有限元方法 II 上机报告 (一)

陈伟 1901110037

对 Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g_D & on\ \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_N & on\ \Gamma_N = \partial\Omega \backslash \Gamma_D, \end{cases}$$

其中 $\Omega = (0,1)^2, \Gamma_D = \{(0,y) \cup (1,y)\}$. 分别 $\mathcal{P}_1$ Lagrange 元,$\mathcal{P}_3(\mathcal{P}_4)$ Hermite 元来解该问题. 对于给定特定的 u, 可以确定源项 f, 边界项 g_D, g_N, 比较数值实验误差结果的 H^1, L^2, L^∞ 范数.

下面分别先导出该有限元问题, 再给出三个元对应的基函数, 由于是基于 ifem 软件包写的程序, 故我们只需再说明局部基函数到整体基函数的对应关系即可, 最后是数值结果讨论.

1 有限元问题

取 $v \in H^1(\Omega)$, 并分别在第一项左右两端乘上 v, 再在整个区域 Ω 上积分有

$$\begin{aligned} \int_\Omega fvdx &= \int_\Omega -\Delta uvdx \\ &= \int_\Omega -div(v\nabla u) + \nabla v \cdot \nabla udx \\ &= \int_{\Gamma_D} -v\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_{\Gamma_N} vg_N ds + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla udx \end{aligned}$$

取 $V_0 = \{v \in H^1(\Omega), \mid v|_{\Gamma_D=0}\}, V = \{v \in H^1(\Omega), \mid v|_{\Gamma_D} = g_D\}$, 并记 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla udx$ 这样原问题的若形式为即变为 $Find: u \in V, s.t. \forall v \in V_0,\ a(u,v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_N} vg_N ds$ 成立.

设 $V_{0,n}, V_n$ 分别为 V_0, V 的有限维子空间. 该有限元问题也即是

$$Find\ u_h \in V_n, s.t. \forall v_h \in V_{0,n}, a(u_h, v_h) = \int_\Omega fv_h dx + \int_{\Gamma_N} vg_N ds$$

成立, 对于给定基函数下, 该问题也即变为求解线性方程组 $Ax = b$ 的问题.

2 基函数

对于给定的单元 K

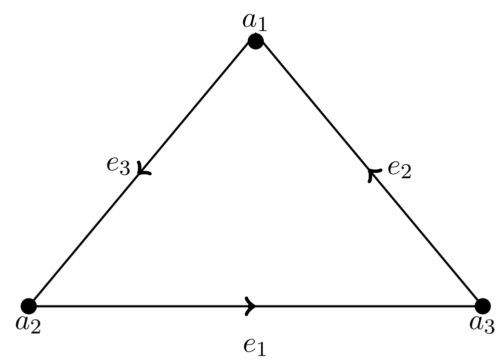

图 1:

以及其重心坐标,$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 下面先分别讨论其基函数.

2.1 $\mathcal{P}_1$ Lagrange 元

由 $V_{Lag\mathcal{P}_1} = \{v \in H^1(\Omega), |\ v|_K \in \mathcal{P}_1\}$, 故只需确定其局部基函数即可. 由 *Lagrange* 元的局部基函数的自由度为 $\mathcal{N}_i(v) = v(a_i), i = 1, 2, 3$. 故对应的基函数为:$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

2.2 $\mathcal{P}_3$ Hermite 元

由 $V_{Her\mathcal{P}_3} = \{v \in H^1(\Omega), |\ v|_K \in \mathcal{P}_3\}$, 且其自由度如下

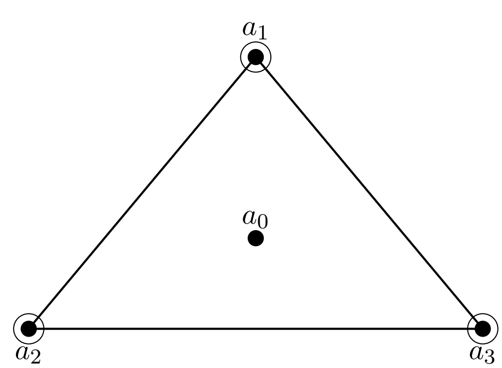

图 2:

