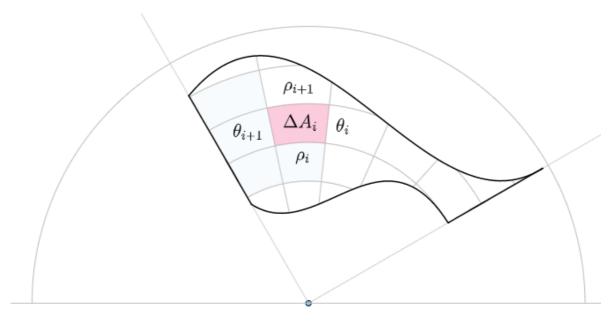
#### 2.3 极坐标系下的二重积分

#### 2.3.1 极坐标矩形

为什么叫"极坐标矩形"呢?让我们用 $\Delta A_i$ 来表示其中某一个"极坐标矩形",并且将它的四条边的极坐标系下的坐标在下图中标出:



#### $\Delta A_i$ 在极坐标系下可以表示为:

$$\Delta A_i = \{(\rho, \theta) | \rho_i \le \rho \le \rho_{i+1}, \theta_i \le \theta \le \theta_{i+1} \}$$

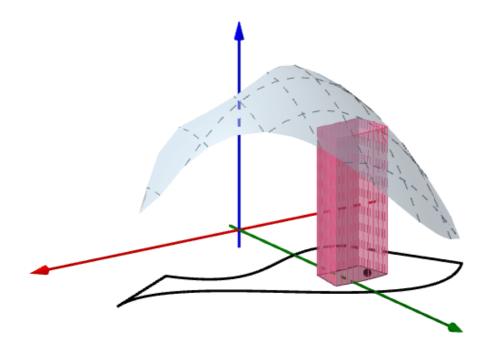
可见该区域的 $\rho$ 、 $\theta$ 都在两个常数之间,所以称为极坐标矩形。

并且容易通过大扇形减小扇形计算该区域的面积为:

$$egin{aligned} \Delta A_i &= ext{大扇形} - ext{小扇形} \ &= rac{1}{2}
ho_{i+1}^2\Delta heta_i - rac{1}{2}
ho_i^2\Delta heta_i \ &= rac{
ho_{i+1} + 
ho_i}{2}\cdot(
ho_{i+1} - 
ho_i)\cdot( heta_{i+1} - heta_i) \ &= \overline{
ho_i}\cdot\Delta
ho_i\cdot\Delta heta_i \end{aligned}$$

## 2.3.2 极坐标下的二重积分

对于定义在区域D上的极坐标函数z=f(
ho, heta),可以用 $\Delta A_i$ 作底, $f(
ho_i, heta_i)$ 为高,构造一个"极坐标矩形"柱体:



该曲面下的体积可以用这些柱体的和来逼近:

$$Vpprox \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i)\Delta A_i = \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i)\overline{
ho_i}\cdot\Delta
ho_i\cdot\Delta heta_i$$

假设 $\lambda = \max(\Delta A_i)$ ,当 $\lambda o 0$ 时,就可以得到曲面下的体积:

$$V = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i) \Delta A_i = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i) \overline{
ho_i} \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i$$

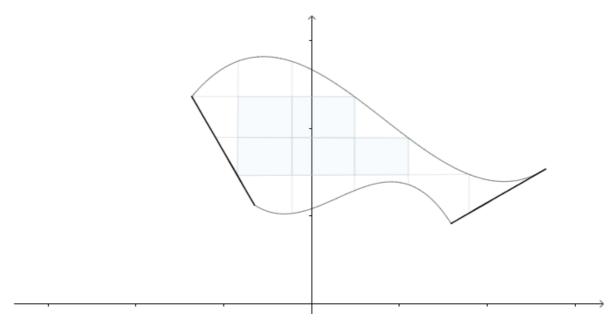
写作二重积分的形式就是:

$$V = \iint\limits_{D} f(
ho, heta) \mathrm{d}A = \iint\limits_{D} f(
ho, heta) 
ho \mathrm{d}
ho \mathrm{d} heta$$

