

CHAPITRE 5

FILTRES ET APPLICATIONS



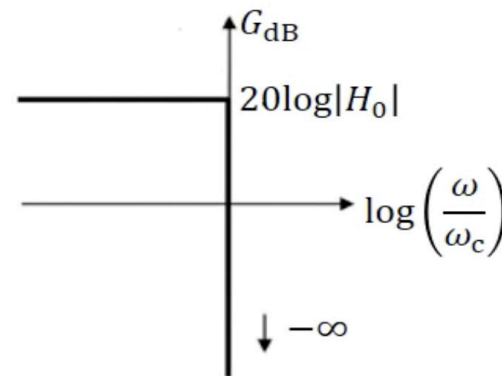
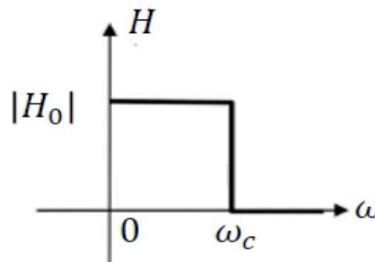
A. FILTRES PASSE-BAS

A.1. Filtre passe-bas idéal

⊗ Caractéristiques

$$\underline{H} = \begin{cases} H_0 & \text{pour } \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

ω_c : pulsation de **c**oupeure



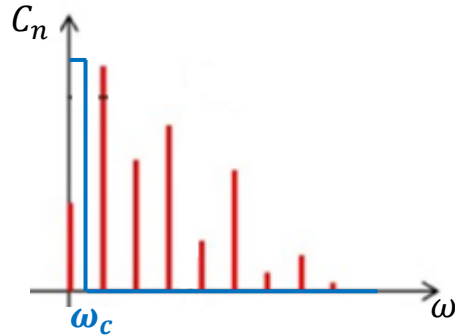
⊗ Approximation : filtre passe-bas réel

$$\underline{H} = \begin{cases} \approx \text{constant} & \text{pour } \omega \lesssim \omega_c \\ \text{décroissante avec } \omega & \omega \gtrsim \omega_c \end{cases}$$

($\frac{1}{\omega}$: filtre du 1^{er} ordre, $\frac{1}{\omega^2}$: filtre du 2^{ème} ordre)

A.2. Applications

A.2.a. Obtention de la valeur moyenne



@ Signal d'entrée

@ $\omega_c < \omega$: filtre **idéal**, $\omega_c \ll \omega$: filtre **réel**

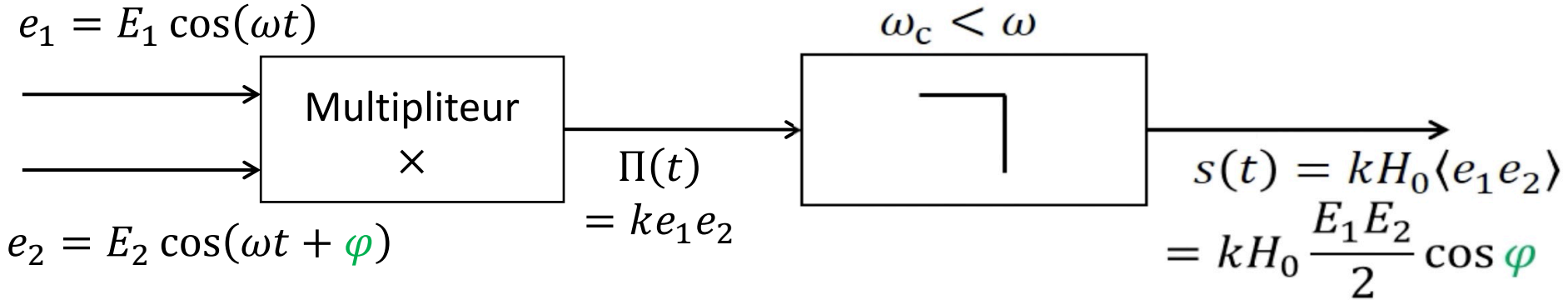
@ Sortie : $s(t) = H_0 \langle e \rangle$

