

## 有限元方法 II 上机报告 (二)

陈伟 1901110037

对 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{f} & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ -\nabla \cdot \underline{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{u} = \underline{g}_D & \text{on } \Gamma_D \\ 2\mu\varepsilon(\underline{u})\underline{n} - p\underline{n} = \underline{g}_N & \text{on } \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

其弱形式为:

$$\begin{aligned} Find : (\underline{u}, p) \in V_{\Gamma_D(g_D)} \times Q, s.t : \forall (\underline{v}, q) \in V_{\Gamma_D(0)} \times Q, \\ a(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{v}, p) - b(\underline{u}, q) = (f, \underline{v}) + (g_N, v)_{\Gamma_N} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V_{\Gamma_D(g_D)} &= \{\underline{v} \in H^1(\Omega) : \underline{v}|_{\Gamma_D} = \underline{g}_D\} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) &= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(\underline{u}) : \varepsilon(\underline{v}) dx \end{aligned}$$

### Problem 1

#### 问题描述

取  $\Omega = (0, 1)^2$ , 令  $\Gamma_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ or } y = 0 \text{ or } y = 1\}$ , 取真解:

$$\begin{cases} \underline{u}(x, y) = (e^x \cos \pi y, -\frac{1}{\pi} e^x \sin \pi y)^T \\ p = (x - 1/2)^3 \end{cases}$$

这样对  $\mu = 1$  时, 有

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} (\pi^2 - 1)e^x \cos \pi y + 3(x - 1/2)^2 \\ (1/\pi - \pi)e^x \sin \pi y \end{pmatrix}, \quad \underline{g}_N = \begin{pmatrix} 2e^x \cos \pi y - (x - 1/2)^3 \\ -\frac{(1+\pi^2)}{\pi} e^x \sin \pi y \end{pmatrix}$$

分别取  $MINI, \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}, Taylor - Hood, \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  元, 得到的速度项的  $L^2, H^1$  和压力项的  $L^2$  误差及收敛阶得到如下表格.

## 数值结果

表 1:  $MINI$  元误差表

$h$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	rate	$\ u - u_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	2.66e-01	—	2.29e+00	—	4.37e+00	—
2.50e-01	7.25e-02	1.88	1.11e+00	1.05	1.02e+00	2.10
1.25e-01	1.83e-02	1.99	5.48e-01	1.02	3.00e-01	1.76
6.25e-02	4.61e-03	1.99	2.72e-01	1.01	1.02e-01	1.56
3.12e-02	1.15e-03	2.00	1.36e-01	1.01	3.55e-02	1.52
1.56e-02	2.88e-04	2.00	6.77e-02	1.00	1.24e-02	1.52

表 2:  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}$  元误差表

$h$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	rate	$\ u - u_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	3.33e-02	—	4.31e-01	—	7.50e-02	—
2.50e-01	4.11e-03	3.02	1.12e-01	1.95	2.16e-02	1.80
1.25e-01	5.34e-04	2.95	2.87e-02	1.96	9.89e-03	1.13
6.25e-02	7.71e-05	2.79	7.54e-03	1.93	4.94e-03	1.00
3.12e-02	1.37e-05	2.49	2.17e-03	1.80	2.47e-03	1.00
1.56e-02	2.99e-06	2.20	7.61e-04	1.51	1.24e-03	1.00

表 3:  $Taylor - Hood$  元 ( $k=2$ ) 误差表

$h$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	rate	$\ u - u_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	3.44e-02	—	4.36e-01	—	2.39e-01	—
2.50e-01	4.17e-03	3.04	1.12e-01	1.96	3.26e-02	2.87
1.25e-01	5.14e-04	3.02	2.84e-02	1.98	4.23e-03	2.95
6.25e-02	6.40e-05	3.01	7.14e-03	1.99	5.72e-04	2.88
3.12e-02	7.98e-06	3.00	1.79e-03	1.99	8.99e-05	2.67
1.56e-02	9.98e-07	3.00	4.49e-04	2.00	1.77e-05	2.35

