有限元方法 II 上机报告 (二)

陈伟 1901110037

对于选择的基底不同, 二维的 de Rham complex 有

$$\mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} (C^\infty(\Omega))^2 \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega) \longrightarrow 0$$

or

$$\mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} (C^\infty(\Omega))^2 \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega) \longrightarrow 0$$

其中

$$\operatorname{curl} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad \operatorname{rot} \underset{\sim}{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

也即是 $\operatorname{rot} \underset{\sim}{v} = \operatorname{div}\left(\underset{\sim}{v}^\perp\right)$, and $(\operatorname{grad} v)^\perp = \operatorname{curl} v$.

Problem 1

问题描述

对给定的计算区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 考虑向量 Laplace 方程

$$\operatorname{curl} \operatorname{rot} \underset{\sim}{u} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

与边界条件

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u} = 0, \quad \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{2}$$

或者

$$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n} = 0, \quad \operatorname{rot} \underset{\sim}{u} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{3}$$

其中 $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = u_1 n_2 - u_2 n_1$.

混合形式

上述方程也即是

$$(d\delta+\delta d)\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f}, \qquad in\ \Omega$$

$$tr(\star\underset{\sim}{u})=tr(\star \mathrm{d}\underset{\sim}{u})=0, \qquad on\ \partial\Omega$$

由 $< dw,\eta > = < w,\delta\eta > + < trw, tr(\star\eta) >_{\partial\Omega}$, 故令 $\sigma=\delta\underset{\sim}{u}\in H\Lambda^0$, 则有

$$\begin{aligned} < \sigma,\tau > &= < \underset{\sim}{u}, d\tau > - < tr\tau, tr(\star\underset{\sim}{u}) >_{\partial\Omega} \\ &= < \underset{\sim}{u}, d\tau >, \quad \forall\tau\in H\Lambda^0 \end{aligned}$$

对应的

$$\begin{aligned} < \underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v} > &= < \sigma,\underset{\sim}{v} > + < \delta d\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v} > \\ &= < \sigma,\underset{\sim}{v} > + < d\underset{\sim}{u}, d\underset{\sim}{v} > - < tr(\underset{\sim}{v}), tr(\star d\underset{\sim}{u}) > \\ &= < \sigma,\underset{\sim}{v} > + < d\underset{\sim}{u}, d\underset{\sim}{v} >, \quad \forall\underset{\sim}{v}\in\mathfrak{H}^{1,\perp} \end{aligned}$$

故也即是

$$\begin{aligned} \langle\sigma,\tau\rangle &= \langle \mathrm{d}\tau,\underset{\sim}{u}\rangle, \quad \tau\in H\Lambda^0(\Omega) \\ \langle \mathrm{d}\sigma,\underset{\sim}{v}\rangle+\langle \mathrm{d}\underset{\sim}{u},\mathrm{d}\underset{\sim}{v}\rangle &= \langle\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v}\rangle, \quad v\in\mathfrak{H}^{1,\perp} \\ \langle\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{q}\rangle &= 0, \quad \underset{\sim}{q}\in\mathfrak{H}^1 \end{aligned}$$

特别当取 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 上当单连通区域时,$\mathfrak{H}^1=0$, 故 $\mathfrak{H}^{1,\perp}=H\Lambda^1$

现取基底为 $(dx_2,-dx_1)$, 对应的 de Rham complex 即是

$$\mathbb{R}\longrightarrow C^\infty(\Omega)\xrightarrow{\text{curl}}(C^\infty(\Omega))^2\xrightarrow{\text{div}}C^\infty(\Omega)\longrightarrow 0$$

$$\mathbb{R}\longleftarrow C^\infty(\Omega)\xleftarrow{\text{rot}}(C^\infty(\Omega))^2\xleftarrow{\text{-grad}}C^\infty(\Omega)\longleftarrow 0$$

