1.1 排列与组合

1.1.1 排列

从n个不同元素中任取$r(r \le n)$个元素排成一排（不能重复选择元素，要考虑元素的先后顺序），称为一个排列（Permutation）。按乘法原理，此种排列共有

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

种，记作P_n^r，可以读作：

$$n \ \text{Pick} \ r$$

若$r=n$，称为全排列，全排列数共有$n!$个，记为P_n。

1.1.2 组合

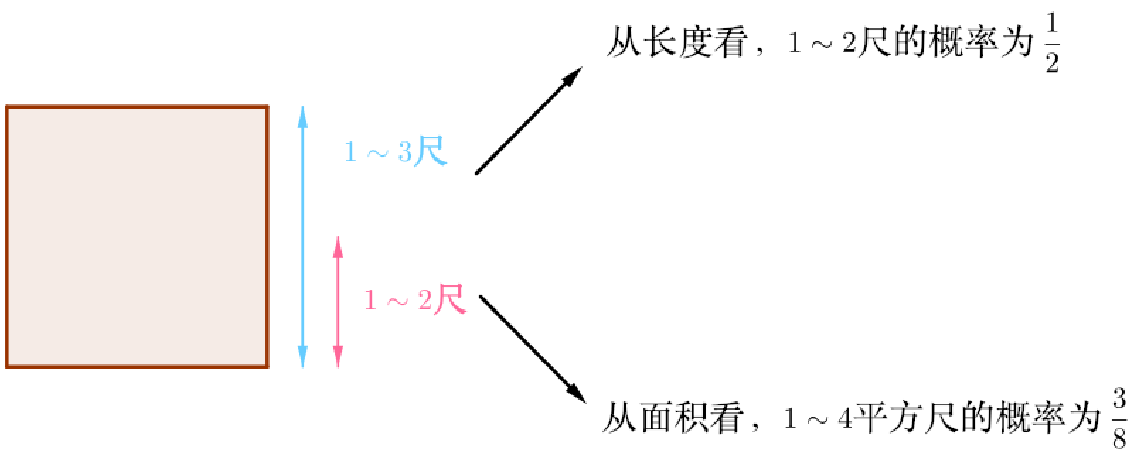
从n个不同元素中任取$r(r \le n)$个元素并成一组(不区分顺序)，称为一个组合（Combination），组合总数为：

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

可以读作：

$$n \ \text{Choose} \ r$$

1.3 几何概型



通过这个典型的例子可以看到，样本空间选择不同，同一个问题会得到了不同的概率。值得注意的是，就数学而言，这两个结论都是对的；在现实中哪个是对的，还需要通过采样、测量来决定。

1.2 事件的关系与运算

1.2.1 关系

包含	$A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$
相等	$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$
互斥	$A \cap B = \varnothing$
对立	$A = \overline{B}$

1.2.1.1 包含

设A、B为两个事件，若$A \subseteq B$，则可推出：

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \qquad (1)$$

$$P(A) \leq P(B) \qquad (2)$$

1.2.1.2 加法公式

对于任意两个事件，有：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

也常写作如下的形式：

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

所以这个公式也称为概率的加法公式。

两个事件加法公式也可以推广至三个事件：

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & \underbrace{-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)}_{\text{重复计算的部分需要“排斥”出去}} \\ & \underbrace{+P(A \cap B \cap C)}_{\text{多“排斥”出去的部分需要“包容”回来}} \end{aligned}$$

所以，加法公式也被称作容斥定理（Inclusion–exclusion principle）。

1.2.2 运算

	定义	类比
并	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	$+$
交	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	$\times$
差	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$	$-$
补	$\overline{A} = B \iff B = \Omega - A$	

然后这些基本运算和实数基本运算的性质差不多。

1.2.2.1 交换律

- $A + B = B + A$
- $AB = BA$

1.2.2.2 结合律

- $A + B + C = A + (B + C)$
- $ABC = A(BC)$

1.2.2.3 分配律

- $(A + B)C = AC + BC$
- $(A - B)C = AC - BC$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.2.2.4 德摩根定律

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.3 条件概率

1.3.1 定义

设A和B是样本空间Ω中的两事件，若$P(B) > 0$，则称：

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

为“假设条件为B时的A的概率”，简称条件概率。也常写作：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

概率与条件概率两者最重要的区别是：

- $P(A)$是以Ω为样本空间，这是一个全局的空间，包含所有可能性
- $P(A|B)$是以B为样本空间，相对而言是一个局部空间，有些可能性被排除掉了

1.3.2 性质

条件概率虽然是被推广出来的定义，但这种推广也是很合理的，一方面符合过往的经验（可以用古典派进行验算），另外一方面符合概率三大公理：

对于条件概率$P(A|B)$，满足以下三大公理：

（1）**非负性公理**：

$$P(A|B) \geq 0$$

（2）**规范性公理**：

$$P(\Omega|B) = 1$$

（3）**可加性公理**：设A_1、A_2、$\cdots$为两两不相容的事件，即$A_i \cap A_j = \varnothing$（$i \neq j$），有：

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n|B\right)$$

证明了条件概率是数学意义上的概率之后，马上就知道了，之前所做的推论在条件概率上也成立：

	概率	条件概率
空集	$P(\varnothing) = 0$	$P(\varnothing|C) = 0$
包含 $(A \subseteq B)$	$P(B-A) = P(B) - P(A)$ $P(A) \leq P(B)$	$P(B-A|C) = P(B|C) - P(A|C)$ $P(A|C) \leq P(B|C)$
加法	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$	$P(A+B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$

这里也可看出把概率公理化的好处，从很简单的三个公理开始，对各种结论进行证明。反过来，如果某定义满足这三个公理，那么概率论中的所有结论都对它成立。

1.3.3 乘法公式

从条件概率的定义我们马上可以推出乘法公式：

（1）若$P(B)>0$，则：

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

（2）若$P(A)>0$，则：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

（3）若$P(A_1\cdots A_n)>0$，则：

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

查看详细

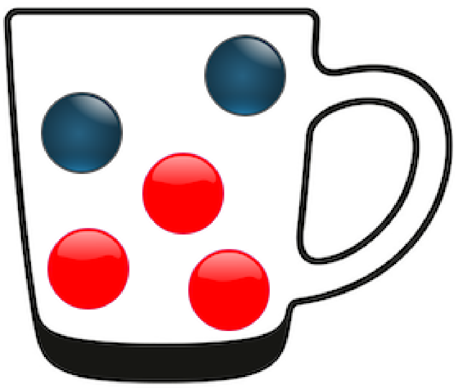
（3）式有点难记，其实还是有规律的。也可以手动来推，只需要反复运用条件概率的定义即可：

