sin(x - \frac{\pi}{3})$ en $[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$.

En la siguiente gráfica se representan los cuatro elementos mencionados: A , c , ω , ϕ .

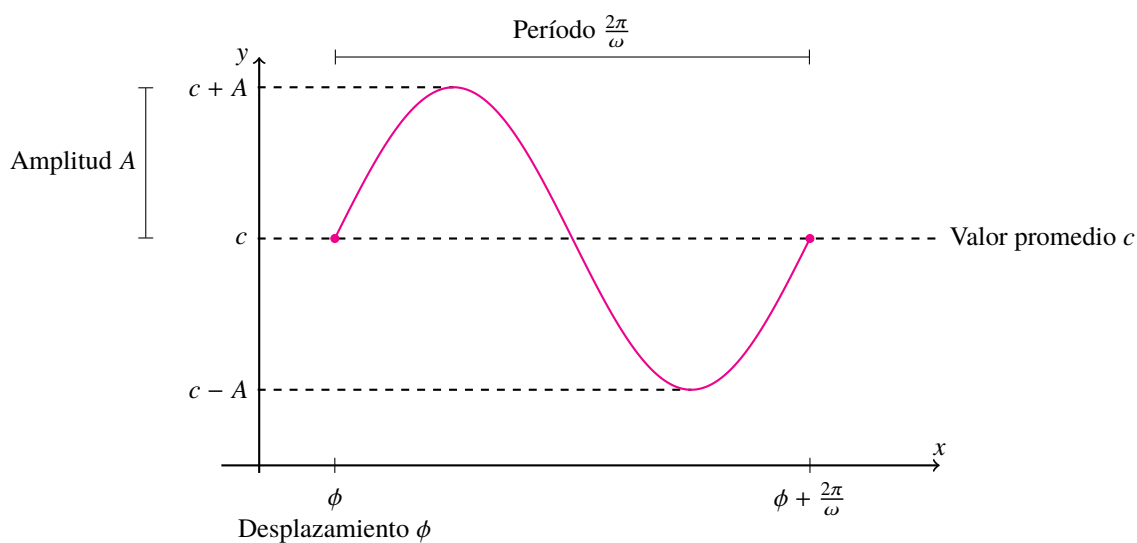


Figura 1.16: Gráfica de la función $f(x) = \sin(\omega(x - \phi)) + c$. Caso $A > 0$.

■ **Ejemplo 1.1** Determinaremos la amplitud, el período y el desplazamiento de la función

$$f(x) = \frac{3}{4} \cos(2x + \frac{\pi}{2})$$

y realizaremos su gráfica.

Para ello, re-escribimos la función en la **forma general** sacando factor común 2 en la expresión $2x + \frac{\pi}{2} = 2(x + \frac{\pi}{4})$ para tener

$$f(x) = \frac{3}{4} \cos(2(x + \frac{\pi}{4})) = \frac{3}{4} \cos(2(x - (-\frac{\pi}{4})))$$

Por lo tanto, obtenemos que la **amplitud** es $\frac{3}{4}$, el **período** es $\frac{2\pi}{2} = \pi$ y el **desplazamiento de la fase** es de $\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda. La gráfica de la función se presenta en la Figura 1.15.

■

Actividad 1.5 Realicen la gráfica de las siguientes funciones determinando sus elementos.

a) $f(x) = \sin(3x)$

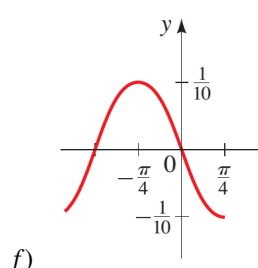
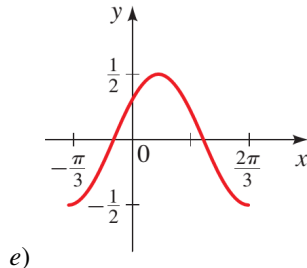
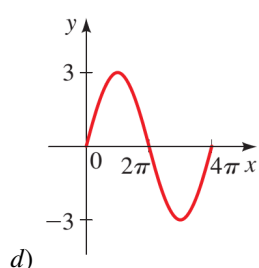
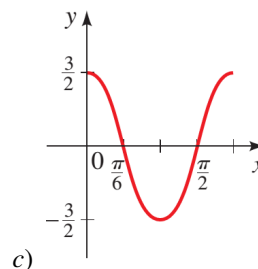
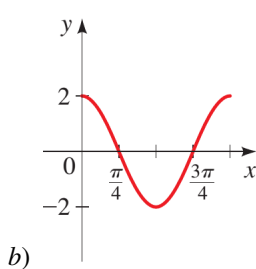
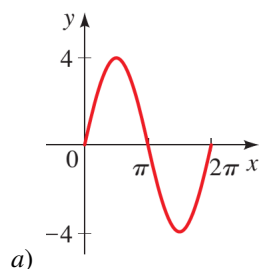
b) $g(x) = -\cos(2x)$

c) $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

d) $m(x) = 2 \sin(3x + \pi)$

■

Actividad 1.6 Determinen la forma general de las siguientes funciones que se presentan en forma gráfica.