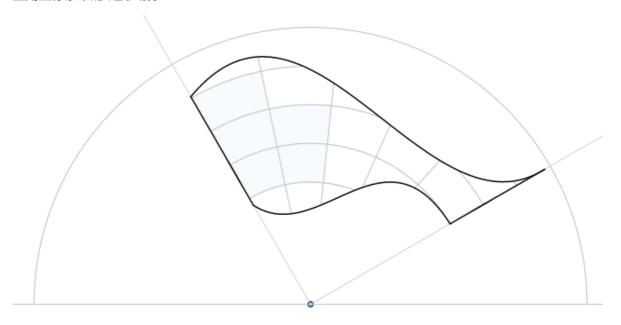
其中,ho d 
ho d heta称为极坐标系下的面积微分。

#### 2.3.3 与直角坐标系的对比

对区域D进行"矩形划分"或"极坐标矩形划分",主要有两点不同,一个是坐标系不同,一个是划分方式不同:



直角坐标系下的"矩形划分"



极坐标系下的"极坐标矩形划分"

根据二重积分的定义,如果二重积分存在,那么不同划分下计算出来的结果应该相同。只是坐标系和面积微分不同:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, = \iint\limits_{D} f(
ho, heta) \, 
ho \mathrm{d}
ho \mathrm{d} heta$$

## 2.3.4 极坐标下的富比尼定理

若极坐标函数f(
ho, heta)在区域D上连续:

• 若区域D为 $a \leq 
ho \leq b, g_1(
ho) \leq heta \leq g_2(
ho)$ ,其中 $g_1$ 、 $g_2$ 在[a,b]上连续,则:

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{a}^{b}\Big[\int_{g_{1}(
ho)}^{g_{2}(
ho)}f(
ho, heta)\mathrm{d} heta\Big]
ho\mathrm{d}
ho$$

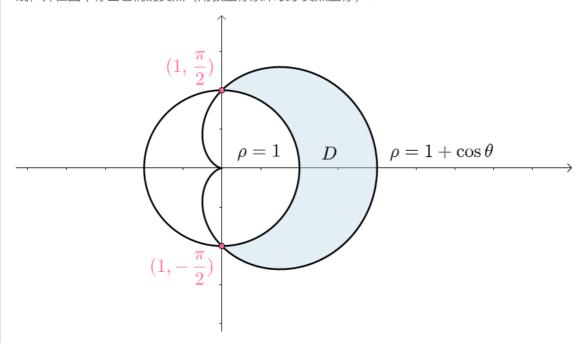
• 若区域D为 $lpha \le heta \le eta, h_1( heta) \le 
ho \le h_2( heta)$ ,其中 $h_1$ 、 $h_2$ 在[lpha,eta]上连续,则:

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{lpha}^{eta}\Big[\int_{h_{1}( heta)}^{h_{2}( heta)}f(
ho, heta)
ho\mathrm{d}
ho\Big]\mathrm{d} heta$$

例题

1

问: 求z=f(x,y)在D区域上的体积,其中区域D由两个极坐标函数 $\rho=1$ 和  $\rho=1+\cos\theta$ 围成。 答: 先画出该区域的草图, $\rho=1$ 是圆, $\rho=1+\cos\theta$ 是心脏线;并在图中标出它们的交点(用极坐标系来表示交点坐标):



容易看出 D区域为:

$$D=\{(
ho, heta)|-rac{\pi}{2}\leq heta\leq rac{\pi}{2}, 1\leq 
ho\leq 1+\cos heta\}$$

所以z = f(x,y)在D区域上的体积为:

$$\iint\limits_{D}f(
ho, heta)
ho\mathrm{d}
ho\mathrm{d} heta=\int_{-rac{\pi}{2}}^{rac{\pi}{2}}\int_{1}^{1+\cos heta}f(
ho, heta)
ho\mathrm{d}
ho\mathrm{d} heta$$

