證明匈牙利演算法的正確性:

Theorem:

對所有 matching M ，若 M 非最大的配對集，則存在一個 M 的增廣路徑。(相當於:若配對集 M 沒有增廣路徑，則配對集 M 是最大的)

Pf:

現在有一個比 M 更大的配對集 M’。M’一定存在，因為 M 不是最大的配對集。

設在 **M 集合中但不在 M’中的任意一個邊為 e**
設在 **M’集合中但不在 M 中的任意一個邊為 e’**

現在考慮一張圖 G，此張圖的每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，否則會違反 **matching 裡面的邊不能共用端點的規則**，因此圖 G 中每個點的 Degree 會是小於等於 2。

此證明引用一個”事實”:

當每個點的 Degree 最大為 2 時，可以將圖 G 切割成 cycle 或 path。

利用上面的”事實”，因此可以將圖 G 切割成 cycle 或 path。

cycle 的長度一定是偶數，否則會違反 **matching 裡面的邊不能共用端點的規則。**因為圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，因此 cycle 中的 e 及 e’的個數相同。

由於 **M’集合**比 **M 集合**大，因此 **e’的個數**比 **e 的個數多**。因為 cycle 中的 e 及 e’的個數相同，因此圖 G 中一定會有一條 path Q 存在，且此條 path Q 中 **e’的個數**比 **e 的個數多。**

由於圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’，且 path Q 中 **e’的個數**比 **e 的個數多**，因此 path Q 中的兩端點 A、B 連到的邊一定都是 e’，則此條 **path Q** 滿足增廣路徑的定義，因此 **path Q** 為一條增廣路徑。

證明 **path Q** 一定是一條增廣路徑:(反證法)

設 **path Q** 中的端點為 A、B。

若 A 點能向外再延伸出一條邊連到新的端點 C，則此條邊必存在 M 集合中，因為 path Q 中的兩端點向內連到的邊一定都是 e’，而

且圖 G 中每個點最多只能碰到一個 e 及一個 e’。設此條為新的 path R(端點是 C、B)，矛盾(因為 path Q 的兩端點是 A、B，與原假設不符)。同理可證明 **path Q** 中的另一個端點 B。