表 4: *Taylor – Hood* 元 (k=3) 误差表

$h$	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{L^2}$	rate	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	2.90e-03	—	5.90e-02	—	3.03e-02	—
2.50e-01	1.88e-04	3.95	7.61e-03	2.96	2.06e-03	3.88
1.25e-01	1.19e-05	3.98	9.62e-04	2.98	1.75e-04	3.55
6.25e-02	7.46e-07	4.00	1.21e-04	2.99	1.60e-05	3.45
3.12e-02	4.66e-08	4.00	1.51e-05	3.00	1.57e-06	3.35
1.56e-02	2.91e-09	4.00	1.89e-06	3.00	1.66e-07	3.24

表 5: *Taylor – Hood* 元 (k=4) 误差表

$h$	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{L^2}$	rate	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	2.31e-04	—	6.14e-03	—	5.46e-03	—
2.50e-01	7.37e-06	4.97	3.94e-04	3.96	2.18e-04	4.65
1.25e-01	2.31e-07	5.00	2.49e-05	3.98	9.96e-06	4.45
6.25e-02	7.21e-09	5.00	1.56e-06	3.99	5.33e-07	4.23
3.12e-02	2.25e-10	5.00	9.78e-08	4.00	3.11e-08	4.10
1.56e-02	7.18e-12	4.97	6.12e-09	4.00	1.89e-09	4.04

表 6: *Taylor – Hood* 元 (k=5) 误差表

$h$	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{L^2}$	rate	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	1.51e-05	—	4.95e-04	—	4.55e-04	—
2.50e-01	2.42e-07	5.96	1.57e-05	4.98	6.60e-06	6.11
1.25e-01	3.80e-09	6.00	4.93e-07	4.99	1.47e-07	5.48
6.25e-02	5.92e-11	6.00	1.54e-08	5.00	3.90e-09	5.24
3.12e-02	5.47e-12	3.43	4.84e-10	4.99	1.14e-10	5.10
1.56e-02	2.55e-11	-2.22	1.36e-09	-1.49	3.02e-09	-4.73

表 7:  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  元误差表

$h$	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{L^2}$	rate	$\ \underline{u} - \underline{u}_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	4.65e-05	—	9.21e-04	—	3.57e+11	—
2.50e-01	5.20e-07	6.48	2.65e-05	5.12	4.15e+09	6.43
1.25e-01	8.05e-09	6.01	8.33e-07	4.99	1.88e+07	7.79
6.25e-02	1.25e-10	6.01	2.64e-08	4.98	1.78e+05	6.73
3.12e-02	5.29e-12	4.56	8.33e-10	4.99	8.74e+02	7.67
1.56e-02	4.20e-11	-2.99	8.01e-10	0.06	4.73e+03	-2.44

关于  $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1$  元的结果如下:

表 8:  $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1$  元误差表

$h$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	rate	$\ u - u_h\ _{H^1}$	rate	$\ p - p_h\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	5.70e+00	—	2.86e+01	—	nan	—
2.50e-01	3.27e-01	4.12	2.27e+00	3.65	nan	nan
1.25e-01	2.90e-01	0.17	5.51e+00	-1.28	nan	nan
6.25e-02	9.18e-02	1.66	4.20e+00	0.39	nan	nan
3.12e-02	1.94e-02	2.24	8.61e-01	2.28	nan	nan
1.56e-02	5.39e-04	5.17	8.36e-02	3.36	nan	nan

## 结果分析

可以看出, 对于稳定的  $MINI, \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}$  以及  $Taylor - Hood$  元, 其  $u$  的收敛阶与理论上的大致相符, 但也有部分会出现掉阶的情况. 甚至如  $k = 5$  的  $Taylor - Hood$  元, 在后面的甚至都没有阶了, 可能是形成的矩阵规模过大导致矩阵条件是很大进而求解不精确. 对于  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  元, 其收敛结果就很迷, 关于  $p$  的误差更是非常大! 关于  $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1$ , 其  $u$  是有解的, 但  $p$  的数值解为 nan, 由存在  $q_h \in \mathcal{P}_1, q_h$  不为常数, 使得  $(u, q_h) = 0, \forall u \in \mathcal{P}_1$ , 故其不是满射, 也即不稳定, 甚至出现无解的情况. 对于  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  中  $p$  的误差会这么大, 可能是选取函数的原因, 其数值解的积分平均分别为:

$$8.420e + 09, -4.886e + 07, -1.107e + 05, 5.230e + 02, -1.287e + 00, 3.484e + 00$$

但其  $u$  的解还是比较符合的.

