元　　智　　大　　學

資 訊 工 程 學 系

專題製作成果報告

利用 Hungarian method 及 Edmonds-Karp algorithm 實作 maximum bipartite matching

專 題 生：賴仲倫 、張宇越

學　　號：1083301、1081542

指導教授：張經略 教授

中　華　民　國　111　年　12　月

目錄

一、 前言

在圖論中，bipartite graph 是特殊的圖，又稱為二分圖、偶圖、二部圖。在 bipartite graph 中的點會被分成 V0、V1 兩個互斥集，同個集合中的點不會有邊相連。而二分圖用途是來研究兩種不同類型的物件之間的關係，例如：有 M 個求職者和 N 個職位，每個申請人都有他們感興趣的工作子集，每個職位空缺只能接受一個申請人，並且只能為一個職位任命一個職位申請人。為求職者分配工作，讓盡可能多的求職者找到工作。

Hungarian Algorithm 的核心就是尋找增廣路徑，是一種用增廣路徑求二分圖最大匹配的算法，主要是為了在一個多項式時間內解決與二分圖匹配有關的問題，在 1955 年由美國數學家 Harold W. Kuhn 所開發並發表，他將此演算法命名為匈牙利演算法，是因為演算法很大一部分是基於以前匈牙利數學家 Dénes Kőnig 和 Jenő Egerváry 的早期作品建立起來的。James Raymond Munkres 在 1957 年審查該演算法時，發現它是(強)多項式的。此後該演算法被稱為 Kuhn–Munkres 演算法或 Munkres 分配演算法。

Edmonds Karp Algorithm 主要是將 Maximum Bipartite Matching 的問題轉換成最大流的問題，而最大流就是圖中最大的匹配數。Edmonds Karp 演算法在 1970 年由 Yefim Dinitz 首次發表。

我們的專題將探討如何利用 Hungarian method 及 Edmonds-Karp algorithm 實作 maximum bipartite matching

二、文獻探討

(一) Bipartite graph：

根據文獻[1]的第四章節，Bipartite graph 的定義為圖中的每個點可以分成兩個互斥集合 V0 和 V1，使得所有邊的兩個端點，一個點屬於 V0 集合，一個點屬於 V1 集合。

(二) Bipartite matching：

根據文獻[1]的第四章節，Bipartite matching 的定義是圖 G=(V,E)是子圖 G´= (V,E´), E´ ⊆ E,這樣沒有兩條邊 e1,e2 ∈ E´共享同一個頂點。

(三) Maximum Matching：

根據文獻[2]，令 G=(V,E) 為有限無向連通圖，其頂點集合為 V、邊的集合為 E、匹配的集合為 M，且 M 是 E 的子集，使得 M 中沒有兩條邊共用一個頂點，而 Maximum Matching 就是基數最大的匹配。

(四)增廣路徑(Augmenting path)：

根據文獻[3]的第二章節，增廣路徑是說起點和終點都是目前的 matching 所沒碰到的點，且中間一條邊不在目前的 matching 裡、一條邊在目前的 matching 裡、下一條邊又不在目前的 matching 裡，如此交錯的路徑，稱為增廣路徑。例如，Figure 1 中的(v5, u2, v1, u3)即為一條增廣路徑。

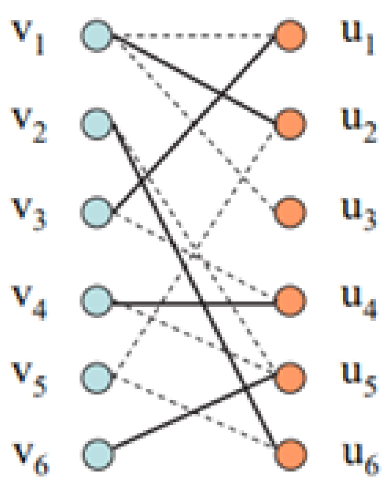


Figure 1

三、研究方法

3.1、初始架構 – 輸入設定

將一個分類好的二分圖輸入到程式中：

1. 首先輸入欲測試之演算法，輸入 1 為 Hungarian Method、輸入 2 為 Edmonds Karp(BFS)、輸入 3 為 Edmonds Karp(DFS)。
2. 接著分別輸入兩個頂點集合的個數，分別放入程式中已宣告的 m 和 n 中。
3. 最後使用 while 迴圈讓使用者輸入目前所有的配對邊，而我們透過先前宣告的 m 和 n 創造出兩個可以容納所有配對邊且不會 overflow 的 vector 來儲存此用者所輸入的配對邊。

