INFERENCIA ESTADISTICA

CLASE: PRUEBA DE HIPÓTESIS

Introducción

Junto con los intervalos de confianza los contrastes o test de hipótesis son la herramienta más importante de la inferencia estadística, ya que permite extraer información de la población. Los test de hipótesis son capaces de responder a preguntas concretas que nos podemos formular sobre los parámetros poblacionales de interés.

Objetivo

El experto observa la naturaleza de un fenómeno, formula una teoría y a continuación, confronta esta teoría con la evidencia observada. Si lo observado no está de acuerdo con la teoría, se rechaza la hipótesis. En caso contrario, se pueden obtener dos conclusiones: la teoría es verdadera o bien en la muestra no se detectó diferencia significativa entre los valores reales y los postulados en la hipótesis planteada.

Las hipótesis

Definición 1: Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de los parámetros de la distribución de probabilidades de una o más variables aleatorias. Las hipótesis expresan el objetivo del investigador.

En cualquier contraste o test de hipótesis tendremos 2 opciones en las que se especificarán distintos valores de un parámetro poblacional y a la vista de los datos habremos de optar por una de ellas. Las hipótesis estadísticas a plantear son:

Hipótesis nula H_0, Corresponde a la hipótesis que va a ser probada.
Hipótesis alternativa H_1, Corresponde a posibles alternativas ante la hipótesis nula.

Al terminar el contraste habremos de optar por aceptar H_0 (si no tenemos evidencia suficiente en su contra) o rechazarla (si los datos hacen que la descartemos).

Ejemplo 1

Plantea la hipótesis nula y alternativa para los siguientes contrastes de hipótesis:

1. En un estudio se desea demostrar que el hecho de ser diabético altera también la presión arterial de estos pacientes.

Desarrollo

Se quiere comparar dos valores:

- μ_d, el valor medio de presión arterial en diabéticos,
- μ_n, frente a dicho valor en la población no afectado por esta enfermedad

En concreto deseamos conocer si ambos valores coinciden o no. $H_0: \mu_d = \mu_n$

La hipótesis alternativa vendrá determinada por aquello que estamos interesados en demostrar, en este caso que las dos cantidades anteriores son distintas. $H_0: \mu_d \neq \mu_n$

2. En un estudio se desea demostrar que un nuevo fármaco antipirético es realmente efectivo, es decir, realmente baja la temperatura de enfermos que presentan fiebre

Desarrollo
Se quiere comparar dos valores:
- μ_a, la temperatura corporal antes de consumir el fármaco
- μ_t, frente a la misma temperatura algún tiempo tras su consumo

La hipótesis nula viene dada por la igualdad de ambas cantidades (aquello que desearíamos descartar), entonces: $H_0: \mu_a = \mu_t$
Aquí queremos demostrar que la temperatura tras la ingesta del fármaco ha disminuido no queremos demostrar que existe una desigualdad en cualquiera de los dos sentidos posibles (menor o mayor), sino que queremos demostrar, específicamente:

$$H_1: \mu_a > \mu_t$$

Esta sería nuestra hipótesis alternativa.

Elementos de una Prueba de Hipótesis

Consideradas desde el punto de vista tradicional, todas las pruebas de hipótesis trabajan en base a ciertos principios que se pueden resumir en los siguientes elementos, todos ellos indispensables en la construcción del test.

1. Una hipótesis nula H_0
2. Una hipótesis alternativa H_1
3. Un estadístico de prueba
4. Una zona de rechazo
5. Regla de decisión

Definición 2: El **Estadístico de Prueba**, es una función de la muestra, interesa que contenga el máximo de información sobre la hipótesis nula planteada. Respecto a esta información se tomará la decisión respecto de la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

Definición 3: La **Zona de Rechazo** o **Región Crítica**, define los valores del estadístico de prueba para los cuales se contradice la hipótesis nula.

