Université d'Abomey-Calavi (UAC)

Institut de Formation et de Recherche en Informatique (IFRI)

IFRI

Maths/L1-INFO. Notes de cours
ECU : Analyse

Dr. Koffi Wilfrid Houédanou

Enseignant-Chercheur

wilfrid.houedanou@fast.uac.bj

Année Académique 2021-2022

I. Objectif du cours

Comme objectif général, le but du cours est de donner aux apprenants des notions de base en analyse niveau MI1. Ces connaissances sont utilisées dans la construction des algorithmes pour la résolution des problèmes. On mettra l'accent sur des résultats importants en analyse et leur utilisation en informatique.

Objectifs spécifiques : A l'issue de ce module, l'étudiant doit être capable de :

1. Enoncer et utiliser les propriétés axiomatiques de $\mathbb{R}$;
2. Utiliser les théorèmes de convergence des suites numériques ;
3. Utiliser correctement les fonctions usuelles en mathématiques ;
4. Utiliser les formules de développement limité et leurs utilisations dans le calcul de limites ; et étude locale d'une fonction.

II. Prérequis

Limites, Continuité, Dérivabilité ; Primitives ; Suites numériques.

III. Masse horaire

Cours : 25 heures

V. Moyen d'évaluation

Evaluation sommative.

Bibliographie

1. Bernard Ycart, *Nombres réels*, Note de cours $L1$ Math. Info et Math Appliquées, Université Joseph Fourier, Grenoble1 (2009).
2. D. Fredon, M. Maumy-Bertrand et F. Bertrand, *Mathématique, Analyse en trente fiches,* Edition Dunod, 2009.
3. E. Lamri et al ; *Cent pour cent Concours Prepa, Tous les exercices d'Analyse PC-PSI,* Edition Science, 2008.

Table des matières

Chapitre Un

Les nombres réels

1.1 Nécessité des nombres réels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Comme chaque entier naturel n admet un successeur qui est $n+1$, on se convaint sans peine que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Etant donnés deux entiers naturels x et y on sait définir les nombres

$$x + y,\ x - y,\ x \times y \text{ et } \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0.$$

On remarque que l'addition et la multipilication sont des opérations qui ont leur résultat dans $\mathbb{N}$. (On dit alors que $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication). Par contre le résultat d'une soustraction ou d'une division n'est pas toujours un entier naturel. On crée ainsi de nouveaux nombres (ou de nouveaux ensembles)

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\},$$

ensemble des entiers relatifs, on notera $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ et } |a| \wedge b = 1\right\}$$

l'ensemble des nombres rationnels dans lequel on note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

On a bien entendu les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

et les quatres opérations élémentaires $+$, $-$, $\times$ et / peuvent s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

La situation la plus simple qui explique la **première lacune** de $\mathbb{Q}$ est connue depuis l'Antiquité grecque avec l'utilisation du théorème de Pythagore dans la détermination de la longueur exacte de la diagonale d'un carré de coté de longueur 1. En d'autre terme, il n'existe pas un nombre rationnel dont le carré est égal à 2 (c'est-à-dire, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Par ailleurs, l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire dans $\mathbb{Q}$, un ensemble borné ne possède pas nécessairement de borne supérieure (ou de borne inférieure) : c'est **la seconde lacune** de $\mathbb{Q}$. On peut montrer que le fait que l'équation $x^2 = r$ où $r \in \mathbb{Q}^*$ n'admet pas nécessairement de solution dans $\mathbb{Q}$ est lié à cette même lacune. Il est donc souhaitable de construire une extension de l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui, en plus d'être un corps commutatif totalement ordonné, posséderait la propriété suivante : ***tout sous-ensemble borné possède une borne supérieure et une borne inférieure.*** L'ensemble des nombres réels répond à ce besoin ; et il convient de construire avec rigueur l'ensemble des nombres réels et d'en étudier les propriétés.

Une méthode mathématiquement satisfaisante pour définir les nombres réels est celle de coupure qui a été publiée en 1872 par Richard Dedekind. Elle marque le début de la modernité en mathématique, laquelle consiste à construire à l'aide de la logique et de la théorie des ensembles tous les objets mathématiques et à établir à partir de là leurs propriétés. Intuitivement une coupure est l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont strictement supérieurs à un nombre réel donné et il n'y a aucune différence de nature entre un nombre réel et l'ensemble de tous les nombres rationnels qui lui sont supérieurs. Il existe d'autres méthodes pour construire l'ensemble des nombres réels, par exemple, en utilisant les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 1.1. ***(Nombres irrationnels)***

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Le nombre $\sqrt[n]{2}$ est irrationnel.*
2. *Le nombre d'Euler $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ est irrationnel.*
3. *Le nombre $\pi = 3,1415\cdots$ défini comme étant la circonférence d'un*

cercle de diamètre 1 est un nombre irrationnel.

1.2 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

Nous allons définir l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par une structure algébrique $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ où :

— $+$ est une loi de composition interne appelée **addition** c'est-à-dire une application $(x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$,

— $\times$ est une loi de composition interne appelée **multiplication** c'est-à-dire une application $(x, y) \mapsto x \times y = xy \in \mathbb{R}$,

— $\leq$ une relation binaire dans $\mathbb{R}$ appelée relation **inférieure ou égal** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Longleftrightarrow x - y \leq 0$,

et vérifiant les trois groupes d'axiomes suivants.

1.2.1 Axiomes de corps commutatif

Le premier groupe d'axiomes est constitué des axiomes de corps commutatif. On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Axiome 1.1. ***(Axiomes de corps commutatif)*** *Les lois $+$ et $\times$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. $(\mathbb{R}, +)$ ***possède les propriétés d'un groupe commutatif****, c'est-à-dire :*
   (a) *Associativité : $\forall x, y, z$ éléments de $\mathbb{R}$, on a : $(x+y)+z = x+(y+z)$;*
   (b) *Elément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x + 0 = 0 + x = x$,*
   (c) *Opposé (ou symétrique) : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x + (-x) = (-x) + x = 0$,*
   (d) *Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x + y = y + x$.*
2. $(\mathbb{R}^*, \times)$ ***possède les propriétés d'un groupe commutatif****, c'est-à-dire :*
   (a) *Associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a : $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$,*
   (b) *Elément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x \times 1 = 1 \times x = x$,*
   (c) *Inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, il existe un nombre noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que : $x^{-1} \times x = x \times x^{-1} = 1$. On note aussi $x^{-1} = \frac{1}{x}$,*

(d) *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a :* $x \times y = y \times x$.

3. ***La loi*** $\times$ ***est distributive sur la loi*** $+$, *c'est-à-dire :*
   (a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ z \times (x + y) = z \times x + z \times y$;
   (b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

On dit alors que $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps commutatif :* ***ce sont les axiomes de corps commutatif.***

1.2.2 Axiomes de corps totalement ordonné

Nous abordons maintenant le second groupe d'axiomes. Mais avant, nous introduisons quelques définitions et propriétés.

Relations binaires

Soit E en ensemble quelconque mais non vide.

Définition 1.1. *(**Relations binaires**) Une relation binaire définie sur* E *est une propriété que chaque couple* (x, y) *d'éléments de* E *est susceptible d'avoir ou non.*
Si $\mathcal{R}$ *est une relation binaire sur* E, *on note* $x\mathcal{R}y$ *pour signifier que* x *et* y *sont en relation par* $\mathcal{R}$. *Ainsi se donner une relation binaire sur* E, *c'est se donner la partie* G *de* $E \times E$ *constituée des couples* (x, y) *tels que* $x\mathcal{R}y$.

Exemple 1.2.

1. *Sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels, on connaît les relations usuelles :*
   (a) $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \geq 0$: *c'est la relation notée* $\geq$ *pour signifier* $x \geq y$;
   (b) $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \leq 0$: *c'est la relation notée* $\leq$ *pour signifier* $x \leq y$.
2. *Sur l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs, on peut penser à la relation de divisibilité :*
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = kx.$$
3. *Sur l'ensemble* $\mathcal{P}(\Omega)$ *des parties d'un ensemble non vide* Ω, *on connaît les relations :*
   (a) *inclusion :* $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B$;
   (b) *on peut aussi imaginer la relation définie par* $A\delta B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Propriétés d'une relation binaire

Propriété 1.1. *(**Propriétés d'une relation binaire**)*
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E.

1. *On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si :* $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
2. *On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si :* $\forall x \in E, \forall y \in E$,
$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$
3. *On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si :* $\forall x \in E, \forall y \in E$,
$$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow (x = y).$$
4. *On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si :* $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$,
$$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z).$$

Définition 1.2. *(**Relation d'ordre**) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** sur E si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Si de plus, deux éléments quelconques de E sont toujours comparables pour la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :*
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ on a : } x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x,$$
*alors on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre total** sur E ou $\mathcal{R}$ définit un **ordre total** sur E.*

Exemple 1.3.
- *La relation " $\leq$ " définit un ordre total sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la relation $\leq$ est à la fois réflexive, antisymétrique, transitive et $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ ou $y \leq x$.*
- *La relation d'inclusion large " $\subset$ " définit un ordre sur $\mathcal{P}(\Omega)$ mais n'est pas total. On dit, dans ce cas que l'inclusion est une **relation d'ordre partiel** sur $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Axiome 1.2. *(**Axiomes de corps totalement ordonné**) La relation " $\leq$ " définit un ordre total sur $\mathbb{R}$ (Exemple 1.3). De plus, la relation $\leq$ vérifie les propriétés de compatiblité suivantes sur $\mathbb{R}$:*

1. *la relation $\leq$ est compatible avec $+$:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z;$$

2. *la relation $\leq$ est compatible avec $\times$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$,*

$$(0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \times y.$$

On dit alors que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné : ***ce sont les axiomes de corps totalement ordonné.***

Définition 1.3. ***(Ordre strict)*** *Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(x < y) \Longleftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y).$$

On lit : x strictement inférieur à y.

1.2.3 Axiome de la borne supérieure

A présent nous abordons le troisième axiome qui est l'axiome de la borne supérieure. Nous verrons que cet axiome permet d'expliquer une seconde lacune de $\mathbb{Q}$. Mais avant nous donnons d'abord quelques définitions et propriétés.

Partie majorée, partie minorée, partie bornée

Définition 1.4. ***(Partie majorée, partie minorée)*** *On considère une partie X non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que X est majoré si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on a $x \leq M$.*
   On dit alors que M est un majorant de X.
2. *On dit que X est minoré si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on a $m \leq x$.*
   On dit alors que m est un minorant de X.
3. *On dit que la partie X est* ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Remarque 1.1. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Un réel M* ***n'est pas un majorant*** *de $X \Longleftrightarrow \exists x_0 \in X$ tel que : $M < x_0$.*
2. *Un réel m* ***n'est pas un minorant*** *de $X \Longleftrightarrow \exists x_0 \in X$ tel que : $x_0 < m$.*

Elément maximal, élément minimal

Définition 1.5. *(**Elément maximal, élément minimal**) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est **le plus grand élément** (ou **élément maximal**) de X si α est un majorant de X et $\alpha \in X$. On note alors $\alpha = \max(X)$.*
2. *On dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est **le plus petit élément** (ou **élément minimal**) de X si β est un minorant de X et $\beta \in X$. On note alors $\beta = \min(X)$.*

Remarque 1.2. *Pour une partie non vide $X \subset \mathbb{R}$, on peut observer les équivalences suivantes :*
- $\alpha = \max(X) \Longleftrightarrow (\alpha \in X$ *et* $\forall x \in X, x \leq \alpha)$.
- $\beta = \min(X) \Longleftrightarrow (\beta \in X$ *et* $\forall x \in X, \beta \leq x)$.

Proposition 1.1. *(**Unicité de l'élément maximal (resp. minimal)**) Si $X \subset \mathbb{R}$ possède un maximum (resp. minimum), alors il est unique.*

Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.6. *(**Borne supérieure, borne inférieure**) On considère une partie $X \subset \mathbb{R}$ non vide.*

1. *On dit que $S \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de X si S est le plus petit des majorants de X. On note alors $S = \sup(X)$.*
2. *On dit que $s \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de X si s est le plus grand des minorants de X. On note alors $s = \inf(X)$.*

Remarque 1.3. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. La borne supérieure (resp. la borne inférieure) de X lorsqu'elle existe est unique.*

Remarque 1.4. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a évidemment les deux remarques suivantes :*

1. *Si $\max(X)$ existe, alors $\sup(X)$ existe et on a : $\sup(X) = \max(X)$.*
2. *De même, si $\min(X)$ existe, alors $\inf(X)$ existe et on a : $\inf(X) = \min(X)$.*

Exemple 1.4.

1. *L'ensemble* $X_1 = \left\{ x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ *est majoré par* 3.
2. *L'ensemble* $X_2 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *est majoré par* $\frac{3}{2}$ *et minoré par* -1. *De plus* $\max(X_2) = \frac{3}{2} = \sup(X_2)$ *et* $\inf(X_2) = -1$. *Donc* $\min(X_2)$ *n'existe pas (-1 n'est pas atteint).*
3. *Si* $X_3 = \mathbb{N}$, *alors* $\min(X_3) = 0$ *tandis que* $\max(X_3)$ *n'existe pas, sinon* $\mathbb{N}$ *serait fini.*
4. *Si* $X_4 = \mathbb{Z}$, *alors* $\min(X_4)$ *et* $\max(X_4)$ *n'existent pas, sinon* $\mathbb{Z}$ *serait fini.*
5. $X_5 =]-3, 10]$. *On a* $\max(X_5) = 10 = \sup(X_5)$ *tandis que* $\min(X_5)$ *n'existe pas mais* $\inf(X_5) = -3$.
6. *L'ensemble* $X_6 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *est minoré par* $\ln 2$ *mais n'est pas majoré. En effet, pour* $k \geq 1$, *on a* $\frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. *Donc* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) \geq \ln(2)$. *De plus, si* X_6 *était majoré, la suite de terme général* $\ln(n+1)$ *étant croissante, convergerait [absurde car* $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$*].*

Nous pouvons maintenant énoncer le troisième axiome qui donne une condition suffisante pour l'existence de la borne supérieure.

