

知乎

首发于
川流不息

尾部相关性、尾部风险平价和圣杯分布



石川

量化交易 话题的优秀回答者

已关注

LIKE、黑猫Q形态、淮浩等 91 人赞同了该文章

摘要

本文首先介绍了尾部相关性，并以此引出尾部风险平价的概念。从风险的角度来说，一个好的投资组合中应该同时拥有 convergent 和 divergent risk taking 的策略。

1 引言

年底适合聊聊风险。

在《艰难时刻需要坚韧信仰》这篇文章的最后，我们提到了同一大类资产中的不同策略，尽管它们平时的相关性可能很低，但是当极端事件出现时，它们的相关性会骤然上升，同时下跌造成亏损，无法起到分散风险的作用。**不同策略在极端情况下的相关性称为尾部相关性 (tail correlation)，它是进行资产组合配置时需要考虑的关键因素之一。**

本文将围绕尾部风险展开讨论。下文首先介绍尾部相关性，之后引出**尾部风险平价 (tail risk parity)** 的概念，它被认为比流行的风险平价 (risk parity) 更能抗风险。最后会介绍两个平时提





先来看看尾部相关性。

2 尾部相关性

尾部相关性衡量的是不同资产出现极端损失时的相关性。为了计算它，最简单的办法可以采用条件概率计算条件相关性。但是，**业界主流的做法是通过 VaR (Value at Risk) 或者 ES (Expected Shortfall) 来反推尾部相关性，这样得到的结果称为 VaR-implied tail correlation 或 ES-implied tail correlation。** 本文介绍后面这种方法。

Liu (2016) 使用 Campbell et al. (2002) 的模型，假设资产 i 的收益率 r_i 分布满足如下形式：

$$r_i = \mu_i + \sigma_i Z_i$$

其中 μ_i 、 σ_i 分别为均值和标准差， Z_i 为标准正态分布。由上述分布模型以及 VaR 的定义可知，资产 i 的 α 分位数的 VaR 为：

$$\text{VaR}_{i,\alpha} = \mu_i + \sigma_i \text{VaR}(Z_i)_\alpha$$

假设某投资组合 P 由两个资产按照权重 w_1 和 w_2 构成，则根据定义，投资组合 P 的收益率的标准差满足：

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$$

将 VaR 定义中右侧的 σ_i 代入上式，并利用 $\text{VaR}(Z_1) = \text{VaR}(Z_2) = \text{VaR}(Z_P)$ 化简，最终得到两个资产间的 VaR-implied correlation：

$$\rho_{\text{VaR},\alpha} = \frac{(\text{VaR}_{P,\alpha} - \mu_P)^2 - w_1^2 (\text{VaR}_{1,\alpha} - \mu_1)^2 - w_2^2 (\text{VaR}_{2,\alpha} - \mu_2)^2}{2w_1 w_2 (\text{VaR}_{1,\alpha} - \mu_1)(\text{VaR}_{2,\alpha} - \mu_2)}$$

除了上述这种计算方法，业界 (Cotter and Longin 2006) 还使用另一种更简化的方法：

$$\rho_{\text{VaR},\alpha} = \frac{(\text{VaR}_{P,\alpha})^2 - w_1^2 (\text{VaR}_{1,\alpha})^2 - w_2^2 (\text{VaR}_{2,\alpha})^2}{2w_1 w_2 \text{VaR}_{1,\alpha} \text{VaR}_{2,\alpha}}$$

这种方法直接使用资产和投资组合的 VaR 进行计算，并不对 r 的分布做正态假设。它和前一种方法的区别就是计算时是否使用 μ_i 。由于 μ_i 的取值较 VaR 通常小一个数量级，因此两种方法计算结果非常接近。



题，人们提出了 Expected Shortfall (ES, 也称作 Expected Tail Loss) 的概念，它是 α 分位数左侧尾部风险的均值，相较于 VaR 能够更好的刻画尾部风险。