3.2、初始架構 – 初始值設定與宣告

(1) Hungarian Algorithm:

vector<int>girls:

紀錄女生(V0 集合的頂點)和哪個男生(V1 集合的頂點)配對。

int matches:紀錄最大的配對數。

vector<bool>visited:

紀錄男生(V1 集合的頂點)是否被拜訪過。

(2) Edmonds Karp Algorithm:

vector<vector<int>>grid:

grid [i][j]=1 表示 V0 集合的 i 和 V1 集合的 j 是有路徑的。

int source: 代表源點 S 的編號。

int sink: 代表滙點 T 的編號。

vector<bool>vis:記錄頂點是否已被拜訪過。

vector<int>p: 記錄頂點的父親。

3.3、方法流程 - Hungarian Algorithm

Hungarian algorithm 的核心就是尋找增廣路徑，是一種用增廣路徑求二分圖最大匹配的算法，而我們程式的執行流程如下，以 Figure 2 為例，其初始配對數為

2，且在 Figure 2 中原有配對邊的集合為(1,6)和

(2,7)：

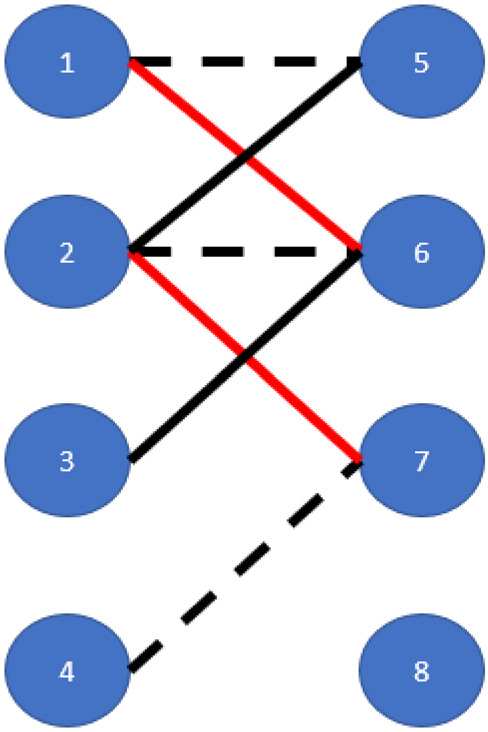


Figure 2

Step1：為了使配對數增加，我們繼續尋找有沒有其他更大的增廣路徑，而經過尋找後可以發現一條由虛線和紅線組成的增廣路徑，如 Figure 3 中由頂點 5、1、6、2、7、4 所形成的綠色 Path。

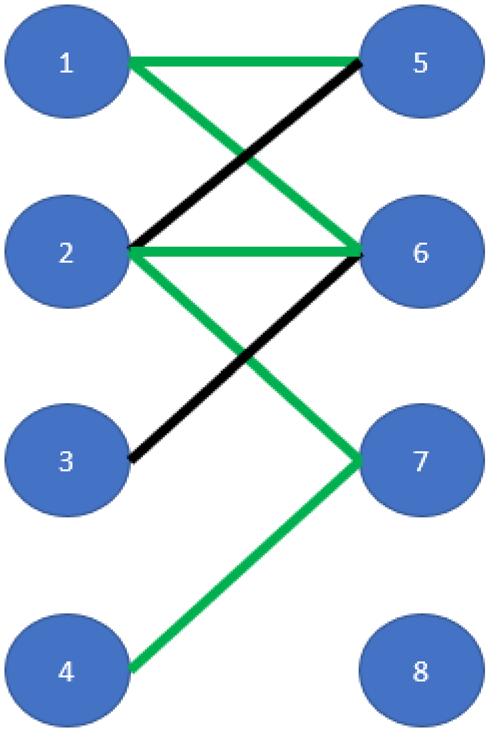


Figure 3

Step2：在增廣路徑中移除本來在配對裡面的邊，也就是將(1,6)和(2,7)從配對邊的集合中移除，並將新的一組配對(1,5)、(2,6)、(4,7)加入配對邊的集合中，如Figure 4，因此成功將原配對數 2 擴大至 3，且此時已無法找到更大的增廣路徑，所以得到最大匹配數為 3。

