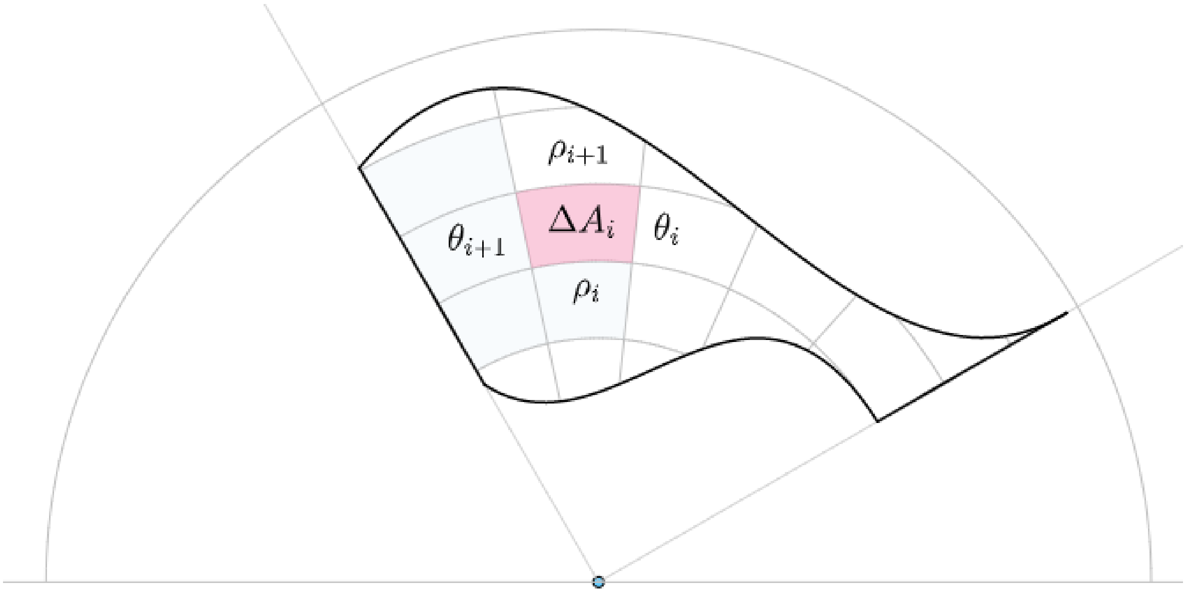
2.3 极坐标系下的二重积分

2.3.1 极坐标矩形

为什么叫"极坐标矩形"呢？让我们用ΔA_i来表示其中某一个"极坐标矩形"，并且将它的四条边的极坐标系下的坐标在下图中标出：



ΔA_i在极坐标系下可以表示为：

$$\Delta A_i = \{(\rho,\theta)|\rho_i \le \rho \le \rho_{i+1}, \theta_i \le \theta \le \theta_{i+1}\}$$

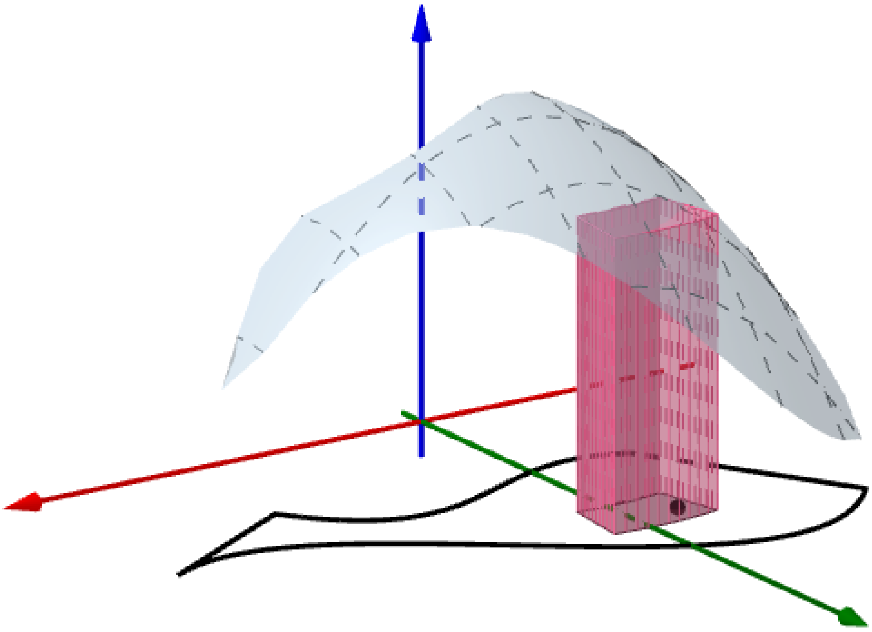
可见该区域的ρ、θ都在两个常数之间，所以称为极坐标矩形。

并且容易通过**大扇形减小扇形**计算该区域的面积为：

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \text{大扇形} - \text{小扇形} \\ &= \frac{1}{2}\rho_{i+1}^2\Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i \\ &= \frac{\rho_{i+1}+\rho_i}{2}\cdot(\rho_{i+1}-\rho_i)\cdot(\theta_{i+1}-\theta_i) \\ &= \overline{\rho_i}\cdot\Delta\rho_i\cdot\Delta\theta_i\end{aligned}$$

2.3.2 极坐标下的二重积分

对于定义在区域D上的极坐标函数$z=f(\rho,\theta)$，可以用ΔA_i作底，$f(\rho_i,\theta_i)$为高，构造一个"极坐标矩形"柱体：



该曲面下的体积可以用这些柱体的和来逼近：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i)\overline{\rho_i} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