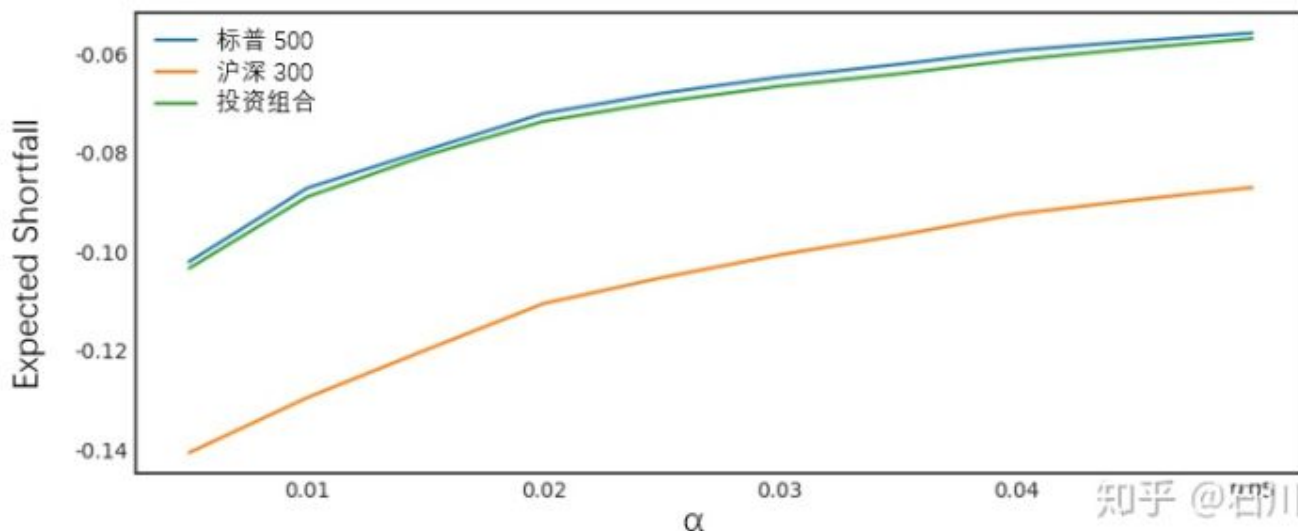
将上述 VaR-implied correlation 根据 ES 的定义做一步扩展得到 ES-implied correlation:

$$\rho_{ES,\alpha} = \frac{(ES_{P,\alpha} - \mu_P)^2 - w_1^2(ES_{1,\alpha} - \mu_1)^2 - w_2^2(ES_{2,\alpha} - \mu_2)^2}{2w_1w_2(ES_{1,\alpha} - \mu_1)(ES_{2,\alpha} - \mu_2)}$$

来看一个例子。

让我们来看看沪深 300 指数和标普 500 指数的相关性是否随尾部风险递增。假设使用周频数据，数据的跨度从 2005 年 1 月到 2018 年 11 月。上述两种资产在这段时期内周频收益率的相关系数为 0.16。假设按照 $w_1 = w_2 = 0.5$ 的权重配置它们，得到投资组合，以此计算它们之间的 ES-implied correlation。