A.2.b. Utilisations courantes

@ **Redressement** : transformer un signal variant du temps en un signal continu (ex 5-1)

@ **Modulation et démodulation** : ex 5-4

@ Mesure de déphasage



Exercice : question 5-1

$$e_1 = E_1 \cos(\omega_1 t), e_2 = E_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$|\omega_1 - \omega_2| < \omega_c < \omega_1 + \omega_2$$

$$e_1 e_2 = \frac{E_1 E_2}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$$

A.3. Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

A.3.a. Fonction de transfert (FDT) et équation différentielle caractéristique (EDC)

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

H_0 : gain statique, $x = \omega/\omega_0$: pulsation réduite,
 ω_0 : pulsation caractéristique du filtre

$$\begin{aligned} \longrightarrow \text{RSE : } \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{s} &= H_0 \underline{e} \\ \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) &= H_0 e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} j\omega \rightarrow \frac{d}{dt} \\ \underline{e} \rightarrow e(t) \\ \underline{s} \rightarrow s(t) \end{cases}$$

A.3.b.c. Diagramme de Bode

$$H(x) = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+x^2}}, \varphi(x) = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arctan x$$

@ Courbe de gain

$$G_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{|H_0|}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 20\log|H_0| - 10\log(1+x^2)$$

1. **Asymptotes** : $x \ll 1$: $G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0|$

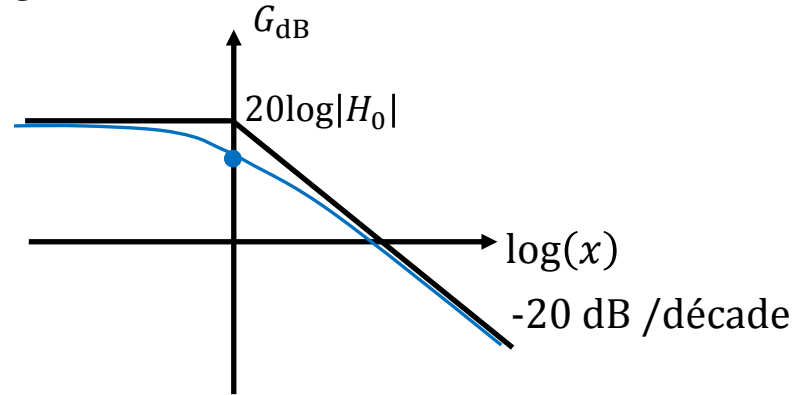
$$x \gg 1 : G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0| - 20\log x$$

2. **Point** : choisir la **pulsation de coupure à -3dB** ω_c

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\text{dB} = 20\log|H_0| - 20\log(\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow H(\omega_c) = H_{\text{max}}/\sqrt{2} = |H_0|/\sqrt{2}, \text{ alors}$$

3. Tracer la courbe

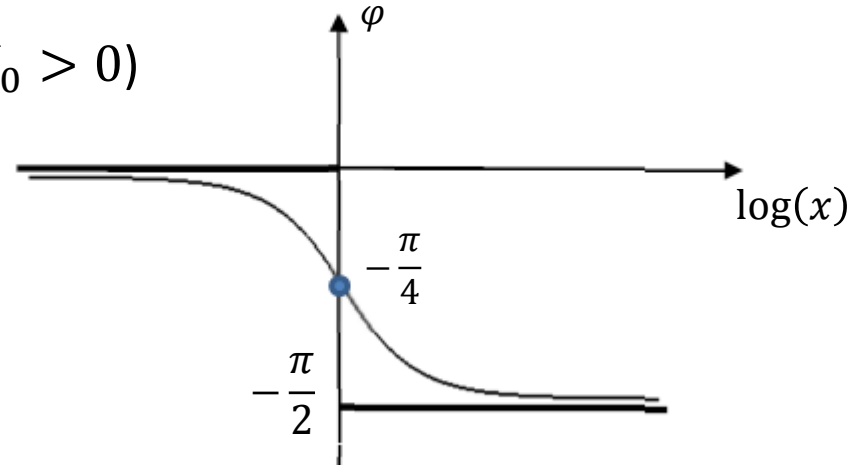


@ **Courbe de phase** (supposons $H_0 > 0$)