Definición 4: Regla de decisión, procedimiento que acepta o rechaza H_0, dependiendo del valor del estadístico de prueba. Si para una muestra particular el estadístico de prueba cae dentro de la región critica o zona de rechazo, rechazaremos la hipótesis nula (H_0) en favor de la hipótesis alternativa (H_1). Si el valor calculado no cae dentro de la zona de rechazo no podremos rechazar la hipótesis nula.

Definición 5: llamaremos **Nivel de significación**, que denotaremos por α, a la probabilidad que el valor observado del estadístico de prueba este en la región critica.

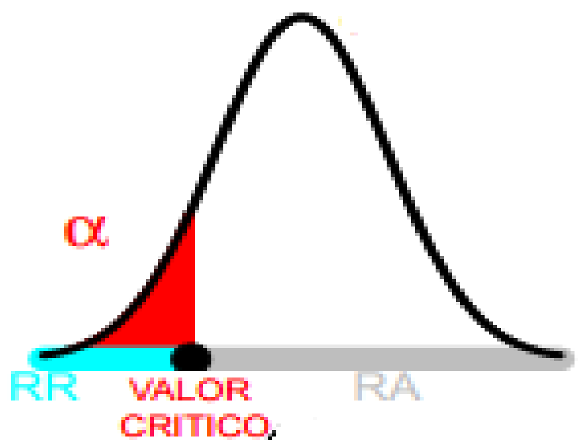
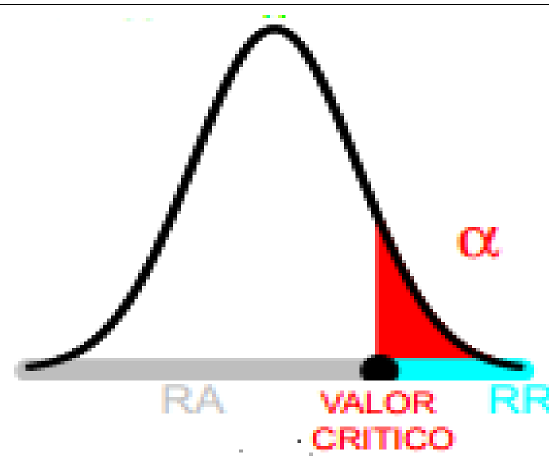
Tipos de Contrastes

Podemos definir dos tipos de contraste: los contrastes unilaterales y los contrastes bilaterales, según estos contrastes se tiene una región critica.

Contrastes unilaterales, son aquellos contrastes en los que la hipótesis nula H_0 sea de la forma $\leq$ o $\geq$. Se tienen dos casos:

$H_0: \theta \geq \theta_0$	$H_0: \theta \leq \theta_0$
$H_1: \theta < \theta_0$	$H_1: \theta > \theta_0$

En base al contraste, se define la región crítica y la regla de decisión.

• Para $H_1: \theta < \theta_0$ Sea T_{calc} el estadístico de prueba. La región critica (rechazo) se define: $RC = \{T: T_{calc} < -T_{tabla}\}$ Se rechaza H_0 si T_{calc} pertenece a la zona de rechazo (RR) $T_{tabla} = valor\ critico$ En caso contrario no hay evidencia para rechazar H_0, $T_{calc} > -T_{tabla}$	
• Para $H_1: \theta > \theta_0$ Sea T_{calc} el estadístico de prueba. La región critica (rechazo) se define: $RC = \{T: T_{calc} > T_{tabla}\}$ Se rechaza H_0 si T_{calc} pertenece a la zona de rechazo (RR) $T_{tabla} = valor\ critico$ En caso contrario no hay evidencia para rechazar H_0, $T_{calc} < -T_{tabla}$	

Ejemplo 2

Un estudio reciente del ecosistema en un bosque de hoja caduca índica que, en el bosque natural, el promedio neto de transformaciones del nitrógeno en nitrato presenta un incremento de 2 kg por hectárea y año. Los ingenieros de montes creen que una desfoliación de la maleza del bosque conduciría a un descenso de este valor. El contraste de hipótesis que interesa es:

$$H_0: \mu \geq 2$$
$$H_1: \mu < 2$$

Contrastes bilaterales, son aquellos contrastes en los que la hipótesis alternativa H_1 se defina mediante el signo $(\neq)$, ya que nos valen ambos sentidos de la desigualdad. Se tiene:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

En base al contraste, se define la región crítica y la regla de decisión.

