Topology Groove (pt. II.2)

Gregorio Baldi

April 13, 2014

1 Introduzione

Il primo commento del Munkers sui compatti è *"The notion of compactness is not nearly so natural..."* È vero.

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X contiene una sottocollezione finita che ricopre X.

Ma c'è un'idea intuitiva di fondo: *compatto fa rima con finito.*
Vediamo delle proprietà che valgono per un generico insieme **finito** X e che falliscono non appena X è infinito

1. tutte le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ sono limitate
2. tutte le funzioni da X in $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo
3. ogni successione ammette sottosuccessioni costanti (*infinite pigeonhole principle*)
4. ogni ricoprimento ammette sottoricoprimento finito.

Fino a qui abbiamo visto X come insieme privo di altre strutture. Se lo equipaggiamo con la struttura di topologia possiamo notare che alcuni suoi sottoinsiemi hanno delle proprietà simili all'essere finito (anche se sono infiniti). Nella categoria degli Spazi Topologici questi oggetti *"quasi-finiti"* li chiamiamo compatti!
Cosa centra la definizione di compatto come *"quasi-finiti"* con quella che abbiamo data all'inizio? Quello che dimostreremo è che la definizione di Compatto permette delle notevoli generalizzazioni del caso finito. Più precisamente sia X uno spazio topologico **compatto** (per avere un'idea più concreta pensate al sottoinsieme della retta reale, dotata della topologia standard, $[0, 1]$) valgono le seguenti:

1. tutte le funzioni *continue* $f : X \to \mathbb{R}$ sono limitate
2. tutte le funzioni continue da X in $\mathbb{R}$ ammettono massimo
3. da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione convergente
4. da ogni ricoprimento *aperto* di X si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Sono davvero simili! Per essere ancora più concreti e rispondere a chi si chiede *"va bene, la definizione di compattezza è questa, ma che me ne faccio?"* cosa possiamo dire? La compattezza è una proprietà topologica che generalizza la proprietà insiemistica di avere un numero finito di elementi. In topologia, spesso, ci si occupa di come si comporta una certa cosa sugli aperti e, per gli spazi compatti, abbiamo solo un numero finito di comportamenti. Mica male!

2 Risultati Base

Vediamo alcuni risultati semplici ma fondamentali. Ho riscritto anche le dimostrazioni così possiamo andare un po' più veloci!

Esempio 2.1. I seguenti spazi sono compatti

- ogni insieme X finito dotato di una qualsiasi topologia
- ogni insieme X dotato della topologia banale
- ogni insieme X dotato della topologia cofinita.

Mentre non lo sono

- $\mathbb{R}$, basta pensare al ricoprimento $\{(-n, n)\}_{n\geq 1}$
- ogni intervallo aperto (a, b) di $\mathbb{R}$, basta pensare a $\{(a+\epsilon, a-\epsilon)$ tale che $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}\}$.

Vediamo alcuni fatti importanti riguardo ai sottospazi. Se Y è un sottospazio di X, una collezione di sottoinsiemi di X si dice *ricoprimento* di Y se l'unione di questi elementi contiene Y.
Per prendere la mano con le definizioni è utile dimostrare il seguente.

Proposizione 2.1. *Sia Y un sottospazio di X. Allora Y è compatto se e solo se ogni ricoprimento di Y fatto di aperti di X contiene una sottocollezione finita che ricopre Y.*

Proof. " $\Rightarrow$ " Sia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un ricoprimento di Y fatto di aperti di X. Consideriamo la collezione

$$\{A_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in J}$$

contiene un ricoprimento di Y finito, i.e esiste un insieme F finito tale che

$$\{A_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in F}$$

ricopre Y. La tesi è dimostrata considerando $\{A_\alpha\}_{\alpha\in F}$.
" $\Leftarrow$ " Sia $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un ricoprimento di Y fatto di aperti di Y. Visto che il sottospazio Y ha la topologia indotta abbiamo che

$$\forall\alpha \in J\ B_\alpha = A_\alpha \cap Y$$

per qualche A_α aperto di X. Dalla collezione $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ si può estrarre, per ipotesi, una sottocollezione finita che ricopre Y, i.e. esiste un insieme F finito tale che $\{A_\alpha\}_{\alpha\in F}$ ricopre Y. La tesi è mostrata considerando $\{B_\alpha\}_{\alpha\in F}$. □

Ricordiamo i due seguenti risultati fondamentali. Se abbiamo capito le definizioni è più complicato ricordarli che dimostrarli.

Proposizione 2.2. *Ogni sottospazio chiuso di un compatto è compatto.*

Proof. Siano Y un sottospazio di X entrambi come sopra. Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di Y possiamo considerare

$$\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$$

Da questo ricoprimento (aperto) di X se ne può estrarre uno finito, se non contiene $\{X - Y\}$ abbiamo finito. Altrimenti questo ricoprimento, privato di $\{X - Y\}$, dimostra la tesi. □

Proposizione 2.3. *Ogni sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Proof. Siano Y un sottospazio di X entrambi come sopra.Vogliamo mostrare che $X - Y$ è aperto.