具体写出来即是

$$\begin{cases} \mathcal{N}_i(v) = v(a_i), i = 0,1,2,3 \\ \mathcal{N}_{i,x}(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(a_i), i = 1,2,3 \\ \mathcal{N}_{i,y}(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(a_i), i = 1,2,3 \end{cases}$$

在重心坐标表示下:$\mathcal{P}_3 = span\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha, \big|\ |\alpha| = 3\}$, 其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T, \alpha$ 为三重指标. 进而任对 $p \in \mathcal{P}_3$, 有: $p = \sum\limits_{|\alpha|=3} c_\alpha \boldsymbol{\lambda}^\alpha$. 由于自由度中会涉及导数, 故我们先计算 $\nabla\lambda_i$. 如图 1我们重假定 K 是定向的, 也即是 $a_i, i = 1,2,3$ 的位置满足是逆时针的. 且 $e_1 = a_3 - a_2, e_2 = a_1 - a_3, e_3 = a_2 - a_1$, 为三条边的顺序. 这样 $e_i^\perp := (-e_{i,2}, e_{i,1})^T$ 总是从第 i 条边垂直指向 a_i 的. 设 h_i 为 a_i 到边 e_i 的垂直距离, 故 $e_i^\perp \cdot e_{i+1} = h_i|e_i| = 2S$, 其中 S 为该三角形面积. 故 $\nabla\lambda_i = \frac{e_i^\perp}{2S}$. 设 $\phi_i = \sum\limits_{|\alpha|=3} c_{\alpha,i}\boldsymbol{\lambda}^\alpha, i = 1,2,3,\cdots 12$ 为第 i 个自由度对应的基函数, 这样有 $\mathcal{N}_j(\phi_i) = \delta_{i,j}$, 以此来求解得对应的基函数为:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_i : \phi_i &= 3\lambda_i^2 - 2\lambda_i^3 - 7\lambda_1\lambda_2\lambda_3, && i = 1,2,3 \\
\mathcal{N}_0 : \phi_0 &= 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\
\mathcal{N}_{i,x} : \phi_{x,i} &= \lambda_i^2[\lambda_{i+1}(a_{i+1,1} - a_{i,1}) + \lambda_{i-1}(a_{i-1,1} - a_{i,1})] \\
&\quad - (a_{i+1,1} + a_{i-1,1} - 2a_{i,1})\lambda_1\lambda_2\lambda_3, && i = 1,2,3 \\
\mathcal{N}_{i,y} : \phi_{y,i} &= \lambda_i^2[\lambda_{i+1}(a_{i+1,2} - a_{i,2}) + \lambda_{i-1}(a_{i-1,2} - a_{i,2})] \\
&\quad - (a_{i+1,2} + a_{i-1,2} - 2a_{i,2})\lambda_1\lambda_2\lambda_3, && i = 1,2,3
\end{aligned}$$

其中 i 是以 3 为周期的轮换指标. 如 $i = 1$ 时,$i - 1$ 也即对应 $3, i = 3$ 时,$i + 1$ 也即对应 1.

2.3 $\mathcal{P}_4$ Hermite 元

同样有 $V_{Her\mathcal{P}_4} = \{v \in H^1(\Omega), \big|\ v|_K \in \mathcal{P}_4\}$, 且其自由度如下

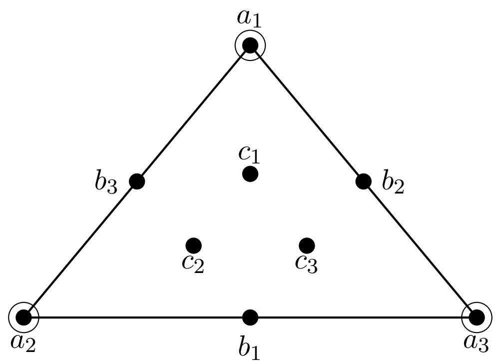

图 3:

写出来也即是

$$\begin{cases} \mathcal{N}_i^1(v) = v(a_i), & i=1,2,3 \\ \mathcal{N}_i^2(v) = v(b_i), & i=1,2,3 \\ \mathcal{N}_i^3(v) = v(c_i), & i=1,2,3 \\ \mathcal{N}_{i,x}(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(a_i), & i=1,2,3 \\ \mathcal{N}_{i,y}(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(a_i), & i=1,2,3. \end{cases}$$

同样在重心坐标表示下:$\mathcal{P}_4 = span\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha, \big| \, |\alpha| = 4\}$, 以此来求得的基函数如下:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_i^1 :&\phi_i^1 = 4\lambda_i^3 - 3\lambda_i^4 - 5\lambda_i^2(\lambda_{i+1}^2 + \lambda_{i-1}^2) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3(8 - 26\lambda_i), && i=1,2,3, \\
\mathcal{N}_i^2 :&\phi_i^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(24\lambda_i - 14) + 16\lambda_{i-1}^2\lambda_{i+1}^2, && i=1,2,3, \\
\mathcal{N}_i^3 :&\phi_i^3 = 32\lambda_1\lambda_2\lambda_3(4\lambda_i - 1), && i=1,2,3, \\
\mathcal{N}_{i,x} :&\phi_{x,i} = \lambda_i^3(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j a_{j,1} - a_{i,1}) + \lambda_i^2\left[a_{i,1}(\lambda_{i-1}^2 + \lambda_{i+1}^2) - (a_{i-1,1}\lambda_{i-1}^2 + a_{i+1,1}\lambda_{i+1}^2)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[a_{i,1}(20\lambda_i - 6) + a_{i-1,1}(4\lambda_{i-1} - 8\lambda_i + 1) + a_{i+1,1}(4\lambda_{i+1} - 8\lambda_i + 1)\right], && i=1,2,3, \\
\mathcal{N}_{i,y} :&\phi_{y,i} = \lambda_i^3(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j a_{j,2} - a_{i,2}) + \lambda_i^2\left[a_{i,2}(\lambda_{i-1}^2 + \lambda_{i+1}^2) - (a_{i-1,2}\lambda_{i-1}^2 + a_{i+1,2}\lambda_{i+1}^2)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[a_{i,2}(20\lambda_i - 6) + a_{i-1,2}(4\lambda_{i-1} - 8\lambda_i + 1) + a_{i+1,2}(4\lambda_{i+1} - 8\lambda_i + 1)\right], && i=1,2,3.
\end{aligned}$$

这样便定义好了局部基函数,, 要得到整体基函数, 就还需要局部基函数到整体基函数的对应关系.

3 Elemdof

由 ifem 软件包中局部到整体的基函数一般是由 **elemdof** 给出的. 其中 **elemdof** 是一个 $NT \times m$ 的向量组, 其中 NT 是单元总个数,m 是单元局部基函数的个数.$\mathbf{elemdof(i,j)}$ 表示的是第 $\mathbf{i}$ 个单元的第 $\mathbf{j}$ 个基函数对应于整体基函数的位置.

3.1 $\mathcal{P}_1$ Lagrange 元

由其自由度为顶点的赋值, 故可直接按照局部点到整体点对应关系给出. 即: $\mathbf{elemdof} = \mathbf{elem}$. 其中 **elem** 为 $NT \times 3$ 的向量组,$\mathbf{elem(i,j)}$ 表示第 $\mathbf{i}$ 个单元的第 $\mathbf{j}$ 个顶点在所有顶点中的序号.

