INFERENCIA ESTADISTICA

CLASE: DISTRIBUCION NORMAL

Introducción - Variables Aleatorias

En todas las áreas se está relacionado con mediciones numéricas cuyos valores están afectados por mecanismos aleatorios, de hecho, el método de experimentación científica culmina en la observación de los resultados de un experimento y generalmente describe o cuantifica dichos resultados con números, así, cada resultado de un experimento puede ser asociado con un número que es especificado por una regla de asociación, llamada **variable aleatoria**

Ejemplo

1. El número de componentes electrónicas que fallan antes de 100 horas en una muestra de 10 de ellas.
2. El peso del equipaje de 25 pasajeros de un avión

En ocasiones, en lugar de interesarnos por el resultado concreto de un experimento aleatorio, solo nos interesaremos por una cierta función de ese resultado, lo que nos conduce al concepto de variable aleatoria. En particular desarrollaremos la noción de variables aleatorias, concepto que estudiamos anteriormente, y vimos que podemos clasificarlas en dos categorías, en función de los valores que tome, en discretas o continuas.

Definición 1: Una variable aleatoria (VA), X, es una función definida sobre el espacio muestral Ω, que asigna un número real a cada uno de los puntos, o resultados posibles, de dicho espacio muestral.

Las variables aleatorias se representan por letras mayúsculas y sus valores numéricos observados por letras minúsculas. Hay dos tipos de variables aleatorias que podemos identificar fácilmente: variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas.

Variable Aleatoria Discreta

Una variable aleatoria X es discreta, si su recorrido forma un conjunto de números reales discretos, es decir toma un número finito de valores.

Variables Aleatorias Continuas

Diremos que una variable aleatoria X es continua, si su recorrido es un intervalo de la recta real, y la probabilidad de que tome uno determinado es 0.

Ejemplo

Si de un conjunto de 25 personas adultas, elegimos una al azar para medir su altura, entonces enumerando a las personas desde 1 hasta el 25, tenemos que el espacio muestral queda definido por $\Omega = \{x = 1, 2, 3, \dots, 25\}$, podemos definir la variable aleatoria $X = altura\ de\ la\ persona\ x$. Teóricamente, solo puede haber a lo más 25 alturas diferentes. Además, parece razonable suponer que ninguna persona adulta puede medir menos de 50 cm ni más de 250 cm, en tal caso el recorrido de la variable aleatoria X lo podemos considerar como $R_X = \{x: 50 \leq X \leq 250\}$.
Por lo que X sería una variable aleatoria cogntinua.

Recordemos que una variable aleatoria continua, es un variable que puede tomar cualquier valor en cierto intervalo, no en puntos aislados, ya que la probabilidad de que tome un valor especifico cualquiera es cero. Definiremos la noción de densidad continua y veremos como la usamos para calcular probabilidades. En este caso debemos disponer de una expresión que nos permita calcular probabilidades, ya que nos interesa conocer la probabilidad de X comprendida en un intervalo. En el caso continuo, el cálculo de las probabilidades puede hacerse geométricamente igualando probabilidades a áreas.

Definición 2: Sea X una variable aleatoria continua, le podemos asociar una función $f(x)$ definida en todos los números reales, llamada **Función de Densidad de Probabilidad** que debe satisfacer las siguientes condiciones

1. $f(x) \geq 0,$ (no negativa)
2. El área comprendida entre la gráfica de f y el $eje\ x$ es igual a 1, esto es, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$
3. Para cualquier par de números reales a y b con $a < b$, $P(a \leq x \leq b)$ viene dada por el área comprendida entre la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el $eje\ x$. Esto es $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

En otras palabras, se define la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria como aquella función que para cualquier valor de la variable nos devuelve la probabilidad de dicho valor. Para una variable continua la función de densidad será aquella función que para cualquier intervalo de valores $[a, b]$ el área que encierra la función entre a y b es exactamente la probabilidad de que la variable tome un valor en dicho intervalo.

Ejemplo
Un estudiante toma bus para ir a la universidad y sabe que cada 5 minutos pasa el bus por el paradero. El estudiante no siempre llega a la misma hora al paradero, de manera que el tiempo de espera X, para tomar el próximo bus es una variable aleatoria continua. el recorrido de X es el intervalo [0,5] y se encontró que la siguiente función de densidad de probabilidad es apropiada para X

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

claramente $f(x) \geq 0,$ y $\int_0^5 \frac{1}{5}\, dx = 1$. Por lo que indica ser una función de densidad.

Así podemos calcular probabilidades con esta función. Por ejemplo:

- La probabilidad que el estudiante tenga que esperar entre 1 y 3 minutos es

$$P(1 \leq x \leq 3) = \int_1^3 \tfrac{1}{5}\, dx = \tfrac{2}{5}$$

- La probabilidad que tenga que esperar más de 4 minutos es

$$P(x > 4) = \int_4^5 \frac{1}{5}\, dx = \frac{1}{5}$$

La función de densidad de una variable nos informa completamente de que valores y con qué frecuencia se distribuye la variable, así muchas veces nos referiremos a la *función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria* como *distribución* de la variable aleatoria.