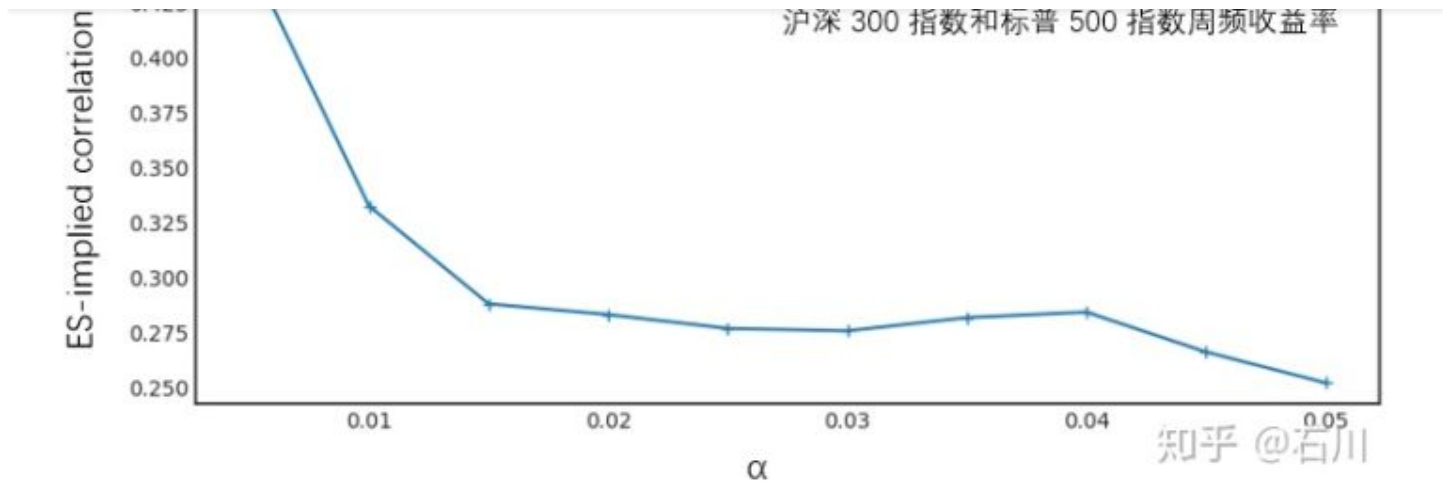
下图展示了这两种资产和投资组合在不同 α 分位数下的 ES。毫无意外地，随着 α 的减小（代表着尾部事件越来越极端），ES 的亏损幅度也逐渐增大。



下图是这两种资产的 ES-implied correlation。随着尾部事件越来越极端，二者的尾部 correlation 也逐渐增大，且远远高于整个回测期内的 0.16。当 $\alpha = 1\%$ 时，二者的相关系数高达 0.333；当 $\alpha = 0.5\%$ 时，它们的相关系数进一步增大到 0.445。当金融危机出现的时候，谁都难以独善其身。

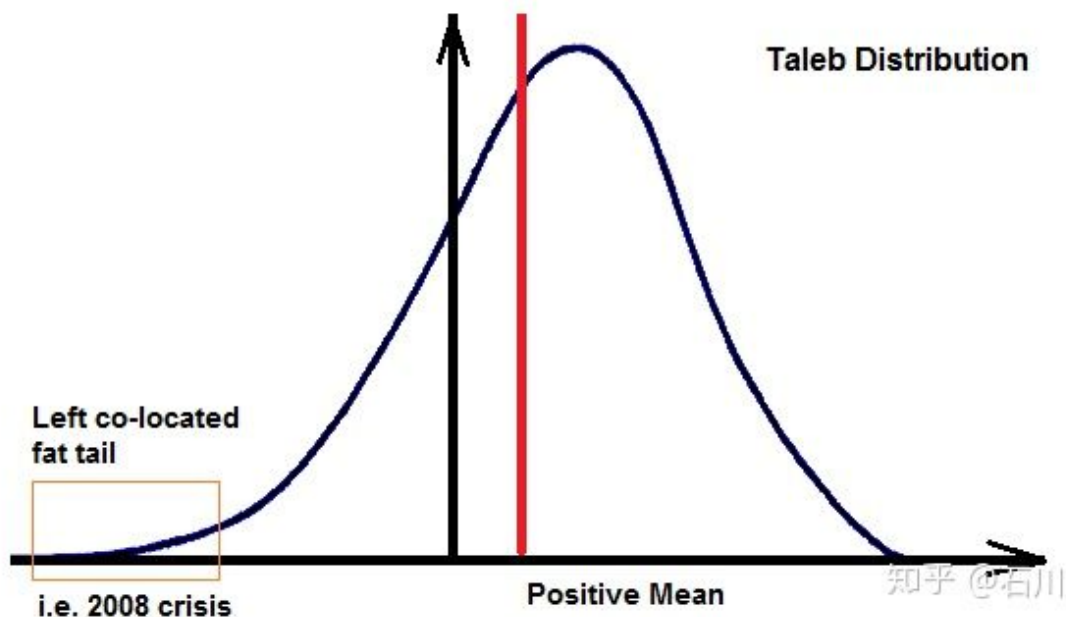


知乎

首发于
川流不息

3 尾部风险平价

对于大部分常见的资产或者投资策略，它们的收益分布都有如下的形状 —— 均值为正，但是左侧存在着极端事件造成的巨大亏损，从而造成分布的负偏。这个分布通常称为 Taleb Distribution，以 Nassim Nicholas Taleb 命名；他以黑天鹅一书闻名于世（左侧的极端事件则代表了黑天鹅）。