3.2 $\mathcal{P}_3$ Hermite 元

其自由度可以分为两大类, 一类是与单元体有关的, 即 $\mathcal{N}_0$, 还有一类是于顶点有关的, 即 $\mathcal{N}_i$,$\mathcal{N}_{i,x}$,$\mathcal{N}_{i,y}$. 这样其对应关系可如下给出:

$$\mathbf{elemdof} = [\mathbf{elem}, \mathbf{elem} + \mathbf{ND}, \mathbf{elem} + \mathbf{2ND}, \mathbf{3} * \mathbf{ND} + (\mathbf{1} : \mathbf{NT})']$$

上式是按 matlab 语言给出的, 其中 **ND** 为节点的总个数.

3.3 $\mathcal{P}_4$ Hermite 元

其自由度也可为三大类大类, 一类是和边有关的:$\mathcal{N}_i^2$, 一类是和单元体有关的:$\mathcal{N}_i^3$, 还有一类是和顶点有关的:$\mathcal{N}_i^1$,$\mathcal{N}_{i,x}$,$\mathcal{N}_{i,y}$, 这样对应关系可如下给出:

$$\begin{aligned}\mathbf{elemdof} = [&\mathbf{elem}, \mathbf{elem} + \mathbf{ND}, \mathbf{elem} + \mathbf{2ND}, \mathbf{elemedge} + \mathbf{3ND}, \mathbf{3ND} + \mathbf{NE} + (\mathbf{1} : \mathbf{NT})', \ldots \\ &\mathbf{3ND} + \mathbf{NE} + \mathbf{NT} + (\mathbf{1} : \mathbf{NT})', \mathbf{3ND} + \mathbf{NE} + \mathbf{2NT} + (\mathbf{1} : \mathbf{NT})']\end{aligned}$$

其中 **NE** 为边的总数,**elemedge** 是 $\mathbf{NT} \times 3$ 的向量组,$\mathbf{elemedge(i,j)}$ 表示第 $\mathbf{i}$ 个单元的第 $\mathbf{j}$ 条边在所有边中的序号.

4 数值结果

一方面三种有限元空间 V_h 都是 V 的子空间, 即是协调元. 有

$$a(u-u_h,v)=0,\forall v\in V_{h,0}$$

且 $u-u_h\in V_0$, 在 V_0 上 $a(\cdot,\cdot)$ 有强制性条件, 故有

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|^2 &\leqslant a(u-u_h,u-u_h)\\ &\leqslant a(u-u_h,u-v)+a(u-u_h,v-u_h)\\ &\leqslant M\|u-u_h\|\|u-v\|,\quad \forall v\in V_h\end{aligned}$$

也即是:$\|u-u_h\|\leqslant \frac{M}{\alpha}\inf\limits_{v\in V_h}\|u-v\|$, 即是空间的逼近误差.

再另 w 为方程

$$\begin{cases}-\Delta w=u-u_h & in\ \Omega\subset\mathbb{R}^2,\\ u=g_N & on\ \Gamma_D,\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & on\ \Gamma_N=\partial\Omega\backslash\Gamma_D,\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{L^2}^2 &=(-\Delta w,u-u_h)\\ &=a(w,u-u_h)\\ &=a(w-v,u-u_h)\\ &\leqslant \|w-v\|_E\|u-u_h\|_E,\quad \forall v\in V_h\end{aligned}$$

且一般有 $\inf\limits_{v\in V_h}\|w-v\|_E\leqslant Ch\|\Delta w\|_{L^2}$, 故 $\|u-u_h\|_{L^2}\leqslant Ch\|u-u_h\|_E\leqslant \frac{CMh}{\alpha}\inf\limits_{v\in V_h}\|u-v\|$. 再由多项式逼近理论可知, 用 Lagrange P1 元时, 其 H^1 误差和 L^2 误差分别是 1 阶和 2 阶的. 用 Hermite P3 元时, 其 H^1 误差和 L^2 误差分别是 3 阶和 4 阶的. 用 Hermite P4 元时, 其 H^1 误差和 L^2 误差分别是 4 阶和 5 阶的.

下面取:

$$u=e^{x+y}(x^3-2)(y^8+1),$$

以下分别是三种元的收敛性和数值结果.

