CFD 上机报告 I

陈伟
1901110037

2020 年 4 月 12 日

目录

1 问题描述

1. 程序实现一维方程的 CIR 格式/(1 阶) 迎风格式，Lax-Friedrichs 格式，和 Lax-Wendroff 格式

(1a). 求解讲义“CFDLect04-com01.cn.pdf”第 69,71 页的两个例子.

(1b). 求解讲义”CFDLect04-com01.cn.pdf” 第 99 页的两个问题. 也即是下面的四个方程.

1.1 Example1. Propagation of a wave packet

求解方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-100(x-0.5)^2}\sin(kx), \end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$, $h = 1/200$. 输出时间分别为 $t = 2, 4, 8$. 时间步长 $\tau = 0.8h$, $k = 80$.

其初始中心位置在 $x = 0.5$ 处, 波包随时间右移,中心在 $t = 2, 4, 8$ 时分别移动到 $x = 2.5, 4.5, 8.5$. 绘制其图像.

1.2 Example2. Highly discontinuous data

求解方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} -\xi\sin\left(1.5\pi\xi^2\right), & \text{if } -1 \le \xi < -1/3 \\ |\sin(2\pi\xi)|, & \text{if } |\xi| < 1/3 \\ 2\xi - 1 - \sin(3\pi\xi)/6, & \text{if } 1/3 < \xi \le 1 \end{cases} \end{cases}$$

其中 $u(x,0)$ 是一个关于 x 以 2 为周期的函数, 并且

$$\xi = \begin{cases} x - 0.3, & -0.7 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 0.3 + 2, & x - 1 \leqslant x < -0.7. \end{cases}$$

取关于 x 的网格点个数为 501, 并且 $\tau = 0.8h$. 绘制 $t = 8$ 时的逼近图像.

1.3 Example3. Burgers' equation

求解方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0$$
$$u(x,0) = 0.5 + \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi)$$

周期边界条件, 输出时刻 $t = 0.9$ 和 2.

1.4 Example4. Conservation law equation

求解方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$
$$f(u) = \frac{1}{4}\left(u^2 - 1\right)\left(u^2 - 4\right)$$
$$u(x,0) = -2\,\mathrm{sign}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

输出时刻 $t = 1.2$.

2 差分格式

对于给定的网格剖分以及网格节点:$x_j, j = 1, 2, \cdots, J+1$. 记 u_j^n 为在 t_n 时刻在 x_j 的网格值, 并记 $r = \tau/h$.

2.1 线性对流方程的格式

对线性对流方程

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, & x \in .\mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

用以下格式.

2.1.1 CIR(upwind) 格式

其格式为:

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - ar(u_j^n - u_{j-1}^n), & a \geqslant 0, \\ u_j^n - ar(u_{j+1}^n - u_j^n), & a < 0. \end{cases}$$

2.1.2 Lax-Friedrichs(LF) 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{ar}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right).$$

2.1.3 Lax-Wendroff(LW) 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ar}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{(ar)^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right).$$

2.2 守恒型差分格式

对守恒型方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

用以下数值格式, 记 $\lambda = \tau/h$.

2.2.1 一阶迎风 (upwind) 格式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right) + \frac{\lambda|a\left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right)|}{2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \\ & - \frac{\lambda|a\left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)|}{2}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \end{aligned}$$

2.2.2 Lax-Friedrichs 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2}\left(f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right)$$

2.2.3 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} =& u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right) + \frac{\lambda^2 a^2\left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right)}{2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \\ & - \frac{\lambda^2 a^2\left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)}{2}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \end{aligned}$$

2.3 Remark

- 上述格式均要求其 Courant number:$\nu = ar$(或者 $\nu = \|f'\|_\infty \lambda$) 小于或者等于 1 才稳定;
- 守恒型格式中的 $u^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}(u^n_{j+1} + u^n_j)$;
- 守恒型格式中的 $a(u)_{j+1/2}$ 也可以用

  $$a_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{f(u_{j+1})-f(u_j)}{u_{j+1}-u_j}, & u_{j+1} \neq u_j, \\ a(u_j), & u_{j+1} = u_j. \end{cases}$$

  代替.
- 由于实际计算只能计算 x 方向的有限区域的值, 而对于给定的点 x_0, 由特征线法可以知道其有有限的依赖域, 故对于在 t 时刻要计算的给定区间 $[a,b]$, 我们只要找出其在初始时刻依赖的有限区间, 并取定一个包含改初始依赖区间的区间 $[c,d]$, 这样在固定其左右端点值，我们直接用上述方法计算, 就能得到在区间 $[a,b]$ 的数值结果.

