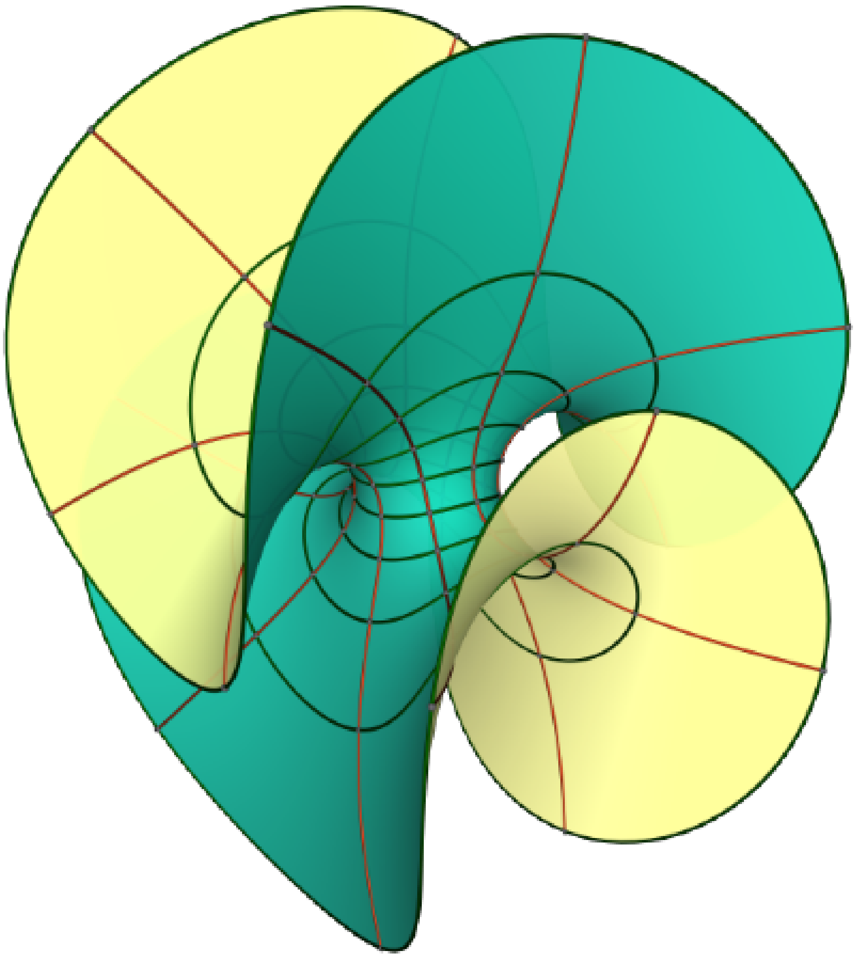
Topology Groove - pt.1

Riccardo Pedrotti

12 aprile 2014



L'immagine sarebbe più legata alla Geometria Differenziale, ma indovinate un po' da dove vengono molti degli strumenti che si usano in quel campo?

1 Base di una Topologia

Definizione 1 (Sistema Fondamentale di Intorni)**.** Sia X uno spazio topologico, un sistema fondamentale di intorni di un punto x (risp. di un sottoinsieme A di X) è una collezione $\mathcal{C}$ di intorni di x (rispettivamente di A) tale per cui per ogni intorno V di x (risp. A) esiste un intorno $W \in \mathcal{C}$ tale che $W \subset V$.

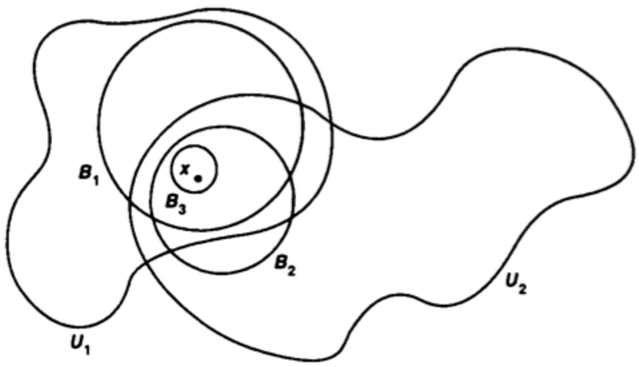
Definizione 2 (Base per una Topologia)**.** Sia X un insieme. Una base per una topologia su X è una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X, chiamati elementi della base, tale che

