1.5 隐函数

1.5.1 隐函数存在定理

假设$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且：

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)\neq 0$$

则方程$f(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=g(x)$，它满足条件$y_0=g(x_0)$，并有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_x}{f_y}$$

该定理称为隐函数存在定理。

该定理也可以推广到更高维度：

假设$w=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且：

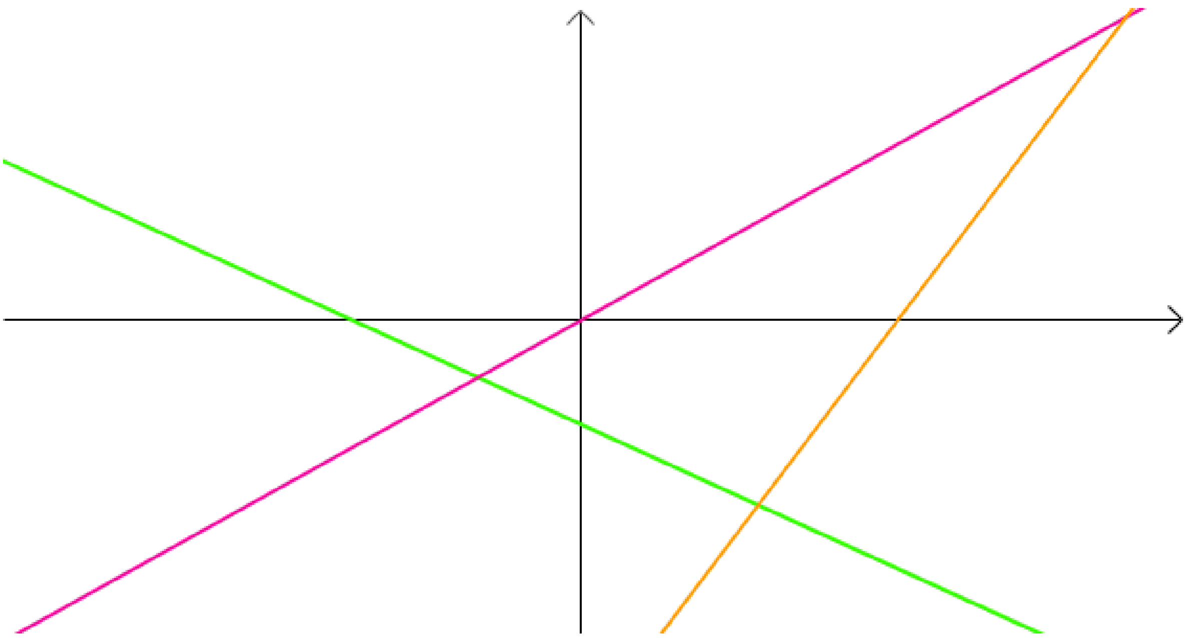
$$f(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

则方程$f(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$z=g(x,y)$，它满足条件$z_0=g(x_0,y_0)$，并有：

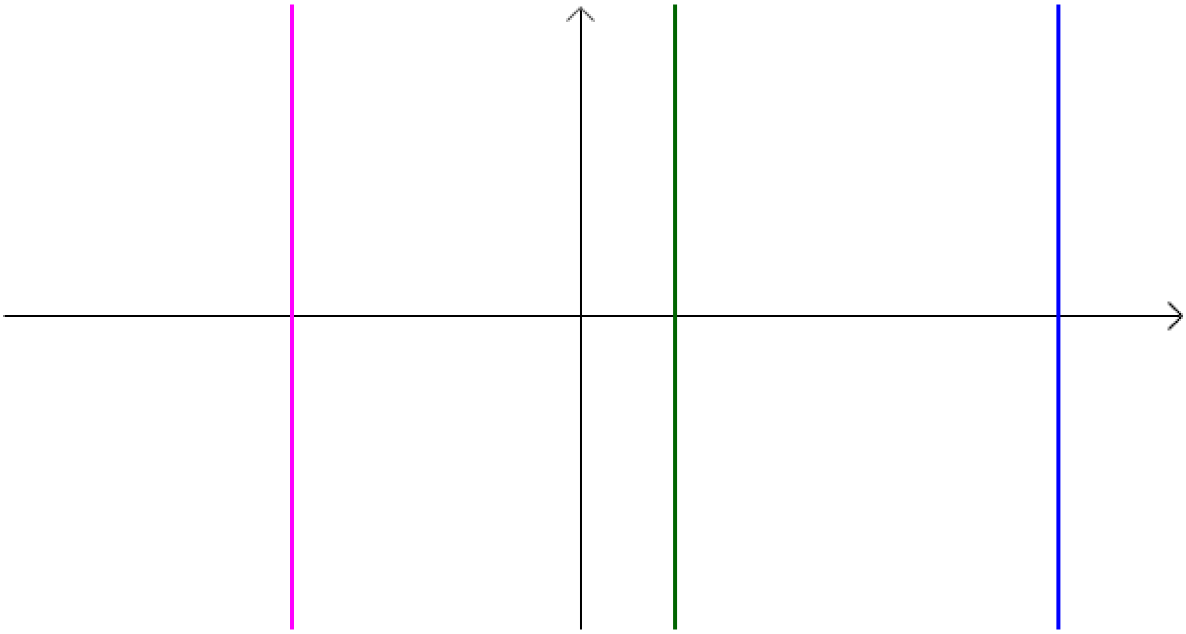
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