- Para $H_1: \theta \neq \theta_0$

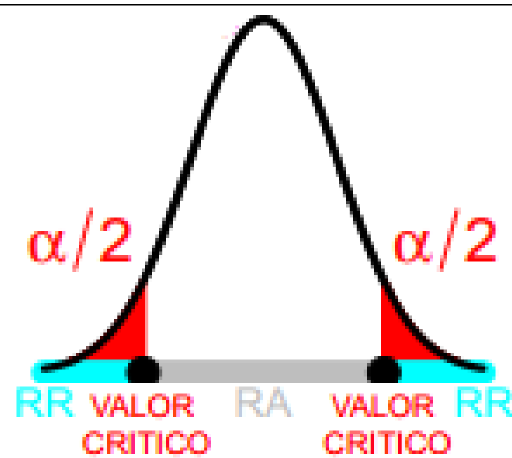
Sea T_{calc} el estadístico de prueba.
La región critica (rechazo) se define:

$$RC = \{T: T_{tabla} < T_{calc} < -T_{tabla}\}$$

Se rechaza H_0 si T_{calc} pertenece a la zona de rechazo (RR)

$$T_{tabla} = valor\ critico$$

En caso contrario no hay evidencia para rechazar H_0, $T_{calc} > -T_{tabla}$



Ejemplo 3

El promedio total de proteínas en sangre en un adulto sano es de 7.25 g/dL. En un análisis de sangre, el técnico está contrastando

$$H_0: \mu = 7{,}25$$
$$H_1: \mu \neq 7{,}25$$

Decisiones y Tipos de errores

Al concluir el contraste de la hipótesis se tomará una de dos decisiones posibles: estar de acuerdo con la hipótesis nula y se concluirá que "no se puede rechazar H_0", o bien, se decidirá en contra de la hipótesis nula y se concluye que "se rechaza H_0". Esto está relacionado con la veracidad de la hipótesis nula y lo correcto de la decisión que se tome, es decir se puede llegar a que la hipótesis nula sea verdadera o falsa, y que la decisión sea no rechazar o bien rechazar por lo que se tiene cuatro posibilidades.

	HIPÓTESIS NULA	
DECISION	VERDADERA	FALSA
NO SE RECHAZA H_0	Decisión correcta	Error Tipo II
SE RECHAZA H_0	Error Tipo I	Decisión correcta

Ocurre:

- **Error Tipo I,** cuando es cierta la hipótesis nula, pero se decide en su contra
- **Error Tipo II,** cuando se decide a favor de una hipótesis nula que en realidad es falsa.

La probabilidad asignada al error tipo I se conoce como ***nivel de significación*** y se denota por α, y la probabilidad de cometer el error tipo II se denota por la letra β. Se definen:

- **Error Tipo I:** $\alpha = P(error\ tipo\ I) \ = \ P(rechazar\ Ho\ /\ Ho\ es\ verdadera)$
- **Error Tipo II:** $\beta = P(error\ tipo\ II) \ = \ P(no\ rechazar\ Ho\ /\ Ho\ es\ falsa)$

Contrastes para una media

En los contrastes de hipótesis para una media tenemos la misma casuística que en el caso de los intervalos de confianza estudiados anteriormente. Tenemos

- Si conocemos la desviación típica de la población σ, donde la población distribuye normal, $x \sim N(\mu\ , \sigma^2)$, y la media $\bar{x} \sim N\left(\mu\ , \frac{\sigma^2}{n}\right)$. El estadístico de prueba que se define a continuación

$$Z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0\ , 1)$$

Nos permite llevar a cabo el contraste.