令 $\sigma=\mathrm{d}\underset{\sim}{u}=\mathrm{rot}\underset{\sim}{u}$, 故对于 (2) 形式的边界条件下的混合形式即为

$$\begin{aligned} \langle\sigma,\tau\rangle &= \langle \mathrm{curl}\tau,\underset{\sim}{u}\rangle, \quad \tau\in H(\mathrm{curl}) \\ \langle \mathrm{curl}\sigma,\underset{\sim}{v}\rangle+\langle \mathrm{div}\underset{\sim}{u},\mathrm{div}\underset{\sim}{v}\rangle &= \langle\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v}\rangle, \quad v\in H(\mathrm{div}) \end{aligned}$$

取基底为 (dx_1, dx_2) 时, 对应的 de Rham complex 即是

$$\mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} (C^\infty(\Omega))^2 \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega) \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{R} \longleftarrow C^\infty(\Omega) \xleftarrow{\text{-div}} (C^\infty(\Omega))^2 \xleftarrow{\text{curl}} C^\infty(\Omega) \longleftarrow 0$$

令 $\sigma = \mathrm{d}\underset{\sim}{u} = -\mathrm{div}\underset{\sim}{u}$, 故 (3) 形式边界条件下的混合形式即为

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \mathrm{grad}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle, \quad \tau \in H(\mathrm{grad}) \\ \langle \mathrm{grad}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{rot}\underset{\sim}{u}, \mathrm{rot}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle, \quad v \in H(\mathrm{rot}) \end{aligned}$$

精确解 $\underset{\sim}{u}$

对于边界条件 (2), 考虑满足 $\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}) = 0,\ in\ \Omega, \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = 0,\ on\ \partial\Omega$ 取

$$\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} -\cos 2\pi x \sin 2\pi y \\ \sin 2\pi x \cos 2\pi y \end{pmatrix}$$

其对应的 $\underset{\sim}{f} = 8\pi^2 \underset{\sim}{u}$ 与 $\sigma = 4\pi \cos 2\pi x \cos 2\pi y$. 对于边界条件 (3), 考虑取 $\underset{\sim}{u} = (\sin 2\pi x \cos 2\pi y, \cos 2\pi x \sin 2\pi y)^T$ 即可. 我们下面考虑边界条件 (2) 的情况. 此时大的双线性形为:

$$\begin{gathered} \text{Find } (\underset{\sim}{u}, \sigma) \in H(\mathrm{div}) \times H(\mathrm{curl}), \\ s.t : \forall (\underset{\sim}{u}, \tau) \in H(\mathrm{div}) \times H(\mathrm{curl}) \\ \langle \sigma, \tau \rangle - \langle \mathrm{curl}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle + \langle \mathrm{curl}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{div}\underset{\sim}{u}, \mathrm{div}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle, \end{gathered}$$

数值结果

设 $V = H(\mathrm{div}), Q = H(\mathrm{curl})$, 对应令 $Q_h = \mathcal{P}_r\Lambda^0, V_h = \mathcal{P}_r^-\Lambda^1$, 得到的结果如下

表 1: Lagrange − RT 元 (r=1) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
6.25e-02	5.64e-01	—	3.96e-01	—	2.10e+00	—	4.17e+01	—
3.12e-02	2.81e-01	1.01	8.68e-02	2.19	5.70e-01	1.88	2.16e+01	0.95
1.56e-02	1.39e-01	1.01	2.07e-02	2.07	1.45e-01	1.97	1.09e+01	0.99
7.81e-03	6.95e-02	1.00	5.11e-03	2.02	3.66e-02	1.99	5.48e+00	1.00
3.91e-03	3.47e-02	1.00	1.27e-03	2.00	9.15e-03	2.00	2.74e+00	1.00

表 2: Lagrange − RT 元 (r=2) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
6.25e-02	8.05e-02	—	8.56e-02	—	1.07e-01	—	6.43e+00	—
3.12e-02	2.11e-02	1.93	1.18e-02	2.86	1.37e-02	2.97	1.67e+00	1.94
1.56e-02	5.34e-03	1.98	1.52e-03	2.96	1.72e-03	2.99	4.22e-01	1.98
7.81e-03	1.34e-03	1.99	1.91e-04	2.99	2.16e-04	3.00	1.06e-01	2.00
3.91e-03	3.36e-04	2.00	2.40e-05	3.00	2.70e-05	3.00	2.65e-02	2.00