Axiome 1.3. ***(Axiome de la borne supérieure)***
$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *a la propriété de la borne supérieure : Toute partie* ***non vide*** *et* ***majorée*** *de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure.*

Remarque 1.5. *L'axiome de la borne supérieure (Axiome 1.3) permet d'expliquer une seconde lacune de l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels. Le corps commutatif totalement ordonné* $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ *n'a pas la propriété de la borne supérieure. Il existe une partie non vide et majorée de* $\mathbb{Q}$ *qui n'admet pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$. *L'ensemble* $A = \left\{ x \in \mathbb{Q},\ x > 0 \text{ et } x^2 < 2 \right\}$ *par exemple convient.*

On essayera maintenant de dégager dans le reste du chapitre les conséquences importantes de chaque groupe d'axiomes.

1.3 Conséquences des axiomes

Dans cette section, nous allons énumérer les conséquences logiques des axiomes formulés plus haut. La totalité de ces conséquences fournira toutes les propriétés des nombres réels que l'on utilise pour la construction de l'analyse mathématique.

1.3.1 Conséquences des axiomes de corps commutatif

Propriétés d'unicité d'élément neutre

La première conséquence est l'unicité de l'élément neutre 0 de l'addition " + " et de la mutiplication $\times$.

Proposition 1.2.

1. *Dans $\mathbb{R}$, l'élément neutre de l'addition* 0 *est unique. De même, tout $x \in \mathbb{R}$ possède un unique opposé $-x$.*
2. *Dans $\mathbb{R}^*$, l'élément neutre de la multiplication* 1 *est unique. De même, tout $x \in \mathbb{R}^*$ possède un unique inverse $\frac{1}{x}$.*

Règle de soustraction

Une seconde conséquence est la règle de **soustraction**.

Définition 1.7. *La soustraction est la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y := x + (-y) \in \mathbb{R}$.*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, le réel $x - y$ se lit " x moins y".

Proposition 1.3. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation $x + a = b$ admet une unique solution $x = b - a$.*

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x+a = b$. Alors on a $b - a = (x + a) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = x$. On peut conclure en l'unicité de la solution. Par ailleurs, on vérifie que $(b - a) + a = (b+(-a))+a = b+((-a)+a) = b+0 = b$. D'où l'existence de la solution. $\square$

Règle de division

Définition 1.8. *On appelle division dans $\mathbb{R}$, l'application $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$. Le réel $\frac{x}{y}$ est le quotient de x par y.*

Remarque 1.6. *Restreinte à $\mathbb{R}^*$, la division est une loi de composition interne.*

Proposition 1.4. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$ alors l'équation $ax = b$ admet une unique solution $\frac{b}{a}$.*

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Supposons l'existence d'un réel x tel que $ax = b$. On a $\frac{b}{a} = b\frac{1}{a} = (ax)\frac{1}{a} = (xa)\frac{1}{a} = x(a\frac{1}{a}) = x1 = x$. D'où l'unicité de $\frac{b}{a}$. Par ailleurs, $ax = a(\frac{b}{a}) = a(b\frac{1}{a}) = a(\frac{1}{a}b) = (a\frac{1}{a})b = 1b = b$. Ainsi $\frac{b}{a}$ est bien solution de l'équation $ax = b$. $\square$

Exercice 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $0x = 0$.*
2. *Montrer que $(-1)x = -x$.*

Exercice 1.2. *Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0$ et $xy = 0$. Montrer que $y = 0$.*

1.3.2 Conséquences des axiomes de l'ordre

Nombres positifs, Nombres négatifs

Définition 1.9. *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que x est négatif ou non positif si $x \leq 0$.*
2. *On dit que x est strictement négatif si $x < 0$.*
3. *On dit que x est positif ou non négatif si $x \geq 0$.*
4. *On dit que x est strictement positif si $x > 0$.*

*Le nombre zéro (i.e. 0) est **non positif** et **non négatif** à la fois.*

Remarque 1.7. *Traditionnellement par rapport à la relation d'ordre, on a les sous-ensembles :*
- *$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ;*
- *$\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.*

On peut observer que $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ et $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$.

Proposition 1.5.

1. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les relations : $x \leq y$, $0 \leq y - x$, $-y \leq -x$ et $x - y \leq 0$ sont équivalentes.*

2. *Pour tout* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, *on a :*
   $(x \leq y \text{ et } u \leq v) \Longrightarrow (x + u \leq y + v)$.

3. *Pour tout* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *on a :* $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$.

Remarque 1.8. $x \leq y \Longleftrightarrow (x < y \text{ ou } x = y)$. *Donc* $x < y \Longrightarrow x \leq y$.

Règle des signes

Proposition 1.6. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a les implications suivantes :*

1. $(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \Longrightarrow xy \geq 0$;
2. $(x \geq 0 \text{ et } y \leq 0) \Longrightarrow xy \leq 0$;
3. $(x \leq 0 \text{ et } y \leq 0) \Longrightarrow xy \geq 0$.

Exercice 1.3. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$. *Montrer que*

1. *Si* $x > 0$, *alors* $\frac{1}{x} > 0$;
2. *Si* $0 < x < y$, *alors* $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Valeur absolue

Définition 1.10. *On appelle valeur absolue d'un réel* x, *le réel noté* $|x|$ *et défini par :*

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Remarque 1.9. *Dans cette définition, on observe comme conséquence directe que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a :* $|x| = |-x|$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ -x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

On a quelques inégalités utiles.

Proposition 1.7. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}_+^*$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

2. *Inégalité triangulaire : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Distance sur $\mathbb{R}$

L'une des utilisations de la valeurs absolue consiste à mesurer la distance entre deux points sur la droite réelle.

Définition 1.11. *On appelle distance usuelle sur $\mathbb{R}$, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par : $d(x,y) = |x-y|$.*

Proposition 1.8. *La distance sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$:*

1. *$d(x,y) \geq 0$ et $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;*
2. *$d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;*
3. *$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).*

Remarque 1.10. *Plus généralement, on appelle distance sur un ensemble E, toute application d de $E \times E$ dans E vérifiant les trois propriétés de la proposition précédente. L'ensemble E muni de cette application est alors qualifié d'espace métrique. Par exemple, sur $\mathbb{C}$, l'application qui aux complexes z_1, z_2 associe le module de $z_1 - z_2$ définie une distance sur $\mathbb{C}$.*

1.3.3 Conséquences de l'axiome de la borne supérieure

Propriété de la borne inférieure

Nous commençons par un énoncé équivalent à l'axiome de la borne supérieure que nous pouvons dénommer propriété de la borne inférieure.

Théorème 1.1. *(**Propriété de la borne inférieure**) Toute partie **non vide** et **minorée** A de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure et $\inf(A) = -\sup(-A)$, où $-A = \{-x \in \mathbb{R},\ x \in A\}$.*

Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Théorème 1.2. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. ***Caractérisation de la borne supérieure.*** *Si X est majorée, alors sa borne supérieure* $\sup(X)$ *est caractérisée par la propriété suivante :*
$$S = \sup(X) \Longleftrightarrow \begin{cases} S \text{ est un majorant de } X \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X \text{ tel que } S - \epsilon < x_0 \leq S. \end{cases}$$
2. ***Caractérisation de la borne inférieure.*** *Si X est minorée, alors sa borne inférieure* $\inf(X)$ *est caractérisée par la propriété suivante :*
$$s = \inf(X) \Longleftrightarrow \begin{cases} s \text{ est un minorant de } X \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X \text{ tel que } s \leq x_0 < s + \epsilon. \end{cases}$$

Application 1.1.

1. *Soit $A = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que la borne supérieure de A existe et vaut* 1.
2. *Soit $B = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que la borne inférieure de B existe et vaut* 0.

Ensemble des nombres réels achevé

Définition 1.12. *L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ des nombres réels achevé est composé de l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels complété par deux symboles (ou points) $-\infty$ et $+\infty$.*
On a $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Remarque 1.11.

1. *La relation d'ordre $\leq$ s'étend sur ces symboles suivant la règle :*
   - $-\infty < x$*, pour tout $x \in \mathbb{R}$;*
   - $x < +\infty$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$;*
   - $-\infty < +\infty$.
2. *Les axiomes d'ordre restent valables pour l'ensemble achevé. Les nombres réels ordinaires, contrairement aux symboles $-\infty$ et ∞, sont finis.*

Remarque 1.12. *Soit X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. Les quantités* $\sup(X)$ *et* $\inf(X)$ *sont définies par la règle suivante :*

1. *Si X ne contient pas le point $+\infty$ et est majoré, alors* $\sup(X)$ *est fini et conserve le même sens que la Définition 1.6 ;*
2. *Si X contient $+\infty$ (ou s'il ne contient pas $+\infty$, mais n'est pas majoré), alors nous posons* $\sup(X) = +\infty$.
3. *Si X ne contient pas le point $-\infty$ et est minoré, le nombre reél* $\inf(X)$ *conserve le sens qu'on lui a attribué dans la Définition 1.6.*
4. *Si X contient $-\infty$ (ou s'il ne contient pas $-\infty$, mais n'est pas minoré), alors nous posons* $\inf(X) = -\infty$.

Au vu de ces remarques, nous pouvons conclure que, dans le système $\overline{\mathbb{R}}$, tout ensemble non vide possède la borne supérieure et la borne inférieure.

Principe d'Archimède

Nous abordons dans cette section le principe d'Archimède pour les deux lois de composition interne $+$ et $\times$. Nous commençons par la propriété suivante qui permet de situer les nombres rationnels par rapport aux nombres réels.

Théorème 1.3. *(**Axiome d'Archimède**) Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n non nul tel que $x < n$.*

On dira que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ **est un corps commutatif ordonné archimédien.**

Démonstration. On discutera suivant le signe de x.
• Si $x \leq 0$ on peut prendre $n = 1$.
• Supposons que $x > 0$. Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N}, k \leq x\}$. L'ensemble A est non vide car $0 \in A$ et de plus A est majoré par x. Donc A admet une borne supérieure disons $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant la propriété de caractérisation de la borne supérieure (avec $\epsilon = \frac{1}{2}$), on déduit l'existence d'un certain $k_0 \in A$ tel que $\alpha - \frac{1}{2} < k_0 \leq \alpha$. Donc $\alpha < k_0 + \frac{1}{2} < k_0 + 1$ et par conséquent $k_0 + 1 \notin A$ (car $k_0 + 1 \in A$ implique $k_0 + 1 \leq \alpha$). Ainsi $k_0 + 1 > x$ et on prend $n = k_0 + 1$. □

On a ensuite le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *satisfaisant* $0 < y$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x < ny$*.*

Démonstration. On applique l'axiome d'Archimède à $\frac{x}{y}$. □

Nous énonçons maintenant le principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4. *(**Principe d'Archimède pour la loi** + **dans** $\mathbb{R}$) : Soit* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $y > 0$*. Alors, il existe un et un seul entier relatif* n *tel que :* $ny \leq x < (n+1)y$*.*

Théorème 1.5. *(**Principe d'Archimède pour la loi** $\times$ **dans** $\mathbb{R}_+^*$) Soit* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $x > 1$*. Alors il existe un et un seul entier relatif* n *tel que*

$$x^n \leq y < x^{n+1}.$$

Partie entière

Une conséquence directe du principe d'Archimède pour la loi additive dans $\mathbb{R}$ est la proposition suivante :

Proposition 1.9. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. Il existe un unique entier relatif* p *tel que*

$$p \leq x < p + 1.$$

L'entier relatif p *est appelé* ***partie entière de x*** *et on note* $p = E(x) = [x]$*.*

Démonstration. On applique le principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$ en prenant $y = 1 > 0$. □

Remarque 1.13.

1. *Le réel* $m(x) = x - E(x)$ *est appelé* ***mantisse de x*** *et on a :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(x) = x - E(x) \in [0, 1]$ *;*
2. *Pour tout nombre réel* x*, on a* $E(x) \leq x < E(x) + 1$ *;*
3. *Pour tout nombre réel* x*,* $x - 1 < E(x) \leq x$ *;*
4. $E(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$*.*
5. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*,* $E(x + n) = n + E(x)$*.*

Racine n^{ieme}

La première lacune de $\mathbb{Q}$ est résolue à travers le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un et un seul $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y^n = x$. On note $\sqrt[n]{x}$ et on l'appelle racine n^{ieme} de x.*

Démonstration. Confère Note de Cours : Analyse/L1-MIA (FAST/UAC). □

Proposition 1.10. *Pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$;
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.

Règles de calcul

Proposition 1.11. *(**Formule de binôme de Newton**) Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}, \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 1.14. *La comutativité de la somme dans $\mathbb{R}$ implique que l'on a également :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k,$$

et il peut être plus avantageux selon les situations d'utiliser l'une ou l'autre des deux expressions de la formule du binôme de Newton.

Proposition 1.12. *Pour tous réels x et y et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \\ &= (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. La formule se démontre par le calcul suivant :

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{l=1}^{n} x^{n-l}y^l$$
$$= x^n - y^n.$$

En effet, on a effectué un changement de variable $l = k+1$ dans la deuxième somme de la deuxième égalité. De plus, les termes des deux sommes s'annulant deux à deux à l'exception des termes extrêmes correspondant à $k = 0$ dans la première somme et à $l = n$ dans la seconde. □

1.4 Topologie de $\mathbb{R}$

1.4.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1.13. *On appelle intervalle de* $\mathbb{R}$, *toute partie de* $\mathbb{R}$ *qui est telle que dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires.*
Soit $I \subset \mathbb{R}$.
$(I \text{ intervalle de } \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \in I, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Longrightarrow z \in I$.

