MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

(MESRS)

@@@@@@@

Année académique 2019-2020

UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI (UAC)

@@@@@@@

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE (IFRI)

FILIERES : *GL – SI – IM (LICENCE_1)*

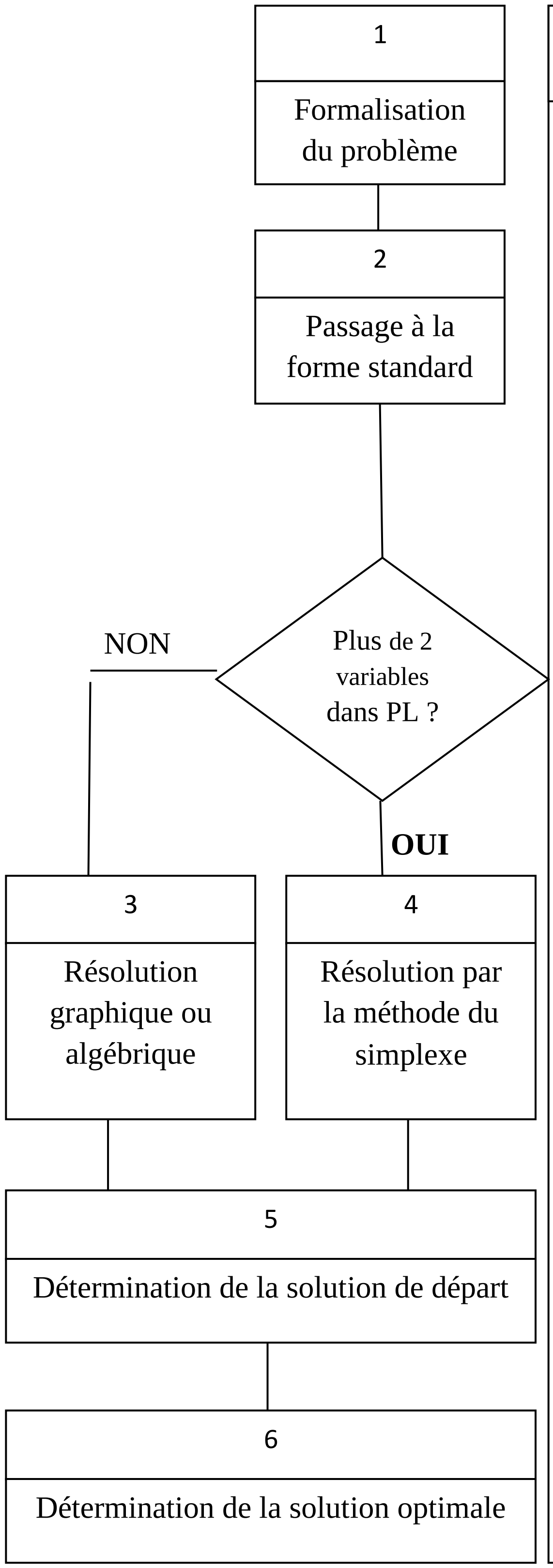
MATIERE : *RECHERCHE OPERATIONNELLE*

Enseignant : M. *Sèdami Hubert TOHOUNGODO*

CONTACTS : *+22997 32 25 04 / +22995 19 11 31*

hubertohoungodo@yahoo.fr

- ***Processus de résolution d'un programme linéaire (PL)***



Observations

1- Forme canonique : Contraintes exprimées par des inéquations.

2- Forme standard :
Inéquations remplacées par des équations.
Introduction de variables d'écart.

3- Résolution graphique : Représentation des contraintes. Mise en évidence du domaine des solutions : (zone d'acceptabilité ou région d'admissibilité).
Résolution algébrique : Processus itératif.

4- Sous la forme algébrique ou de tableaux successifs

5- Envisager la solution la plus évidente : aucune production. Si la solution n'est pas admissible, introduire des variables artificielles.

6- Situation optimale si :
- Coefficients de la fonction à optimiser sont tous négatifs (dans le cas d'une maximisation à ou positifs (dans le cas d'une minimisation). Si coefficients nuls, il est nécessaire d'opérer une nouvelle itération.
- Dans le cas du simplexe :
TMS négatifs (variables hors base) et nuls (variables en base) dans le cas d'une maximisation.
TMS positifs (variables hors base), et nuls (variables en base).

1. DEFINITION

La programmation linéaire a pour but d'affecter des valeurs à des variables (inconnues) afin d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction «objectif » (encore appelée fonction économique) compte tenu des contraintes (équations ou inéquations) auxquelles sont soumises ces variables.

Exemple de programme linéaire

$$\begin{cases} x, y \geq 0 & (1) \\ x + y \leq 8 & (2) \\ 3x + y \leq 9 & (3) \\ Max(Z = 5x + 7y) & (4) \end{cases}$$

Remarque

La ligne (1) est appelée **ligne des contraintes logiques.**Les lignes (2) et (3) sont appelées **lignes des contraintes techniques.**

La ligne (4) est appelée **ligne de la fonction économique.**

Optimiser une fonction, **c'est minimiser ou maximiser cette fonction.**

2. METHODE DE RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

2.1 METHODE GRAPHIQUE

Pour résoudre un programme linéaire (PL), on affecte à chacune des contraintes techniques une droite.

Si la contrainte est de la forme $\boldsymbol{ax + by \leq c}$alors la droite aura pour équation $\boldsymbol{ax + by = c}$**.**

On représente chacune des droites associées dans un repère orthonormal et l'on détermine ensuite la partie solution liée à cette droite. L'intersection de toutes les parties solutions est appelée **l'ensemble solution du programme linéaire. On l'appelle aussi zone d'acceptabilité**.Cette dernière est souvent délimitée par un polygone. **L'ensemble de tous les points appartenant à l'intérieur et au pourtour du polygone est susceptible de donner la solution optimale.**

Parmi ces infinités de points, un seul donnera la valeur optimale à la fonction économique ; on l'appelle **point optimal**. On affecte enfin les coordonnées du point optimal aux variables du programme linéaire pour obtenir les solutions recherchées.

APPLICATION

Un atelier de menuiserie produit des chaises (C) et des tables (Ta) à l'aide de trois facteurs de production à savoir : le bois (B), le tissu (T) et des heures de mains d'œuvre directe (HMOD). L'atelier dispose en stock 16 unités de bois, de 10 unités de tissu et de 40 HMOD. La fabrication d'une chaise nécessite une unité de bois, une unité de tissu et une HMOD. Tandis que celle d'une table nécessite une unité de bois et 4 HMOD. La vente d'une chaise rapporte 2000F comme bénéfice et celle d'une table 3500F.

1. Ecrire le (PL) relatif à ce problème en désignant par x le nombre de chaises et par y le nombre de tables à fabriquer pour maximiser le profit total.
2. Résoudre graphiquement ce (PL)
3. Résoudre par la méthode de Simplexe.

Indication voir cahier de cours de l'étudiant.

2.2 METHODE SIMPLEXE

Encore appelée méthode de George Dantzig, elle consiste à faire des tableaux successifs à double entrée dont une **comporte la variable en base (VB)** et la seconde la **variable hors base (VHB)**.

Le programme écrit à la question de l'application précédente est appelé **forme canonique** du programme linéaire. Le premier tableau de Simplexe est déduit de la **forme standard.** Pour obtenir la forme standard d'un programme linéaire, on introduit dans les contraintes techniques de la forme canonique de nouvelles variables, appelées **variables d'écart(e_i)** afin de transformer les contraintes d'inégalité en contrainte d'égalité. Il y a donc autant de variables d'écart que de contraintes techniques dans la forme canonique.

Exemple

Forme canonique : $\begin{cases} (x,y) \geq (0;0) \\ x+y \leq 16 \\ x \leq 10 \\ x+4y \leq 40 \\ Max(Z = 2000x + 3500y) \end{cases}$

Forme standard : $\begin{cases} x,\ y,\ e_1,\ e_2,\ e_3 \geq 0 \\ x+y+e_1 = 16 \\ x+e_2 = 10 \\ x+4y+e_3 = 40 \\ Max(Z = 2000x + 3500y) \end{cases}$

Dans le premier tableau de simplexe **seul les variables d'écart restent dans la base**. Toutes les autres **<u>variables y comprises les variables d'écart sont considérées comme hors base.</u>**

Voici le premier tableau de simplexe

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S
e1	1	1	1	0	0	16
e2	1	0	0	1	0	10
e3	1	4	0	0	1	40
Z	2000	3500	0	0	0	0

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ S'appelle matrice principale.

$(2000 \quad 3500 \quad 0 0 \quad 0\,)$ S'appelle coefficient de la fonction économique.

0 S'appelle valeur au signe près de la fonction économique.

$\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$S'appelle éléments du second membre ou colonne de solution. (Colonne S)

Plus tard, nous allons aborder la colonne R.

Pour lire la valeur d'une variable, on vérifie si la variable est dans la base. Dans l'affirmative, on lit sa valeur sur la même ligne dans la colonne S. dans le cas contraire, la valeur de la variable est nulle. Ainsi, on a comme solution de base.
$x = 0\,;\ y = 0\,;\ e_1 = 16\,;\ e_2 = 10\,;\ e_3 = 40$. Les valeurs nulles de x et y ne peuvent en aucun cas maximiser un quelconque profit, car elle conduise à une période de non activité. Il va falloir chercher à faire entrer x ou y dans la base afin de pouvoir lire leur valeur non nulle dans la colonne S. lorsqu'une variable entre dans la base, on l'appelle **variable entrante**, lorsqu'une en sort, on l'appelle **variable sortante.**

2.3 IDENTIFICATION DE LA VARIABLE ENTRANTE

On appelle **variable entrante**, la **variable qui a le coefficient le plus fort positif dans la fonction économique**. Il s'agit ici de y dans le cas d'espèce (car y correspond à 3500 sur la ligne de la fonction économique).

2.4 IDENTIFICATION DE LA VARIABLE SORTANTE

Pour identifier la **variable sortante**, on crée une nouvelle colonne appelée **colonne des rapports (R)**.La colonne (R) comporte les rapports des éléments de la **colonne (S)** à ceux des éléments de la **colonne de la variable entrante**. On identifie au niveau de **(R)** le **réel le plus faible positif** et **la variable en base qui est sur la même ligne que ce réel sera considérée comme variable sortante**. Il s'agit ici de $e_3$dans notre exemple (Car $e_3$correspond à 10 dans la colonne (R)).

Par ailleurs, l'élément situé à **l'intersection de la ligne qui correspond à la variable sortante (VS) et de la colonne qui correspond à la variable entrante (VE)** est appelée pivot.[**(LVS)∩(LVE) = pivot**]

VARIABLE ENTRANTE (VE)

VARIABLE SORTANTE (VS)

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S	R
e1	1	1	1	0	0	16	16/1=16
e2	1	0	0	1	0	10	10/0 = INFINI
e3	1	4 PIVOT	0	0	1	40	40/4= 10
Z	2000	3500	0	0	0	0	RIEN

2.5 REMPLISSAGE DU TABLEAU

Pour obtenir le tableau suivant, on divise la ligne du pivot par le pivot jusqu'à (S) ; et l'on remplace les autres éléments de la colonne du pivot par des zéros (0) jusqu'à (Z). Le tableau est le suivant :

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S
e1		0				
e2		0				
e3	1/4	1	0	0	1/4	10
Z		0				

e3 sort et laisse place à Y

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S
e1		0				
e2		0				
Y	1/4	1	0	0	1/4	10
Z		0				

Pour remplir les autres cases vides du tableau, on utilise soit la méthode matricielle ou la méthode des quatre (4) sommets du rectangle.

2.6 METHODE MATRICIELLE

La méthode matricielle suit les étapes suivantes :

- Lorsqu'on divise la ligne du pivot par le pivot,

La nouvelle ligne ainsi obtenue est appelée **ligne témoin.**

Cette méthode permet de remplir toute une ligne entière.

- Pour remplir donc une quelconque ligne du tableau, on recopie la ligne témoin au brouillon et en dessous, on recopie les anciens éléments de la ligne qu'on veut remplir.
- On cherche un coefficient ou multiplicateur dont le produit avec l'élément de la ligne témoin de la colonne du pivot ajoutée à l'ancien élément de cette même colonne puisse donner zéro (0).
- Une fois le coefficient identifié on effectue les opérations colonne par colonne.

