微分方程

① 概念及其使用

1. 微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

2. 阶数 — 方程中 y 的最高阶导数的次数

$$\begin{cases} n=1 & 一阶 \\ n\geq 2 & 高阶 \end{cases}$$

3. 通解 —— 解中所含独立常数个数等于方程阶数

eg: y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解. 若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是上述方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是上述方程对应齐次方程的解. 求 λ,μ.

$$y'+py=q \xrightarrow{齐次} y'+py=0$$

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(\lambda y_1+\mu y_2)=q$$

$$\lambda\,\underline{(y_1'+py_1)}+\mu\,\underline{(y_2'+py_2)}=q$$

$$\Rightarrow \lambda+\mu=1$$

$$(\lambda y_1-\mu y_2)'+p(\lambda y_1-\mu y_2)=0$$

$$\lambda(y_1'+py_1)-\mu(y_2'+py_2)=0$$

$$\lambda-\mu=0.$$

$$\therefore \lambda=\mu=\frac{1}{2}$$

② 基本方程求解

1. 变量可分离型

形如 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)h(y)$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)\,dx$$

$y\sin\frac{x}{2}\,dx-\cos\frac{x}{2}\,dy=0$ 的通解

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$\ln|y|=-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln C_1$$

$$\Rightarrow |y|=\frac{C_1}{(\cos\frac{x}{2})^2}$$

$$y=\pm\frac{C_1}{1+\cos x}=\frac{C}{1+\cos x}$$ C 为任意非零常数

[注] $y\neq 0$ 但 $y=0$ 是解（奇解）

2. 齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

令 $\frac{y}{x}=u$ $\Rightarrow y=ux \xrightarrow[\text{求导}]{\text{对}x} \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$

$\therefore \frac{du}{dx}\cdot x+u=f(u)$

$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$

eg: $x\,dy=y(\ln y-\ln x)\,dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=f(\frac{y}{x})$ 令 $\frac{y}{x}=u$

$y=ux \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u=u\ln u$

$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$

$\ln|\ln u-1|=\ln x+\ln C_1$

$\ln(u-1)=\pm C_1x=Cx$

$\ln\frac{y}{x}-1=Cx$ $\forall C\neq 0.$

3. 一阶线性型

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 其中 $p(x),q(x)$ 已知函数

$(uv)'=u'v+uv'$

$y'+py=q$

$e^{\int p\,dx}y'+e^{\int p\,dx}\cdot py=q\cdot e^{\int p\,dx}$

$(ye^{\int p\,dx})'=e^{\int p\,dx}\cdot q$

$ye^{\int p\,dx}=\int e^{\int p\,dx}q\,dx+C$

$y=e^{-\int p\,dx}[\int e^{\int p\,dx}q\,dx+C]$

求 $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$ 通解

$y'+(-\frac{1}{2x})y=\frac{x^2}{2}y^{-1}$

$y\cdot y'+(-\frac{1}{2x})y^2=\frac{x^2}{2}$ 令 $y^2=z \xrightarrow{/dx} 2y\cdot y'=z'$

$\Rightarrow \frac{1}{2}z'+(-\frac{1}{2x})z=\frac{x^2}{2}$

$$z' + \left(-\frac{1}{x}\right) z = x^2$$

$$z = e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} \cdot x^2\,dx + C\right]$$

$$= x\left[\int \frac{1}{x} x^2\,dx + C\right]$$

$$y^2 = \frac{1}{2}x^3 + Cx$$ C为任意常数