2 重积分

2.1 二重积分

2.1.1 二重积分的定义

设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数，将闭区域D任意分成n个小闭区域：

$$\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_i,\cdots,\Delta A_n$$

其中ΔA_i表示第i个小闭区域，也表示它的面积，规定ΔA_i中最大的面积为λ：

$$\lambda=\max(\Delta A_i)$$

在每个ΔA_i内任取一点(x_i,y_i)，可以得到级数：

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

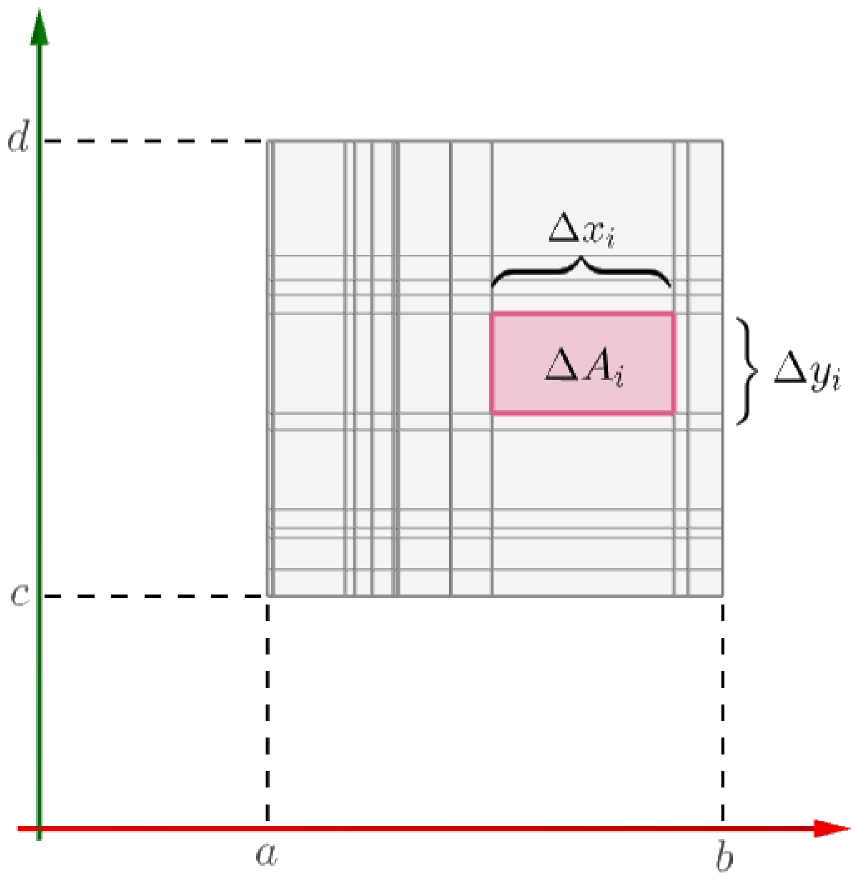
如果当$\lambda\to 0$时，无论如何划分闭区域D，无论怎样选取(x_i,y_i)，该级数的极限总是存在，那么称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分，记作：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

其中$f(x,y)$称为被积函数，$\mathrm{d}A$称为面积微分，x与y称为积分变量，D称为积分区域。

2.1.2 直角坐标系中的面积微分

对区域D进行矩形划分时，边长可记作Δx_i、Δy_i：



也就是说有：

$$\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

所以D区域上的曲面$z = f(x, y)$下的体积可以表示为：

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

因此二重积分有另外一种等价的表示形式：

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}A = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为在直角坐标系中，才进行矩形划分（之后会看到，在极坐标系中、以及别的坐标系中，划分是不一样的），所以$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$也被称为 直角坐标系中的面积微分。

2.1.3 二重积分的性质

2.1.3.1 线性函数

设$f(x, y)$，$g(x, y)$都是有界闭区域D上的有界函数，α、β为常数，则：

- 齐次性：

$$\iint\limits_D \alpha f(x, y)\mathrm{d}A = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}A$$