$$x \ll 1 : \varphi \approx 0$$

$$x \gg 1 : \varphi \approx -\pi/2$$

$$x = 1 : \varphi = -\pi/4$$





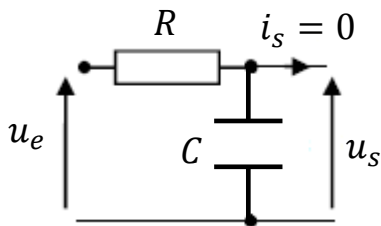
A.3.d. Caractère intégrateur à HF

$$\underline{H} \approx \frac{H_0 \omega_0}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = H_0 \omega_0 e(t)$$

Remarque : $e(t)$ T -périodique

- $n\omega \gg \omega_0, \forall n \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$
- $\langle e \rangle = 0$

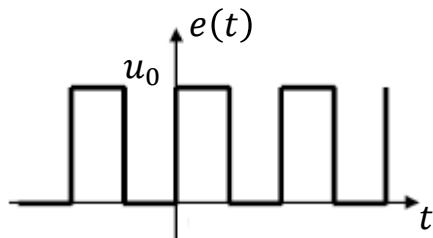
A.3.e. Exemples de réalisations pratiques



$$\underline{H} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$|c|, H_0 = 1, \omega_0 = \omega_c = \frac{1}{RC}$$

A.3.f. Exemple d'utilisation : extraction d'une valeur moyenne



On veut $s(t) = \langle e \rangle = u_0/2$. $s(t)$? Supposons $\omega = 10\omega_c$

$$e(t) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

$$s(t) = \langle s \rangle + \sum_{n \geq 1} C_n' \cos(n\omega t + \varphi_n')$$

- $\langle s \rangle = H_0 \langle e \rangle = \frac{u_0}{2}$
- $C_n' = C_n H(n\omega) = C_n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = C_n \frac{1}{\sqrt{1+100n^2}}$

Amplitude **maximale** : $C_1' = \frac{1}{\sqrt{1+100}} \frac{2u_0}{\pi} \approx \frac{2u_0}{10\pi} = 0,064u_0$

Pour **améliorer** : $\downarrow C_n' \Rightarrow \omega_c \downarrow$

A.4. Filtre passe-bas du 2^{ème} ordre

A.4.a. FDT et EDC

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

$$\longrightarrow \text{RSE : } \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \underline{s} = H_0 \underline{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = H_0 e(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 H_0 e(t)$$

A.4.b.c. Diagramme de Bode

$$H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}, \varphi(x) = \arg(H_0) - \arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$$

@ Courbe de gain

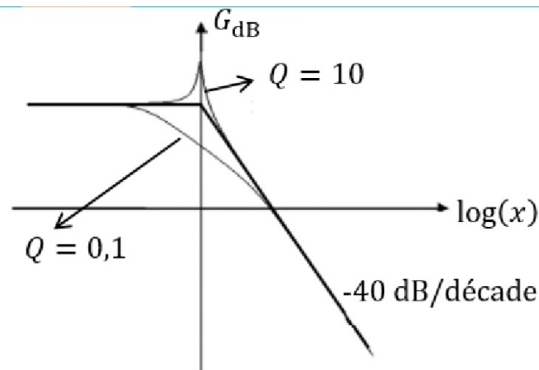
$$G_{\text{dB}} = 20\log|H_0| - 10\log\left[(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right]$$

1. $x \ll 1 : x^4 \ll x^2 \ll 1 \Rightarrow G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0|$