■

1.3 Función trigonométrica $\tan(x)$

Otra función trigonométrica utilizada es la función **tangente** $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ que, en la circunferencia unidad, representa la **±longitud** (+ o - según el cuadrante) del segmento vertical como se muestra en la Figura 1.17.

Se diferencia principalmente de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ porque su período es más corto y porque su dominio ya no es todo el conjunto de números reales.

El dominio de la función $\tan(x)$ está determinado por todos los números reales que **no**

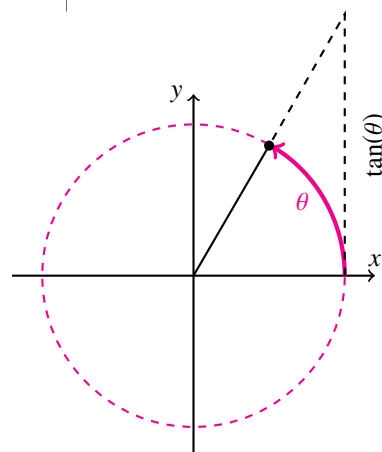


Figura 1.17: Circunferencia unidad.

anulan el denominador. Por lo tanto debemos **excluir** a todos los x tales que

$$\cos(x) = 0.$$

Esta ecuación tiene **infinitas** soluciones de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto el

$$\text{Dom}(\tan(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En cuanto al período, se tiene que

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

El intervalo principal donde se grafica la función tangente es $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \sin(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0$$

se concluye que $\tan(x)$ tiene asíntotas verticales en las rectas $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$. Y recordando la Tabla 1.2 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

La gráfica de la función $\tan(x)$ en todo su dominio se presenta en la Figura 1.18.