- 可加性：

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\mathrm{d}A = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_D g(x,y)\mathrm{d}A$$

根据这两个性质还可以得到一个推论：

$$\iint_D (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\mathrm{d}A = \alpha \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \pm \beta \iint_D g(x,y)\mathrm{d}A$$

2.1.3.2 区域可加性

如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么D上的二重积分等于各部分闭区域上的二重积分之和，该定理称为区域可加性。

根据区域可加性，有：

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\mathrm{d}A = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_{D_2} g(x,y)\mathrm{d}A$$

2.1.3.3 函数值关系

与单变量积分类似，如果：

$$f(x,y) \le g(x,y), \quad (x,y) \in D$$

那么：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A \le \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}A$$

由此可推的：

假设$f(x,y)$在区域D中，下界为m，上界为M，即：

$$m \le f(x,y) \le M$$

如果区域D的面积为A，那么根据上述定理可以得出：

$$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A \le MA$$

2.1.3.4 中值定理

设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，A是区域D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,μ)，使得：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = f(\xi,\mu)A$$

> 证明
>
> 之前证明过，假设$f(x,y)$在区域D中，下界为m，上界为M，那么有：

> $$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A \le MA$$
>
> 由于$A>0$，所以同时除以A，有：
>
> $$m \le \frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A \le M$$
>
> 由于：
>
> $$m \le f(x,y) \le M$$
>
> 根据连续函数的介值定理，在D上至少存在一点(ξ,μ)，使得：
>
> $$\frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = f(\xi,\mu) \implies \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = f(\xi,\mu)A$$

2.2 富比尼定理

2.2.1 富比尼定理较弱形式

设有矩形区域R：

$$R=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

若$f(x,y)$在区域R上连续，则：

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}A=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$

