

## CFD 上机报告 II

陈伟

1901110037

2020 年 4 月 30 日

### 目录

|          |                             |          |
|----------|-----------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>问题描述</b>                 | <b>1</b> |
| 1.1      | Example1. 初值问题 . . . . .    | 2        |
| 1.2      | Example2. 初边值问题 . . . . .   | 2        |
| <b>2</b> | <b>守恒型差分格式</b>              | <b>2</b> |
| 2.1      | Lax-Friedrichs 格式 . . . . . | 2        |
| 2.2      | Lax-Wendroff 格式 . . . . .   | 3        |
| 2.3      | Remark . . . . .            | 3        |
| <b>3</b> | <b>数值实验</b>                 | <b>4</b> |
| 3.1      | Example1 . . . . .          | 4        |
| 3.2      | Example2 . . . . .          | 6        |
| <b>4</b> | <b>结果分析</b>                 | <b>7</b> |
| 4.1      | 代码说明 . . . . .              | 7        |

### 1 问题描述

1. 程序实现一维完全气体 Euler 方程组的 Lax-Friedrichs 格式和 Lax-Wendroff 格式. 尝试用程序计算讲义“CFDLectt04-com01\_cn.pdf”第 101 页的问题 2 和第 102 页的问题 4.

Euler 方程组:

$$\begin{cases} \left( \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \right)_t + \left( \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} \right)_x = 0, \\ p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2), \gamma = 1.4. \end{cases}$$

### 1.1 Example1. 初值问题

初始条件:

$$U = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.3 \\ (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.3 \end{cases}$$

计算区间为  $[0, 1]$ , 输出时刻  $t = 0.2$ .

### 1.2 Example2. 初边值问题

初始条件:

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & x \geq -4 \end{cases}$$

计算区间为  $[-5, 5]$ , 其中在  $x = \pm 5$  边界处  $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$ . 输出时刻为  $t = 1.8$ .

## 2 守恒型差分格式

记  $\lambda = \tau/h$ , 对守恒型方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

采用守恒型的格式:

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \lambda(\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n - \hat{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n)$$

其中  $\mathbf{u}_j$  可以是在  $x_j$  点  $\mathbf{u}$  的插值, 也可以是在  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  上  $\mathbf{u}$  的积分平均.

### 2.1 Lax-Friedrichs 格式

其通量函数为:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LF}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})}{2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{2}$$

对应的数值通量为:

$$\begin{cases} \hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}_{LF}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}) \\ \hat{f}_{j-1/2} = \hat{f}_{LF}(\mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j) \end{cases}$$

## 2.2 Lax-Wendroff 格式

其通量函数为:

$$\hat{f}_{LW}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})}{2} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{a} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} \right) (\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}))$$

其中  $\mathbf{a}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$ . 对应数值通量为:

$$\begin{cases} \hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}_{LW}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}) \\ \hat{f}_{j-1/2} = \hat{f}_{LW}(\mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j) \end{cases}$$

## 2.3 Remark

- 取  $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, E)^T$ , 以及  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p))^T$ , 并记  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ , 与  $H = \frac{E + p}{\rho}$ , 对应的有:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3)u^2/2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma E u}{\rho} + (\gamma - 1)u^3 & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3(\gamma - 1)u^2}{2} & \gamma u \end{pmatrix}$$

对应的特征值和特征向量为:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u - c & & \\ & u & \\ & & u + c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{pmatrix}$$

其中 1, 3 特征值对应的是真正非线性的, 2 特征值对应的是线性退化的.

- 上述格式均要求其 Courant number:  $\nu = \|\lambda(\mathbf{a})\|_{\infty} r$  小于或者等于 1 才稳定; 也即是

$$\|u \pm c\|_{\infty} r \leq 1$$

- 由于实际计算只能计算  $x$  方向的有限区域的值, 而对于给定的点  $x_0$ , 由特征线法可以知道其有有限的依赖域, 故对于在  $t$  时刻要计算的给定区间  $[a, b]$ , 我们只要找出其在初始时刻依赖的有限区间, 并取定一个包含改初始依赖区间的区间  $[c, d]$ , 这样在固定其左右端点值, 我们直接用

上述方法计算, 就能得到在区间  $[a, b]$  的数值结果.

- 对于初边值问题, 如第二个例子中的  $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$ , on  $x = \pm 5$ ,  $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2$ , 故  $E_x = 0$  on  $\pm 5$ , 故有:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u})_x &= \begin{pmatrix} \rho_x u + \rho u_x \\ \rho_x u^2 + 2\rho u u_x + p_x \\ u_x(E + p) + u(E_x + p_x) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

进而  $u(t, \pm 5) = u(0, \pm 5)$

- 对于上述两个计算例子, 我们可以先计算出  $\mathbf{u}$ , 再通过  $\mathbf{u}$  去求得其他物理量. 对于要计算  $t$  时刻的物理量, 我们要求条件数

$$CFL = \max\{\|u + c\|_\infty r, \|u - c\|_\infty r\} \leq 1$$

为此不能像之前那样同时固定  $\tau, h$  (因为不知道什么时候  $\|u \pm c\|_\infty$  取最大), 为此我们可以固定  $h$ , 固定  $CFL$  数, 然后在当前层的基础上去确定  $\tau_n$ , 最后使得  $\sum_n \tau_n = t$ .

### 3 数值实验

#### 3.1 Example1

取  $h = 0.001, CFL = 0.8$ , 两种格式分别得到  $\rho, u, p$  的图像为:

图 1:  $t=0.2$

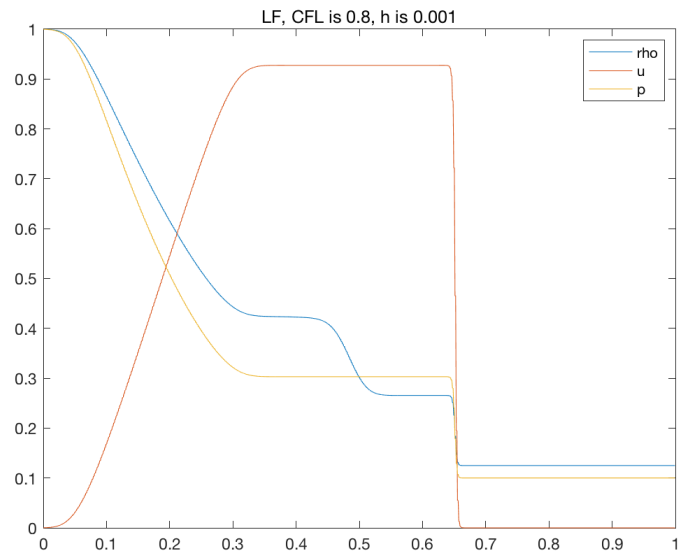
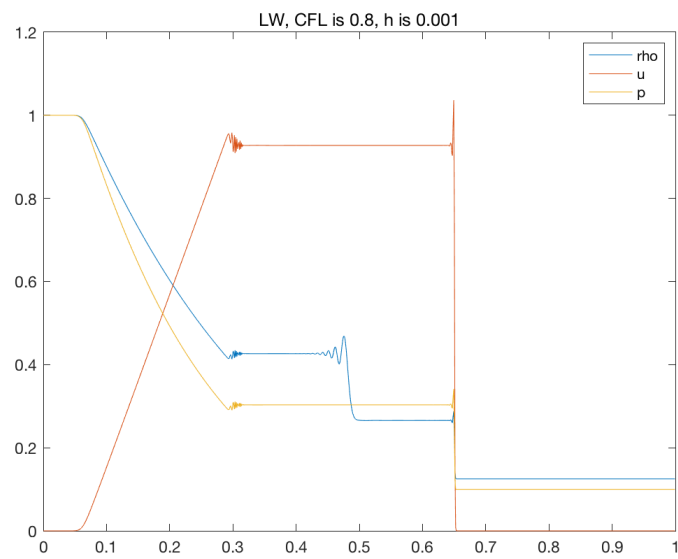


图 2:  $t=0.2$



### 3.2 Example2

取  $h = 0.001$ ,  $CFL = 0.8$ , 两种格式分别得到  $\rho, u, p$  的图像为:

图 3:  $t=1.8$

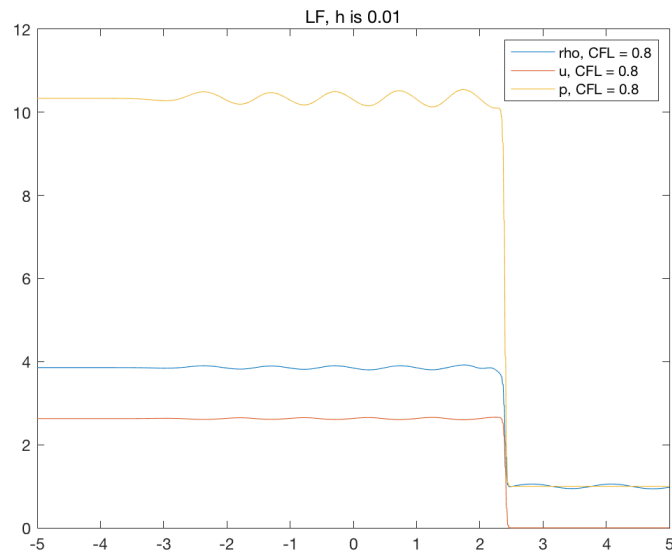
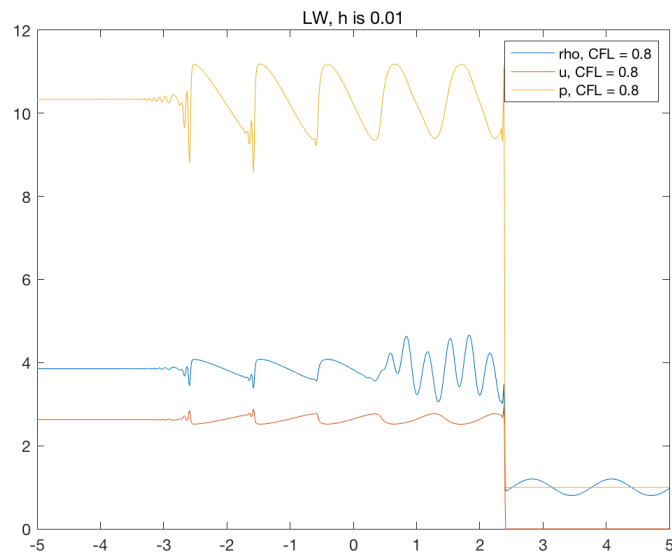


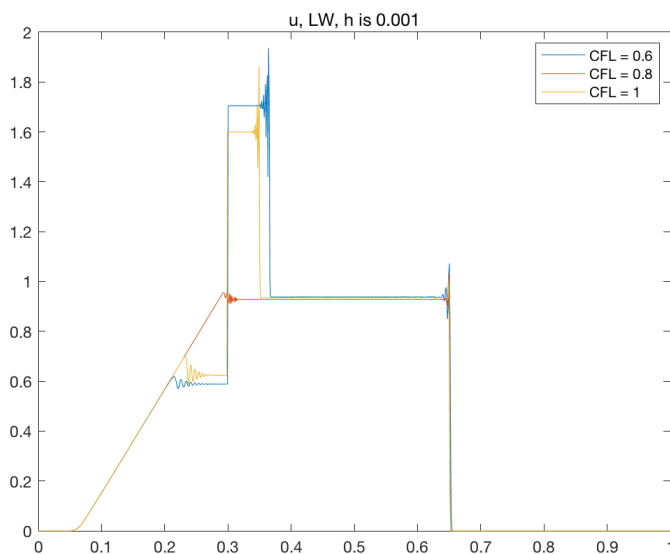
图 4:  $t=1.8$



## 4 结果分析

可以看出, Lax-Wendroff 格式有很明显的数值震荡。而且对于 example1, 不同的 CFL 数对数值解有很明显的影响, 在不同 CFL 数下将  $u$  的解如下:

图 5:  $t=0.2$



甚至在  $CFL = 0.5$  或者更小的情况下数值结果出现了 NAN 的现象, 仔细发现是其中  $p$  出现了负数的情况 (不太明白为什么). 但是对于 Lax-Friedrichs 格式却没有这样的现象。对于 example2, Lax-Wendroff 格式虽然有的数值震荡, 但是却没有 example1 中那样严重的数值偏离, 而且对于  $CFL = 0.5$  甚至更小也是可以计算的。

### 4.1 代码说明

本次提交代码文件分别包括 main.m, ConservativeFormatt.m, Readme.txt 等 5 个文件, 具体说明参见 Readme.txt.