Jacobi式

$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数. 又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$. 且偏导数所组成的函数行列式 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零　$u=u(x,y)$　$v=v(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & F_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

定理　$f(x,y)$ 在 xOy 平面上闭区域 D 上连续. 若变换将 uOv 平面上闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D. 且满足

(1) $x(u,v)$，$y(u,v)$ 在 D' 上有一阶连续偏导数

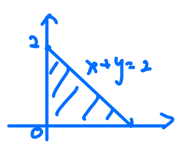
(2) D' 上 Jacobi 式　$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

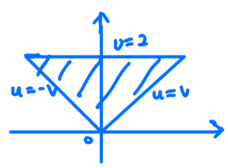
(3) 变换 T: $D\to D'$ 是一对一的

则有 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$　二重积分换元公式

eg: $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$，其中D是由x，y轴和 $x+y=2$ 的闭曲域

令 $u=y-x$，$v=y+x$.　$\therefore x=\frac{v-u}{2}$，$y=\frac{v+u}{2}$





$J=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy=\iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|-\tfrac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left[e^{\frac{u}{v}}\cdot v\right]_{-v}^{v}dv=\int_0^2 v(e-e^{-1})\,dv\cdot\frac{1}{2}$$

$$=e-e^{-1}$$