2.5 三重积分及富比尼定理

2.5.1 三重积分定义

设$f(x,y,z)$是有界闭区域Ω上的有界函数，将闭区域Ω任意分成n个小闭区域：

$$\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_i,\cdots,\Delta V_n$$

其中ΔV_i表示第i个小闭区域，也表示它的体积，规定ΔV_i中最大的体积为λ：

$$\lambda=\max(\Delta V_i)$$

在每个ΔV_i内任取一点(ξ_i,μ_i,ζ_i)，可以得到级数：

$$\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i,\mu_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

如果当$\lambda\to 0$时，无论如何划分闭区域Ω，无论怎样选取(ξ_i,μ_i,ζ_i)，该级数的极限总是存在，那么称此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的三重积分，记作：

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i,\mu_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

其中$f(x,y,z)$称为被积函数，$\mathrm{d}V$称为体积微分，x、y以及z称为积分变量，Ω称为积分区域。

ΔV_i的体积为：

$$\Delta V_i=\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$$

所以，体积微分$\mathrm{d}V$也常写作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，从而三重积分记作：

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$被称为直角坐标系中的体积微分。

2.5.2 三次积分

假如有如下的类型I区域E，区域E可以表示为：

$$E=\{(x,y,z)|a\leq x\leq b,g_1(x)\leq y\leq g_2(x),u_1(x,y)\leq z\leq u_2(x,y)\}$$

那么通过富比尼定理，函数$f(x,y,z)$在区域E上的三重积分可以如下计算：

$$\iiint\limits_{E}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}A$$

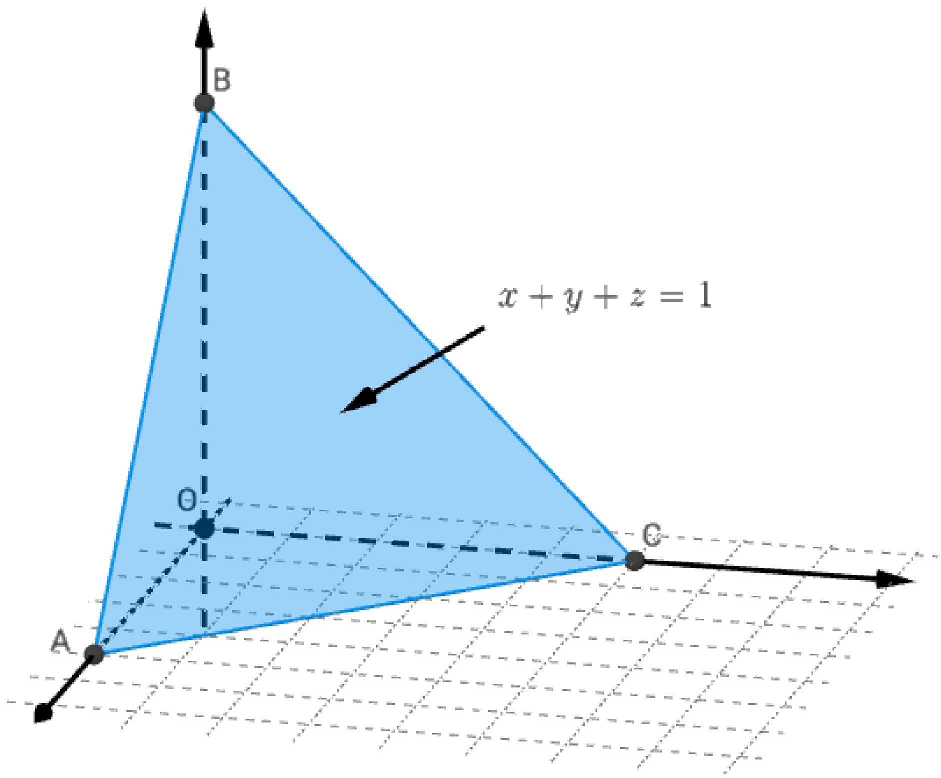
$$=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

这样就将三重积分划为了方便计算的三次积分。

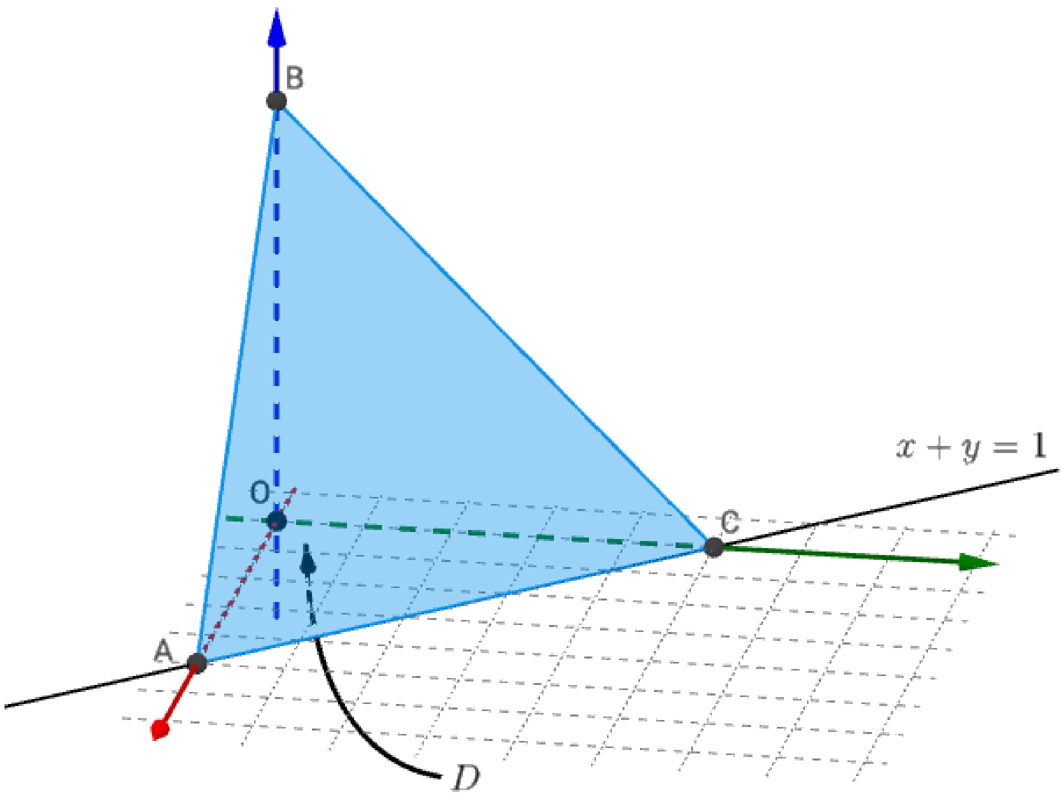
例题

问：计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$为三个坐标面和$x+y+z=1$所围成的闭区域。

答：作出Ω的草图：



容易判断，Ω在xy面上的投影区域D为OAB，由$x=0$、$y=0$及$x+y=1$这三根直线围成：



所以：

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x\}$$

而z在0和$1-x-y$之间，所以：

$$\Omega=\{(x,y,z)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x,0\leq z\leq 1-x-y\}$$

于是：

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{24}$$