# 差分方法 II

## lab1

## Wide stencil finite difference method 算例

陈伟

1901110037

2020 年 5 月 14 日

## 目录

# 1 问题描述

用宽模版的有限差分法求解 2D 的 Monge-Ampère 方程:

$$\begin{cases} \det D^2 u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中计算区域为单位正方形, 也即是 $\Omega = (0,1)^2$. 令 $\boldsymbol{x} = (x,y)^T, \boldsymbol{x}_0 = (0.5, 05)$. 对于如下三个例子进行数值实验:

- Smooth and radial example:

$$u(\boldsymbol{x}) = \exp(|\boldsymbol{x}|^2/2), \quad f(\boldsymbol{x}) = (1+|\boldsymbol{x})|^2 \exp(|\boldsymbol{x}|^2).$$

- $C^1$ example:

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left((|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| - 0.2)^+\right)^2, \quad f(\boldsymbol{x}) = \left(1 - \frac{0.2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right)^+.$$

- Twice differentiable in the interior domain, but has unbounded gradient near the boundary point $(1,1)$:

$$u(\boldsymbol{x}) = -\sqrt{2-|\boldsymbol{x}|^2}, \quad f(\boldsymbol{x}) = 2\left(2-|\boldsymbol{x}|^2\right)^{-2}.$$

边界 $g(\boldsymbol{x})$ 可以通过真解获得. 分别用 explicit solution method 和 Newton's method 来解这个离散的非线性方程. 报告中应包含不同模版的 $L^\infty$ 误差.

# 2 宽模版方法

令

$$\mathrm{MA}[\varphi](x_0) = \min_{(w_1,\cdots,w_d)\in V}\left[\prod_{i=1}^d \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_i^2}(x_0)\right)^+ - \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_i^2}(x_0)\right)^-\right]$$

在 $\varphi$ 是凸函数下有:

$$\mathrm{MA}[\varphi] = \det D^2\varphi$$

对于凸区域 $\Omega$, 以及网格剖分, 给定 $\boldsymbol{x}_h \in \Omega$, 以及方向 $\boldsymbol{e}$, 有 $\rho_\pm \in (0,1]$ 使得 $\boldsymbol{x}_h \pm \rho_\pm h\boldsymbol{e} \in \partial\Omega \cup \bar{\Omega}_h$. 当 $\boldsymbol{x}_h \pm h\boldsymbol{e}$ 落在 $\Omega_h$ 内部网格点时,$\rho_\pm$ 均为 1; 当落在外边界时,$\rho_\pm$ 为使得 $\boldsymbol{x}_h \pm \rho_\pm h\boldsymbol{e}$ 收缩回边界的比例. 令

$$\Delta_e u_h(x_h) = \frac{2}{(\rho_+ + \rho_-)|e|^2 h^2}\left[\frac{u_h(x_n+\rho_+ he) - u_h(x_h)}{\rho_+} - \frac{u_h(x_h) - u_h(x_n - \rho_- he)}{\rho_-}\right]$$