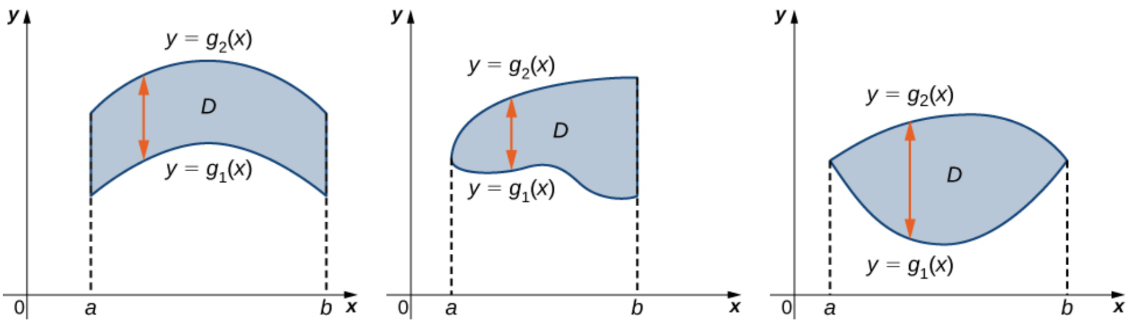
将二重积分变为，先积x后积y（或先积y后积x）的二次积分。

2.2.2 X型区域

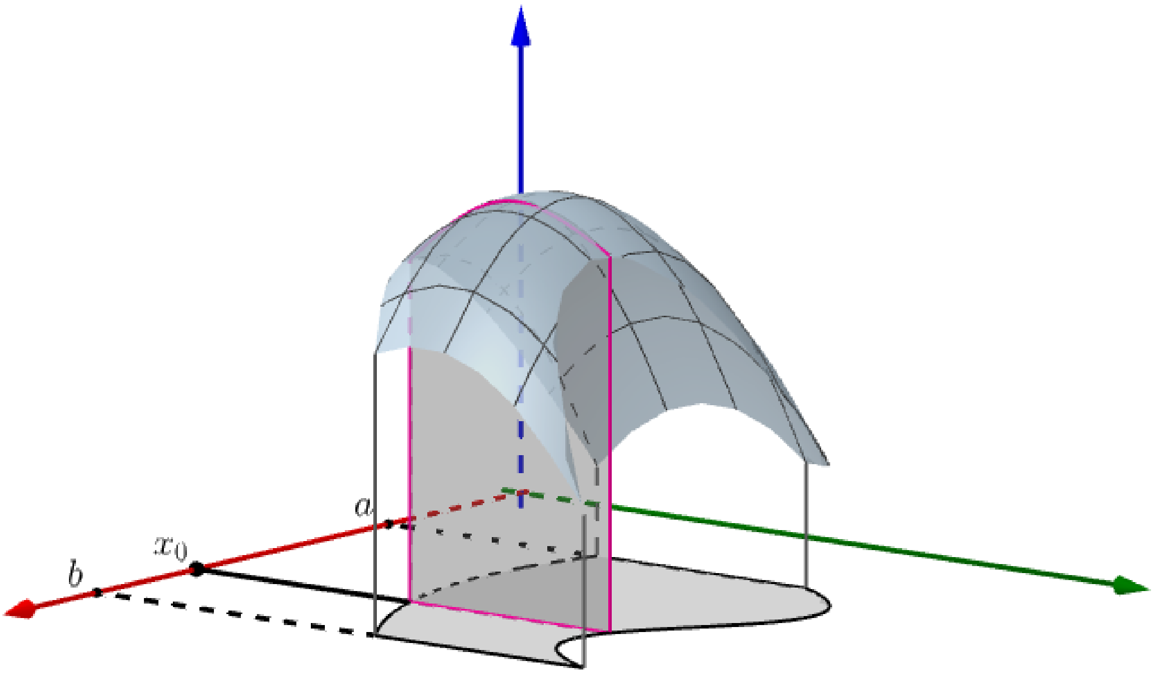
比如区域D：

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

区域D的特征是x在区间$[a,b]$上变化，而y的范围依赖于x的函数，这样的区域称为X型区域（Type I Region）。下面就是三种X型区域：



在$[a,b]$之间取一点x_0，同样可以作x_0截面：



该截面的面积$A(x_0)$同样只需要沿着y方向积分可得：

因此，$A(x_0)$的代数式如下：

$$A(x_0)=\int_{g_1(x_0)}^{g_2(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

x_0可以在$[a,b]$之间滑动，截面也会随着滑动。因此截面积会随着x变化而变化，这是关于x的一个函数：

$$A(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

知道截面积之后，根据之前的思路，可知体积V为：

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

将$A(x)$的表达式展开，再结合二重积分的定义，则上式可以改写为：

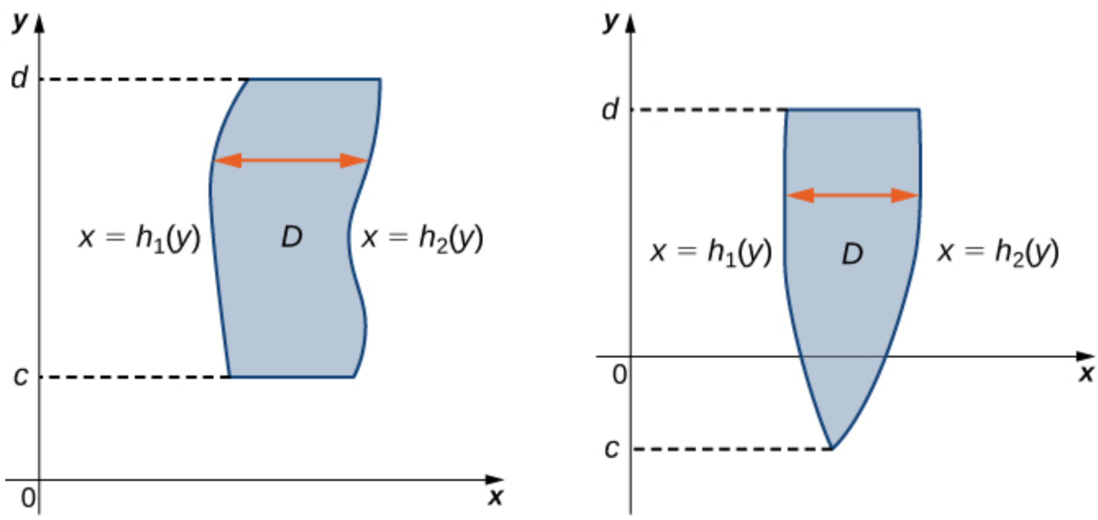
$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