表 3: Lagrange − RT 元 (r=3) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
1.25e-01	6.17e-02	—	7.20e-02	—	1.33e-01	—	4.94e+00	—
6.25e-02	8.21e-03	2.91	4.99e-03	3.85	8.09e-03	4.04	6.51e-01	2.92
3.12e-02	1.04e-03	2.98	3.20e-04	3.96	4.87e-04	4.05	8.21e-02	2.99
1.56e-02	1.30e-04	3.00	2.02e-05	3.99	3.00e-05	4.02	1.03e-02	3.00
7.81e-03	1.63e-05	3.00	1.27e-06	4.00	1.87e-06	4.01	1.29e-03	3.00

再令 $Q_h = \mathcal{P}_r\Lambda^0, V_h = \mathcal{P}_r^-\Lambda^1$, 得到的结果如下

表 4: Lagrange − BDM 元 (r=2) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\|_{L^2})$	rate
1.25e-01	2.87e-01	—	4.12e-01	—	8.26e-01	—	2.26e+01	—
6.25e-02	8.08e-02	1.83	7.37e-02	2.48	1.07e-01	2.94	6.43e+00	1.81
3.12e-02	2.11e-02	1.94	1.01e-02	2.87	1.37e-02	2.97	1.67e+00	1.94
1.56e-02	5.34e-03	1.98	1.29e-03	2.96	1.72e-03	2.99	4.22e-01	1.98
7.81e-03	1.34e-03	1.99	1.63e-04	2.99	2.16e-04	3.00	1.06e-01	2.00

表 5: Lagrange − BDM 元 (r=3) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\|_{L^2})$	rate
1.25e-01	6.19e-02	—	6.64e-02	—	1.33e-01	—	4.94e+00	—
6.25e-02	8.21e-03	2.91	4.62e-03	3.85	8.09e-03	4.04	6.51e-01	2.92
3.12e-02	1.04e-03	2.98	3.02e-04	3.94	4.87e-04	4.05	8.21e-02	2.99
1.56e-02	1.30e-04	3.00	1.91e-05	3.98	3.00e-05	4.02	1.03e-02	3.00
7.81e-03	1.63e-05	3.00	1.20e-06	3.99	1.87e-06	4.01	1.29e-03	3.00

表 6: Lagrange − BDM 元 (r=4) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\|_{L^2})$	rate
2.50e-01	6.65e-02	—	1.83e-01	—	1.91e-01	—	5.42e+00	—
1.25e-01	1.04e-02	2.68	8.43e-03	4.44	1.73e-02	3.46	8.27e-01	2.71
6.25e-02	7.04e-04	3.88	2.72e-04	4.95	5.96e-04	4.86	5.57e-02	3.89
3.12e-02	4.51e-05	3.96	8.60e-06	4.99	1.93e-05	4.95	3.56e-03	3.97
1.56e-02	2.84e-06	3.99	2.70e-07	5.00	6.11e-07	4.98	2.24e-04	3.99

Problem2

对 (1) 考虑 Dirichlet 边界条件 $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$, 即

$$\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n} = 0, \quad \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

混合形式

上述方程也即是

$$(d\delta + \delta d)\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}, \qquad in\ \Omega$$

$$tr(\star \underset{\sim}{u}) = tr(\underset{\sim}{u}) = 0, \qquad on\ \partial\Omega$$