Exemple 1.5.
• $\mathbb{R}$ *est un intervalle.*
• $1 \in \mathbb{R}^*$, $-2 \in \mathbb{R}^*$ *et* $-2 \leq 0 \leq 1$, *mais* $0 \notin \mathbb{R}^*$. *Par conséquent* $\mathbb{R}^*$ *n'est pas un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition 1.13. *Soit* I *une partie de* $\mathbb{R}$. *Il y a équivalence entre :*

1. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in I$.

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

Nous avons le résultat suivant qui est une conséquence directe de la définition.

Corollaire 1.2. *Une partie non vide* I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si et seulement si*

$$\forall x, y \in I, (x \leq y \Longrightarrow [x, y] \subset I).$$

Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Théorème 1.7. *Soit* I *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *si et seulement si il est de l'un des dix types suivants :*

1. $\emptyset$;
2. $\mathbb{R}$;
3. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}/a \leq b$;
4. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, a, b \in \mathbb{R}/a < b$;
5. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}/a < b$;
6. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, a, b \in \mathbb{R}/a < b$;
7. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, b \in \mathbb{R}$;
8. $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}, b \in \mathbb{R}$;
9. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, a \in \mathbb{R}$;
10. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Nous raisonnons par distinction de cas.

1. **Cas 1 :** $I = \emptyset$**.** I est alors du premier type.
2. **Cas 2 :** $I \neq \emptyset$ **et** I **n'est ni majoré, ni minoré.** Montrons que $I = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme x ne majore pas I, il existe $b \in I$ tel que $x < b$ et de même, comme x ne minore pas I, il existe $a \in I$ tel que $x > a$. Par conséquent, $a < x < b$ et $a, b \in \mathbb{R}$, donc d'après la définition d'un intervalle, $x \in I$. En conclusion, $I = \mathbb{R}$.
3. **Cas 3 :** $I \neq \emptyset$ **et** I **est majoré et minoré**. Soit $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Comme a minore I et b majore I, on a $I \subset [a, b]$. Montrons que $]a, b[\subset I$: Soit $x \in]a, b[$. Comme $x < b$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $b' \in I$ tel que $b = b - (b - x) < b' \leq b$. De même, il existe $a' \in I$ tel que $a \leq a' < a + (x - a) = x$. Par conséquent,

$a' < x < b'$ et $a', b' \in I$ donc d'après la définition d'un intervalle, $x \in I$. En conclusion, $]a, b[\subset I \subset [a, b]$. I est donc de l'un des quatre types (3), (4), (5) ou (6) suivant que $\sup(I)$ et $\inf(I)$ sont ou non des éléments de I.

4. **Cas 4 : $I \neq \emptyset$ et I est majoré mais pas minoré.** Soit $b = \sup(I)$. Comme b majore I, on a $I \subset]-\infty, b]$. Montrons que $]-\infty, b[\subset I$: Soit $x \in]-\infty, b[$. Comme $x < b$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $b' \in I$ tel que $x < b' \leq b$. De plus, x ne minore pas I, donc il existe $a \in I$ tel que $a < x$. Par conséquent, $a < x < b'$ et $a, b' \in I$, donc d'après la définition de l'intervalle, $x \in I$. En conclusion, $]-\infty, b[\subset I \subset]-\infty, b]$. I est donc de l'un des deux types (7) ou (8) suivant que $\sup(I)$ est oun non élément de I.
5. **Cas 5 : $I \neq \emptyset$, I minoré mais pas majoré.** Par des méthodes analogues, on montre que I est du type (9) ou (10) suivant que $\inf(I)$ appartient ou non à I.

□

Remarque 1.15. *Un intervalle borné est dit aussi segment. Un intervalle non majoré ou un intervalle non minoré est dit aussi demi-droite.*

Ouverts-Fermés

Définition 1.14. *On dit qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un réel x_0 lorsque V contient un intervalle ouvert de centre x_0. C'est-à-dire que :*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que }]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset V.$$

Exemple 1.6.

1. $[-1, 4]$ *est un voisinage de* 0 *;*
2. $[-1, 4]$ *n'est pas un voisinage de* -1.
3. $\{1\} \cup [2, 3[$ *n'est pas un voisinage de* 1*, mais voisinage de* $\frac{5}{2}$ *par exemple.*

Définition 1.15. ***(Ouvert-Fermé)***

1. *Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est qualifiée d'ouvert (ou ensemble ouvert) si pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ est un voisinage de x. Autrement dit, un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.*

2. *Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est un fermé (ou ensemble fermé) de $\mathbb{R}$ lorsque son complémentaire dans $\mathbb{R}$, i.e. $C_{\mathbb{R}}^{F} = \{x \in \mathbb{R}, x \notin F\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.7.

1. *Tout intervalle ouvert $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in]a,b[$. En posant par exemple $\alpha = \min\left\{\frac{|x-a|}{3}, \frac{|x-b|}{3}\right\}$, on a bien $]x-\alpha, x+\alpha[\subset]a,b[$.*
2. *$F =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire dans $\mathbb{R}$, i.e. $C_{\mathbb{R}}^{F} =]a,b[$ est un ouvert.*

Remarque 1.16. *Par convention $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.*

Définition 1.16. *(**Topologie de** $\mathbb{R}$) On appelle topologie de $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$.*

On a la proposition suivante :

Proposition 1.14. *(**union, intersection d'ouverts**)*

1. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ;*
2. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

Remarque 1.17. ***Attention :*** *une intersection non finis d'ouverts n'est pas necessairement un ouvert. Voir Fiche de T.D.*

Corollaire 1.3. *(**intersection, union de fermés**)*

1. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé ;*
2. *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

Exemple 1.8. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. D'où $\mathbb{R}\backslash\{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. On retient que tout singleton de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.18. ***Attention :*** *une réunion non finis de fermés n'est pas necessairement un fermé. Voir Fiche de T.D.*

Intérieur et Adhérence d'un ensemble

Définition 1.17. *(**Intérieur d'un ensemble**) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel. On dit que x_0 est intérieur à A si A est un voisinage de x_0, c'est-à-dire lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset A$. L'ensemble de tous les points intérieurs à A est appelé intérieur de A et se note $\overset{o}{A}$. Ainsi,*

$$x_0 \in \overset{o}{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0,]x_0 - r, x_0 + r[\subset A.$$

Exemple 1.9.

1. *L'intérieur de tout intervalle borné d'extrémité a et b avec $a < b$ est $]a, b[$.*
2. *Déterminer $\overset{o}{A}$ dans chacun des cas suivants $[-3, 6]$, $]-3, 6]$ et $[2, +\infty[$.*

Proposition 1.15. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. $\overset{o}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

Remarque 1.19. *L'intérieur d'une partie ouverte $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est $\mathcal{O}$ elle-même.*

Définition 1.18. *(**Adhérence d'un ensemble**) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel. On dit que x_0 est un point adhérent à A si tout ouvert centré en x_0 contient au moins un élément de A. L'ensemble de tous les points adhérents de A est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A. Ainsi,*

$$x_0 \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \alpha > 0,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 1.10.
- 2 *est un point adhérent à $]2, 6]$.*
- *L'adhérence de tout intervalle d'extrémité a et b avec $a < b$ est $[a, b]$.*

Proposition 1.16. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble

$$G = \bigcap_{F \text{ fermé } \supset A} F,$$

intersection de tous les fermés contenant A. Noter que l'ensemble de tous les fermés contenant A est non vide car $\mathbb{R}$ est le fermé trivial contenant A. G est alors une partie fermée de $\mathbb{R}$ comme intersection quelconque de fermé de $\mathbb{R}$. Pour tout F fermé contenant A, on a $G \subset F$. Donc G est le plus petit fermé contenant A. Il reste à montrer que $\overline{A} = G$ (Exercice !). □

Remarque 1.20. *L'adhérence d'une partie fermé F de $\mathbb{R}$ est F elle-même.*

Proposition 1.17. ***(relation entre adhérence et intérieur)*** *Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{R}\setminus \overset{o}{A} = \overline{\mathbb{R} \setminus A}.$$

Démonstration. Le cas $A = \emptyset$ est trivial. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il suffit alors de montrer que $\mathbb{R}\setminus \overset{o}{A}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{R} \setminus A$. $\mathbb{R}\setminus \overset{o}{A}$ est un fermé contenant $\mathbb{R} \setminus A$ et si F est un autre fermé contenant $\mathbb{R} \setminus A$, alors $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert contenu dans A, donc $\mathbb{R} \setminus F$ est inclus dans $\overset{o}{A}$. En conclusion, en repassant au complémentaire, on a : $\mathbb{R}\setminus \overset{o}{A} \subset F$, c'est-à-dire $\mathbb{R}\setminus \overset{o}{A}$ est bien le plus petit fermé contenant $\mathbb{R} \setminus A$, soit l'adhérence de $\mathbb{R} \setminus A$. □

1.4.2 Densité des nombres rationnels et des irrationnels

Définition 1.19. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$, si A rencontre tout intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$ (i.e. $\overline{A} = \mathbb{R}$). En d'autre terme, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tous a, b réels, on a :*

$$a < b \Longrightarrow \exists x \in A, a < x < b.$$

Par contraposition, A est une partie non dense dans $\mathbb{R}$, s'il existe au moins deux réels a et b tels que

$$a < b \text{ et } \forall x \in A, x \leq a \text{ ou } b \leq x.$$

Exemple 1.11. *$\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. En effet, 0 et 1 appartiennent à $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z} \cap]0, 1[= \emptyset$.*

Théorème 1.8. *Les ensembles* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sont denses dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

Remarque 1.21. *Pour* $a < b$*, une fois trouver* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $a < r < b$*, on peut répéter l'application du théorème de densité avec* $a < r$ *et* $r < b$ *et de façon indéfiniment.*

Propriété 1.2. *L'intérieur de* $\mathbb{Q}$ *est vide (i.e.* $\overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset$*).*

Démonstration. On a : $\mathbb{R} \setminus \overset{o}{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} \setminus \overset{o}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et la propriété tient. □

1.4.3 Principe de Cantor

Définition 1.20. *(**Intervalles emboîtés**) On apppelle système d'intervalles emboîtés, un ensemble* $\mathcal{Q}$ *d'intervalles de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\forall I, J \in \mathcal{Q}$*, on a* $I \subset J$ *ou* $J \subset I$*.*

Théorème 1.9. *(**Principe de Cantor**) Pour tout système* $\mathcal{Q}$ *d'intervalles fermés emboîtés de* $\mathbb{R}$*, il existe un réel qui appartient à tous les intervalles du système* $\mathcal{Q}$*. Plus précisement, il existe* $\alpha = \sup\{a : [a, b] \in \mathcal{Q}\}$*,* $\beta = \inf\{b : [a, b] \in \mathcal{Q}\}$ *vérifiant* $\alpha \leq \beta$ *et l'intervalle* $[\alpha, \beta]$ *est l'intersection de tous les intervalles du système* $\mathcal{Q}$*.*

Démonstration. Confère Note de Cours : L1-MIA (FAST/UAC). Version 2017-2018. □

1.5 Exercices

Exercice 1.4.
On pose pour $x, y \in \mathbb{R}$ *:* $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$*. Démontrer que* d *est une distance sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 1.5.
Justifier que $\mathbb{Z}$ *est un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 1.6.

1. *Soient a et b deux nombres réels positifs. Montrer que :* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *Etudier dans quel cas, on a égalité.*
2. *Soient a et b deux nombres réels. Montrer que :* $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 1.7. *Démontrer les relations suivantes, où a et b désignent deux nombres réels quelconques.*

1. $2|ab| \leq a^2 + b^2$;
2. $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$;
3. $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$;
4. $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

Exercice 1.8.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. *Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

2. *En déduire que :*
   (a) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$;
   (b) *inégalité de Minkowski:* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

Exercice 1.9.

Soient x et y deux nombres rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soit irrationnels. Démontrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 1.10.

Soit n un entier naturel non nul.

1. *Montrer que $2+\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.*
2. *Montrer que $(2-\sqrt{3})^n \in]0,1[$.*
3. *Montrer que $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$ est un entier naturel pair.*

4. *En déduire l'expression de la partie entière de* $(2+\sqrt{3})^n$.

Exercice 1.11.

1. *Donner un exemple de partie non vide bornée de* $\mathbb{R}$ *qui contient sa borne supérieure et ne contient pas sa borne inférieure.*
2. *Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse : Il existe des parties non vide et majorées de* $\mathbb{Q}$ *qui n'ont pas de borne supérieure dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.12.

1. *Soient* A *et* B *deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\sup(A\cup B)=\max(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A\cup B)=\min(\inf A, \inf B)$.
2. *Déterminer s'il existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le minimum et le maximum de chacun des ensembles suivants :* $A_1 =]-1,0]$; $A_2=[3,+\infty[$; $A_3=\left\{\frac{n}{2n+1}; n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *et* $A_4=\{(-1)^n, n\in\mathbb{N}\}$; $A_5=\left\{\frac{n}{mn+1}; (m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right\}$; $A_6=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *et* $A_6=\left\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 1.13.

Soit a *et* b *deux réels strictement positifs. On considère l'ensemble* F *défini par*

$$F=\left\{\frac{1}{ma}+\frac{1}{nb}, (m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right\}.$$

1. *Prouver que* F *possède un plus grand élément et que* F *est minoré.*
2. *En utilisant la propriété d'Archimède pour la loi* $+$ *dans* $\mathbb{R}$, *prouver que* F *admet* 0 *pour borne inférieure.*

Exercice 1.14.