假设$\lambda = \max(\Delta A_i)$，当$\lambda \to 0$时，就可以得到曲面下的体积：

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i)\Delta A_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i)\overline{\rho_i} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

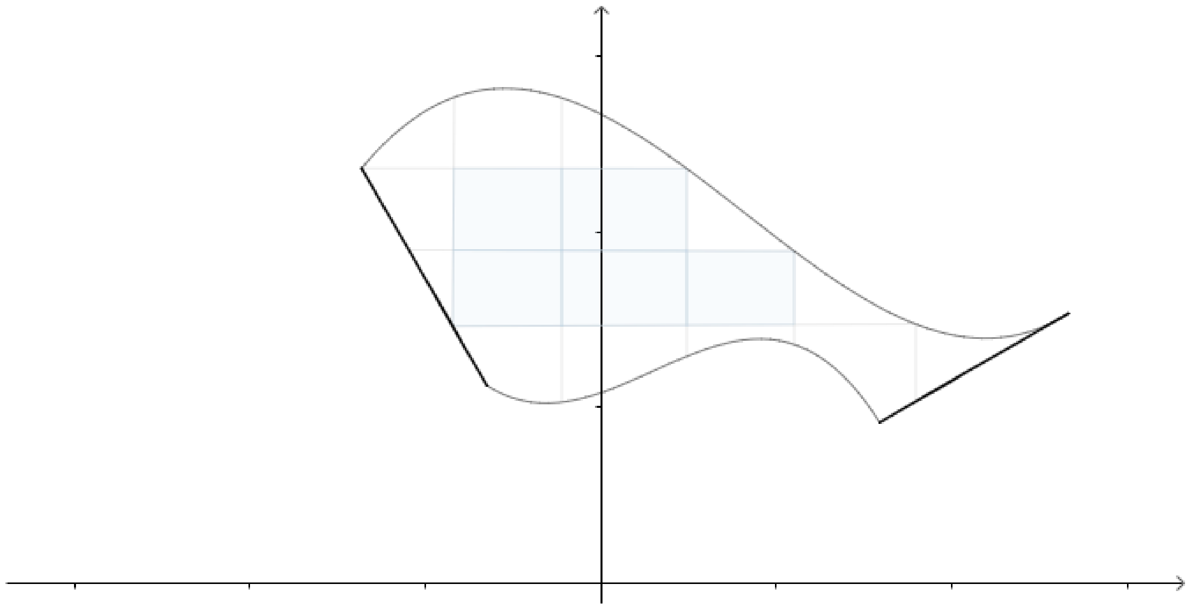
写作二重积分的形式就是：

$$V = \iint\limits_{D} f(\rho, \theta)\mathrm{d}A = \iint\limits_{D} f(\rho, \theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

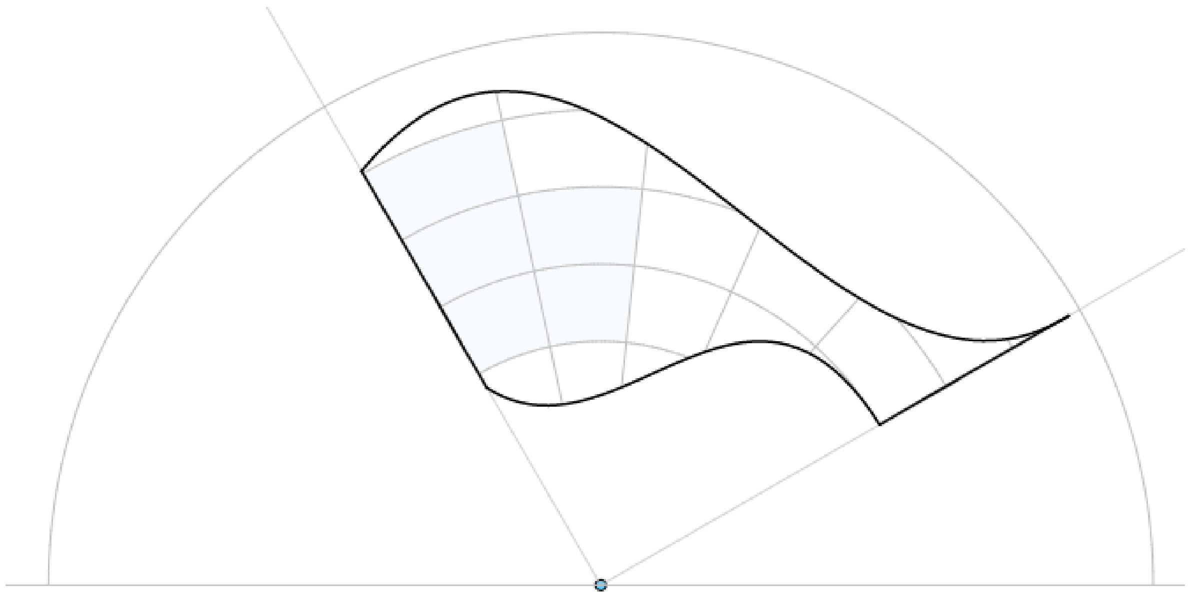
其中，$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$称为极坐标系下的面积微分。

2.3.3 与直角坐标系的对比

对区域D进行“矩形划分”或“极坐标矩形划分”，主要有两点不同，一个是坐标系不同，一个是划分方式不同：



直角坐标系下的“矩形划分”



极坐标系下的“极坐标矩形划分”

根据二重积分的定义，如果二重积分存在，那么不同划分下计算出来的结果应该相同。只是坐标系和面积微分不同：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\ {\color{red}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \iint\limits_{D} f(\rho,\theta)\ {\color{green}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}$$

