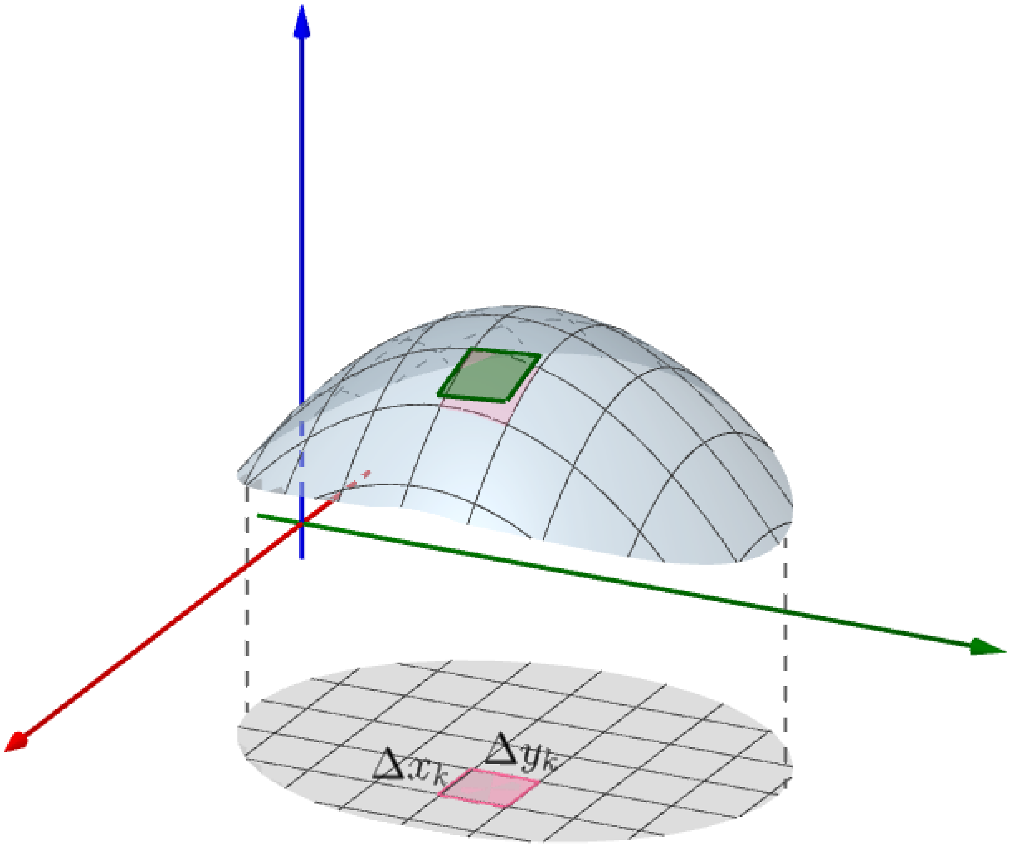
2.6 重积分几何应用

2.6.1 曲面的面积

小曲面ΔS_k可以用对应的小切平面ΔT_k来近似，

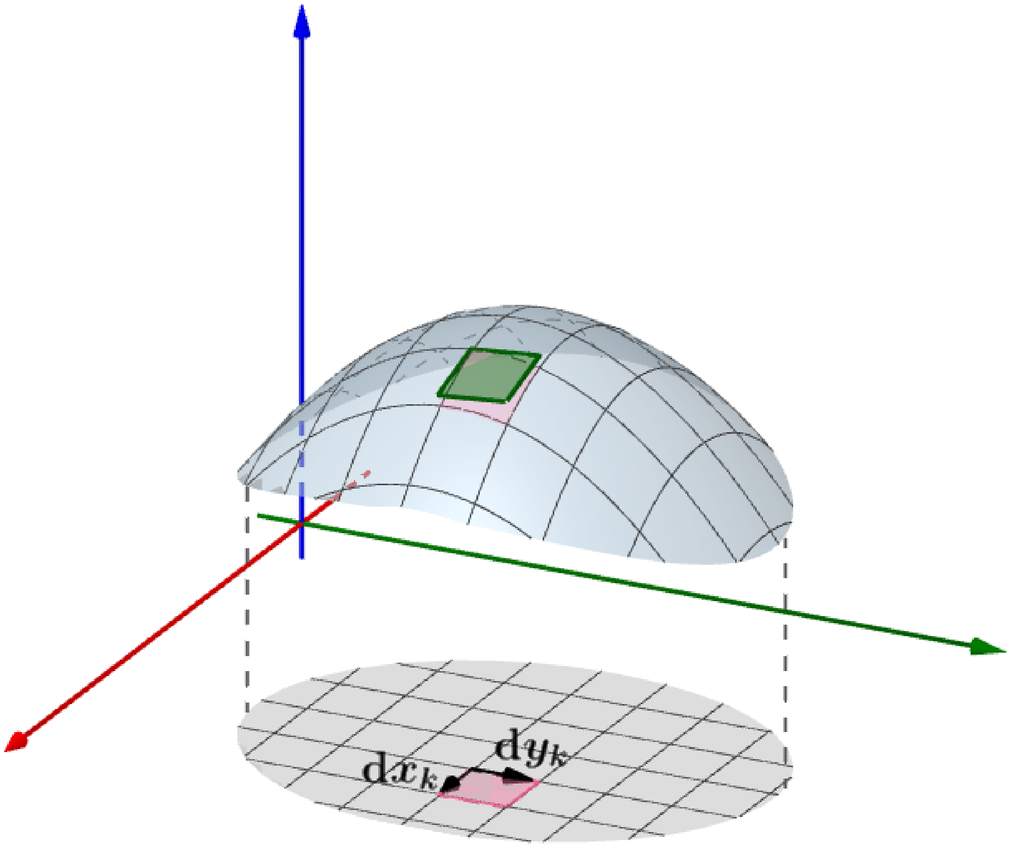
先看看小切平面ΔT_k是怎么构成的。ΔA_k的两边长分别为$\Delta \boldsymbol{x}_k$和$\Delta \boldsymbol{y}_k$：



ΔA_k的两边分别平行于$\boldsymbol{x}$轴和$\boldsymbol{y}$轴，因此这两边又可看作两个向量：

$$\mathbf{d}\boldsymbol{x_k}=\begin{pmatrix}\Delta x_k\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}\boldsymbol{y_k}=\begin{pmatrix}0\\\Delta y_k\\0\end{pmatrix}$$