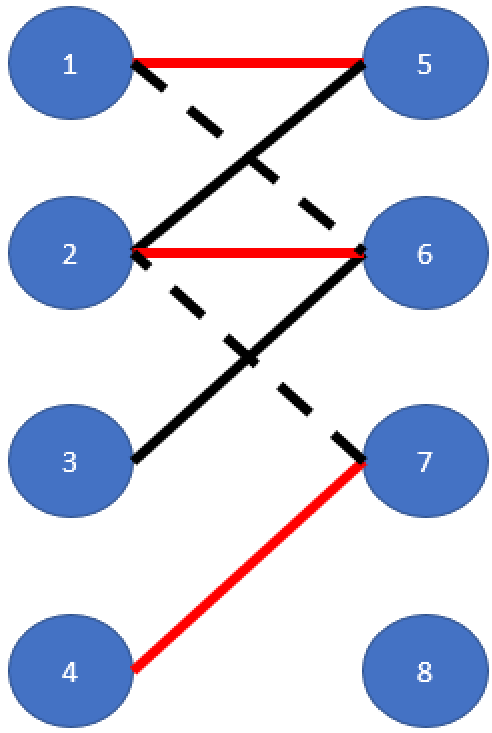


Figure 4

若還不是最大匹配數，則可以找到更大的增廣路徑，使配對數增大，因此可以依照此二步驟繼續執行，直到無法找到更大的增廣路徑為止，而此時可得到最大匹配數。

3.4、方法流程 - Edmonds Karp Algorithm

Edmonds Karp Algorithm 會將 Maximum Bipartite Matching 的問題轉換成最大流問題。程

式剛開始會建立源點 S 和滙點 T，S 會連到 V0 集合中的每個點，T 會連到 V1 集合中的每個點(Figure 5)。

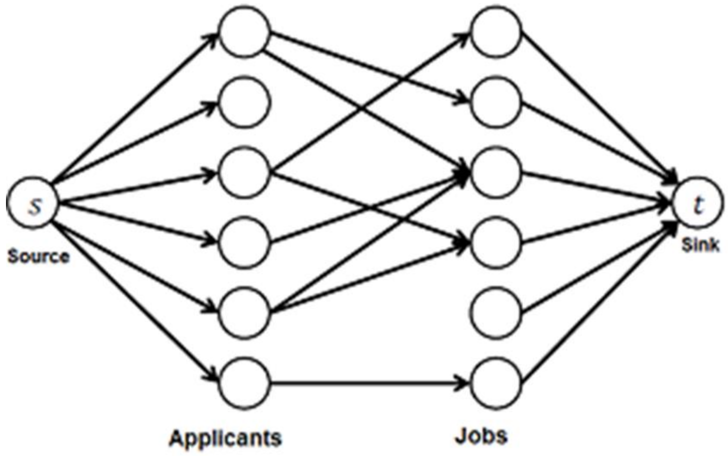


Figure 5

若將 Bipartite Graph 中的每條邊視為水管，則每條邊的最大容量會設成 1，且剛開始每條邊的流量都會是 0。Edmonds Karp Algorithm 中的增廣路徑的定義是，一條路徑，起點是 S，終點是 T。因此，在 Bipartite Graph 中，每條增廣路徑的最大容量就會是 3。程式剛開始會從源點使用 BFS(或 DFS)找到一條增廣路徑，當第一次到達滙點 T 後就停止搜索，再將增廣路徑上的每條邊的流量設成 1，並在增廣路徑上，建立反向邊，反向邊的流量都設成 0，反