3 数值实验

对于上述四个例子, 其中 1, 2 我们采用线性对流方程的格式, 后面两个采用守恒型差分格式。在代码实现中, 特别在边界条件上我们把左右边界点均归入计算范围, 也即是对于 $U(j), j = 1, \cdots, J+1$. 其中 $U(1), U(J+1)$ 分别是对左右边界点的插值逼近。特别对于非周期的情况，直接

$$U^{n+1}(1) = U^n(1), U^{n+1}(J+1) = U^n(J+1)$$

即可。对于周期边界情况，有 $U(1) = U(J+1)$, 也即认为这两个点是同一个点。对此，也即是有:

$$U(j+1) = U(2), U(j-1) = U(J), \qquad j = 1 \text{ or } J+1.$$

3.1 Example1

直接用特征线法可以求得其 exact solution 为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x-t) \\ &= e^{-100(x-t-0.5)^2} \sin(k(x-t)) \end{aligned}$$

下面是分别是 $t = 2, 4, 8$ 时刻 x 分别在 $[2,3], [4,5], [8,9]$ 三种数值方法与真解的图像以及收敛阶 (二范数, 后面也是如此) 的图像.

图 1: t=2

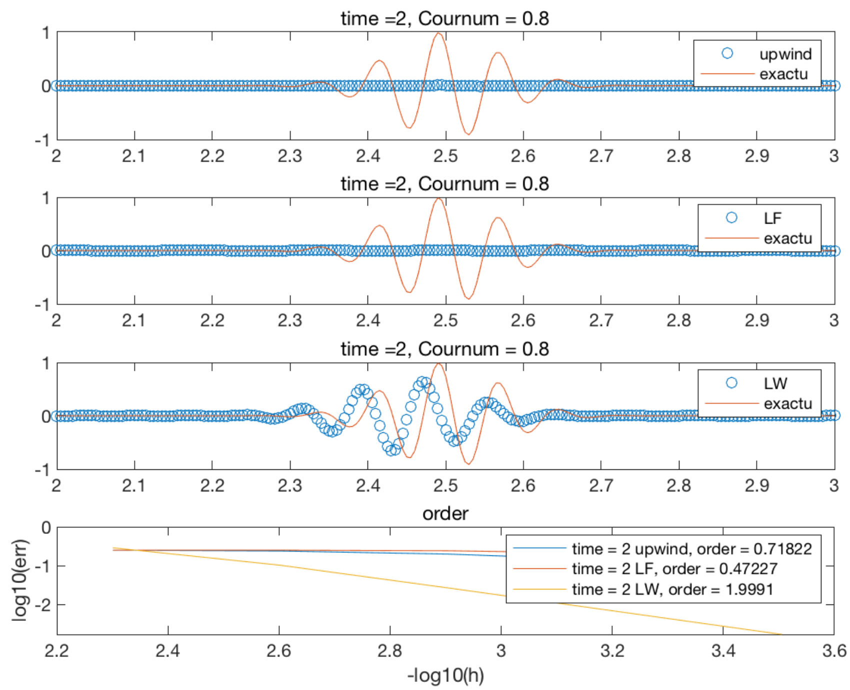

time =2, Cournum = 0.8
upwind
exactu
LF
LW
order
log10(err)
-log10(h)
time = 2 upwind, order = 0.71822
time = 2 LF, order = 0.47227
time = 2 LW, order = 1.9991