Función de Distribución
Toda variable aleatoria tiene siempre asociada otra función, llamada función de distribución o de distribución acumulada. Esta función puede utilizarse para evaluar probabilidades asociadas con la variable aleatoria en cuestión, es decir, calcular la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual al valor especificado, es decir $P(X \leq x)$.

Definición 3: Sea X una variable aleatoria. La función de distribución de X, denotada por $F(t)$, es una función de una variable real t talque el dominio de $F(t)$ es toda la recta real, $-\infty < x < +\infty$, y

$$F(t) = P(X \leq t)$$

Si X es una variable aleatoria continua, con función de densidad $f(x)$ entonces determinamos su función de distribución como

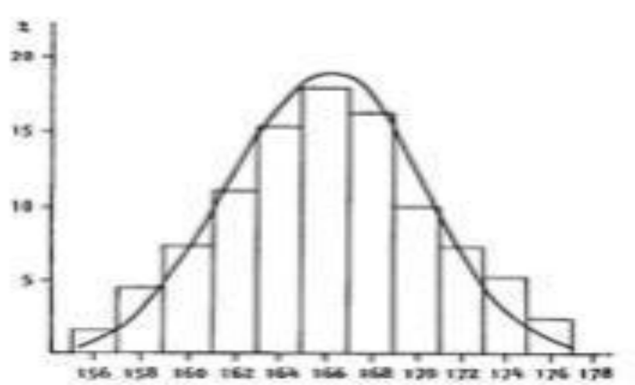
$$F(x) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

En el caso de las variables aleatorias continuas podemos hallar $P(X \leq x)$ calculando el área delimitada por la gráfica de densidad. Dado que esto implica cálculos complejos, se han creado tablas de probabilidad acumuladas para las variables aleatorias utilizadas con mayor frecuencia, como en el caso de la variable que distribuye normal.

Distribución Normal

La distribución normal es de gran importancia en el análisis y cálculo de todos los aspectos relacionados con datos experimentales en ciencias y en medicina. Muchos de los métodos estadísticos básicos que se estudian en este curso, se apoyan en esta distribución.

La distribución Normal es una familia de curvas (funciones de distribución) con las siguientes características: simétrica, con forma de campana, y es la distribución que se presenta con mayor frecuencia en variables cuantitativas.



La representación gráfica de una distribución Normal es a través de una curva, en forma de campana, toda variable que siga esta distribución habrá de presentar un histograma similar a la curva.

Definición 4: Una variable aleatoria continua X que toma todos los valores reales, $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución Normal si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < \mu < \infty, \; \sigma > 0$$

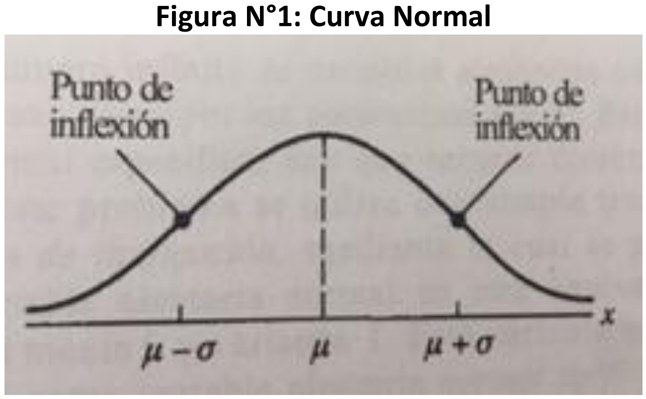
La distribución Normal está caracterizada por los parámetros $\mu \; y \; \sigma^2$, donde σ es la desviación típica de la variable aleatoria y μ es la media.

Se utiliza la notación $X \sim \mathrm{N}(\mu , \sigma^2)$, para indicar que una variable aleatoria X distribuye normal.

La ecuación de densidad descrita arriba no es sencilla de utilizar, es por ello que trabajaremos más con las tablas de probabilidad asociadas a la curva normal.

La grafica de densidad de una variable aleatoria normal es una curva simétrica en forma de campana con centro en la media μ, los puntos de inflexión o depresiones de la curva se dan para valores de X iguales a una desviaron típica a cada lado de la media ($X = \mu \pm \sigma$), cuanto mayor sea el valor de σ , mas lejos de la media estarán los puntos de inflexión y más plana la curva.

Figura N°1: Curva Normal



(Libro “Estadística para Biología y Ciencias de la Salud)

Para calcular probabilidades asociadas a una curva normal especifica hay que recurrir a una transformación algebraica, conocida como procedimiento de estandarización mediante la cual se puede transformar cualquier variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ, en otra equivalente con media 0 y varianza 1 .

Definición 5: Si Z es una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces Z se llama variable aleatoria **Normal Estándar o tipificada**, con función de densidad:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty$$

y su función de distribución, que se encuentra tabulada, es de la forma

$$F(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

La función de distribución acumulada viene dada en una tabla que proporciona $P(Z \leq z)$, para valores determinados de z. Para utilizar la tabla de la normal estandarizada, debemos utilizar el siguiente teorema.