2.3.4 极坐标下的富比尼定理

若极坐标函数$f(\rho,\theta)$在区域D上连续：

- 若区域D为$a \le \rho \le b, g_1(\rho) \le \theta \le g_2(\rho)$，其中$g_1$、$g_2$在$[a,b]$上连续，则：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left[\int_{g_1(\rho)}^{g_2(\rho)} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta\right]\rho\mathrm{d}\rho$$

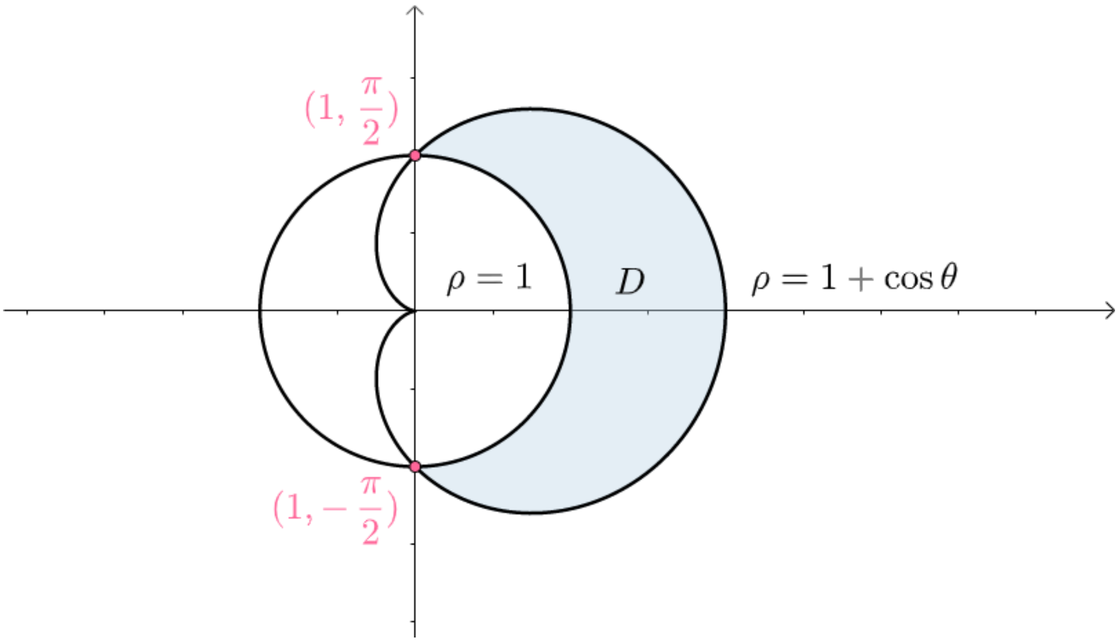
- 若区域D为$\alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le \rho \le h_2(\theta)$，其中$h_1$、$h_2$在$[\alpha,\beta]$上连续，则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \left[\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

例题

1

问：求$z=f(x,y)$在D区域上的体积，其中区域D由两个极坐标函数$\rho=1$和$\rho=1+\cos\theta$围成。 **答**：先画出该区域的草图，$\rho=1$是圆，$\rho=1+\cos\theta$是心脏线；并在图中标出它们的交点（用极坐标系来表示交点坐标）：



容易看出D区域为：

$$D=\{(\rho,\theta)|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 1\le\rho\le 1+\cos\theta\}$$

所以$z=f(x,y)$在D区域上的体积为：

$$\iint_D f(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+\cos\theta} f(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

2

用极坐标计算$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$,其中$D$是圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域：

区域D在极坐标下表示为：

$$D=\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le 1，0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$$

根据极坐标下的富比尼定理

$$\iint\limits_{D} \ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \iint\limits_{D} \ln(1+\rho^2)\cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot \rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+\rho^2)d(1+\rho^2)$$

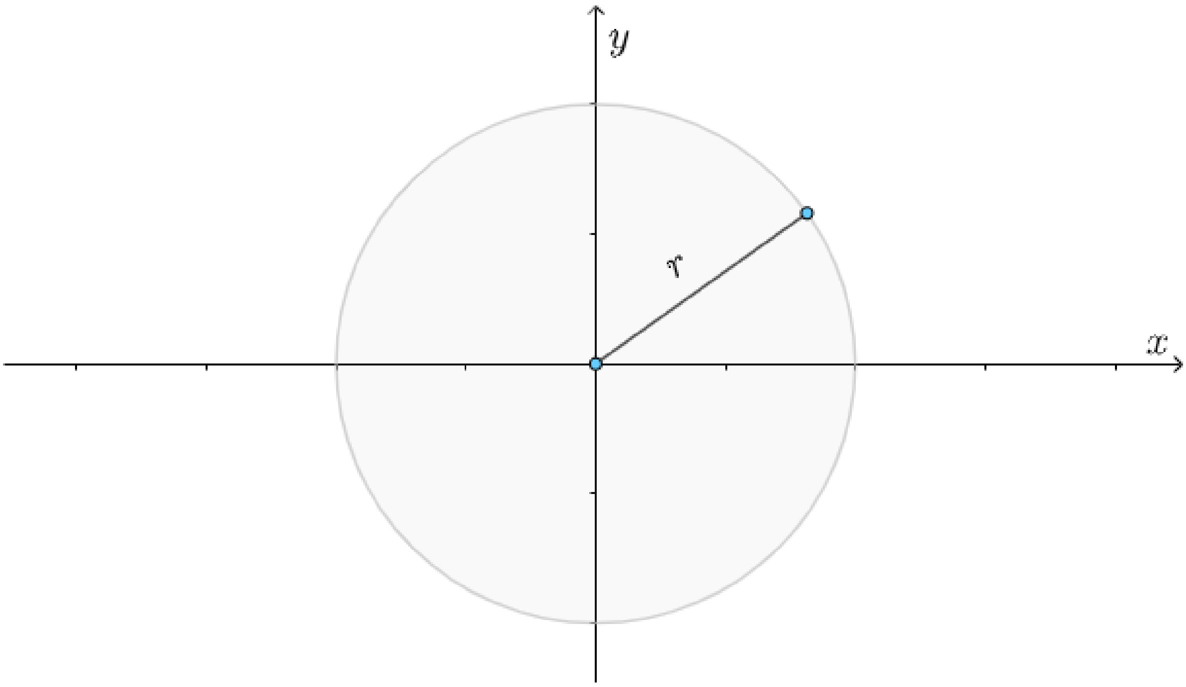
$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