$x \gg 1 : G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0| - 40\log x$

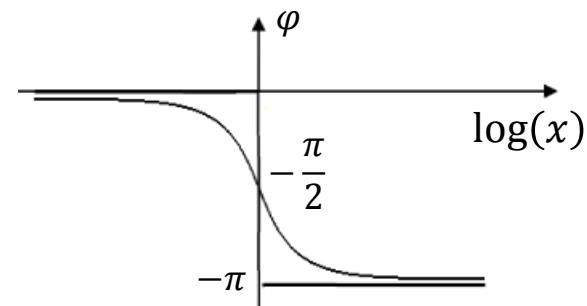
Remarque : amplitude décroît plus rapidement ($1/\omega^2$) \Rightarrow **plus efficace** qu'un filtre du 1^{er} ordre à HF

2. ω_c dépend de Q (voir résonance en u_c RLC)



Choix optimal : $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$H(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+x^4}} \text{ et } \boxed{\omega_c = \omega_0}$$

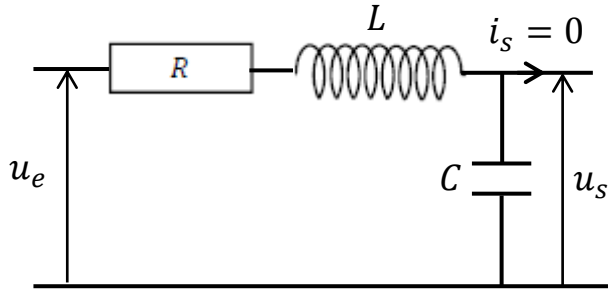


@ Courbe de phase

- Méthode 1 : $\varphi(x) = \arg(H_0) - \arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$ (voir CH2 : A.1.f)
- Méthode 2 :

$$\underline{H} = \frac{H_0 \left(-\frac{jQ}{x}\right)}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \varphi = \arg\left(-\frac{jH_0Q}{x}\right) - \arctan Q \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

A.4.d. Exemple



$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

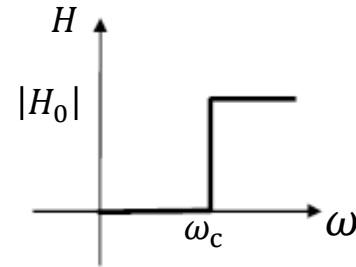
Mise sous **forme canonique** : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$

$$\text{Ici, } H_0 = 1, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \frac{1}{\omega_0 Q} = RC \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

B. FILTRES PASSE-HAUT

B.1. Filtre passe-haut idéal

$$\underline{H} = \begin{cases} H_0 & \text{pour } \omega > \omega_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



B.2. Application : suppression de valeur moyenne

$$e(t) \text{ périodique} \xrightarrow{\omega_c \ll \omega = \frac{2\pi}{T}} s(t) = e(t) - \langle e \rangle$$

B.3. Filtre passe-haut du 1^{er} ordre

B.3.a. FDT et EDC

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jx}} \quad H_0 : \text{gain à HF.} \quad \left(jx \rightarrow \frac{1}{jx} \right)$$

$$\longrightarrow \text{RSE : } \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right) \underline{s} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_0} \underline{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{H_0}{\omega_0} \frac{de(t)}{dt}$$

B.3.b.c. Diagramme de Bode

$$H = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}, \varphi = \arg(H_0) - \arg\left(1 + \frac{1}{jx}\right) = \arg(H_0) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

@ $G_{\text{dB}} = 20\log|H_0| - 10\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

1. $x \ll 1 : G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0| + 20\log x$