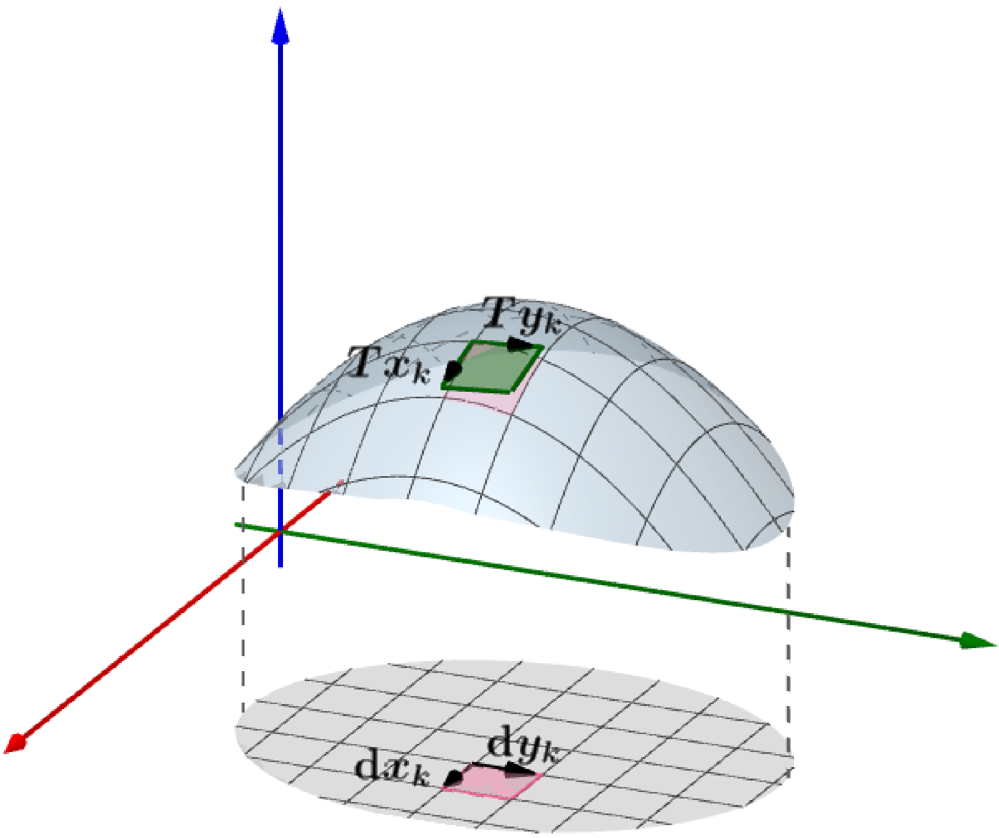
画在图上就是：



假设曲面函数为$f(x,y)$，偏导数分别为f_x、f_y，根据之前的学习，容易知道切平面ΔT_k的两边为如下两个向量：

$$\boldsymbol{Tx_k}=\begin{pmatrix}\Delta x_k\\0\\f_x\Delta x_k\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Ty_k}=\begin{pmatrix}0\\\Delta y_k\\f_y\Delta y_k\end{pmatrix}$$

画在图上就是：



这两个向量围成的小切平面ΔT_k的面积，就是它们的向量积的绝对值：

$$\Delta T_k = |\boldsymbol{Tx_k} \times \boldsymbol{Ty_k}| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\Delta x_k \Delta y_k$$

搞清楚了小切平面ΔT_i的面积，将区域D对应的小切平面都加起来，最终就得到了区域D上的曲面面积：

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

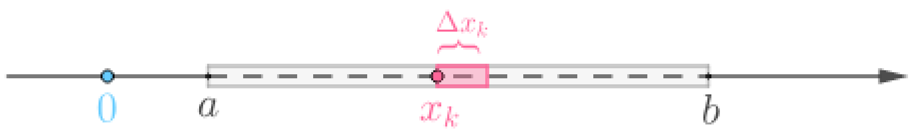
> 例题
>
> **问：** 求半径为a的球体的表面积。
>
> **答：** 因为球是对称图形，所以可先算出上半球体$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的表面积，该上半球体在xy面上的投影区域D为：
>
> $$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le a\}$$
>
> 偏导数分别为：
>
> $$f_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
>
> 所以：
>
> $$g(x,y) = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
>
> $g(x,y)$在区域D的边界上无定义，参照单变量函数中的瑕积分的计算方法，先构造一个区域D_1：
>
> $$D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \le b\}, \quad 0<b<a$$
>
> $g(x,y)$在区域D_1上连续有界，二重积分为：
>
> $$A_1 = \iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
>
> 区域D_1在极坐标下表示为：
>
> $$D_1 = \{(\rho,\theta)|0\le\rho\le b, 0\le\theta\le 2\pi\}$$
>
> 在极坐标下计算该二重积分：
>
> $$A_1 = \iint\limits_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$
>
> $$= a\int_0^{2\pi}\int_0^b -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}(a^2-\rho^2)}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})$$

> $b \to a$的极限就是半球体的表面积，乘以2倍就是整个球体的表面积：
>
> $$A = 2\lim_{b\to a} A_1 = 4\pi a^2$$