向邊的容量都設成1(如 Figure 6)。然後再繼續從源點S開始找增廣路徑，若不能再找到增廣路徑則得到最大流，而最大流即此圖最大匹配數。

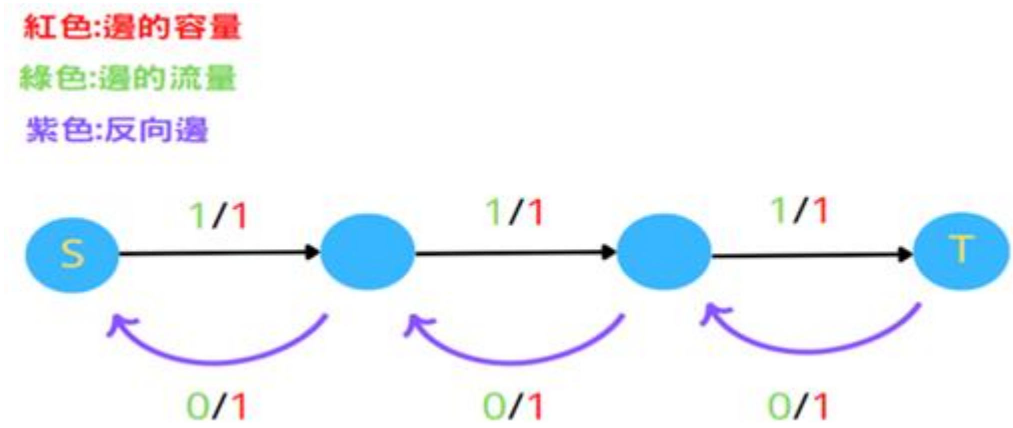


Figure 6

3.5、測資來源

我們的測資是透過程式讓電腦從20個頂點中隨機選取右邊點集合個數與左邊點集合個數，接著用兩層的for迴圈繼續讓電腦隨機選取配對邊個數與其欲配對之兩的頂點，之後將選取的結果寫入input.txt，並透過while迴圈讓上述步驟執行100次，使我們可以在這100次中取得這3個演算法的平均，而其中因為重複之邊不影響實驗結果，因此我們在此程式中沒有特別去刪除重複之邊。

四、討論與分析

(一)為何可以透過 Hungarian Algorithm 找尋並置換增廣路徑來找到二分圖的最大匹配？

證明匈牙利演算法的正確性:

Theorem:

對所有 matching M ，若 M 非最大的配對集，則存在一個 M 的增廣路徑。(相當於:若配對集 M 沒有增廣路徑，則配對集 M 是最大的)

Pf:

現在有一個比 M 更大的配對集 M’。

M’一定存在，因為 M 不是最大的配對集。

設在 **M 集合中但不在 M’中的任意一個邊為 e**。

設在 **M’集合中但不在 M 中的任意一個邊為 e’**。

現在考慮一張圖 G，此張圖的每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，否則會違反 **matching 裡面的邊不能共用端點的規則**，因此圖 G 中每個點的 Degree 會是小於等於 2。

此證明引用一個「事實」:

當每個點的 Degree 最大為 2 時，可以將圖 G 切割成 cycle 或 path。

利用上面的「事實」，因此可以將圖 G 切割成 cycle 或 path(如 Figure 7)。

cycle 的長度一定是偶數，否則會違反**matching 裡面的邊不能共用端點的規則。**因為圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，因此 cycle 中的 e 及 e’的個數相同。

由於 **M’集合**比 **M 集合**大，因此 **e’的個數**比 **e 的個數多**。因為 cycle 中的 e 及 e’的個數相同，因此圖 G 中一定會有一條 path Q 存在，且此條 path Q 中 **e’的個數**比 **e 的個數多。**

由於圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，且 path Q 中 **e’的個數**比 **e 的個數多**，因此 path Q 中的兩端點 A、B 連到的邊一定都是 e’，則此條 **path Q** 滿足增廣路徑的定義，因此 **path Q** 為一條增廣路徑。

證明 path Q 一定是一條增廣路徑:(反證法)

設 path Q 中的端點為 A、B。

若 A 點能向外再延伸出一條邊連到新的端點 C，則此條邊必存在 M 集合中，因為 path Q 中的兩端點向內連到的邊一定都是 e’，而且圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’。設此條為新的 path R(端點是 C、B)，矛盾(因為 path Q 的兩端點是 A、B，與原假設不符)。同理可證明 path Q 中的另一個端點 B。