也即是有

$$< \sigma, \tau > = < \underset{\sim}{u}, d\tau > - < tr\tau, tr(\star \underset{\sim}{u}) >_{\partial\Omega}$$

$$= < \underset{\sim}{u}, d\tau >, \quad \forall \tau \in H\Lambda^0$$

对应的

$$< \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} > = < \sigma, \underset{\sim}{v} > + < \delta d\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} >$$

$$= < \sigma, \underset{\sim}{v} > + < d\underset{\sim}{u}, d\underset{\sim}{v} > - < tr(\underset{\sim}{v}), tr(\star d\underset{\sim}{u}) >$$

$$= < \sigma, \underset{\sim}{v} > + < d\underset{\sim}{u}, d\underset{\sim}{v} >, \quad \forall \underset{\sim}{v} \in \mathring{H}\Lambda^1$$

取基底为 $(dx_1, dx_2), \sigma = -\mathrm{div}\underset{\sim}{u}$, 即对应第一种 de Rham complex, 对应的混合形式为:

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \langle \mathrm{grad}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle, \quad \tau \in H(\mathrm{grad})$$

$$\langle \mathrm{grad}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{rot}\underset{\sim}{u}, \mathrm{rot}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle, \quad \underset{\sim}{v} \in \mathring{H}(\mathrm{rot})$$

对应的大双线性形式为:

$$\text{Find } (\underset{\sim}{u}, \sigma) \in \mathring{H}(\mathrm{rot}) \times H(\mathrm{grad}),$$

$$s.t : \forall (\underset{\sim}{u}, \tau) \in \mathring{H}(\mathrm{rot}) \times H(\mathrm{grad})$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle - \langle \mathrm{grad}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle + \langle \mathrm{grad}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{rot}\underset{\sim}{u}, \mathrm{rot}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle,$$

取基底为 $(dx_2, -dx_1), \sigma = \mathrm{rot}\underset{\sim}{u}$, 即对应第二种 de Rham complex, 对应的混合形式为:

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \langle \mathrm{curl}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle, \quad \tau \in H(\mathrm{curl})$$

$$\langle \mathrm{curl}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{div}\underset{\sim}{u}, \mathrm{div}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle, \quad \underset{\sim}{v} \in \mathring{H}(\mathrm{div})$$

对应的大双线性形式为:

$$\text{Find } (\underset{\sim}{u}, \sigma) \in \mathring{H}(\mathrm{div}) \times H(\mathrm{curl}),$$

$$s.t: \forall (\underset{\sim}{u}, \tau) \in \mathring{H}(\mathrm{div}) \times H(\mathrm{curl})$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle - \langle \mathrm{curl}\tau, \underset{\sim}{u} \rangle + \langle \mathrm{curl}\sigma, \underset{\sim}{v} \rangle + \langle \mathrm{div}\underset{\sim}{u}, \mathrm{div}\underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v} \rangle,$$

精确解 $\underset{\sim}{u}$

对于边界条件 (4), 可以得处 $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n}^{\perp} = 0 \ on \ \partial\Omega$, 故有 $\underset{\sim}{u} = 0 \ on \ \partial\Omega$, 直接取 $\underset{\sim}{u}$ 如下

$$\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} (\cos 2\pi x - 1)(\cos 2\pi y - 1) \\ \sin 2\pi x \sin 2\pi y \end{pmatrix}$$

进而得到对应的

$$\underset{\sim}{f} = 4\pi^2 \begin{pmatrix} 2\cos 2\pi x \cos 2\pi y - \cos 2\pi x - \cos 2\pi y \\ 2\sin 2\pi x \sin 2\pi y \end{pmatrix}$$

与

$$\sigma = 2\pi \left[\cos 2\pi x \sin 2\pi y + \sin 2\pi y (\cos 2\pi x - 1) \right]$$

数值结果

现取基底 $(dx_2, -dx_1)$, 并设 $V = \mathring{H}(\mathrm{div}), Q = H(\mathrm{curl})$, 对应令 $Q_h = \mathcal{P}_r \Lambda^0, V_h = \mathring{\mathcal{P}}_r^- \Lambda^1$, 得到的结果如下