## Problem 2

### 问题描述

对  $u = 0, p = y^3 - y^2/2 + y - 7/12, \Gamma_D = \partial\Omega$ , 取  $\mu = 1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ , 用 Problem 1 中的稳定对元, 报告  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2}$  误差并分析结果.

Problem 1 中的  $MINI, \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}, Taylor - Hood$  和  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  元为稳定的, 对其做数值实验得到的数值实验结果如下.

## 数值结果

表 9: *MINI* 元误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	7.99e-03	—	7.99e-01	—	7.95e+01	—	7.97e+03	—
2.50e-01	2.12e-03	1.92	2.12e-01	1.92	2.12e+01	1.91	2.11e+03	1.92
1.25e-01	5.34e-04	1.99	5.34e-02	1.99	5.34e+00	1.99	5.26e+02	2.00
6.25e-02	1.34e-04	2.00	1.34e-02	2.00	1.34e+00	2.00	1.31e+02	2.01
3.12e-02	3.35e-05	2.00	3.35e-03	2.00	3.35e-01	2.00	3.25e+01	2.01
1.56e-02	8.37e-06	2.00	8.37e-04	2.00	8.37e-02	2.00	8.12e+00	2.00

表 10:  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}$  元误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	7.84e-02	—	7.61e+00	—	7.54e+02	—	7.55e+04	—
2.50e-01	4.39e-02	0.84	4.39e+00	0.79	4.18e+02	0.85	4.17e+04	0.86
1.25e-01	2.30e-02	0.93	2.30e+00	0.93	2.17e+02	0.94	2.17e+04	0.94
6.25e-02	1.17e-02	0.97	1.17e+00	0.97	1.11e+02	0.97	1.11e+04	0.97
3.12e-02	5.92e-03	0.99	5.92e-01	0.99	5.92e+01	0.90	5.59e+03	0.99
1.56e-02	2.97e-03	0.99	2.97e-01	0.99	2.97e+01	0.99	2.81e+03	0.99

表 11: *Taylor - Hood* 元 (k=2) 误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	5.30e-03	—	5.30e-01	—	4.88e+01	—	4.89e+03	—
2.50e-01	7.97e-04	2.73	7.97e-02	2.73	7.97e+00	2.62	7.80e+02	2.65
1.25e-01	1.09e-04	2.88	1.09e-02	2.88	1.09e+00	2.88	1.07e+02	2.86
6.25e-02	1.41e-05	2.94	1.41e-03	2.94	1.41e-01	2.94	1.40e+01	2.94
3.12e-02	1.80e-06	2.97	1.80e-04	2.97	1.80e-02	2.97	1.78e+00	2.97
1.56e-02	2.27e-07	2.99	2.27e-05	2.99	2.27e-03	2.99	2.27e-01	2.98

表 12: *Taylor – Hood* 元 (k=3) 误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	8.89e-04	—	8.89e-02	—	8.89e+00	—	8.89e+02	—
2.50e-01	1.70e-04	2.39	1.70e-02	2.39	1.70e+00	2.39	1.70e+02	2.38
1.25e-01	2.52e-05	2.76	2.52e-03	2.76	2.52e-01	2.76	2.52e+01	2.76
6.25e-02	3.39e-06	2.89	3.39e-04	2.89	3.39e-02	2.89	3.39e+00	2.89
3.12e-02	4.38e-07	2.95	4.38e-05	2.95	4.38e-03	2.95	4.38e-01	2.95
1.56e-02	5.57e-08	2.98	5.57e-06	2.98	5.57e-04	2.98	5.57e-02	2.98

表 13: *Taylor – Hood* 元 (k=4) 误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	1.45e-15	—	nan	—	1.20e-11	—	1.20e-09	—
2.50e-01	5.24e-15	-1.86	1.93e-13	nan	1.80e-11	-0.59	1.61e-09	-0.42
1.25e-01	2.81e-15	0.90	4.39e-13	-1.19	1.94e-11	-0.11	4.31e-09	-1.43
6.25e-02	5.14e-15	-0.87	6.55e-13	-0.58	5.78e-11	-1.57	3.41e-09	0.34
3.12e-02	4.34e-15	0.24	5.13e-13	0.35	4.17e-11	0.47	4.15e-09	-0.29