1. Per ogni $x \in X$, esiste almeno un elemento di $\mathcal{B}$ che contiene x
2. Se x appartiame a due elementi della base B_1, B_2, allora esiste un elemento della base B_3 che contiene x tale che $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Se $\mathcal{B}$ soddisfa queste due condizioni, allora possiamo definire una topologia τ generata da $\mathcal{B}$ in questo modo: un sottoinsieme U di X è aperto in X (cioè è un elemento di τ) se per ogni $x \in U$, esiste un elemento B della base $\mathcal{B}$ tale che $x \in B$ e $B \subset U$. Notiamo che ogni elemento della base è automaticamente aperto.

Ma è una topologia quella che abbiamo appena costruito?

1. $\emptyset \in \tau$. Infatti l'insieme vuoto verifica banalmente le richieste. (Per chi non fosse convinto, riuscite a trovare un elemento in $\emptyset$ che non sia contenuto in un elemento della base?)
2. $X \in \tau$ anche questo è banale, in quanto la base $\mathcal{B}$ ricopre X
3. Consideriamo l'unione arbitraria di elementi di τ $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Mostriamo che siamo ancora in τ. Sia $x \in U$, quindi esiste un indice α tale che $x \in U_\alpha$. Poiché $U_\alpha \in \tau$, cioè è aperto, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset U_\alpha \subset U$. Quindi U è aperto per definizione.
4. Prendiamo ora due aperti U_1, U_2 e mostriamo che la loro intersezione è ancora aperta. Sia $x \in U_1 \cap U_2$. Per ipotesi esistono due elementi della base che contengono il punto x, e più precisamente $B_1 \subset U_1$, $B_2 \subset U_2$. La seconda proprietà di una base per una topologia ci permette di scegliere un elemento della base B_3 che contiene x e tale che $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. B_3 è l'intorno di x cercato che rende $U_1 \cap U_2$ un aperto. Per induzione si verifica per ogni intersezione finita.



Un altro modo per descrivere la topologia generata da una base $\mathcal{B}$ ci è data dal prossimo lemma

Lemma 1. *Sia X un insieme, sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Allora τ è uguale alla collezione delle unioni arbitrarie di elementi di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Data una collezione di elementi di $\mathcal{B}$, loro sono ovviamente elementi di τ. Poichè τ è una topologia, la loro unione è ancora in τ. Al contrario, dato $U \in \tau$, scegliamo per ogni $x \in U$ un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset U$. Allora $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, quindi U è uguale ad un'unione di elementi di $\mathcal{B}$. □

Lemma 2. *Sia X uno spazio topologico. Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una collezione di aperti di X tali che per ogni aperto U di X e per ogni x in U, c'e un elemento C di $\mathcal{C}$ tale che $x \in C \subset U$. Allora $\mathcal{C}$ è una base per la topologia di X.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{C}$ è una base. La prima condizione è facile: X è aperto, e quindi per ogni suo $x \in X$ esiste un elemento C di $\mathcal{C}$ che tale che $x \in C \subset X$. La seconda proprietà è facilmente verificata. $C_1 \cap C_2$ è ancora aperto e quindi per ipotesi esiste un elemento $C_3 \subset C_1 \cap C_2$

Sia ora τ la collezione degli aperti di X; vogliamo mostrare che la topologia τ' generata da $\mathcal{C}$ è uguale alla topologia τ. Prima di tutto notiamo che se U appartiene a τ e se $x \in U$, allora per ipotesi esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $x \in C \subset U$. Segue che U appartiene a τ', per definizione. D'altro canto, se W appartiene a τ' è unione di elementi della base che sono aperti in τ, e quindi è aperto in τ. □

Definizione 3 (Prebase)**.** Una prebase $\mathcal{D}$ per una topologia su X è una collezione di sottoinsiemi di X la cui unione copre tutto X. La topologia generata dalla prebase $\mathcal{D}$ è definita come la collezione di tutte le unioni delle intersezioni di elementi di $\mathcal{D}$.