表 7: Lagrange − RT 元 (r=1) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
5.00e-01	3.18e+00	—	1.22e+01	—	1.74e+01	—	1.59e+02	—
2.50e-01	2.60e+00	0.29	7.37e+00	0.72	1.44e+01	0.27	1.25e+02	0.35
1.25e-01	1.38e+00	0.92	4.07e+00	0.86	6.20e+00	1.22	7.74e+01	0.69
6.25e-02	7.29e-01	0.92	1.78e+00	1.20	2.05e+00	1.59	4.40e+01	0.82
3.12e-02	3.61e-01	1.01	8.40e-01	1.08	5.54e-01	1.89	2.27e+01	0.95
1.56e-02	1.80e-01	1.01	4.13e-01	1.02	1.41e-01	1.97	1.14e+01	0.99
7.81e-03	8.97e-02	1.00	2.06e-01	1.01	3.55e-02	1.99	5.73e+00	1.00

表 8: Lagrange − RT 元 (r=2) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
2.50e-01	1.03e+00	—	3.58e+00	—	6.34e+00	—	7.11e+01	—
1.25e-01	3.29e-01	1.64	1.03e+00	1.79	1.12e+00	2.50	3.07e+01	1.21
6.25e-02	9.02e-02	1.87	3.45e-01	1.58	3.60e-01	1.64	2.19e+01	0.49
3.12e-02	2.34e-02	1.95	1.19e-01	1.54	1.31e-01	1.46	1.67e+01	0.39
1.56e-02	5.91e-03	1.98	4.14e-02	1.52	4.69e-02	1.48	1.21e+01	0.47
7.81e-03	1.48e-03	2.00	1.45e-02	1.51	1.66e-02	1.50	8.59e+00	0.49
3.91e-03	3.71e-04	2.00	5.09e-03	1.51	5.87e-03	1.50	6.08e+00	0.50

表 9: Lagrange − RT 元 (r=3) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
5.00e-01	1.33e+00	—	6.02e+00	—	9.39e+00	—	1.10e+02	—
2.50e-01	3.38e-01	1.98	9.07e-01	2.73	1.50e+00	2.65	3.43e+01	1.68
1.25e-01	6.54e-02	2.37	2.29e-01	1.98	3.24e-01	2.21	1.29e+01	1.42
6.25e-02	8.62e-03	2.93	4.00e-02	2.52	5.03e-02	2.68	3.65e+00	1.82
3.12e-02	1.09e-03	2.99	6.99e-03	2.52	8.64e-03	2.54	1.19e+00	1.61
1.56e-02	1.36e-04	3.00	1.23e-03	2.51	1.52e-03	2.51	4.13e-01	1.53
7.81e-03	1.70e-05	3.00	2.16e-04	2.51	2.68e-04	2.50	1.45e-01	1.51

再令 $Q_h = \mathcal{P}_r\Lambda^0, V_h = \mathring{\mathcal{P}}_r^-\Lambda^1$, 得到的结果如下

表 10: Lagrange − BDM 元 (r=2) 误差表

h	$\\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\\|_{H^1}$	rate	$\\|\sigma - \sigma_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\\|_{L^2})$	rate
5.00e-01	3.19e+00	—	1.22e+01	—	1.57e+01	—	1.41e+02	—
2.50e-01	1.09e+00	1.54	4.40e+00	1.47	6.65e+00	1.24	7.48e+01	0.91
1.25e-01	3.89e-01	1.49	3.32e+00	0.41	1.96e+00	1.76	5.05e+01	0.57
6.25e-02	1.03e-01	1.91	1.66e+00	1.00	7.68e-01	1.35	4.58e+01	0.14
3.12e-02	2.64e-02	1.97	8.28e-01	1.01	2.87e-01	1.42	3.62e+01	0.34
1.56e-02	6.63e-03	1.99	4.13e-01	1.00	1.03e-01	1.48	2.65e+01	0.45
7.81e-03	1.66e-03	2.00	2.06e-01	1.00	3.66e-02	1.49	1.89e+01	0.49

