CFD 上机报告 III

陈伟
1901110037

2020 年 5 月 19 日

目录

1 程序一

1.1 问题描述

1. 将讲义 (CFDLect05) 中的格式 (4.13) 推广应用于 1D Euler 方程组（见 Project02），请程序实现和计算 Project02 中的问题。

Euler 方程组:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}_x = 0, \\ p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2), \gamma = 1.4. \end{cases}$$

1.1.1 Example1. 初值问题

初始条件:

$$\boldsymbol{U} = \begin{cases} (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.3 \\ (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.3 \end{cases}$$

计算区间为 [0,1], 输出时刻 $t = 0.2$.

1.1.2 Example2. 初边值问题

初始条件:

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \geq -4 \end{cases}$$

计算区间为 $[-5, 5]$, 其中在 $x = \pm 5$ 边界处 $\partial_x \rho = \partial_x u = \partial_x p = 0$. 输出时刻为 $t = 1.8$.

1.2 LF 格式改进

记 $\lambda = \tau/h$, 对守恒型方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

采用守恒型的格式:

$$\boldsymbol{u}_j^{n+1} = \boldsymbol{u}_j^n - \lambda(\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1/2}^n - \hat{\boldsymbol{f}}_{j-1/2}^n)$$

其中 $\boldsymbol{u}_j$ 可以是在 x_j 点 $\boldsymbol{u}$ 的插值, 也可以是在 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上 $\boldsymbol{u}$ 的积分平均.

1.3 Lax-Friedrichs 格式

其通量函数为:

$$\hat{\boldsymbol{f}}_{LF}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})}{2} - \frac{1}{\lambda}\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{2}$$

对应的数值通量为:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{f}}_{j+1/2} = \hat{\boldsymbol{f}}_{LF}(\boldsymbol{u}_j,\boldsymbol{u}_{j+1}) \\ \hat{\boldsymbol{f}}_{j-1/2} = \hat{\boldsymbol{f}}_{LF}(\boldsymbol{u}_{j-1},\boldsymbol{u}_j) \end{cases}$$

所以对应的有:

$$\begin{aligned} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}})^{+} &= \boldsymbol{f}_{j+1} - \hat{\boldsymbol{f}}_{j+1/2} \\ &= \frac{\boldsymbol{f}_{j+1}-\boldsymbol{f}_j}{2} + \frac{\boldsymbol{u}_{j+1}-\boldsymbol{u}_j}{2\lambda} \\ (\Delta f_{j+\frac{1}{2}})^{-} &= \hat{\boldsymbol{f}}_{j+1/2} - \boldsymbol{f}_j \\ &= \frac{\boldsymbol{f}_{j+1}-\boldsymbol{f}_j}{2} - \frac{\boldsymbol{u}_{j+1}-\boldsymbol{u}_j}{2\lambda} \end{aligned}$$

对应的

$$\frac{\boldsymbol{f}_{j+1}-\boldsymbol{f}_j}{\Delta \boldsymbol{u}_{j+\frac{1}{2}}} \approx \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}_{j+\frac{1}{2}})$$

也即是有:

$$\alpha^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}[I \mp \lambda \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}_{j+\frac{1}{2}})]$$

对应的 $\alpha^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}})^{\pm}$ 即可计算. 余下的 $r^{\pm}_j$ 按照定义分量相除即可. 一些说明同 project2 中.

1.4 数值实验

1.4.1 Example1

取 $h = 0.001, CFL = 0.8$, 取限制器函数分别为 0(LF 格式), 常数 1, minod(1,r), Superbee, 得到 ρ, u, p 的解与真解的图像如下:

图 1: t=0.2

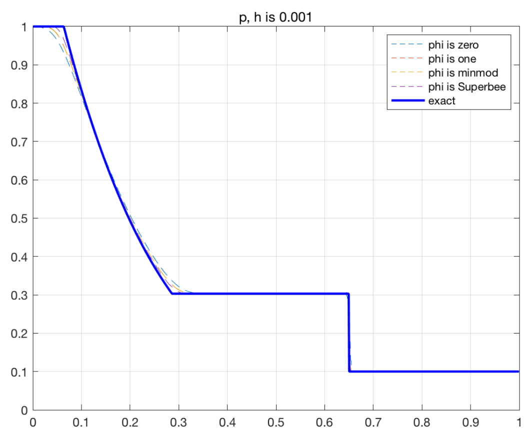

p, h is 0.001
phi is zero
phi is one
phi is minmod
phi is Superbee
exact
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