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)&=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\end{aligned}$$

1.3.4 树形图

树形图有助于进一步理解条件概率。

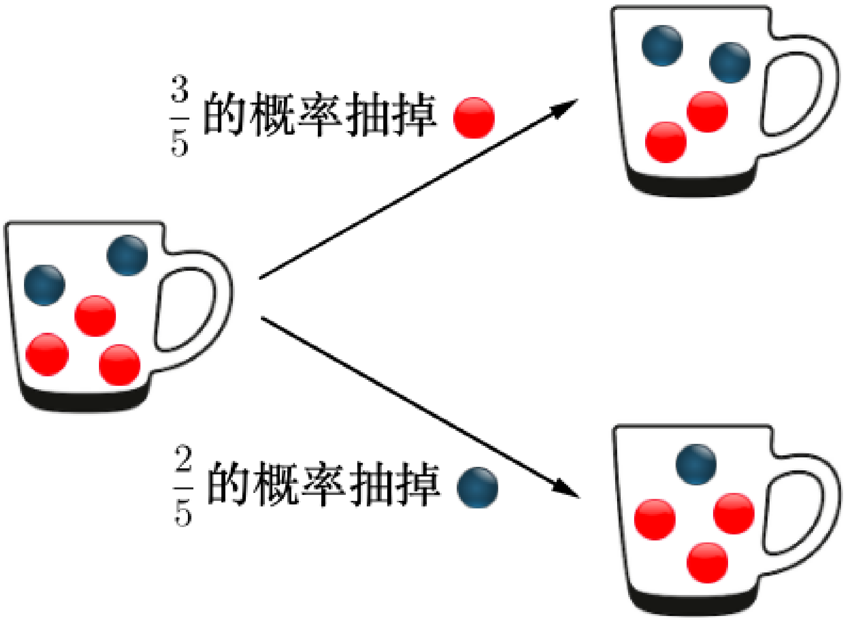
从一道题开始，杯中有三个红球、两个蓝球：



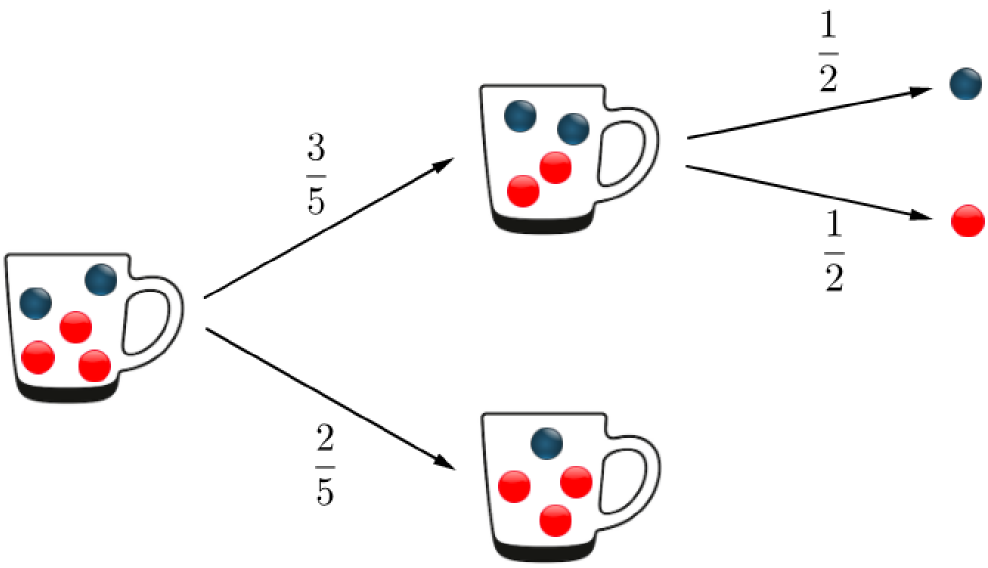
从中随机抽掉一个球后，再抽取一个蓝球的概率有多大？

1 树形图

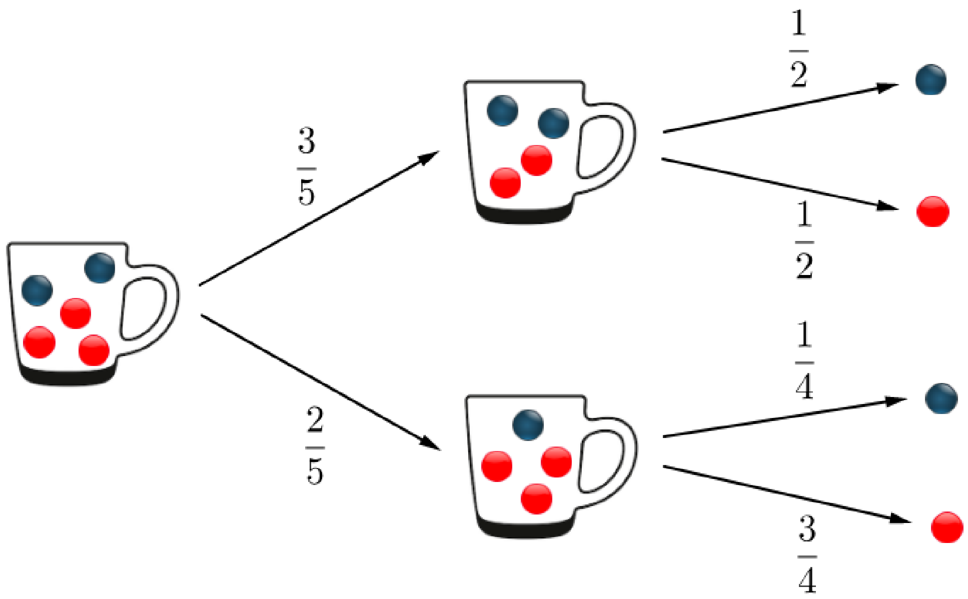
首先，从中随机抽掉一个球，有$\frac{3}{5}$的可能性抽掉红球、$\frac{2}{5}$的可能性抽掉蓝球：