图 2: t=4

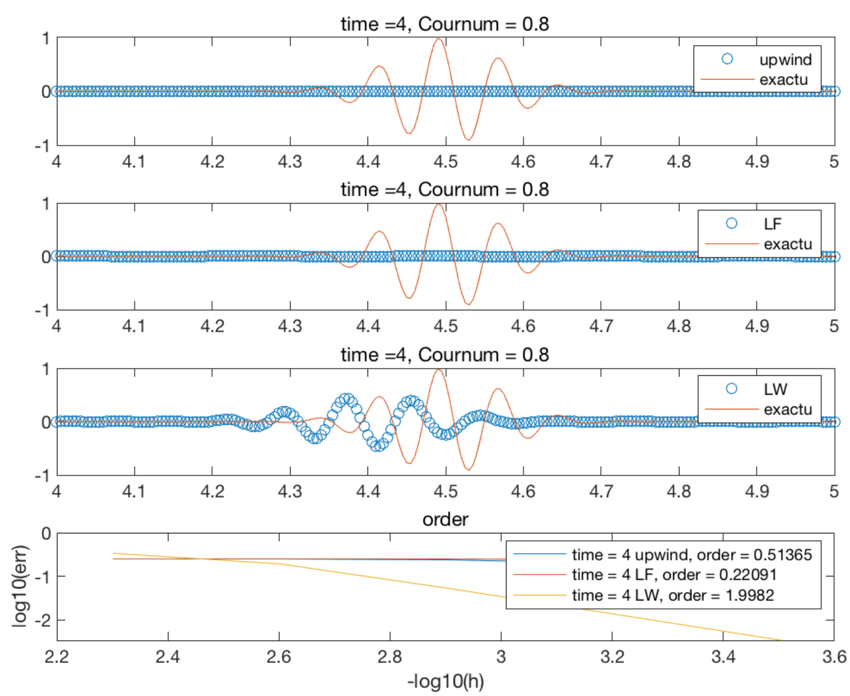
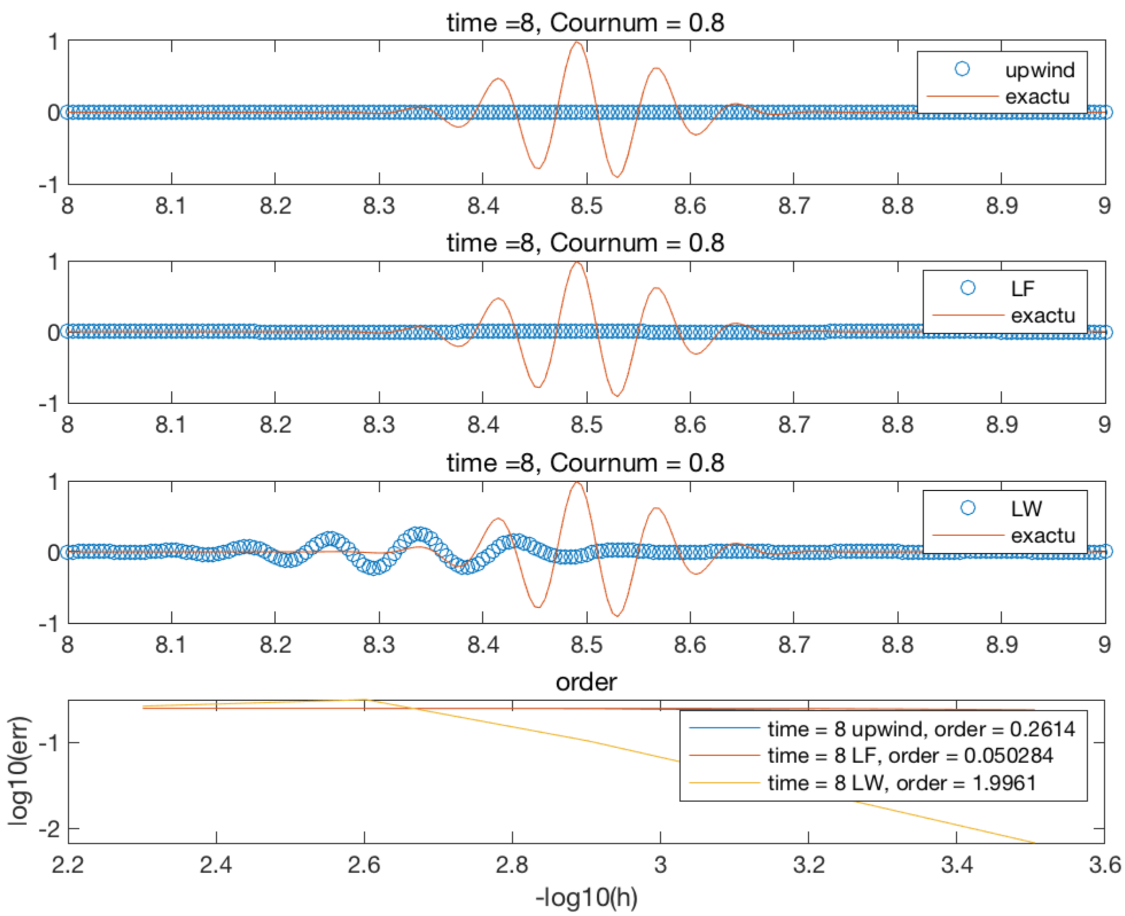