表 11: Lagrange − BDM 元 (r=3) 误差表

h	$\\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\\|_{H^1}$	rate	$\\|\sigma - \sigma_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\\|_{L^2})$	rate
5.00e-01	1.61e+00	—	1.02e+01	—	9.80e+00	—	1.12e+02	—
2.50e-01	4.08e-01	1.98	3.19e+00	1.68	2.38e+00	2.04	5.24e+01	1.09
1.25e-01	6.90e-02	2.56	6.43e-01	2.31	4.99e-01	2.25	1.98e+01	1.40
6.25e-02	8.99e-03	2.94	1.61e-01	2.00	8.67e-02	2.52	6.18e+00	1.68
3.12e-02	1.13e-03	2.99	4.00e-02	2.01	1.53e-02	2.51	2.07e+00	1.58
1.56e-02	1.41e-04	3.00	9.94e-03	2.01	2.70e-03	2.50	7.19e-01	1.52
7.81e-03	1.77e-05	3.00	2.48e-03	2.00	4.77e-04	2.50	2.53e-01	1.51

表 12: Lagrange − BDM 元 (r=4) 误差表

h	$\\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h)\\|_{H^1}$	rate	$\\|\sigma - \sigma_h\\|_{L^2}$	rate	$\\|\mathrm{curl}(\sigma - \sigma_h\\|_{L^2})$	rate
5.00e-01	1.25e+00	—	5.82e+00	—	7.65e+00	—	8.83e+01	—
2.50e-01	1.75e-01	2.84	4.92e-01	3.57	1.10e+00	2.80	2.69e+01	1.71
1.25e-01	1.09e-02	4.01	8.83e-02	2.48	9.21e-02	3.58	5.19e+00	2.37
6.25e-02	7.29e-04	3.90	1.07e-02	3.04	8.84e-03	3.38	1.07e+00	2.27
3.12e-02	4.65e-05	3.97	1.31e-03	3.03	7.99e-04	3.47	1.99e-01	2.43
1.56e-02	2.92e-06	3.99	1.62e-04	3.02	7.09e-05	3.49	3.56e-02	2.48

结果分析

可以看出对于 Problem 1 中关于各项的误差收敛阶数分别为

$$\|u-u_h\| = O\left(h^r\right), \quad \|\mathrm{div}\left(u-u_h\right)\| = O\left(h^{r+1}\right), \quad \|\sigma-\sigma_h\| = O\left(h^{r+1}\right), \quad \|\mathrm{grad}\left(\sigma-\sigma_h\right)\| = O\left(h^r\right)$$

在 Probelm 2 中, 对于 $r>1$ 关于各项的误差收敛阶数分别为

$$\|u-u_h\| = O\left(h^r\right), \quad \|\mathrm{div}\left(u-u_h\right)\| = O\left(h^{r-1}\right), \quad \|\sigma-\sigma_h\| = O\left(h^{r-0.5}\right), \quad \|\mathrm{grad}\left(\sigma-\sigma_h\right)\| = O\left(h^{r-1.5}\right)$$

由 [2], 由误差分析得到的误差收敛阶为

$$\|u-u_h\| = O\left(h^r\right), \quad \|\mathrm{div}\left(u-u_h\right)\| = O\left(h^r\right), \quad \|\sigma-\sigma_h\| = O\left(h^{r+1}\right), \quad \|\mathrm{grad}\left(\sigma-\sigma_h\right)\| = O\left(h^r\right)$$

这样对于 Problem 1 中关于 u 的能量误差出现超收敛现象可能与选取的 u 是 $\mathrm{div}-\mathrm{free}$ 有关的. 现取 $\underset{\sim}{u} = (\cos\pi x\sin\pi y, 2\sin\pi x\cos\pi y)^T$, 取 RT 元, 得到的结果如下:

表 13: Lagrange − RT 元 (r=2) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
1.25e-01	6.70e-02	—	3.68e-01	—	2.66e-02	—	7.98e-01	—
6.25e-02	1.71e-02	1.97	9.34e-02	1.98	3.40e-03	2.97	2.08e-01	1.94
3.12e-02	4.29e-03	1.99	2.34e-02	1.99	4.30e-04	2.99	5.27e-02	1.98
1.56e-02	1.08e-03	2.00	5.86e-03	2.00	5.39e-05	2.99	1.32e-02	1.99
7.81e-03	2.69e-04	2.00	1.47e-03	2.00	6.75e-06	3.00	3.31e-03	2.00