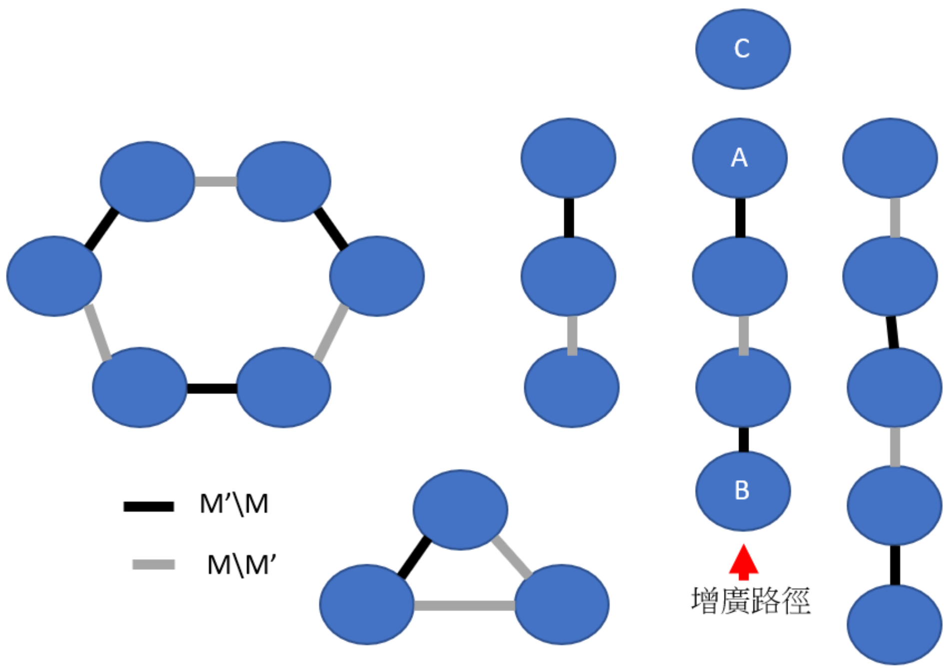


Figure 7

(二)為何測資的產生方式是用隨機的？

因為 Maximum Bipartite Matching 問題的測資，沒有什麼特別的規則，因此程式比賽的命題委員們才會覺得困擾，所以我們才用隨機的方式產生測資。

(三)Hungarian algorithm 的應用？

有 M 個考生和 N 個科目，每位考生都需要看資演、計系、數學，但是由於可以準備考試的時間不足，因此讓每位考生只準備一個科目，並讓每位考生互相教學沒看的科目，以此增進效率。下表的圖是每位考生看各科所需要的時間，以此表決定各考生該看哪科，可以讓總體所花費的時間成本最小。