Dobbiamo ovviamente controllare che tale topologia generata (che chiameremo τ) sia effettivamente una topologia. A tal riguardo ci basta controllare che la collezione $\mathcal{B}$ di tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{D}$ sia una base, dato che in quel caso abbiamo già verificato che genera una topologia. Dato $x \in X$, esso appartiene ad un elemento di $\mathcal{D}$ e quindi ad un elemento di $\mathcal{B}$; questo è la prima condizione per una base. Per controllare anche la seconda definizione, sia

$$B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \quad \text{e} \quad B_2 = S'_1 \cap \cdots \cap S'_n$$

due elementi di $\mathcal{B}$. La loro intersezione

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap \cdots \cap S'_n)$$

è ancora un intersezione finita di elementi di $\mathcal{D}$, e quindi appartiene a $\mathcal{B}$.

Definiamo brevemente, non nella massima generalità, la topologia prodotto con cui viene equipaggiato solitamente il prodotto cartesiano di due spazi topologici:

Definizione 4 (Topologia Prodotto)**.** Siano X e Y spazi topologici. La topologia prodotto su $X \times Y$ è la topologia avente come base la collezione $\mathcal{B}$ di tutti gli insiemi della forma $U \times V$, dove U è un aperto in X e V è un aperto in Y.

I controlli che siano una base per la topologia sono abbastanza ovvi e non li riportiamo.

Teorema 1. *Se $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di X e C è una base per la topologia di Y, allora la collezione*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

è una base per la topologia di $X \times Y$.

Dimostrazione. Vogliamo applicare il lemma 2. Sia W aperto di $X \times Y$ e sia $(x, y) \in W$, per definizione della topologia prodotto, esiste un aperto della forma $U \times V$, con U, V aperti nelle rispettive topologie, tale che $(x, y) \in U \times V \subset W$. Poiché $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi per X e Y rispettivamente, possiamo scegliere un elemento $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset U$, e un elemento $C \in \mathcal{C}$ tale che $y \in C \subset V$. Ma allora $(x, y) \in B \times C \subset W$. Quindi per il lemma 2 la collezione $\mathcal{D}$ è una base. □

Cerchiamo una prebase di questo spazio:
Siano $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ le due mappe proiezione al primo e secondo fattore rispettivamente. Senza introdurre per ora il concetto di continuità notiamo che la controimmagine di un aperto via le due proiezioni è un aperto nella topologia prodotto $X \times Y$. Abbiamo quindi il seguente

Teorema 2. *La collezione*

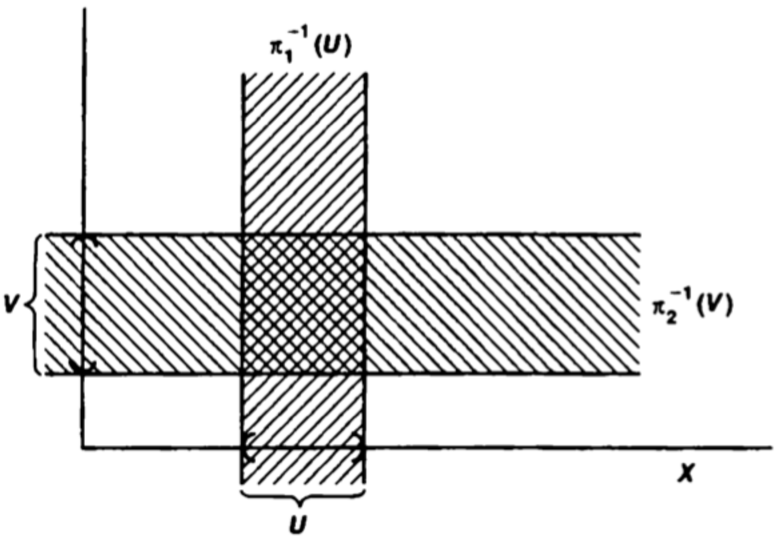
$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ aperto in } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ aperto in } Y\}$$

è una prebase per la topologia prodotto $X \times Y$.