不同资产的尾部相关性远远高于它们平时的相关性说明这些资产的左侧肥尾往往同时出现（比如 2008 年的金融危机），因此市场出现危机时无法有效的分散风险。

由于这个原因，人们在配置不同的资产或者投资策略时提出了**尾部风险平价 (tail risk parity)** 的概念。它是风险平价的一个延伸（见《你真的搞懂了风险平价吗？》—— 我发现这篇文章是 2017 年 12 月 21 日写的，也是年底）。

知乎

首发于
川流不息

让不同资产的权重 w_i 满足（使用 ES 度量尾部风险）：

$$\frac{\partial ES_P}{\partial w_i} \times w_i = \frac{\partial ES_P}{\partial w_j} \times w_j$$

举个例子。假设有三种资产，它们的收益风险特性如下：

| | 资产一 | 资产二 | 资产三 |
|--------------|---------|---------|---------|
| 预期收益率 μ | 4.7 % | 4.0 % | 2.7 % |
| 波动率 σ | 27.3 % | 23.1 % | 14.7 % |
| 三月 10% ES | -39.7 % | -32.2 % | -12.3 % |
| 夏普率 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| μ/ES | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

按照风险平价和尾部风险平价，这三种资产在投资组合中的权重分别为：

| | 资产一 | 资产二 | 资产三 |
|------------------|--------|--------|--------|
| Risk Parity | 23.0 % | 27.0 % | 50.0 % |
| Tail Risk Parity | 17.0 % | 21.0 % | 61.0 % |

根据这两种方法配置的投资组合的风险收益特征为：

| | Risk Parity | Tail Risk Parity | 相对差异 |
|--------------|-------------|------------------|---------|
| 预期收益率 μ | 3.5 % | 3.3 % | -3.0 % |
| 波动率 σ | 13.6 % | 12.9 % | -5.0 % |
| 三月 10% ES | -16.8 % | -13.6 % | -19.0 % |
| 夏普率 | 0.3 | 0.3 | 0.0 |
| μ/ES | 0.2 | 0.3 | 19.5 % |