图 4: LagrangeP1 元收敛性图

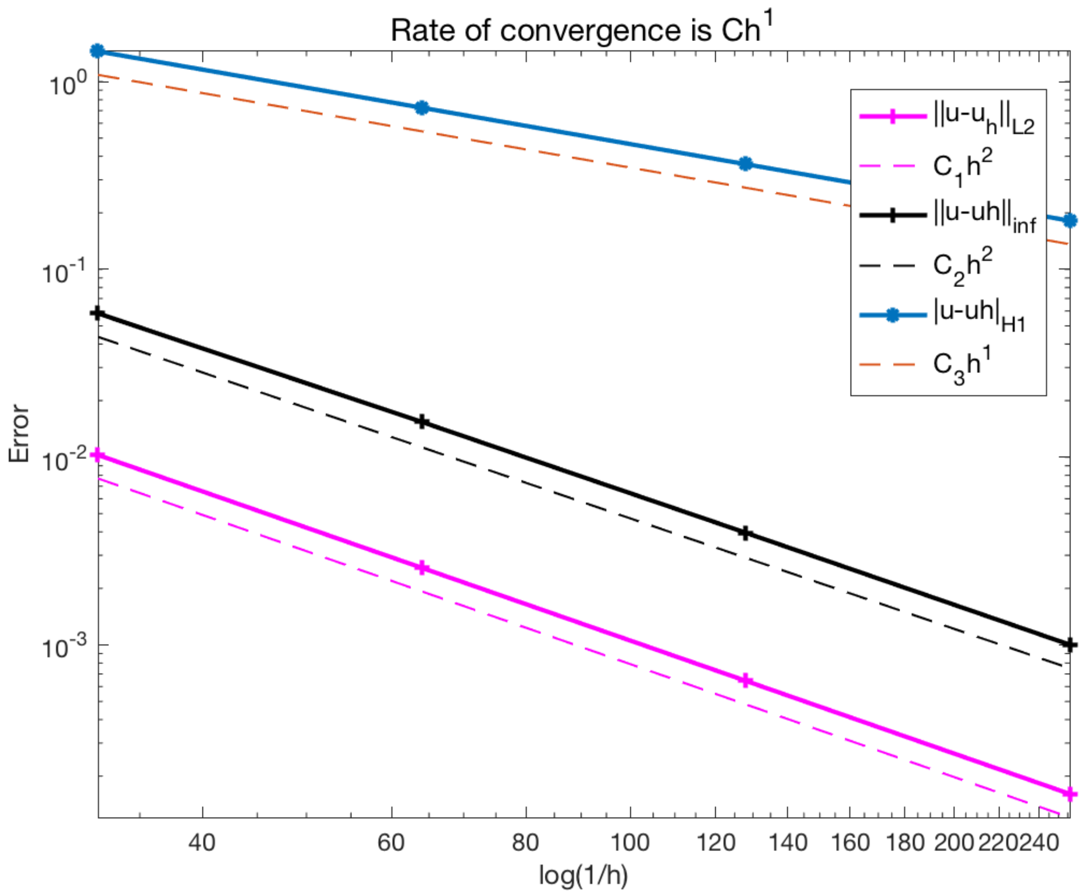

表 1: P_1 Lagrange 元误差表

dof	h	cputime	$\|u-u_h\|_\infty$	rate	$\|u-u_h\|_2$	rate	$\|u-u_h\|_1$	rate
1089	3.125e-02	2.00e-02	5.82e-02		1.02e-02		1.44e+00	
4225	1.562e-02	1.20e-01	1.54e-02	1.92	2.57e-03	1.99	7.26e-01	0.99
16641	7.812e-03	3.80e-01	3.96e-03	1.96	6.44e-04	2.00	3.63e-01	1.00
66049	3.91e-03	1.07e+00	1.00e-03	1.98	1.60e-04	2.00	1.81e-01	1.00