2.7 重积分的物理应用

2.7.1 一维物体的质心

动态平衡玩具更像是具有连续质量的金属杆。下面将这根金属杆放在$[a, b]$上，其中某个子区间$[x_{k-1}, x_k]$：



如果金属杆的密度为连续函数$\mu(x)$，那么这一小段金属杆的质量可以约等于：

$$\Delta m_k \approx \mu(x)\Delta x_k$$

将这一小段金属杆看作一个质点的话，它的力矩可以近似为：

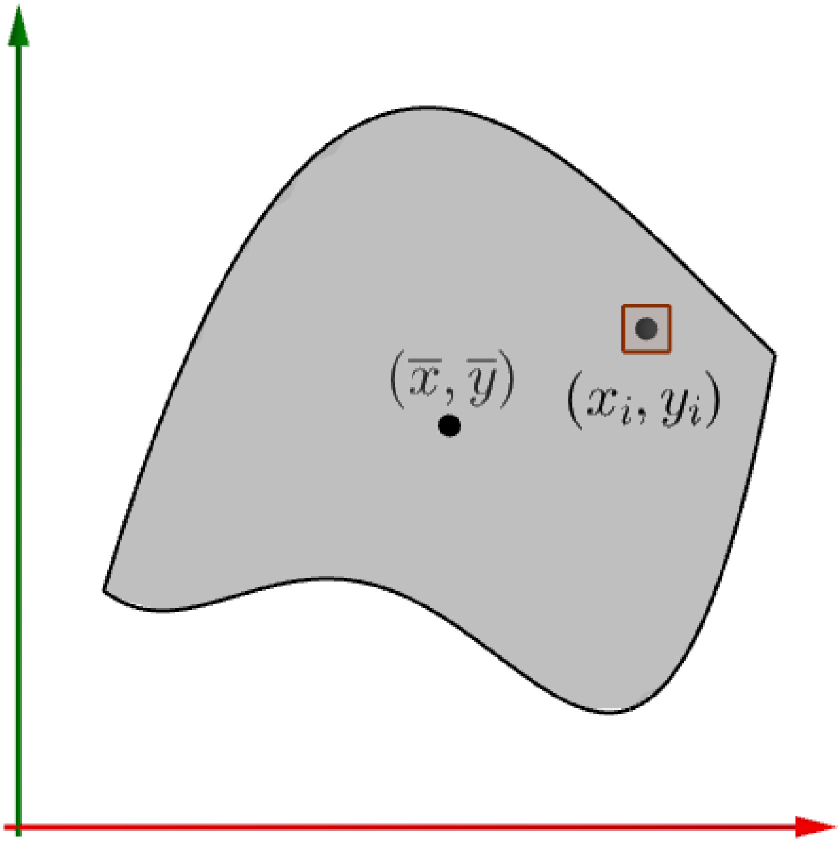