如果抽掉红球，再抽取一个蓝球的概率为$\frac{1}{2}$：



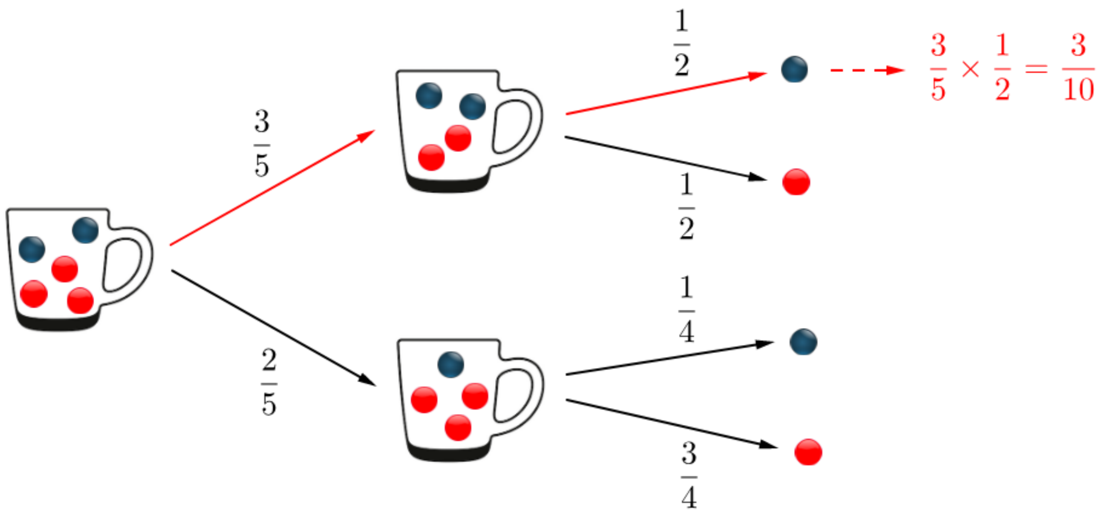
如果抽掉蓝球，再抽取一个蓝球的概率为$\frac{1}{4}$：



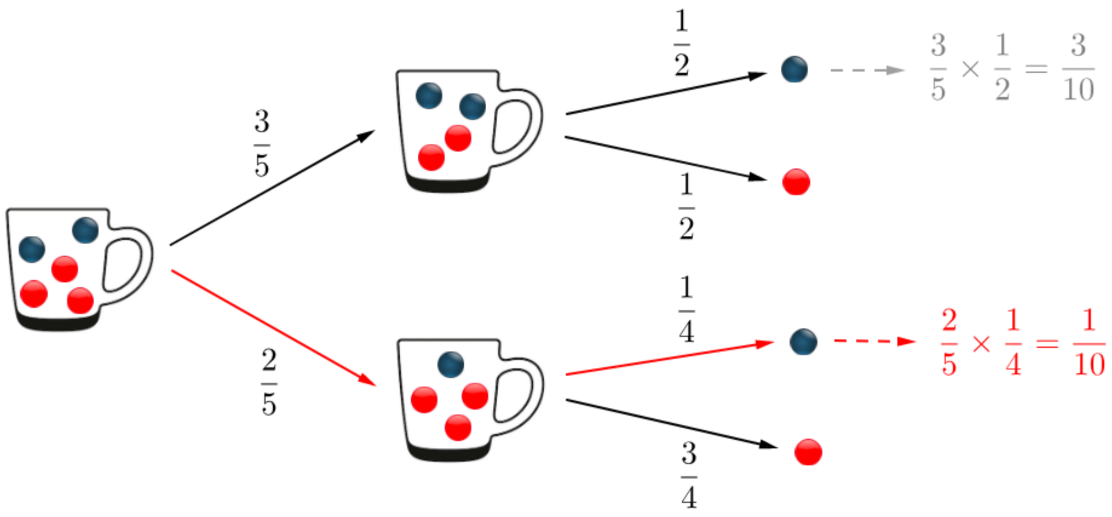
这就是树形图，下面可以用此来解题了。

2 解题

抽掉红球之后，再抽取一个蓝球的概率，可以沿着最上面的支线来计算（高中就是这么计算的，关于这点下一节会详细解释）：



而抽掉蓝球之后，再抽取一个蓝球的概率，可以沿着中间的支线来计算：

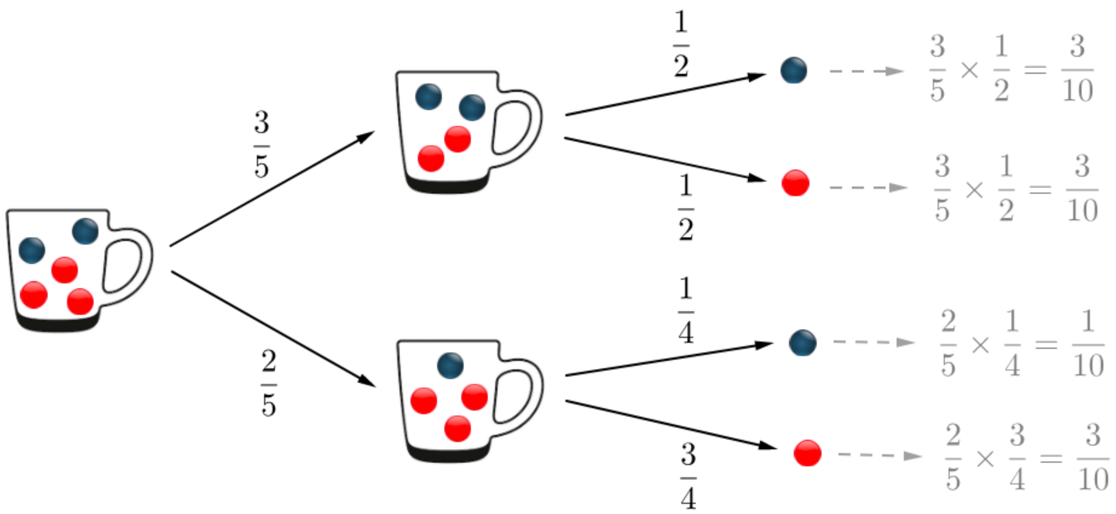


这样，随机抽掉一个球后，再抽取一个蓝球的概率是两条直线之和：

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$$

3 验算

如果树形图穷尽了所有的情况，且计算没有出错，那所有的分支概率之和应该为1；如果加起来不为1，说明有错漏，这个特点可以用来验算。来看看本题的所有分支：