Le dernier tableau de simplexe est celui au niveau duquel tous les coefficients de la fonction économique sont négatifs ou nuls.

Il est conseilléde commencer le remplissage du tableau à partir de la ligne de la fonction économique.

Cette explication nous permet d'aboutir aux calculs suivants :

-3500(1/4 1 0 0 1/4 10)

2000 3500 0 0 0 0

1125 0 0 0 -875 -35000

la ligne résultat que tu vois ci-dessus sera recopiée dans la ligne de la fonction économique en respectant chaque colonne.

0 (1/4 1 0 0 1/4 10)

1 0 0 1 0 10

---

1 0 0 1 0 10

La ligne résultat que tu vois ci-dessus sera recopiée dans la ligne qui est au dessus de la ligne témoin en respectant chaque colonne.

-1 (1/4 1 0 0 1/4 10

1 1 1 0 0 16

3/4 0 1 0 -1/4 6

la ligne résultat que tu vois ci-dessus sera recopiée dans la 1ère linge en respectant chaque colonne.

Après ces différents calculs voici le tableau de simplexe résultat :

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S
e1	3/4	0	1	0	-1/4	6
e2	1	0	0	1	0	10
Y	1/4	1	0	0	1/4	10
Z	1125	0	0	0	-875	-35000

Remarquer que les éléments de la ligne de la fonction économique ne sont pas tous négatifs ou nuls. On ira encore à la recherche de la (VE) et de la (VS) confère la technique décrite plus haut pour trouver (VE) et (VS). Ce qui nous donne le tableau suivant :

VARIABLE ENTRANTE (VE)

VARIABLE SORTANTE (VS)

VB \ VHB	X	Y	e1	e2	e3	S	R
e1	3/4	0	1	0	-1/4	6	6/3/4= 8
e2	1	0	0	1	0	10	10/1= 10
Y	1/4	1	0	0	1/4	10	10/1/4 = 40
Z	1125	0	0	0	-875	-35000	RIEN

VHB / VB	X	Y	e1	e2	e3	S
e1	1	0	4/3	0	-1/3	8
e2	0					
Y	0					
Z	0					

e1 sort et laisse place à x

VHB / VB	X	Y	e1	e2	e3	S
x	1	0	4/3	0	-1/3	8
e2	0					
Y	0					
Z	0					

Remarquer que les variables x et y qui étaient hors base sont entrées dans la base.

Il faut donc procéder de la même manière pour remplir le tableau ci-dessus. Cependant, voici les différents calculs :

-1125 (	1	0	4/3	0	-1/3	8)
	1125	0	0	0	-875	-35000
	0	0	-1500	0	-500	-44000

Résultat à recopier dans la ligne de la fonction économique colonne par colonne.

-1/4 (1	0	4/3	0	-1/3	8)	
1/4	1	0	0	1/4	10	
0	1	-1/3	0	1/3	8	

Résultat à recopier dans la ligne qui est en haut du ligne de la fonction économique colonne par colonne

-1 (1	0	4/3	0	-1/3	8)	
1	0	0	1	0	10	
0	0	-4/3	1	1/3	2	

Résultat à recopier dans la ligne qui est en dessous de la ligne temoin colonne par colonne.

Ces différents calculs nous conduisent au dernier tableau de simplexe au niveau duquel les coefficients de la fonction économique sont nuls ou négatifs.

VHB / VB	X	Y	e1	e2	e3	S
x	1	0	4/3	0	-1/3	8
e2	0	0	-4/3	1	1/3	2
Y	0	1	-1/3	0	1/3	8
Z	0	0	-1500	0	-500	-44000

Puis que les éléments de la ligne de la fonction économique sont négatifs ou nuls, il n'y a plus d'autre tableau c'est donc le dernier tableau de Simplexe que nous allons essayer d'analyser. Ce dernier tableau de simplexe nous donne à l'optimum, $x = 8$, $y = 8$ et $z = |-44000| = 44000$. En somme l'atelier devra produire 8 chaises et 8 tables pour un bénéfice maximum de 44000. Remarquer que les valeurs de x, y et de z sont lues dans la colonne (S).

3. INTERPRETATION DU DERNIER TABLEAU DE SIMPLEXE

A l'optimum on a : x = 8 ; y = 8 ; $e_1 = 0; e_2 = 2; e_3 = 0$ les valeurs nulles des variables d'écarts $e_1$et $e_3$signifient donc que les contraintes $\begin{cases} x + y \leq 16 \\ x + 4y \leq 40 \end{cases}$ auxquelles elles sont respectivement associées sont des contraintes saturées. Autrement dit, on dira qu'il y a plein emploi au niveau des facteurs auxquels ces contraintes sont liées. La contrainte $x + y \leq 16$ entant liée au facteur bois et la contrainte $x + 4y \leq 40$ étant liée au facteur heure de mains d'œuvre directe. On dira donc qu'il y a plein emploi au niveau du facteur bois et au niveau du facteur heure de mains d'œuvre directe. Tout cela veut dire tout simplement qu'à l'optimum il reste $e_1 = 0$ unité de bois et $e_3 = 0$ unité de mains d'œuvre directe en stock.

En revanche, $e_2 = 2 \neq 0$ implique que la contrainte $x \leq 10$ à laquelle e_2 est associée est une contrainte non saturée. Il n'y a donc pas de plein emploi au niveau du facteur auquel cette contrainte est liée. Il reste donc à l'optimum e_2= 2 unités de tissu en stock.

Par ailleurs, s'il était question de modifier un élément du second membre en augmentant ou en diminuant, la nouvelle expression de la fonction économique est obtenue en ajoutant à la valeur optimale (ou en diminuant) le nombre d'unité de facteurs augmentés ou diminués multipliés par le coefficient de la variable d'écart sur la ligne de la fonction économique de la contrainte modifiée.

<u>Exemple</u> : Considérons le cas selon lequel il est question de modifier la contrainte $x + y \leq 16$ pour obtenir $x + y \leq 16 \pm k; k \in N$. On aura : $Z' = Z_{max} \pm k|-1500|$ ce qui donne le résultat suivant : $Z' = 44000 \pm 1500k$.

Par contre, il faut remarquer lorsqu'on décidera d'augmenter le nombre de tissu en stock, cela n'aura aucun effet ou aucune incidence sur la fonction économique car la variable d'écart associée à cette contrainte a pour coefficient nul sur la ligne de Z. (la ligne de la fonction économique).

4. NOTION DE DUALITE

Le programme écrit en tenant compte des instructions d'un exercice est appelé **programme primal.**

Exemple : $\begin{cases} (x, y) \geq (0; 0) \\ x + y \leq 16 \\ x \leq 10 \\ x + 4y \leq 40 \\ Max(Z = 2000x + 3500y) \end{cases}$

Le programme réciproque du primal est appelé **programme dual**. Le passage du primal au dual est fait grâce à l'usage des règles suivants :

* Pour identifier le nombre de variable du programme dual, il faut dénombrer le nombre de contraintes techniques dans le programme primal. Il y a donc autant de variable dual que de contrainte primale.
* Pour obtenir la matrice principale du programme dual, on transpose la matrice principale du primal. Le nombre de ligne contenu dans la matrice principale du dual représente le nombre de contrainte technique du programme dual.

Exemple :

La matrice principale du primal est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, la matrice principale du dual sera donc le transposé de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

* Les éléments du second membre du primal deviennent les coefficients de la fonction économique du dual (vice-versa) ou réciproquement.
* Si les contraintes du primal sont du type $\geq$; alors celle du dual seront du type $\leq$ (réciproquement).
* Si la fonction économique du primal est à minimiser alors celle du dual serait à maximiser (réciproquement).
* Pour obtenir les solutions du programme dual on prend en valeur absolue les coefficients des variables d'écart du dernier tableau de simplexe du programme primal sur la ligne de la fonction économique.

NB : le dual du dual est le primal. Le maximum du primal est le minimum du dual (réciproquement).

<u>THEOREME</u>

Lorsqu'une variable dual est non nulle, la contrainte primale à laquelle elle est associée est une contrainte saturée alors que lorsque la variable dual est nulle la contrainte primale à laquelle elle est associée n'est pas saturée ; de même lorsqu'une variable primale est nulle la contrainte dual à laquelle elle est associée est saturée et lorsque la variable primal est nulle la contrainte dual à laquelle elle est associée est une contrainte non saturée.

Exemple du programme dual : $\begin{cases} (u\ ;\ v\ ;\ w) \geq (0;0;0) \\ u + v\ + w\ \geq 2000 \\ \quad u + 4w \geq 3500 \\ \\ \quad Min(Z' = 16u + 10v + 40w) \end{cases}$

$$e_1 = u = |-1500| = 1500$$

$$e_2 = v = |0| = 0$$

$$e_3 = w = |-500| = 500$$

$$Z' = 16(1500) + 10(0) + 40(500) = 44000$$

Exercice d'application

La société Manu et Fils fabrique deux produits x et y qu'elle vend à des grossistes aux prix respectifs de 320F et 500F. La fabrication des produits x et y nécessite l'utilisation de trois machines M_1 ; M_2 et M_3pendant des temps exprimés en minute dans le tableau suivant :

	X	Y
M1	20	30
M2	50	50
M3	10	40

Les machines ne sont disponibles au cours d'un mois que 300Heures ; 500Heures et 200Heures respectivement pour M_1 ; M_2 et M_3. La marge sur coût variable de production s'élève à 25% pour x et 20% pour y. vous êtes chargé de la gestion de la production de la société.

Travail à faire

1°) Déterminer le programme de fabrication des deux produits de sorte à maximiser la marge sur coût variable.

2°) Déduit le chiffre d'affaire mensuel prévisionnel.

3°) Indique les machines pour lesquelles il y aura plein emploi.

4°) Présente le programme dual et donner sa solution.

5°) Donner une interprétation de chacune des variables duales à l'optimum.

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 01

L'entreprise MISSI MAHU dispose de deux points de ventre V_1 et V_2 pour la distribution de trois biens B_1, B2 et B_3. Le coût journalier par point de vente est de 3800 kilofrancs (KF) au niveau de V_1 et de 4500KF au niveau de V_2. Pour le programme à venir, votre entreprise prévoit vendre au moins 300 unités de B_1, 1600 de B_2 et 2500 de B_3. Les ventes journalières de chaque bien (B_i) par point de vente (V_j) sont données par la matrice ci-après :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Si chacune des points de vente dispose du même nombre de jour de vente, on vous demande :

1) De formuler le modèle linéaire indiquant le nombre de jours à accorder à V_1 et V_2 pour minimiser les charges ;
2) D'écrire le dual du modèle ;
3) De résoudre le dual par simplexe ;
4) De donner le montant des charges ;
5) De préciser le nombre de jours accordés V_1 et V_2 ;
6) De donner le nombre vendu de B_1, B2 et B_3.

EXERCICE 02

Une entreprise fabrique deux modèles de portables : le modèle C2 et le modèle C03 à partir de 3 composants P1, P2 et P3. La fabrication d'un C2 nécessite 1 P1 et 8 P3 et celle d'un C03 nécessite 5 P1 et 1P2.
Les disponibilités annuelles an composants de l'entreprise sont : 3500 P1, 640 P2 et 4000 P3.
Les prix de vente unitaires sont : 40kF pour un C2 et 30kF pour un C03.
Les coûts unitaires des composants sont de 2kF pour P1, 7kF pour P2 et 4kF pour P3.

1- En utilisant la méthode du simplexe déterminer la marge bénéficiaire annuelle maximale de l'entreprise.
2- Donner le nombre total de portables fabriqués ainsi que le chiffre d'affaire annuel de l'entreprise.
3- Indiquer les quantités des différents composants P1. , P2 et P3 restants.

EXERCICE 03

Un cultivateur prévoit de consacrer 11,5 hectares à la culture de maïs et de sorgho. Il sait que la vente de la production d'un hectare de maïs lui rapporterait 40 000 francs alors que celle d'un hectare de sorgho lui rapporterait 50 000 francs. Il dispose pour prépare ces cultures de 102 jours de main d'œuvre.

