

差分方法 II

lab2

Oliker-Prussner method 算例

陈伟

1901110037

2020 年 6 月 28 日

目录

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | 问题描述 | 2 |
| 2 | 求解方法 | 3 |
| 2.1 | Oliker-Prussner method | 3 |
| 2.2 | 提升 $u_h^k(x_i)$ 方法 | 3 |
| 3 | 数值算例 | 6 |
| 3.1 | example1 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 光滑算例 | 6 |
| 3.2 | example2 $u \in W_\infty^2$ 分片光滑算例 | 7 |
| 3.3 | example3 $u \in W_p^2, p < 2$ 含有奇点算例 | 8 |
| 4 | 结果分析 | 9 |
| 4.1 | 误差收敛阶 | 9 |
| 4.2 | Perron iteration 过程收敛速度 | 9 |
| 5 | 代码说明 | 10 |

1 问题描述

用 Oliker-Prussner method 求解 2D 的 Monge-Ampère 方程:

$$\begin{cases} \det D^2 u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中计算区域为 $\Omega = (-1, 1)^2$. 令 $\mathbf{x} = (x, y)^T$. 对于如下三个例子进行数值实验:

- Smooth and radial example:

$$u(\mathbf{x}) = \exp(|\mathbf{x}|^2/2), \quad f(\mathbf{x}) = (1 + |\mathbf{x}|)^2 \exp(|\mathbf{x}|^2).$$

- Piecewise smooth solution:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 2|\mathbf{x}|^2 & |\mathbf{x}| \leq 1/2, \\ 2(|\mathbf{x}| - 1/2)^2 + 2|\mathbf{x}|^2 & |\mathbf{x}| \geq 1/2 \end{cases} \\ f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 16 & |\mathbf{x}| \leq 1/2 \\ 64 - 16|\mathbf{x}|^{-1} & |\mathbf{x}| \geq 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Singular solution $u \in W_p^2$ with $p < 2$::

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \begin{cases} x^4 + \frac{3}{2}x^{-2}y^2 & |y| \leq |x|^3 \\ \frac{1}{2}x^2y^{2/3} + 2y^{4/3} & |y| > |x|^3 \end{cases} \\ f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 36 - 9x^{-6}y^2 & |y| \leq |x|^3 \\ \frac{8}{9} - \frac{5}{9}x^2y^{-2/3} & |y| > |x|^3 \end{cases} \end{aligned}$$

边界 $g(\mathbf{x})$ 可以通过真解获得. 报告并且讨论:

- The convergence history of the discrete Perron iteration;
- Errors in L^∞ and convergence order w.r.t. the mesh sizes;
- Errors and convergence order in the discrete W_p^2 norms. Here, the discrete W_p^2 norm is defined by

$$\|v\|_{W_p^2(\mathcal{N}_h^I)}^p = \sum_{j=1}^4 \sum_{x_i \in \mathcal{N}_h^I} |\omega_i| \cdot |\Delta_{e_j} v(x_i)|^p$$

其中 $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e_3 = (1, 1)$, 与 $e_4 = (1, -1)$ 和

$$\Delta_e v(x_i) := \frac{v(x_i + he) - 2v(x_i) + v(x_i - he)}{|e^2| h^2}$$

ω_i 表示以 x_i 为心的单元集合.

2 求解方法

2.1 Oliker-Prussner method

目标: 对于给定的节点集合 $N_h = N_h^0 \cup N_h^\partial$, 且 N_h^0 是 translation invariant 的, 找凸的点值函数 u_h , 使得

$$|\partial u_h(x_i)| = f_i, \forall x_i \in N_h^0$$

其中 $f_i = \int_{\Omega_i} f(x) \phi_i(x) dx$, $\partial x_i \in N_h^0$, $\phi_i(x)$ 是 x_i 点的基函数。

算法 1 Oliker-Prussner method

STEP1: Initialization. 取 Λ, R 充分大, 考虑 $p(x) = \frac{\Lambda^{1/d}}{2}(|x|^2 - 2R^2)$, 令 $u_h^0 = N_h p$, Γ_h^0 为 N_h 下的 Delaunay triangulation. 上述 Λ, R 应满足

$$\begin{aligned} |\partial u_h^0(x_i)| &\geq f_i, \forall x_i \in N_h^0 \\ u_h^0 &\leq I_h^0 g \text{ on } \partial \Omega_h \end{aligned}$$

STEP2: 对于边界点循环, 令 $u_h^0(x_i) = g(x_i)$, 同时更新网格使得 Γ_h^0 是凸的, 对于能 Flip 的边, 直接 Flip, 不能 Flip 的边, 只能是平四边形, 提升还未提升的边界点 x_k 为 $g(x_k)$ 即可.