time =4, Cournum = 0.8
upwind
exactu
LF
LW
order
log10(err)
-log10(h)
time = 4 upwind, order = 0.51365
time = 4 LF, order = 0.22091
time = 4 LW, order = 1.9982

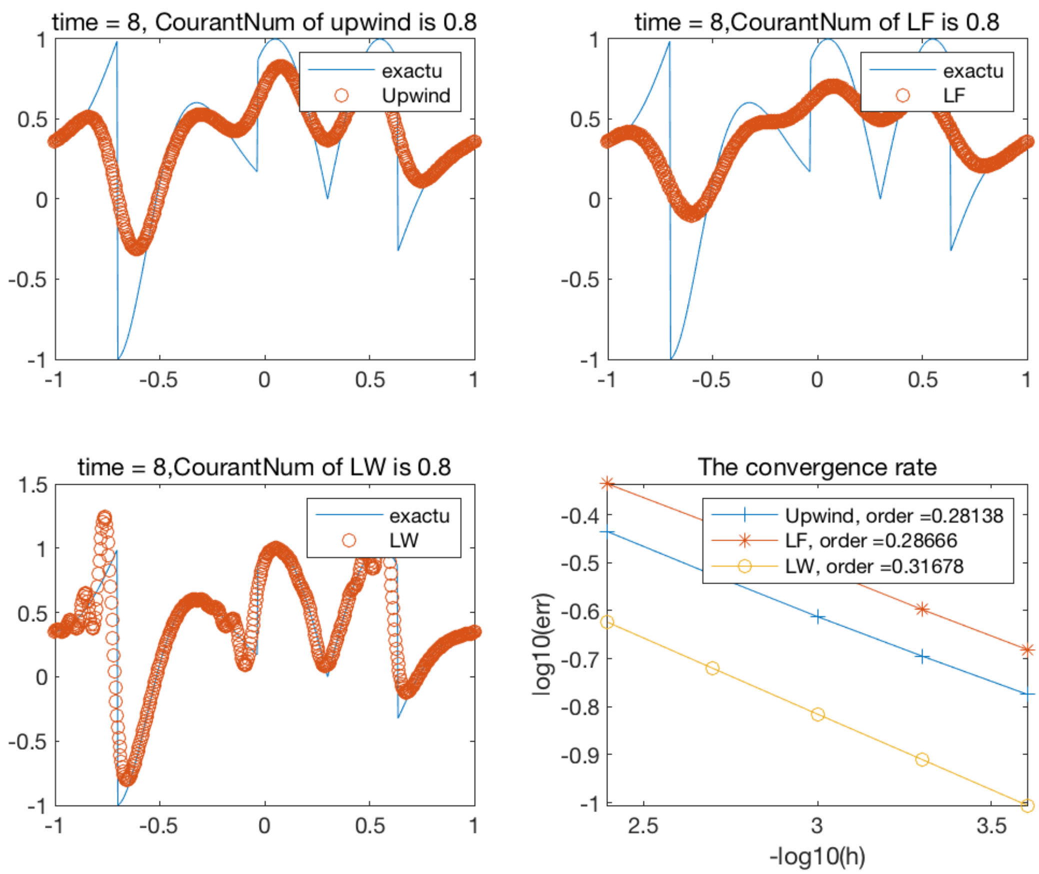
图 3: t=8


time =8, Cournum = 0.8
upwind
exactu
time =8, Cournum = 0.8
LF
exactu
time =8, Cournum = 0.8
LW
exactu
order
time = 8 upwind, order = 0.2614
time = 8 LF, order = 0.050284
time = 8 LW, order = 1.9961
log10(err)
-log10(h)