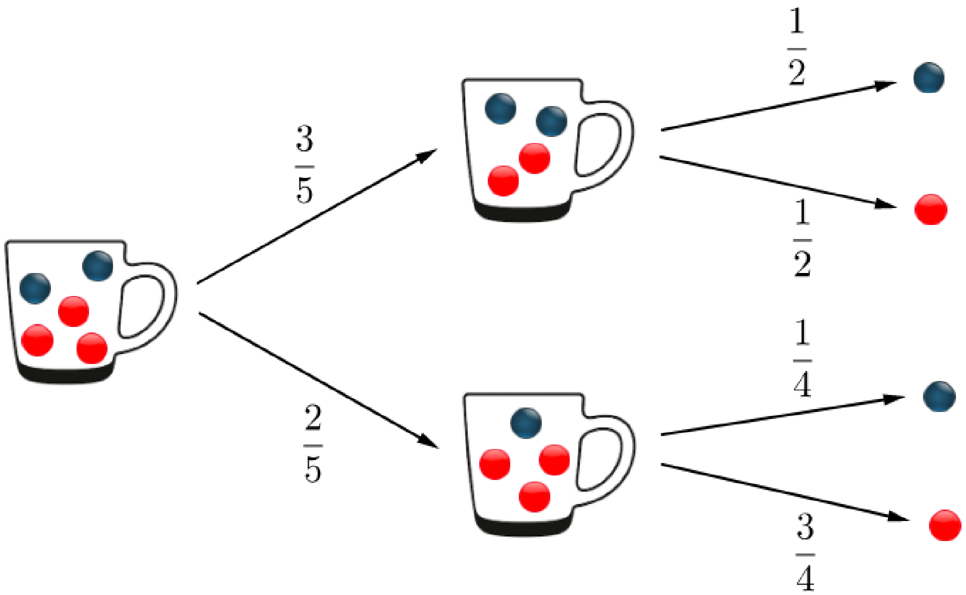


所有分支的概率之和确实为1：

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=1$$

1.3.4.1 树形图与条件概率

看着刚才那道题的树形图：

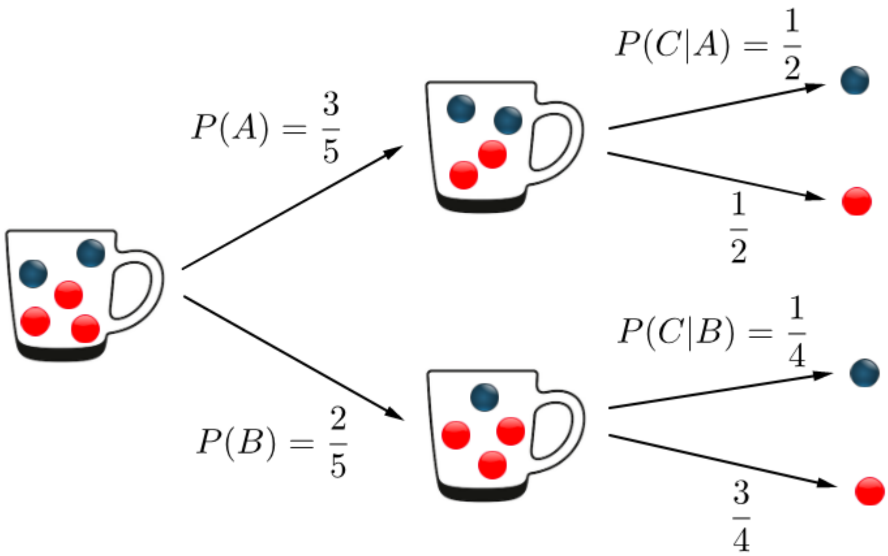


把这道题用代数来翻译下:

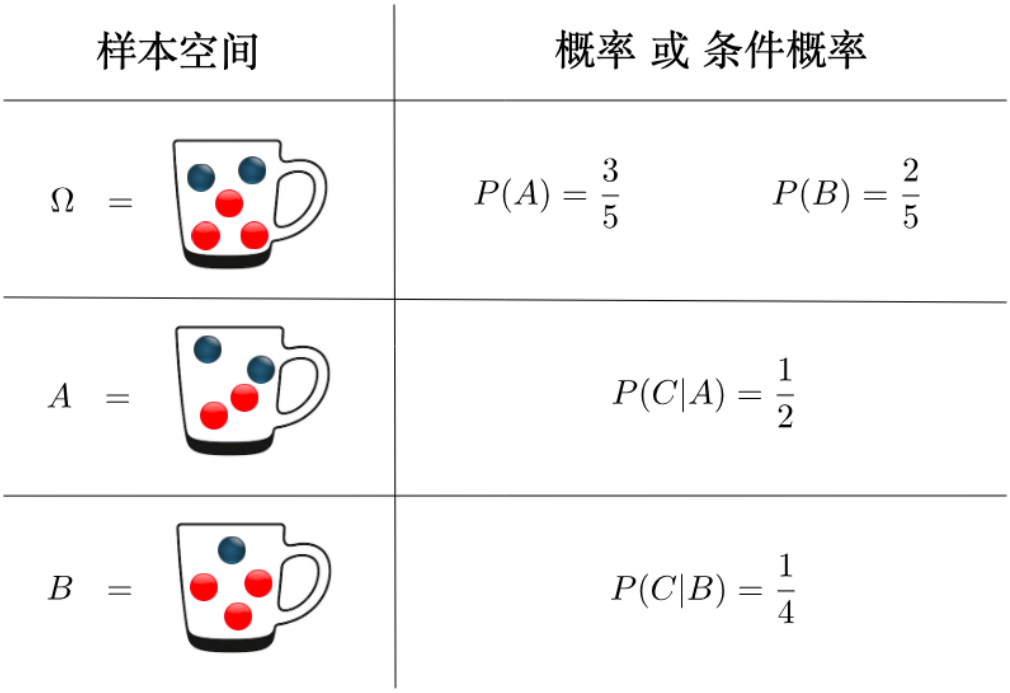
抽掉红球的概率为$\frac{3}{5}$	$P(A)=\frac{3}{5}$
抽掉蓝球的概率为$\frac{2}{5}$	$P(B)=\frac{2}{5}$
抽掉红球后抽取蓝球的概率为$\frac{1}{2}$	$P(C\|A)=\frac{1}{2}$
抽掉蓝球后抽取蓝球的概率为$\frac{1}{4}$	$P(C\|B)=\frac{1}{4}$
求，抽取蓝球的概率为多少?	$P(C)=?$