STEP3: 提升内部网格点 x_i 的值, 如果 u_h^k 已经计算好了, 而且对于 $j < i$, 的 $u_h^{k+1}(x_j)$ 也计算好了, 提升 $u_h^{k+1}(x_i)$, 使得

$$|\partial u_h^{k+1}(x_i)| = f_i$$

注意提升 x_i 的值的时候, 可能会引起网格变动, 我们需要变动网格 Γ_h^{k+1} , 使得其网格函数 $\Gamma_h^{k+1}(u_h^{k+1})$ 仍是凸函数, 但是总能提升 $u_h^{k+1}(x_i)$ 使得上式成立。关于提升方法我们后面提

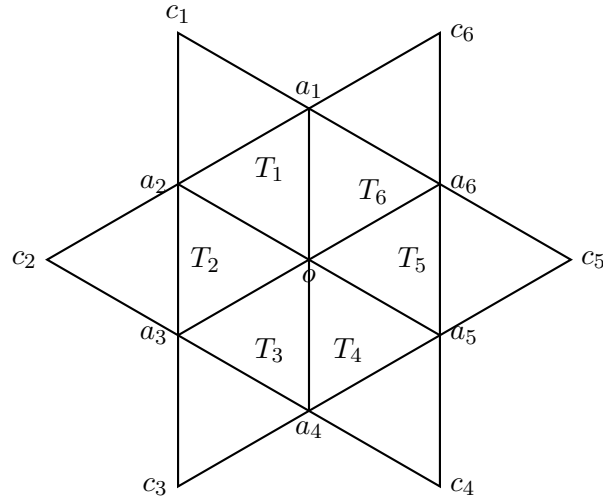
STEP4: 循环 STEP3 直到

$$\max_{x_i \in N_h^0} (|\partial u_h^{k+1}(x_i)| - f_i) < \text{Tol}$$

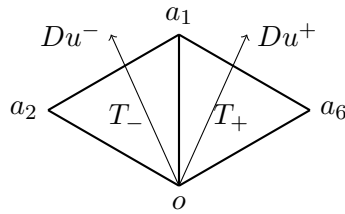
其中 Tol 为某个可允许误差.

2.2 提升 $u_h^k(x_i)$ 方法

考虑 x_i 为如下中心点 o



如果原来网格函数是凸的,则我们提升 o 点值后,可能会 jump 小于 0 的边是 $oa_1, oa_2, oa_3, \dots, oa_6$, 同时,我们也可以算出这些边 jump 为 0 时的 $u_h^k(x_i)$ 需要提升的值,分别记作 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$. 不妨设其中最小的一个为 θ_1 对应的边也即是 oa_1 , 我们先在 $[u_h^k(x_i), u_h^k(x_i) + \theta_1]$ 中找是否有使得 $|\partial u_h^{k+1}(x_i)| = f_i$ 成立的 $u_h^{k+1}(x_i)$, 为此我们要计算梯度凸包的面积, 为此我们先考虑如下相邻情况的梯度面积



假设我们 a_1, a_6, a_2 处的值已经给好, 并且

$$\begin{aligned}\widehat{Du}^+ &= u_h(a_6)D\lambda_6 + u_h(a_1)D\lambda_1|_{T_+} \\ \widehat{Du}^- &= u_h(a_2)D\lambda_2 + u_h(a_1)D\lambda_1|_{T_-}\end{aligned}$$

已经计算出, 这样我们有

$$\begin{aligned}Du^+ &= \widehat{Du}^+ + u_h(o)D\lambda_o|_{T_+} \\ Du^- &= \widehat{Du}^- + u_h(o)D\lambda_o|_{T_-}\end{aligned}$$

