浅析资产配置的几种方法

石川
量化交易 话题的优秀回答者

摘要

使用任何一个资产配置模型，绝不是简单的把不能猜的参数忽略掉、把能猜的参数扔进去，而是要明白它到底配了什么。

1 引言

> *The most important key to successful investing can be summed up in just two words —— asset allocation.*

不夸张的说，资产配置是投资中最关键的一环。无论我们有多少个收益源、多少因子，最终都要力争在最小化投资组合风险的前提下实现更高的收益。这正是资产配置（asset allocation）。

谈到资产配置，最著名的要数 Mean-Variance Optimization（MVO）模型，它的数学表达式如下：

$$\max_{\omega} \omega' \mu - \frac{1}{2}\delta\omega'\Omega\omega$$

$$\omega_{\text{mvo}} = (\delta\Omega)^{-1}\mu$$

如果考虑所有资产权重加起来占资金量 100%，即 $\Sigma\omega = 1$ ，则可以将上述最优解中的等号换成“正比于”符号，它和最终的权重只差一个 scaling factor 而已：

$$\omega_{\text{mvo}} \propto \Omega^{-1}\mu$$

对于权重为 ω 的投资组合，其夏普率为：

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\omega'\mu}{\sqrt{\omega'\Omega\omega}}$$

数学推导可以证明，最大化投资组合夏普率的 ω 也正比于 $\Omega^{-1}\mu$ ，因此 MVO 的最优解 ω_{mvo} 可以最大化投资组合的夏普率。这就是它吸引人的原因。

当然，由于对输入（ μ 和 Ω ）非常敏感，且事前预测未来的 μ 和 Ω 异常困难（ Ω 中包括资产自己的波动率 σ_i 以及资产间的相关系数 ρ_{ij} ），MVO 在投资实务中也没少被人诟病。为了避免猜 μ 和 Ω 的问题，人们又相继提出了很多其他的资产配置方法，诸如：equal weight、minimum variance、maximum diversification 以及 risk parity（又称 equal risk contribution）。

在实际资产配置中，由于 μ_i 、 σ_i 、 ρ_{ij} 中的一个或多个难以预测，我们舍弃 MVO 并退而求其次选择上述这些方法之一。无论采取哪种方法，我们都希望最大化投资组合的夏普率。**事实上，当 μ_i 、 σ_i 、 ρ_{ij} 这些参数满足特定条件时，所有上述方法均可以等价于 MVO。在资产配置时，我们可以对资产参数 μ_i 、 σ_i 、 ρ_{ij} 所满足的条件做适当的假设，从而选择最合适的配置方法。**

本文的目的就是梳理上述几种资产配置方法背后的数学模型，从而搞清楚它们分别在何种参数条件下等价于 MVO，并以此指导我们在投资实务中正确选择它们。

最后想要说明的是，由于篇幅和我的知识有限，本文无法覆盖所有主流的资产配置模型。但是本文的思路可以用来分析其他方法。

2 数学描述

本文考虑的资产配置方法包括：Minimum Variance、Maximum Diversification、Risk Parit Equal Risk Contribution 和 Equal Weight。以下逐一说明。

Minimum Variance 方法的数学表达式为：

可以证明，它的最优解满足如下关系（Clarke, de Silva, and Thorley 2013）：

$$\omega_{\mathbf{mv}} \propto \Omega^{-1}\mathbf{1}$$

将其和 ω_{mvo} 比较不难发现，**当所有资产的收益率 μ 相等时，minimum variance 方法等价于 MVO。**

接下来是 Maximum Diversification。它的数学表达式为：

$$\max_{\omega} \frac{\omega' \sigma}{\sqrt{\omega' \Omega \omega}}$$

其中 $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N]'$ 表示 N 个资产标准差（波动率）的向量。该方法最大化资产线性加权波动率与投资组合波动率的比值，故称为最大分散化资产配置组合。它的最优解满足如下关系（Clarke, de Silva, and Thorley 2013）：

$$\omega_{\mathbf{md}} \propto \Omega^{-1}\sigma$$

同样的，将其和 $\omega_{\mathbf{mvo}}$ 比较发现，**当所有资产的收益率 μ_i 和它们对应的波动率 σ_i 比值均相同（即 $\mu_i/\sigma_i = \mu_j/\sigma_j$ ）时，maximum diversification 方法等价于 MVO。**

再来看看 Risk Parity / Equal Risk Contribution。它要求每个资产对投资组合的风险等贡献，即：

$$w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = w_j \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_j}, \quad \forall i, j$$