查看详细

其实这是一个条件概率的题，把这些概率符号标注到图上:

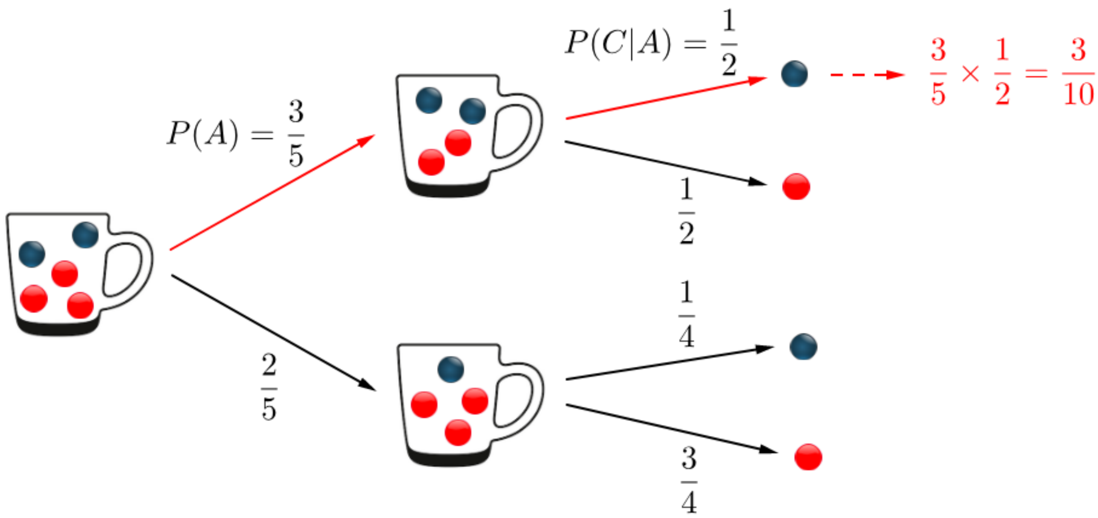


这里也可以看出条件概率的样本空间是局部样本空间:



1.3.4.2 树形图与乘法公式

刚才求的抽掉红球后，再抽取一个蓝球的概率：



其实就是乘法公式的一次应用：

$$P(AC)=P(A)P(C|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

> 例题
>
> **1** 假设生男、生女的概率均为$\frac{1}{2}$,已知一对夫妇有两个孩子，现在知道他们有一个男孩，则另一个孩子为女孩的概率为多少
>
> 根据古典概率模型，两个孩子总共有四个等可能的情况：

$$\Omega=\{男女，男男，女男，女女\}$$

设事件A为有一个孩子为女孩，B为有一个孩子为男孩,则

$$A=\{男女,女男,女女\},B=\{男女,男男,女男\}$$

AB即为有一个男孩一个女孩

$$A\cap B=\{男女,女男\}$$

由此可得

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{4}\quad P(AB)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{1}{2}$$

在已知一个是男孩的情况下，根据条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}$$

2 已知一对夫妇有两个孩子，现在知道老大为男孩，则老二为女孩的概率为多少

样本空间Ω为:

$$\Omega=\{(男,女)，(男,男),(女,男),(女,女)\}$$

设事件A="第一个孩子是男孩"，事件B="第二个孩子是女孩"

$$A=\{(男,男),(男,女)\},B=\{(男,女),(女,女)\}$$

因此:

$$A\cap B=\{(男,女)\}$$

根据条件概率:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}}=\frac{|AB|}{|A|}=\frac{1}{2}$$

