Atelier 2

Exercice 1

Nous proposons dans cet exercice d'étudier numériquement le comportement asymptotique de l'estimateur des moindres carrés ordinaires des paramètres du modèle suivant :

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t - b\epsilon_{t-1}, \tag{1}$$

où, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \epsilon_t & = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 & = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 \end{cases}, \tag{2}$$

avec $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance égale à 1.

1. Rappeler la condition sous laquelle le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au second ordre.

2. Créer la fonction *Eps* qui prend en argument un entier n et les deux réels ω, α et qui renvoie une trajectoire de taille n du processus $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini dans (2).

3. Créer la fonction *SimProcess* prenant en argument un entier n et les réels a, b, ω, α et renvoyant une trajectoire de taille n du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini dans (1).

4. Prenons $a = -0.4, b = 0.7, \omega = 1$ et $\alpha = 0.6$.
   (a) Générer une trajectoire de taille 3000 de $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Tracer sur une même fenêtre les autocorrélations empiriques de $(\epsilon_t)_{t=1,\dots,3000}$ et celles de $(\epsilon_t^2)_{t=1,\dots,3000}$. Commenter.

   (b) Simuler une trajectoire de taille 3000 du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Tracer sur une même fenêtre cette trajectoire, ses autocorrélations empiriques et ses autocorrélations partielles empiriques. Commenter.

5. A partir de cette question, nous supposons que les paramètres ω et α sont connus et sont fixés aux mêmes valeurs que dans la question précédente ($\omega = 1$ et $\alpha = 0.6$).

   L'estimateur des moindres carrés ordinaires du vecteur (a, b) est donné par :

   $$(\hat{a}_n, \hat{b}_n) = \underset{(a,b)\in[-1,1]^2}{\arg\min}\, Q_n(a, b), \tag{3}$$

   où

   $$Q_n(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \epsilon_t^2(a, b)$$

   avec

   $$\epsilon_t(a, b) = X_t - aX_{t-1} + b\epsilon_{t-1}(a, b).$$

   Créer la fonction *Objective* qui prend en argument un vecteur (a, b) et une série X et qui renvoie la fonction objective $Q_n(a, b)$.

6. Donner les estimations des moindres carrés des paramètres ARMA sur la trajectoire générée dans la question 4.b. Utiliser pour cela la fonction nlminb de R et considérer $(1/2, 1/2)$ comme paramètre initial.

7. Comparer les estimations obtenues dans la question précédente avec celles données par la fonction arima de R.

8. Prenons toujours $a = -0.4$ et $b = 0.7$. Générer 500 trajectoires chacune de taille $n = 3000$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et calculer pour chaque trajectoire l'estimateur des moindres carrés ordinaires défini dans (3). Stocker ces estimations dans une matrice de taille (500×2).

9. Représenter graphiquement l'histogramme de la distribution des estimateurs calculés dans la question précédente. Commenter.

Exercice 2

La bibliothèque tseries contient le jeu de données USeconomic décrivant l'économie américaine entre 1954 et 1987.

1. Importer les données dans votre session. On considère la série correspondante à la variable GNP et on l'appellera GNPts.

2. Représenter la série avec la fonction plot.ts. Commenter la stationnarité de la série, notamment la tendance.

3. Représenter les autocorrélations empiriques de la série pour les retards entre 1 et 15. Commenter les sorties.

4. Nous allons estimer la partie tendance de la série en utilisant la fonction decompose. Représenter la tendance ainsi estimée et commenter vos résultats.

5. Calculer et représenter la série des différences d'ordre 1. On notera GNPd1 la série ainsi obtenue.

6. Représenter les autocorrélations empiriques ainsi que les autocorrélations partielles empiriques jusqu'à l'ordre 20 de GNPd1. Commenter les résultats.

7. Avec une méthode de votre choix, ajuster quelques modèles ARMA(p,q) à la série différenciée. Tester la validité de chaque modèle.

8. Tracer sur un même graphique la série différencié et l'ajustement du meilleur modèle retenu parmi ceux que vous avez ajustés.

9. Comparer vos résultats avec la procédure automatique auto.arima du package forecast.