$x \gg 1 : G_{\text{dB}} \approx 20\log|H_0|$

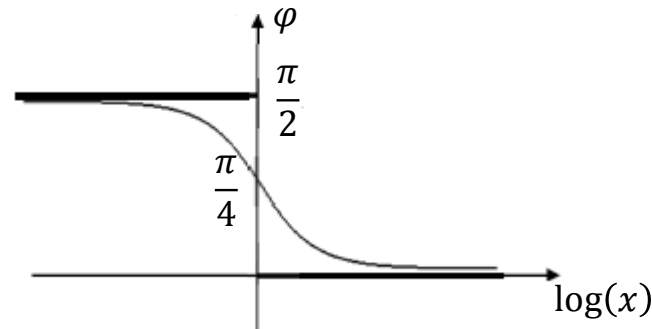
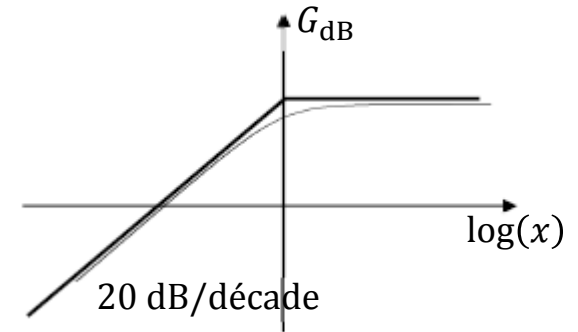
2. $\omega_c = \omega_0$

@ $H_0 > 0$

1. $x \ll 1 : \varphi \approx \pi/2$

$x \gg 1 : \varphi \approx 0$

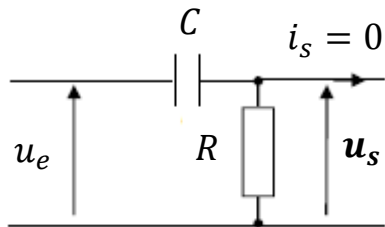
2. $x = 1 : \varphi = \pi/4$



B.3.d. Caractère dérivateur à BF

$$\underline{H} \approx H_0 \frac{j\omega}{\omega_0} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \Rightarrow s(t) = \frac{H_0}{\omega_0} \frac{de(t)}{dt}$$

B.3.e. Exemple



$$\underline{H} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

B.4. Filtre passe-haut du 2^{ème} ordre

B.4.a. FDT

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{Q} \frac{1}{jx} + \left(\frac{1}{jx}\right)^2}$$

B.4.b.c. Diagramme de Bode

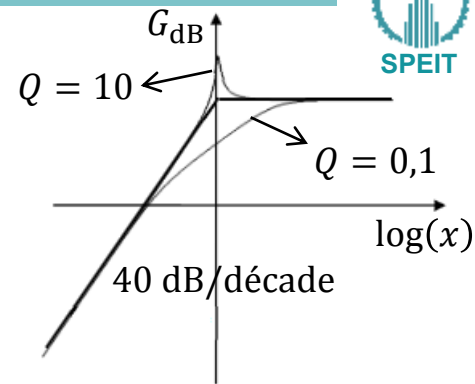
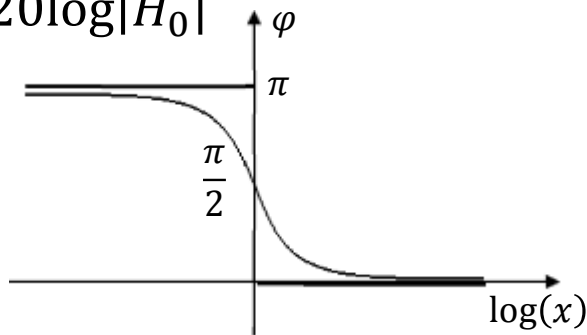
$$H = \frac{|H_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}}$$

$$\underline{H} = \frac{H_0 j Q x}{1 + j Q \left(x - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \varphi = \arg(H_0 j Q x) - \arctan\left(Q \left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

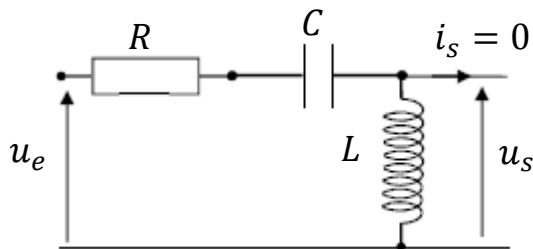
$$G_{dB} = 20\log|H_0| - 10\log\left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}\right]$$

- $x \ll 1 : G_{dB} \approx 20\log|H_0| + 40\log x$
- $x \gg 1 : G_{dB} \approx 20\log|H_0|$