On considère les ensembles $E_1=\left\{\frac{1}{1+a}, a\in\mathbb{R}_+\right\}$ *et* $E_2=\left\{x\in\mathbb{R}_+^*, x^3\leq 3\right\}$.

1. *Montrer que* $\sup(E_1)=1$.
2. *Montrer que* E_2 *est non vide et majorée.*
3. *On pose* $a=\sup(E_2)$. *Montrer que* $a^3=3$.

Exercice 1.15.

Soient A *et* B *deux parties non vides de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels telles que*

$$\forall x\in A, \forall y\in B, \text{ on a } x\leq y.$$

Prouver l'existence de $\sup(A)$ *et* $inf(B)$ *et montrer que* $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 1.16.
Soit g *une application croissante de* $[0,1]$ *dans lui-même. On considère l'ensemble* $E = \{x \in [0,1], g(x) \geq x\}$. *Montrer que* E *possède dans* $\mathbb{R}$ *une borne supérieure* b *et que* $g(b) = b$.

Exercice 1.17.
Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application croissante et* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\sup(h(A)) \leq h(\sup(A))$.

Chapitre Deux

Suites numériques

2.1 Introduction

Le calcul différentiel et intégral tout entier repose sur le concept de limite d'une suite numérique. Nous débutons ce chapitre par le raisonnement par récurrence qui est un raisonnement souvent utilisé pour l'étude d'une suite.

2.1.1 Le raisonnement par récurrence

Principe

Le raisonnement par récurrence est une belle machine permettant de démontrer qu'une assertion est vraie quelque soit l'entier naturel $n \geq N_0$, où $N_0 \in \mathbb{N}$. Le principe est le suivant : soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel $n \geq N_0$. Si $P(N_0)$ est **Vraie** et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_0$, l'implication $''P(n) \Longrightarrow P(n+1)''$ est **Vraie**, alors l'assertion $P(n)$ est **Vraie** pour tout entier naturel $n \geq N_0$.

Point de la méthode

Dans une démonstration par récurrence, procéder de la manière suivante :

1. Exprimer clairement l'assertion $P(n)$ que l'on veut prouver **Vraie** pour tout entier naturel $n \geq N_0$.
2. Vérifier que $P(N_0)$ est **Vraie**.
3. Faire l'hypothèse de récurrence : "$P(n)$ **Vraie** pour un entier naturel $n \geq N_0$". Utiliser cette hypothèse pour prouver (par des calculs, des raisonnement, de l'intuition) que $P(n+1)$ est **Vraie**.

Exemple 2.1. *Prouver par récurrence que :*

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Résolution :

1. Pour $n = 1$, on a $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc la propriété est vraie à l'ordre $n = 1$.
2. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à un ordre k, (avec $k \geq 1$), c'est-à-dire supposons que :

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Montrons que la propriété est aussi vraie à l'ordre $k+1$, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$. On conclut alors que

$$\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple 2.2. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a*

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2.3. *Soit ψ une application strictement croissante définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\psi(n) \geq n$.*

Exemple 2.4. *Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.*

2.1.2 Définition d'une suite

Définition 2.1. *Soit A un ensemble non vide. On appelle suite d'éléments de A toute application d'une partie non vide I de $\mathbb{N}$ à valeurs dans A.*

Remarque 2.1. *La suite $n \in I \subset \mathbb{N} \mapsto x(n) := x_n \in A$ sera notée $(x_n)_{n\in I}$.*

En fait $(x_n)_{n\in I}$ est la liste des images, ce qui définit complètement l'application qu'est la suite.

On étudiera dans le cadre de ce cours, les suites à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On parle alors de suites réelles ou plus traditionnellement de suites numériques. Nous nous intéressons surtout au comportement de l'image x_n pour les grandes valeurs de n.

2.1.3 Mode de détermination d'une suite

Une suite peut être déterminée de deux manières :

1. par la donnée de son terme général x_n en fonction de n. On dit dans ce cas, que la suite $(x_n)_n$ est donnée sous sa forme explicite.
2. par la donnée de ses p premiers termes et une relation de récurrence entre $p+1$ termes consécutifs.

2.1.4 Exemples

1. $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $x_n = 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Une suite arithmétique $(x_n)_{n\in I}$ de raison $r \in \mathbb{R}$ vérifie la relation : $x_{n+1} - x_n = r$ pour tout $n \in I$. Si x_k est le premier terme, alors le terme général est donné par la formule :

$$x_n = x_k + (n-k)r, \forall n \geq k$$

et
$$x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n = \left(\frac{n-k+1}{2}\right)(x_k + x_n), \forall n \geq k.$$

4. Une suite géométrique $(x_n)_{n\in I}$ de raison $q \in \mathbb{R}$ vérifie la relation : $x_{n+1} = qx_n$ pour tout $n \in I$. Si x_k est le premier terme, alors le terme général est connu via la formule :
$$x_n = x_k q^{n-k}, \forall n \geq k$$
et
$$\forall n \geq k, x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n = x_k \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}, \text{ si } q \neq 1.$$
5. Une suite $(x_n)_{n\in I}$ est dite stationnaire si il existe $k \in I$ tel que pour tout $n \geq k$, on a $x_n = x_k$.
6. Déterminer les quatres premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_n = \frac{2-(-1)^n}{n^2+3}.$$
7. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci est définie par : $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.

2.2 Limite d'une suite

2.2.1 Définitions

Définition 2.2. *(**Suite convergente**) Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite de nombre réels. On dit que $(x_n)_{n\in I}$ est convergente, s'il existe un réel x tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in I$ satisfaisant la condition : $|x_n - x| < \epsilon$ pour tout $n > N$.*
Le réel x s'appelle limite de la suite $(x_n)_{n\in I}$; on dit alors que la suite converge vers x et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Remarque 2.2. *On a : $|x_n - x| < \epsilon \Longleftrightarrow x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$.*
Donc la suite $(x_n)_{n\in I}$ converge vers x si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in I/$ $\forall n > N(\epsilon)$, les termes x_n appartiennent à l'intervalle ouvert $]x-\epsilon, x+\epsilon[$.

Exemple 2.5. *On considère une suite stationnaire, c'est-à-dire telle qu'il existe un certain rang* $N_0 \in \mathbb{N}$ *et un nombre réel* c *satisfaisant la condition* $x_n = c$, $\forall n \geq N_0$. *Montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$. *Soit* $\epsilon > 0$. *Par définition de la suite, on a en particulier pour tout* $n > N_0$, $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. *On prend* $N(\epsilon) = N_0$.

Exemple 2.6. *On considère la suite de terme général* $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. *Montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. *Soit* $\epsilon > 0$. *Cherchons* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\forall n > N(\epsilon)$, $|x_n - 0| < \epsilon$. *On a* $|x_n - 0| < \epsilon \iff |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$. *Comme* $E(1/\epsilon) \leq 1/\epsilon < E(1/\epsilon) + 1$, *on prend alors* $N(\epsilon) = E(1/\epsilon) + 1 \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.3. *On pourra aussi utiliser pour cet exemple, le principe d'Archimède pour la loi* $+$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour justifier que cette limite donne* 0 *(Exercice).*

Exemple 2.7. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $x_n = \exp(-n^2 + n)$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Définition 2.3. ***(Suite divergente)*** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels.*

1. *On dit que la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *a pour limite* $+\infty$ *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $N(\epsilon) \in I$ *tel que pour tout* $n > N(\epsilon)$, *on a :* $x_n > \epsilon$. *On dit, dans ce cas que la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *diverge et diverge vers* $+\infty$ *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
2. *On dit que la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *diverge et diverge vers* $-\infty$ *si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un rang* $N(\epsilon) \in I$ *tel que pour tout* $n > N(\epsilon)$, $x_n < -\epsilon$. *On dit, dans ce cas que la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *diverge et diverge vers* $-\infty$ *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Exemple 2.8. *On considère la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $x_n = n^2$. *Montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. *Soit* $\epsilon > 0$. *Cherchons* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n > N(\epsilon)$, $x_n > \epsilon$. *On a* $x_n > \epsilon \iff n^2 > \epsilon \iff n > \sqrt{\epsilon}$. *Comme l'exemple précédent (i.e. Exemple 2.6), on prend* $N(\epsilon) = E(\sqrt{\epsilon}) + 1 \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.4. *De façon générale, on dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle est non convergente.*

Exemple 2.9. *Montrer que la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ diverge.*

Proposition 2.1. ***(Unicité de la limite d'une suite réelle)*** *Toute suite convergente possède une seule limite.*

Démonstration. Supposons que la suite convergente $(x_n)_{n\in I}$ admet deux limites l_1 et l_2 telles que $l_1 \neq l_2$. Alors on a $|l_1 - l_2| > 0$. Soit $\epsilon = \frac{|l_1-l_2|}{2}$, alors il existe $N_1(\epsilon)$ et $N_2(\epsilon)$ dans I tel que $\forall n > N_1(\epsilon)$, on a $|x_n - l_1| < \frac{|l_1-l_2|}{2}$ et $\forall n > N_2(\epsilon)$, on a $|x_n - l_2| < \frac{|l_1-l_2|}{2}$. Ainsi, $\forall n > N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$, on a $|x_n - l_1| < \frac{|l_1-l_2|}{2}$ et $|x_n - l_2| < \frac{|l_1-l_2|}{2}$. Par suite,

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - x_n) + (x_n - l_2)| \\ &\leq |x_n - l_1| + |x_n - l_2| \\ &< \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2} \\ &= |l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

On a donc $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$. Ce qui est absurde et par conséquent $l_1 = l_2$. □

2.2.2 Suite minorée, suite majorée, suite bornée

Définition 2.4. *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite réelle.*

1. ***Suite minorée :*** *On dit qu'une suite numérique (x_n) est minorée si il existe un réel m tel que $m \leq x_n$ pour tout $n \in I$.*
2. ***Suite majorée :*** *On dit qu'une suite numérique (x_n) est minorée si il existe un réel M tel que $x_n \leq M$ pour tout $n \in I$.*
3. ***Suite bornée :*** *On dit qu'une suite numérique (x_n) est bornée si il existe un réel $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in I$.*

Remarque 2.5. *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite réelle.*

1. *La suite (x_n) est minorée si l'ensemble de ses valeurs $\{x_n, n \in I\}$ est minoré.*
2. *La suite (x_n) est majorée si l'ensemble de ses valeurs est majoré.*

Remarque 2.6.
1. *La suite (x_n) est bornée si l'ensemble de ses valeurs est bornée.*
2. *La suite (x_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite réelle convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $N \in I$ tel que $|x_n - x| < 1$ pour tout $n > N$. Ainsi pour tout $n > N$ on a

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &< |x| + 1. \end{aligned}$$

Soit $M = \max\{|x_i|, i \in I, i \leq N, |x| + 1\}$, alors $\forall n \in I$, $|x_n| \leq M$. □

Remarque 2.7. *Une suite bornée peut être non convergente.*

Exemple 2.10. *La suite de terme général $x_n = (-1)^n$ est non convergente d'après l'Exemple 2.9, mais l'ensemble de ses valeurs est $\{-1, 1\}$ donc elle est bornée.*

Remarque 2.8. *Toute suite non bornée diverge. Ainsi, pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'elle n'est pas bornée.*

Exemple 2.11. *(**Convergence d'une suite géométrique**) On considère la suite de terme général $x_n = q^n$ où $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*
• Si $|q| > 1$, montrons que pour tout $M > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|q^n| > M$. En effet, d'après le principe d'Archimède pour la loi multiplicative dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $N \in \mathbb{Z}$ tel que $|q|^{N-1} \leq M < |q|^N$. Donc pour tout $n > \max\{N, 1\}$, comme $|q| > 1$, on a $|q^n| = |q|^n > |q|^N > M$. Ainsi, la suite (x_n) est non bornée et par suite (x_n) diverge.
• Si $q = 1$ alors $x_n = 1$ et la suite est stationnaire. Donc sa limite vaut 1.
• Si $|q| < 1$ alors $\frac{1}{|q|} > 1$. Soit $\epsilon > 0$, on a $|q^n| = |q|^n < \epsilon \iff \frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\epsilon}$. Puisque $\frac{1}{|q|} > 1$, d'après le principe d'Archimède pour la loi multipilcative dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\frac{1}{|q|}\right)^{N_0-1} \leq \frac{1}{\epsilon} < \left(\frac{1}{|q|}\right)^{N_0}$. Ainsi, pour $N \geq \max\{N_0, 1\}$, on a $\forall n > N$, on a $n > N_0$ donc $\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \left(\frac{1}{|q|}\right)^{N_0} > \frac{1}{\epsilon}$, d'où $|q^n| < \epsilon$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

2.2.3 Propriétés arithmétiques

Définition 2.5. *(**Opérations sur les suites**) Soient $(x_n)_{n\in I}$ et $(y_n)_{n\in I}$ deux suites réelles. On définit :*

1. *la suite $(x_n + y_n)$ de terme général $x_n + y_n$ est dite **somme** ;*
2. *la suite (λx_n) de terme général λx_n dite **multiplication par un scalire** λ ;*
3. *la suite $(x_n y_n)$ de terme général $x_n y_n$ dite **produit** ;*
4. *la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ de terme général $\frac{x_n}{y_n}$ si $y_n \neq 0$ $\forall n \in I$ dite **quotient**.*

Proposition 2.3. *Soient (x_n) et y_n deux suites réelles convergeant respectivement vers $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tout réel λ les suites $(x_n + y_n)$, (λx_n) et $(x_n y_n)$ convergent et admettent pour limite $x + y$, λx et xy respectivement.*
2. *Si $y \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ converge et admet pour limite $\frac{x}{y}$.*

Démonstration. Exercice de maison. □

Théorème 2.1. *(**de comparaison**) Soient (x_n), (y_n) et (z_n) des suites réelles.*

1. *Si il existe $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0$, $x_n \leq y_n$ et si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$, alors $x \leq y$.*
2. *Si il existe $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0$, $x_n \leq y_n \leq z_n$ et si les suites (x_n), (z_n) convergent vers la même limite, alors la suite (y_n) converge avec*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

Démonstration.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes vers x et y respectivement. Supposons qu'il existe un rang $N_0 \in I$ teq que $\forall n > N_0$, $x_n \leq y_n$. Il s'agit de montrer que $x \leq y$. Raisonnons par l'arsurde : supposons que $x > y$. Prenons $\epsilon = x - y > 0$, alors il existe $N_1 \in I$ et $N_2 \in I$ tel que $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n > N_1$ et $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n > N_2$. Ainsi,

$\forall n > N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, on a

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= (x_n - x) + (x - y) + (y - y_n) \\ &\geq -|x_n - x| + |x - y| - |y_n - y| \\ &> (x - y) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &= (x - y) - \epsilon = 0 \end{aligned}$$

On a donc $x_n > y_n$ pour tout $n > N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, ce qui est absurde.