2

用极坐标计算 
$$\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)d\sigma_{,$$
其中 $D$ 是圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在

第一象限内的闭区域:

区域D在极坐标下表示为:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

根据极坐标下的富比尼定理

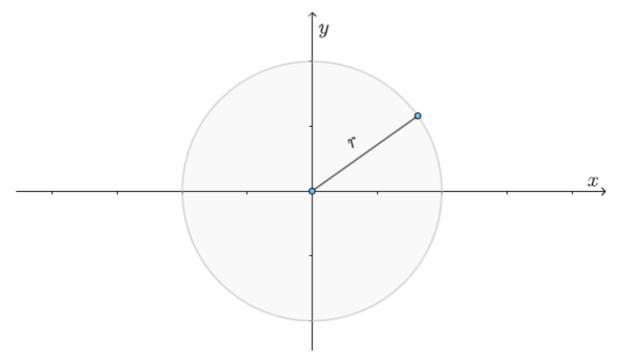
$$egin{aligned} \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma &= \iint\limits_D \ln(1+
ho^2)\cdot 
ho d
ho d heta \ &= \int_0^{rac{\pi}{2}} d heta \int_0^1 \ln(1+
ho^2)\cdot 
ho d
ho \ &= rac{\pi}{2}\cdotrac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+
ho^2)d(1+
ho^2) \ &= rac{\pi}{2}\ln 2 - rac{\pi}{4} \end{aligned}$$

# 2.4 二重积分坐标变换

#### 2.4.1 不同坐标系的面积

#### 1 xy直角坐标系

下面是xy直角坐标系内,半径为r的圆形。通过以前学习的面积公式,很容易算出面积为 $\pi r^2$ :

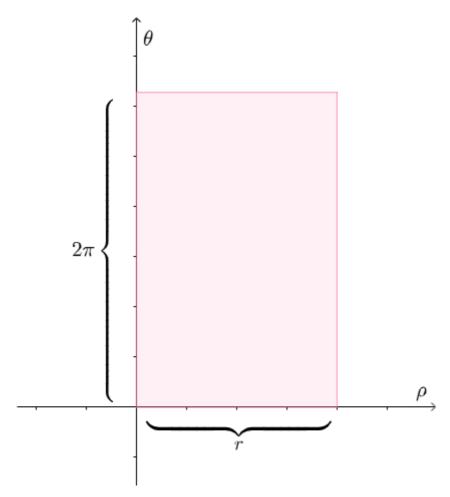


#### 2 ho heta直角坐标系

刚才的圆,可以看作是极坐标系中的区域D:

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \le \rho \le r, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

区域D在ho heta直角坐标系下是一个矩形,很容易算出它的面积 $2\pi r$ :



同样的一个圆,因为坐标系的单位面积不同,算出来的值也就不一样:

xy直角坐标系中,面积为 $\pi r^2$ 

ho heta直角坐标系中,面积为 $2\pi r$ 

为了帮助理解,打一个比方。不同的单位面积,就好比不同的单位。比如xy直角坐标系中的面积单位是米,而ho heta直角坐标系中的单位是英尺,所以算出来的值自然是不一样的,需要进行单位换算才会相同。

区域D在ho heta直角坐标系下,计算最为简单,那么能否通过类似 $^{\dagger}$ 单位换算的手段,将面积变换为复杂的xy直角坐标系下的面积?这就是本课想要解决的问题。

#### 2.4.2 坐标变换函数

下面这个方程组:

$$\left\{egin{aligned} x = 
ho\cos heta \ y = 
ho\sin heta \end{aligned}
ight.$$

实际上完成了ho heta直角坐标系(也就是极坐标系)到 $oldsymbol{xy}$ 直角坐标系的变换:

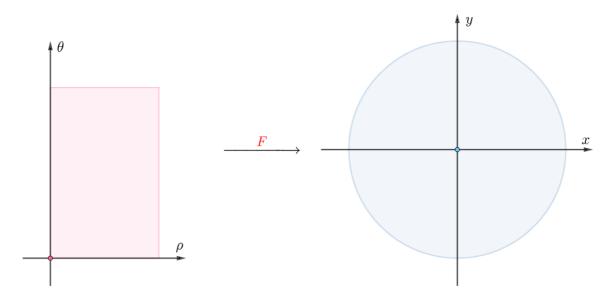
$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} eta \ eta \end{pmatrix} & \stackrel{ ext{ iny plane}}{\longrightarrow} egin{pmatrix} oldsymbol{x} \ oldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

之前也解释过,该方程组实际上是一个函数F:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}$$

该函数F完成了ho heta直角坐标系到xy直角坐标系的变换,所以称为y基本变换函数。

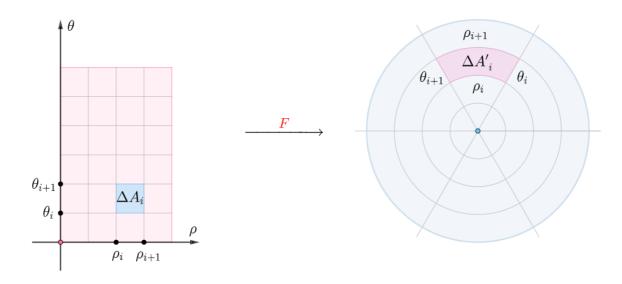
在函数 $m{F}$ 的作用下, $m{
ho}m{ heta}$ 直角坐标系的矩形变换成了 $m{xy}$ 直角坐标系的圆形:



其中的某一个矩形 $\Delta A_i$ :

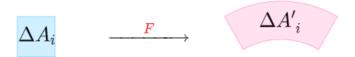
$$\Delta A_i = \{(
ho, heta) | 
ho_i \leq 
ho \leq 
ho_{i+1}, heta_i \leq heta \leq heta_{i+1} \}$$

经过 $m{F}$ 变换后得到 $m{\Delta}A_i'$ 



# 2.4.3 最佳线性近似

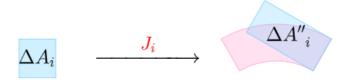
我们可以通过切点 $x=x_0$ 点处的导数,找到 $x=x_0$ 附近曲线的最佳线性近似,即切线。这里也是一样的, $\Delta A_i$ 通过F变换为了 $\Delta A_i'$ :



而F在 $(
ho_i, heta_i)$ 点的导数,也就是雅可比矩阵:

$$J_i = egin{pmatrix} \cos heta_i & -
ho_i\sin heta_i \ \sin heta_i & 
ho_i\cos heta_i \end{pmatrix}$$

可以将 $\Delta A_i$ 变化为 $\Delta A_i''$ (为了方便比较,将 $\Delta A'i$ 也画出来):



容易算出(其中 $|J_i|$ 为雅可比行列式, $||J_i||$ 是在雅可比行列式外面再套了一个绝对值符号):

$$\Delta A_i'' = ||J_i|| \cdot \Delta A_i' = 
ho_i \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i$$

 $\Delta A_i''$  是 $\Delta A_i'$  的最佳线性近似,也就是说有:



并且当划分得越小越细的时候,也就是 $\lambda = \max(\Delta A_i) 
ightarrow 0$ 时,有:

$$\lim_{\lambda o 0} \Delta A_i' = \lim_{\lambda o 0} \Delta A_i''$$

所以,将最佳线性近似 $\Delta A_i''$ 相加就得到了区域D的面积,也就是圆的面积:

$$S = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n ||J_i|| \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n 
ho_i \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i$$

也可以用 $\Delta A_i''$ 作底,计算z=f(
ho, heta)在区域D上的体积:

$$V = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i) \cdot ||J_i|| \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i = \lim_{\lambda o 0} \sum_{i=1}^n f(
ho_i, heta_i) \cdot 
ho \cdot \Delta 
ho_i \cdot \Delta heta_i$$