Dimostrazione. Sia τ la topologia su $X \times Y$ e sia τ' la topologia generata da §. Poichè ogni elemento di $\mathcal{S}$ appartiene alla topologia τ, così anche le unioni arbitrarie delle loro intersezioni ci appartengono, e quindi $\tau' \subset \tau$. D'altra parte, ogni elemento della base $U \times V$ per la topologia τ è una intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}$, in quanto

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$$

e quindi, $U \times V$ appartiene a τ', e quindi $\tau \subset \tau'$ che conclude la dimostrazione. □



Definizione 5 (Chiusura)**.** la chiusura di A, denotata con cl$A$ o $\overline{A}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono A.

Definizione 6 (Parte Interna)**.** la parte interna di A, denotata con int$A$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.

Teorema 3. *Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X.*

1. *$x \in \overline{A}$ se e solo se ogni aperto U che contiene x interseca A.*
2. *Possiamo restringere la condizione nel punto* (1) *solo agli elementi di una base $\mathcal{B}$ di X*

Dimostrazione.

1. Dimostriamo l'equivalenza delle negazioni. Se x non sta nella chiusura di A, allora l'insieme $U = \overline{A}^c$ è un aperto che contiene x e che non interseca A, come desiderato. Al contrario, se esiste un aperto U che contiene x e che non interseca A, allora U^c è chiuso e contiene A. Per definizione di chiusura di A, l'insieme U^c deve contenere $\overline{A}$ e quindi x non può stare in $\overline{A}$
2. Segue facilmente da quanto già provato. Se ogni aperto che contiene x interseca A, allora anche ogni elemento della base, in quanto aperto. Al contrario, Se ogni elemento della base contenente x interseca A, allora lo fa anche ogni aperto che contiene x, in quanto U contiene un elemento della base che contiene x. □

Definizione 7 (Base per Insiemi Chiusi)**.** Dato uno spazio topologico X, una base per gli insiemi chiusi di X è una famiglia di insiemi chiusi $\mathcal{F}$ tale che ogni insieme chiuso A di X è esprimibile come intersezione arbitraria di elementi di $\mathcal{F}$.

Remark 1. la definizione di base per chiusi implica che X ci deve appartenere. Quindi sarebbe superfluo richiedere che gli elementi di tale base ricoprano tutto X.

Proposizione 1. *$\mathcal{F}$ è una base per i chiusi in X se e solo se la famiglia dei complementi è una base (nel senso standard) per X.*

Dimostrazione. immediata applicazione delle leggi di De Morgan. ($(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$) □

Analogamente abbiamo un'altra caratterizzazione per le basi dei chiusi

Proposizione 2. *Sia $\mathcal{F}$ una base per gli insiemi chiusi di X. Allora,*

1. *$\bigcap F = \emptyset$*
2. *per ogni F_1 e F_2 in $\mathcal{F}$, l'unione $F_1 \cup F_2$ è l'intersezione di qualche sottofamiglia di $\mathcal{F}$*

Inoltre ogni collezione di insiemi x che soddisfa queste proprietà forma una base per i chiusi di una topologia di X. Gli insiemi chiusi in questa topologia saranno precisamente le intersezioni di sottofamiglie di $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ è una base, allora la condizione (1) è vera: $\emptyset$ è chiuso e quindi deve esistere una sottofamiglia disgiunta di elementi di questa base che lo genera. Il punto (2) è un'ovvia rilettura duale della proprietà di base topologica. Al contrario, se $\mathcal{F}$ soddisfa (1) e (2) e contiene X , possiamo costruire una topologia su X i cui chiusi siano le intersezioni arbitrarie di tali elementi. Essa per (1) e (2) verificherà gli assiomi di topologia data in termini di chiusi. □

2 Continuità di una funzione

Definizione 8 (funzione continua)**.** Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è detta continua se per ogni aperto V di Y, l'insieme $f^{-1}(V)$ è aperto in X.

Remark 2. Vogliamo enfatizzare il fatto che la nozione di continuità è strettamente relativa alle topologie con cui sono equipaggiati gli spazi in esame.