3 袋中装有4个黑球，4个白球，从中随机取出一个球记下颜色后放回

再往袋中加入与取出的球同色的球2个，搅拌均匀后按同样的方式去求并加入求，一共重复三次

求三次中恰好有两次取出的球为黑球的概率P_2为

记第i次取到黑球为A_i,取到白球为B_i,其中$i=1,2,3$,则

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$$

在第一次取出黑球的情况下，第二次取出黑球的概率即从6黑4白中取出黑球的概率，所以

$$P(A_2|A_1)=\frac{6}{10}$$

每个条件都可以用这样的方式计算，由互斥事件的概率加法公式知

$$P_2=P\left(A_1A_2B_3\right)+P\left(A_1B_2A_3\right)+P\left(B_1A_2A_3\right)$$

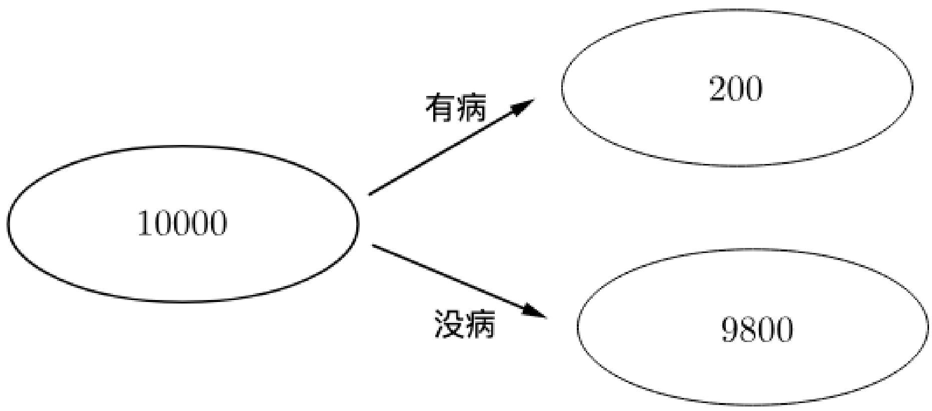
> 根据乘法公式可得
>
> $$P(A_1A_2B_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(B_3|A_1A_2)$$
>
> $$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10+2}=\frac{1}{10}$$
>
> 同样的类似方法可得
>
> $$P(A_1B_2A_3)=\frac{4}{8}\times\frac{4}{8+2}\times\frac{6}{10+2}=\frac{1}{10}$$
> $$P(B_1A_2A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{8+2}\times\frac{4+2}{10+2}=\frac{1}{10}$$
>
> 所以$P_2=\frac{3}{10}$

1.4 贝叶斯与全概率

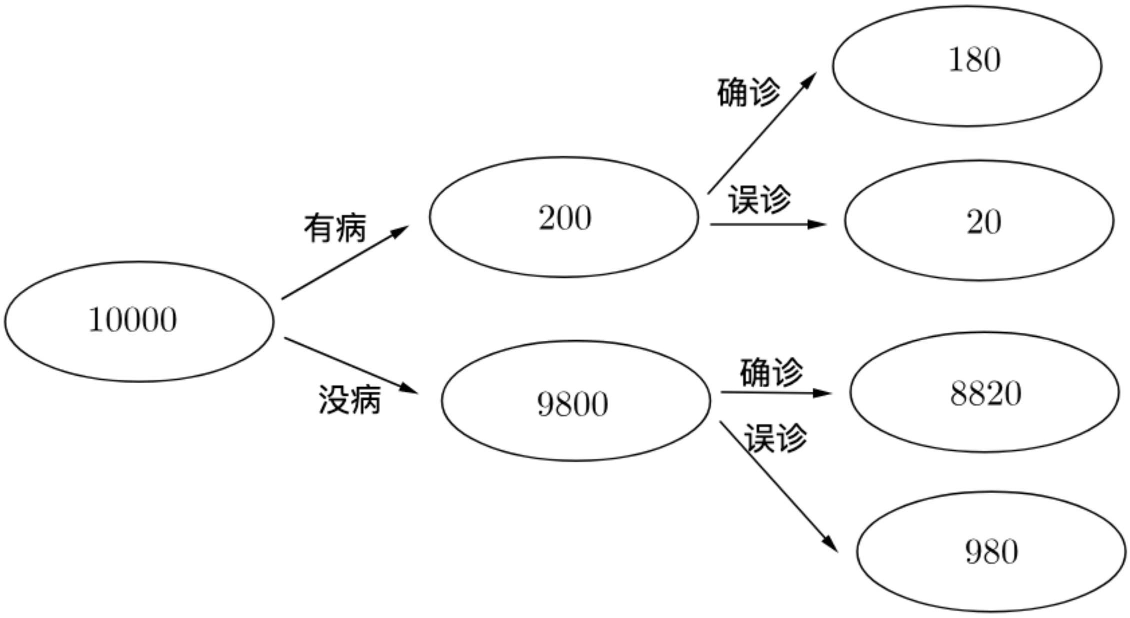
1.4.1 基本比例谬误

已知某种疾病在人群中有2%的患病率，可以通过某种手段来检测这种疾病，这种手段有90%的正确率。90%的正确率很高嘛，似乎被诊断出有病了之后那基本就真的有病了。真的是这样吗？