2. A démontrer en exercice.

$\square$

Remarque 2.9. *Si les suites (x_n) et (y_n) convergent et si il existe $N_0 \in I$ tel que $\forall n > N_0$, $x_n < y_n$, on ne peut conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.*

En effet, en considérant les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$, on a $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

2.2.4 Suites monotones

Définitions

Définition 2.6. *(**Suites monotones**) Soit $(x_n)_{n \in I}$ une suite de nombres réels.*

1. *On dit que la suite $(x_n)_{n \in I}$ est croissante si $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in I$.*
2. *On dit que la suite $(x_n)_{n \in I}$ est décroissante si $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \in I$.*
3. *On dit que la suite $(x_n)_{n \in I}$ est strictement croissante si $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in I$.*
4. *On dit que la suite (x_n) est strictement décroissante si $x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \in I$.*
5. *On dit que la suite (x_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
6. *On dit que la suite (x_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Théorème 2.2. *Soit $(x_n)_{n \in I}$ une suite réelle.*

1. *Si $(x_n)_{n\in I}$ est croissante et majorée, alors $(x_n)_{n\in I}$ converge ;*
2. *Si $(x_n)_{n\in I}$ est décroissante et minorée alors (x_n) converge.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite réelle.

Supposons que $(x_n)_{n\in I}$ est croissante et majorée. Alors l'ensemble $A = \{x_n, n \in I\}$ est non vide et majoré dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, il existe $a = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$, alors $a - \epsilon < a = \sup(A)$, donc il existe $N_0 \in I$ tel que $a - \epsilon < x_{N_0} \leq a$. Comme (x_n) est croissante, alors pour tout $n > N_0$, on a : $a - \epsilon < x_{N_0} \leq x_n \leq a < a + \epsilon$. Ainsi, pour tout $n > N_0$, $|x_n - a| < \epsilon$ et par suite, a est la limite de la suite $(x_n)_{n\in I}$.

2. Supposons (x_n) décroissante et minorée : A démontrer en exercice.

□

Exemples 2.1. *La suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ est croissante et majoré.*

En effet $x_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} n+2 > n+1 &\iff \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \\ &\iff -\frac{1}{n+2} > -\frac{1}{n+1} \\ &\iff x_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+2} > 2 - \frac{1}{n+1} = x_n. \end{aligned}$$

D'où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$. Donc la suite est majorée par 2. D'après le Théorème 2.2, la suite (x_n) converge. Sa limite est égale à 2.

2.3 Suites extraites

2.3.1 Définitions et exemples

Définition 2.7. *(**Suite extraite**) Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite réelle. Soit k_n une suite strictement croissante d'entiers naturels (k est une fonction de $\mathbb{N}$ dans I). La suite (y_n) de terme général $y_n = x_{k_n}$ est appelée suite extraite ou sous suite de la suite (x_n).*

Exemple 2.12.

1. *On considère la suite* (x_n) *de terme général* $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$*. Les suites* (y_n) *et* (z_n) *définies par :* $y_n = x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ *et* $z_n = x_{2n+1} = -1 + \frac{1}{-2n+1}$ *sont des sous-suites de la suite* (x_n)*.*
2. *Considérons ici* (x_n) *telle que* $x_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$*. Elle est périodique de période* $T = 17$*. L'application* $k_n = 17n$ *donne la sous-suite* $y_n = x_{17n} = 0$*. De même, l'application* $k_n = 17n + 1$ *donne la sous-suite* $z_n = x_{17n+1} = \sin(\frac{2\pi}{17})$*.*

Définition 2.8. *(**valeur d'adhérence d'une suite**) Soit* (x_n) *une suite réelle. On appelle valeur d'adhérence de la suite* (x_n) *la limite lorsqu'elle existe d'une sous-suite de* (x_n)*.*

Exemple 2.13. *On considère la suite* (x_n) *de terme général* $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$*. On observe que les sous-suites* (y_n) *et* (z_n) *définies par* $y_n = 1 + \frac{1}{2n}$ *et* $z_n = -1 + \frac{1}{2n+1}$ *convergent respectivement vers* 1 *et* -1*. Donc* 1 *et* -1 *sont des valeurs d'adhérence de la suite* (x_n)*.*

Exemple 2.14. *On considère la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général* $x_n = (-1)^n n + 2$*. Cette suite n'a pas de valeurs d'ahérence.*

En effet, soit (k_n) *une suite strictement croissante dans* $\mathbb{N}^*$ *et soit* (y_n) *la sous-suite définie par* $y_n = x_{k_n}$*. Il s'agit de montrer que cette sous-suite ne converge pas i.e. que* (y_n) *est non bornée. Soit donc* $\epsilon > 0$*. Cherchons* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $|y_{n_0}| > \epsilon$*. On a*

$$|y_n| = |(-1)^{k_n} k_n + 2| \geq ||(-1)^{k_n} k_n| - 2| \geq k_n - 2 \geq n - 2.$$

Ainsi, $|y_n| > \epsilon$ *si* $n - 2 > \epsilon$ *i.e. si* $n > \epsilon + 2$*. On prend alors* $n_0 = E(\epsilon + 2) + 1$ *soit* $n_0 = E(\epsilon) + 3 \in \mathbb{N}^*$*. D'où la sous-suite* (y_n) *est non bornée et de ce fait non convergente. Aucune sous-suite de* (x_n) *n'est convergente, par conséquent la suite* (x_n) *n'admet pas de valeur d'adhérence.*

Théorème 2.3. *Si la suite réelle* (x_n) *converge vers* $x \in \mathbb{R}$*, alors toute sous suite* (x_{k_n}) *de* (x_n) *converge vers* x*.*

Démonstration. Supposons que la suite réelle $(x_n)_{n\in I}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $N \in I$ tel que $|x_n - x| < \epsilon$, $\forall n > N$. Soit maintenant

(k_n) une suite d'entiers strictement croissante. On a $k_n \geq n$ pour tout $n \in J$ (J étant le domaine de définition de k_n). Donc pour tout $n > N$, on a $k_n \geq n > N$; ainsi $|x_{k_n} - x| < \epsilon$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{k_n} = x$. □

Corollaire 2.1. *Une suite convergente a une seule valeur d'adhérence.*

Démonstration. Provient directement de l'unicité de la limite d'une suite lorsqu'elle existe. □

Remarque 2.10. *On utilise souvent ce résultat pour montrer qu'une suite diverge : si l'on trouve deux sous-suites de la même suite* (x_n) *qui tendent vers deux limites distinctes, alors la suite* (x_n) *est divergente du fait de l'unicité de la limite.*

Exemple 2.15. *Considérons la suite réelle de terme général* $x_n = (-1)^n$*. On observe que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $x_{2n} = 1$ *et* $x_{2n+1} = -1$*. Donc* (x_n) *admet au moins deux valeurs d'adhérence :* 1 *et* -1*. Par conséquent, elle diverge.*

Théorème 2.4. *Une suite* (x_n) *est convergente si et seulement si les suites extraites* (x_{2n}) *et* (x_{2n+1}) *convergent vers une même limite.*

Théorème 2.5. *(**Bolzano Weierstrass**) De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in I}$, une suite bornée dans $\mathbb{R}$. Alors il existe un réel $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M, \forall n \in I$. Donc tpus les termes de la suite sont dans $[a_1, b_1] = [-M, M]$. Soit $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. On obtient alors deux sous intervalles $[a_1, c_1]$ et $[c_1, b_1]$ de longueur $\frac{b_1-a_1}{2}$. L'un au moins de ces deux sous intervalles contient une infinité de termes de (x_n), on le notera $[a_2, b_2]$, et on a $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ avec $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$. On répète ce processus de dichotomie jusqu'à avoir le sous intervalle $[a_n, b_n]$ contenant une infinité de termes de (x_n) puis on construit le point $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ et on obtient les sous intervalles $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ dont l'un contient une infinité de termes de (x_n) que nous désignerons $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Ce sous intervalle contient une infinité de termes de (x_n) avec comme longueur $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$. On a donc construit une suite d'intervalles fermés $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$. Comme la suite géométrique $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, l'intervalle $[a_n, b_n]$

a une longueur $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} < \epsilon$. D'après le principe de Cantor et son corollaire on a $\bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n] = \{c\}$. Construisons maintenant une sous suite de (x_n) convergeant vers c. Soit (x_{k_1}) un élément arbitraire de (x_n) dans $[a_1, b_1]$. x_{k_i} étant connu, $x_{k_{i+1}}$ est un élément de (x_n) dans $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ tel que $k_{i+1} > k_i$. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$. Comme pour tout $n \geq 1$, $c \in [a_n, b_n]$, alors on a $|x_{k_n} - c| \leq b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n+1}}$. On déduit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, on a $|x_{k_n} - c| \leq b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n+1}} < \epsilon$. D'où (x_{k_n}) converge vers c. □

2.3.2 Limite supérieure et limite inférieure

Théorème 2.6. *(**Définition**) Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels. L'ensemble A des valeurs d'adhérence de (x_n) est borné et contient* $\sup(A)$ *et* $\inf(A)$.

Par définition :

- $\sup(A)$ *est dite limite supérieure de (x_n) noté* $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n$ *;*
- $\inf(A)$ *est dite limite inférieure de (x_n) noté* $\lim_{n\to+\infty} \inf x_n$.

Démonstration. □

Exemple 2.16. *Soit la suite $(x_n)_n$ telle que $x_n = \cos(n\pi)$.*
On a $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \inf x_n = -1$. En effet, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est $A = \{-1, 1\}$. Donc la borne inférieure de A est -1 et la borne supérieure est égale à 1.

2.4 Suites adjacentes

Définition 2.9. *(**Suites adjacentes**) Soient $(x_n)_{n\in I}$ et $(y_n)_{n\in I}$ deux suites numériques. On dit qu'elles sont adjacentes si : l'une est croissante et l'autre est décroissante ; leur différence converge vers 0.*

Exemple 2.17. *Les suites (x_n) et (y_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{nn!}$ sont adjacentes.*

Exemple 2.18. *De même, les suites de terme général* $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ *et* $y_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ *sont adjacentes.*

Théorème 2.7. *Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.*

Démonstration. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$. Posons $t_n = y_n - x_n$. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq 0$, i.e. $x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$. La suite (x_n) est donc croissante et majorée par y_0, elle est donc convergente. De même la suite (y_n) est convergente car elle est décroissante et minorée par x_0. Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. □

2.5 Suite de Cauchy

2.5.1 Définition

Définition 2.10. ***(Suite de Cauchy)*** *On dit qu'une suite réelle* (x_n) *est une suite de Cauchy si pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $N \in I$ *tel que pour tout* $n > N$ *et tout* $m > N$*, on a* $|x_n - x_m| < \epsilon$*.*

Exemple 2.19. *Montrons que la suite de terme général* $u_n = \frac{1}{n^2}$ *est une suite de Cauchy. Soit* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n \geq m$*. On a :*

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \\
&= \left|\frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2}\right| \\
&= \left|\frac{(m-n)(m+n)}{m^2 n^2}\right| \\
&= \frac{(n-m)(n+m)}{n^2 m^2} \\
&\leq \frac{(n)(2n)}{m^2 n^2} \\
&= \frac{2}{m^2}
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherchons maintenant $N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq m > N(\epsilon)$, on ait : $|x_n - x_m| < \epsilon$. Comme $\frac{2}{m^2} < \epsilon \Longleftrightarrow m > \sqrt{2/\epsilon}$, alors on prend $N(\epsilon) = E(\sqrt{2/\epsilon}) + 1 \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est bien une suite de Cauchy.

Proposition 2.4. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $N \in I$ tel que $|x_n - x_m| < 1$ pour tout $n > N$ et tout $m > N$. Donc $|x_n - x_{N+1}| < 1$ pour tout $n > N$. Ainsi pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \\ &\leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \\ &< |x_{N+1}| + 1. \end{aligned}$$

Soit $M = \max\{|x_i|, i \in \mathbb{N}, i \leq N, |x_{N+1}|\}$. Alors $\forall n \in I$, $|x_n| \leq M$. Doù la suite $(x_n)_{n \in I}$ est bornée. □

Proposition 2.5. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergente vers x. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $N \in I$ tel que pour tout $n > N$ et $m > N$, on a $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'où (x_n) est de Cauchy. □

Exemple 2.20. *On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Prouver que cette suite n'est pas de Cauchy. En déduire sa nature.*

Exemple 2.21. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $|a| < 1$. On considère la suite de terme*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a^i.$$

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

Remarque 2.11. ***Attention.*** *On prendra garde que la condition* $\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ *n'est pas suffisante pour conclure que la suite* (x_n) *est une suite de Cauchy. On pourra s'en convaincre en considérant l'Exemple 2.20 précédent.*

2.5.2 Propriétés arithmétiques

Proposition 2.6. *Soient* (x_n) *et* (y_n) *deux suites de Cauchy dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $(x_n + y_n)$, (λx_n) *et* $(x_n y_n)$ *sont des suites de Cauchy.*
2. $(\frac{x_n}{y_n})$ *est une suite de Cauchy si il existe* $N_0 \in I$ *tel que pour tout* $n > N_0$, $y_n \neq 0$.