图 2: t=0.2

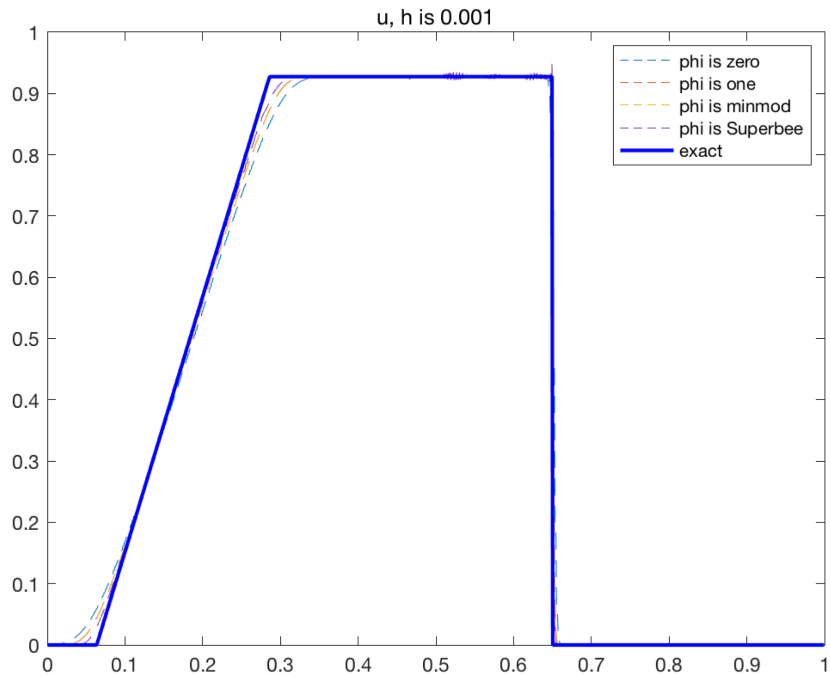
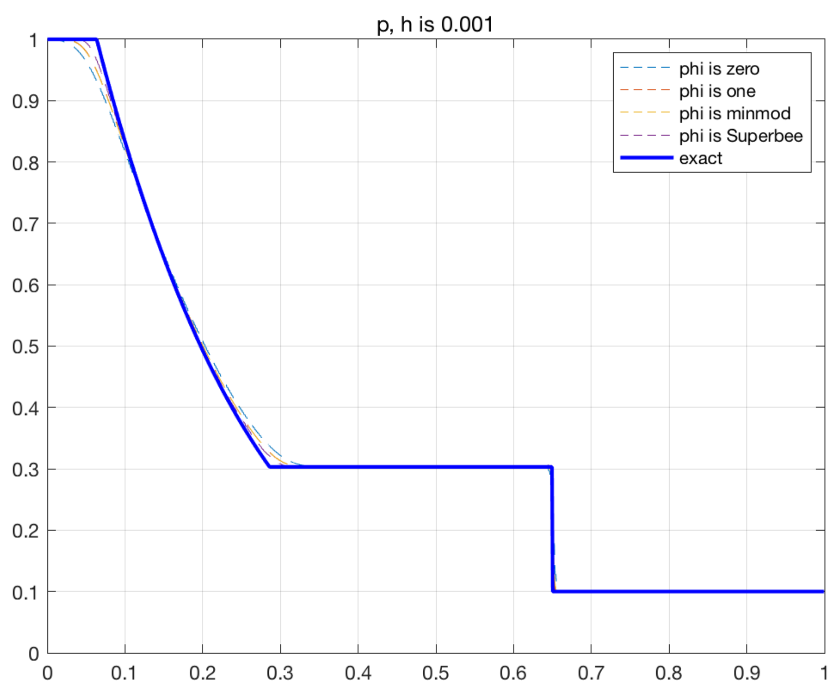

u, h is 0.001
phi is zero
phi is one
phi is minmod
phi is Superbee
exact
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