$$\Delta m_k x_k = x_k \mu(x)\Delta x_k$$

根据定积分的思想，很容易把质心概念从离散推广到连续：

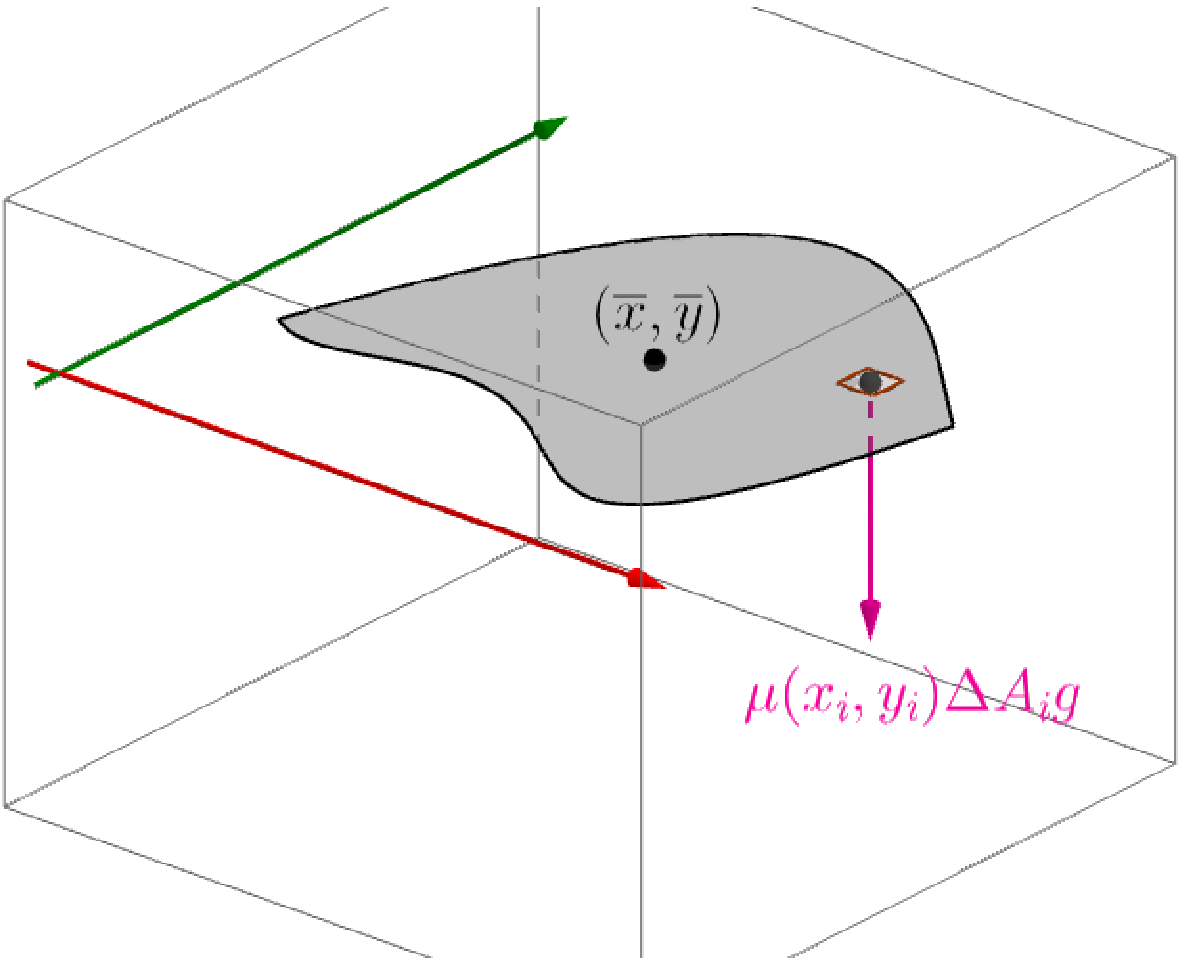
$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\mu(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x}$$