科目 人名	資結演算法	計組 OS	線代離散
元智	2 hr	3 hr	3 hr
陽交	3 hr	2 hr	3 hr
清華	2 hr	3 hr	2 hr

當把匈牙利方法應用於上面的表格時，會得到最低的時間成本也就是最有效率的方法為 6hr，讓元智讀資演、讓陽交讀計系、讓清華讀數學，就可以達到這個時間成本。

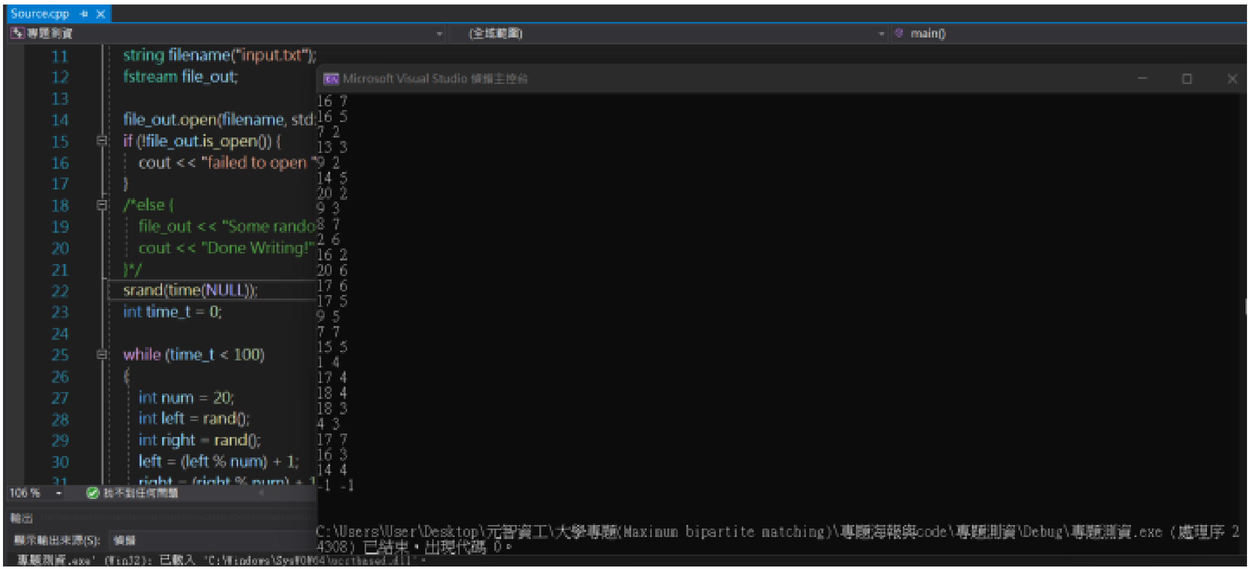
五、結論

從 Figure 8 中可以發現，這三種演算法經由程式所隨機產生的 100 筆測資後，接著讓程式在取得每個測資的時間並取平均值做比較，因此根據 Figure 8，可以發現 Hungarian algorithm 的平均時間是最短的，而 Edmonds Karp algorithm (BFS) 的平均時間是最長的，Edmonds Karp algorithm (DFS) 的平均時間是中間值。

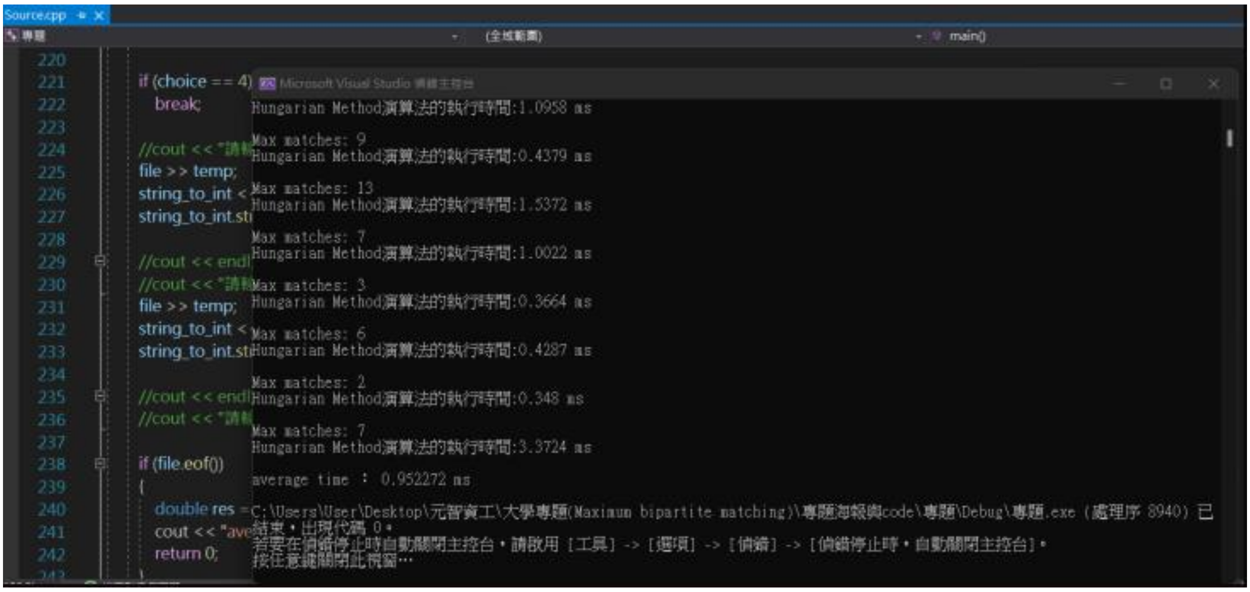
演算法	平均時間(ms)
Hungarian algorithm	0.95227 ms
Edmonds Karp algorithm (DFS)	2.60678 ms
Edmonds Karp algorithm (BFS)	3.10415 ms