表 14:  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  误差表

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate	$\ \nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\ _{L^2}$	rate
5.00e-01	2.77e-14	—	8.44e-02	—	9.99e-12	—	9.96e-10	—
2.50e-01	3.15e-15	3.13	2.16e-13	38.51	1.37e-11	-0.46	1.42e-09	-0.51
1.25e-01	2.23e-15	0.50	9.22e-03	-35.32	7.65e-11	-2.48	4.44e-08	-4.97
6.25e-02	2.92e-15	-0.39	3.92e-04	4.55	1.38e-08	-7.50	3.69e-06	-6.38
3.12e-02	4.48e-15	-0.62	5.39e-13	29.44	7.44e-11	7.54	4.57e-09	9.66

## 结果分析

可以看出, 即是对于稳定的元, 当  $\mu$  非常小的时候, 虽然收敛阶没有受影响, 但  $\|\nabla \underline{u} - \underline{u}_h\|_{L^2}$  也会非常大. 记  $\underline{u}_h^\mu$  为对应  $\mu$  的数值解, 由于

$$a_\mu(\underline{u}, \underline{v}) = 2\mu(\varepsilon(\underline{u}), \varepsilon(\underline{v}))$$

故  $a$  的强制性系数  $\alpha_\mu = \mu\alpha$ , 其中  $\alpha$  为  $\mu = 1$  的时候的  $a$  的强制性系数, 并设  $\alpha_\mu^h$  为对应剖分的  $a_\mu^h$  的强制性系数再由基本误差估计 ( ):

$$\|u - u_h^\mu\|_V \leq \frac{4\|a_\mu\|\|b\|}{\alpha_\mu^h} E_u + \frac{\|b\|}{\alpha_\mu^h} E_p = \frac{4\|a\|\|b\|}{\alpha^h} E_u + \frac{1}{\mu} \frac{\|b\|}{\alpha^h} E_p$$

且  $u = 0$  也是落在  $V_h$  中的, 故  $E_u = 0$ . 故  $\|u - u_h^\mu\|_V \approx \frac{1}{\mu} \|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{\mu} \frac{\|b\|}{\alpha^h} E_p$ , 进而随着  $\mu$  的减小, 误差会逐渐增大.

关于收敛阶. 上述可以看出是和  $E_p$  是相关的:

- 对于 *MINI* 元, 其  $E_p$  为  $\mathcal{P}_1$  元的  $L^2$  误差, 也即是 2 阶的.
- 对于  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_0^{-1}$  元,  $E_p$  为不连续的  $\mathcal{P}_0$  元的  $L^2$  误差, 也即是 1 阶的.
- 对于 *Taylor - Hood* 元,  $k = 2$  不太能解释, 此时  $Q = \mathcal{P}_1$ , 或许和真解  $p$  为三次多项式有关 (瞎猜的);  $k = 3$ , 此时  $Q = \mathcal{P}_2$ ,  $E_p$  为  $\mathcal{P}_2$  的  $L^2$  误差, 为 3 阶的;  $k = 4$ , 由于此时  $Q$  是包含完整的 3 次多项式的, 故就没有收敛阶.
- 对于  $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^{-1}$  元,  $Q$  是包含完整的 3 次多项式的, 也就没有收敛阶.

## Problem 3

### 问题描述

选取解为

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ -x(1-x)(1-2x)y^2(1-y)^2 \end{pmatrix} \\ p &= 10((x-1/2)^3y^2 + (1-x)^3(y-1/2)^3) \end{aligned}$$

用 "grad-div stabilization" 的变分形式

$$a_h(u_h, v_h) = (2\mu\varepsilon(u_h, \varepsilon(v_h))) + \gamma(\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v_h)$$

用 *Taylor - Hood* 元  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ ,  $\mu = 1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ , 对于不同的  $\gamma$ , 报告  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2}$  和  $\|\nabla \cdot u_h\|_{L^2}$  值, 讨论数值结果.

分别取  $\gamma = 0, 10^{-2}, 1, 10$  数值实验结果如下.