1.5.2 存在定理的几何意义

直线几乎都可以通过函数来表示，只有一种情况它不是函数，就是平行y轴的时候：



函数：$y=kx+b$



不是函数：平行y轴

切线是对切点附近曲线的线性近似，包括两者是不是函数都保持一致：

$$\text{切线是函数} \implies \text{切点附近是隐函数}$$
$$\text{切线不是函数} \implies \text{切点附近不是隐函数}$$

1.5.3 方程组与隐函数

有这么一个方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

假设经过各种变形，最后可以改写为下面这样的方程组：

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

上一课就介绍过这样的方程组是一个显函数F，该函数完成了如下映射：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

所以原来的方程组实际上是一个隐函数。当然也有可能无法写成显函数，但依然存在函数关系，这就需要方程组的隐函数定理来判断了。

1.5.4 方程组的隐函数存在定理

假设$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且：

$$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\quad G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$$

如果雅可比行列式:

$$|J|=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于0，则方程组:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

它们满足条件$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

这就是方程组的隐函数存在定理。

这个定理说的是，对于方程组:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

如果它决定了如下的一个函数，那么它就是隐函数:

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

隐函数的偏导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

这样写看上去似乎右边约掉后就得到了左边:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(F,G)}$$

$$= -\frac{\partial(\cancel{F},\cancel{G})}{\partial(x,\cancel{v})} \cdot \frac{\partial(u,\cancel{v})}{\partial(\cancel{F},\cancel{G})}$$

比较遗憾的是右边多了一个负号，不过相信这样写会比较容易记忆。

1.6 极值

1.6.1 极值的定义

设函数$z = f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$是D的内点，则：

- $f(x_0,y_0)$是极大值，当且仅当存在某个邻域$U(P_0) \subset D$，使得该邻域内所有异于P_0的点(x,y)，都有：
$$f(x,y) < f(x_0,y_0)$$
- $f(x_0,y_0)$是极小值，当且仅当存在某个邻域$U(P_0) \subset D$，使得该邻域内所有异于P_0的点(x,y)，都有：
$$f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

极大值和极小值都统称为极值，使得函数取得极值的点称为极值点。

1.6.2 极值点的必要条件

设函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有偏导数，且该点为极值点，则有：

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

要注意，该定理反过来是不成立的，所以只是极值点的必要条件：

$$\left.\begin{array}{r} (x_0,y_0)\ \text{为极值点} \\ (x_0,y_0)\ \text{点的偏导数存在} \end{array}\right\} \not\Leftarrow f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

1.6.3 极值点的充分条件

设函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，则其二阶导数，即海森矩阵为：

$$H = \frac{\partial^2 z}{\partial(x,y)^2} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