② Coube de phase



B.4.d. Exemple



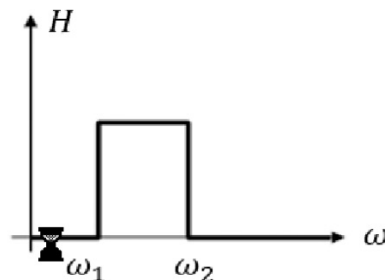
$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2 LC}}$$

$$H_0 = 1, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

C. FILTRES PASSE-BANDE

C.1. Filtre passe-bande idéal

$$\underline{H} = \begin{cases} H_0 & \text{si } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$[\omega_1, \omega_2]$: **bande passante** du filtre

$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$: **pulsation centrale** (centre de bande)

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$: **largeur de bande**

C.2. Applications

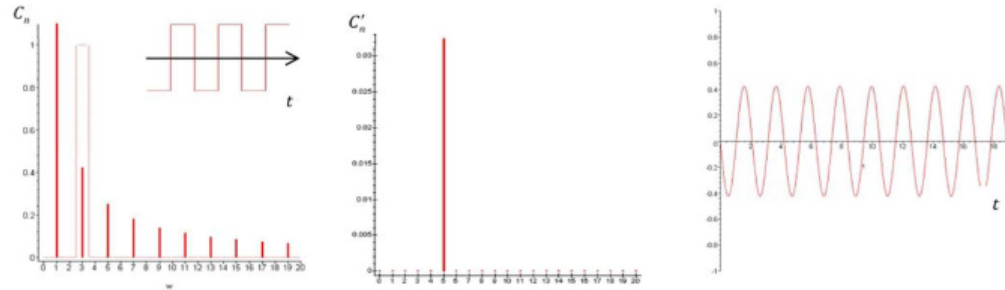
- Ⓢ **Selectivité** : si $\Delta\omega / \omega_m \ll 1$: selectif
si $\Delta\omega / \omega_m \gg 1$: à bande large (non selectif)

C.2.a. Filtrage selectif

@ Laisser passer une harmonique \Rightarrow **obtenir un signal sinusoïdal**

@ Validité :

- $\Delta\omega \leq 2\pi/T$
- $\omega_m = n \frac{2\pi}{T}$



@ Exemple : Fig. 5-21 (P111 du poly)

C.2.b. Amplificateur large bande

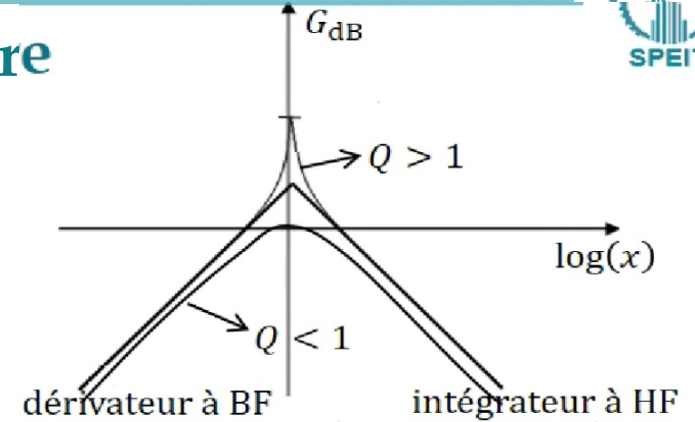
@ But : **amplifier** un signal du **spectre large** sans le déformer

@ Exemple : signaux sonores $f \in [20, 2 \times 10^4]$ Hz

C.3. Filtre passe-bande du 2^{ème} ordre

C.3.a. FDT

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$



C.3.b. Courbe de gain

$$H = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}, G_{dB} = 20\log|H_0| - 10\log[1 + Q^2(x - 1/x)^2]$$

$$1. x \ll 1 : G_{dB} \approx 20\log \frac{|H_0|}{Q} + 20\log x, \quad x \gg 1 : G_{dB} \approx 20\log \frac{|H_0|}{Q} - 20\log x$$

$$2. x = 1 : H_{\max} = |H_0|, \quad G_{dB} = 20\log|H_0|$$

@ Fig. 5-22 (P112 du poly)