Remark 3. Notiamo che se[1] la topologia nello spazio di arrivo possiede una base $\mathcal{B}$, allora per provare la continuità di f ci basta mostrare che la preimmagine di ogni elemento della base è un aperto. infatti un aperto $V \subset Y$ arbitrario lo possiamo scrivere come

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$$

e quindi

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

e quindi $f^{-1}(V)$ è aperto se lo sono ogni $f^{-1}(B_\alpha)$. Se la topologia su Y ci è data come generata da una prebase $\mathcal{S}$, per provare la continuità di f sarà sufficiente mostrare che le preimmagini di ogni elemento della prebase siano aperte. Infatti un arbitrario elemento della base $\mathcal{B}$ generata da $\mathcal{S}$ può essere scritto come intersezione finita $S_1 \cap S_2 \cap \dots S_n$ di elementi della prebase, e l'asserto segue dal fatto che

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$$

Il risultato principale che vogliamo ricordare in questa sezione è il seguente:

Teorema 4. *Siano X e Y spazi topologici; sia f $X \to Y$ una funzione. Allora sono equivalenti:*

1. *f è continua*
2. *per ogni $A \subset X$, si ha $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*
3. *per ogni $B \subset Y$ chiuso, si ha che $f^{-1}(B)$ è chiuso in X.*
4. *per ogni $x \in X$ e ogni intorno V di $f(x)$, esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subset V$.*

Remark 4. Se la condizione al punto (4) vale per il punto $x \in X$, diremo che f è continua nel punto x. Inoltre notiamo l'analogia della definizione sempre al punto (4) con quella conosciuta a tutti sugli spazi metrici.

Dimostrazione. Mostriamo che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) e che (1) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (2) Assumiamo f continua. Sia A un sottoinsieme di X. Mostriamo che se $x \in \overline{A}$ allora $f(x) \in \overline{f(A)}$. SIa V un intorno aperto di $f(x)$. Allora $f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di x, quindi deve intersecare A in qualche punto y. Allora V interseca $f(A)$ nel punto $f(y)$, quindi $f(x) \in \overline{f(A)}$ come desiderato.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia B chiuso in Y e sia $A = f^{-1}(B)$. Vogliamo provare che A è chiuso, equivalentemente che $A = \overline{A}$. Infatti abbiamo che $f(A) = f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. Quindi se $x \in \overline{A}$

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$$

e quindi $x \in f^{-1}(B) = A$. Perciò $\overline{A} \subset A$ concludendo la dimostrazione

(3) $\Rightarrow$ (1) Sia V un aperto di Y. Sia $B = V^c$. Allora

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

Ora B è chiuso in Y. Quindi $f^{-1}(B)$ è chiuso in X per ipotesi, e quindi $f^{-1}(V)$ è aperto in X, come desiderato.

(1) $\Rightarrow$ (4) Sia $x \in X$ e sia V un intorno aperto di $f(x)$. Allora l'insieme $U = f^{-1}(V)$ è un intorno di x tale che $f(U) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sia V un aperto di Y. Sia x un punto di $f^{-1}(V)$. Allora $f(x) \in V$, e per ipotesi esiste un intorno U_x di x tale che $f(U_x) \subset V$. Allora $U_x \subset f^{-1}(V)$, e segue che $f^{-1}(V)$ può essere scritto come unione di aperti U_x, e quindi è aperto.

[1] alla luce dell'osservazione che ogni spazio topologico ha una base, il se è un po' vacuo e va inteso nel senso di base non banale appunto

□

Definizione 9 (omeomorfismo, def. 1)**.** Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ biettiva. Se f e f^{-1} sono continue, allora f si dice essere un omeomorfismo fra spazi topologici.

Definizione 10 (omeomorfismo, def. 2)**.** Un omeomorfismo fra gli spazi topologici X e Y è un isomorfismo della struttura topologica di X in quella di Y, oppure detto in altri termini, è una biezione di X in Y che trasforma l'insieme degli aperti di X nell'insieme degli aperti di Y.

Diamo il seguente teorema di cui dimostreremo solo il punto più interessante

Teorema 5. *Siano X, Y e Z spazi topologici.*

(a) (funzioni costanti) Se $f : X \to Y$ è una funzione costante, allora è continua per ogni topologia di X e Y.

(b) (inclusione) Se $A \subset X$, allora la funzione di inclusione $i : A \to X$ è continua.

(c) (composizione) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue, allora la mappa $g \circ f : X \to Z$ è continua.