如果又有：

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

那么：

（1） $f(x_0, y_0)$为极大值，当$f_{xx} < 0$且$|H| > 0$；

（2） $f(x_0, y_0)$为极小值，当$f_{xx} > 0$且$|H| > 0$；

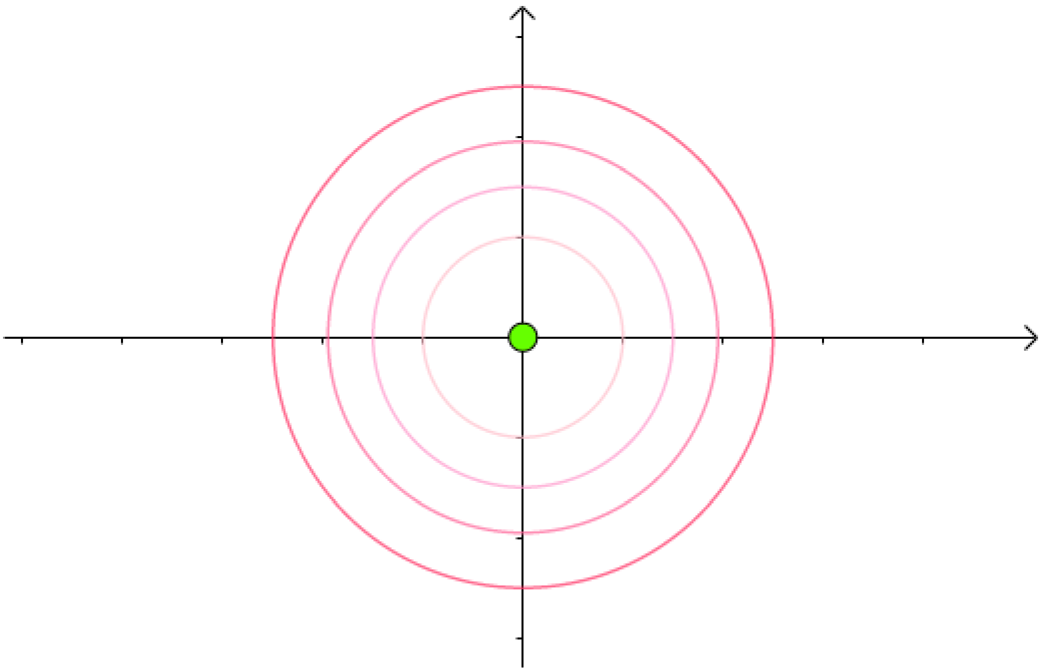
（3） $f(x_0, y_0)$非极值点，当$|H| < 0$；

（4） $f(x_0, y_0)$无法判断是否为极值点，当$|H| = 0$。

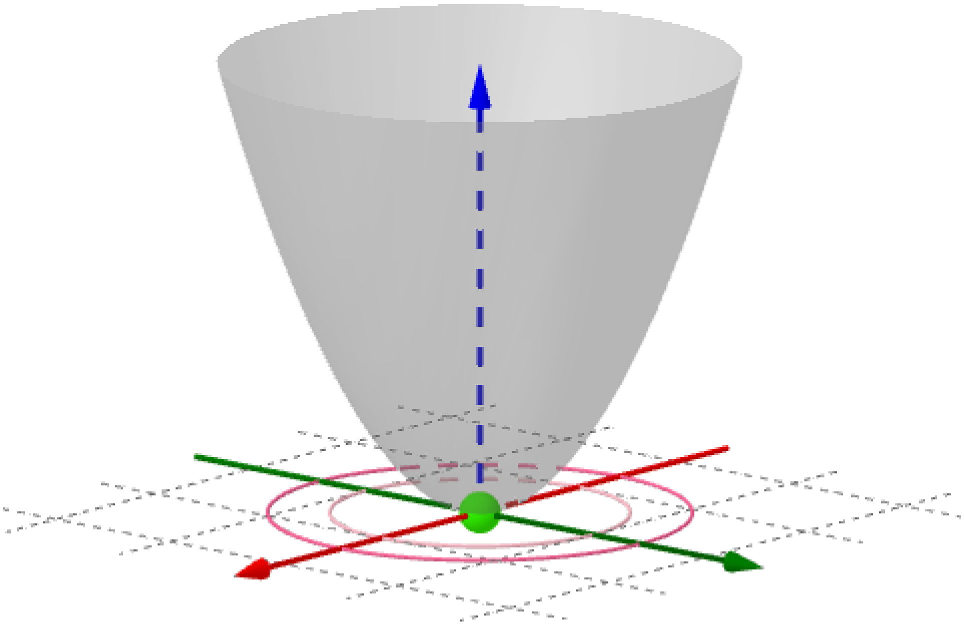
1.7 拉格朗日乘数法

1.7.1 约束下的最值问题

首先，假设有方程$x^2y = 3$，想要求得其上的点到原点的最短距离。同心圆代表了平面上的点到原点的距离，最小值就在平面的原点处。同心圆又可以看作$z = x^2 + y^2$的等高线，所以同心圆的最小值也是$z = x^2 + y^2$最小值：