Teorema

Si X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2, entonces

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

donde Φ es la función de distribución de la variable aleatoria $N(0,1)$.

Lo importante de este teorema es que nos permite calcular probabilidades de una variable aleatoria $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ cualquiera, a partir de una variable aleatoria normal estándar.

Tabla de Distribución Normal

En adelante, tendremos una variable Z que sigue una distribución $N(0,1)$, como queremos calcular la probabilidad que tiene la variable Z de obtener un valor inferior a cierto valor z o superior o entre cierto valores a y b. La tabla de probabilidades de la distribución normal $N(0,1)$ nos permite determinar estas probabildades,

Ejemplo

Queremos determinar la $P(X \leq 25)$, sabiendo que $X \sim N(20\ , 2{,}6^2)$

Desarrollo

Por Teorema, $P(X \leq 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{2{,}6}\right) = \Phi(1{,}92)$

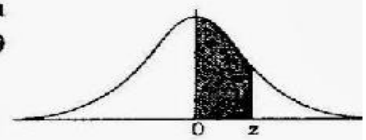
Buscamos en la tabla el valor 1,92,

- En la 1ª columna z buscamos el valor de las unidades y las décimas, en este caso, buscamos en la columna el número 1,9.

- En la fila correspondiente al valor de la columna buscamos el valor de las centésima, en este caso el 0,02.

Tabla III: Áreas de la curva de probabilidad normal

Esta tabla proporciona las áreas bajo la distribución normal entre z = 0 a z = 3,99 en pasos de 0,01.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890

Luego tenemos que $\Phi(1{,}92) = 0.4726$. Por lo que $P(X \leq 25) = 0.4726$

Propiedades

Si x es una variable con distribución continua

1. $P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$
2. $P(a < x < b) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$

Ejemplo 1

SI X distribuye normal, con media 200 y varianza 400. Determinar $P(180 \leq X \leq 210)$

Desarrollo

Se tiene que $X \sim N\ (200, 400) \rightarrow\ X \sim N\ (200, 20^2)$

Por propiedad 2, tenemos $P(180 \leq X \leq 210) = P\ (X \leq 210) - P(X \leq 180)$

Aplicando el teorema:

$P\ (X \leq 210) = \Phi\left(\frac{210-200}{20}\right) =\ \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$

$$P(X \leq 180) = \Phi\left(\frac{180-200}{20}\right) =\ \Phi(-1) = 0{,}1587$$

Por tabla, para $\Phi(0{,}5)$ y $\Phi(-1)$

z	0	0.01	0.02	0.03	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	
-3	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.

Luego

$$\begin{aligned} P(180 \leq X \leq 210) &= P\,(X \leq 210) - P(X \leq 180) \\ &= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) \\ &= 0{,}6915 - 0{,}1587 \\ &= 0{,}5328 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

En una empresa siderúrgica, las placas de acero producidas por una maquina deben tener cierto espesor. Dichas placas diferirán unas de otras debido a los materiales, al comportamiento de las máquinas y las herramientas utilizadas, lo que originara ligeras variaciones aleatorias provocadas por pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, el espesor X (mm) de las placas se puede considerar como una variable aleatoria continua. Si suponemos además que, para cierto ajuste de la máquina, X tiene distribución $N(10; 0.0004)$, nos interesa determinar el porcentaje de placas defectuosas que se esperan suponiendo que las placas defectuosa son aquellas:

a. Más delgadas que 9,97 mm
b. Más gruesas que 10,05 mm

Desarrollo

Sea X la variable aleatoria que indica el espesor, en milímetros, de las placas.

$$X \sim N(10; 0.0004) \rightarrow X \sim N(10; 0.02^2)$$

Tenemos que, $\mu = 10$ y $\sigma = 0.02$

a. $P(X < 9{,}97)$

$$P(X < 9{,}97) = \Phi\left(\frac{9{,}97 - 10}{0{,}02}\right) = \Phi(-1{,}5) = 0{,}0668$$

La probabilidad de que la placa sea más delgada que 9,97 mm es del 6,68%

b. $P(X > 10{,}05)$

$$P(X > 10{,}05) = 1 - P(X \leq 10{,}05)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{10{,}05 - 10}{0{,}02}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2{,}5)$$
$$= 1 - 0.9938$$
$$= 0{,}0062$$

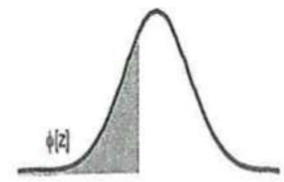
La probabilidad de que la placa sea más gruesa que 10,05 mm es del 0,62%

Ejercicio propuesto

El peso medio de 500 estudiantes varones de una universidad es de 68,5 kg y la desviación típica es de 10 kg. Suponiendo que los pesos están distribuidos normalmente. Hallar

a. El número de estudiantes que pesan entre 48 y 71 kg
b. El número de estudiante que pesan más de 91 kg

Tabla de valores de probabilidad acumulada (ϕ) para la Distribución Normal Estándar



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000