(d) (restrizione del dominio) Se $f : X \to Y$ è continua, e se A è un sottospazio di X, allora la funzione $f_{|A} : A \to Y$ è continua.

(e) (restrizione o espansione del range) Sia $f : X \to Y$ continua. Se z è un sottospazio di Y che contiene $f(X)$, allora la funzione $g : X \to Z$ ottenuta per restrizione del range di f è continua. Se Z è uno spazio che ha Y come sottospazio, allora la funzione $h : X \to Z$ ottenuta espandendo il range di f è continua.

(f) (formulazione locale della continuità) La mappa $f : X \to Y$ è continua se X può essere scritto come unione di aperti U_α tali che $f_{|U_\alpha}$ è continua per ogni α.

Dimostrazione. (f) Per ipotesi, possiamo scrivere X come unione di aperti U_α, tali che $f_{|U_\alpha}$ è continua per ogni α. Sia V un aperto di Y. Allora

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = \left(f_{|U_\alpha}\right)^{-1}(V)$$

Poichè $f_{|U_\alpha}$ è continua, abbiamo che $\left(f_{|U_\alpha}\right)^{-1}(V)$ è aperto in U_α, il quale essendo aperto mi fa concludere che $\left(f_{|U_\alpha}\right)^{-1}(V)$ è aperto in X. Poiché $f^{-1}(V)$ è unione di questi aperti al variare di α concludiamo.

□

Teorema 6 (Pasting Lemma)**.** *Sia $X = A \cup B$, dove A e B sono chiusi in X. Siano $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funzioni continue. Se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A \cap B$, allora f e g si combinano per dare luogo ad una nuova funzione continua $h : X \to Y$, definita ponendo*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \ \textit{se } x \in A \\ g(x) \ \textit{se } x \in B \end{cases}$$

Remark 5. Il teorema è vero anche se al posto di due chiusi consideriamo due aperti, ma in questo caso stiamo vedendo un caso speciale del punto (f) dimostrato prima.

Dimostrazione. Sia C un chiuso di Y. Abbiamo che

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

(verificatelo). Poichè f è continua, $f^{-1}(C)$ è chiuso in A e, quindi, chiuso in X. Analogamente per $g^{-1}(C)$. La loro unione (finita!) $h^{-1}(C)$ è quindi chiusa in X. □

3 Mappe Aperte e Chiuse

Studiamo altre due proprietà di funzioni fra spazi topologici che molte volte vengono richiamate

Definizione 11. Sia $f : X \to Y$ funzione fra spazi topologici, allora si dice che f è aperta (risp. chiusa) se per ogni $V \subset X$ aperto (risp. chiuso), $f(V) \subset Y$ è aperto (risp. chiuso)

Alcune proprietà utili da ricordare riguardanti le funzioni aperte

Proposizione 3. *Siano X, Y due spazi topologici, $f : X \to Y$, $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *f è una mappa aperta.*

2. *Per ogni $U \in \mathcal{B}$, $f(U)$ è aperto in Y.*

3. *Per ogni $x \in X$ ed ogni intorno V di x in X, $f(V)$ è un intorno di $f(x)$ in Y.*

Dimostrazione. che (1) e (2) siano equivalenti è immediato. Un po' più fine è dimostrare l'equivalenza di (1) e (3). Notiamo che, se A è aperto, allora A è un intorno di ogni suo punto, e quindi per (3) $f(A)$ è un intorno di ogni suo punto (che è della forma $f(y)$ con $y \in A$). Al contrario, se f è aperta, l'implicazione è ovvia. □

Proposizione 4. *Siano X, Y spazi topologici. Una condizione necessaria e sufficiente affinché una mappa $f : X \to Y$ sia continua e chiusa è che $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.*

Dimostrazione. Sicuramente se la condizione vale la mappa è sia continua che chiusa. Al contrario, se è continua e chiusa, abbiamo dalla continuità che $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ e dalla chiusura che $f(\overline{A})$ è chiuso. Ma per definizione di chiusura, allora $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ e quindi $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. □

4 Topologia dell'Ordine

Definizione 12 (Ordine Totale)**.** Sia X un insieme non vuoto. Un ordine totale su X è una relazione R, (cioè un sottoinsieme di $X \times X$) con le seguenti proprietà:

O1 $\forall x \in X \quad (x, x) \notin R$

O2 $\forall x, y \in X$, se $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$

O3 $\forall x, y, z \in X$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ allora (x, z)

OT $\forall x \neq y \in X$ esattamente una e una sola delle due accade: $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$.