2.4 二重积分坐标变换

2.4.1 不同坐标系的面积

1 xy直角坐标系

下面是xy直角坐标系内，半径为r的圆形。通过以前学习的面积公式，很容易算出面积为πr^2：

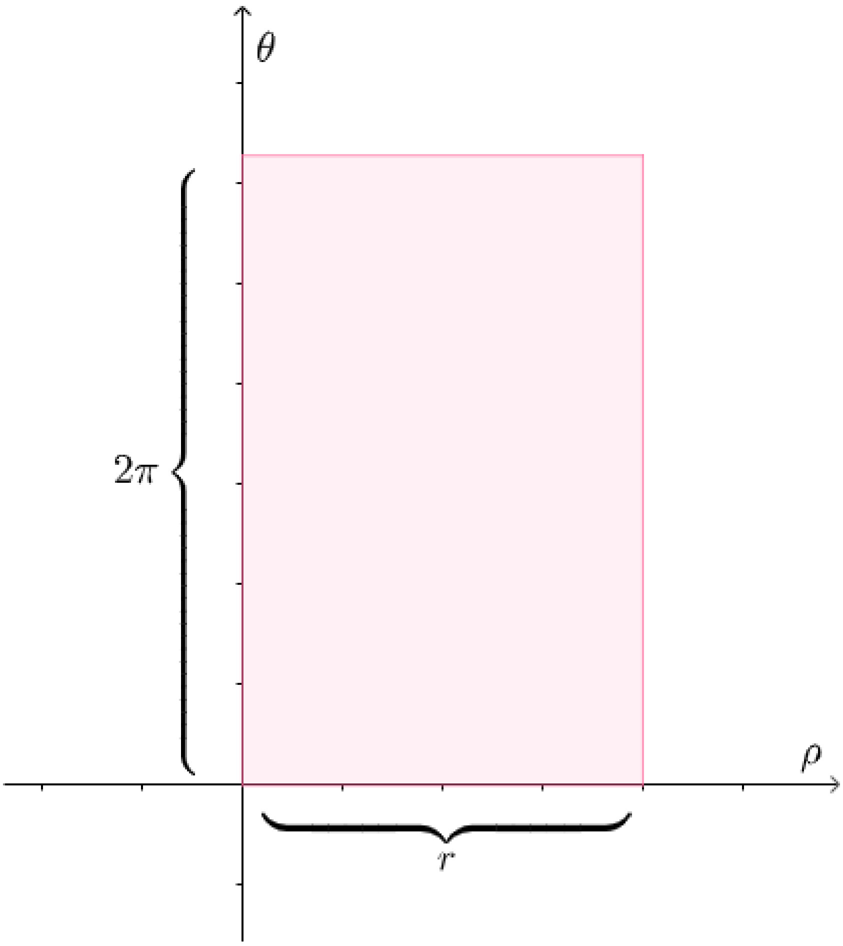


2 $\rho\theta$直角坐标系

刚才的圆，可以看作是极坐标系中的区域D：

$$D = \{(\rho,\theta)|0\leq\rho\leq r, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

区域D在$\rho\theta$直角坐标系下是一个矩形，很容易算出它的面积$2\pi r$：



同样的一个圆，因为坐标系的单位面积不同，算出来的值也就不一样：

xy直角坐标系中，面积为πr^2

$\rho\theta$直角坐标系中，面积为$2\pi r$

为了帮助理解，打一个比方。不同的单位面积，就好比不同的单位。比如xy直角坐标系中的面积单位是米，而$\rho\theta$直角坐标系中的单位是英尺，所以算出来的值自然是不一样的，需要进行单位换算才会相同。