Démonstration. A démontrer en exercice. □

Théorème 2.8. ***(Critère de Cauchy)*** *Dans* $\mathbb{R}$, *toute suite de Cauchy est une suite convergente. On dit donc que* $\mathbb{R}$ *muni de la distance standard* $|\cdot|$ *est un espace métrique complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors (x_n) est bornée. Donc d'après le théorème de Bolzano Weierstrass on peut extraire une sous suite (x_{k_n}) convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x_n \to x$. Soit $\epsilon > 0$; il existe $N_1 \in I$ tel que pour tout $n > m > N_1$, on a $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$.
De même, il existe $N_2 \in I$ tel que pour tout $n > N_2$, on a $|x_{k_n} - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, en prenant $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors pour tout $n > N$, on a $|x_{k_n} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|x_n - x_{k_n}| < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \\ &\leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'où (x_n) converge vers x. □

Remarque 2.12. *L'intérêt de ce théorème est qu'il fournit un moyen de montrer qu'une suite converge sans qu'il soit besoin, comme lorsqu'on utilise la définition d'une suite convergente, de connaître la valeur de la limite de la suite.*

2.6 Suites infinement petites

Définition 2.11. ***(Suites infinement petites)*** *On dit qu'une suite* (x_n) *est un infinement petite si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Proposition 2.7. *Soient* (x_n) *et* (y_n) *deux suites réelles telles que* (x_n) *converge vers* 0 *et* (y_n) *bornée. Alors la suite* $(x_n y_n)$ *est un infinement petite.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La suite (y_n) étant bornée alors il existe $M > 0$ tel que $|y_n| < M$, $\forall n$. Comme (x_n) converge vers 0, alors il existe $N \in I$ tel que $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$, $\forall n > N$. Ainsi, pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned} |x_n y_n &= |x_n||y_n| \\ &\leq M|x_n| \\ &< M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'où $(x_n y_n)$ converge vers 0. □

Exemple 2.22. *La suite de terme général* $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ *est un infinement petite. En effet, la suite de terme général* $\sin(n)$ *est bornée et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

2.7 Suites infinement grandes

Définition 2.12. ***(Suites infinement grandes)*** *Soit* (x_n) *une suite réelle. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$, *alors on dit que la suite* (x_n) *est infinement grandes.*

Proposition 2.8. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ *et* $\forall n > N_0$, $x_n \neq 0$, *alors la suite* (y_n) *de terme général* $y_n = \frac{1}{x_n}$, $n > N_0$ *est une suite infinement petite.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$, alors il existe un rang $N_1 \in I$ tel que pour tout $n > N_1$, on a $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$. Donc pour tout $n > N = \max\{N_1, N_0\}$, on a $|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \epsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. □

Proposition 2.9. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *et* $\forall n > N_0$, $x_n \neq 0$, *alors la suite* (y_n) *de terme général* $y_n = \frac{1}{|x_n|}$, $n > N_0$ *est une suite infinement grande.*

Démonstration. Soit $A > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors il existe un rang $N_1 \in I$ tel que $\forall n > N_1$, $|x_n| < \frac{1}{A}$. Ainsi, $\forall n > \max\{N_0, N_1\}$, $\frac{1}{|x_n|} > A$ i.e. $y_n > A$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty$. □

2.8 Exercices

Exercice 2.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. *Le plan est muni du repère orthonormé* (O, I, J). *Tracer les droites* $(\mathcal{D})$ *et* (Δ) *d'équations respectives* $y = \frac{1}{2}x + 4$ *et* $y = x$, *puis construire les quatre premiers termes de la suite* (u_n) *sur l'axe des abscisses.*
2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\forall n\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 8$.
   (a) *Démontrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme* v_0.
   (b) *Exprimer* v_n, *puis* u_n *en fonction de* n.
   (c) *Calculer les sommes* $S_1 = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ *et* $S_2 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ *en fonction de* n.

Exercice 2.2. *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$, *on considère la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*
$x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. *On note* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*
$y_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$.

1. *Calculer les trois premiers termes de la suite* (x_n), *pour* $x_0 = 1$ *et* $a = 2$.
2. *Montrer que, pour tout entier naturel* n, $y_{n+1} = y_n^2$.
3. *Calculer* y_n *en fonction de* y_0 *et montrer que* $|y_0| < 1$. *En déduire que la suite* (y_n) *converge vers* 0.
4. *Exprimer* x_n *en fonction de* y_n *et montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Exercice 2.3.
Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2.4.
Que pensez-vous de chacun des trois raisonnements suivants :

1. $(1 + \frac{1}{k}) \to 1$ *quand* $k \to +\infty$ *et* $(1 + \frac{1}{k})^k$ *est le produit de* k *facteurs* $(1 + \frac{1}{k})$. *Comme la limite d'un produit vaut le produit des limites, on conclut que* $(1 + \frac{1}{k})^k \to 1$ *quand* $k \to +\infty$.

2. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{k}=0$, *alors* $\lim\limits_{k\to+\infty}(1+\dfrac{1}{k})^k=\lim\limits_{k\to+\infty}1^k=1$.
3. *Pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$, *on a* $1+\frac{1}{k}>1$. *Or on sait que* $\lim\limits_{k\to+\infty}r^k=+\infty$ *pour tout* $r>1$. *D'où il résulte que* $\lim\limits_{k\to+\infty}(1+\dfrac{1}{k})^k=+\infty$.

Exercice 2.5.

On considère la suite $(x_n)_{n\geq1}$ *de terme général*

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k^3-6k+1)}{k(k+1)}.$$

1. *Prouver que pour tous entiers naturels non nuls* m *et* n *tels que* $m>n$, *on a*
$$|x_n-x_m|\leq\frac{1}{n+1}.$$
2. *En déduire que la suite* (x_n) *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 2.6.

On considère une suite $(a_n)_{n\geq1}$ *décroissante de nombres réels positifs convergeant vers* 0. *Soit* $(S_n)_{n\geq1}$ *la suite réelle définie par* $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ *et les suites extraites* (u_n) *et* (v_n) *de la suite* (S_n) *telles que* $u_n=S_{2n}$ *et* $v_n=S_{2n+1}$.

1. *Prouver que* (u_n) *est croissante et que* (v_n) *est décroissante.*
2. *Pour tout* $n\geq1$, *écrire la relation entre* u_n, v_n *et* a_{2n+1} *puis prouver que* $u_n\leq v_n$ *pour tout* $n\geq1$.
3. *En déduire que la suite* (u_n) *est majorée et conclure.*
4. *Prouver que les suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite* a *et que la suite* (S_n) *converge.*

Exercice 2.7.

On considère la suite $(x_n)_n$ *définie par* $x_n=\frac{2n}{n^2+2}$.

1. *Montrer en utilisant la définition que cette suite est une suite infinement petite.*
2. *Déduire de ce qui précède que la suite* $(y_n)_n$ *définie par* $y_n=\frac{2n\cos(n)}{n^2+2}$ *est une suite convergente.*

Exercice 2.8.

Soit la suite $(x_n)_n$ *telle que* $x_n = \sum_{i=0}^{n} = \dfrac{2}{i+1}$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} - x_n \geq \frac{2n}{n+1}$.
2. *Déduire la nature de la suite* $(x_n)_n$.

Chapitre Trois

Fonction numérique d'une variable réelle

3.1 Introduction

3.1.1 Généralité : domaine, image, graphe

Définition 3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.*

1. *$D_f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}\}$ est appelé ensemble de définition de f ou encore domaine de définition de f.*
2. *$R_f = \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in D_f\}$ est appelé ensemble image de f.*
3. *$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in D_f\}$ est appelé graphe de définition de f.*

Exemple 3.1. *Domaine de définition, image et graphe des fonctions f, g et h données par les expressions :*

1. *$f(x) = E(x)$;*
2. *$g(x) = x - E(x)$;*
3. *$h(x) = \frac{1}{x-E(x)}$.*

Exemple 3.2. *Domaine de définition des fonctions f, g données par les expressions :*

1. *$f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$*
2. *$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.*

3.1.2 Point limite, point isolé

Définition 3.2. ***(Point limite)*** *Soit $X \subset \mathbb{R}$ et non vide. $a \in \mathbb{R}$ est dit point limite de X ou point non isolé de X si $\forall \epsilon > 0$, $X \cap (]a-\epsilon, a[\cup]a, a+\epsilon[)$ est non vide ; c'est-à-dire que $X \cap]a-\epsilon, a+\epsilon[$ contient un point autre que a.*

Remarque 3.1.

1. *Un point limite de X est également dit point d'accumulation de X.*
2. *Si $a \in \mathbb{R}$ n'est pas un point limite d'une partie non vide $X \subset \mathbb{R}$, on dit que a est un point isolé de X.*

Exemple 3.3. *Soit X=]0,1[. Tous les points de l'intervalle fermé $[0,1]$ sont des points limites de X.*

Exemple 3.4. *Considérons les points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$ par rapport aux domaines de définition de D_f et D_g des fonctions f, g données par les expressions : $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.*

1. $D_f = \{0\} \cup [1, +\infty[$.
   (a) *Justifie que x_0 et x_1 sont des points isolés de D_f.*
   (b) *Justifie que x_2 et x_3 sont des points limites de D_f.*
2. $D_g =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[$.
   (a) *Justifie que x_1 est un point isolé de D_g ;*
   (b) *Justifie que x_0, x_2 et x_3 sont des points limites de D_g.*

3.2 Limite finie en un point fini

3.2.1 Définition

Définition 3.3. *(**Limite finie**) Soit f une fonction numérique. Soit a un point limite de son domaine de définition D_f. On dit qu'un réel b est limite de f lorsque x tend vers a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que :*

$$\forall x \in D_f, (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{a} f = b$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Exemple 3.5. *Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0}(2x+3) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 1 = 1$.*

Démonstration.

1. $f(x) = 2x + 3$. Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$.
   $|f(x) - 3| = |2x|$, donc $|2x| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$ et

$|2x| < \epsilon \Longleftrightarrow |x| < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, $|x| < \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$. On prend alors $\delta \in]0, \frac{\epsilon}{2}]$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. On a $|f(x) - 1| = |x^2| = |x|^2$.
   Donc $|x|^2 < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$. D'où $|x| < \sqrt{\epsilon} \Longrightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$. On prend donc $\delta \in]0, \sqrt{\epsilon}]$.

$\square$

Exemple 3.6. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Exercice 3.1. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0} E(-x^2) = -1$.

Théorème 3.1. *(**Définition équivalente**) Soit f une fonction numérique. Soit a un point limite de son domaine de définition D_f. Le réel b est limite de f lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset D_f$ telle que $\forall n, x_n \neq a$ et $x_n \to a$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$.*

Démonstration. Supposons que $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon$. Soit maintenant une suite $(x_n)_{n \in I}$ d'éléments de D_f tel que $\forall n \in I$, $x_n \neq a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. $\delta > 0$ étant connu, il existe un rang $N(\delta) > 0$ tel que $\forall n \in I$,
$n > N(\delta) \Longrightarrow |x_n - a| < \delta$. Donc $\forall n > N(\delta), |f(x_n) - b| < \epsilon$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$.
Réciproquement, supposons que pour toute suite $(x_n) \subset D_f$ tel que
$\forall n \in I, x_n \neq a$ et $x_n \to a$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon$. Raisonnons par l'absurde : supposons que b n'est pas limite de $f(x)$ quand x tend vers a. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in D_f$ avec $0 < |x - a| < \delta$ et $|f(x) - b| \geq \epsilon$. Ainsi, $\forall n \in I$, $\exists x_n \in D_f$ tel que $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$. On a donc une suite $(x_n) \subset D_f$ tel que $\forall n \in I$, $x_n \neq a$ et $x_n \to a$ avec $|f(x_n) - b| \geq \epsilon, \forall n \in I$. C'est absurde car $f(x_n) \to b$. D'où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. $\square$

Remarque 3.2.