La préparation d'un hectare de maïs nécessite 8 jours tandis que celle d'un hectare de sorgo 12 jours.

Quelles doivent être les surfaces cultivées respectives de maïs et de sorgho pour que le cultivateur ait le profit maximum ?

EXERCICE 04

L'entreprise MISSI MAHU vient de gagner le marché de construction d'un grand centre commercial à Bohicon. Elle fait donc appel à deux sociétés de transport pour acheminer du port de Cotonou à Bohicon un minimum de 1500 tonnes de ciment, 300 barres de fer et 400 tonnes de peinture.

- La société Funmi dispose de 30 camions susceptibles de transporter chacun 30 tonnes de ciment 10 barres de fer et 10 tonnes de peinture. Le cout de location d'un camion à cette société s'élève à 75000 francs.
- La société Ayo dispose de 40 camions susceptibles de transporter chacun 30 tonnes de ciment 6 barres de fer et 10 tonnes de peinture. Le cout de location d'un camion à cette société s'élève à 100.000 francs.

L'entreprise MISSI MAHU aimerait connaitre le nombre de camions de chaque société à louer afin de minimiser les couts de location.

1- Formaliser le problème ci-dessus sous la forme d'un programme linéaire.
2- Résoudre le programme linéaire précédent puis déduire le nombre de camions de chaque.
Déduire les niveaux de satisfaction des besoins.
3-Ecrire le dual du programme linéaire ci-dessus puis donner ses solutions.

EXERCICE 05

Le centre de formation de KAYOLA est spécialisé dans la fabrication de deux modèles de pot au feu :

Le modèle OKA et le modèle OBE. Pour leur fabrication on utilise trois ateliers :

- Dans l'atelier A prévu pour la cuisson on peut traiter 40 pots en 2 heures quelque soit le modèle.
- Dans l'atelier B conçu pour le refroidissement 40 pots du modèle OKA peuvent être traités en 2 heures ou 10 pots du modèle OBE en 1 heure.
- Dans l'atelier C réservé à la décoration on peut traiter 40 pots du modèle OKA en 1 heure ou 20 pots du modèle OBE en 2 heures.

Les heures de formation étant réparties en cours théoriques et en cours pratique, l'établissement ne peut disposer que de 1 140 minutes au total pour les trois ateliers et par semaine. Ce temps est réparti proportionnellement au nombre d'étudiants par atelier ; le premier atelier comporte 12 étudiants, le second 16 et le troisième 10. Par ailleurs les coûts par minute d'utilisation des ateliers sont de 3 F pour l'atelier sont de 3 F pour l'atelier A, 4 F pour l'atelier B et 10 F pour l'atelier C. Enfin les pots sont vendus au prix unitaire de 382 F pour 1 pot modèle OKA et de 507 F pour un pot modèle OBE.

1- Ecrire le programme linéaire P permettant de maximiser le bénéfice du centre.
2- Résoudre P par la méthode du simplexe et donner la solution.
3- Présenter le programme dual et donner sa solution.
4- On augmente d'une minute la capacité de l'atelier cuisson. Quelle est l'influence sur le bénéfice ?

EXERCICE 06

L'entreprise MISSI MAHU fabrique pour des entreprises de quincaillerie des pièces en inox. Ces pièces sont de 3 types A, B, C. Elles sont fabriquées par lots de 50 dans un grand atelier ou sont rassemblées deux machines pour le polissage et la finition. Chaque machine fonctionne 120 heures par mois. La SOCAM désire optimiser son résultat.

	Coût de l'heure	Lot A	Lot B	Lot C
Découpe	1.000F	1H	1,5H	1,5H
Emboutissage	1.500F	0,5H		1H
Polissage et finition	2.000F	2H	1H	1H
Inox	Coût	2.500F	4.250F	3.400F
Prix de vente		10.000F	10.000F	10.500F

Quel est le programme de production optimal (pour un mois) ?

EXERCICE 07

L'intendant d'un lycée veut servit à ses internés un repas contenant un minimum d'élément nutritifs et étant le moins coûteux possible.il se limite à 2 denrées alimentaires D1 et D2 dont les coûts unitaires sont 200F et 250F. Ces denrées contiennent 3 éléments nutritifs : les vitamines V, les calories C et les protéines P en quantités indiquées comme suit :

Elément Denrées	V	C	P
D1	1	1	3
D2	5	2	2

Le repas doit comporter au minimum 5 unités de V, 4 unités de C et 6 unités de P. On voudrait déterminer les quantités D1 et D2 que le repas doit contenir.

1) Mettre le problème sous forme d'un programme linéaire (PL1) et résoudre graphiquement.
2) Donner et résoudre le dual. En déduire la solution du problème. Interpréter le dual.
3) Reprendre la résolution directement par la méthode du simplexe.

EXERCICE 08

La société des carrières de ZE a pour but l'extraction et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la Fourniture aux ponts et Chaussées de graviers de différents calibres

Un marché portant sur les quantités suivantes :

Graviers de calibre 1 : 13.500 tonnes

Graviers de calibre 2 : 11.200tonnes

Graviers de calibre 3 :   5.000 tonnes

a été adjugé pour un prix global de facturation.

La société exploite 2 carrières P1 et P2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne de pierre extraite. Celle-ci est la suivante :

- Pour P_1 : 1.940F par tonne
- Pour P_2 :2000F par tonne

Après extraction, la pierre est concassée. Les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes de graviers (exprimées en tonnes) :

Pierre de P_1 : Graviers de calibre 1 :0,3t

Graviers de calibre 2 : 0,4t

Graviers de calibres 3 :0,16t

Pierre de P_2 : Graviers de calibre 1 : 0,45t

Graviers de calibre 2 : 0, 2t

Graviers de calibre 3 : 0,1t

(Le complément à une tonne représente du sable, actuellement considéré comme déchet sans valeur marchande).

La société souhaite définir son programme d'extraction de pierre de P_1 et P_2 de façon à minimiser le coût des redevances à la société civile.

Travail à faire

a) Présenter le programme linéaire correspondant sous la forme canonique
b) Donner une solution graphique
c) Donner la formule du programme dual
d) Résoudre le programme dual par la méthode du simplexe et contrôler la solution obtenue en b
e) L'optimisation de programme conduit-elle à produit des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjugés ?
Justifier la réponse.

EXERCICE 09

La société KOKOSSOU décide de se diversifier dans une nouvelle activité qui consiste à fabriquer deux produits répertoriés sous les code X et Y. Elle prévoit de disposer pour cette production de :

- 250 unités temps-machines de l'atelier A
- 600 unités temps-machines de l'atelier B
- 900 unités temps main-d'œuvre.

La fabrication des produits nécessite :

Produit	Nombres unités temps		
	Machine A	Machine B	MOD
X	1	2	2
Y	1	3	5

1. Sachant que le prix de vente d'une unité de produit X est 90.910F, et que celui de Y se monte à 112.635F, quel programme de fabrication permet de réaliser le chiffre d'affaires maximal ?
    a) Présenter la solution graphique
    b) Vérifier vos résultats par la méthode du simplexe
    c) Indiquer la signification de valeur de chaque variable d'écart au maximum.
2. La société KOKOSSOU envisage d'acheter de nouvelles machines pour L'atelier A ; cet investissement porterait à 270 le nombre d'unités temps disponibles pour cet atelier.
    a) Trouver graphiquement le nouvel optimum.
    b) Une fois desserrée cette contrainte « temps-machine atelier A », l'entreprise peut se permettre d'en desserrer une autre, mais une seule.

A l'aide du graphique :

- Indiquer la contrainte choisie pour augmenter à nouveau le chiffre d'affaires ;
- Calculer de combien il faut augmenter le nombre d'unités temps de cette contrainte pour atteindre ce nouveau chiffre d'affaire maximum.

EXERCICE 10

‘‘ La Potière ‘‘ est une petite fabrique de pots de fleurs.

Les pots sont présentés sous 2 modèles : le modèle luxe et le modèle ordinaire. La fabrication des pots nécessite un passage en atelier 1 pour le mélange d'argile, en atelier 2 pour la cuisson et en atelier 3 pour la finition.

<u>En atelier 1</u> la fabrication de 10 pots modèle luxe nécessite 10h, un pot ordinaire nécessite 2 fois plus de temps que le modèle luxe et la capacité de l'atelier permet de produire 5 pots ordinaire par jour.

<u>En atelier 2</u> le temps de cuisson est le même pour les 2 modèles et la capacité est limité à 6 pots luxe par jour.

<u>En atelier 3</u> la finition d'un modèle luxe nécessite 2 fois plus le temps que celle de modèle ordinaire et la capacité de l'atelier est limitée à 6 pots luxes par jour. La vente d'un pot luxe procure 1,5 fois plus de bénéfice que celle d'un modèle ordinaire.

Travail à faire

1/ Donner le programme fabrication journalière qui permet de maximiser le bénéfice total Z. On le notera (xop ;yop)

2/ On choisit u, v, w comme variables duales. Donner la signification économique de ces variables. Présenter le programme dual, (D) et déduire sa solution de 1/. Donner une interprétation économique de la valeur optimale uop, Vop, wop. On prendra en compte les unités des différentes grandeurs.

EXERCICE 11

L'entreprise KOLA et fils fabrique 3 types d'articles A1, A2, A3. Elle utilise à cet effet :

- De la main d'œuvre à raison de 5 h par unité de A1, 8 h par unité de A2 et 6h par unité de A3. Elle dispose de 8 ouvriers qui travaillent 8h chacun par semaine.
- De la matière première à raison de 6 kg par unité de A1 ; 8 kg par unité de A2 et 7 kg par unité de A3.

Elle dispose de 400 kg de cette matière par semaine. Le marché est limité à 30 unités de A1, 25 unités de A2 et 40 unités de A3 par semaine.

L'article A1 rapport un profit unitaire de 5 000 F, A2 rapporte 10 000 F par unité et A3 8 000 F par unité. L'entreprise KOLA se propose de déterminer les quantités x, y, z des articles A1, A2, A3 qu'elle doit fabriquer pour maximiser son profit total hebdomadaire Z.

1) Faire une formulation mathématique du problème.
2) Résoudre le modèle par la méthode du simplexe et présenter la production optimale et le profit correspondant.
3) Donner la signification des variables d'écart à l'optimum.
4) Présenter le programme dual (on notera u, v, w,p, q, les variables duales).
Déduire de 2) la solution du dual et donner une interprétation des variables duales à l'optimum.

EXERCICE 12

La société SENA envisage de confier à son unité de production du Nord, l'élaboration d'un produit (A) et d'un produit (B) demandés par certains industriels. Cette fabrication devra répondre aux contraintes mensuelles suivantes :

- Fabrication minimale : Produit (A) : 400 unités, Produits (B) : 500 unités.

- La matière première sera livrée par l'usine principale à l'unité de production qui devra traiter un minimum de 3600 kg de matières.
- En ce qui concerne la main d'œuvre directe (MOD), et compte tenu des perspectives de développement ultérieur, le maximum sera fixée à 1 000h.

Renseignements complémentaires : le coût des transports mis en place entre l'unité de production et l'usine principale pour l'acheminement des matières premières et le retour des produits finis devra être rendu minimal, le prix de ce transport a été estimé à 2 F/kg de matières ou de produits finis transportés.