## 数值结果

表 15: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 0$  误差表 ( $err = \|\nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	3.86e-02	—	3.44e+00	—	3.15e+02	—	3.16e+04	—
2.50e-01	9.24e-03	2.06	7.79e-01	2.14	7.79e+01	2.02	7.76e+03	2.02
1.25e-01	1.81e-03	2.35	1.27e-01	2.62	1.27e+01	2.62	1.27e+03	2.62
6.25e-02	3.72e-04	2.28	1.78e-02	2.83	1.78e+00	2.83	1.78e+02	2.83
3.12e-02	8.55e-05	2.12	2.35e-03	2.92	2.35e-01	2.92	2.35e+01	2.92
1.56e-02	2.08e-05	2.04	3.02e-04	2.96	3.02e-02	2.96	3.02e+00	2.96

表 16: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 0$  误差表 ( $err = \|\nabla \cdot (\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	2.47e-02	—	2.54e+00	—	2.35e+02	—	2.35e+04	—
2.50e-01	7.43e-03	1.73	6.92e-01	1.87	6.92e+01	1.77	6.87e+03	1.78
1.25e-01	1.44e-03	2.36	1.15e-01	2.59	1.15e+01	2.59	1.15e+03	2.58
6.25e-02	2.85e-04	2.34	1.61e-02	2.83	1.61e+00	2.83	1.61e+02	2.83
3.12e-02	6.35e-05	2.17	2.13e-03	2.92	2.13e-01	2.92	2.13e+01	2.92
1.56e-02	1.53e-05	2.06	2.74e-04	2.96	2.73e-02	2.96	2.73e+00	2.96

表 17: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 10^{-2}$  误差表 ( $err = \|\nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	3.85e-02	—	2.67e+00	—	2.04e+01	—	2.48e+01	—
2.50e-01	9.22e-03	2.06	5.65e-01	2.24	7.87e+00	1.38	1.61e+01	0.62
1.25e-01	1.80e-03	2.35	9.18e-02	2.62	2.19e+00	1.85	9.24e+00	0.80
6.25e-02	3.72e-04	2.28	1.30e-02	2.82	4.60e-01	2.25	4.24e+00	1.12
3.12e-02	8.55e-05	2.12	1.73e-03	2.91	7.77e-02	2.56	8.03e+03	-10.89
1.56e-02	2.08e-05	2.04	2.23e-04	2.95	1.13e-02	2.78	3.82e-01	14.36



表 18: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 10^{-2}$  误差表 ( $err = \|\nabla \cdot (\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	2.46e-02	—	1.81e+00	—	8.11e+00	—	8.73e+00	—
2.50e-01	7.40e-03	1.73	4.70e-01	1.95	1.83e+00	2.15	2.28e+00	1.94
1.25e-01	1.44e-03	2.36	7.71e-02	2.61	3.15e-01	2.54	5.57e-01	2.03
6.25e-02	2.84e-04	2.34	1.08e-02	2.84	4.47e-02	2.82	1.28e-01	2.12
3.12e-02	6.35e-05	2.16	1.42e-03	2.92	5.49e-03	3.02	1.69e+02	-10.36
1.56e-02	1.53e-05	2.05	1.83e-04	2.96	6.42e-04	3.10	4.58e-03	15.17

表 19: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 1$  误差表 ( $err = \|\nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	3.29e-02	—	2.15e-01	—	2.57e-01	—	2.58e-01	—
2.50e-01	7.70e-03	2.10	8.50e-02	1.34	1.67e-01	0.63	1.69e-01	0.61
1.25e-01	1.61e-03	2.26	2.42e-02	1.82	9.48e-02	0.81	9.96e-02	0.76
6.25e-02	3.54e-04	2.18	5.07e-03	2.25	4.36e-02	1.12	5.22e-02	0.93
3.12e-02	8.41e-05	2.07	8.44e-04	2.59	1.54e-02	1.50	2.63e-02	0.99
1.56e-02	2.07e-05	2.02	1.23e-04	2.78	4.14e-03	1.90	1.29e-02	1.03

表 20: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 1$  误差表 ( $err = \|\nabla \cdot (\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	5.28e-02	—	1.75e-01	—	1.80e-01	—	1.80e-01	—
2.50e-01	1.18e-02	2.16	4.31e-02	2.02	5.43e-02	1.73	5.45e-02	1.72
1.25e-01	1.87e-03	2.66	6.85e-03	2.65	1.34e-02	2.02	1.37e-02	1.99
6.25e-02	3.20e-04	2.55	8.91e-04	2.94	3.10e-03	2.11	3.43e-03	2.00
3.12e-02	6.60e-05	2.28	1.15e-04	2.95	6.28e-04	2.30	8.56e-04	2.00
1.56e-02	1.54e-05	2.09	1.87e-05	2.62	1.03e-04	2.61	2.11e-04	2.02