图 5: HermiteP3 元收敛性图

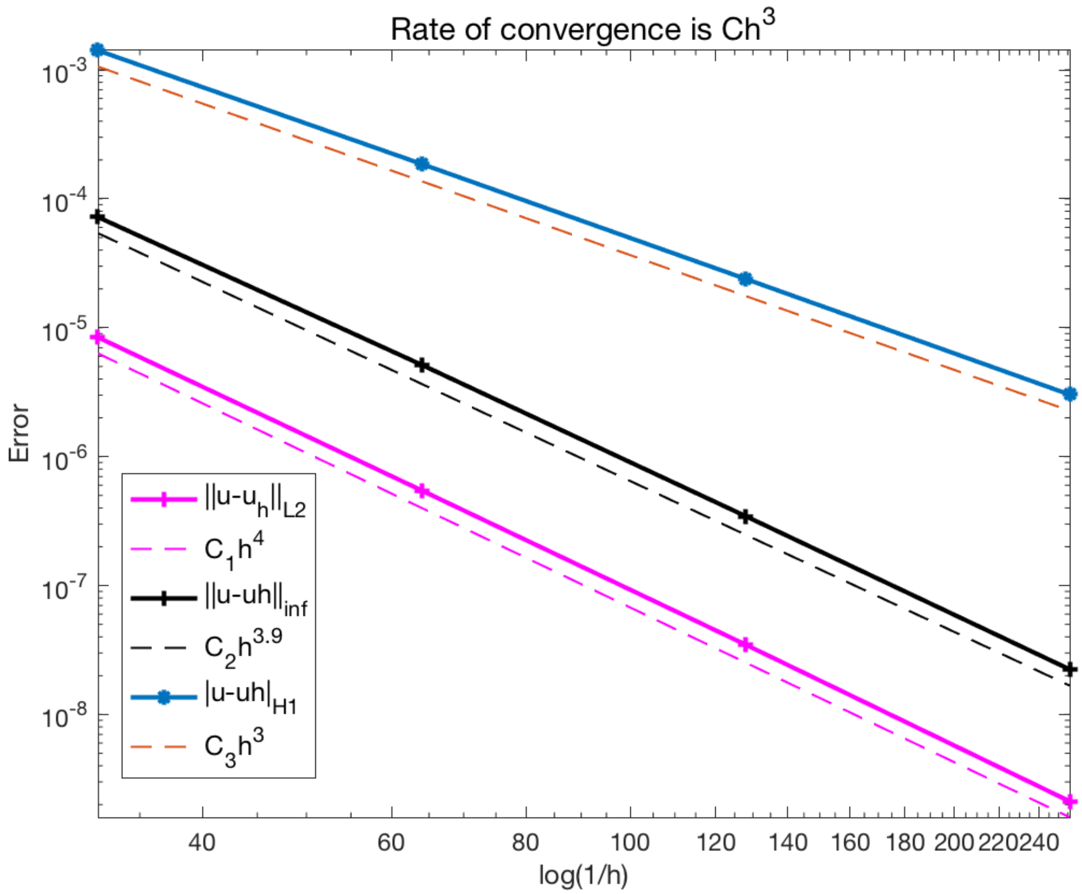

表 2: P_3 Hermite 元误差表

dof	h	cputime	$\|u-u_h\|_\infty$	rate	$\|u-u_h\|_2$	rate	$\|u-u_h\|_1$	rate
5315	3.125e-02	2.00e-01	7.21e-05		8.42e-06		1.41e-03	
20867	1.562e-02	9.20e-01	5.14e-06	3.81	5.46e-07	3.95	1.86e-04	2.93
82691	7.812e-03	3.13e+00	3.45e-07	3.90	3.47e-08	3.97	2.39e-05	2.96
329219	3.906e-03	1.18e+01	2.24e-08	3.95	2.12e-09	4.03	3.03e-06	2.98