区域D在$\rho\theta$直角坐标系下，计算最为简单，那么能否通过类似单位换算的手段，将面积变换为复杂的xy直角坐标系下的面积？这就是本课想要解决的问题。

2.4.2 坐标变换函数

下面这个方程组：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

实际上完成了$\rho\theta$直角坐标系（也就是极坐标系）到xy直角坐标系的变换：

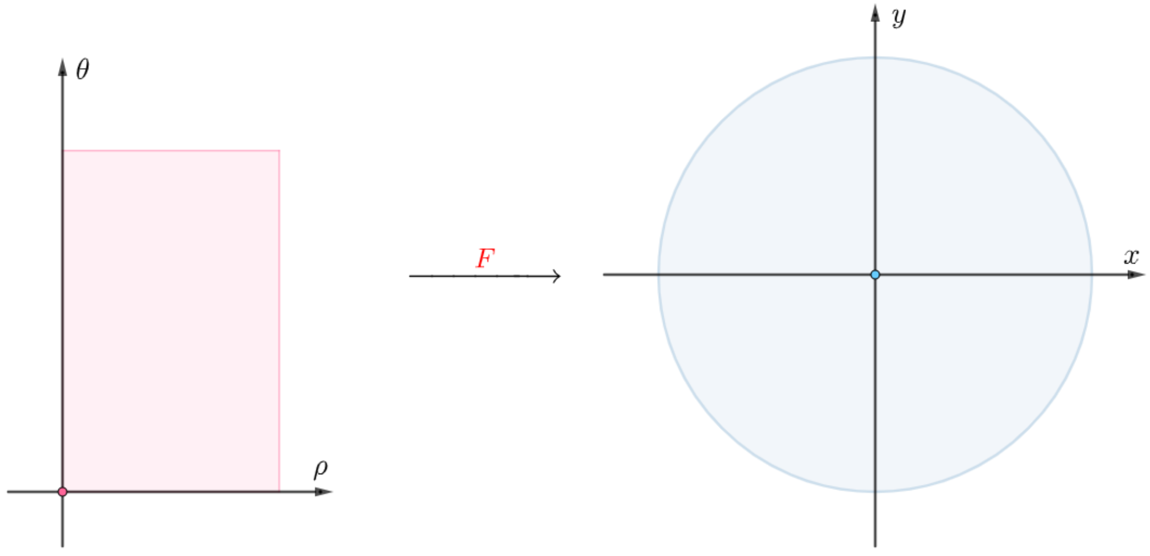
$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad 方程组 \quad} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

之前也解释过，该方程组实际上是一个函数F：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}$$

该函数F完成了$\rho\theta$直角坐标系到xy直角坐标系的变换，所以称为坐标变换函数。

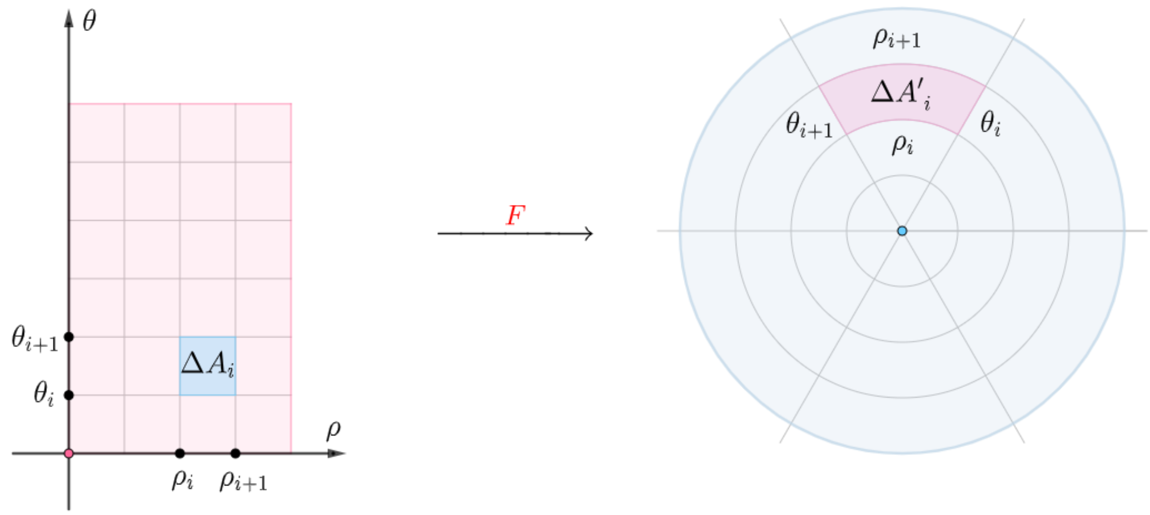
在函数F的作用下，$\rho\theta$直角坐标系的矩形变换成了xy直角坐标系的圆形：



其中的某一个矩形ΔA_i：

$$\Delta A_i = \{(\rho,\theta)|\rho_i \le \rho \le \rho_{i+1}, \theta_i \le \theta \le \theta_{i+1}\}$$

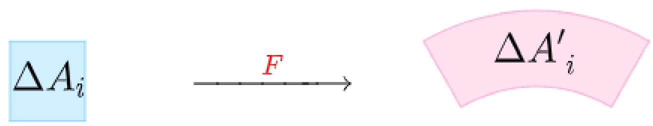
经过F变换后得到$\Delta A_i'$



2.4.3 最佳线性近似

我们可以通过切点$x = x_0$点处的导数，找到$x = x_0$附近曲线的最佳线性近似，即切线。

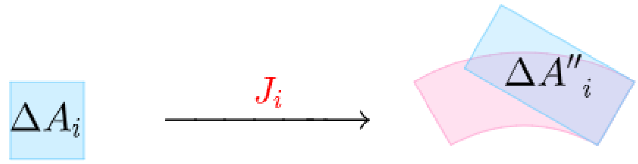
这里也是一样的，ΔA_i通过F变换为了$\Delta A_i'$：



而F在(ρ_i,θ_i)点的导数，也就是雅可比矩阵：

$$J_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\rho_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \rho_i \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

可以将ΔA_i变化为$\Delta A''_i$（为了方便比较，将$\Delta A' i$也画出来）：



容易算出（其中$|J_i|$为雅可比行列式，$||J_i||$是在雅可比行列式外面再套了一个绝对值符号）：

$$\Delta A''_i = ||J_i|| \cdot \Delta A'_i = \rho_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