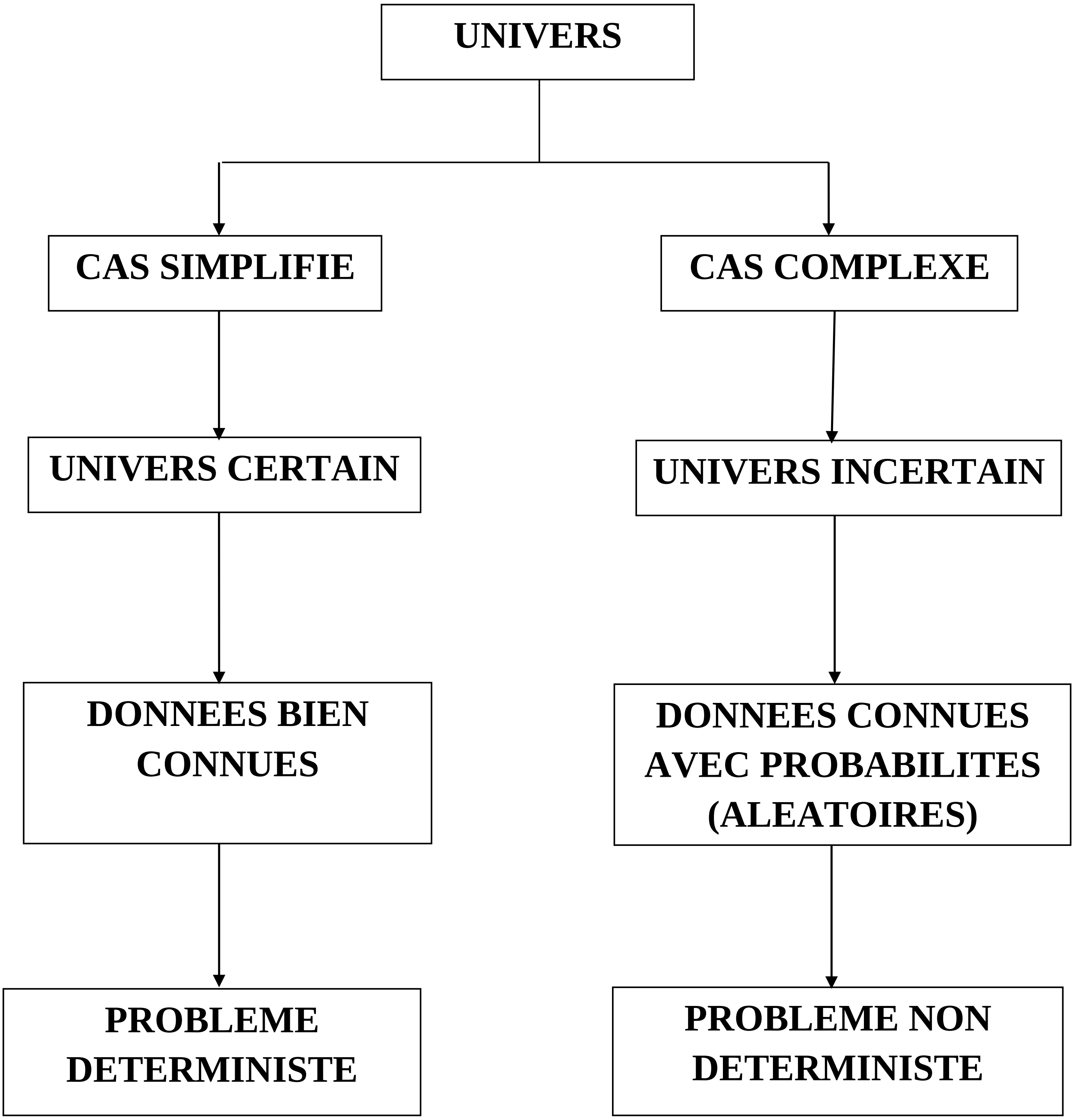
	A	B
Matière première	2 kg	3 kg
MOD	1 H	0,5 H
Poids de produits finis	1,5 kg	2 kg

TAF :

1) Déterminer le programme mensuel de produit (A) et de produit (B).
2) Préciser les unités d'œuvres pour lesquelles il y à plein emploi.

LA GESTION DES STOCKS

Schéma récapitulatif sur la gestion des stocks



DEFINITION

Les problèmes de stockage des matières premières, des consommables et des produits finis constituent une composante importante de la gestion de l'entreprise.

L'entreprise doit satisfaire la demande que ses clients lui adressent avec un double souci: le gestionnaire des stocks doit arbitrer entre la minimisation des coûts de stockage et la disponibilité des stocks.

I- LES PARAMETRES DE GESTION DES STOCKS

Les paramètres qui seront utilisés sont les suivants :

-T = période de réapprovisionnement ; c'est la durée qui sépare le réapprovisionnement successif. Il s'agit encore de cadence d'approvisionnement. En général, on la considère constante.

- θ = période de gestion ; c'est la période totale sur laquelle est effectuée la gestion des stocks en général, l'année.

- D = demande de matière 1ère ou produit pendant la période de gestion de stock.

- Q = c'est la quantité commandée à chaque réapprovisionnement.

Elle est déterminée par le gestionnaire de façon à remplir les deux contraintes de gestion de stock.

- n = C'est le nombre de commande de la période de gestion

$$n = \frac{D}{Q}$$

- G = coût global de gestion du stock (objectif à minimiser)

G = Gc + Gs avec Gc le coût global de passation des commandes

Gc = Ct × n où Ct = coût d'une passation de commande ou coût de lancement.

Et Gs = coût global de possession du stock. Il est fonction de la quantité stockée (stock moyen = $\frac{SI + SF}{2} = \frac{S\min + S\max}{2}$ et de la durée de la période de gestion.

$Gs = Cs \times \frac{Q}{2} \times \theta$ avec Cs = coût de stockage d'une unité de produit pendant une unité de temps. Cs = t × p où t = taux de possession unitaire et p = prix unitaire du produit.

- Cp = coût de rupture du stock ou coût de pénurie, il correspond soit :
  - au manque à gagner sur les ventes des produits non réalisés du fait des manquants en stock ou du retard de livraison ;

- au coût du retard engendré dans le processus de fabrication s'il s'agit des matières premières ;

La date est assurée pendant la période T1 puis il y a rupture de stock ou pénurie pendant la période T2. T2 = T – T1

II- Modèle de gestion des stocks

Divers modèles sans cessent perfectionné sont utilisés pour la gestion du stock. De nos jours, il y a plusieurs logiciels de gestion des stocks.

Nous étudierons ici quelques modèles de gestion de stock parmi les plus utilisés.

1- Modèle de WILSON

Objectif

Ce modèle cherche à déterminer le volume optimal Q* à commander à chaque période de façon à minimiser le coût global de gestion du stock de la période considérée.

Hypothèse de base

- la demande est constante
- aucune rupture de stock n'est disponible ;
- la période de réapprovisionnement T est constante ;
- le stock de sécurité est nul (le stock de sécurité est destiné à prévenir les incidents à caractère aléatoire permettant ainsi d'assurer au mieux la continuité de l'exploitation.

  Le stock de sécurité est nul car la demande est connue d'avance avec précision.

Résolution du modèle

$$G = Gc + Gs$$

$$Gc = Ct \times n$$

$$= Ct \times \frac{D}{Q}$$

$$Gs = Cs \times \frac{Q}{2} \times \theta \quad G(Q) = Ct \times \frac{D}{Q} + Cs \times \frac{Q}{2} \times \theta$$

G (Q) est minimum pour la valeur de Q qui annule G' (Q) et tel que G'' (Q) $\succ 0$

$$G'(Q) = -Ct \times \frac{D}{Q2} + \frac{Cs \times \theta}{2}$$

$$G'(Q) = 0 \Rightarrow -Ct \times \frac{D}{Q^2} + \frac{C_s \times \theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -Ct \times \frac{D}{Q^2} = -\frac{C_s \times \theta}{2} \Rightarrow Q^2 = \frac{2CtD}{C_s\theta}$$

Q = $\sqrt{\dfrac{2CtD}{C_s\theta}}$

G′ (Q) = $\alpha Q^{-2} + \dfrac{C_s \times \theta}{2}$ avec α = - CtD $\prec 0$

G′′ (Q) = -2 $\alpha Q^{-3} \succ 0$

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2CtD}{C_s\theta}}}$$

Q* est la quantité optimale à consommer encore appelée lot économique.

Conséquence

- nombre optimal de commande à effectuer

n* = $\dfrac{D}{Q*}$

- cadence d'approvisionnement ou durée de la période de réapprovisionnement

T* = $\dfrac{\theta}{n*} = \theta . n^{*-1}$

- coût global de gestion

G (Q*) = Ct $\times \dfrac{D}{Q*} + C_s \dfrac{Q*}{2}\theta$

Remarque

On peut déterminer n* à partir du coût global. En effet :

G = Gc + Gs

= Ctn + Cs $\dfrac{Q}{2}\theta$ or n = $\dfrac{D}{Q} d'où Q = \dfrac{D}{n}$

G(n) = Ctn + Cs $\dfrac{Q}{2n}\theta$

G (n) est à minimiser

$$\begin{cases} G'(n) = 0 \\ G''(n) \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{n* = \sqrt{\frac{CsD\theta}{2Ct}}}$$

Limites du modèle

Les hypo sont loin de la réalité (demande connue et uniforme, le temps de réapprovisionnement régulier...) or dans la pratique la quantité commandée n'est pas constante, et son irrégularité peut occasionner à l'entreprise des ruptures de stock qu'elle doit chercher à tout prix à éviter à cause de leur coût.

Exercice :

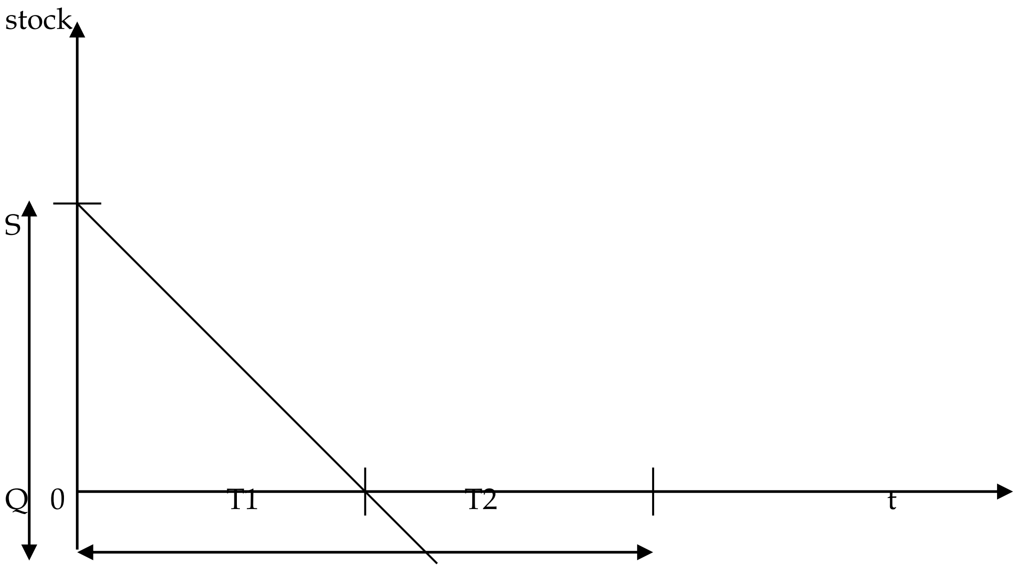
L'entreprise ABC spécialisée dans la bureautique achète à 4000000 F pièces les logiciels de gestion destinés à la revente à des entreprises utilisatrice. Les ventes annuelles s'établissent à 360 logiciels. Le coût de passation d'une commande à 20.800. Le coût de possession est évalué à 6,5 % l'an.

TAF

1- Calculer le nombre optimal de commande à passer ;
2- Si on suppose que le délai d'approvisionnement est de un mois (30jours). Calculez le stock critique ou stock d'alerte
3- Représentez sur un graphique l'évolution du stock. Déterminer les dates des premières commandes et livraisons

2-2- **Autres modèles de gestion des stocks**

- Modèle avec coût de rupture



T1 = période pendant laquelle le stock « S » est entièrement consommé (peut être en jours)

T2 = période pendant laquelle la date E ne peut être satisfaite

La rupture de stock entraîne un coût de pénurie.

Le coût de gestion de stock G devient :

G = Gs + Gc + Gp

Gs (Q) = $\frac{S^2}{2Q} \times Cs \times T$ coût de passation

Coût de pénurie : Gp (Q) = $\frac{(Q-S)^2}{2Q} \times Cp \times T$

Coût de passation de commande = Gc = Ct

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2CtD}{\theta.Cs}} \times \frac{1}{\ell}}$$

Avec ℓ taux de pénurie

$$\boxed{\ell = \frac{Cp}{Cs + Cp}} \qquad \boxed{S = \ell \times Q^*}$$

S = stock maximal

$$\boxed{n^* = \frac{D}{Q^*}} \qquad \boxed{T^* = \frac{\theta}{n^*}}$$

Stock critique minimal ou stock d'alerte = délai d'approvisionnement × consommation journalière.

