高数基本定理

1. 涉及 $f(x)$ 的定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

[1] 有界性 $|f(x)| \le k$

[2] 最值性 $m \le f(x) \le M$

[3] 介值定理 当 $m \le \mu \le M$ 时 $\exists\ \xi \in [a,b]$ 使 $f(\xi)=\mu$

[4] 零点定理 当 $f(a)\cdot f(b) < 0$ 时 $\exists\ \xi \in (a,b)$. s.t. $f(\xi)=0$

2. 涉及 $f'(x)$ 的定理

[5] 费马定理 $f(x)$ 在 x_0 处 $\begin{cases} 1)\ 可导 \\ 2)\ 取极值 \end{cases}$，则 $f'(x_0)=0$

[6] 罗尔定理 设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} 1)\ [a,b]上连续 \\ 2)\ (a,b)内可导 \\ 3)\ f(a)=f(b) \end{cases}$ 则 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

[7] 拉格朗日中值定理 $f(x)$ 满足 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 可导，则 $\exists\ \xi \in (a,b)$. st: $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

[8] 柯西中值定理 设 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $\begin{cases} 1)\ [a,b]上连续 \\ 2)\ (a,b)内可导 \\ 3)\ 且\ g'(x)\ne 0 \end{cases}$，则 $\exists\ \xi \in (a,b)$, st: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

[9] 泰勒公式

① 带拉格朗日余项的 n 阶公式

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数，则对邻域内的任意点 x，均有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{拉氏余项}$$

② 带佩亚诺余项的 n 阶公式

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underbrace{o(x-x_0)^n}_{佩氏余项}$$

* 当 $x_0=0$ 时 泰勒 $\Rightarrow$ 麦克劳林

① $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$

② $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

→ 证闭区间，先考虑介值定理

[10] 积分中值定理

eg: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\, \xi \in [a,b]$ st: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

$m \le f(x) \le M \longrightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$ （积分保号性）

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{\int_a^b m\,dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b M\,dx}{b-a} = M$$

得证.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶导数连续，且 $f(0)=0$. 证: $\exists\, \xi \in [0,1]$, s.t. $f'(\xi) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

f' 在 $[0,1]$ 连续，$m \le f' \le M$

$f(x) = f'(\xi)\cdot x$

有 $f'(\xi) \in [m, M]$

于是 $mx \le f(x) = f'(\xi)x \le Mx$

$2\int_0^1 mx\,dx \le 2\int_0^1 f(x)\,dx \le 2\int_0^1 Mx\,dx$

$m \le \mu \le M$. 得证

$\int_a^b f(x)\,dx \xleftarrow{\text{代入}} f(x) \xrightarrow{\text{拉氏}} f'(x)$

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$f(b) \downarrow f(x)$, $f(a) \downarrow f(0)$, $(b-a) \downarrow x$