3.2 Example2

同样其 exact solution 为:$u(x,t) = u_0(x-t)$,$u_0(x)$ 在 subsection 1.2 中给出. 其边界为周期为 2 的边界, 绘制在 $t=8$ 时的图像为:

图 4: t=8



3.3 Example3

这是周期边界, 取 $h=\pi/100, \tau=0.5h$, 直接绘制其图像为

图 5: t=0.9

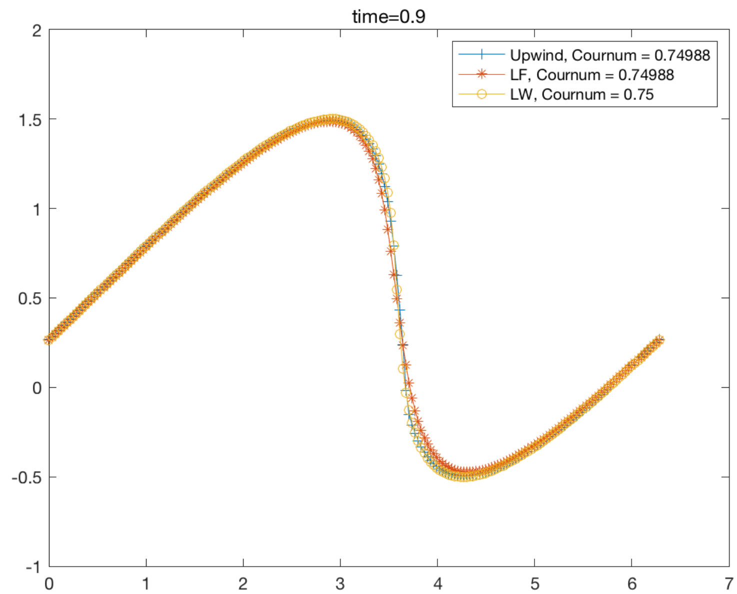
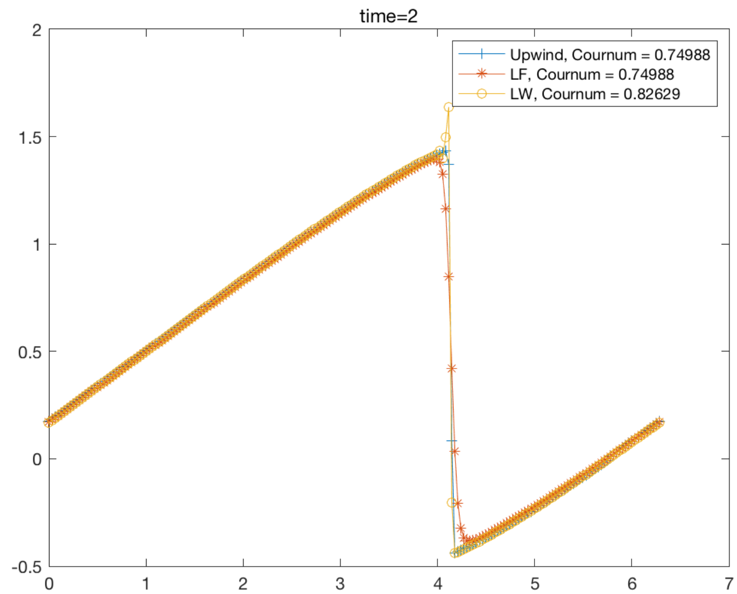