2.7.2 二维物体的质心

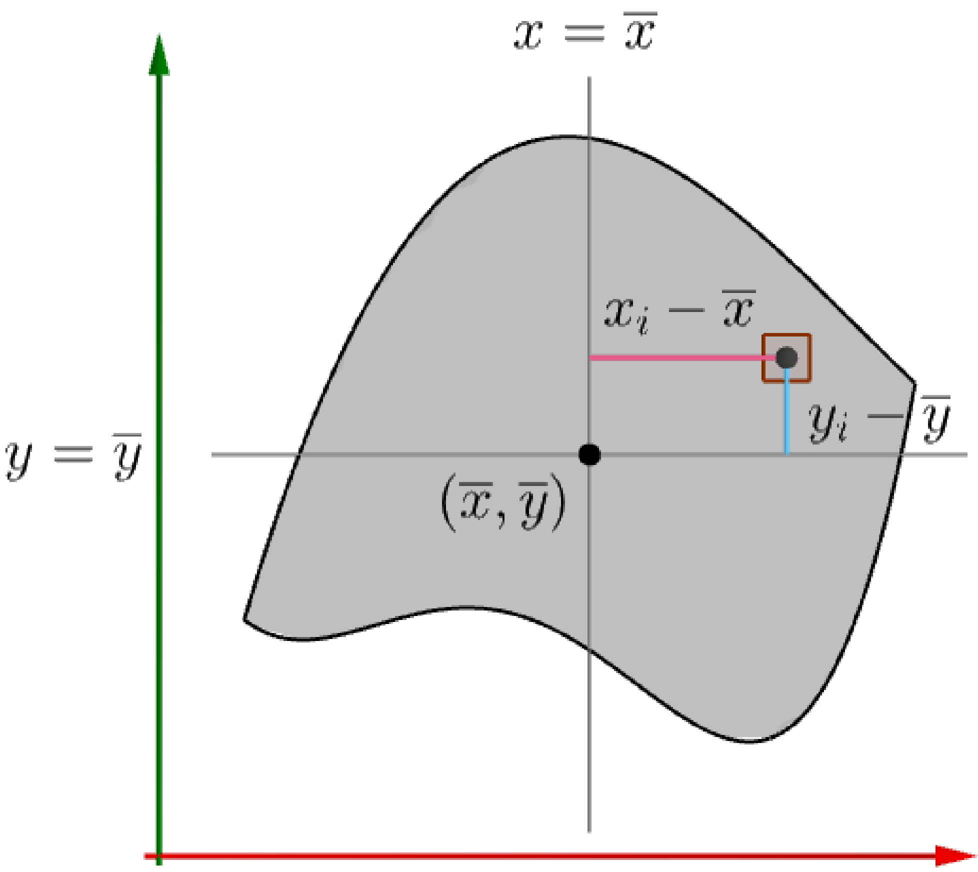
假设薄片的密度为连续函数$\mu(x, y)$，那么某点(x_i, y_i)周围小矩形ΔA_i的质量约为$\mu(x_i, y_i)\Delta A_i$：