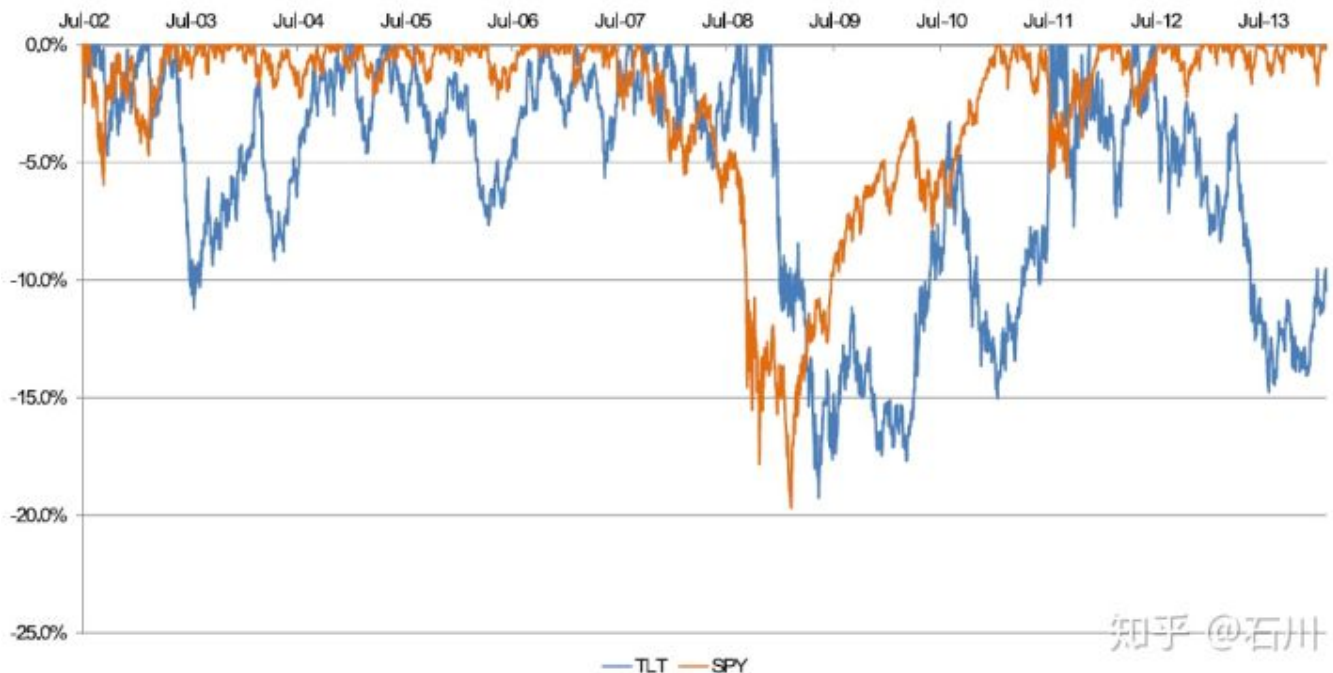
上述结果说明，**尾部风险平价以牺牲部分收益为代价换取了投资组合更低的尾部风险和波动率。**这个例子中，两种配置方法的夏普率相同，但从衡量尾部风险控制的指标 μ/ES 来看，尾部风险平价无疑更有优势。

知乎

首发于
川流不息

的指标，要求二者对投资组合的最大回撤贡献相似。最终，它以 70% 和 30% 的比例将资金分配于 TLT 和 SPY 之中。

Contribution to Portfolio Drawdowns (70% TLT + 30% SPY)



当不同资产（或策略）的尾部风险在时间上不重叠时（即发生在不同的时期），尾部风险平价则可以发挥出最大的威力。这也体现了大类资产配置的重要性。

4 Convergent vs Divergent Risk Taking

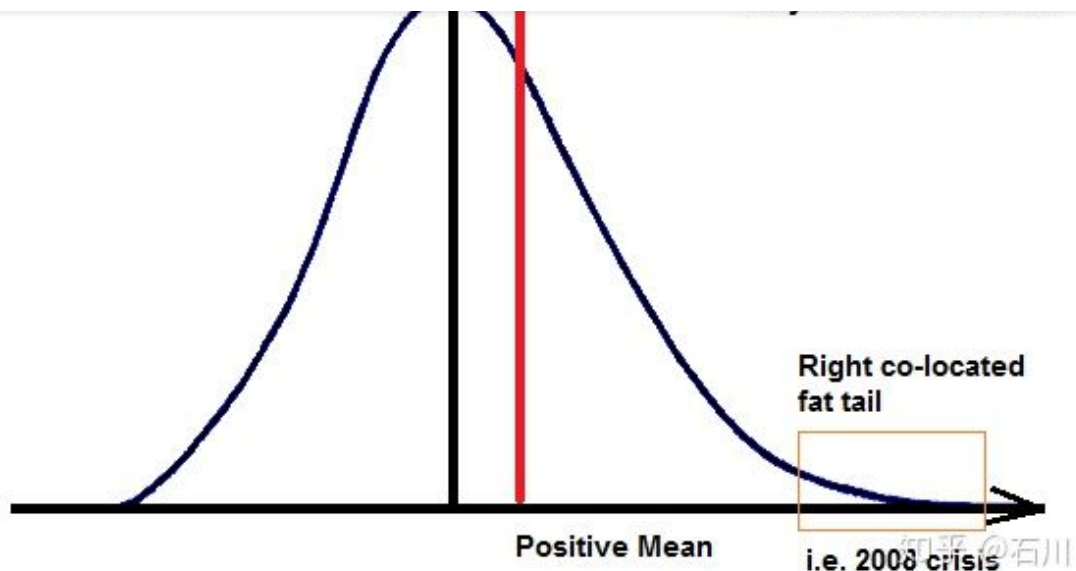
本小节来介绍两个平时人们可能听的比较少的概念 —— convergent and divergent risk taking。