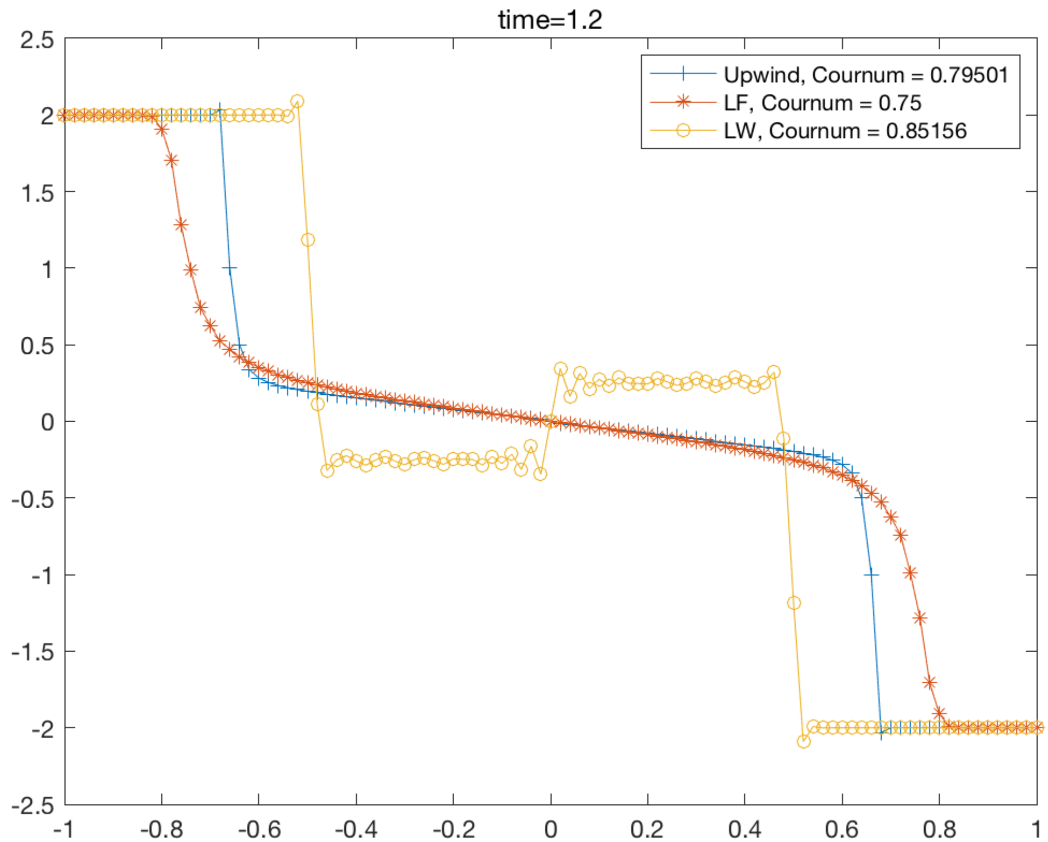
图 6: t=2



3.4 Example4

这是固定边界, 计算区间取 $I = [-1, 1]$, 初始区间取 $I_0 = [-10, 10], h = 20/1000, \tau = 0.25h$. 直接绘制其图像为

图 7: t=8



4 结果分析

这里有些有趣的现象. 对于 Example1,2 我们知道其真解, 故可以进一步分析一下其收敛阶. 对于 Example3,4 我们可以对解的性质做一些分析。

4.1 线性格式的 l^2 收敛性分析

这里的格式都是单步法, 对单步法我们有如下结论 [1]: 对于 $\tau = \Lambda(h)$, accurate of order $[r, \rho]$, 且 $\rho \leqslant \rho$, 的稳定的单步法格式, 我们有如下逼近结论:

$$\|u(\cdot, t_n) - u^n\|_2 \begin{cases} \leqslant C_T h^r \|u_0\|_{H^\rho}, & \rho > 1/2, u_0 \in H^\rho \\ \leqslant C'_T h^\beta \|u_0\|_{H^\sigma}, & \sigma > 1/2, \beta = \frac{\sigma r}{\rho}, \sigma < \rho, u_0 \in H^\sigma \\ C''_T h^{\beta_0} |\ln h|^{1/2} C(u_0), & \sigma 1/2, \sigma_0 \geqslant 1/2, \|u\|_{H^\sigma} \leqslant \frac{C(u)}{\sqrt{\sigma_0 - \sigma}} \end{cases}$$