La méthode 20/80 ou 80/20

Par cette méthode les articles sont décomposés en deux groupes :

- groupe 1 : 20/80
  On estime qu'environ 20 % des articles de ce groupe procure à l'entreprise 80 % du chiffre d'affaire ou représente en terme de consommation 80 %.

  Les articles de ce groupe doivent être géré avec beaucoup de rigueur.

- groupe 2 80/20

Ici on estime qu'environ 80 % des articles procurent à l'entreprise 20 % du chiffre d'affaire ou représente en terme de consommation 20 %. Les articles de ce groupe doivent être géré moins rigoureusement.

- Méthode ABC
  Cette méthode s'inspire de la précédente. Tous les articles sont classés en 3 groupes :

- Groupe A : 10/70 à gérer avec beaucoup de rigueur
- Groupe B : 30/20 à gérer moins rigoureusement
- Groupe C : 60/10 à gérer de manière Laxiste.

Application :

A-) le coût de stockage d'un article de forte consommation (300 000 unités par an) est de 0,08F par jour le coût de lancement d'une commande est de 972F.

1-) Déterminer la quantité économique à commander pour minimiser le coût total de gestion du stock de l'article.

2-) En déduire le nombre de commandes optimales à passer au cours de l'année ainsi que le coût global de gestion

B-) Le coût unitaire d'un article dont la consommation annuelle est de 4 800 unités est fixé à 3000 F. le coût de passation d'une commande est évalué à 1 200F et le taux par francs annuels du coût de possession du stock est de 15%. Déterminer la quantité optimale à commander, le nombre total de commandes à passer, le coût de gestion du stock et la période de réapprovisionnement

Résolution

A-

C = 300 000 unités θ = 360 jours

Cs = 0, 08 F / j f = 972 F

1- Quantité à commander

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_l}{c_s\theta}} = \sqrt{\frac{2\times972}{0{,}08\times360}}$$

Q* = 4 500 unités

2- Le nombre de commandes

Soit N* ce nombre

$$N^* = \frac{D}{Q*} \qquad N^* = \frac{300\ 000}{4\ 500} = 66{,}66$$

N* = 67 Commandes

3- Le coût global de gestion

Soit G* le coût

G* = 129 600 F

G* = $\sqrt{DC_l c_s \theta}$ G* = $\sqrt{2 \times 972 \times 300000 \times 0{,}08 \times 360}$

B-

C = 4 800 unités P = 3 000 F J = 1 200 F t = 15 %

1- Déterminons Q*

Q* = $\sqrt{\frac{2DC_l}{pt}}$ Q* = $\sqrt{\frac{2 \times 1200 \times 4800}{3000 \times 0{,}15}}$

Q* = 160 unités

2- Le coût du stock G*

G* = $\sqrt{2DC_l pt}$ G* = $\sqrt{2 \times 1200 \times 4800 \times 3000 \times 0{,}15}$

3- Le nombre de commandes optimum

N* =$\frac{D}{Q*}$ N* =$\frac{4800}{100}$

N* = 30 commandes

4- La période T*

T* = $\frac{\theta}{N}$ T* = $\frac{360}{100}$

T* = 12 jours

2/ <u>Modèle de Wilson avec tarif dégressif</u>

Ce modèle est une amélioration du modèle de Wilson, il prend en compte le système de prix dégressif pratiqué par le fournisseur en fonction des quantités d'articles commandés par leurs clients. Ainsi donc, pour ce modèle nous avons les mêmes hypothèses de base que précédemment sauf que le tarif du fournisseur n'est plus unique (plusieurs prix P1 ; P2 ; P3… Pn sont appliqués en fonction des quantités commandées cette fois ci). L'objectif du modèle est de minimiser le coût du stock qui comprend désormais le coût de gestion du stock. (Coût de possession et coût de passation et le coût d'achat des matières. Il est toujours question de déterminer la quantité optimale q* qui minimise le coût du stock. (q* sera différent selon le tarif appliqué).

Si pour une tranche de prix le gain réalisé sur le coût global d'achat et sur le coût global de passation de commande est supérieur à la perte subie sur le coût global de passation de commande est supérieur à la perte subie sur le coût global de possession du stock, alors la remise obtenue est intéressante. Dans le cas contraire la remise par quantité n'est pas profitable à l'entreprise qui achète car une diminution de prix entraîne une augmentation de la quantité de chaque commande et du coût global de possession du stock. Mais dans le même temps une diminution du nombre de commande et donc du coût global de passation.

Conclusion

La procédure de révolution de ce genre de modèle est le suivant :

- On déterminer et on retient pour chaque tranche de prix la valeur de la quantité compatible à commander ; et qui permet de minimiser le coût du stock.
- On calcule le coût du stock pour la quantité compatible à chaque tranche de prix et on retient le coût total du stock le plus faible.

Application

Soit une consommation de 120 000 articles, un coût d'obtention de commandes de 2 000 F et un taux de possession du stock évalué à 12 %. Le fournisseur propose la condition de prix suivante P = 4 200 F pour les commandes inférieures à 900 produits, P = 4 000 F pour les commandes comprises entre 900 et 1200 produits et P = 3 800 F pour une consommation supérieure à 1 200 produits. Quelle est la bonne formule à adopter pour minimiser le coût du stock.

Application 2

A / Le coût de stockage d'un article de forte consommation (300 000 unités par an) est de 0, 08 F par jour le coût de lancement d'une commande est de 972 F.

Résolution

C = 120 000 unités j = 2 000 F t = 12 %

Déterminons la formule meilleure

P = 4 200 F pour Q< 900

$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_l}{pt}}$ $Q^* = \sqrt{\frac{2\times2000\times120000}{4200\times0{,}12}}$

$Q^* = 975{,}9 \simeq 976$ or 976 > 900 alors

$\boxed{Q^* = 900 \text{ unités}}$

- Coût d'obtention GI

$GI = C_l\frac{D}{Q}$ $GI = \frac{2000\times120000}{900}$ GI = 266 666,67 francs

- Coût de possession Gp

$G_1p = \frac{Q*pt}{2} = G_1p = \frac{900\times4200\times0{,}12}{2}$

$\boxed{Gp = 226\,800 \text{ francs}}$

- Coût d'achat G^*_A

$G^*_A = P*D$

$\boxed{G^*_A = 504\,000\,000 \text{ francs}}$

= 4200 × 120 000

- Coût global G*

G = G + G + GA

G = 266 666,67 + 226 800 + 504 000 000

G = 504 493 466,7 francs

- P = 4 000 F pour 900 ≤ Q <1 200

$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_l}{pt}}$ $Q^* = \sqrt{\frac{2\times2000\times120000}{4000\times0,12}}$

Q = 1000 unités

- Le coût d'obtention GI

$GI = C_l \frac{D}{Q}$ $GI = \frac{2000\times120000}{1000}$

GI = 240 000 F

- Coût de possession Gp

$= \frac{Q*pt}{2}$ = G_1p = $\frac{1000\times4000\times0,12}{2}$

G_1p = 240 000 francs

- Coût d'achat G^*_A

G^*_A = PC

= 4000 × 120 000

G^*_A = 480 000 000 francs

- Coût global G*

G = GI + Gp + GA

G = 240 000 + 240 000 + 480 000 000

G = 480 480 000 francs

- P = 3800 F pour Q >1 200

$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_l}{pt}}$ $Q^* = \sqrt{\frac{2\times2000\times120000}{3800\times0,12}}$

Q* = 1025,97 ≃ 1026 unités

Or 1200>1026 alors

Q* = 1200 unités

- Le coût d'obtention GI

$GI = C_l \frac{D}{Q*}$ $GI = \frac{2000\times120000}{1200}$ GI = 200 000 F

- Coût de possession Gp

$Gp = \frac{Q*pt}{2}$ = G_1p = $\frac{1200\times3800\times0,12}{2}$

$\boxed{G_1p = 273\ 600 \text{ francs}}$

- Coût d'achat GA

GA = P*D

= 3800 × 120 000

$\boxed{G1A = 456\ 000\ 000 \text{ francs}}$

- Coût global G

G = GI + Gp + GA

G = 456 000 000 + 273 000 + 200000

$\boxed{G = 456\ 473\ 600 \text{ francs}}$

- P = 3800 F pour Q >1 200

Conclusion

On retient le prix et la Q* dont le G* est le plus faible d'où on a une commande de 1200 produits un prix de 3800 F et G = 456 473 600 F.

3- LE MODELE DE WILSON AVEC RUPTURE DE STOCK

La recherche d'un modèle de plus en plus objectif nous amène à envisager une gestion des stocks avec possibilités de rupture de stock, dans ce modèle la pénurie est relative aux nombres d'articles faisant défaut durant une unité de temps donné. Ainsi donc le coût de rupture s'exprime en francs par unité de temps et d'article du fait du caractère difficile de son évaluation.

Les hypothèses de base de ce modèle sont indiquées à celle du modèle de Wilson pur (consommation régulière, unicité des tarifs du fournisseur etc…).

L'objectif ici visé est de minimiser le coût de gestion du stock constitué du coût de lancement global (annuel), du coût de possession global (annuel et du coût de pénurie).

Soit S le niveau du stock en début de période. Cr le coût de rupture par article et par unité de temps et Q la quantité économique à commander (quantité optimale)0

T_1 est la durée pendant laquelle le stock permet de satisfaire la demande.

T_2 = durée pendant laquelle il y a rupture de stock.

$T = T_1 + T_2$

$SM_{(T1)} = \frac{S}{2} \times \frac{T_1}{T}$ $\quad SM_{(T2)} = \frac{Q-S}{2} = \frac{T_2}{T}$

$\frac{T_1}{T} = \frac{S}{Q}$ (Segment analogue des triangles semblables)

$\frac{T_2}{T} = \frac{Q-S}{Q}$ S < Q   S = tQ   avec O <t< 1

$\frac{T_1}{T} = \frac{tQ}{Q}$ soit $\frac{T_1}{T} = t$ $\frac{T_2}{T} = \frac{Q}{Q} - \frac{tQ}{Q}$ soit $\frac{T_2}{T} = 1 - t$

$SM_{(T1)} = \frac{S^2}{2Q}$ ou $SM_{(T2)} = \frac{Q-S}{2}(1 - t)$

$GI = C_l \times N$ soit $GI = C_l \frac{D}{Q}$

Gp = SM (T1) ×Csθ soit

$Gp = \frac{S}{2} t C_S \theta$

$Gr = SM_{(T2)}\, Cr\, \theta$ $Gr = \frac{Q-S}{2}(1-t)Cr\theta$

G = GI + Gp + Gr

$G = C_l \frac{D}{Q} + \frac{S}{2} t C_S \theta + \frac{Q-S}{2}(1-t)Cr\theta$

$G'_{(Q)} = - C_l \frac{D}{Q^2} + ½ (1 - t)\, Cr\theta$

$G'_{(Q)} = \frac{-2C_l\, D + Q^2(1-t)Cr\theta}{2Q^2}$

$G'_{(Q)} = 0 \Rightarrow Q^2(1 - t)\, Cr\theta = 2DC_l$

$\Rightarrow Q^2 = \frac{2DC_l}{(1-t)Cr\theta}$ or $t = \frac{Cr}{C_s + C_r}$

$\Rightarrow$ Cst + Crt = Cr

$\Rightarrow$ Cr – Crt = Cst

Soit Cr (1 – t) = Cst

Donc $Q^2 = \frac{2DC_l}{C_s \theta t}$

$Q_{op} = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_s \theta t}}$ Soit $Q_{op} = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_s \theta}} \times \sqrt{\frac{1}{t}}$

$$\boxed{Q_{op} = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_s \theta}} \times \sqrt{\frac{1}{t}}} \qquad \boxed{Q_{op} > Q^*}$$

$Q_{op} = Q^* \frac{1}{\sqrt{t}}$

Q_{op} = quantité optimale en période de rupture

Q* = quantité optimale sans rupture

O< t <1 ⇒ $\sqrt{t} < 1$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} > 1$