图 3: t=0.2


p, h is 0.001
phi is zero
phi is one
phi is minmod
phi is Superbee
exact
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

1.4.2 Example2

同上取参数, 得到的 ρ, u, p 的图像为:

图 4: t=1.8

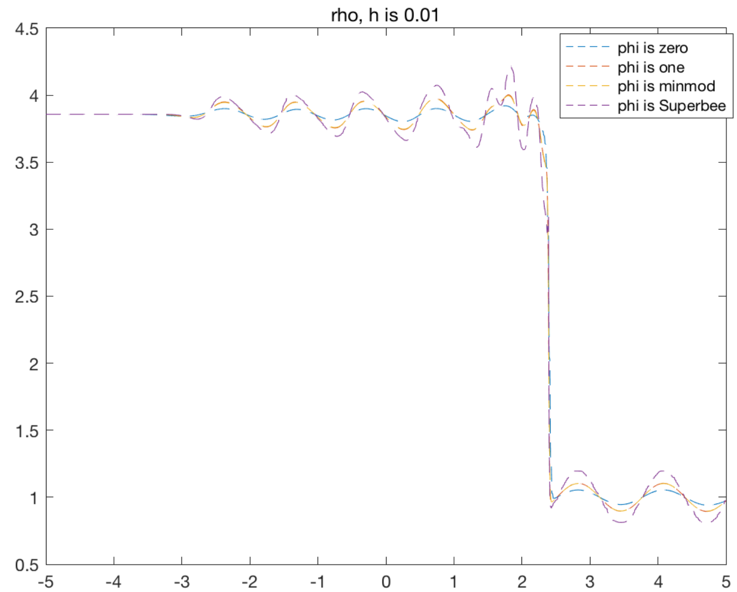


图 5: t=1.8

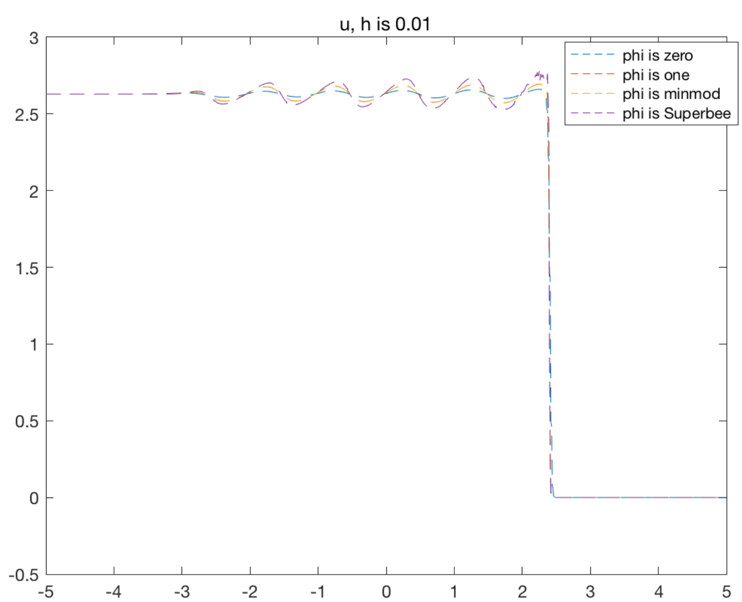
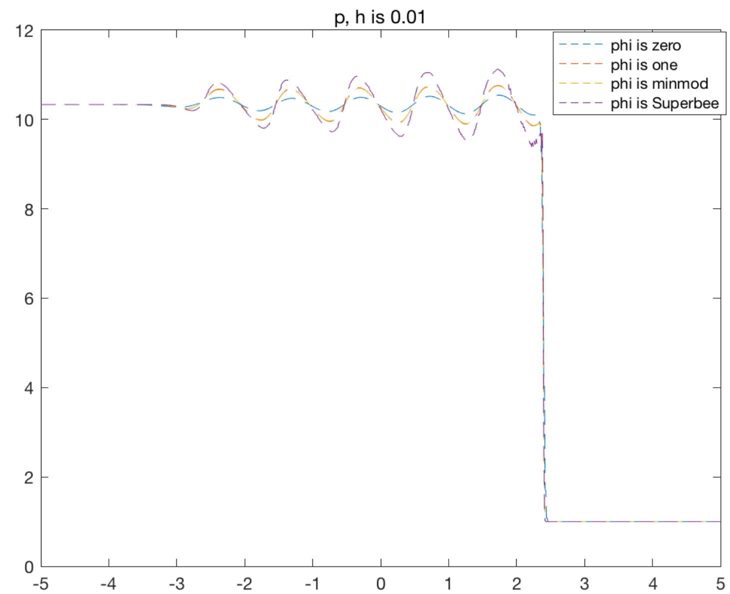