同心圆的最小值在原点

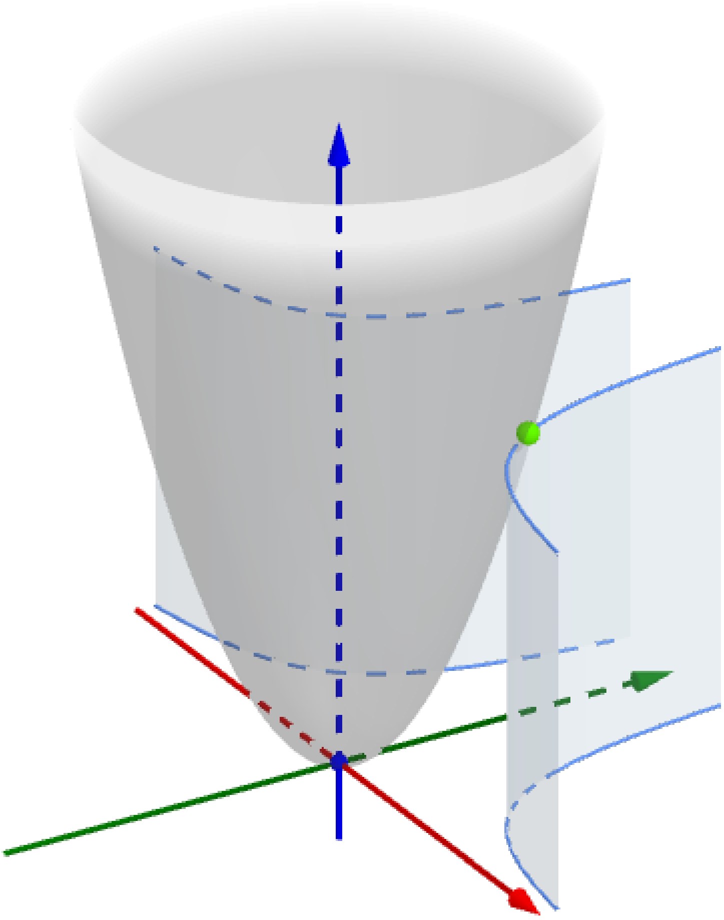


$z = x^2 + y^2$的最小值也在原点

因此同心圆的最小值，就是$z = x^2 + y^2$的自由最小值。

平面上的$x^2 y = 3$曲线也可以转化到空间中柱面：

那么之前要求的曲线到原点的最短距离，就是该空间柱面与曲面$z = x^2 + y^2$的最小交点，也就是下图中的绿点：



因此求曲线到原点的最短距离，也就变成了函数$z=x^2+y^2$在$x^2y=3$约束下的最小值问题，可以记作：

$$\min z=x^2+y^2$$
$$s.t.\ x^2y=3$$

其中$s.t.$的意思是，subject to，英文“服从、约束”的意思。

这里整体的思路就是把平面上的问题升高一个维度，转为空间中的等价问题。这种思路在隐函数求导的时候就遇到过了，目的是把方程转为函数，从而可以利用函数的种种手段。

1.7.2 平行的梯度

知道“**梯度是等高线法线的方向向量**”后，可以得到新的条件。

首先，在最小值点处，两条曲线有共同的切线，所以两条曲线的法线，也就是梯度，在切点处平行。因此，在极值点处，等高线的法线平行，也就是梯度向量平行，所以有：

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

1.7.3 小结

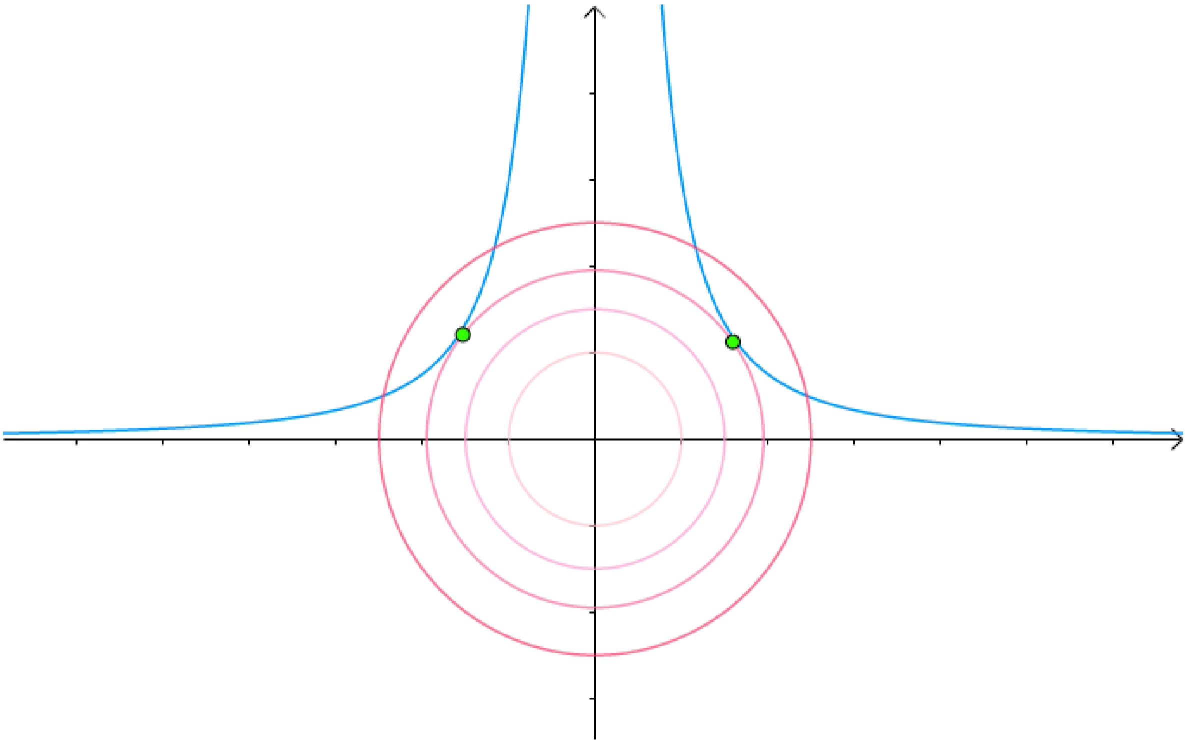
这样一来，之前的问题就之转化了为空间函数在约束下的最值问题：

$$\min z = x^2 + y^2$$
$$s.t.\ x^2y = 3$$

并且根据"梯度是等高线的法线方向"，在极值点得到了下列等式：

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

下面可以来解决问题了，要求同心圆$x^2 + y^2 = a^2$与该曲线$x^2y = 3$的最小交点：



根据之前的分析，在最小交点处满足以下方程组：