La nozione di ordine totale cerca di cogliere (ed estendere) il significato comune del simbolo $<$ quando usato come relazione d'ordine fra i numeri appunto. Senza perderci in formalità, la nozione di ordine $\leq$ la si può definire come $R \cup \Delta$, com $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$. Ai fini della nostra esposizione è una relazione che si comporta come l'usuale relazione di minore uguale fra due numeri.
Siano $a < b \in X$, possiamo definire quattro sottoinsiemi di X che chiameremo *intervalli* determinati da a e b

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \mid a < x < b\} \quad \text{intervallo aperto} \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \quad \text{intervallo aperto a sx e chiuso a dx} \\ [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \quad \text{intervallo chiuso a sx e aperto a dx} \\ [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{intervallo chiuso} \end{aligned}$$

La notazione usata è ovviamente famigliare con il caso in cui X è la retta reale, ma in questo caso lavoriamo in un insieme totalmente ordinato arbitrario. L'uso del termine aperto e chiuso non è casuale, e ci suggerisce che gli intervalli aperti in X dovremmo farli diventare aperti una volta equipaggiata una topologia su X.

Definizione 13 (Topologia dell'ordine)**.** Sia X un insieme totalmente ordinato; assumiamo che X abbia più di un elemento. Sia $\mathcal{B}$ la collezione di tutti gli insiemi del tipo:

1. Tutti gli intervalli aperti (a, b) in X

2. Tutti gli intervalli del tipo $[a_0, b)$, dove a_0 è il più piccolo elemento (se esiste) di X

3. Tutti gli intervalli aperti del tipo $(a, b_0]$ dove b_0 è il più grande elemento (se esiste) di X.

La collezione $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di X, ed è chiamata la topologia dell'ordine.

Naturalmente per elemento più piccolo intendiamo che $\forall x \in X$ $x \neq a_0$ abbiamo $a_0 < x$. Notate che è cruciale il fatto che l'ordine sia totale per poter confrontare tutti gli elementi con a_0. Analogamente definiamo l'elemento più grande. Ovviamente non è detto che tali elementi esistano, e $\mathbb{R}$ con l'usuale ordine ne è un (contro)esempio.
Bisogna verificare che $\mathcal{B}$ verifichi gli assiomi di base: è lasciato per esercizio, alcuni suggerimenti: Per il punto 1) va provato che la base ricopre X, prendete un $x \in X$ e studiate separatamente i casi in cui x è il minore, il maggiore degli elementi o nessuno dei due. Per il punto 2) dividete in casi differenti le possibili intersezioni e mostrare che in tutti i casi o è vuota o è un elemento della base.

Remark 6. Si verifica immediatamente che gli insiemi definiti come $\uparrow a := \{x \in X \mid a < x\}$ e $\downarrow a =: \{a \in X \mid x < a\}$ sono aperti. Inoltre denotiamo con $\bar{\uparrow} a := \uparrow a \cup \{a\}$ e analogo per $\bar{\downarrow} a$, i quali sono ovviamente dei chiusi, in quanto complementari di aperti. (quali?)

Remark 7 (Mind The Gap). Siano $x, y \in X$, assumiamo $x < y$, se $\nexists c \in X$ tale che $x < y$ allora $\bar{\downarrow} x = \downarrow y$. Cioè questo tipo di aperti sono anche chiusi, con tutto quello che ne consegue.

Teorema 7. *La topologia dell'ordine su X è di Hausdorff*

Dimostrazione. Siano $x \neq y \in X$. Allora possiamo assumere, a meno di scambiare x con y, che $x < y$. Si aprono due casi, se $\nexists c \in X$ tale che $x < c < y$ allora per il remark 7 gli aperti $\downarrow y$ e $\uparrow x$ contengono rispettivamente x e y ed hanno intersezione vuota. Se esiste un c con le proprietà richieste, basta considerare $\downarrow c$ e $\uparrow c$. $\square$