这样我们的这两个梯度形成的面积就是

$$\begin{aligned}
 S|_{oa_1} &= Du^+ \times Du^- \\
 &= u_h(o)^2 (D\lambda_o|_{T^+} \times D\lambda_o|_{T^-}) \\
 &\quad + u_h(o) \left(\widehat{Du}^+ \times D\lambda_o|_{T^-} + D\lambda_o|_{T^+} \times \widehat{Du}^- \right) + (\widehat{Du}^+ \times \widehat{Du}^-) \\
 &= A_{oa_1} u_h(o)^2 + B_{oa_1} u_h(o) + C_{oa_1}
 \end{aligned}$$

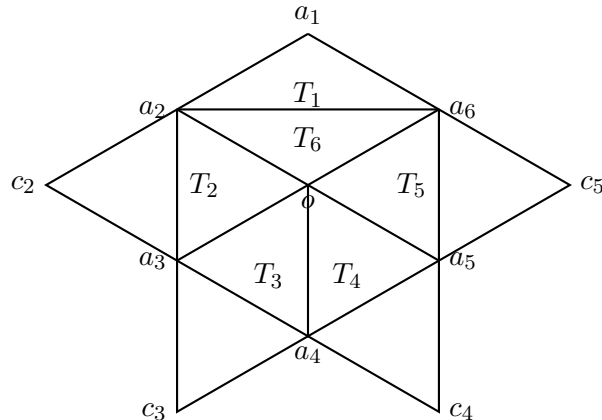
同样的方式我们把其它边上的两个相邻单元的梯度形成的三角形面积算出来，再加起来就有

$$S(u_h(o)) = Au_h(o)^2 + Bu_h(o) + C$$

也就是一个二次函数，下面我们求解方程：

$$S(x) = f_i$$

若存在 $x^* \in [u_h^k(x_i), u_h^k(x_i) + \theta_1]$ ，这我们提升 $u_h^k(x_i)$ 的值为 x^* 即可，否则我们提升其值为 $u_h^k(x_i) + \theta_1$ ，同时将 oa_1 flip，并重新找 x_i 相关联的单元重复上面的事情。对于有如下平四边形出现时



其中 T_2T_6 ，于 T_5T_6 形成的四边形都是平四边形，这也意味着 oa_2 与 oa_6 都不能被 flip。若 a_2, a_3, a_6, o 连同它们对应的值在三维空间中共面，也即是 oa_2 的 jump 为 0 了，这样我们不妨记在 T_2, T_6 上的梯度为 Du ，在 T_3, T_4, T_5 上的梯度为 Du_3, Du_4, Du_5 ，由连续性有 Du_3, Du_5 在 a_3a_6 上的分量都与 Du 在 a_3a_6 上的分量相同，这样 $Du_3 - Du_5$ 是与 a_3a_6 垂直的，同时

$$Du_3 - Du_5 = Du_3 - Du_4 + Du_4 - Du_5$$

等式右端前者是垂直 oa_4 指向 a_3 的, 后者是垂直 oa_5 指向 a_4 的, 这样两者正方向的线性组合得到的向方向不可能与 a_3a_6 的垂直方向相同, 除非 $Du_3 = Du_4 = Du_5$, 这也意味着这种情况下的次梯度面积为 0. 对于凹四边形也同理。这样当我们的 f_i 大于 0 时, 我们一定不会 flip 平四边形或凹四边形的情况!

3 数值算例

对三个例子取 Tol=1e-5, 正规网格剖分, 取 $h = 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$, 得到的结果如下, 其中图片 Perron iteration 过程横坐标是迭代次数, 纵坐标是 err 是

$$\text{err} = \max_{x_i \in N_h^0} |\partial u_h^k(x_i)| - f_i$$

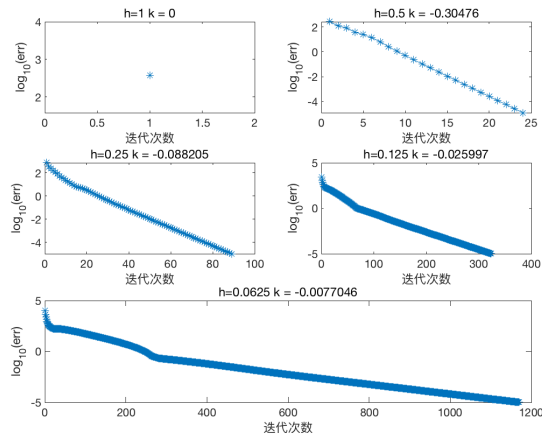
3.1 example1 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 光滑算例

取 $\Lambda = 25, R = 1.5$, 得到的结果如下

表 1: example1 光滑算例结果

| h | 迭代次数 | L^∞ | rate | W_1^2 | rate | W_2^2 | rate |
|------|------|------------|------|----------|-------|----------|------|
| 1 | 1 | 8.10e-02 | 0.00 | 9.72e-01 | 0.00 | 3.62e-01 | 0.00 |
| 1/2 | 24 | 2.59e-02 | 1.64 | 1.33e+00 | -0.46 | 3.12e-01 | 0.21 |
| 1/4 | 89 | 7.04e-03 | 1.88 | 6.31e-01 | 1.08 | 1.43e-01 | 1.12 |
| 1/8 | 324 | 1.87e-03 | 1.91 | 2.15e-01 | 1.55 | 4.81e-02 | 1.58 |
| 1/16 | 1170 | 8.82e-04 | 1.08 | 8.06e-02 | 1.42 | 1.53e-02 | 1.66 |

图 1: example1 算例 Perron iteration 过程



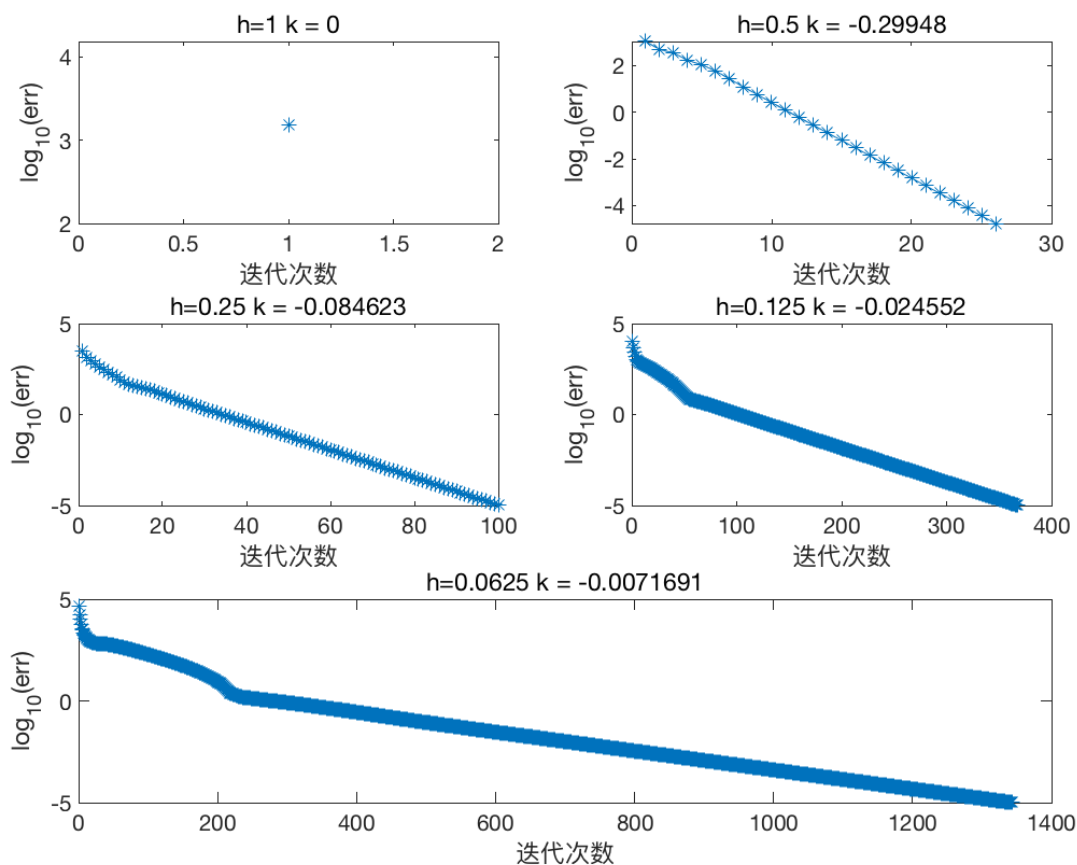
3.2 example2 $u \in W_\infty^2$ 分片光滑算例

取 $\Lambda = 100, R = 1.5$, 得到的结果如下

表 2: example2 分片光滑算例结果

| h | 迭代次数 | L^∞ | rate | W_1^2 | rate | W_2^2 | rate |
|------|------|------------|------|----------|------|----------|------|
| 1 | 1 | 2.07e-01 | 0.00 | 4.34e+00 | 0.00 | 1.22e+00 | 0.00 |
| 1/2 | 26 | 3.50e-02 | 2.56 | 3.04e+00 | 0.51 | 6.98e-01 | 0.81 |
| 1/4 | 100 | 1.47e-02 | 1.25 | 1.61e+00 | 0.92 | 4.05e-01 | 0.79 |
| 1/8 | 368 | 4.93e-03 | 1.58 | 9.04e-01 | 0.83 | 3.10e-01 | 0.38 |
| 1/16 | 1343 | 9.34e-04 | 2.40 | 1.45e-01 | 2.64 | 3.49e-02 | 3.15 |

图 2: example2 算例 Perron iteration 过程



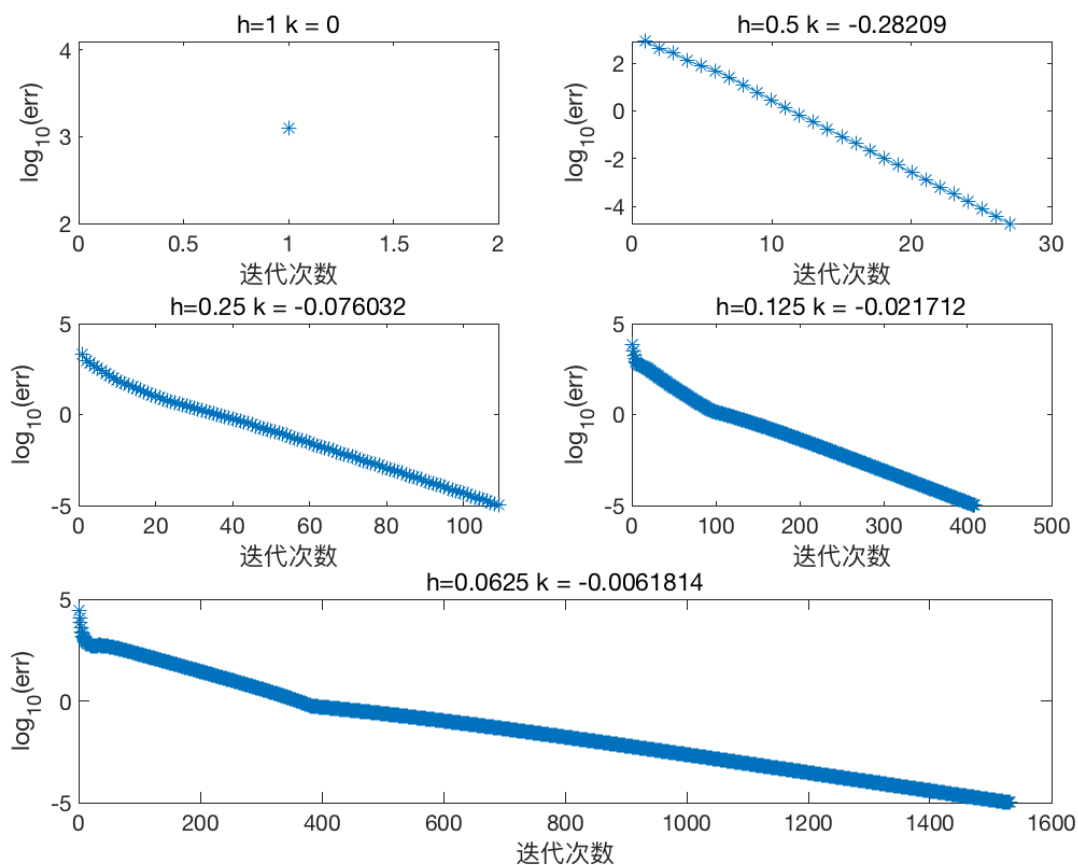
3.3 example3 $u \in W_p^2, p < 2$ 含有奇点算例

取 $\Lambda = 100, R = 1.5$, 得到的结果如下

表 3: example3 含有奇点算例结果

| h | 迭代次数 | L^∞ | rate | W_1^2 | rate | W_2^2 | rate |
|------|------|------------|------|----------|-------|----------|-------|
| 1 | 1 | 2.23e-01 | 0.00 | 5.36e+00 | 0.00 | 1.41e+00 | 0.00 |
| 1/2 | 27 | 1.31e-01 | 0.77 | 1.24e+01 | -1.21 | 2.97e+00 | -1.07 |
| 1/4 | 109 | 4.74e-02 | 1.46 | 1.15e+01 | 0.11 | 2.80e+00 | 0.09 |
| 01/8 | 408 | 1.56e-02 | 1.61 | 7.96e+00 | 0.54 | 2.42e+00 | 0.21 |
| 1/16 | 1531 | 7.42e-03 | 1.07 | 5.08e+00 | 0.65 | 2.10e+00 | 0.20 |

图 3: example3 算例 Perron iteration 过程



4 结果分析

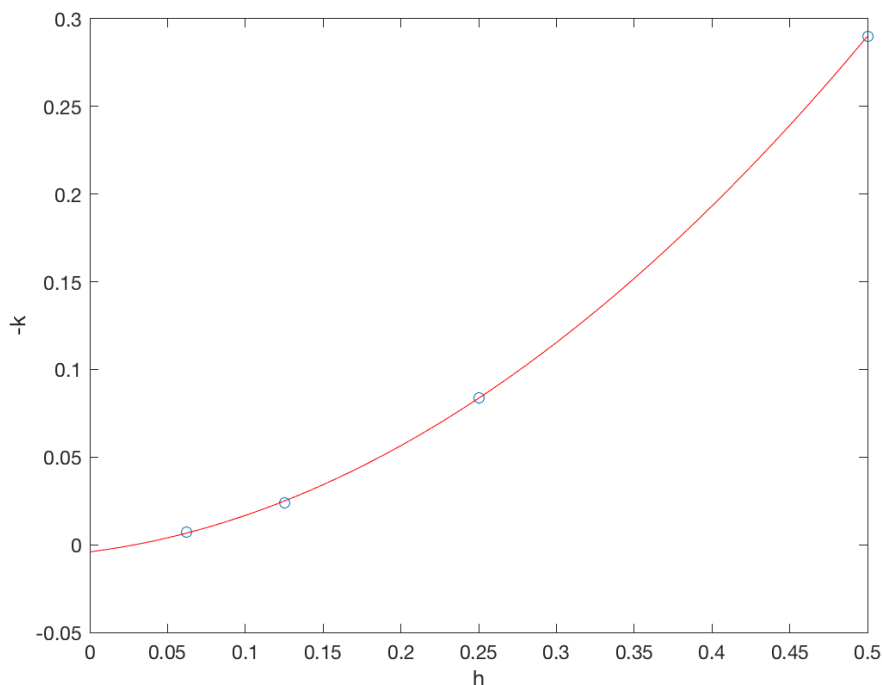
4.1 误差收敛阶

从我们的数值结果来看, 对于光滑例子 example1 的 L^∞ 误差, 我们大概有二阶收敛性, 其 W_1^2, W_2^2 误差大概有 1.5 阶左右的样子。对于分片光滑例子 example2, 其 L^∞ 误差结果不太清晰, 但大概还是有 1.5 阶左右的样子, 其 W_1^2, W_2^2 大概在 1 阶左右的样子。对于含有奇点的例子 example3, 其 L^∞ 误差大概在 1.5 阶左右, 其 W_1^2 大概是 0.5 阶, 其 W_2^2 大概在 0.2 阶的样子。

4.2 Perron iteration 过程收敛速度

三个算例中 Perron iteration 过程是相似的, 可以看出 $\log_{10}(err)$ 关于迭代次数大致是线性下降的, 而对于其下降斜率 $-k$, 大致又和 h^2 是线性关系的, 我们用线性函数来拟合, 得到的结果为对

图 4: Perron iteration 过程下降斜率 $-k$ 与 h 的关系



应的二次函数为

$$k = -(0.9511h^2 + 0.1127h - 0.0041) = -p(h)$$

这样我们有:

$$\frac{err(i+1)}{err(i)} = 10^k = 10^{-p(h)}$$

5 代码说明

本次程序使用 matlab 编写，包含 main.m 和 Readme.txt 等在内一共有 20 个文件，在文件夹 ‘matlabcode’ 中. 关于各文件的含义以及 main.m 的运行参见 Readme.txt.