图 6: HermiteP4 元收敛性图

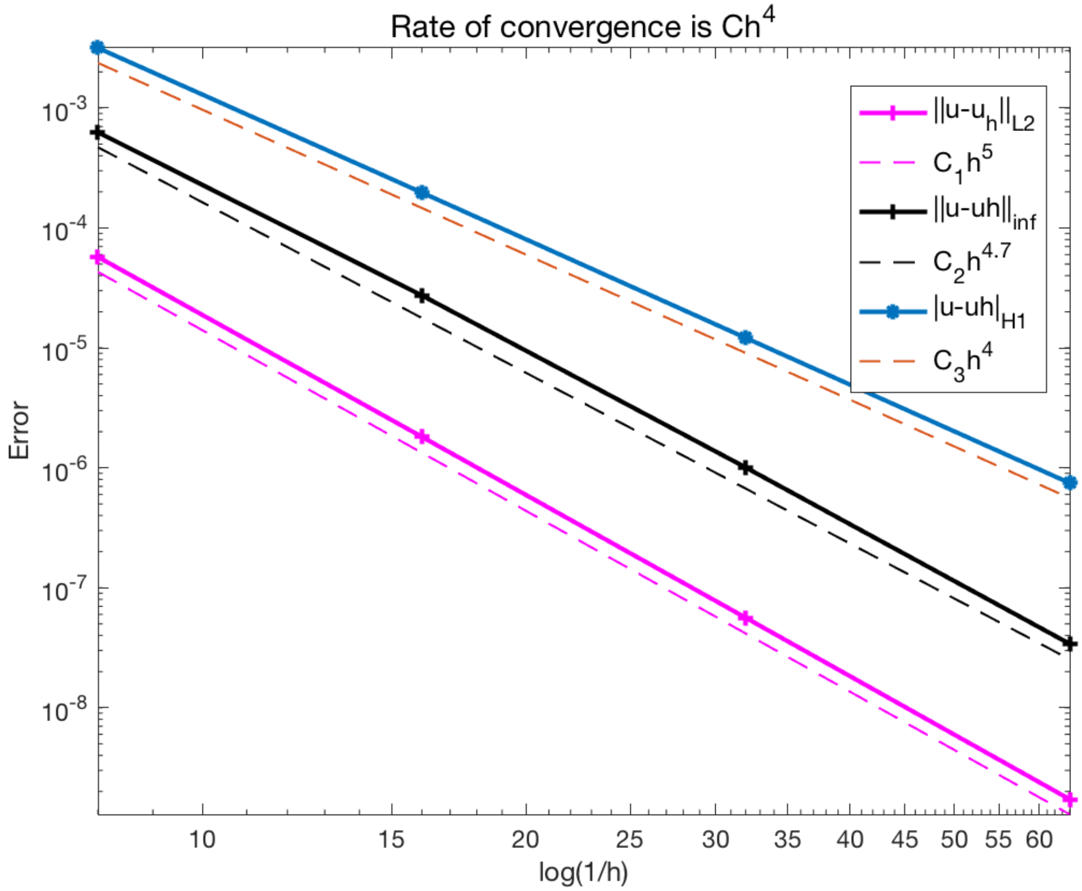

表 3: P_4 Hermite 元

dof	h	cputime	$\|u-u_h\|_\infty$	rate	$\|u-u_h\|_2$	rate	$\|u-u_h\|_1$	rate
835	1.250e-01	3.00e-02	6.27e-04		5.73e-05		3.17e-03	
3203	6.250e-02	1.10e-01	2.74e-05	4.52	1.81e-06	4.98	1.97e-04	4.01
12547	3.125e-02	2.60e-01	1.01e-06	4.77	5.62e-08	5.01	1.21e-05	4.03
49667	1.563e-02	2.28e+00	3.41e-08	4.88	1.72e-09	5.03	7.47e-07	4.02

可以看出数值实验结果和理论基本吻合, 虽然为 Hermite P4 元时, 其 L^∞ 误差的收敛阶为 4.7, 单从误差表中可以看出, 随着网格密度提高, 其收敛阶在向 5 靠近.

上机实验的 matlab 代码是附件中名为’Hw1lab.m’ 的文件, 只需改变’var’ 的值为’LagrangeP1’,’HermiteP3’,’Her 中的一个, 再运行即可出现对应的结果.