- Si por el contrario, la desviación típica de la población σ es desconocida, donde la población distribuye normal, $x \sim N(\mu\,,\sigma^2)$. El estadístico de prueba que se define a continuación

$$T_{calc} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1,1-\alpha)}$$

Nos permite llevar a cabo el contraste.

Ejemplo 4

Un equipo de cardiólogos tiene el interés en estudiar la presión arterial en personas con diagnóstico de Alzheimer que toman un fármaco en fase de pruebas. Estos enfermos suelen tener una presión arterial media de $160\ mm/Hg$ en condiciones normales, es decir, sin el uso del nuevo fármaco. Con el objetivo de valorar si el nuevo fármaco consigue disminuir la presión arterial de estos enfermos se toma la presión arterial de 15 personas con esta enfermedad que toman el nuevo fármaco y se obtiene de ellas una presión arterial media $148\ mm/Hg$ y una desviación típica de $26\ mm/Hg$. ¿Puede concluirse a partir de los datos que en enfermos con este síndrome que toman el nuevo fármaco tienen una presión arterial media menor que 160 mm/Hg? Contrastar la hipótesis considerando un nivel de significatividad de $\alpha = 0{,}05$.

Desarrollo

Datos

Se supone que la presión arterial media de las personas con diagnóstico de Alzheimer que toman un fármaco en fase de pruebas, sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con σ desconocido. Además,

$$n = 15 \qquad \bar{x} = 148mm/Hg \qquad s = 26mm/Hg \qquad \alpha = 0{,}05$$

Hipótesis

$$H_0: \mu = 160\ mm/Hg$$
$$H_1: \mu < 160\ mm/Hg$$

Estadístico de prueba

Se tiene la desviación típica muestral $s = 26$, por lo que el estadístico de prueba es:

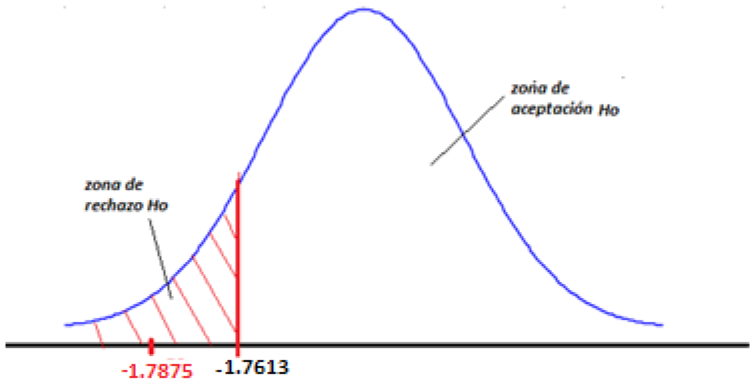
$$T_{calc} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{148-160}{\frac{26}{\sqrt{15}}} = -1{,}7875$$

Región Critica

Para $H_1: \mu < 160$

$$RC = \left\{T: T_{calc} < -t_{(n-1,1-\alpha)}\right\}$$

Donde $-t_{(15-1,1-0{,}05)} = -t_{(14\,,0{,}95)} = -1{,}7613$



Entonces $T_{calc} = -1{,}7875 < -t_{(n-1,1-\alpha)} = -1.7709$

Decisión: -1,7875 cae en la región de rechazo, luego se rechaza H_0, y se concluye que en enfermos con este síndrome que toman el nuevo fármaco tienen una presión arterial media menor que 160

Ejemplo
Según un especialista el promedio total de proteínas en sangre en un adulto sano es de $7{,}25\ g/dL$. Se realiza una serie de ocho análisis de sangre a un determinado paciente, a lo largo de varios días arrojando un nivel medio de proteínas de $7{,}29\ g/dL$. La variable considerada es el nivel total de proteínas y se sabe que sigue una distribución normal con desviación estándar $0{,}03\ g/dL$. Puesto que el nivel de proteínas en sangre no puede ser ni demasiado grande ni demasiado pequeño, ¿podemos confirmar lo expuesto por el especialista? Contraste una hipótesis para un nivel de significación del 5%.