1. *Le théorème se généralise au cas des limites en $-\infty$ ou en $+\infty$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$: une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admette pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est que pour toute suite réelle $(x_n)_n$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), la suite image de terme général $f(x_n)$ tend vers l.*
2. *De ce théorème, on déduit que si l'on trouve une suite $(x_n)_n$ qui tend vers x_0 et pour laquelle la suite de terme général $f(x_n)$ diverge alors la fonction f n'a pas de limite finie en x_0.*
3. *On peut également prouver avec ce théorème, que la fonction f n'a pas de limite en x_0 en exhibant deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergeant toutes les deux vers x_0 mais pour lesquelles les suites de terme général $f(x_n)$ et $f(y_n)$ tendent vers deux réels distincts.*

Exemple 3.7. *Montrer que la fonction f, définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.*

Démonstration. Considérons la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, mais la suite image $(f(x_n))_n$ qui est telle que $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ diverge. Par conséquent, f n'admet pas de limite en 0. □

Exemple 3.8. *Montrons que l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x\sin(x)$ n' a pas de limite en $+\infty$.*

Démonstration. Considérons la suite de terme général $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Cette suite tend vers $+\infty$ et la suite de terme général $f(x_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs, considérons la suite $(y_n)_n$ de terme général $y_n = 2(n+1)\pi$. Cette suite tend vers $+\infty$ et la suite de terme général $f(y_n) = 0$ converge vers 0. Donc f n'a pas de limite en $+\infty$ selon le théorème. □

Proposition 3.1. ***(Unicité de la limite)*** *Si la fonction f admet une limite $b \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to a$, alors cette limite est unique.*

Démonstration. Supposons que f admet deux limites b_1 et b_2 lorsque $x \to a$. Considérons une suite $(x_n) \subset D_f$ et $\forall n \in I, x_n \neq a$ et $x_n \to a$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b_2$. Comme la suite $(f(x_n))_n$ converge, alors sa limite est unique. D'où $b_1 = b_2$. □

Théorème 3.2. *(**Critère de Cauchy**) Soit f une fonction numérique. Soit a un point limite de son domaine de définition D_f. Soit $b \in \mathbb{R}$.*
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que $\forall x, x' \in D_f$,

$$(0 < |x - a| < \delta \text{ et } 0 < |x' - a| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Démonstration. □

3.2.2 Propriétés arithmétiques

Définition 3.4. *(**Définition des opérations arithmétiques**) Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle de domaine respectif D_f et D_g.*

1. *$\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$*
3. *$\forall x \in D_f \cap D_g$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$*
4. *$\forall x \in D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$, on a $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$*

Proposition 3.2. *(**Propriété de densité**) Soit f une fonction réelle définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit a un point limite de D_f.*

Si f admet une limite $b \in \mathbb{R}^*$ alors il existe un intervalle ouvert I de centre a tel que $\forall x \in D_f \cap I$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration. Soit $b = \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$. Prenons $\epsilon = \frac{|b|}{2}$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$,

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow 0 < |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Ce qui équivaut à $f(x) \in]b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}[$. Ainsi pour tout $x \in D_f$ avec $0 < |x - a| < \delta$ on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - b + b| \\ &\geq ||f(x) - b| - |b|| \\ &\geq |b| - |f(x) - b| \\ &> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in D_f \cap (]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[)$ on a $|f(x)| > \frac{|b|}{2} > 0$. □

Théorème 3.3. *(**Opérations sur les limites**) Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle de domaine de définition respectif D_f et D_g. Soit a un point limite de $D_f \cap D_g$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$, alors

1. *$f+g$, λf et fg admettent une limite finie en a égales respectivement à $b+c$, λb et bc.*
2. *Si de plus $c \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet une limite finie en a égale à $\frac{b}{c}$.*

3.3 Limite à gauche, limite à droite

Définition 3.5. *(**Limite à droite**) Soit $a < b$ et f une fonction réelle définie sur $]a, b[$. On dit que le réel y est limite à droite de f lorsque x tend vers a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]a, b[, \text{ avec } 0 < x - a < \delta, \text{ on a } |f(x) - y| < \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Définition 3.6. *(**Limite à gauche**) Soit $a < b$ et f une fonction réelle définie sur $]a, b[$. On dit que le réel y est limite à gauche de f lorsque x tend vers b si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]a, b[, \text{ avec } 0 < b - x < \delta, \text{ on a } |f(x) - y| < \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Exemple 3.9. *On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$.*

1. *Pour $x < 0$, on a $f(x) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$.*
2. *Pour $x > 0$, on a $f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.*

Exemple 3.10. *Soit la fonction f définie sur $[0, 3]$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 20 - 8x & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

1. *$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$*

2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 20 - 8x = 4.$

Théorème 3.4. *(**Existence de limite**) On considère une fonction réelle f définie sur l'ensemble $X =]c_1, a[\cup]a, c_2[\subset \mathbb{R}$. f admet une limite finie lorsque x tend vers a si et seulement si f possède une limite à gauche $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$, une limite à droite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.*

Exemple 3.11. *Soit la fonction $f(x) = E(-x^2)$. On observe que $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $-x^2 \in]-1, 0[$. Ainsi, $f(x) = E(-x^2) = -1$ donc on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$. La fonction f admet -1 comme limite en 0.*

Exemple 3.12. *Soit la fonction f définie sur $[0, 3]$ par :*

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 & si \quad x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad 0 < x \end{cases}.$$

Justifions que g n'admet pas de limite en 0. Considérons les suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $y_n \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Par ailleurs, $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ et $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$ puis on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ n'existe pas. Mais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x^2 = 0.$$

D'où le résultat.

Exemple 3.13. *On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{|x|}{x}$. Justifier que h n'admet pas de limite en 0.*

3.4 Limites infinies en un point fini

Définition 3.7. *(**Limite infinie**) Soit f une fonction réelle définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit a un point limite de D_f.*

1. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} = +\infty$ si*

   $$\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

2. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note* $\lim\limits_{x\to a} = -\infty$ *si*

$$\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M.$$

Exemple 3.14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. *En effet, soit $M > 0$, pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.*

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M \Longleftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M} \Longleftrightarrow 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Donc pour $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{M}}$, $\forall x \in D_f$, on a

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Longleftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M.$$

Exemple 3.15. *Justifier que* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

3.5 Limites à infini

Définition 3.8. *(**Limite finie à l'infini**) Soit f une fonction réelle de domaine de définition D_f.*

1. *On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset D_f$. Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers b à $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que} \forall x \in D_f, x > M \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

2. *On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, a[\subset D_f$. Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers b à $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que} \forall x \in D_f, x < -M \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Exemple 3.16.

3.6 Continuité

3.6.1 Continuité en un point

Définition 3.9. *Soit a un réel quelconque et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est continue en a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Remarque 3.3. *On peut bien sûr définir la notion de continuité à droite ou à gauche en remplaçant la notion de limite par la notion de limite à droite ou à gauche dans la définition précédente.*

Théorème 3.5. *La somme, le produit, l'inverse (si la fonction ne s'annule pas en a) de fonctions continues en a sont continus en a.*

Théorème 3.6. *Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.*

Définition 3.10. *Soit f une fonction définie au voisinage de a, a étant exclu. Si f possède une limite finie l en a, alors il existe une fonction ψ, appelée prolongement par continuité de f en a, continue en a telle que pour tout $x \in D_f \setminus \{a\}$, $\psi(x) = f(x)$ et $\psi(a) = l$.*

3.6.2 Continuité sur un intervalle

Définition 3.11. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.*

Des deux théorèmes précédents de cette section, en complément des résultats concernant les fonctions de référence (polynômes, circulaires, logarithmes et exponentielles) permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.7. *Les fonctions obtenues par opérations algébriques ou par composition à partir des fonctions de référence sont continues sur les intervalles contenus dans leur ensemble de définition.*

3.6.3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème 3.8. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 du segment $[a; b]$ tels que $\forall x \in [a; b]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.*

Théorème 3.9. ***(des valeurs intermédiaires)*** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux éléments distincts de I. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c élément de I compris entre a et b tel que $f(c) = y$.*

Corollaire 3.1. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.10. *Toute fonction continue sur un intervalle I et strictement croissante (respectivement décroissante) sur I est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Par ailleurs, sa bijection réciproque est elle-même continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur J.*

3.6.4 Exemple de bijections réciproques

Définition 3.12. *Soit n un entier naturel non nul. La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto x^n$ étant une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$, elle possède une fonction réciproque appelée fonction racine n-ième, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.*

Remarque 3.4. *On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.*

3.7 Dérivabilité

3.7.1 Dérivabilité en un point

Définition 3.13. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f est dérivable en a si il existe un réel l, appelé nombre dérivé de f en a tel que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$;
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.

Théorème 3.11. *(**Définition équivalente**) Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors f est dérivable en a, de nombre dérivé l si et seulement si, au voisinage de a, on a l'égalité suivante, appelée développement limite à l'ordre 1 en a de f(x) :*

$$f(x) = f(a) + l(x - a) + o(x - a).$$

Remarque 3.5. *On peut définir de manière semblable la notion de dérivabilité à droite ou à gauche en a.*

Théorème 3.12. *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarque 3.6. *La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Par exemple* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Théorème 3.13. *Soit* f *une fonction dérivable en* a *et de nombre dérivé* l. *Notons* C_f *la courbe représentative de* f *dans un repère orthogonal du plan. Alors* C_f *possède au point d'abscisse* a *une tangente de coéfficient directeur* l.

Remarque 3.7. *On définit de manière semblable la notion de demi-tangente à droite ou à gauche. De plus, dans le cas où* f *n'est pas dérivable en* a *mais où* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$, C_f *possède au point d'abscisse* a *une tangente ou une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.*

3.7.2 Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée

Définition 3.14. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *et dérivable en tout point de* I. *Alors on dit que* f *est dérivable sur* I *et on note* f' *la fonction définie sur* I *qui à tout élément* x *de* I *associe le nombre dérivé de* f *en* x. *Cette fonction est appelée fonction dérivé de* f.

Les formules de calcul de fonctions dérivées sont supposées connues. On se bornera à donner les formules concernant les fonctions composées et les fonctions réciproques.

Théorème 3.14. *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I *à valeurs dans un intervalle* J *et soit* g *une fonction dérivable sur* J. *Alors la fonction* $g \circ f$ *est dérivable sur* I *et* $\forall x \in I$, $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$.

Théorème 3.15. *Soit* f *une bijection d'un intervalle* I *sur un intervalle* J, *dérivable sur* I *et de dérivée ne s'annulant pas sur* I. *Alors* f^{-1} *est dérivable sur* J *et*

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

3.7.3 Théorème des accroissements finis

Dans cette partie, nous préciserons un théorème majeur d'Analyse, source de formules extrêmement fécondes que nous verrons dans la partie suivante.

Théorème 3.16. ***(dit de Rolle)*** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque 3.8. *Le théorème de Rolle signifie géométriquement, qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.*

Théorème 3.17. ***(dit des accroissements finis)*** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors, il existe un point $c \in]a;b[$ tel que*
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ et si pour tout $x \in]a;b[$, $g'(x) \neq 0$, alors il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Remarque 3.9. *Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB), avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.*

Formule des accroissements finis : En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant $a = x$, $b = x + h$ et $c = x + \theta h$, avec $0 < \theta < 1$, on obtient la formule des accroissements finis :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

3.7.4 Règle de l'Hospital

Le règle de l'Hospital est une règle qui est très utilisé pour le calcul de limites.

Théorème 3.18. ***(Régle de l'Hospital I)*** *Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a - h; a + h[\setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ et soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f et g sont dérivables sur I et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ et si, pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$, alors,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et vaut } L \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et vaut } L.$$

La règle de l'Hospital est valable lorsque $a = +\infty$ (ou $-\infty$). Lorsque la fonction g tends vers l'infini et f n'est pas localement bornée, on a la version suivante :

Théorème 3.19. ***(Règle de l'Hospital II)*** *Soient f et g deux fonctions continues définies sur $I =]a-h; a+h[\setminus\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (ou au voisinage de ∞ si $a = \infty$) et soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f et g sont dérivables sur I, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et vaut } L \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et vaut } L.$$

Application 3.1. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-x}{x^3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin(x)}$.

3.7.5 Formules de Taylor

La formule des accroissements finis fournit une approximation d'une fonction par une fonction affine au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous allons établir que sous réserve de conditions supplémentaires, on peut obtenir une approximation d'une fonction par un polynôme.

Théorème 3.20. ***(Formule de Taylor-Lagrange)*** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a;b]$ et est $n+1$ fois dérivable sur $]a;b[$. Alors, pour tout x appartenant à $[a;b]$, il existe un point $c \in]a;x[$ tel que :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$+ \quad \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a.

Théorème 3.21. *(**Formule de Taylor-Mac Laurin**) En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant $c = a + \theta h$, avec $0 < \theta < 1$, on obtient la formule de Taylor-Mac Laurin :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h). \end{aligned}$$

En modifiant légèrement les hypothèses, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.22. *(**Formule de Taylor-Young**) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a;b]$. Alors, pour tout $x \in [a;b]$ voisinage du point a, on a :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

3.8 Fonctions circulaires et leurs inverses

3.8.1 Fonction arcsinus

Définition 3.15. *(**Fonction arcsinus**) On appelle fonction arcsinus et on note* arcsin, *la bijection réciproque de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.*
On a $\sin : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1;1]$ *et sa bijection réciproque est*
$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Remarque 3.10. *On observe que :*

1. *La fonction* arcsin *est définie sur l'intervalle $[-1;1]$;*
2. $y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow (x = \sin(y)$ *avec* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ *;*
3. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$ *;*
4. $\forall x \in [-1;1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.

Propriété 3.1. *(**Propriétés de la fonction** arcsin *) Nous avons les propriétés suivantes :*

1. ***Parité :*** *La fonction* $\arcsin$ *est impaire sur* $[-1;1]$*, c'est-à-dire, pour tout* $x \in [-1;1]$, $-x \in [-1,1]$ *et* $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
2. *Le graphe de la fonction* $\sin$ *et celui de la fonction* $\arcsin$ *sont symétriques par rapport à la première bissectrice (i.e.,* $y = x$*) ;*
3. ***Valeurs particulières :*** $\arcsin(0) = 0$ *;* $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ *;* $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$ *;* $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ *;* $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
4. ***Dérivée*** *: La fonction* $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et on a*
$$\forall x \in]-1;1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
5. ***Composée*** $\arcsin \circ u$: *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Si* u *est une fonction dérivable sur* I *et* $\forall x \in I$, $-1 < u(x) < 1$*, alors la composée* $\arcsin \circ u$ *est dérivable sur* I *et on a :*
$$\forall x \in I, (\arcsin \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}.$$

3.8.2 Fonction arccos

Définition 3.16. ***(Fonction arccosinus)*** *On appelle fonction arccosinus et on note* $\arccos$*, la bijection réciproque de la fonction cosinus sur* $[0;\pi]$*.*
On a $\cos : [0;\pi] \longrightarrow [-1;1]$ *et sa bijection réciproque est*
$\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$.