其中 σ_p 代表投资组合的波动率。该条件可以转化为如下数学优化问题：

$$\min_{\omega} \sum_{i=1}^{N} \left[\omega_i - \frac{\sigma_p^2}{(\Omega\omega)_i N} \right]^2$$

其中 $(\Omega\omega)_i$ 表示向量 $\Omega\omega$ 的第 i 行，即一个标量。Maillard, Roncalli, and Teïletche (2010) 一文对 Equal Risk Contribution（ERC）配置方法进行了非常详尽的数学论述，得出了很多有益的结论。其中，最重要的是，**当所有 N 个资产两两相关系数相等（即所有 ρ_{ij} 都等于某常数 ρ ）时**，ERC 的最优解为：

$\sum_j \sigma_j$

除了 ERC 之外，另一个与其十分接近的配置方法是 equal risk budget（ERB）。根据定义，ERB 的最优解满足 $\omega_i = \sigma_i^{-1}/(\Sigma_j \sigma_j^{-1})$ 。换句话说，当所有资产两两相关系数均相等时，ERC 和 ERB 一样。Carvalho, Lu, and Moulin (2012) 指出，当资产夏普率相同，且相关系数均相同时，ERB 等价于 MVO。**由此可以推断出 ERC 等价于 MVO 的条件：所有资产的收益率 μ_i 和波动率 σ_i 比值均相同（即 $\mu_i/\sigma_i = \mu_j/\sigma_j$ ，意味着夏普率相同）、且所有资产两两相关系数相同。**

最后来看看 Equal Weight。这种等权方法没什么可优化的，其权重为：$\omega_{\text{ew}} = [1/N, \ldots, 1/N]'$ ，即每个资产占 $1/N$ 的比例。当所有资产的波动率相同时，ω_{ew} 可以看成 ERB 的一种简单形式。由此可以推导出，equal weight 如果想等价于 MVO 则要求资产的 μ_i 、 σ_i 、 ρ_{ij} 满足以下三方面非常苛刻的条件：

1. **所有资产的收益率 μ_i 和波动率 σ_i 比值均相同（即 $\mu_i/\sigma_i = \mu_j/\sigma_j$ ）；**
2. **所有资产两两相关系数相同；**
3. **所有资产的 σ_i 相同。**

下图对上述配置方法进行了总结。

配置方法	目标函数	最优解	等价于 MVO 的条件
Minimum Variance	$\min_\omega \omega'\Omega\omega$	$\omega_{\text{mv}} \propto \Omega^{-1}\mathbf{1}$	所有资产收益率相同
Maximum Diversification	$\max_\omega \frac{\omega'\sigma}{\sqrt{\omega'\Omega\omega}}$	$\omega_{\text{md}} \propto \Omega^{-1}\sigma$	所有资产收益率和波动率比值相同
Equal Risk Contribution (Risk Parity)	$\min_\omega \sum_{i=1}^{N}\left[\omega_i - \frac{\sigma_p^2}{(\Omega\omega)_i N}\right]^2$	$\omega_i^{\text{erc}} = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_j \sigma_j^{-1}}$	1. 所有资产收益率和波动率比值相同； 2. 资产两两相关系数相同。
Equal Weight	N/A	$\omega_{\text{ew}} = [1/N, \cdots, 1/N]'$	1. 所有资产波动率相同； 2. 所有资产收益率和波动率比值相同； 3. 资产两两相关系数相同。

下一节进行一些简单实验说明当参数满足不同条件时，这些方法的差异。

3 实验研究

从上节末的表格中不难看出，除了 minimum variance 之外，其他三种方法对参数的要求依次增强。**因此，我们可以构建一系列实验，从最苛刻的条件开始，并逐一放松约束，以此观察这三**

由于 equal weight 配置方法需要三个条件才等价于 MVO，因此下面一共考虑四个实验：

1. 第一个实验中三个条件均满足，即资产波动率相同、收益率与波动率之比相同、两两相关系数相同；
2. 第二个实验中去掉资产波动率相同；
3. 第三个实验中进一步去掉两两相关系数相同；
4. 第四个实验中去掉全部三个条件。

在这四个实验中比较 equal weight、equal risk contribution、maximum diversification 以及 MVO 四种方法。每个实验中假设有三个资产，作为实验输入给定它们的 μ_i 、 σ_i 以及 ρ_{ij} ，并考察不同资产配置方法得到的最优配置权重（所有方法均需要满足约束 $\Sigma\omega = 1$ ）以及夏普率。