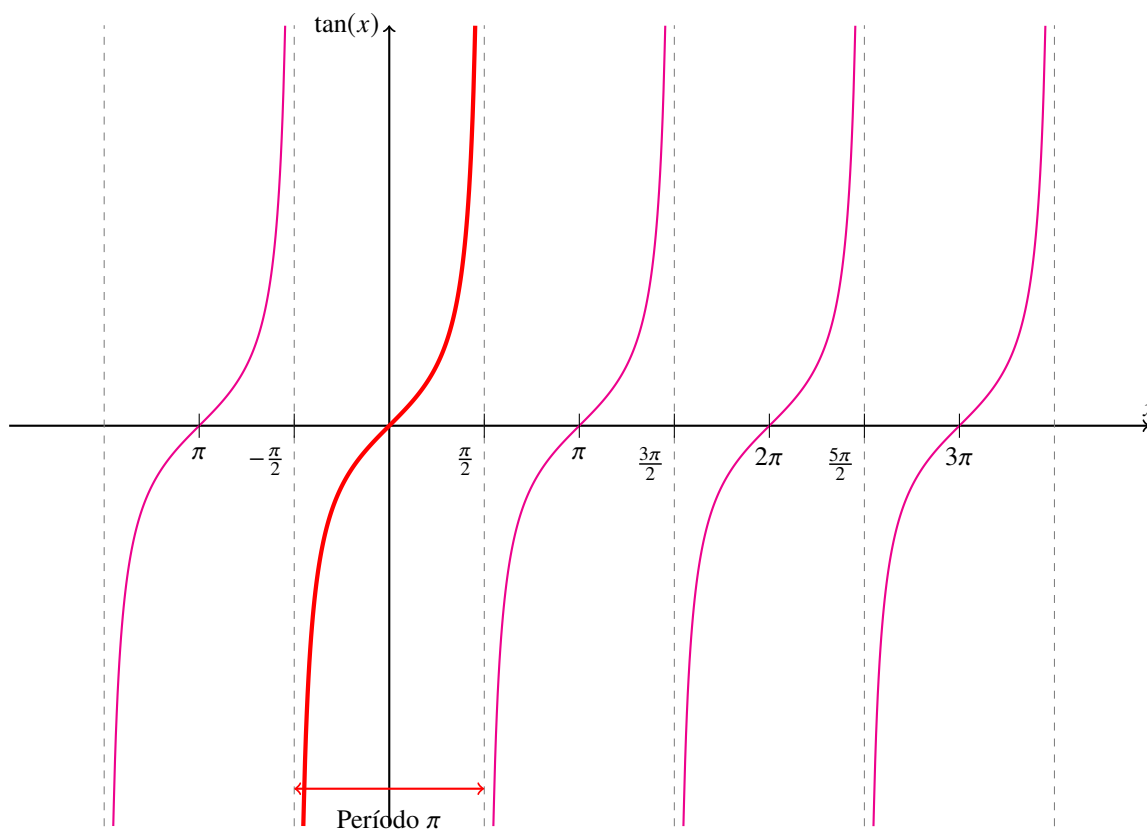


Figura 1.18: Gráfica de la función $\tan(x)$ en todo su dominio.

1.4 Derivada de las funciones $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ y $\tan(x)$

Para estudiar la existencia de la derivada de la función $\text{sen}(x)$ utilizamos la definición y las Propiedades 1.1.1 (la propiedad de la suma y resta)

$$\begin{aligned}\frac{d \text{sen}(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \text{sen}(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} + \frac{\cos(x) \text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen}(x) \left[\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Para que el último paso sea válido necesitamos saber que los cuatro límites involucrados existen (porque propusimos aplicar las propiedades algebraicas del límite). Dos de estos límites son sencillos de calcular:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = \text{sen}(x) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(x)$$

porque tanto el $\text{sen}(x)$ como el $\cos(x)$ son constantes con respecto a Δx .

El

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

no puede calcularse por evaluación. Encontraremos su valor utilizando un argumento geométrico. Supongamos, en primer lugar, que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. La Figura 1.19 muestra un sector de un círculo con centro O , ángulo θ y radio 1 y dos triángulos (el triángulo OBA y el OAD). El valor del área de ese sector circular es mayor al valor del área del triángulo OBA y menor que el área del triángulo OAD .

$$\text{Área del triángulo } OBA \leq \text{Área del sector circular } AOB \leq \text{Área del triángulo } OAD$$

Calculamos las áreas mencionadas:

- El triángulo más pequeño tiene una base que mide $|OA| = 1$ y una altura que mide $|CB| = \text{sen}(\theta)$. Luego su área es $\frac{1 \times \text{sen}(\theta)}{2}$.
- El área de un sector circular de ángulo θ se calcula por proporción directa: $\frac{\theta}{2}$.
- La base del triángulo más grande también mide $|OA| = 1$ pero su altura mide $|AD| = \tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$. Luego su área es $\frac{1 \times \text{sen}(\theta)}{2 \cos(\theta)}$.

Obtenemos

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{1 \times \text{sen}(\theta)}{2 \cos(\theta)}.$$

Como $\text{sen}(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \pi/2$, si multiplicamos por $\frac{2}{\text{sen}(\theta)}$ a cada miembro de la desigualdad tenemos que

$$1 < \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)},$$

o, en forma equivalente (dado que son todos términos positivos),

$$\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < 1.$$

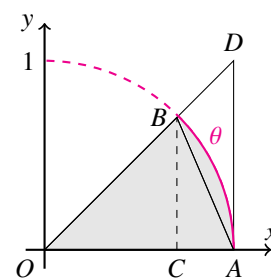


Figura 1.19: Comparación entre las tres áreas mencionadas en el desarrollo.

Respecto al inciso b), se calcula el área de un sector circular de ángulo θ tomando proporción directa:

Círculo completo de radio r :

$$2\pi \rightarrow \pi \times r^2$$

Sector de ángulo θ :

$$\theta \rightarrow \frac{\theta \times \pi \times r^2}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}$$

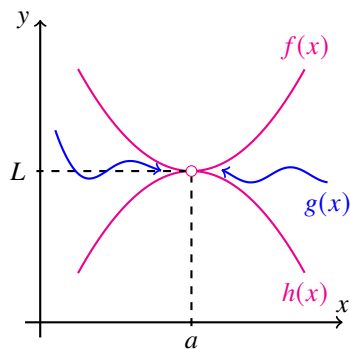


Figura 1.20: Teorema del Sandwich.

Sabemos que $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$ y que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = 1$. Ambos límites existen y son iguales. Concluimos (usando el Teorema 1.4.1 del Sandwich que enunciamos a continuación) que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Teorema 1.4.1 — Teorema del Sandwich. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando x es cercana a a (excepto posiblemente en $x = a$) y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

El **Teorema del Sandwich**, que a veces recibe el nombre de Teorema de Contracción o de Compresión, se ilustra en la Figura 1.20. No lo demostraremos. Nos dice que si $g(x)$ está atrapada entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a , y si f y h tienen el mismo límite L en a , entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a .