表 21: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 10$  误差表 ( $err = \|\nabla(\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	2.60e-02	—	4.24e-02	—	4.29e-02	—	4.29e-02	—
2.50e-01	7.87e-03	1.73	2.44e-02	0.80	2.60e-02	0.72	2.60e-02	0.72
1.25e-01	1.83e-03	2.10	1.11e-02	1.13	1.39e-02	0.91	1.39e-02	0.90
6.25e-02	3.92e-04	2.22	4.09e-03	1.45	7.04e-03	0.98	7.13e-03	0.97
3.12e-02	8.78e-05	2.16	1.14e-03	1.84	3.42e-03	1.04	3.58e-03	0.99
1.56e-02	2.10e-05	2.06	2.36e-04	2.27	1.52e-03	1.16	1.79e-03	1.00

表 22: *Taylor – Hood* 元 ( $k=2$ ),  $\gamma = 10$  误差表 ( $err = \|\nabla \cdot (\underline{u} - \underline{u}_h)\|_{L^2}$ )

$\mu$ $h$	1		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate	<i>err</i>	rate
5.00e-01	5.51e-03	—	8.64e-03	—	8.73e-03	—	8.74e-03	—
2.50e-01	2.25e-03	1.29	2.16e-03	2.00	2.29e-03	1.93	2.29e-03	1.93
1.25e-01	7.58e-04	1.57	4.42e-04	2.29	5.70e-04	2.01	5.72e-04	2.00
6.25e-02	2.22e-04	1.77	7.39e-05	2.58	1.41e-04	2.02	1.43e-04	2.00
3.12e-02	5.88e-05	1.91	2.61e-05	1.50	3.36e-05	2.06	3.57e-05	2.00
1.56e-02	1.50e-05	1.97	1.08e-05	1.27	7.23e-06	2.22	8.90e-06	2.00

## 结果分析

由边界为 Dirichlet 边界, 故  $\varepsilon(\cdot)$  与  $\nabla(\cdot)$  诱导的范数是等价的, 由 (\*\*\*) 有:

$$\begin{aligned} & \mu^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_h)\| + \gamma^{\frac{1}{2}} \|\operatorname{div}(u - u_h)\| + \alpha^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\| + \|p - p_h\| \\ & \leq 2 \left(1 + \hat{C}(\gamma_h, \Gamma)\right) \left( \min_{v_h \in V_h} \left(\mu^{\frac{1}{2}} + \gamma^{\frac{1}{2}}\right) \|\nabla(u - v_h)\| + \min_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\| \right) \end{aligned}$$

其中  $\hat{C}(\gamma_h, \Gamma) \leq \frac{1}{4\hat{\beta}^2}(\sqrt{5} + 1)^2 \frac{\max\{\hat{\beta}^2, \mu + \gamma\}}{\min\{1, \sqrt{\mu + \gamma}\}}$ , ( $\hat{\beta}$  为  $b$  在  $V_h \times Q_h$  的 inf-sup 系数)

故当  $\gamma$  取得比较大时 (如  $\gamma = 10$ ),  $\hat{C}(\gamma_h, \Gamma)$  是一个与  $\mu$  无关的常数, 进而对于相同的  $h$ , 对于不同的  $\mu$ ,  $\|\operatorname{div}(u - u_h)\|$  保持不变, 而  $\|\nabla(u - u_h)\|$  会以  $\mu^{-1/2}$  倍变大.

对于使用的  $k = 2$  的 *Taylor – Hood*, 其右端项的条件系数收敛阶是二阶, 从数值结果可以看出在  $\gamma = 1, 10$  时  $\|\operatorname{div}(u - u_h)\|$  误差的阶是对的, 但是对  $\|\nabla(u - u_h)\|$  在  $\mu$  较小时就不对.

## 2 代码说明

文件中的 `main-1.py`, `main-2.py`, `main-3.py` 分别对应 `Problem1`, `Problem2`, `Problem3`. 均用 Python 语法编写, 在 `fenics` 环境下直接运行即可.