图 6: t=1.8



1.5 结果分析

可以看出, 限制器格式对解的逼近有很好的提高. 但加了限制器的格式在某些地方比原来的 LF 格式还是有些震荡.

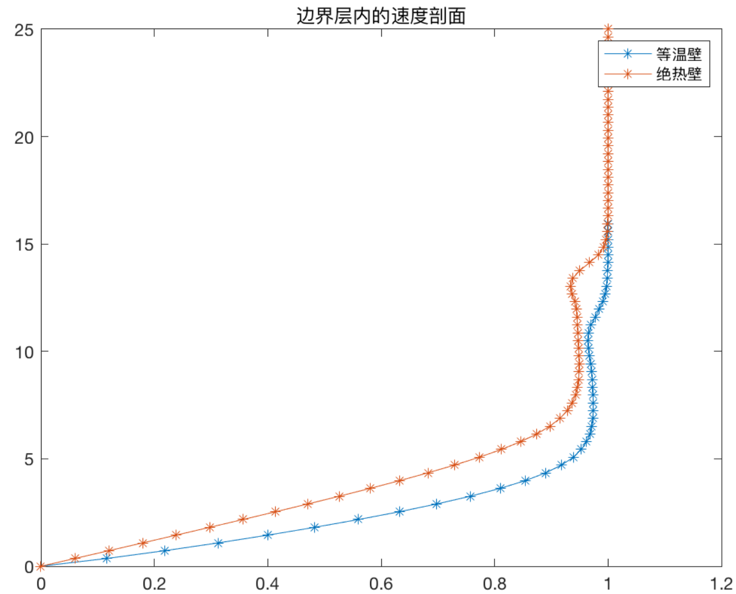
2 程序二

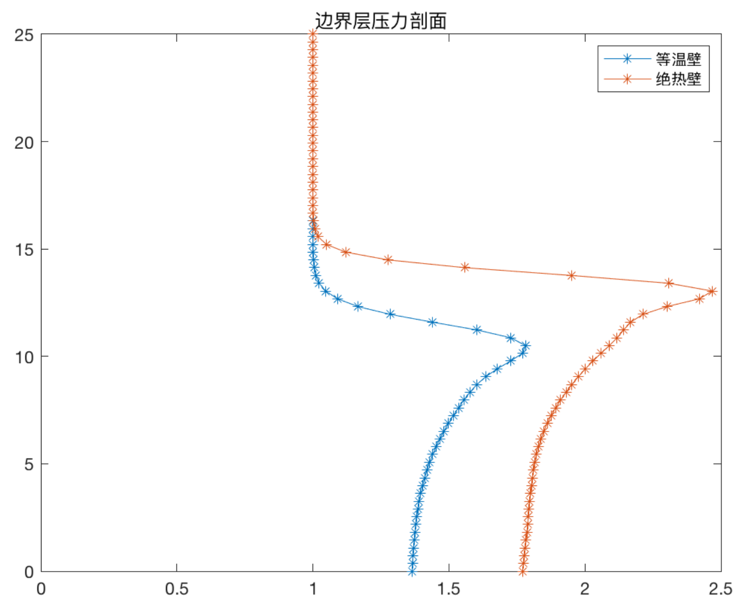
2.1 问题描述

程序实现 J.D. Anderson 的 CFD 书的第 10 章的平板扰流计算. 就是程序实现 J.D. Anderson 的 CFD 书的第 10 章的 Navier-Stokes 方程的 MacCormack 方程 (见第 10.4.3 节), 并求解那里介绍的超音速平板扰流问题。如果有条件, 可以尝试再换成其他离散格式 [对流项采用某个高分辨率格式离散, 粘性和热传导采用中心差商逼近]。【J.D. Anderson, Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, McGraw Hill Edu., 1995.】(有中译本)