$N_{op} = \frac{D}{Q*_R}$; $N_{op} = \frac{D}{\sqrt{\frac{2DC_l}{C_S\theta t}}}$; $N_{op} = \sqrt{\frac{D^2}{\frac{2DC_l}{C_S\theta t}}}$ ⇒ $N_{op} = \sqrt{\frac{D \cdot C_S\theta t}{2C_l}}$

$$\boxed{N_{op} = \sqrt{\frac{D \cdot C_S\theta t}{2C_l}} \times \sqrt{t}}$$

⇒ $N_{op} = N^* \times \sqrt{t}$

$N_{op} < N^*$ car $\sqrt{t} < 1$

$$\boxed{T_{op} = \sqrt{\frac{\theta^2}{\frac{D \cdot C_S\theta t}{2C_l}}}}$$

$T_{op} = \frac{\theta}{N_{op}}$ soit $T_{op} = \sqrt{\frac{\theta^2}{\frac{C \cdot C_S\theta t}{2C_l}}}$

$T_{op} = \sqrt{\frac{2C_l\theta}{D \cdot C_S t}}$

$$\boxed{T_{op} = \sqrt{\frac{2C_l\theta}{D \cdot C_S}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$T_{op} = T^* \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ $T_{op} > T^*$ car $\frac{1}{\sqrt{t}} > 1$

$G = C_l \frac{D}{Q} + \frac{S}{2} tC_S\theta + \frac{Q-S}{2} (1 - t) Cr\theta$

$G = C_l \frac{D}{Q} + \frac{S}{2} tC_S\theta + \frac{\theta}{2} rC_S t\theta - \frac{S}{2} C_S t\theta$

$Gr = \frac{C_l D}{Q_{op}} + \frac{Q_{op}}{2} C_S t\theta$

Application

La demande annuelle d'un article est de 90 000 unités. Le coût de stockage s'élève à 0,054 F / jour / article. Le coût de passation d'une commande est évalué à 108 F. Le coût de pénurie est estimé à 0,096 F / jour / article.

1- Si toute pénurie est interdite déterminer la quantité optimale d'une commande et le nombre optimale de commandes à effectuer. La période et le coût annuel minimal de gestion du stock.

2- Dans le cas où la rupture est admise, déterminer les mêmes paramètres que précédemment. Evaluer le nombre optimal du stock à reconstituer au début de chaque période.
3- Retrouver le coût annuel minimal de gestion du stock en calculant séparément le coût annuel global du lancement, le coût annuel global de possession, le coût annuel global de rupture de stock.

Résolution

C = 90 000 unités

Cs = 0,054 F / jour / article

J = 108 F

Cr = 0,096 F / jours / article

1- Déterminons la quantité optimale à commander si toute pénurie est interdite

$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_S\theta}}$ $Q^* = \sqrt{\frac{2\times108\times90000}{0{,}054\times360}}$ $\boxed{Q^* = 1\ 000 \text{ Unités}}$

Le nombre N* optimal de commandes à effectuer

$N^* = \frac{D}{Q*} = \frac{90000}{1000} = 90$ N* = 90 commandes

La période de gestion de stock

$T = \frac{\theta}{N}$ $T = \frac{360}{90} = 4$ $\boxed{T = 4 \text{ jours}}$

Le coût G* annuel de gestion de stock

$G^* = \sqrt{2DC_l \bullet Cs\theta}$ $\boxed{G^* = 19\ 440}$

$G^* = \sqrt{2 \times 108 \times 90000 \times 0{,}054 \times 360}$

2- Dans l'hypothèse que les ruptures de stock sont autorisées

Quantité à commander

$Q^*_R = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_s\theta t}}$ $t = \frac{C_r}{C_s+C_r}$ $t = \frac{0{,}096}{0{,}096+0{,}054} = 0{,}64$

$Q^*_R = \sqrt{\frac{2DC_l}{C_s\theta}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ $= Q^* \times \frac{1}{\sqrt{t}}$

$Q^*_R = 1000 \times \frac{1}{\sqrt{0{,}64}} = 1250$

Q^*_R = 1250 unités

- Le nombre N* de commande à effectuer

$N^*_R = \frac{D}{Q^*_R}$ $\quad$ $N^*_R = \frac{90000}{1250}$ $\quad$ N^*_R = 72 commandes

La période de gestion de stock

$T^*_R = \frac{\theta}{N^*_R}$ $\quad$ $T^*_R = \frac{360}{72}$ $\quad$ T^*_R = 5 jours

Le coût annuel de gestion des stocks G^*_R

$G^*_R = \sqrt{2DC_l \bullet Cs\theta} \times \sqrt{t}$

$= G^* = \sqrt{t}$

$= 19\,440 + \sqrt{0{,}64}$

G^*_R = 15552 F

Evaluons le niveau optimal d stock à reconstituer au début de chaque période

Soit S

$S^* = tQ_R^*$

$= 0{,}64 \times 1250$

S^* = 800 unités

3- Retrouvons le coût annuel … optimal de gestion de stock

G = GI + Gp + Gr

$GI = C_l \frac{D}{Q^*_R}$

$GI = 108 \times \frac{90000}{1250}$ $\quad$ GI = 7776 F

Le coût de possession de stock Gp

$Gp = \frac{SM}{2} \times Cs\theta$ $\quad = \frac{S*}{2} t \times Cs\theta$

$Gp = \frac{S}{2} t \times Cs\theta$

$Gp = \frac{800}{2} \times 0{,}64 \times 0{,}054 \times 360$

Gp = 49766,4 F

Gr le coût de rupture de stock Gr

Gr = $\frac{Q-S}{2}(1-t) \bullet Cr\theta$

Gr = $\frac{Q*_R-S}{2}(1-t)Cr\theta$

Gr = $\frac{1250-800}{2}$ (1 – 0,064)0,054 × 360

Gr = $\frac{1250-800}{2}$ (1 – 0,064)0,096 × 360

Gr = 2799,36 F

- Lee coût global minimal minimum

G* = GI + Gp + Gr

= 7776 + 4976,64 + 2799,36

G* = 15 552 F

4- <u>Délai d'approvisionnement (Da)</u>

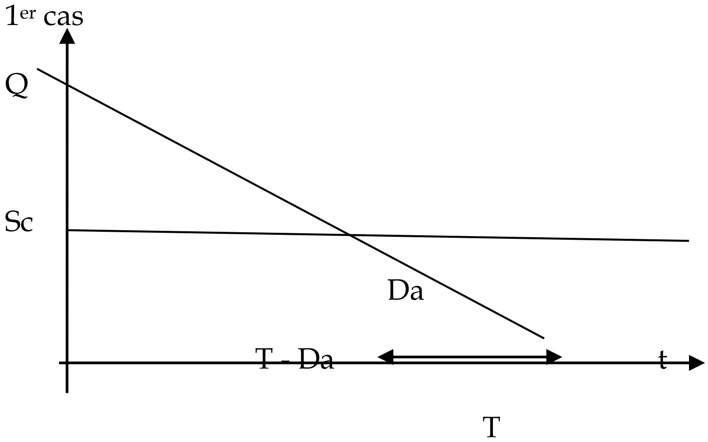
Da est la période entre la date de passation de commande et la date de livraison.

5- Stock minimal Sc

Sc est la consommation pendant le délai d'approvisionnement.

Sc se calcule de la façon suivante

1er cas



Sc = Dj × Da

Dj la demande journalière moyenne

Da est en jour

$$\boxed{Sc = Dj\ (Da - kT)}$$

2ème cas Da > T

Avec k = nombre de fois qu'on a T dans Da.

Exp : Da = 60 jours ; T = 25 jours

$Sc = Dj\ (Da - kT)$ $\quad$ $k \leq \frac{D}{T}$

$= Dj\ (60 - 25\ k)$ $\quad$ $\leq \frac{60}{25}$

$= Dj\ (60 - 25 \times 2)$ $\quad$ $\leq 2{,}4$

$Sc = 10\ Dj$ $\quad$ $k = 2$

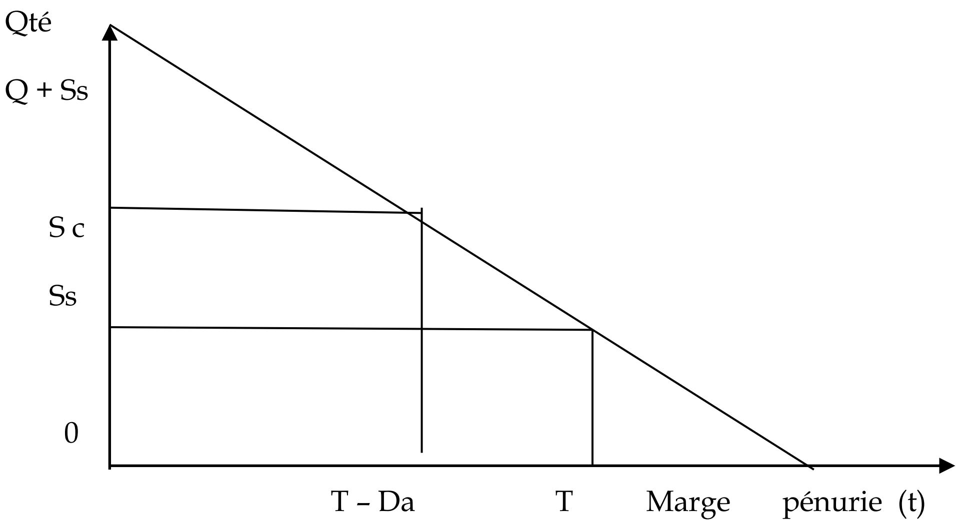
6- <u>Stock de sécurité Ss</u>

Pour faire face aux situations non prévues initialement c'est-à-dire augmentation du rythme de commande, retard dans le délai de livraison on prévoit un stock de sécurité. Son niveau est fixé de façon empirique et son existence ne met pas en cause le principe de calcule du lot économique.

7- Le stock d'alerte ou point de commande Sa

Sa = Sc + Ss

Si Ss = 0 alors Sa = Sc



$Q = \frac{Q + Ss\ fin + Ss\ début}{2}$

$= \frac{Q}{2} + 2\frac{Ss}{2}$ car $S_{s\ Fin} = S_{s\ début} = Ss$

$= \frac{Q}{2} + Ss$

$$\boxed{Q = \frac{Q}{2} + Ss}$$

Application

Une entreprise vend des motos Djenanan qu'elle achète au prix unitaire de 400 000 F. La demande annuelle est estimée à 360 motos. Le coût de lancement s'élève à 20800 F. Le coût de possession est estimé à 6 % du prix d'achat. L'entreprise accorde un stock de sécurité de 4 motos.