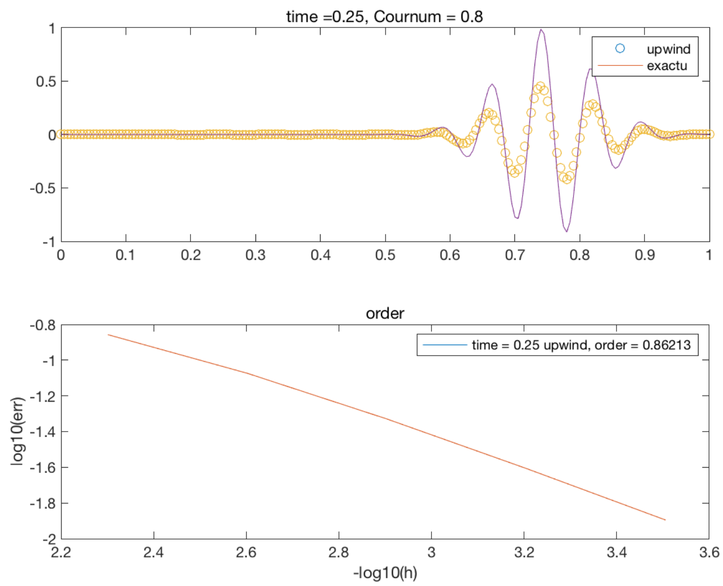
而又有可知 Upwind, Lax-Friedrichs 的 order 是 [1,2], Lax-Wendroff 的是 [2,3]. Example1 是光滑的连续的震荡解, Example2 是不连续的震荡解. 为进一步分析其收敛情况, 我们将其误差以及收敛阶取出，绘制成如下图表.

表 1: Upwind method 收敛性表

Example1	t=2	h:	5.00e-03	2.50e-03	1.25e-03	6.25e-04	3.13e-04
		err	2.49e-01	2.38e-01	1.98e-01	1.39e-01	8.44e-02
		rate	-	0.07	0.26	0.51	0.72
	t=4	h:	5.00e-03	2.50e-03	1.25e-03	6.25e-04	3.13e-04
		err	2.50e-01	2.49e-01	2.38e-01	1.98e-01	1.39e-01
		rate	-	0.01	0.07	0.26	0.51
	t=8	h	5.00e-03	2.50e-03	1.25e-03	6.25e-04	3.13e-04
		err	2.50e-01	2.50e-01	2.49e-01	2.38e-01	1.98e-01
		rate	-	0.00	0.01	0.07	0.26
Example2	t=2	h:	4.00e-03	2.00e-03	1.00e-03	5.00e-04	2.50e-04
		err	2.45e-01	2.03e-01	1.68e-01	1.41e-01	1.18e-01
		rate	-	0.27	0.27	0.26	0.25
	t=4	h:	4.00e-03	2.00e-03	1.00e-03	5.00e-04	2.50e-04
		err	2.98e-01	2.45e-01	2.02e-01	1.68e-01	1.41e-01
		rate	-	0.29	0.28	0.26	0.26
	t=8	h:	4.00e-03	2.00e-03	1.00e-03	5.00e-04	2.50e-04
		err	3.67e-01	2.99e-01	2.44e-01	2.02e-01	1.68e-01
		rate	-	0.30	0.29	0.27	0.26

对于 Example1, 为了捕捉解的震荡中心, 我们选择的计算区域在 t 时刻是 $[t, t+1]$(因为中心为 $t+0.5$), 也是在这个区域求误差的. 这样咋一看 Example1 的收敛性结果让人很吃惊 (让我很困惑), 本来是光滑解, 为什么收敛阶会如此差，甚至随着时间增大, 根本几乎没有阶了! 但是结合其图像不难发现数值解根本趋于 0，而且每次选择的计算区域也不同，为此我们固定计算区域为 [0,1], 在小时间 $t = 0.25$ 观察其收敛性结果, 得到的数值解图像与收敛阶如下图:

图 8: t=0.25



可以看出此时的收敛阶和理论相符合，而且随着 t 时间的增大, 若只在这个固定区间考虑, 其误差下降很快, 在 $t = 2$ 时误差量级就是 1e-12. 对 Lax-Friedrichs 格式也是如此.