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ g(x,y) = x^2y \\ \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2y = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \\ x^2y = 3 \end{cases}$$

解该方程组得到：

$$\begin{cases} x \approx \pm 1.61 \\ y \approx 1.1 \\ \lambda \approx 0.87 \end{cases}$$

1.7.4 拉格朗日乘数法

更一般的，要求约束下的最值问题：

$$\min\max\ z = f(x,y)$$
$$s.t.\ g(x,y) = 0$$

在极值点可以列出如下方程组：

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

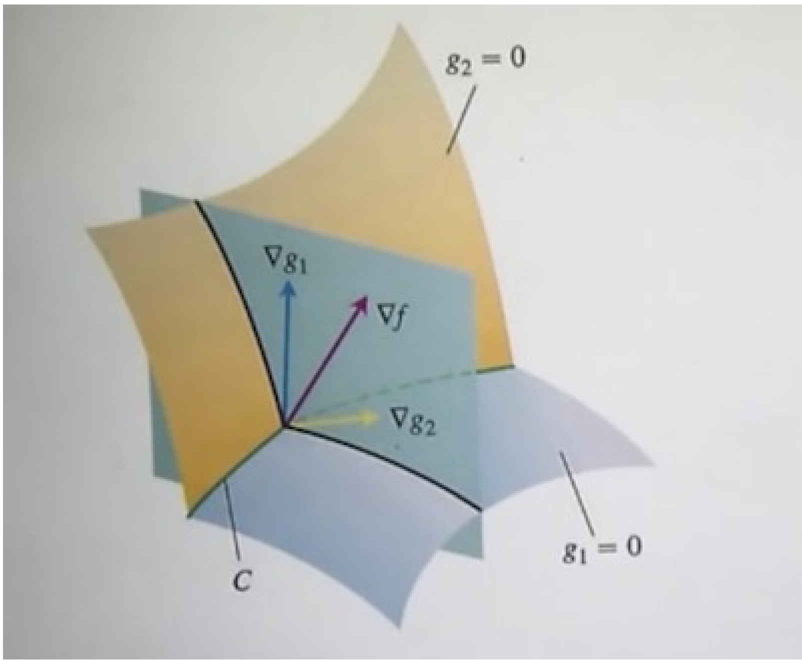
解该方程组可以求出极值点，这就是拉格朗日乘数法。

1.7.5 更高的维度，更多的约束

下面是三元函数，在两个约束下的最值问题：

$$\min\max\ w = f(x,y,z)$$
$$s.t.\ \begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

从图像上可以看出，这两个约束条件可以看作空间中两个曲面的交线C（图中没有画出f），在极值点处∇g_1、∇g_2以及∇f在同一个平面上（或者说线性相关）：



所以在极值点处可以列出方程组：

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y) = 0 \\ g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

解该方程组可以求出极值点。更多的约束、更高的维度可以类推。