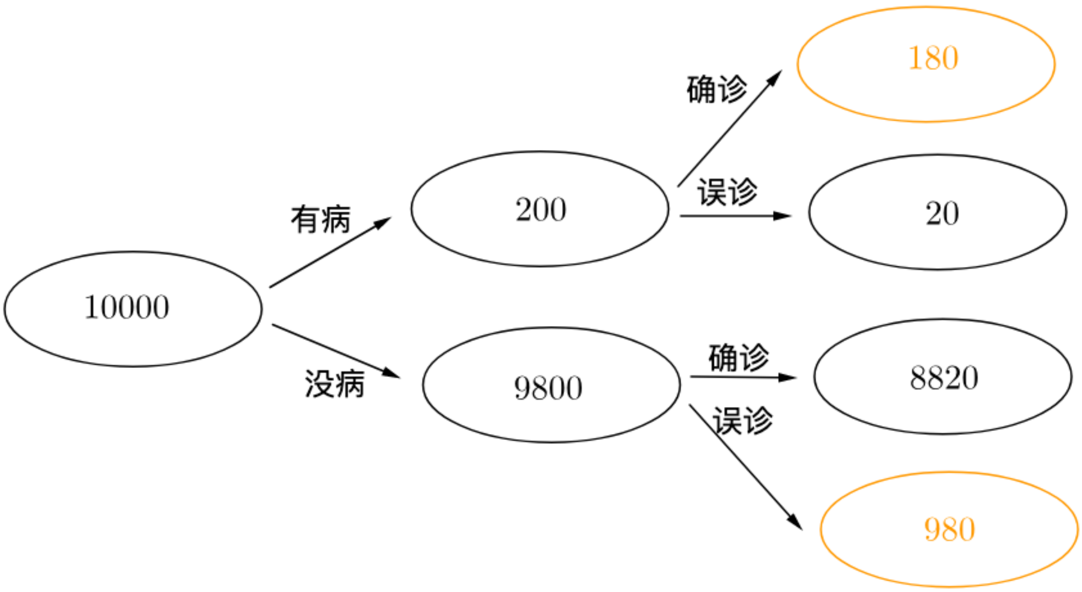
还是来画下树形图，假设有10000个人，2%的患病率就是200个人有病：



正确率90%，这个正确指的是，检测显示有病的是真有病，检测显示没病的是真没病（下图中“确诊”表示正确的诊断，“误诊”表示错误的诊断）：



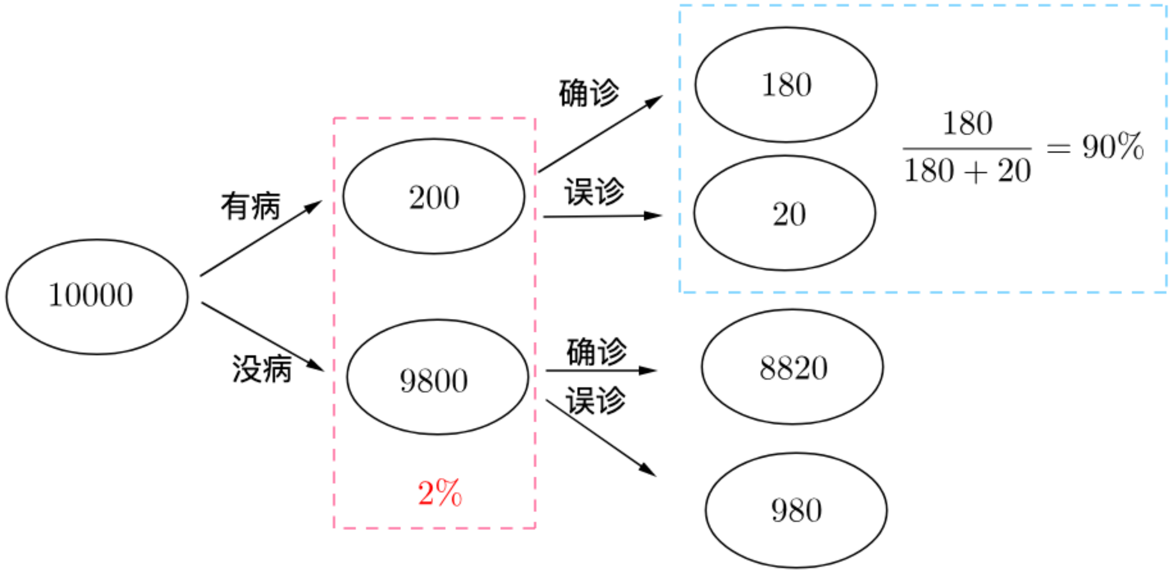
被诊断出有病包含两种可能性，一种是有病人群中的"确诊"和没病人群中的"误诊"：



也就是说这10000人里面会有$180+980=1160$人被诊断有病，而真正有病的不过180人，所以如果被检测出有病，真正有病的概率只有：

$$\frac{180}{1160} \approx 15.5\%$$

根本的原因在于忽视了人群分布的基本比例，虽然确诊率高达90%，但是真正患病的人实在太少了，只占所有人中的2%：



没患病的足足有98%，哪怕误诊率为10%，但人多啊，依然有很多被误诊为有病。

这种忽视基本比例导致的错误称为基本比例谬误（Base Rate Fallacy）。

1.4.2 贝叶斯

1.4.2.1 贝叶斯定理

对于随机事件A、B，若$P(B)\neq 0$，有：

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$$

解读1： 在诊断问题中，已知检测的正确率有90%，或者说确诊率为90%：

$$P(B|A)=90\%$$

而求出来的"被诊断出有病了之后真的有病的概率"为：

$$P(A|B)\approx 15.5\%$$

之前说过，差别这么大在于基本比例悬殊，也就是所有人中患者只占了2%，贝叶斯定理正好反映了这点：

$$P(A|B)=\overbrace{\boxed{\frac{P(A)}{P(B)}}}^{\text{基本比例}}\underbrace{P(B|A)}_{\text{确诊率}}$$

$P(A)$、$P(B)$是关于所有人的概率：

$$P(A)=\text{所有人患病的概率},\qquad P(B)=\text{所有人检测显示有病的概率}$$

两者的比例就是所谓的基本比例。

解读2： 贝叶斯定理除了用于解读基本比例谬误以外，还有一种更常用的解释。先把贝叶斯定理变下形：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)}{P(B)}P(A)$$

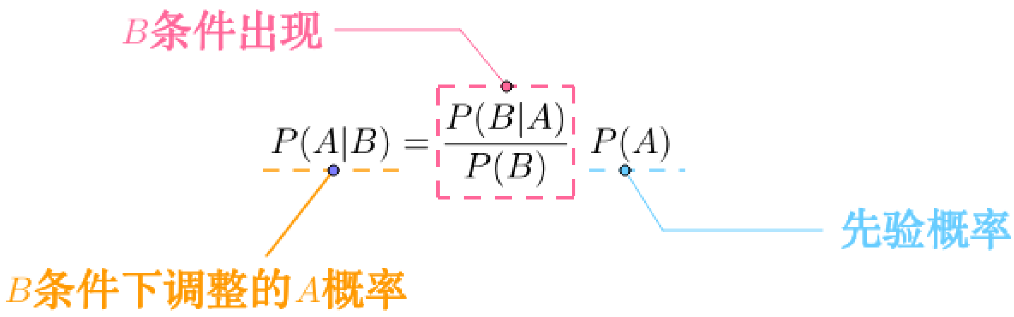
还是之前的疾病检测问题，还是之前定义的两个事件：

$$A=\text{“患病的人”},\qquad B=\text{“检测显示有病的人”}$$

一开始就知道人群中有2%的患病率，这个也称为先验概率（大概就是最先就知道的意思），即：

$$P(A)=2\%$$

如果只知道这个信息，那么你患病的概率也是2%。但有一天去体检，检查显示你有病，这个时候相当于出现了新的信息，或者说B条件出现了，可以通过贝叶斯定理对患病的概率进行调整：



调整的结果当然是真正有病的概率急剧上升：

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(B|A)}{P(B)}P(A)\\&=\frac{0.9}{0.02\cdot 0.9+0.98\cdot 0.1}\times 0.02\\&\approx 15.5\%\end{aligned}$$