Con un razonamiento muy similar para valores $\theta \rightarrow 0^-$ se obtiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

Luego,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

El límite

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta}$$

tampoco puede calcularse por evaluación. Lo haremos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\cos(\theta) + 1}{\cos(\theta) + 1} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\theta) - 1}{\theta (\cos(\theta) + 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(\theta)}{\theta (\cos(\theta) + 1)} = - \lim_{\theta \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(\theta)}{\theta}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + 1}}_{\rightarrow 0} \\ &\quad \text{(ya lo calculamos)} \quad \text{(se calcula por evaluación)} \\ &= (-1) \cdot \left(\frac{0}{1+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Retomando el cálculo de la derivada que estábamos realizando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= (\sin(x)) \cdot 0 + (\cos(x)) \cdot 1 = \cos(x). \end{aligned}$$

Hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

Teorema 1.4.2 — Derivada de la función $\sin(x)$. La función $\sin(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} y

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

■ **Ejemplo 1.2** Calculamos la derivada de la función $f(x) = x^2 \text{sen}(x)$ utilizando el Teorema 1.4.2 y la regla del producto.

$$\frac{d}{dx}[x^2 \text{sen}(x)] = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \text{sen}(x) + x^2 \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = 2x \text{sen}(x) + x^2 \cos(x)$$

Seguendo el mismo camino que usamos en la demostración del Teorema 1.4.2 se puede demostrar

Teorema 1.4.3 — Derivada de la función $\cos(x)$. La función $\cos(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} y

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x)$$

■ **Actividad 1.7** Realicen la demostración del Teorema 1.4.3. ■

La función $g(x) = \tan(x)$ también se puede derivar para x en su dominio usando la definición de derivada, pero es más sencillo en este caso usar la regla del cociente para derivarla aprovechando que ya conocemos la derivada de las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) \cos(x) - \text{sen}(x) \frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) \cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) \end{aligned}$$

Tomando como base las funciones $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ se definen tres nuevas funciones

$$\text{Secante: } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\text{Cosecante: } \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

$$\text{Cotangente: } \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Teorema 1.4.4 — Derivada de la función $\tan(x)$. La función $\tan(x)$ es derivable en todo su dominio y $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$

■ **Actividad 1.8** Determinen el dominio de las funciones $\sec(x)$, $\text{cosec}(x)$ y $\cot(x)$. ■

Actividad 1.9 Hallen, usando las reglas de derivación, la derivada de las siguientes funciones:

- a) $g_1(x) = \sec(x)$ b) $g_2(x) = e^x \cos(x)$
c) $g_3(x) = x + \cos(x)$ d) $g_4(x) = \text{sen}(a + x^3)$, $a \in \mathbb{R}$ constante

Actividad 1.10 Indiquen para que valores de x la gráfica de las siguientes funciones tienen una recta tangente horizontal.

- a) $f(x) = x + \text{sen}(x)$ b) $g(x) = e^x \cos(x)$

Actividad 1.11

- a) ¿En qué intervalos es creciente $f(x) = x - 2 \sin(x)$? Con $0 \leq x \leq 2\pi$
 b) ¿En qué intervalos es cóncava hacia abajo $g(x) = 2x - 2 \tan(x)$? Con $-\pi/2 < x < \pi/2$.

1.5 Límites que involucran funciones trigonométricas

Ya hemos estudiado y calculado los siguientes límites

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1 \quad (1.2)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} = 0 \quad (1.3)$$

En esta sección calcularemos algunos límites que involucran algunas de las funciones trigonométricas e identificaremos algunos comportamientos asintóticos horizontales y verticales.

Para estar atentos y atentas

$$\sin(3x) \neq 3 \sin(x)$$

■ **Ejemplo 1.3** Calculemos el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin(3x)}{3x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} 3 \frac{\sin(u)}{u} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Realizamos la sustitución $u = 3x$ observando que $x \rightarrow 0 \iff u \rightarrow 0$ para re-escribir el límite original como un límite de la forma 1.2 que ya sabemos cuanto vale. ■

■ **Ejemplo 1.4** Investiguemos el $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Dado que no podemos calcular el límite evaluando en $x = 0$ analizaremos el comportamiento de la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ cerca de $x = 0$ (en $x = 0$ no está definida). Si evaluamos la función en algunos valores pequeños de x , obtenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= \sin(\pi) = 0 & f(1/2) &= \sin(2\pi) = 0 \\ f(1/3) &= \sin(3\pi) = 0 & f(1/4) &= \sin(4\pi) = 0 \\ f(0.1) &= \sin(10\pi) = 0 & f(0.01) &= \sin(100\pi) = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si calculamos $f(0.001) = f(0.00001) = 0$. En base a eso alguien podría estar tentado a pensar que el $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ pero esa respuesta **no es correcta**. Observemos que aunque $f(1/n) = \sin(n\pi) = 0$ para todo n entero, también es cierto que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x cercanos a 0. En la Figura 1.21 podemos ver la gráfica de la función.