在那之前，先让我们说说圣杯分布。

上一小节介绍了 Taleb 分布。如果有一种资产或者投资策略，它的收益分布满足期望为正、但肥尾在右侧 —— 即“风险有限、收益无限”，我们则称它的分布满足**圣杯分布 (Holy Grail distribution)**。



知乎

首发于
川流不息

每个人都希望找到这样的收益分布，它能够和常见的 Taleb 分布很好的对冲、分散风险。在极端事件给传统资产带来巨额亏损时，这类策略往往有很好的收益。什么样的策略具备这种分布呢？这需要从策略暴露的风险说起，从而引出我们的主角——convergent and divergent risk taking。这两个术语经常出现在管理期货中。

任何投资策略想要赚钱，都需要承担一定的风险。而策略承担什么样的风险就决定了它的收益分布具备何种的特征。风险可以被分为 convergent risks 和 divergent risks 两大类，因此策略也可以被视为 convergent risk taking 和 divergent risk taking 两大类。

- **Convergent risks** 是那些被人们理解、可通过建模并使用量化手段测量（尽管不一定准确）的风险。
- **Divergent risks** 是哪些未知的风险、无法预测的风险、不能很好的被度量的风险。

当我们构建 **convergent risk taking** 策略的时候，我们会根据金融学或者经济学对市场或者投资品的走势有一个先验信仰，并以此为判断做出投资决策。以 long only 的股票投资为例，我们相信股市是经济的晴雨表，而长期来看经济会增长、股票则会给我们带来 risk premium，因此愿意承担其短期波动（可能很大）带来的风险。这样的策略就是 convergent risk taking 策略。

另一方面，在构建 **divergent risk taking** 策略时，人们假设投资品未来的走势是未知的、不使用任何先验信仰来辅助判断投资品会涨还是会跌。如果过去投资品一直涨，但是最近开始跌了，那么这种类型的策略不会以该投资品过去的走势为先验从而认为它还会继续涨，而是会顺应当下的趋势而认为它还会继续跌。

在上面提到的两种不同风险类型的策略中，**股市中的价值投资无疑是 convergent risk taking 的代表。**这类策略通过深度行业研究挖掘上市公司的内在价值，当价格低于价值时则买入且越低（跌）越买，耐心的等待其价格向价值回归、无视短期的波动，这是这类策略愿意且主动承担风险。

知乎

首发于
川流不息

多、价格下跌时做空；当盈利时会逐渐加仓，当亏损时会及时清仓。

Divergent risk taking 策略的收益特征满足了圣杯分布的特性。这就是为什么趋势追踪策略能够长盛不衰的原因。在趋势追踪领域不乏 Winton Group 和 Aspect Capital 这样的杰出代表。

5 结语

2013 年，Asness、Moskowitz 以及 Pedersen 在 Journal of Finance 上发表了一篇影响深远的文章，题为 Value and Momentum Everywhere (Asness et al. 2013)。通过上文的描述，不难看出 Value 和 Momentum 恰恰代表了两大类 risk taking 策略，从风险的角度，它们完美的互补。

有必要指出的是，圣杯分布是非常美好的，而获得美好的东西注定是十分困难的。趋势策略本身是非常反人性的（见《海龟交易法则：逆人性投资》）。趋势策略最困难的地方在于在趋势中拿得住单子，让利润奔跑（只有这样才能实现收益率分布的右尾）。由于认知偏差中造成的对于确定性低收益的过度偏爱，人们总是倾向于早早平掉盈利的单子。市场中有句老话说的是**趋势策略最赚钱的时候一定是交易者最难受的时候**。只有克服人性的种种错误，才能真正享受到趋势策略带来的圣杯分布。