2.2.3 Y型区域

有X型区域就有Y型区域，比如区域D：

$$D=\{(x,y)|c\leq y\leq d,h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\}$$

区域D的特征是y在区间$[c,d]$上变化，而x的范围依赖于y的函数，这样的区域称为Y型区域（Type II Region）。比如下面就是两种Y型区域：



与X型区域上的体积计算类似，可以得到Y型区域上的体积为：

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{c}^{d}\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.2.4 富比尼定理较强形式

若$f(x,y)$在区域D上连续：

- 若区域D为 $a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)$，其中$g_1$、$g_2$在$[a,b]$上连续，则：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{a}^{b}\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

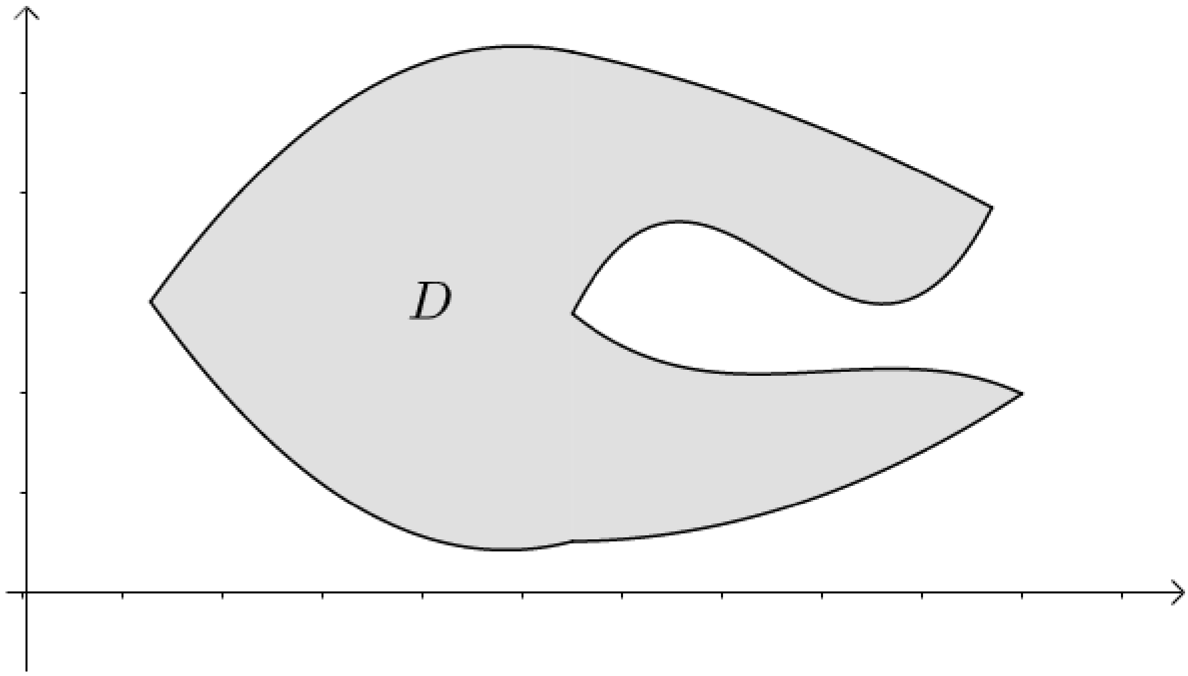
- 若区域D为 $c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y)$，其中$h_1$、$h_2$在$[c,d]$上连续，则：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{c}^{d}\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