$\Delta A''_i$是$\Delta A'_i$的最佳线性近似，也就是说有：

并且当划分得越小越细的时候，也就是$\lambda = \max(\Delta A_i) \to 0$时，有：

$$\lim_{\lambda\to 0} \Delta A'_i = \lim_{\lambda\to 0} \Delta A''_i$$

所以，将最佳线性近似$\Delta A''_i$相加就得到了区域D的面积，也就是圆的面积：

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} ||J_i|| \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

也可以用$\Delta A''_i$作底，计算$z = f(\rho, \theta)$在区域D上的体积：

$$V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i) \cdot ||J_i|| \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i, \theta_i) \cdot \rho \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

将上述式子写作二重积分的形式，你就会发现原来ρ就是雅可比行列式的绝对值$||J||$：

$$\iint_D f(\rho, \theta)\ ||J||\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint_D f(\rho, \theta)\ \rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

2.4.4 一般坐标变换

更一般的，在区域D上，如果xy直角坐标系和uv直角坐标系之间存在如下的坐标变换函数，且$x(u, v)$、$y(u, v)$在区域D上有一阶连续偏导数（这是为了保证可以找到最佳线性近似）：

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

如果雅可比行列式存在且不为0：

$$|J| = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

查看详细

则区域D上在xy直角坐标系下的面积为：

$$\iint\limits_D \mathrm{d}A = \iint\limits_D ||J||\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以，$z = f(x,y)$在区域D上的体积为（在xyz直角坐标系下的体积）：

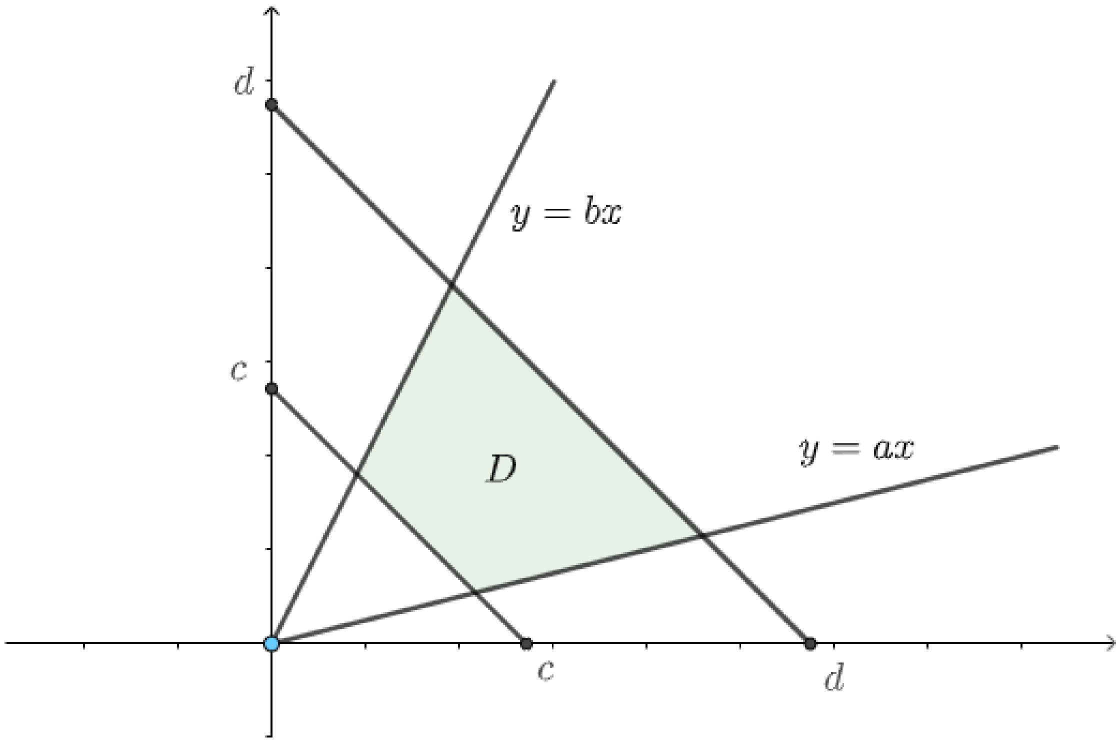
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint\limits_D f(u,v)\ ||J||\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