本文从尾部相关性出发介绍了如何基于 VaR 或者 ES 计算在极端事件发生时资产之间的相关性。大量的实证表明，同类甚至是跨大类的资产在市场发生危机的时候相关性都会迅速蹿升，导致投资组合的巨大亏损。为了减轻这个问题，尾部风险平价的资产配置方法越来越被投资者认可。该方法以牺牲一定的收益换来危机时更低的亏损，从而提升投资组合的风险收益特征。

本文的最后指出，**从风险的角度来说，一个好的投资组合中应该同时拥有 convergent 和 divergent risk taking 的策略。**这两个概念其实并不是什么“玄幻”的东西，它们在生活中也很常见。比如在社会交往方面，有的人更喜欢只和少数几个交心的朋友互动、非常珍视小范围的朋友圈，这属于 convergent 行为；而另一些人则更加 social，喜欢和各种各样的人打交道、交朋友、坚信人生的下一个 big opportunity 就来自某个新朋友，这就属于 divergent 行为。这两种行为并无对错、也各有优缺点；将它们结合起来往往会实现双赢。

希望本文的介绍能带给你一些启发，更加科学的分配投资组合暴露的风险。

参考文献

- Asness, C. S., T. J. Moskowitz, and L. H. Pedersen (2013). Value and Momentum Everywhere. *Journal of Finance*, Vol. 68(3), 929 – 985.
- Campbell, R., K. Koedijk, and P. Kofman (2002). Increased correlation in bear markets *Financial Analysts Journal*, Vol. 58(1), 87 – 94.



知乎

首发于
川流不息

- Liu, J. (2016). *A new tail-based correlation*. Working paper, McGill University.

免责声明：文章内容不可视为投资意见。市场有风险，入市需谨慎。

原创不易，请保护版权。如需转载，请联系获得授权，并注明出处，谢谢。已委托“维权骑士”
([维权骑士](#) 免费版权监测/版权保护/版权分发) 为进行维权行动。

编辑于 2019-07-03

风险价值 风险平价 金融危机

▲ 赞同 91 ▼ 7 条评论 分享 收藏 ...

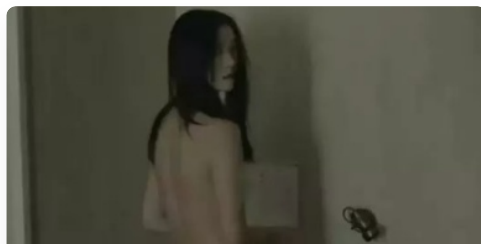
文章被以下专栏收录

**川流不息**

北京量信投资管理有限公司是一家在中国基金业协会备案登记的专业私募基金管理人...

[关注专栏](#)

推荐阅读



巴黎站街的中国女人，她们到底过着怎样的生活？

好好吃饭mua

计量经济学OLS方程详解

题主明年读研，一只快乐的金融狗，尝试用最简单的语言复习计量经济学。我们知道：OLS的形式是假设一个线性方程，里面含有误差项。从而得到其他条件不变的情况下，自变量x对y的影响但是真的...

纪菽亮



假如金融哪一个更

小白读财经

7 条评论

⇌ 切换为时间





Syous

8 个月前

期待继续补充CoVaR和CoES的内容^_^

👍 赞



万善乐

8 个月前

次瓜群众坐等CoES

👍 赞



macro 君

8 个月前

我测过尾部风险平价在国内市场基本没啥用。。。。。。尴尬

👍 3



石川 (作者) 回复 macro 君

8 个月前

赞实证[飙泪笑]

👍 赞 ↩ 回复 🗑 踩 🚩 举报



new sta 回复 macro 君

8 个月前

为啥啊

👍 赞



大柳

8 个月前

看过国内一些关于动态风险度量的论文，内容那叫一个惨不忍睹[捂嘴]

👍 赞



王二二

9 天前

请教一下，既然divergent risk taking服从圣杯分布，为何还要叠加convergent来对冲呢？

👍 赞

