

并行上机作业 2 Report

陈伟

1901110037

1 问题重述

用 OpenMP 编写程序计算 π , 必须利用如下数值积分公式:

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

要求:

1. 数值积分所用离散点个数 $n \leq 111111$ (六个 1);
2. 可自选并行策略, 可自选 OpenMP 中任意并行方式;
3. 规定数据类型用 double 或者 long double;

2 并行策略

若有 n 个线程, 我们可以考虑将积分区间 $[0, 1]$ 作 n 等划分, 并将其分给对应的线程, 使其每个线程在每个区间上作数值积分, 再将结果累加起来, 这样我们采用静态分配任务的方式, 分配的粒度 chunk 为 1.

3 数值积分算法

由于 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 会在 x 靠近于 1 的地方数值积分出现较大的波动, 因此我们采用自适应的辛普森数值积分方法. 即

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

记 $S_{[a,b]} = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$, 有:

$$\int_a^b f(x) dx = S_{[a,b]} - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_0)$$

进而若记 $c = \frac{a+b}{2}$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = S_{[a,c]} - \frac{h^5}{32} \frac{f^{(4)}(c_1)}{90} + S_{[c,b]} - \frac{h^5}{32} \frac{f^{(4)}(c_2)}{90}$$

在同一个小区间内我们有近似: $f^{(4)}(c_0) \approx f^{(4)}(c_1) \approx f^{(4)}(c_2)$, 这样有

$$S_{[a,b]} - (S_{[a,c]} + S_{[c,b]}) \approx \frac{15}{16} h^5 \frac{f^{(4)}(c_3)}{90}$$

即 $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$ 与真实积分值的误差约为 $S_{[a,b]} - (S_{[a,c]} + S_{[c,b]})$ 的 $1/15$. 这样取判断条件为

$$|S_{[a,b]} - (S_{[a,c]} + S_{[c,b]})| < 15 * TOL$$

为是否加密的标准. 这样我们算法如下:

算法 1 自适应辛普森算法

- (1). 用辛普森积分公式计算积分 $S_{[a,b]}$;
 - (2). 令 $c = (a + b)/2$, 辛普森积分公式计算积分 $S_{[a,c]}, S_{[c,b]}$;
 - (3). 判断 $|S_{[a,b]} - (S_{[a,c]} + S_{[c,b]})| < 15 * TOL$ 是否成立, 成立则输出结果, 否则进行 (4);
 - (4). 令 $a_1 = a, b_1 = c, a_2 = c, b_2 = b, TOL_1 = TOL/2, TOL_2 = TOL/2$, 分别对 $[a_1, b_1], TOL_1; [a_2, b_2], TOL_2$ 执行 (1).
-

4 数值结果

取误差 $TOL = 1e - 16$, 得到的结果如下:

Number of intervals = 69552

Number of threads = 2

pi is approximately 3.1415926535897976

Error is 4.440892e-15

Wall clock time = 0.003786

Number of intervals = 12670

Number of threads = 8

pi is approximately 3.1415926535897918

Error is 1.332268e-15

Wall clock time = 0.001509

Number of intervals = 8768

Number of threads = 16

pi is approximately 3.1415926535897905

Error is 2.664535e-15

Wall clock time = 0.000891

分析: 可以看出, 随着线程数增多, 所需要的区间逐渐减少. 而且并行策略降低了时间.