Figure 8

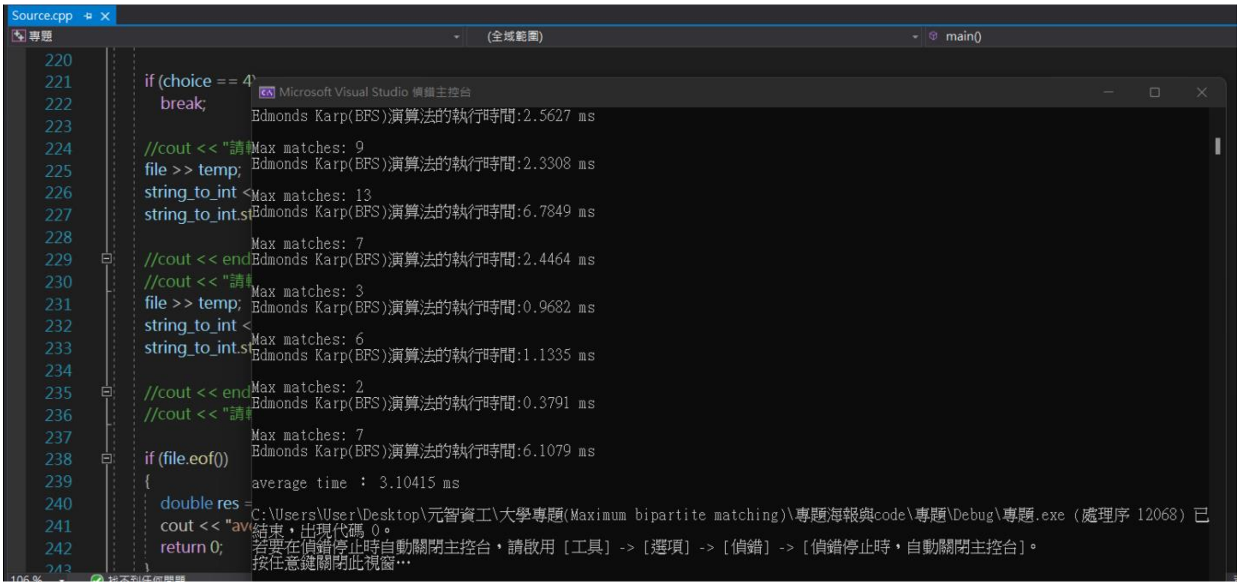
- 實際成果 – 測資產生



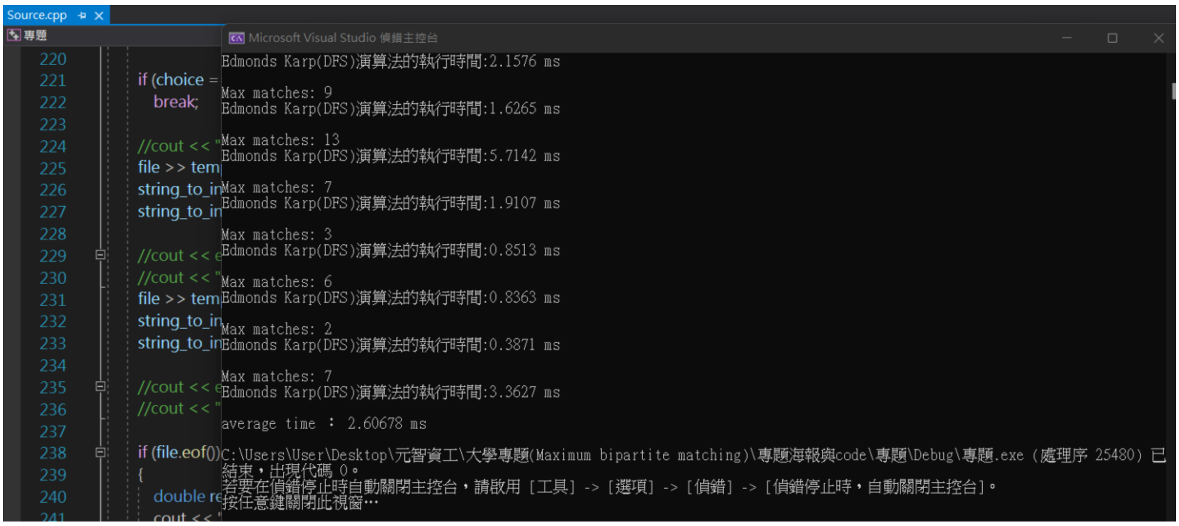
- 實際成果 – Hungarian method



- 實際成果 – Edmonds Karp(BFS)



- 實際成果 – Edmonds Karp(DFS)



六、References

[1] Bellur, Umesh, and Roshan Kulkarni. "Improved matchmaking algorithm for semantic web services based on bipartite graph matching." IEEE international conference on web services (ICWS 2007). IEEE, 2007.

[2] Giel, Oliver, and Ingo Wegener. "Evolutionary algorithms and the maximum matching problem." Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[3] Mills-Tettey, G. Ayorkor, Anthony Stentz, and M. Bernardine Dias. "The dynamic hungarian algorithm for the assignment problem with changing costs." Robotics Institute, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-07-27 (2007).