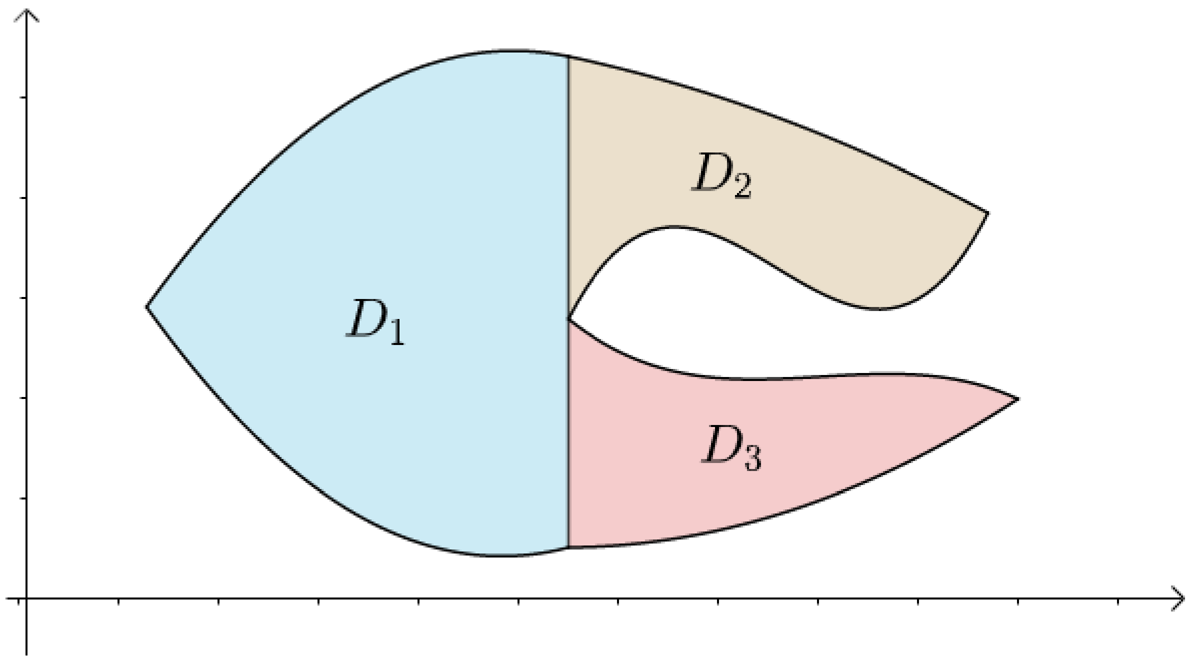
可见，和富比尼定理的较弱形式不一样，这里是不能交换积分顺序的。

2.2.5 复杂区域划分

一个复杂区域，可以将之划为X型区域、Y型区域的组合。比如下面这两张图：



复杂区域D

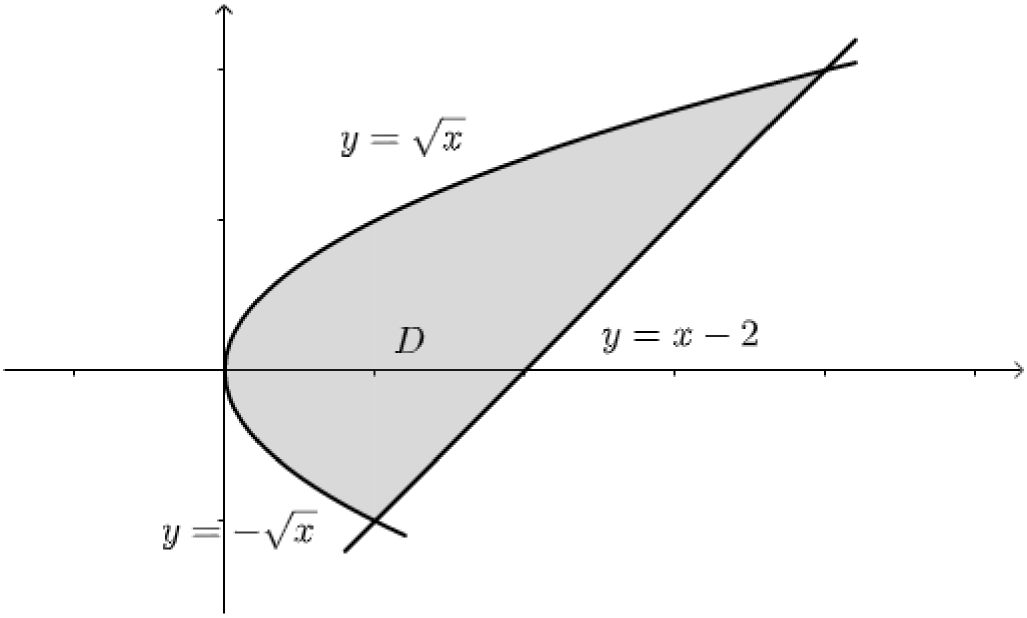


划为D_1、D_2、D_3三个X型区域

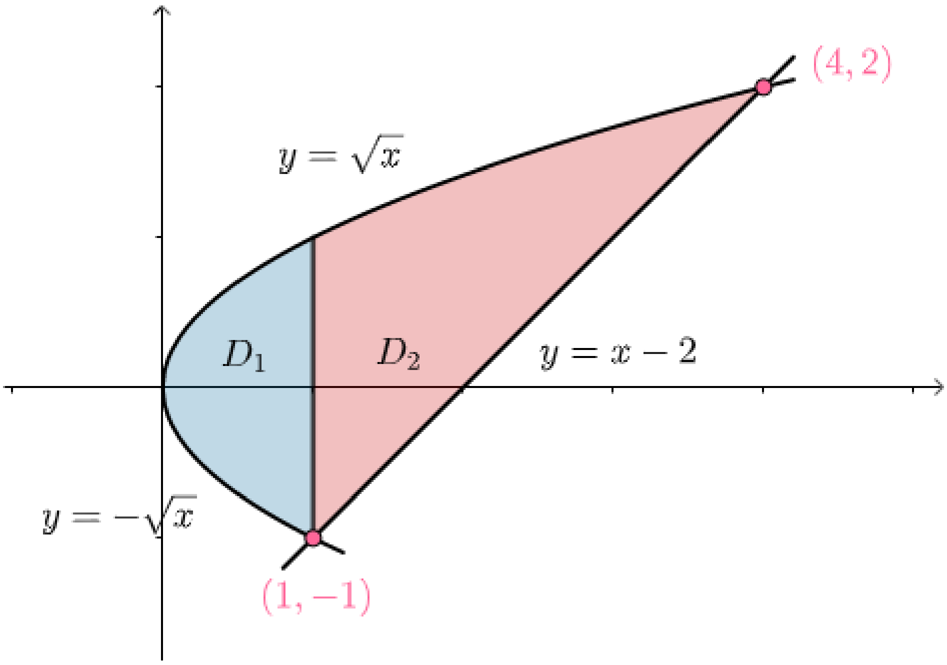
分别对这三个区域运用富比尼定理，再根据区域可加性，就可以算出曲面$z=f(x,y)$在区域D上的体积：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}A+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}A+\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}A$$

> 例题
>
> 比如下面区域D，由$y=\sqrt{x}$、$y=-\sqrt{x}$以及$y=x-2$围成，根据我们对图像的了解大致画出草图：



根据草图，发现需要算出$y=\sqrt{x}$与$y=x-2$的交点，以及$y=-\sqrt{x}$与$y=x-2$的交点。通过交点可以将D划分为两部分：



根据上图，可以得出这两个区域的表达式为：

$$D_1=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,-\sqrt{x}\leq y\leq\sqrt{x}\}$$

$$D_2=\{(x,y)|1\leq x\leq 4,x-2\leq y\leq\sqrt{x}\}$$

所以$z=f(x,y)$在D上的体积为：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}A+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}A$$

$$=\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_1^4\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$