La línea entrecortada cerca del eje-y indica que los valores del $\sin(\pi/x)$ oscilan infinitamente tomando valores entre -1 y 1 cuando x se acerca a 0. Como los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0 decimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ no existe.}$$

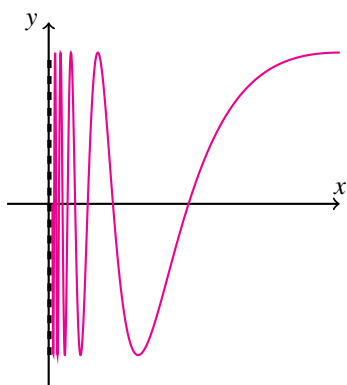


Figura 1.21: Gráfica de la función $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

■ **Ejemplo 1.5** Calculemos ahora el $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Este límite tampoco puede calcularse por evaluación. Pero, a diferencia del Ejemplo 1.4 la función tiene un factor x delante

$$\underbrace{x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{Varía entre } -1 \text{ y } 1}.$$

De modo que los valores de $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se irán acercando a 0 si $x \rightarrow 0$. Lo desarrollaremos usando el Teorema del Sandwich, multiplicando por x (positivo o negativo) a todos los miembros de la desigualdad

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

obteniendo

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \quad \text{si } x > 0$$

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \quad \text{si } x < 0.$$

Tanto en el caso en que $x > 0$ y $x < 0$, los valores de la función $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se encuentran acotados por arriba y por abajo por funciones que tienden a cero cuando x se acerca a cero, es decir

$$f_1(x) \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq f_2(x)$$

con $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$, y entonces por el Teorema del Sandwich podemos asegurar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

En la Figura 1.22 podemos ver la gráfica de la función $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Tiene una **discontinuidad evitable** en $x = 0$. Podemos definirla como $f(0) = 0$ para que resulte una función continua en todo \mathbb{R} .

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

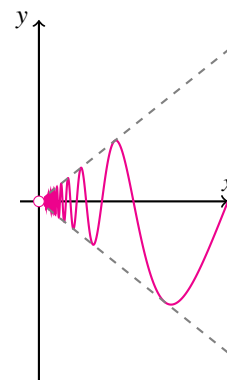


Figura 1.22: Gráfica de la función $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Definición 1.5.1 — Límites oscilantes. Los casos similares al presentado en el Ejemplo 1.4 se denominan **límites oscilatorios** y corresponden a discontinuidades inevitables de las funciones.

Actividad 1.12 Calculen los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3}{\tan(x) + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{4x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen}(x - \pi)}$

e) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(3t)}{t^2}$

Actividad 1.13 Prueben que $\lim_{t \rightarrow 0} t^4 \cos\left(\frac{2}{t}\right) = 0$. ¿Cómo corresponde re-definir la función $g(t) = t^4 \cos\left(\frac{2}{t}\right)$ para que resulte continua en todo \mathbb{R} ?

Las fórmulas presentadas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se deducen de lo aprendido en el Módulo 8.

1.6 Funciones trigonométricas inversas

Dado que ninguna de las 3 funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ es una función 1-1 en sus respectivos dominios se definen las **funciones trigonométricas inversas** tomando sub-intervalos como se detalla a continuación.

Definición 1.6.1 — Funciones trigonométricas inversas. Se definen las siguientes funciones como las inversas de las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$.

Función	Función inversa
$\operatorname{sen}(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$	$\operatorname{arc\,sen}(x) : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos(x) : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$	$\operatorname{arc\,cos}(x) : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
$\tan(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$	$\operatorname{arctan}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

La función $\operatorname{arctan}(x)$ es derivable en todo su dominio

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan}(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

Las funciones $\operatorname{arc\,sen}(x)$ y $\operatorname{arc\,cos}(x)$ **no** son derivables en todo su dominio. Se tiene que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{para } x \in (-1, 1)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{para } x \in (-1, 1)$$

Actividad 1.14 Realicen las gráficas de las funciones $\operatorname{arc\,sen}(x)$, $\operatorname{arc\,cos}(x)$ y $\operatorname{arctan}(x)$ (considerando que son funciones inversas).