1- Déterminer le coût global de gestion de stock en fonction de la cadence d'approvisionnement.
2- En déduire le nombre optimal de commande et le lot économique. On admet que le délai d'approvisionnement est de 40 jours.
3- Déterminer le point de commande
4- Calculer le coût optimal de gestion de stock

Résolution

- 1- Coût global de gestion de stock

$\Gamma = \Gamma c + \Gamma s$

$\Gamma = Ncl + Pt\ (\frac{Q}{2} + Ss)$

$= \ Ncl + Pt\ (\frac{\frac{D}{N}}{2} + \ Ss$

$= N\ cl + Pt\ (\frac{D}{2N} + Ss)$

$= 20200\ N + 400000 \times 0{,}06\ (\frac{360}{2N} + 4)$

$\boldsymbol{\Gamma = 20800\ N + \frac{4320000}{N} + 96000}$

2- Le nombre optimal de commande

da = 40 jours

$\Gamma' = 0 \Longrightarrow 20800 + \ (-4320000)/N^2 = 0$

$20800\ N^2 = 4320000$

$N = \sqrt{\frac{4320000}{20800}}$

N = 14,41   N = 14 ou N = 15

Pour N = 14

Q = $\frac{D}{N}$ = $\frac{360}{14}$ = 25,71

Pour N = 15

Q = $\frac{D}{N}$ = $\frac{360}{15}$ = 24

Donc **N = 15 cdes**

Le lot économique

N * = $\frac{D}{Q*}$ Q* = $\frac{D}{N*}$

Q * = $\frac{360}{15}$ = 24 **Q* = 24 motos**

3- Le point de commande (Sa)
Sa = Ss + Sc
T = $\frac{Q}{N*}$ = $\frac{360}{15}$ = 24 jours
Da > T alors on a :

Sc = Dj (Da – kT)

Avec k = E ($\frac{D}{T}$)

= E ($\frac{40}{24}$) E (1,66)

k = 1

Dj = $\frac{D}{Q}$ = $\frac{360}{360}$ = 1

S c = 16 motos

Sa = Ss + Da – T

= 4 + 40 – 24

Sa = 20 commandes

4- Le coût optimal de gestion de stock

Γ = 20800 N + $\frac{4320000}{N}$ + 96 000

= 20800 × 15 + $\frac{4320000}{15}$ + 96000

Γ = 696000 F

TABLEAU COMPARATIF

MODELE DE WILSON ET MODELE AVEC PENURIE

N°	PARAMETRES	MODELE DE WILSON	MODELE AVEC PENURIE
1	Taux de pénurie ou taux de défaillance	N'existe pas	$\rho = \frac{\text{Cp}}{\text{Cp} + \text{Cs}}$
2	Lot économie	$Q^* = \sqrt{\frac{2DC\ell}{Cs\theta}}$	$Q_{0p} = \frac{Q*}{\sqrt{\rho}} = \sqrt{\frac{2DC\ell}{Cs\theta\rho}}$
3	Quantité à stocker : S	$S^* = Q^*$	$S_{op} = Q_{op}\rho = Q^*\sqrt{\rho}$
4	Cadence d'approvisionnement	$N^* = \frac{D}{Q*}$	$N_{op} = \frac{D}{Q_{op}} = N^*\sqrt{\rho}$
5	Période d'approvisionnement	$T^* = \frac{\theta}{N^*}$	$T_{op} = \frac{\theta}{N_{op}} = \frac{T^*}{\sqrt{\rho}}$
6	Durée de stockage ou de Service	$T^*_S = T^*$	$T_{sop} = \rho\ T_{op} = T^*\sqrt{\rho}$
7	Durée de la pénurie	$T^*_p = 0$ (pas de pénurie)	$T_{pop} = T_{op} - T_{sop} = T_{op}(1-\rho)$
8	Coût de stockage	$\Gamma^*_S = C_s\theta\frac{Q^*}{2}$	$\Gamma_{sop} = C_s\theta\ \frac{S_{op}^2}{2Q_{op}}$
9	Coût de pénurie	$\Gamma^*_p = 0$ (pas de pénurie)	$\Gamma_{pop} = C_p\theta\ \frac{(Q_{op}-S_{op})2}{2Q_{op}}$
10	Coût total de gestion	$\Gamma^* = 2N^*C\ell = C_S\theta Q^*$	$\Gamma_{op} = \Gamma^*\sqrt{\rho} = 2NopC\ell = Cs\theta Q_{op}\rho$
11	Economie liée à la pénurie	0	$E = \Gamma^* - \Gamma_{op} = \Gamma^*\ (1-\sqrt{\rho})$
12	Taux d'économie	0	$e = \frac{E}{\Gamma^*} = 1-\sqrt{\rho}$
13	Stock d'approvisionnement (1)	$Sm = \frac{D}{360}.da'$ (2)	$Sm = \frac{D}{360}(da' - Tp)$; si $da' < Tp \quad Sm = 0$
14	Stock d'alerte	Sa = Sm + Ss	Sa = Sm (Ss = 0)

(1) : Stock critique minimal ou Stock d'approvisionnement

(2) : da' = Reste de la division de da par T. On a da' = da-kT

IV- Gestion des stocks en avenir aléatoire

On supposera dans la suite que la commande D est aléatoire et est distribuée par une loi de probabilité définit de façon empirique.

A- Modèle de gestion à période fixe avec coût non proportionnel au temps

Le modèle est adapté à la gestion de stock des denrées périssables (pain ; lecture ; lait frais …).

Données :

Cp : Coût par unité manquante indépendamment de la durée.

Cs : Coût engendré par un produit non vendu restant en stock en fin de période.

1- La demande est une variable aléatoire discrète.

Soit Γ le coût global de gestion pendant la période T.

$$\Gamma = \begin{cases} Cp\ (D - X) si\ D\ > X\ (pénurie) \\ Cs\ (X - D) si\ D\ < X (Mévente) \end{cases}$$

On en déduit un coût global aléatoire de gestion de stock G(X) avec S la quantité à stocker en début de période.

L'objectif est de déterminer la quantité optimale X_{OP} qui minimise G(X)

$$G(X) = \sum_{D > X} Cp\ (D - X)\ P(D) + \sum_{D < X} Cs\ (X - D)\ P(D)$$

Théorème : G(X) est minimal pour la quantité X_{OP} telle que $F(X_{OP})$ soit immédiatement supérieur à t $= \frac{C_r}{C_r + C_s}$ soit $F(X_{OP}) \overset{i}{>} t$ et $F(X) = P(D \leq X)$ avec F la fonction de répartition de la variable aléatoire D

EXERCICE : une vendeuse de pain achète chaque matin une quantité de pain qu'elle revend aux consommateurs. Le prix d'achat est 100 F et le prix de revente est 110 F. les pains non vendus sont livrés en fin de journée à la boulangerie au prix de 75 F pour la fabrication de pains grillés. Le commerçant a noté ses ventes journalières au cours des 100 derniers jours et a obtenu la distribution suivante :

Qté	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Nbre de jours	1	4	10	15	22	25	12	7	4

TAF : Déterminer la quantité optimale X_{OP} de pain à stocker en début de chaque journée pour minimiser le coût global de gestion G ; puis déterminer ce coût

Résolution :

$\left.\begin{array}{l} PA = 100 \\ PV = 110 \end{array}\right\} C_P$= PV – PA   soit C_P= 10 F

$\left.\begin{array}{l} PA = 100 \\ PRV = 75 \end{array}\right\} C_S$= PA – PRV   soit $C_S = 25\ F$

On a t = 0,285

Qté	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Nbre de jours	1	4	10	15	22	25	12	7	4
P_i	0,01	0,04	0,1	0,15	0,22	0,25	0,12	0,07	0,04
F(X)	0,01	0,05	0,15	0,30	0,52	0,77	0,89	0,96	1
X-D/D-X	75	50	25	0	25	50	75	100	125

F(X) = $P(D \leq X)$ et t = 0,285 d'où X_{OP} = 75

$G(X_{OP}) = \sum_{D<75} C_S(X_{OP} - D) * P(D) + \sum_{D>75} C_P(D - X_{OP}) * P(D)$

G(75) = 512,25

Le vendeur va stocker en début de journée 75 pains pour un coût global minimal de gestion de 512,25 F.

2- La demande est une variable aléatoire continue

D est caractérisée par sa densité de probabilité f telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$;

$E(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx \quad et$ F(X) = P$(D \leq X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

La determination de la quantité optimal X_{OP} tel que le coût global aléatoire

$G(X) = \int_{-\infty}^{x} C_S(X - D)f(D)d_D + \int_{x}^{+\infty} C_P(D - X)f(D)d_D$

G(X) est minimal pour la quantité X_{OP} du stock tel que $F(X_{OP}) = t = \frac{C_p}{C_p + C_s}$ avec F(X) = P$(D \leq X)$

a) Taux de service β et taux de rupture α

$\beta = \frac{quantité\ livrée}{quantité\ demandée}$ = P(D≤ X_0) avec X_0 le stock disponible

α est le pourcentage de la demande non satisfaite. α = P(D> X_0) = 1 –β

lorsque D est une variable aléatoire continue, on a : $F(X_{OP}) = P(D \leq X_{OP}) = t = \beta$

1 – t = taux de rupture.

Si S_S est le stock de sécurité et X_{OP} le stock optimal tel que $X_{OP} > \overline{D}$ alors on a

$$S_S = X_{OP} - \overline{D}$$

EXERCICE

Dans un supermarché le lait frais est livré dans un sachet d'un litre et vendu au prix de 340F. la marge bénéficiaire du supermarché est de 130 F. le sachet de lait non vendu est livré le soir à une ferme coopérative pour la fabrication du fromage local au prix de 180 F. une étude a permis de savoir que la demande journalière suit une loi normale de paramètres (45 ; 5) .

1) Déterminer la quantité optimale à stocker en début de journée afin de minimiser le coût global de gestion. En déduire le stock de sécurité.

2) Le gérant du supermarché se fixe pour objectif de ne pas dépasser le taux de rupture de 10%. Déterminer la quantité optimale de lait à stocker en début de journée et donner et donner le stock de sécurité correspondant.

3) En admettant que le stock journalier est la quantité optimale déterminée en 1), déterminer le nombre de jours de rupture de stock dans une année de 360 jours

Résolution :

1) quantité optimale X_{OP} à stocker

$C_P = 130$, $C_S = 30$ et t = 0,8 125

$F(X_{OP}) = P(D \leq X_{OP})$

$= P(\frac{D-45}{5} \leq \frac{X_{op}-45}{5})$ soit **X_{OP} = 50 L** et **S_s = 5L**

2) quantité optimale X_{OP} à stocker

α = 10%

$\alpha = P(D > X_{OP})$ soit **X_{OP} = 52 L** et **S_s = 7L**

Pour s'assurer un taux de pénurie d'au plus 10%, il faut stocker au moins 52 L de lait en début de chaque journée avec un stock de sécurité de 7 L

3) le nombre de jours de rupture de stock

α = 1 – 0,8125 = 0,1875

1 jour $\longrightarrow$ 0,1875

360jours $\longrightarrow$ n_j soit **n_j = 68 jours**

b) <u>Modèle de gestion à période variable</u>

_ Compte tenu de l'irrégularité de la consommation, la période d'approvisionnement peut être variable. En ce moment, la période d'approvisionnement est faite lorsque le stock d'alerte est atteint compte tenu du délai d'approvisionnement du système.

Un autre paramètre peut être le délai d'approvisionnement que l'on peut considérer comme une variable aléatoire en plus de la demande.

Il s'agira de déterminer la quantité optimale du stock d'alerte S_a qui permet de minimiser le coût de gestion tout en évitant une rupture de stock pendant le délai d'approvisionnement.

Ainsi on distinguera deux cas :

<u>1er cas :</u> **La demande D est aléatoire et le délai d'approvisionnement D_a fixe**

On déterminera S_a ou point de commande pour qu'il n'y ait pas rupture de stock pendant la durée D_a. Pour résoudre ce problème, on se fixera un taux de service β en dessous duquel on ne doit pas se situer.

<u>2ème cas :</u> **La demande D est fixe et le délai d'approvisionnement D_a aléatoire**

On déterminera S_a pour que le taux de service ait une valeur minimale fixée.

<u>Exercice1</u> : la demande mensuelle du sucre St louis suit une loi normale de paramètres (100, 50) en tonnes. Le délai d'approvisionnement D_a est de 10 jours. On admet un risque de rupture de 5%. Déterminer le niveau de stock S correspondant à ce risque puis le stock de sécurité S_S et le stock d'alerte S_a.

<u>Exercice2</u> : le réapprovisionnement en lait Nursie1 se fait selon un délai d'approvisionnement aléatoire. Des observations ont permis de constater que D_a suit la loi normale de paramètres (45 ; 10) en jour. La quantité commandée par période est de 240 Kg par mois. On fixe un taux de service minimal β = 95%. Déterminer le stock d'alerte S_a.