例题

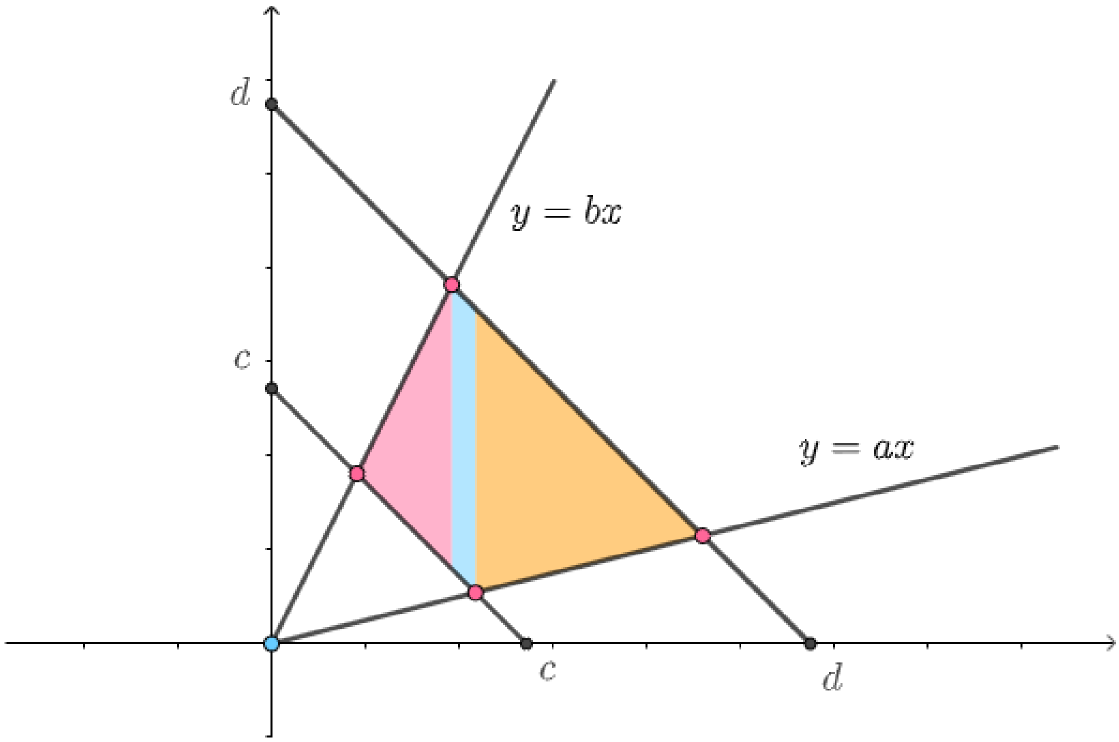
1

问： 试求由直线$x + y = c$，$x + y = d$，$y = ax$，$y = bx$，（$0 < c < d$，$0 < a < b$）所围成区域D的面积。

答： 先画一下区域D的草图：



要直接应用富比尼定理的话，需要先求出这些直线的交点（下图中的红点），然后根据交点划分为三个区域（下图中的三个色块），比较麻烦：



下面用换元的方法来解决这个问题，令$u=x+y$，$v=\dfrac{y}{x}$，可以得到变换方程组：

$$\begin{cases} x=\frac{u}{1+v} \\ y=\frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

根据这个方程组可以得到雅可比行列式为：

$$|J|=|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=\frac{u}{(1+v)^2}$$

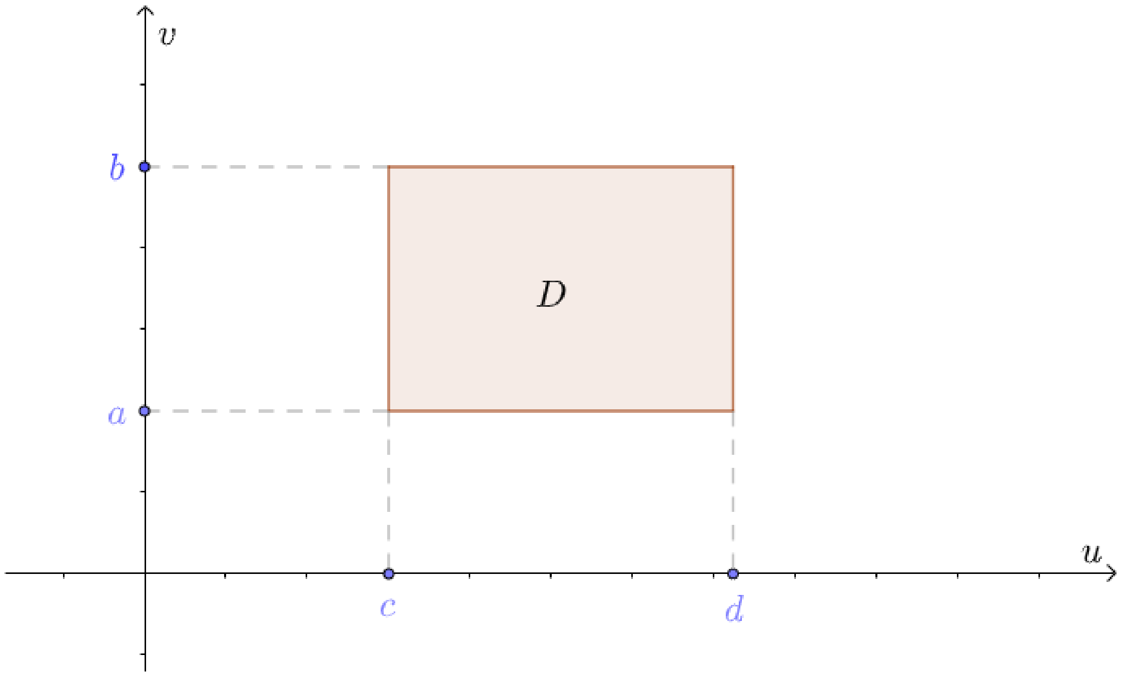
因为$u>0$，所以：

$$||J||=\frac{u}{(1+v)^2}$$

在uv坐标系下，D可以表示为：

$$D=\{(u,v)|c\le u\le d,a\le v\le b\}$$

这是uv坐标系下的矩形：



计算就很简单了。结合上雅可比行列式，可以算出区域D在xy坐标系下的面积为:

$$\iint\limits_D \mathrm{d}A = \iint\limits_D \; ||J|| \; \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_D \frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_a^b \int_c^d \left[\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

$$= \frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2(1+a)(1+b)}$$

2

计算$\iint\limits_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy$,其中$D$是平行四边形闭区域，它的四个顶点分别是$(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$