实验结果如下表所示。

条件	具体参数	Equal Weight	Equal Risk Contribution	Maximum Diversification	MVO
相同 μ/σ 相同 ρ 相同 σ	σ = [0.1, 0.1, 0.1] μ/σ = [0.5, 0.5, 0.5] ρ = 0.1	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.791	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.791	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.791	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.791
相同 μ/σ 相同 ρ	**σ = [0.1, 0.2, 0.3]** μ/σ = [0.5, 0.5, 0.5] ρ = 0.1	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.745	ω = [0.545, 0.273, 0.182] Sharpe Ratio = 0.791	ω = [0.545, 0.273, 0.182] Sharpe Ratio = 0.791	ω = [0.545, 0.273, 0.182] Sharpe Ratio = 0.791
相同 μ/σ	**σ = [0.1, 0.2, 0.3]** μ/σ = [0.5, 0.5, 0.5] **ρ_12 = 0.1** **ρ_13 = 0.2** **ρ_23 = 0.5**	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.654	ω = [0.579, 0.258, 0.163] Sharpe Ratio = 0.704	ω = [0.625, 0.250, 0.125] Sharpe Ratio = 0.707	ω = [0.625, 0.250, 0.125] Sharpe Ratio = 0.707
均不同	**σ = [0.1, 0.2, 0.3]** **μ/σ = [0.6, 0.4, 0.3]** **ρ_12 = 0.2** **ρ_13 = 0.2** **ρ_23 = 0.4**	ω = [0.333, 0.333, 0.333] Sharpe Ratio = 0.504	ω = [0.566, 0.260, 0.174] Sharpe Ratio = 0.614	ω = [0.600, 0.240, 0.160] Sharpe Ratio = 0.626	ω = [0.796, 0.187, 0.044] Sharpe Ratio = 0.679

随着参数满足的条件逐渐去除，equal weight、equal risk contribution 以及 maximum diversification 依次在与 MVO 的比较下败下阵来。**上述结果说明，对参数（无论是 μ 、 σ 还是 ρ ）的准确估计对资产配置结果是至关重要的；等权（或简单多样化）只是一种无法（准确估计参数时的无奈之举。**一旦有了任何关于 μ 、 σ 、 ρ 的（靠谱）信息都应该充分利用，并合理对未知参数可能满足的条件进行假设，从而选择最合适的资产配置方法。

时，minimum variance 才等价于 MVO。

条件	具体参数	Minimum Variance	MVO
相同 μ	σ = [0.1, 0.2, 0.3] μ = [0.1, 0.1, 0.1] ρ_12 = 0.1 ρ_13 = 0.2 ρ_23 = 0.1	ω = [0.801, 0.169, 0.030] Sharpe Ratio = 1.083	ω = [0.801, 0.169, 0.030] Sharpe Ratio = 1.083
不同 μ	σ = [0.1, 0.2, 0.3] **μ = [0.05, 0.1, 0.15]** ρ_12 = 0.1 ρ_13 = 0.2 ρ_23 = 0.1	ω = [0.801, 0.169, 0.030] Sharpe Ratio = 0.665	ω = [0.529, 0.294, 0.176] Sharpe Ratio = 0.770

4 结语

写今天这篇文章源于我最近看了 Bender, Blackburn, and Sun (2019)。该文比较了不同的配置方法在构建因子投资组合时的效果（包括一些本文没有涉及的方法，见下表）。

EXHIBIT 1
Various Weighting Schemes Explored in Past Papers

Strategy	Objective	Assumptions for Mean–Variance Optimality
Minimum Variance Portfolio	Min $\sigma_p^2 = w' \Omega w$	Expected returns are equal
Maximum Decorrelation Portfolio	Min $\sigma_p^2 = w' \Omega w$	Expected returns and volatilities are equal
Maximum Diversification Portfolio	Max $D_p = \frac{w' \sigma}{\sqrt{w' \Omega w}}$	Expected returns are proportional to volatilities
Risk-Parity Portfolio/Equal Risk Contribution	$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} w_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_j} w_j$, for any i, j	Expected returns are proportional to volatilities; correlations must be constant
Maximum Deconcentration	Maximizes $1/w'w$	Expected returns and volatilities are equal; correlations are constant
Maximum Sharpe Ratio	Max $SR_p = \frac{w' r}{\sqrt{w' \Omega w}}$*	No assumptions needed; however, expected returns must be specified, either as an additional input or assumed to be proportional to risk

出处：Bender, Blackburn, and Sun (2019)