<u>Résolution1</u> :

$\alpha = 5\%$ et $D_a = 10$ jours

$\alpha = P(D > S)$

$= 1 - P(D \leq S)$

$= 1 - P(\frac{D-100}{50} \leq \frac{S-100}{50})$ soit **S = 182,5 tonnes**

$S_S = S - \overline{D}$ soit **S_S = 82,5 tonnes**

$S_a = S_S + S_c$ avec $S_c = d_j * D_a$ et $d_j = \frac{100}{30}$ soit **S_a = 115,83 tonnes**

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 13

Une société se propose de gérer le stock d'un produit donné A, selon le modèle de Wilson. La société possède des informations suivantes :

- Prix unitaire de vente du produit A = 500F
- Prix unitaire de revient du produit A = 400F
- Chiffre d'affaire annuel du produit A = 60.000.000F
- Taux trimestriel de possession de stock = 24%
- Taux de passation d'une commande = 230.400F

1) On demande de déterminer :
   a. Le lot économique
   b. La cadence d'approvisionnement
   c. La période d'approvisionnement
   d. Le coût global annuel de gestion de stock optimal

2) Le fournisseur propose à la société une remise de 80F sur le prix d'achat unitaire du produit A si elle passe des commandes d'au moins 15.000 unités et une remise de 100F si la quantité commandée est d'au moins 18.000 unités.
Calcule le lot économique et les paramètres de gestion. Que conseillez-vous à la société ?

3) La société accepte le risque de pénurie et fixe son coût à 60F par unité manquante et par mois. Déterminer :
   a. La période optimale des commandes ; le lot économique et la cadence d'approvisionnement.
   b. Le stock à reconstitué en début de période.
   c. Le coût global minimum de gestion des stocks.
   d. Le taux d'économie réalisé en acceptant la pénurie.
   e. Le stock d'Arlette si $da = 60\, jours$ si $da = 80\, jours$.

4) Par rapport au premier modèle, un stock de sécurité de 10% du lot économique est admis. Calculer le Sa si $da = 40\, jours$. Calculer les charges supplémentaires et les marges tm.

EXECICE 14

L'entreprise PENIEL & FILS, est une PNE qui opère dans le commerce du riz.

On donne ci-dessous les informations qui concernent cette Entreprise :

. Demande globale annuelle : 180 000 kg

. Prix d'achat du kg : 300 F

. Coût de stockage : 0,18F/kg/jour

. Coût de passation d'une commande : 364 500F

. Période globale de gestion : 360 jours

. Le coût de stockage ne dépend pas de la valeur stockée.

1- On suppose que la gestion ce fait sans pénurie et sans stock de sécurité ; calculer :
- Le volume optimal des commandes de réapprovisionnement,
- La durée optimale séparant deux réapprovisionnements successifs,
- Le nombre optimal de commandes de l'année.
- Le coût annuel minimal de la gestion du stock.
- Le stock de réapprovisionnement, si le délai d'approvisionnement est 30 jour

2- On suppose que la gestion se fait avec pénurie et sans stock de sécurité, Le taux de pénurie étant de 81 %

a) Calculer
- Le volume optimal des commandes de réapprovisionnement,
- La durée optimale séparant deux réapprovisionnements successifs,
- Le nombre optimal de commandes de l'année,
- Le niveau optimal du stock au début de chaque période de gestion
- La durée de stockage, et la durée de pénurie
- Le coût annuel minimal de la gestion du stock.
- Le stock de réapprovisionnement, si le délai d'approvisionnement est 5 jours

b) Evaluer en pourcentage, l'économie sur la gestion que permet la pénurie dosée de façon optimale.

3- On décide de constituer un stock de sécurité de 1000 kg, on demande d'évaluer :
- le niveau de stock d'approvisionnement,
- le niveau de stock d'alerte
- le niveau de stock maximum
- le nouveau coût global minimum

EXERCICE 15

La demande annuelle d'article y s'élève à 9000 unités (1 an = 360 jour) ; les coûts unitaires sont :

Prix d'achat : 20 F, coût de passation d'une commande : 360 F ; taux de possession des stocks : 10%

Aucune pénurie n'est admise. Le fournisseur propose un tarif par tranche :

- Achat supérieur à 2000 articles jusqu'à 4000 remise 1%
- Achat supérieur à4000 articles jusqu'à 6000 articles remise 2%
- A partir de 6000articles : remise 3%

1. Déterminer le nombre d'articles à commander, le plus avantageux.
2. Donner le nombre de commandes et la périodicité correspondants.

EXERCICE 16

L'entreprise SKOUTER vend un bien de consommation courant, dont la demande s'élève annuellement à 400.000 unités. Le coût de stockage est de 4F/article/jour. Le coût de lancement est de 144.000F quelque soit la quantité commandée. L'entreprise admet une possibilité de rupture de stock pour un coût de pénurie évalué à 16F par jour et par article non livré.

1. Déterminer :
   a. La quantité optimale Q_{opt} à commander ;
   b. La cadence optimale N_{opt} des commandes ;
   c. La période optimale T_{opt} de réapprovisionnement ;
   d. Le coût optimale Γ_{opt} de gestion.
2. Par ailleurs l'entreprise vent des motoculteurs qu'elle achète à 400.000F, les ventes annuelles étant estimées à 360 motoculteurs, le coût de passation d'une commande à 20.800 et le coût de possession à 6% du coût d'acquisition. Il n'y a pas rupture de stock.
   a. Déterminer le nombre optimal N^* de commandes à passer ainsi que le nombre de motoculteurs à livrer/recevoir Q^* à chaque commande ;
   b. Si l'on suppose que le délai d'approvisionnement (*da*) est de 30jours et qu'il n'a pas stock de sécurité, calculer le stock d'alerte ou le stock critique minimal (S_{cm}), le coût global de gestion Γ^* et faire illustration.
   c. On admet un stock de sécurité cette fois-ci, évalué à 3 motoculteurs.

      Déterminer le stock d'alerte/ S_{cm} ou point de commande Pc, le coût de gestion de stock et faire une illustration.

EXERCICE : 17

Dans un super marché on a observé que la vente de la viande de bœuf hachée est un phénomène aléatoire. Elle vendue à 3.700F le Kg ; la marge bénéficiaire du super marché est de 1.300F par Kg. La viande invendue est conditionnée pour être vendue comme viande pour animaux au prix de 2.100F le Kg. Une étude journalière de la demande a permis de constater que celle-ci suit une loi normale de moyenne 450Kg et d'écart-type 50Kg.

1. Déterminer la quantité optimale de viande que le super marché doit présenter à la vente chaque jour. Calculer le taux de service pour un stock X_0 = 800Kg
2. Le super marché veut connaître le niveau de stock qu'il doit constituer s'il ne veut pas dépasser un taux de rupture de 10% (taux de rupture = probabilité pour qu'une demande ne soit pas satisfaite). Déterminer ce niveau de stock et en déduire le nombre de jours de rupture de stocks dans une année de 360jous et le stock de sécurité.

EXERCICE : 18

Une vendeuse de pain achète chaque matin des baguettes auprès d'une boulangerie à 100f la baguette qu'elle revend au client à 125f. Les baguettes non vendues le sont lendemain à 80f. La vendeuse note les ventes journalières et les relevés des 100 derniers jours sont :

Nbre de baguettes	0	25	50	75	100	125	150	175	200	∑
Nbre de jours	0	4	10	15	22	25	12	7	4	100

TAF : Déterminer le nombre de baguettes à acheter au début de la journée par la vendeuse pour minimiser les coûts de gestion.

EXERCICE 19

L'entreprise chinoise Xen-phu installée au Bénin commercialise des lampes torches. La demande de Lampes Torches à cette entreprise est estimée à 600 unités par mois.

Le coût de lancement s'élève à 2.000 F par commande. Le coût de possession du stock est estimé à 60F par unité en stock et par mois.

1. Déterminer la quantité optimale à commander

2. Calculer la rotation annuelle de stock c'est-à-dire le nombre de fois que le lot économique optimal est consommé par an.
3. Calculer le coût minimal annuel de gestion de ce stock
4. Calculer le coût de possession du stock par unité et par mois que l'on doit avoir pour atteindre les 600 unités comme quantité économique optimale chaque mois.

EXERCICE 20

La demande hebdomadaire X d'un produit suit une loi normale $\mathcal{N}(100 ; 20)$.

1) Le réapprovisionnement est hebdomadaire et la quantité commandée est telle que le stock initial est constant et vaut S. soit t le taux de service.
   a. Que vaut t si S = 100 ?
   b. Que vaut S si t = 95% ?quel est le stock de sécurité correspondant ?
2) Le réapprovisionnement s'effectue maintenant dès que le stock descend en dessous d'une certaine valeur appelée stock d'alerte. Le délai de livraison vaut quatre semaines. Calculer le stock d'alerte correspondant à un taux de service de 90%.

EXERCICE 21

La société KAFOUA utilise une matière A pour sa production. Pour une consommation annuelle de 36 000 Kilogrammes, elle a dépensé 144 000 000F. Le coût de lancement d'une commande est de 180 000F quelque soit la quantité de matière A commandée. Par ailleurs on estime à 360F le coût de stockage par kilogramme et par an.

1) Dans l'hypothèse d'une pénurie non admise : Modèle de Wilson
a) Exprimer le coût global de gestion de stock en fonction du nombre de commandes n : T (n)
b) En déduire le nombre optimal de commande de réapprovisionnement : (n*)
c) Déterminer le coût global de gestion de stock : (T*)
2) Le fournisseur de la matière A accorde une réduction de 2% sur le prix d'achat pour une quantité au moins égale à 9000 kilogrammes et de 3% pour des commandes d'au moins 18 000 kilogrammes. Déterminer le volume optimal des commandes (Qop) et le nombre de commandes dans l'année : (nop). Quelle est l'économie : (E) réalisée par rapport au modèle de Wilson.
3) La pénurie est désormais admise et permet une économie évaluée à 20%.
   a) Calculer la quantité optimale à stocker (Sop) et la durée de pénurie sur une période (Tp)
   b) Si le délai de livraison est de 20 jours, calculer le stock d'alerte : (Sa).

EXERCICE 22

La société Finagnon stocke un article dont le réapprovisionnement est périodique et s'effectue par quantités constantes Q. La demande annuelle en nombre d'articles, est supposée constante et notée D. soit C1 le coût de passation d'une commande (en francs). Cs le coût unitaire de possession de stock (en francs par article et par an) et Cp le coût de pénurie (en francs par article non livré et par an). Le stock optimal vaut 1.000 articles en l'absence de pénurie et 1.250 articles en cas de rupture de stock.

1) Déterminer le taux de pénurie t.
2) On suppose en plus que le nombre optimal de commandes par an vaut 50 en l'absence de pénurie et que la réduction du coût total annuel minimum de gestion, si on accepte la pénurie vaut 72.000 francs.
3) Calculer en le justifiant : D, Cs, Cp et C1.

EXERCICE 23

Dans un super-marché on a observé que la vente de la viande de bœuf hachée est un phénomène aléatoire. Elle vendue à 3.700F le Kg ; la marge bénéficiaire du super marché est de 1.300F par Kg. La viande invendue est conditionnée pour être vendue comme viande pour animaux au prix de 2.100F le Kg. Une étude journalière de la demande a permis de constater que celle-ci suit une loi normale de moyenne 450Kg et d'écart-type 50Kg.

3. Déterminer la quantité optimale de viande que le super marché doit présenter à la vente chaque jour. Calculer le taux de service pour un stock X_0 = 800Kg
4. Le super marché veut connaître le niveau de stock qu'il doit constituer s'il ne veut pas dépasser un taux de rupture de 10% (taux de rupture = probabilité pour qu'une demande ne soit pas satisfaite). Déterminer ce niveau de stock et en déduire le nombre de jours de rupture de stocks dans une année de 360jous et le stock de sécurité.

EXERCICE 24

La société CAFIR-SA dispose d'une unité de construction mécanique spécialisée dans la fabrication des pistons qu'elle monte dans des cylindres qu'elle achète à la société BETA. L'ensemble cylindre-piston est vendu sur le marché local pour les moteurs des moulins à maïs. Les statistiques ont montré que la demande mensuelle de ce produit est une variable aléatoire discrète distribuée comme suit :

Demande	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilité	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	1

Le prix d'achat d'un cylindre est de 400.00F. le taux mensuel de possession de stock vaut 5% du prix d'achat par cylindre. Chaque ensemble demandé et manquant en stock entraine un manque à gagner de 35000F. Le réapprovisionnement en cylindre s'effectue en début du mois après réapprovisionnement est constant et vaut X.

1. Calculer la demande mensuelle moyenne $\overline{D}$

2. Quelles sont les valeurs possibles de X si on veut un taux de service d'au moins 90% ?

3. Déterminer le stock optimal X_o et le coût optimal de gestion correspondant.