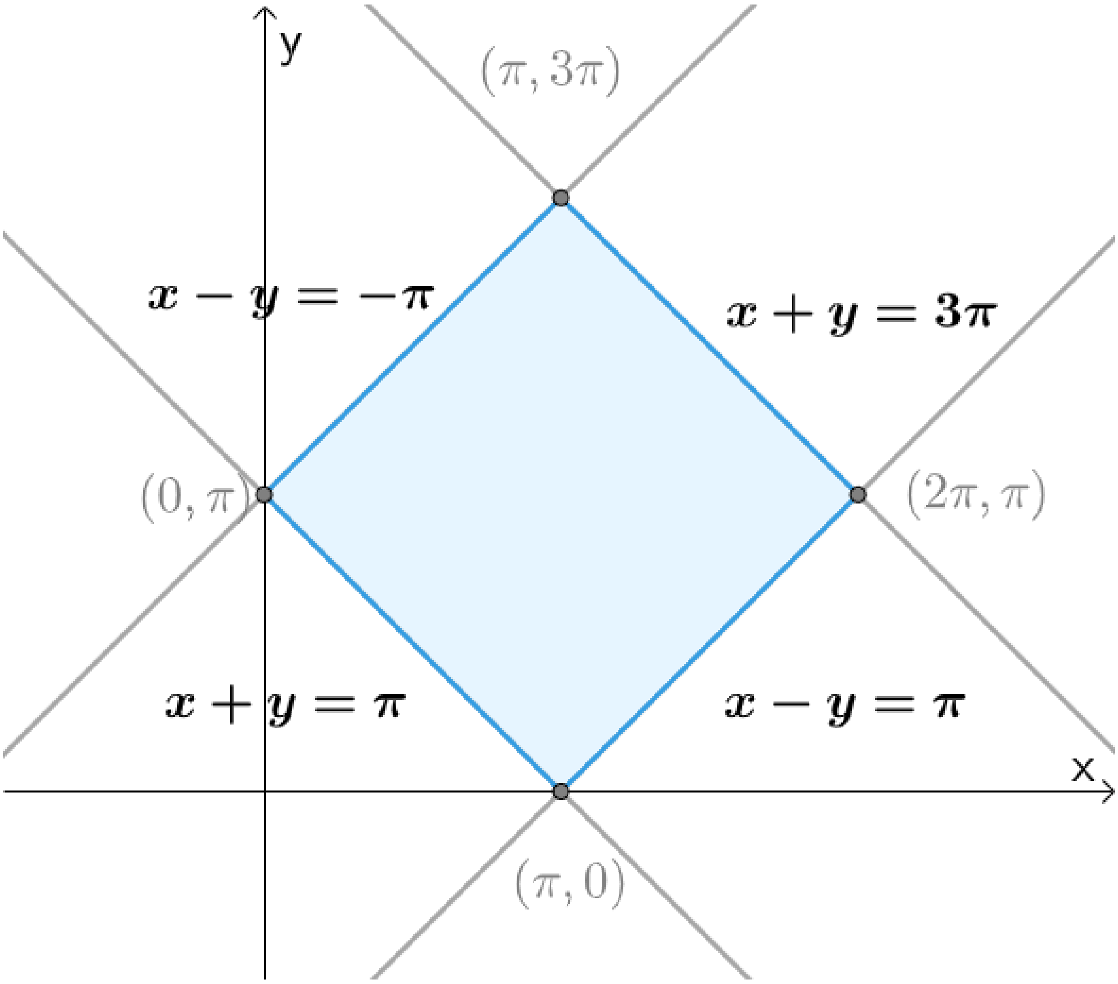
四个顶点为

$$(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$$

则D被直线

$$\begin{aligned} x-y&=-\pi \qquad & x+y&=\pi \\ x-y&=\pi \qquad & x+y&=3\pi \end{aligned}$$

所围成



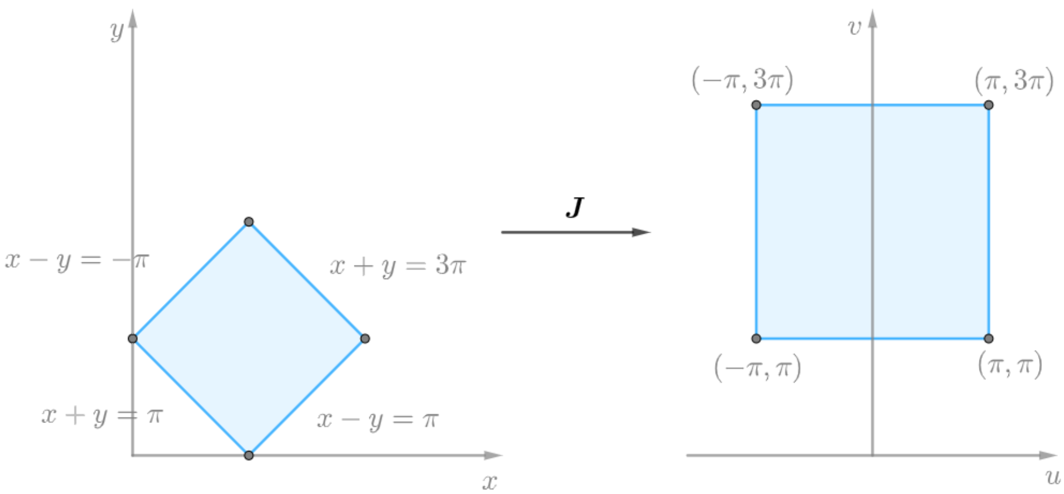
令 $u=x-y, v=x+y$,则边界变为:

$$u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$$

用不等式表示:

$$D'=\{(u,v)|-\pi\le u\le\pi, \pi\le v\le 3\pi\}$$

$$|J|=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$



根据二重积分换元法

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy = \iint_{D'} u^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} dudv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv = \frac{\pi^4}{3}$$