Desarrollo
Datos:
Se supone que el nivel medio de proteínas en sangre en un adulto sano, sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con σ conocido, $0{,}03\ g/dL$. Además,

$n = 8$ $\quad$ $\bar{x} = 7{,}29\ g/dL$ $\quad$ $\sigma = 0{,}03\ g/dL$ $\quad$ $\alpha = 0{,}05$

Hipótesis: $H_0: \mu = 7{,}25$
$H_1: \mu \neq 7{,}25$

Estadístico: Se tiene $\sigma = 0{,}03$, el estadístico de prueba es:

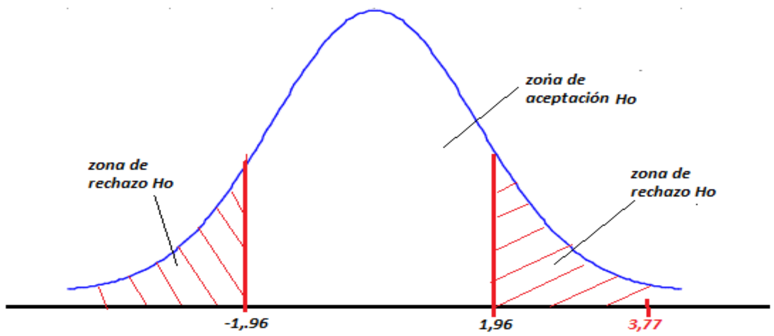
$$Z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{7{,}29 - 7{,}25}{\frac{0{,}03}{\sqrt{8}}} = 3{,}77$$

Región Critica: Para $H_1: \mu \neq 7{,}25$

$$RC = \{T: z_{1-\alpha/2} < Z_{calc} < -z_{1-\alpha/2}\}$$

Donde

$z_{1-\alpha/2} = z_{1-0,05/2} = z_{0,975} = 1{,}96$ $\qquad$ $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{0,05}{2}} = -z_{0,975} = -1{,}96$



Decisión: 3,77 cae en la región de rechazo, luego se rechaza H_0, y se concluye que el nivel de proteínas en la sangre es distinto de 7,25 mg/dL.

Contrastes para la proporción

Para realizar este contraste el estadístico mejor conocido es la proporción muestral, donde $\hat{p}$ es la proporción de la muestra que cumplen con la condición.

Supongamos una población normal, $x \sim N(\mu\,, \sigma^2)$, y la proporción $\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

El estadístico de prueba que se define a continuación

$$Z_{calc} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0\,,1)$$

Nos permite llevar a cabo el contraste, al igual que el contraste para una media.

Ejemplo

Una muestra de 196 negocios seleccionados al azar de la zona sur de Santiago, se observa que 28 de ellos han tenido pérdidas en este mes. Un analista económico de la zona establece que la proporción de negocios en la zona con pérdidas es igual o superior a 0,35. Contraste dicha hipótesis a un nivel de significancia del 5%.

Desarrollo

Datos: La proporción de la muestra es 28 de 96, entonces $\hat{p} = 0.29$

Hipótesis: $\quad H_0: p \geq 0{,}35$
$\qquad\qquad\quad H_1: p < 0{,}35$

Estadístico: Se tiene el estadístico de prueba es:

$$Z_{calc} = \frac{0,29 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,29 \cdot (1 - 0,29)}{96}}} = -1,295556 = -1,3$$

Región Critica: Para $H_1: p < 0,35$

$$RC = \{T: Z_{calc} < -Z_{(1-\alpha)}\}$$

Con $\alpha = 0,05$

$-z_{(1-0,05)} = -z_{0,95} = -1,6$

Decisión: -1,3 cae en la región de aceptación, luego no se puede rechazar H_0, se concluye que proporción de negocios en la zona con pérdidas es igual o superior a 0,35.