Remarque 3.11. *On observe que :*

1. *La fonction* $\arccos$ *est définie sur l'intervalle* $[-1;1]$ *;*
2. $y = \arccos(x) \Longleftrightarrow (x = \cos(y)$ *avec* $0 \leq y \leq \pi)$ *;*
3. $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$ *;*
4. $\forall x \in [-1;1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.

Propriété 3.2. ***(Propriétés de la fonction*** $\arccos$ *) Nous avons les propriétés suivantes :*

1. ***Parité :*** *La fonction* $\arccos$ *n'admet pas de parité, mais on a pour tout* $x \in [-1;1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ *;*
2. *Le graphe de la fonction* $\cos$ *et celui de la fonction* $\arccos$ *sont symétriques par rapport à la première bissectrice (i.e.,* $y = x$*) ;*

3. ***Valeurs particulières :*** $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$; $\arccos(1) = 0$ *et* $\arccos(-1) = \pi$.
4. ***Dérivée*** *: La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et on a*
$$\forall x \in]-1;1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
5. ***Composée*** $\arccos \circ u$ *: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si u est une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I$, $-1 < u(x) < 1$, alors la composée* $\arccos \circ u$ *est dérivable sur I et on a :*
$$\forall x \in I, (\arccos \circ u)'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}.$$

Remarque 3.12. *Nous avons l'identité suivante :*
$$\forall x \in [-1;1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

3.8.3 Fonction arctan

Définition 3.17. *(**Fonction arctangente**) On appelle fonction arctangente et on note* arctan, *la bijection réciproque de la fonction tangente sur* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
On a $\tan :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ *et sa bijection réciproque est*
$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Remarque 3.13. *On observe que :*

1. *La fonction* arctan *est définie sur l'intervalle* $\mathbb{R}$;
2. $y = \arctan(x) \Longleftrightarrow (x = \tan(y)$ *avec* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$;
3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.

Propriété 3.3. *(**Propriétés de la fonction** arctan) Nous avons les propriétés suivantes :*

1. ***Parité :*** *La fonction* arctan *est impaire sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et* $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.
2. *Le graphe de la fonction* tan *et celui de la fonction* arctan *sont symétriques par rapport à la première bissectrice (i.e., $y = x$) ;*

3. ***Valeurs particulières :*** $\arctan(0) = 0$; $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$; $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$; $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
4. ***Dérivée*** *: La fonction* $\arctan$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
5. ***Composée*** $\arcsin \circ u$: *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Si* u *est une fonction dérivable sur* I *alors la composée* $\arctan \circ u$ *est dérivable sur* I *et on a :*
$$\forall x \in I, (\arctan \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}.$$

Exercice 3.2. *Déterminer le domiaine de définition de la fonction* u *dans chacun des cas suivants :*

1. $u(x) = \arccos(2x-1)$;
2. $u(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;
3. $u(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Exercice 3.3. *Déterminer une écriture plus simple de*
$$A(x) = \cos(\arcsin(x)) + \sin(3\arcsin(x)), -1 \leq x \leq 1.$$

Exercice 3.4. *Résoudre l'équation en* x *suivante :*
$$\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(2x).$$

Exercice 3.5.

1. *Calculer* $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$ *et* $\arccos(\cos\left(\frac{2009\pi}{3}\right))$.
2. *Montrer que :*
$\forall x \in [0;1]$, $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Exercice 3.6. *Soit* ψ *la fonction définie par* $\psi(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)$.

1. *Déterminer le domaine de définition* E *de la fonction* ψ.
2. *Calculer* $\psi(x-2) + \psi(-x-2)$ *pour tout* $x \in E$ *et en déduire une propriété géométrique du graphe de* ψ.
3. *Calculer* $\lim\limits_{1 \to -1^+} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)$ *et* $\lim\limits_{x \to -3^-} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)$.

4. *Etudier la dérivabilité de ψ sur son ensemble de définition.*
5. *Calculer $\psi'(x)$ pour tout x appartenant au domaine de dérivabilité de ψ et étudier le signe de $\psi'(x)$.*
6. *Achever l'étude des variations de ψ.*
7. *Rechercher les asymptotes à la courbe $y = \psi(x)$ et préciser la position de la courbe par rapport aux asymptotes.*
8. *Tracer une ébauche de la courbe de ψ en faisant apparaître tous les éléments de votre étude.*

Exercice 3.7. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :*

$$f_a(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

1. *Etudier les variations de la fonction f_a et établir son tableau de variation.*
   (On étudiera séparement les cas $a > 0$ et $a < 0$).
2. *Déduire de tout ce qui précède une écriture simple de* $\arctan(a)+\arctan(b)$, *pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. (On pourra discuter suivant le signe de $1-ab$ et celui de a).*

3.(a) *Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer* $\arctan(p+1)-\arctan(p)$, *en utilisant la question 2.*

(b) *Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right).$$

3.9 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

3.9.1 Fonctions hyperboliques

Définition 3.18. ***(Fonctions hyperboliques)***

1. ***Fonction cosinus hyperbolique*** *: On appelle fonction cosinus hyperbolique, la fonction notée* **ch** *et définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. ***Fonction sinus hyperbolique :*** *On appelle fonction sinus hyperbolique, la fonction notée* ***sh*** *et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. ***Fonction tangente hyperbolique :*** *On appelle fonction tangente hyperbolique, la fonction notée* ***th*** *et définie par*

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Propriété 3.4. *Soient* x, y *deux nombres réels, on a les propriétés suivantes :*

1. $ch(x) + sh(x) = e^x$; $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$; $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$; $1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$ *et* $th(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
2. *Les formules d'addition de* ch *et* sh.
   (a) $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$;
   (b) $ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$;
   (c) $sh(x+y) = sh(x)ch(y) + sh(y)ch(x)$;
   (d) $sh(x-y) = sh(x)ch(y) - sh(y)ch(x)$.
3. *Les formules d'addition de* th :
   (a) $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$;
   (b) $th(x-y) = \frac{th(x)-th(y)}{1-th(x)th(y)}$.

Remarque 3.14.

1. *La fonction* ch *est paire ; la fonction* sh *est impaire.*
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ *et* $ch(2x) = 2ch^2(x) - 1$.

Exercice 3.8. *Etudier puis représenter les fonctions* ch ; sh *et* th.

3.9.2 Fonctions hyperboliques inverses

Définition 3.19. ***(Fonctions hyperboliques inverses)***

1. ***Fonction argument sinus hyperbolique :*** *La fonction* $x \mapsto sh(x)$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *donc* sh *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *On appelle fonction argument sinus hyperbolique et*

on note argsh, la bijection réciproque de la fonction sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$*. On a* $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec la relation* $y = argsh(x) \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}$ *et* $x = sh(y)$*.*

2. ***Fonction argument cosinus hyperbolique :*** *La fonction* $x \mapsto ch(x)$ *est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $[0;+\infty[$*. Alors la restriction de ch sur* $[0;+\infty[$ *réalise une bijection de* $[0;+\infty[$ *sur* $ch([0;+\infty[) = [1;+\infty[$*. On appelle fonction argument cosinus hyperbolique et on note argch, la bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus hyperbolique sur* $[0;+\infty[$*. On a :* $ch : [0;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[$ *et* $argch : [1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$ *avec la relation* $y = argch(x) \Longleftrightarrow y \in [0;+\infty[$ *et* $x = ch(y)$*.*
3. ***Fonction argument tangente hyperbolique :*** *La fonction* $x \mapsto th(x)$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*. Elle réalise donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1;1[$*. Sa bijection réciproque est appelée* ***fonction argument tangente hyperbolique*** *et est notée argth. On a* $y = argth(x) \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}$ *et* $x = th(y)$*.*

Remarque 3.15.

1. *La fonction argsh est définie sur* $\mathbb{R}$ *;*
2. *La fonction argch est définie sur* $[1;+\infty[$ *;*
3. *La fonction argth est définie sur* $]-1;1[$*.*

Remarque 3.16.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, argsh(sh(x)) = x$ *et* $sh(argsh(x)) = x$ *;*
2. $\forall x \in [0;+\infty[, argch(ch(x)) = x$ *et* $\forall x \in [1;+\infty[,\ ch(argch(x)) = x$*.*
3. $\forall x \in \mathbb{R}, argth(th(x)) = x$ *et* $\forall x \in]-1;1[, th(argth(x)) = x$*.*

Propriété 3.5. ***(Leurs dérivées)***

1. *La fonction argsh est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
2. *La fonction argch est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et on a :*
$$\forall x \in]1;+\infty[, argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

3. *La fonction $argth$ est dérivable sur $]-1;1[$ et on a :*

$$\forall x \in]-1;1[, argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Remarque 3.17. ***(sur les composées)***

1. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la composée $argsh \circ u$ est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I, (argsh \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}.$$

2. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\forall x \in I$, $u(x) > 1$, alors la composée $argch \circ u$ est dérivable sur I et on a :*

$$\forall x \in I, (argch \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}.$$

3. *Si u est une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I$, $-1 < u(x) < 1$, alors la composée $argth \circ u$ est dérivable sur I et on a :*

$$\forall x \in I, (argth \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}.$$

3.9.3 Expressions logarithmiques

Proposition 3.3. 1. *L'expression explicite de la fonction $argsh$ est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, argsh(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

2. *Pour la fonction $argch$, on a :*

$$\forall x \in [1;+\infty[, argch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

3. *Enfin,*

$$\forall x \in]-1;1[, argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Exercice 3.9. *Prouver cette proposition.*

3.10 Développements limités

3.10.1 Définition et existence

Définition 3.20. *Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a. On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en a, en abrégé $DL_n(f;a)$ si il existe un polynôme P_n de degré n au plus tel que si $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$, alors, pour tout $x \in V_a$, on a : $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$.*
Le polynôme $P_n(x)$ s'appelle la partie régulière du développement limité. On peut remarquer que $a_0 = f(a)$.

Remarque 3.18. *Toute fonction polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre en tout point.*

Théorème 3.23. *Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a.*

1. *Elle possède un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a.*
2. *Elle possède un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.*
3. *Si f est n fois dérivable sur V_a , alors elle possède un DL à l'ordre n en a donné par la formule de Taylor-Young :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \\ &+ o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Remarque 3.19. ***(importante)*** *Il existe des fonctions admettant un DL à l'ordre n en a sans être n fois dérivable en a.*

Exemple 3.17. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 2$.*

1. *Montrer que f admet, au voisinage de 0 un développement limité d'ordre 2, et que pourtant $f''(0)$ n'existe pas.*
2. *Que peut-on conclure ?*

3.10.2 Développements limités de base

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0 et existent à n'importe quel ordre.

1. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,
   avec les cas particuliers :
   (a) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$;
   (b) $\alpha = -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;
   (c) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$.
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$, avec les cas particuliers :
   (a) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$;
   (b) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$.
4. $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$.
5. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$.
6. $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$.
7. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.
8. $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.
9. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.
10. $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$.
11. $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$.
12. $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$.

3.11 Théorème du point fixe et applications

Théorème 3.24. ***(Théorème du point fixe)*** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur A. On suppose qu'il existe un point fixe $l \in A$ pour la fonction f , c'est-à-dire un point l tel que $f(l) = l$, et qu'il existe un intervalle $I = [l-a, l+a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \lambda$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.*

Remarque 3.20. *Si f est continue sur A et que la suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $l \in A$, alors l est un point fixe de f.*

3.12 Exercices

3.12.1 Exercice

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4x-1}{-5x^2+2x+1}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2+2x-1}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{4x+1}{1-x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{4x+1}{x^2-3x+2}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{5-4x-x^2}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x\cos(x)-1}{x^2}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{x}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+4}+x$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(x)}{x^x-1}$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\tan^2(x)}{x(1-\cos(x))}$;
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

3.12.2 Exercice

On considère la fonction notée π, appelée fonction porte de Dirichlet, définie de la manière suivante : si $x \in [-1;1]$, alors $\pi(x) = \frac{1}{2}$; sinon $\pi(x) = 0$.

1. Représenter graphiquement cette fonction.
2. Etudier la continuité de π.

3.12.3 Exercice

On considère la fonction $\wedge$ définie de la manière suivante :

$$\wedge(x) = \begin{cases} 0 & si & x < -1 \\ x+1 & si & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & si & 0 < x \leq 1 \\ 0 & si & 1 < x \end{cases}$$

Reprendre les mêmes questions que dans l'exercice précédent.

3.12.4 Exercice

On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et définir le prolongement par continuité de f.

3.12.5 Exercice

Même question avec la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$.

3.12.6 Exercice

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^3)^2}$;
2. $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$;
3. $f(x) = \tan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;
4. $f(x) = \sqrt{1+\sin^2(x)}$;
5. $f(x) = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$.

3.12.7 Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. Etudier les variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque sur un intervalle I à préciser.
4. Exprimer f^{-1} à l'aide des fonctions usuelles.

3.12.8 Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et, si x est non nul $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la continuité de la dérivée f' de f.

3.12.9 Exercice

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_4(0)$ de $f(x) = (x^2 + 1)\ln(1 + x)$;
2. $DL_4(0)$ de $f(x) = (1 + 2x + 3x^2)\sin x^2$;
3. $DL_3(0)$ de $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1 + x}$;
4. $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{x \sin x}$;
5. $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$;
6. $DL_6(0)$ de $f(x) = \frac{x^2+2}{1+x^3}$;
7. $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{x}{\sin x}$;
8. $DL_5(0)$ de $f(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$;
9. $DL_4(0)$ de $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$;
10. $DL_4(1)$ de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$;
11. $DL_4(1)$ de $f(x) = e^x$.

3.12.10 Exercice

A l'aide des développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)}\right)$.

3.12.11 Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Vous étudierez en particulier l'existence d'une asymptote à la courbe de f ainsi que la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer une ébauche de la courbe de f. On ne déterminera pas la valeur des extrémums de f.