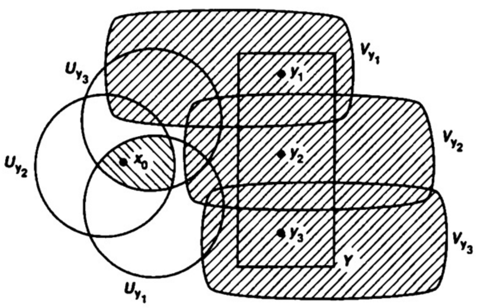

Figure 26.1

□

Osservazione 2.1. Nelle due proposizioni precedenti le ipotesi non si possono indebolire. Basta notare i seguenti esempi

- (a, b) è un sottospazio aperto e limitato del compatto $[a, b]$, ma non è compatto.
- sia X dotato della topologia banale, e con almeno due elementi. Allora ogni $\emptyset \neq Y \subsetneq X$ è compatto (in un compatto) ma non è chiuso.

Proposizione 2.4. *L'immagine di uno spazio compatto via una mappa continua è compatto.*

Proof. Sia $f : X \to Y$ continua e X compatto. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento di $f(X)$ fatto di aperti di Y. Si può estrarre un ricoprimento finito dal seguente ricoprimento aperto (perché f è continua)

$$\{f^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$$

i.e. bastano un numero finito di essi, per dire:

$$f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

Questi $A_1, \ldots, A_n$ dimostrano la tesi. □

Proposizione 2.5. *Una mappa continua biettiva da un compatto in un Hausdorff è un omeomorfismo.*

Proof. Dobbiamo mostrare la continuità di f^{-1}. Basta mostrare che f manda chiusi in chiusi. Qualche idea? Basta usare tutti i risultati che abbiamo dimostrato fin ora ... $\square$

3 Non credo ci sarà tempo

Per completezza enunciamo i seguenti risultati. A molti sono già noti, gli altri vedranno le dimostrazioni nel corso di Geometria II.

Proposizione 3.1. *Il prodotto di un numero finito di spazi compatti, dotato della topologia prodotto, è compatto*

Vale anche per prodotti arbitrari, in quel caso è un po' più complicato e lo vedremo in uno dei prossimi seminari. Si tratta del Teorema di Tychonoff, che si dimostra, necessariamente, con A.C. Ed è vero anche il viceversa.

Teorema 3.1. *Un sottospazio A di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato rispetto alla metrica euclidea d.*

4 Compattezza Locale

Definizione 4.1. Un sottospazio Y di X si dice *relativamente compatto* in X se $\overline{A}$ è compatto.

Ad esempio ogni sottoinsieme d-limitato di $\mathbb{R}^n$ è relativamente compatto. Ogni sottoinsieme di uno spazio compatto è relativamente compatto. Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso quindi relativamente compatto.
Attenzione che questo concetto dipende dallo spazio totale: (a,b) è relativamente compatto in $\mathbb{R}$ ma non lo è in se stesso.

Definizione 4.2. Uno spazio X si dice *localmente compatto in x_0* se esiste qualche sottospazio C di X che contiene un intorno di x_0. Se X è compatto in ogni suo punto allora X si dice *localmente compatto*.

Esempio 4.1. Lo sono tutte le varietà topologiche, in particolare gli $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 4.1. *Ogni sottospazio chiuso C di uno spazio localmente compatto X è localmente compatto.*

Proof. Sia $p \in C$ e sia K_p un intorno compatto. Allora $C \cap K_p$ è un intorno di p in C ed è chiuso in K. $\square$

Proposizione 4.2. *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff. Ogni punto di X possiede un sistema fondamentale di intorni relativamente compatti.*

Proof. Sia $p \in X$ e siano U_p un intorno aperto e K_p uno compatto. Consideriamo $V \doteq int\,(K_p) \cap U_p$ è un introno aperto di p contenuto in U. Ma

$$\overline{V} \subset \overline{K} = K$$

Quindi $\overline{V}$ dimostra la tesi. $\square$

Ecco la portata principale.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio topologico. Allora X è localmente compatto e di Hausdorff se e solo se esiste uno spazio Y che soddisfa le seguenti:*

1. *X è un sottospazio di Y*
2. *l'insieme $Y - X$ consiste di un solo punto*
3. *Y è uno spazio di Hausdorff compatto.*

Inoltre se Y e Y' sono due spazi che soddisfano le condizioni precedenti, allora c'è un omeomorfismo tra di loro che, ristretto a X, è l'identità.

Proof. *"Unicità"* Vediamo l'unicità a meno di omeomorfismo. Come definire la mappa $f : Y \to Y'$ è ovvio. Vediamo che è un omeomorfismo. Basta mostrare che f manda aperti in aperti.

" $\Rightarrow$ "

" $\Leftarrow$ "

$\square$

Osservazione 4.1. Se X è compatto il teorema precedente non è molto interessante, gli Y saranno semplicemente X unito a un punto isolato. Ma se X non è compatto allora quel punto è un punto limite di Y e quindi $\overline{X} = Y$

Definizione 4.3. Sia Y uno spazio compatto di Hausdorff e X un sottospazio proprio di Y la cui chiusura coincide con Y. Allora Y è detto *compattificazione* di X. Se $Y - X = \{p\}$ allora si dice *compattificazione a un punto.*

Esempio 4.2. La compattificazione a un punto di $\mathbb{R}$ è omeomorfa a S^1; di $\mathbb{R}^2$ a S^2.

Vediamo qualche applicazione del teorema precedente.

Proposizione 4.3. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora X è localmente compatto se e solo se dato $x \in X$ e un intorno U di x, allora esiste un intorno V di x tale che $\overline{V}$ è compatto e $\overline{V} \in U$.*

Proposizione 4.4. *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff; sia A un sottospazio di X. Se A è chiuso o aperto in X, allora è localmente compatto.*

Corollario 4.1. *Uno spazio X è omeomorfo a un sottospazio aperto di uno spazio di Hausdorff compatto se e solo se X è localmente compatto.*