> 例题
>
> A市有两种颜色的出租车，颜色和比例如下：

某天有一辆出租车夜间肇事后逃逸，但还好当时有一位目击证人，这位目击者认定肇事的出租车是绿色的。但是，他“目击的可信度”如何呢？公安人员经过在相同环境下对该目击者进行“蓝绿”测试而得到：80%的情况下识别正确，20%的情况不正确。

那么肇事车辆为绿色的概率有多大？

假设事件为：

$$A=\text{“绿色的出租车”},\quad B=\text{“目击为绿色”}$$

在未知的情况下，全市的出租车都有可能肇事逃逸。那么绿色出租车肇事的概率和绿色出租车的比例是一样的，也就是先验概率为：

$$P(A)=0.1$$

这个时候目击证人出现了，他说看到的是绿色的出租车，但是警方检测之后发现他的正确率是80%，也就是：

$$P(B|A)=0.8$$

被他目击为绿色的包括绿色出租车中的80%、以及蓝色出租车中的20%，即：

$$P(B)=0.1\cdot 0.8+0.9\cdot 0.2$$

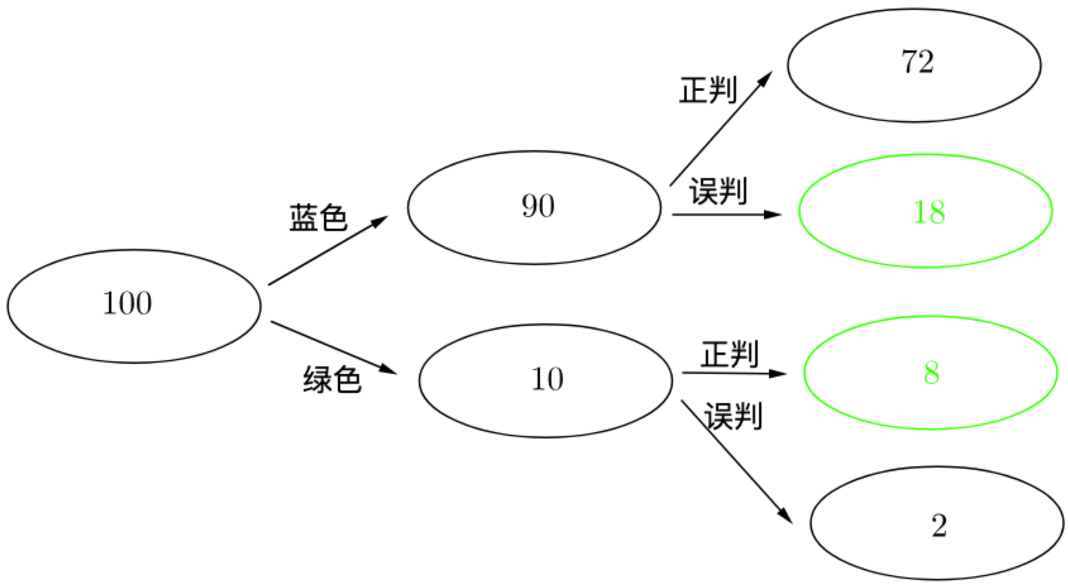
既然目击证人有了，那么肇事车辆为绿色的概率通过贝叶斯调整后，自然会变高：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)}{P(B)}P(A)$$

$$=\frac{0.8}{0.1\cdot 0.8+0.9\cdot 0.2}\times 0.1$$

$$=\frac{4}{13}$$

当然你也可以用树形图来解，答案也是一样的：



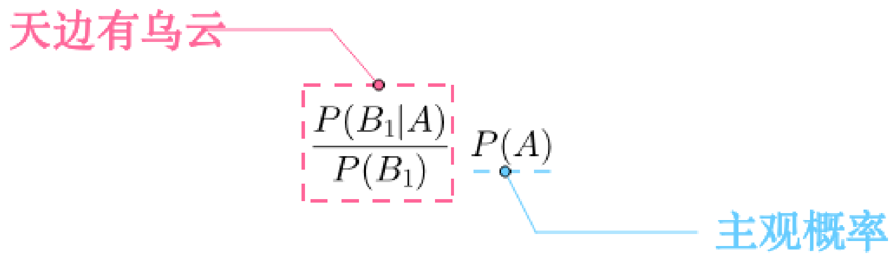
> 可以看出，哪怕有目击证人的情况下，绿色出租车作案的可能性仍然不高，因为基础比例在那里起作用，所以警察办案不能靠孤立的证据，很容易冤枉好人。

1.3.2.1 贝叶斯与修正

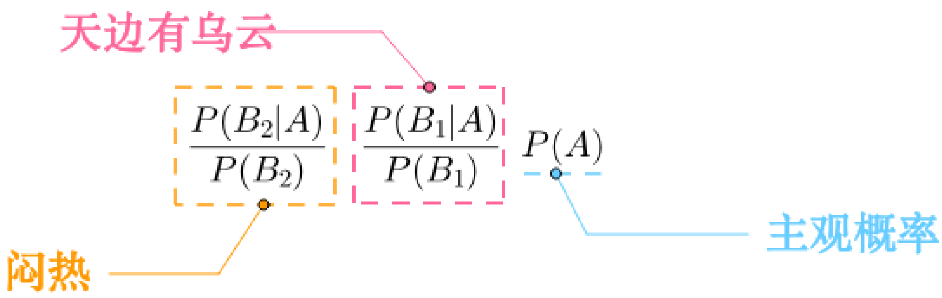
贝叶斯定理这种会被新的信息修正的特性特别受主观派的青睐。举个例子，比如要判断明天是否下雨，主观派说，反正一无所知就假设为50%吧：

$$P(A) = 50\%$$

突然发现，天边似乎有乌云，假设为事件B_1，那用贝叶斯修正一下：



又觉得天气闷热的，假设为事件B_2，再用贝叶斯修正一下：



通过不断地信息修正，主观概率会越来越变得客观（对此依然有很多争论，我们无意讨论）：

$$\text{客观概率} = \boxed{\frac{P(B_n|A)}{P(B_n)}} \cdots \boxed{\frac{P(B_2|A)}{P(B_2)}} \boxed{\frac{P(B_1|A)}{P(B_1)}} \underbrace{P(A)}_{\text{主观概率}}$$