当这个薄片平放在空中的时候，该质点会受到的重力$\mu(x_i,y_i)\Delta A_i g$：



小矩形ΔA_i，或者说该质点，与$x=\overline{x}$、$y=\overline{y}$的距离如下：



重力会在这两个方向，分别称为x方向和y方向，产生力矩：

$$(x_i - \overline{x})\mu(x_i, y_i)\Delta A_i g, \quad (y_i - \overline{y})\mu(x_i, y_i)\Delta A_i g$$

2 质心

平面D上有非常多的质点（也就是小矩形），这些质点在重力作用下都有上述的两个力矩。

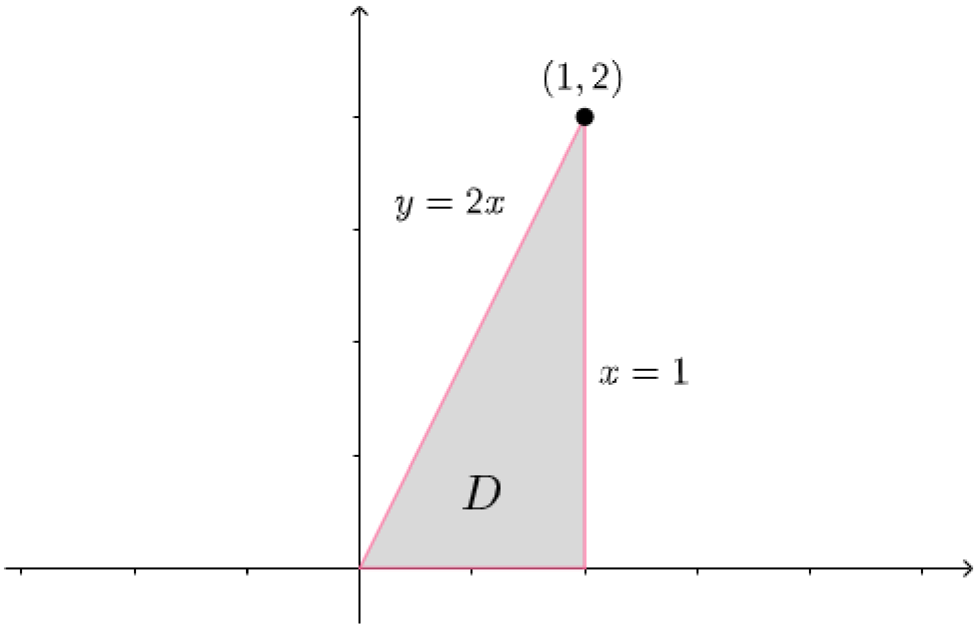
因为$(\overline{x}, \overline{y})$是质心，相同方向的力矩会平衡。根据$x$方向的力矩平衡可以推出：

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}A}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}A}$$

同样的道理，根据y方向的力矩平衡可以推出：

$$\overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}A}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}A}$$

> 例题：
>
> **问：**一薄板由x轴、直线$x=1$和$y=2x$围成，该薄板的密度函数为$\mu(x,y)=6x+6y+6$，试求它的质心坐标。
>
> **答：**先画出薄板的草图：



根据质心的公式，需要分别求出该薄板的质量、x方向的力矩和、y方向的力矩和。先将代表薄板的区域D表示出来：

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2x\}$$

所以质量为：

$$M=\int_0^1\int_0^{2x}\mu(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{2x}(6x+6y+6)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(6xy+3y^2+6y)\Big|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x=\int_0^1(24x^2+12x)\mathrm{d}x$$

$$=(8x^3+6x^2)\Big|_{x=0}^{x=1}=14$$

x方向的力矩和为：

$$M_x=\int_0^1\int_0^{2x}x\mu(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{2x}(6x^2+6xy+6x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(6x^2y+3xy^2+6xy)\Big|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x=\int_0^1(24x^3+12x^2)\mathrm{d}x$$

$$=(6x^4+4x^3)\Big|_{x=0}^{x=1}=10$$

同样可以算出：

$$M_y=\int_0^1\int_0^{2x}y\mu(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=11$$

所以质心坐标为：

$$\overline{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{7},\quad \overline{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{11}{14}$$