对第二个例子, 由于初值是不光滑的, 而且我们可以从格式反推其 σ 略大于 0.5 的样子. 后面 LF 和 LW 格式也印证了这件事。

再回到 Example1, 我们观察其中心波的情况，可以发现随着时间增加,Upwind 与 LF 格式的数值解，其高频震荡解消磨的速度比 LW 格式快很多，值得一提的是 LW 虽然波包有滞后效应，而且高频震荡也在逐渐减弱, 但是其仍二阶收敛。

4.2 守恒型格式的激波间断

对于对于标量守恒律问题 Example3,4, 记 $a(u) = f'(u)$, 我们可以隐式给出解的表达

$$u(x,t) = u_0(x - a(u(x,t))t)$$

也即是解沿着特征线:$x(t) = x_0 + a(u_0(x_0))t$ 传播. 对于光滑初值问题 Example3, 我们有

$$a'(u_0)u_0'(x_0) = \cos(x_0),$$

在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, 是小于 0 的, 故解会有爆破, 且爆破时间为:

$$t_* = \min_{x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} \{-\frac{1}{a'(u_0)u_0'(x_0)}\} = 1$$

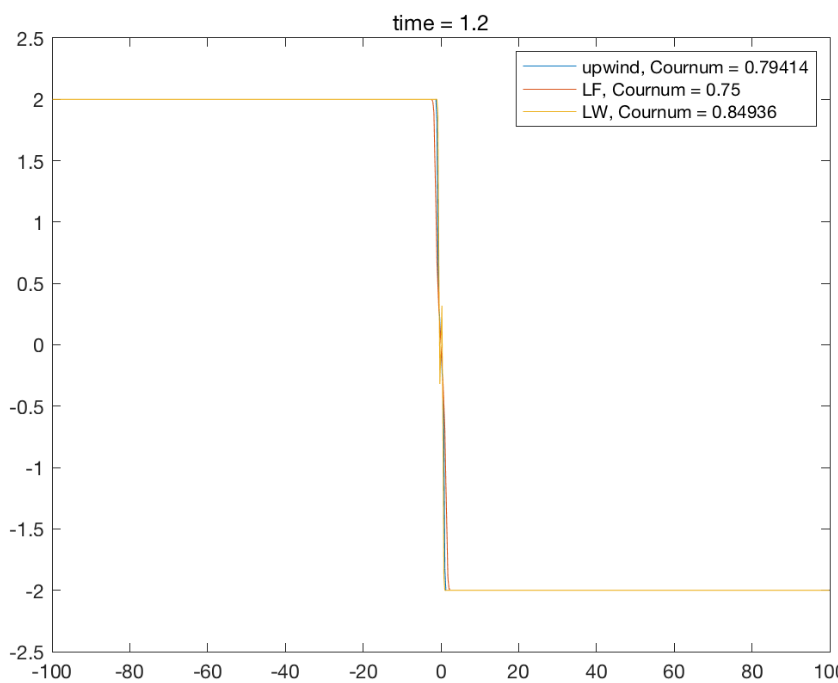
从数值解上也可以看出在 $t = 0.9$ 的时候解是光滑的, 但在 $t = 2$ 时, 解就出现间断了，而且 LW 格式比 Upwind 和 LF 格式的震荡要剧烈。

对于 Example4 中初值不连续的 u_0, 其 $a(u) = u^3 - 2.5u$, 特征线传播, 进一步有:

$$a_L = 3, a_R = -3$$

故这是激波. 再由 RH 条件可知其激波速度为:$s = \frac{f_L - f_R}{u_L - u_R} = 0$. 在 $t = 1.2$ 时, 数值解从小范围 $[-1, 1]$ 来看解有变动, 我们扩大范围看有

图 9: t=8



从大范围来看是符合的。

4.3 代码说明

本次提交代码文件分别包括 main.m, UpWindCIR.m, LaxFriedrichs.m 等 10 个文件，具体说明参见 Readme.txt.

参考文献

[1] (S) Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (Chapter 10), Chby John C. Strikwerda