将上述式子写作二重积分的形式,你就会发现原来 $oldsymbol{
ho}$ 就是雅可比行列式的绝对值 $||oldsymbol{J}||$ :

$$\iint\limits_{D} f(
ho, heta) \, || J || \, \mathrm{d}
ho \mathrm{d} heta = \iint\limits_{D} f(
ho, heta) \, 
ho \, \mathrm{d}
ho \mathrm{d} heta$$

#### 2.4.4 一般坐标变换

更一般的,在区域D上,如果xy直角坐标系和uv直角坐标系之间存在如下的坐标变换函数,且x(u,v)、y(u,v)在区域D上有一阶连续偏导数(这是为了保证可以找到最佳线性近似):

$$\left\{egin{aligned} x = x(u,v) \ y = y(u,v) \end{aligned}
ight.$$

如果雅可比行列式存在且不为0:

$$|J| = |rac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = egin{bmatrix} rac{\partial x}{\partial u} & rac{\partial x}{\partial v} \ rac{\partial y}{\partial u} & rac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} 
eq 0$$

查看详细

则区域D上在xy直角坐标系下的面积为:

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}A=\iint\limits_{D}\,||oldsymbol{J}||\;\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以,z=f(x,y)在区域D上的体积为(在xyz直角坐标系下的体积):

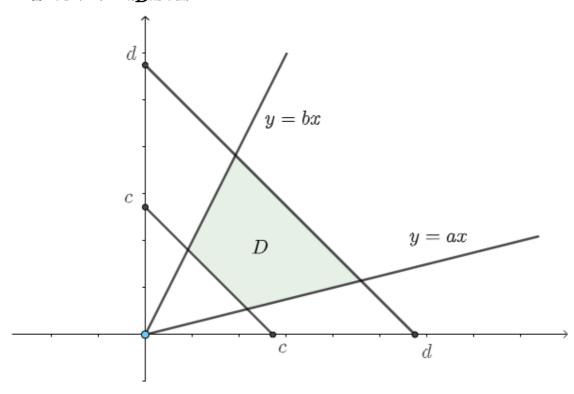
$$\iint\limits_D f(x,y) \mathrm{d}A = \iint\limits_D f(u,v) \, ||J|| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

例题

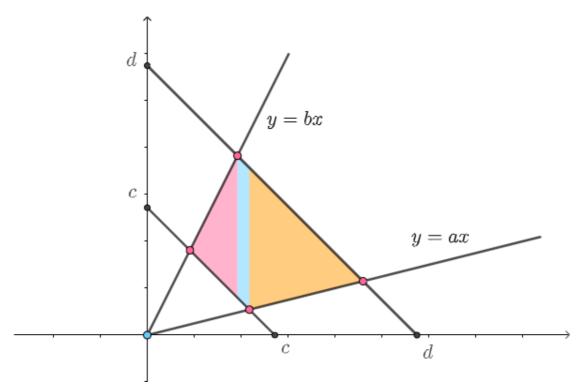
1

问: 试求由直线x+y=c,x+y=d,y=ax,y=bx,(0 < c < d,0 < a < b)所围成区域D的面积。

答: 先画一下区域 D的草图:



要直接应用富比尼定理的话,需要先求出这些直线的交点(下图中的红点),然后根据交点划分为三个区域(下图中的三个色块),比较麻烦:



下面用换元的方法来解决这个问题,令 $oldsymbol{u}=oldsymbol{x}+oldsymbol{y}$ ,可以得到变换方程组:

$$\left\{egin{array}{l} x=rac{u}{1+v}\ y=rac{uv}{1+v} \end{array}
ight.$$

根据这个方程组可以得到雅可比行列式为:

$$|J|=|rac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=rac{u}{(1+v)^2}$$