- $Q \gg 1$: maximum aigu (résonance très fine)
- $Q \ll 1$: maximum large

C.3.c. Bande passante à -3dB

$$H(\omega_{1,2}) \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, [\omega_1, \omega_2]$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{voir CH2. A.2.b})$$

C.3.d. Courbe de phase

$$\varphi = \arg(H_0) - \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \quad (H_0 > 0)$$

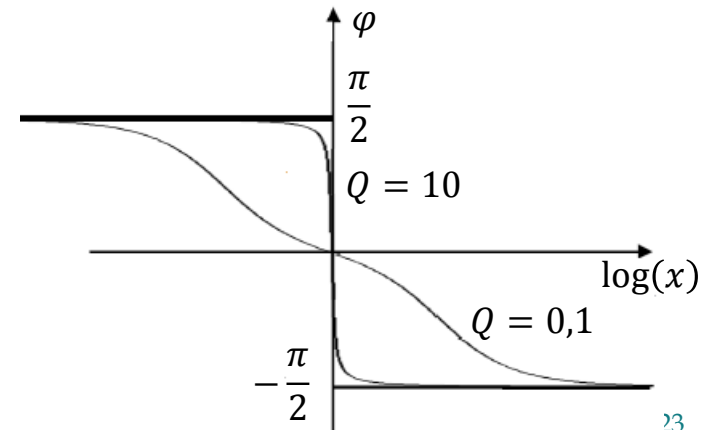
Ⓢ $x \ll 1 : \varphi \approx -\arctan(-Q/x) = \pi/2$

$x \gg 1 : \varphi \approx -\arctan(Qx) = -\pi/2$

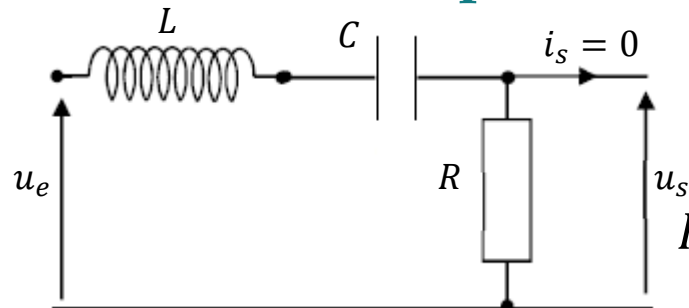
Ⓢ $x = 1 : \varphi = 0$

Ⓢ $x = x_1 : Q(x - 1/x) = -1 \Rightarrow \varphi = \pi/4$

$x = x_2 : \varphi = -\pi/4$



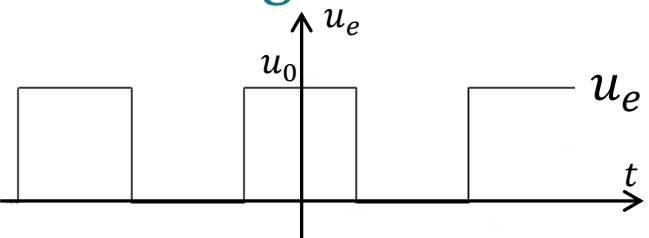
C.3.f. Exemple



$$\underline{H} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - j\frac{1}{\omega RC}}$$

$$H_0 = 1, \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}, \frac{1}{RC} = Q\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

C.3.g. Utilisation : RLC ($Q = 10$)



$$u_e(t) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

$$u_s(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

$$C_1' = H(\omega)C_1 = 1 \times \frac{2u_0}{\pi} \approx 0,64u_0$$

$$C_3' = H(\mathbf{3}\omega)C_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + 10^2(\mathbf{3} - 1/\mathbf{3})^2}} \times \frac{2u_0}{\pi} \times \frac{1}{3} \approx 0,80 \times 10^{-2}u_0$$