对于 MVO，Bender, Blackburn, and Sun (2019) 的态度是，**虽然输入的准确性至关重要，但我们也没有必要急于否定最优化在资产（因子）配置中的作用**，因为其他方法都是在某种假设下

资产配置有很多不同的方法。本文希望传达的态度是：无论选择哪种方法，都应该搞清楚其数学模型背后的对参数的假设是什么。搞清楚每个模型在什么情况下等价于 MVO 至关重要。使用一个模型，绝不是简单的把不能猜的参数忽略掉、把能猜的参数扔进去，而是要明白它到底配了什么。

参考文献

- Bender, J., T. Blackburn, and X. Sun (2019). Clash of the titans: factor portfolios versus alternative weighting schemes. *The Journal of Portfolio Management*, Quantitative Special Issue, Vol. 45(3), 38 – 49.
- Carvalho, R. L., X. Lu, and P. Moulin (2012). Demystifying equity risk-based strategies: a simple alpha plus beta description. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 38(3), 56 – 70.
- Clarke, R., H. de Silva, and S. Thorley (2013). Risk parity, maximum diversification, and minimum variance: an analytic perspective. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 39(3), 39 – 53.
- Maillard, S., T. Roncalli, and J. Teïletche (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 36(4), 60 – 70.

免责声明：文章内容不可视为投资意见。市场有风险，入市需谨慎。

编辑于 2019-07-03

资产配置 量化交易 风险平价

中央定调粤港澳大湾区，广深港澳谁是中国湾区第一城?

凯风 发表于国民经略

波动率交易中的Delta hedging

很多MFE或者MF的课程里，在衍生品对冲或Black Scholes推导中都会介绍一种叫Delta hedging的对冲方式。在这些课程或者书籍里，大家都知道Delta就是期权关于标的资产价格的偏导数，然后做Delt...

Yupen... 发表于Jiang...

看数据的人 少：40年

新财富plus

12 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...

拜师学艺 4 个月前

太nice了!

赞

李道简 4 个月前

有没有人话版?

3

llanglli 4 个月前

能把模型之间的关系讲得如此深入浅出，真棒！为川总点赞!

1 回复 踩 举报

docdukun 4 个月前

川总，为什么BBS（2019）的Exhibit1中前两种方法MVP和MDP优化目标是相同的？难道差别在限制条件?

赞

石川 (作者) 回复 docdukun 4 个月前

maximum decorrelation 假设波动率一样，因此优化输入的仅是相关系数矩阵，而不是协方差矩阵。BBS 那张表里用了同样的符号感觉有些 misleading. 但表里的等价 mvo 的参数条件是正确的。

赞

docdukun 回复 石川 (作者) 4 个月前

kingforestcn 4 个月前

”一旦有了任何关于 μ、σ、ρ 的（靠谱）信息都应该充分利用，并合理对未知参数可能满足的条件进行假设，从而选择最合适的资产配置方法。“

实际情况是看着后视镜开车呢，只能小心再小心。

赞

石川 (作者) 回复 kingforestcn 4 个月前

同意

1

docdukun 4 个月前

川总，您好。您知乎里的文章大部分我都看过，特别是与多因子模型和大类资产配置相关的文章，几乎没有放过任何一篇，非常感谢您的无私分享。我提一个建议：您有关多因子模型和大类资产配置方面的研究没有深入涉及到各类资产协方差矩阵的估计问题；对于股票，barra有一套结构化风险模型来推测组合风险（您简要介绍过），但是对于数量不多的大类资产（例如，股、债、黄金、货币），由于截面资产数量太少，barra的思路估计很难用；您的一篇文章中说“在没有好方法时直接用收益率时间序列来估计”，但这种方法估计出的协方差矩阵很不靠谱；在不涉及贵司机密的情况下，您能否分享一下大类资产协方差矩阵预测的研究，或者推荐一些您认为好的参考文献，谢谢。

2

林粟 4 个月前

学院派

赞

Vicktore 2 个月前

您好，感谢您的分享。

不过似乎有一个小bug：MVO的最优解并不是“正比于” (\delta \Sigma)^{-1} r 就可以了，事实上，MVO的目标函数并非w的齐次函数，不可以对w做scaling而不影响它的值。如果用Lagrangian直接计算可以发现，最优解应该是和\delta有关的一个表达式。

事实上反过来想，如果真的仅仅是正比于 \Sigma^{-1} r 的话，那和\delta就没有关系了，说明risk aversion对结果无影响，这显然是不可能的。

因此，MVO的最优解和MSR的最优解也并不相同。

赞

Dchaser 1 个月前