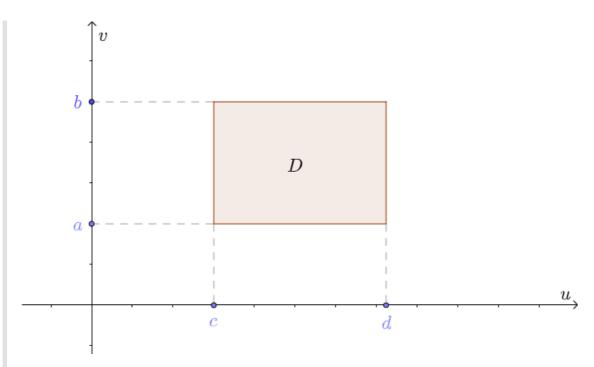
因为u>0,所以:

$$||J||=\frac{u}{(1+v)^2}$$

在uv坐标系下,D可以表示为:

$$D=\{(u,v)|c\leq u\leq d, a\leq v\leq b\}$$

这是иυ坐标系下的矩形:



计算就很简单了。结合上雅可比行列式,可以算出区域D在xy坐标系下的面积为:

$$egin{aligned} \iint_D \mathrm{d}A &= \iint_D ||J|| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \ &= \iint_D rac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \ &= \int_a^b \int_c^d \Big[rac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u\Big] \mathrm{d}v \ &= rac{(b-a)(d^2-c^2)}{2(1+a)(1+b)} \end{aligned}$$

2

$$\iint\limits_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$$
,其中 $D$ 是平行四边形闭区域,它的四个顶点分别是 $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$ 

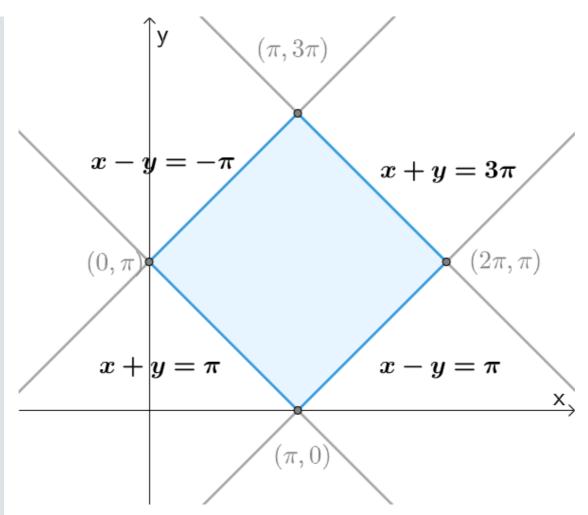
四个顶点为

$$(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$$

则D被直线

$$egin{aligned} x-y&=-\pi & x+y&=\pi \ x-y&=\pi & x+y&=3\pi \end{aligned}$$

所围成

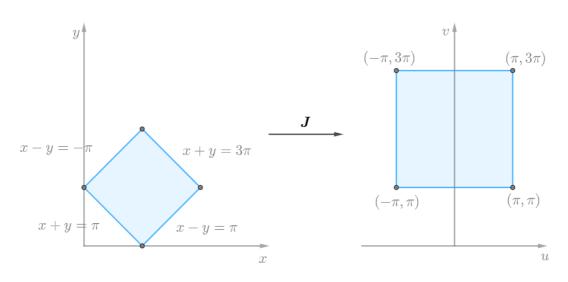


令 u = x - y, v = x + y,则边界变为:

$$u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$$

用不等式表示:

$$D'=\{(u,v)|-\pi\leq u\leq \pi,\pi\leq v\leq 3\pi\} \ |J|=rac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left|egin{array}{cc}rac{1}{2}&rac{1}{2}\-rac{1}{2}&rac{1}{2}\end{array}
ight|=rac{1}{2}$$



根据二重积分换元法

$$egin{aligned} \iint\limits_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy &= \iint\limits_{D'} u^2 \sin^2 v \cdot rac{1}{2} du dv \ &= rac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv = rac{\pi^4}{3} \end{aligned}$$