2.2 程序介绍

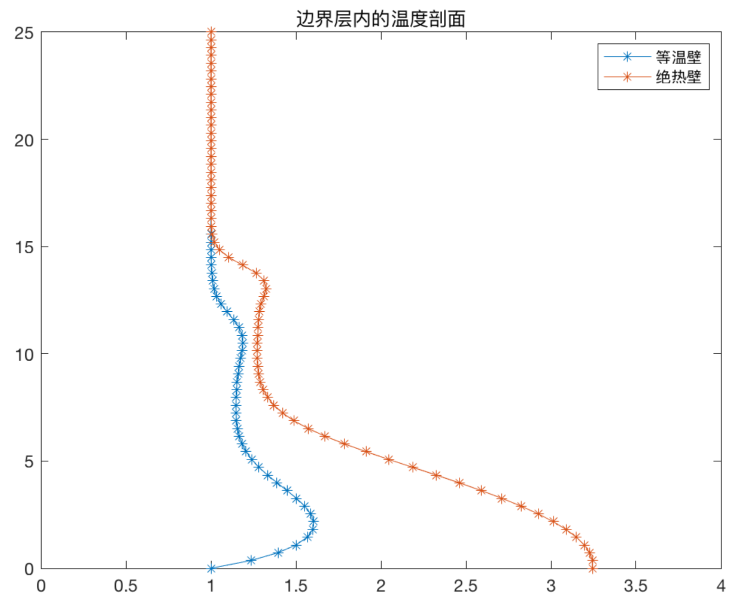
采用【J.D. Anderson, Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, McGraw Hill Edu., 1995.】中译版第十章介绍的框架编写程序. 共有 16 个文件, 其中各函数和书中框架对应, 而 Dxscheme.m 与 Dyscheme.m 分别是关于 x,y 方向求差分的函数. 其余说明见 Readme.txt.

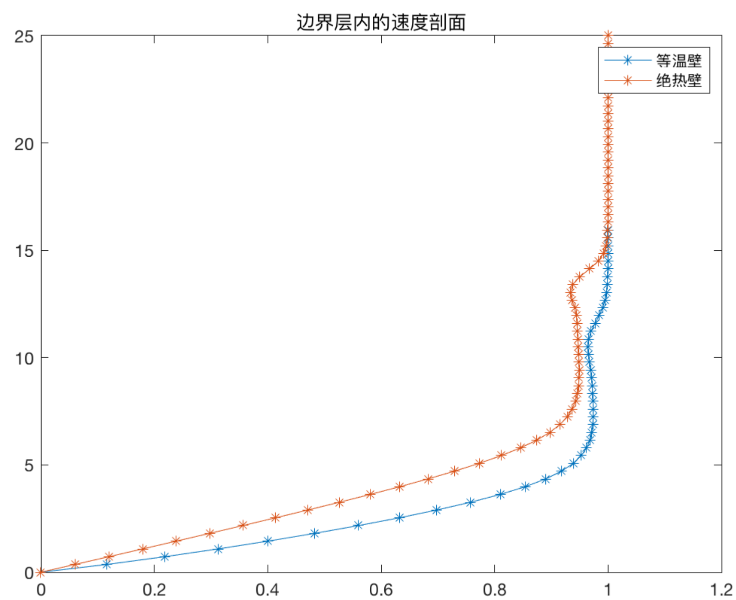




2.3 结果展示

同书中所介绍内容，得到的结果如下:





2.4 代码说明

本次提交代码文件有两个, 分别在文件夹 1, 2 中. 对应的是程序一，二的 matlab 代码. 具体说明参见 Readme.txt.