表 14: Lagrange − RT 元 (r=3) 误差表

h	$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{div}(\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h)\|_{H^1}$	rate	$\|\sigma-\sigma_h\|_{L^2}$	rate	$\|\mathrm{curl}(\sigma-\sigma_h\|_{L^2})$	rate
1.25e-01	6.22e-03	—	4.08e-02	—	2.02e-03	—	8.10e-02	—
6.25e-02	7.83e-04	2.99	5.18e-03	2.98	1.22e-04	4.05	1.02e-02	2.98
3.12e-02	9.80e-05	3.00	6.50e-04	2.99	7.51e-06	4.02	1.28e-03	3.00
1.56e-02	1.23e-05	3.00	8.13e-05	3.00	4.67e-07	4.01	1.61e-04	3.00
7.81e-03	1.53e-06	3.00	1.02e-05	3.00	2.92e-08	4.00	2.01e-05	3.00

至于为什么 div − free 时会出现超收敛, 不是很清楚.

关于 Problem 2 中的数值结果出现掉阶的情况, 由 [2], 这与使用标准混合有限元与该 $Hilbert$ 空间的复杂结构有很强的联系, 而在这种联系下具有 Dirichlet 边界条件的向量 Laplace 方程中是不存在的, 即这种方法不适用于这个问题 (没太懂), 但由该结果缺失导致的该方法有次优性. 在取 V_h 空间时, 由 $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = 0$, 故 $u = 0 \ on \ \partial\Omega$, 即 V_h 取的是边界为 0 的向量值函数空间. 但其实边界条件只有 $\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n} \ on \ \partial\Omega = 0$, 而 $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{n} = 0$ 是自然边界条件, 故相对而言测试函数空间 V_h 选小了, 进而对 σ_h 的约束变少, 故出现掉阶.

由 [2] 中 $Theorem 3.1.$, 对于 $Dirichlet$ 边界条件以及 $0 < l \leqslant r$ 有:

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\| \leq C h^l \|\boldsymbol{u}\|_l \\
&\|\operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\| + \|\sigma-\sigma_h\| + h\,\|\operatorname{curl}(\sigma-\sigma_h)\| \quad \leq C h^{l-1/2}\left(|\ln h| \|\boldsymbol{u}\|_{W_\infty^l} + \|\boldsymbol{u}\|_{l+1/2}\right)
\end{aligned}$$

If $r=1,$ the estimates are:

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\| \leq C h |\ln h|^2 \left(|\ln h| \|\boldsymbol{u}\|_{W_\infty^1} + \|\boldsymbol{u}\|_2\right) \\
&\|\operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\| + \|\sigma-\sigma_h\| + h\,\|\operatorname{curl}(\sigma-\sigma_h)\| \quad \leq C h^{1/2}\left(|\ln h| \|\boldsymbol{u}\|_{W_\infty^1} + h^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_2\right)
\end{aligned}$$

通过该定理可以看出, 没有相匹配的空间结构的时候, 其收敛率会降低.

2 代码说明

文件中的 main-1.py,main-2.py 分别对应 Problem1 中的两个元.main-3.py,main-4.py 分别对应 Problem2 中的两个元. 均用 Python 语法编写, 在 fenics 环境下直接运行即可.

参考文献

[1] Douglas N. Arnold Richard S. Falk and Ragnar Winther. FINITE ELEMENT EXTERIOR CALCULUS, HOMOLOGICAL TECHNIQUES, AND APPLICATIONS. IMA Preprint Series 2094, February 2006 .

[2] DOUGLAS N. ARNOLD, RICHARD S. FALK, AND JAY GOPALAKRISHNAN. MIXED FINITE ELEMENT APPROXIMATION OF THE VECTOR LAPLACIAN WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS.