
Cours de Probabilités

1. Dénombrement
2. Probabilités
3. Variables aléatoires réelles

Pour BCPST 1

Année scolaire : 2004/2005

16 juin 2005

Mohamed TARQI

Table des matières

1	Dénombrement	3
1.1	Généralités. Rappels	3
1.1.1	Introduction	3
1.1.2	Ensemble de parties de E , $\mathcal{P}(E)$	3
1.1.3	Inclusion entre ensembles " \subset "	4
1.1.4	Complémentaire d'une partie et négation	4
1.1.5	Réunion, intersection et produit d'ensembles	4
1.2	Applications	5
1.3	Ensembles finis	6
1.3.1	Ensembles équipotents	6
1.3.2	Propriétés des cardinaux des ensembles finis	7
1.4	Dénombrement	8
1.4.1	Nombre d'application de E_p sur E_n	8
1.4.2	Nombre d'injections de E_p sur E_n , $(1 \leq p \leq n)$	8
1.4.3	Nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble fini	10
1.5	Applications (Exemples de tirages)	11
1.5.1	Tirage avec remise	11
1.5.2	Tirage sans remise	12
1.5.3	Tirage simultané	12
2	Probabilités	14
2.1	Introduction	14
2.2	Concepts de base des probabilités	14
2.2.1	Épreuve	14
2.2.2	Ensemble Ω des éventualités. Événements	15
2.3	Probabilité	16
2.3.1	Définitions et propriétés	16
2.3.2	Exercices résolus	18
2.4	Probabilité conditionnelle	22
2.4.1	Définitions et propriétés	22
2.4.2	Formule des probabilités totales	23
2.5	Indépendance	25

3	Variables aléatoires réelles	28
3.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	28
3.1.1	variables aléatoires	28
3.1.2	Loi d'une variable aléatoire	29
3.2	Caractéristiques d'une variable aléatoire	30
3.2.1	Fonction de répartition	30
3.2.2	Espérance mathématiques (la moyenne)	33
3.2.3	Variance et Écart-type	33
3.2.4	Inégalité de <i>Bienyamé-Tchebychev</i>	35
3.3	Lois usuelles	36
3.3.1	Loi uniforme	36
3.3.2	Lois de tirage avec remise	36
3.3.3	Loi hypergéométrique	40
3.4	Couple de variables aléatoires	41
3.4.1	Lois marginales	41
3.4.2	Lois conditionnelles	43
3.4.3	L'indépendance	44
3.4.4	Covariance, coefficient de corrélation linéaire	46
A	Problème I	51
B	Problème II	53
C	Problème III	55

Chapitre 1

Dénombrement

Contents

1.1	Généralités. Rappels	3
1.2	Applications	5
1.3	Ensembles finis	6
1.4	Dénombrement	8
1.5	Applications (Exemples de tirages)	11

1.1 Généralités. Rappels

1.1.1 Introduction

On suppose acquise la notion intuitive d'ensemble et nous admettons que $x \in E$ (qui se lit a appartient à E) est une notation comprise par tous. La notation $x \in x$ est interdite. Remarquons que cette interdiction à a une autre interdiction : On ne peut pas parler d'un ensemble Ω dont les éléments seraient tous les ensembles, car on devait avoir $\Omega \subset \Omega$.

En général, on détermine un ensemble soit, en explicitant ses éléments : $E = \{1, a, \nabla\}$, soit par compréhension : $E = \{x/x \text{ vérifié la propriété } P\}$.

Par exemple :

$$\mathbb{N} = \{x/x \text{ entier}\} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{x/x \text{ entier relatif}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

1.1.2 Ensemble de parties de E, $\mathcal{P}(E)$

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble. Nous admettrons que toutes les parties de E constituent un nouvel ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$

En particulier :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}$
- $\mathcal{P}(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$

1.1.3 Inclusion entre ensembles " \subset "

Définition 1.1.2. Soit E un ensemble. Nous dirons que A est inclus dans E (ou sous ensemble de E) si tout élément de A est élément de E et on note $A \subset E$

On a donc :

$$A \subset E \iff (\forall x, x \in A \implies x \in E)$$

$$A \subset E \iff (A \in \mathcal{P}(E))$$

On rappelle que pour tout x on a :

$$(x \in E) \iff (\{x\} \subset E) \iff (\{x\} \in \mathcal{P}(E))$$

1.1.4 Complémentaire d'une partie et négation

Définition 1.1.3. Étant donnée un ensemble E et une partie A de E . On appelle complémentaire de A dans E et on note \mathbb{C}_E^A l'ensemble de tous les éléments de E n'appartient pas à A .

Donc

$$\mathbb{C}_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$

en particulier

$$\mathbb{C}_E^\emptyset = E \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_\emptyset^E = \emptyset$$

1.1.5 Réunion, intersection et produit d'ensembles

Définition 1.1.4. Soit A et B deux ensembles. On définit les ensembles suivantes

1. $A \times B = \{(x, y) / x \in A \quad \text{et} \quad y \in B\}$, produit cartésien de A et B .
2. $A \cup B = \{x / x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$, réunion de A et B .
3. $A \cap B = \{x / x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}$, intersection de A et B .

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjointes**.

Généralisation :

Soit I un ensemble non vide, pour tout $i \in I$, on se donne un ensemble E_i . on définit les ensembles suivantes :

- a) $\bigcup_{i \in I} E_i = \{x / \exists i \in I, \quad \text{tel que} \quad x \in E_i\}$ réunion de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$
- b) $\bigcap_{i \in I} E_i = \{x / \forall i \in I, x \in E_i\}$ intersection de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$

Proposition 1.1.1. (Lois de Morgan) Quels que soient les éléments A et B de $\mathcal{P}(E)$ on a :

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$$

Démonstration :

En effet :

$(\forall x \in E)$, on peut écrire :

$$\text{non}(x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \notin A) \text{ ou } (x \notin B)$$

$$\text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \notin A) \text{ et } (x \notin B)$$

c'est à dire :

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$$

□

Définition 1.1.5. Soit A et B deux parties d'un ensemble E . On appelle **différence** des ensembles A et B et on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A n'appartient pas à B .

Donc :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Exercice 1.1.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de parties d'un ensemble E

1. Montrer que : $\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i^C$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i^C$.
2. Pour toutes parties A et B de E , on pose :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$$\text{Montrer que : } A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

1.2 Applications

Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E source dans F but.

• On dit que f est une application *surjective* ou une *surjection* si tout élément de but est l'image d'un élément *au moins* de la source. C'est à dire :

$$(\forall y \in F), (\exists x \in E) \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad y = f(x)$$

• On dit que f est une application *injective* ou une *injection* si tout élément de but est l'image d'un élément (au plus) de la source. C'est à dire :

$$(\forall x, y \in E), [f(x) = f(y) \implies x = y]$$

• On dit que f est une application *bijective* ou une *bijection* si tout élément de but est l'image d'un élément unique de la source. C'est à dire :

$$(\forall y \in F), (\exists! x \in E) \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad y = f(x)$$

Donc une application est une bijection si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.

• Si une application $f : x \rightarrow y = f(x)$ est une bijection de E dans F , alors elle admet une fonction *reciproque*, notée f^{-1} , définie de F dans E . On peut écrire :

$$(\forall x, y \in E \times F), [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)]$$

1.3 Ensembles finis

1.3.1 Ensembles équipotents

Si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on pose $[p, n] = \{p, p+1, \dots, n\}$

Définition 1.3.1. *Étant donnés deux ensembles E et F . S'il existe une bijection de E dans F , on dit que E et F sont **équipotents***

Exemples

1. Soit P l'ensemble des entiers pairs et I celui des entiers impairs, alors P et I sont équipotents, en effet l'application

$$\begin{array}{ccc} \phi : & P & \longmapsto I \\ & n & \longmapsto n+1 \end{array}$$

est une bijection.

2. L'application φ , définie par :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longmapsto \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ & x & \longmapsto \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

est une bijection, donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sont équipotentes.

3. L'application ψ , définie par :

$$\begin{array}{ccc} \chi : &]-1, 1[& \longmapsto \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{x}{1-x^2} \end{array}$$

est une bijection, donc $]-1, 1[$ et \mathbb{R} sont équipotentes.

Définition 1.3.2. *On dit qu'un ensemble E est fini s'il existe un entier naturel non nul n tel que E soit équipotent à $[1, n]$. Ce nombre n est appelé le cardinal de E , on écrit $\text{card}E = n$*

- On pose, par convention, $\text{card}\emptyset = 0$
- Un ensemble *non fini* est appelé ensemble *infini*, par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des ensembles infinis.

- $\text{card}\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \blackspade, \blackclubsuit, \blackdiamond, \blackheartsuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\} = 10$
- $\text{card}[1, n] = n$.
- $\text{card}[p, n] = n - p + 1$.

1.3.2 Propriétés des cardinaux des ensembles finis

Théorème 1.3.1. *Étant donnés deux ensembles finis E et F et une application f de E dans F . f est une bijection si et seulement si $\text{card}E = \text{card}F$.*

Théorème 1.3.2. *Étant donnés deux ensembles finis E et F .*

- Si $E \subset F$ alors $\text{card}E \leq \text{card}F$.
- Si $(E \subset F \text{ et } E \neq F)$ alors $\text{card}E < \text{card}F$

Théorème 1.3.3. *Étant donnée une application f de E fini dans F fini.*

- Si f est surjective $\text{card}E \geq \text{card}f(E) = \text{card}F$
- Si f est injective $\text{card}E = \text{card}f(E) \leq \text{card}F$
- Si f est bijective $\text{card}E = \text{card}f(E) = \text{card}F$

Théorème 1.3.4. *Quels que soit les ensembles finis E et F on a :*

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}(E \cap F)$$

Exercice 1.2.

1. E, F, G étant trois ensembles finis, démontrer que :

$$\text{card}(E \cup F \cup G) = \text{card}E + \text{card}F + \text{card}G - \text{card}(E \cap F) - \text{card}(E \cap G) - \text{card}(F \cap G) + \text{card}(E \cap F \cap G)$$

2. A et B étant deux parties d'un ensemble fini E , démontrer que :

- $\text{card}E = \text{card}A + \text{card}\bar{A}$ ($\bar{A} = \complement_E^A = E \setminus A$)
 - $\text{card}E = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(\bar{A} \cap B) + \text{card}(A \cap \bar{B}) + \text{card}(\bar{A} \cap \bar{B})$
-

Théorème 1.3.5. *Quels que soient les ensembles finis E et F , on a :*

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$$

Règle

Si un objet a peut être choisi de n façons et qu'un objet b peut être choisi de m façons, la paire (a, b) , prise dans cette ordre, peut être choisie de nm façons.

Généralisation

Quels que soient les ensembles finis E_1, E_2, \dots, E_p , on a :

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \dots \times \text{card}E_p$$

En particulier :

$$\text{card}E^n = (\text{card}E)^n$$

1.4 Dénombrement

On note E_n ($n \geq 1$) un ensemble quelconque fini a n éléments.

1.4.1 Nombre d'application de E_p sur E_n

Théorème 1.4.1. *Le nombre d'applications de E_p sur E_n est n^p .*

Démonstration :

Posons $\mathcal{F}(E_p, E_n)$ l'ensemble d'applications de E_p sur E_n . Soit l'application :

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{F}(E_p, E_n) & \longmapsto & E_n \times E_n \times \dots \times E_n = E_n^p \\ f & \longmapsto & (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)) \end{array}$$

avec

$$E_p = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

ψ est bien définie bijective, donc :

$$\text{card}\mathcal{F}(E_p, E_n) = \text{card}E_n^p = n^p$$

□

Définition 1.4.1. *Soit E un ensemble et p un entier non nul. Un élément (x_1, x_2, \dots, x_p) de $E^p = E \times E \times \dots \times E$ est appelé une ***p-liste*** d'éléments de E .*

Exemples

1. Le nombre possible de résultats, à l'issue de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie est $2^3 = 8$. En effet, un résultat est une ***3-liste*** d'éléments de $\{P, F\}$
2. Supposons que l'on ait r boules numérotées $1, 2, \dots, r$ que l'on répartit " au hasard " dans n urnes numérotées $1, 2, \dots, n$ et que l'on s'intéresse aux différentes répartitions de ces r boules. L'ensemble des répartitions peut être assimilé à l'ensemble :

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_r) \text{ où } x_i \text{ le nombre de l'urne qu'occupe le boule } i\}$$

Il y a donc n^r telle répartition.

1.4.2 Nombre d'injections de E_p sur E_n , ($1 \leq p \leq n$)

Théorème 1.4.2. *Le nombre d'injections de E_p sur E_n est $n(n-1)\dots(n-p+1)$*

Démonstration :

On assimile E_p à l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$.

Pour construire une injection de E_p dans E_n , il faut choisir l'image de 1 parmi n éléments de E_n , une fois l'image de 1 est choisi ; on choisit l'image de 2 différent du choix

de l'image de 1, il y a $n - 1$ choix, puis on choisit l'image de 3 différent de l'image de 1 et de l'image de 2, et ainsi de suite ..., donc le nombre de choix d'injections vaut :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On note :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

□

Applications

Définition 1.4.2. *Étant donné un ensemble fini E , $\text{card}E = n$, un **arrangement** de p élément de E est une p -liste d'éléments deux à deux distincts pris parmi ceux de E .*

Proposition 1.4.1. *Le nombre de p -arrangements d'un ensemble à n éléments ($1 \leq p \leq n$) est A_n^p .*

Remarques

- Si $p > n$, $A_n^p = 0$: Il n'y a aucune injection de E_p dans E_n .
- Si $p = n$, $A_n^n = n!$ c'est le nombre d'applications bijectives (**permutations**) de E_p sur E_n .
- Si $p = 0$, on pose par convention $A_n^0 = 1$.

Exemples

1. Une agence de voyage soumet à ces clients une liste de huit ville. Elle propose de choisir un circuit de cinq villes parmi ces huit, en indiquant l'ordre de visite des cinq villes choisies.
Le nombre de circuits possibles est $A_8^5 = 336$
2. Combien de classements peut-on former avec 23 élèves (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo) : c'est $A_{23}^{23} = 23!$
3. Douze chevaux participent à la course du tiercé. Un tiercé est un triplet (c_1, c_2, c_3) ($c_i \in [1, 12]$). Il y a $A_{12}^3 = 1320$ tiercés possible dans *l'ordre*. (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo)

Exercice 1.3.

Combien peut-on former de mots avec toutes les lettres du mot AHMED, chaque lettre étant utilisée une seule fois ?

Combien en existe-t-il commençant par A et finissant par D

1.4.3 Nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini ayant n éléments ($n \geq 1$). Désignons par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble de parties de E ayant p éléments ($p \leq n$).

Théorème 1.4.3. *Le nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble à n éléments ($0 \leq p \leq n$) est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

On note $\mathbb{C}_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration :

Soient M un ensemble à p éléments et E un ensemble à n éléments. Posons $\mathfrak{S}(M, E)$ l'ensemble d'injections de M dans E et $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble de parties de E à p éléments. Soit φ l'application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(M, E) &\longmapsto \mathcal{P}_p(E) \\ i &\longmapsto A = i(M) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \end{aligned}$$

On a : $\mathfrak{S}(M, E) = \cup_{A \in \mathcal{P}_p(E)} \varphi^{-1}(A)$ (réunion disjointe), d'où $\text{card} \mathfrak{S}(M, E) = p! \cdot \text{card} \mathcal{P}_p(E)$ puis $\text{card} \mathcal{P}_p(E) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \mathbb{C}_n^p$. \square

Définition 1.4.3. *Un sous-ensemble de E de cardinal p est appelé **combinaison** de p éléments distincts pris parmi ceux de E .*

Remarque

Si $p > n$, $\mathbb{C}_n^p = 0$, En effet, il n'y a pas de sous-ensemble de E ayant un cardinal strictement supérieure de celui de E .

Il est clair que quel que soit l'entier naturel n , on a : $\mathbb{C}_n^0 = \mathbb{C}_n^n = 1$

Exemples

1. L'agence de voyages (l'exemple précédent) propose également à ces clients une formule "liberté" pour laquelle le touriste choisit cinq villes sans préciser l'ordre dans lequel ces villes seront visitées. Le nombre de formules "liberté" est $\mathbb{C}_8^5 = 56$
2. Il y a $\frac{A_{12}^3}{3!} = 220$ tiercés dans le désordre dans une course réunissant douze chevaux.
3. Le nombre de tirages de cinq cartes d'un jeu de 52 cartes est $\mathbb{C}_{52}^5 = 2598960$.

Exercice 1.4.

Montrer que le nombre de suites $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in N^p$ qui sont solutions en nombres entiers positifs de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$ (p et n fixés) est \mathbb{C}_n^{n+p-1} .

Propriétés des nombres \mathbb{C}_n^p (Triangle de Pascal)

Proposition 1.4.2. *Étant donné n et p entiers naturels ($0 \leq p \leq n$), alors $\mathbb{C}_n^p = \mathbb{C}_n^{n-p}$ et $\mathbb{C}_n^p = \mathbb{C}_{n-1}^p + \mathbb{C}_{n-1}^{p-1}$*

Démonstration :

· Soit E un ensemble fini a n éléments.

Si $A \subset E$ est une partie a p éléments alors $\bar{A} = \mathbb{C}_E^A$ est une partie de E a $n - p$ éléments donc l'application :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{P}_p(E) & \longmapsto & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array}$$

est une bijection. Donc $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal, c'est à dire : $\mathbb{C}_n^p = \mathbb{C}_n^{n-p}$

Autrement dit : Il y a autant de parties a $n - p$ éléments qu'il y a de parties a p éléments

· Soit $a \in E$.

Les parties a p éléments peuvent se regrouper en deux catégories disjointes : d'une part ceux qui contient l'élément a et d'autre part ceux qui ne contient pas a .

Les premiers s'obtient en adjoignant à a n'importe que partie a $p-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. Il y en a donc \mathbb{C}_{n-1}^{p-1} .

Les autres sont formés de p éléments pris parmi $E \setminus \{a\}$. Il y en a \mathbb{C}_{n-1}^p

En conclusion : $\mathbb{C}_n^p = \mathbb{C}_{n-1}^{p-1} + \mathbb{C}_{n-1}^p$. □

Théorème 1.4.4. (Formule de binôme de Newton) Étant donnés a et b réels où complexes et un entier naturel n , alors :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \mathbb{C}_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\mathbb{C}_n^0 + \mathbb{C}_n^1 + \mathbb{C}_n^2 + \dots + \mathbb{C}_n^n = \sum_{p=0}^{p=n} \mathbb{C}_n^p = (1 + 1)^n = 2^n$.
- $\mathbb{C}_n^0 - \mathbb{C}_n^1 + \mathbb{C}_n^2 - \mathbb{C}_n^3 + \dots + (-1)^p \mathbb{C}_n^p + \dots + (-1)^n \mathbb{C}_n^n = \sum_{p=0}^{p=n} \mathbb{C}_n^p (-1)^p = (-1 + 1)^n = 0$.
- $\mathbb{C}_n^0 + 2\mathbb{C}_n^1 + 2^2\mathbb{C}_n^2 + \dots + 2^p \mathbb{C}_n^p + \dots + 2^n \mathbb{C}_n^n = \sum_{p=0}^{p=n} \mathbb{C}_n^p 2^p = 3^n$.

1.5 Applications (Exemples de tirages)

On dispose d'une urne où se trouvent N boules, de k couleurs différentes ($k \leq N$), On note $N_i (i \in [1, k])$ le nombre de boules de la couleur i , on a : $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$

Nous allons tirer au hasard n boules de cette urne, on distingue trois types de tirages.

1.5.1 Tirage avec remise

On tire les n boules une à une, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de précéder au tirage suivant, le résultat est un n -uplet de boules de l'urne, toutes les répétitions sont possibles, il existe donc N^n résultats possibles.

Soient n_1, n_2, \dots, n_k des entiers tels que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Quel est le nombre de n -uplets qui sont constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2, ..., n_k boules de la couleur k .

Proposition 1.5.1. *Ce nombre (Nombre de tirages possibles) égal à $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}N_1^{n_1}N_2^{n_2}\dots N_k^{n_k}$.*

1.5.2 Tirage sans remise

Le résultat ici est un n -uplet formé de boules distinctes. Il s'agit donc d'un n -arrangement sans répétition des N boules de l'urne, par conséquent, il existe A_N^n résultats possibles.

Quel est le nombre de n -uplets qui sont constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2, ..., n_k boules de la couleur k .

Proposition 1.5.2. *Ce nombre (Nombre de tirages possibles) égal à $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}A_{N_1}^{n_1}A_{N_2}^{n_2}\dots A_{N_k}^{n_k}$.*

1.5.3 Tirage simultané

Effectuons un tirage simultané de n boules, le résultat est ici une partie à n éléments de l'ensemble des boules de l'urne. Le nombre de cas possibles est donc \mathbb{C}_N^n .

Un échantillon de type (n_1, n_2, \dots, n_k) signifie que cette partie est constituée de n_1 boules de la couleur 1 prise parmi N_1 , n_2 boules de la couleur 2 prise parmi N_2 , ..., n_k boules de la couleur k prise parmi N_k .

Proposition 1.5.3. *Le nombre de cas favorables est : $\mathbb{C}_{N_1}^{n_1}\mathbb{C}_{N_2}^{n_2}\dots\mathbb{C}_{N_k}^{n_k}$.*

Exercice 1.5.

Un sac contient 4 boules rouges, 2 noires et 3 blanches. On tire de ce sac deux boules **avec remise**. Combien y a-t-il de tirages contenant :

- une boule rouge et une boule blanche ;
- 2 boules de même couleur ;
- au moins une boule blanche.

Solution

Notons :

- A l'ensemble de tirages contenant une boule rouge et une boule blanche ;
- B l'ensemble de tirages contenant deux boules de même couleur ;
- C l'ensemble de tirages contenant au moins une boule blanche.

a) $\text{card}A = \frac{2!}{1!\times 0!\times 1!}4^1 \times 2^0 \times 3^1 = 24$

b) On peut écrire $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ (réunion disjointe) avec :

- .. B_1 l'ensemble de tirages contenant deux boules rouges ;
- .. B_2 l'ensemble de tirages contenant deux boules noires ;
- .. B_3 l'ensemble de tirages contenant deux boules blanches.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{card}B &= \text{card}B_1 + \text{card}B_2 + \text{card}B_3 \\ &= \frac{2!}{2! \times 0! \times 0!} 4^2 \times 2^0 \times 3^0 + \frac{2!}{0! \times 2! \times 0!} 4^0 \times 2^2 \times 3^0 + \frac{2!}{0! \times 0! \times 2!} 4^0 \times 2^0 \times 3^2 \\ &= 29 \end{aligned}$$

c) $C = C_1 \cup C_2$ (réunion disjointe) avec :

.. C_1 l'ensemble de tirages contenant un boule blanche et une boule rouge ;

.. C_2 l'ensemble de tirages contenant une boule blanche et une boule noire ;

.. $C_3 = B_3$.

Alors :

$$\begin{aligned} \text{card}C &= \text{card}C_1 + \text{card}C_2 + \text{card}B_3 \\ &= \frac{2!}{1! \times 1! \times 0!} 4^2 \times 2^1 \times 3^0 + \frac{2!}{0! \times 1! \times 1!} 4^0 \times 2^1 \times 3^1 + \frac{2!}{0! \times 0! \times 2!} 4^0 \times 2^0 \times 3^2 \\ &= 85 \end{aligned}$$

Exercice 1.6.

Refaites le même exercice dans les cas suivants : Tirage sans remise et Tirage simultané.

• • • • •

Chapitre 2

Probabilités

Contents

2.1	Introduction	14
2.2	Concepts de base des probabilités	14
2.3	Probabilité	16
2.4	Probabilité conditionnelle	22
2.5	Indépendance	25

2.1 Introduction

Lorsqu'un phénomène est déterminé par une loi connue, on peut utiliser cette loi pour faire des *prvisions*. Par exemple, considérons un point mobile sur une droite. Si nous choisissons un origine et un sens sur cette droite, à chaque instant le point est repéré par son abscisse.

Mathématiquement, le mouvement est donc représenté par une fonction :

$$\begin{aligned} f : I &\longmapsto \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x = f(t) \end{aligned}$$

Par application de de cette loi, on peut *prévoir* et déterminer la position du mobile à chaque instant.

Ce pendant toutes les situations ne sont pas aussi simples : par exemple, dans une partie de pile ou face, on ne peut pas dire à l'avance si c'est pile qui sortir ou si face. Un tel phénomène semble échapper à toute prévision. On dit qu'il est aléatoire.

L'objet des *probabilités* est d'étudier, d'un point de vue théorique les *phénomènes aléatoires*

2.2 Concepts de base des probabilités

2.2.1 Épreuve

Définition 2.2.1. *On dit qu'une expérience ou une épreuve est une expérience aléatoire s'elle est répété dans les m ê mes conditions conduit à des résultats différents, donc dans une expérience aléatoire, on ne sait pas d'avance le résultat.*

Exemples

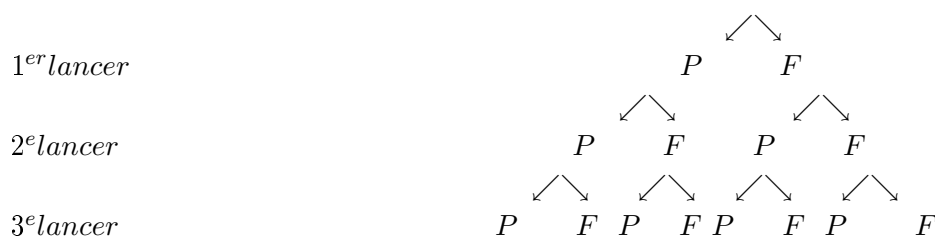
1. Soit l'épreuve " lancer une pièce de monnaie trois fois dans l'air ". On peut obtenir soit pile, soit face pour le premier cas, puis, soit pile, soit face pour le deuxième lancer, etc...
2. " Tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes "
3. Dans une urne on dépose sept boules rouges, quatre noires et deux boules vertes " On tire successivement deux boules sans les remettre dans l'urne "

2.2.2 Ensemble Ω des éventualités. Événements

Définition 2.2.2. *Considérons une expérience aléatoire. L'ensemble des éventualités associé à cette épreuve est l'ensemble des résultats possibles. On note cet ensemble Ω*

Exemples

1. Considérons le jeu de la pièce lancée trois fois. On peut représenter toutes les possibilités à l'aide de l'arbre suivant :



$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

2. Dans l'expérience " lancer deux fois d'un dé "

$$\Omega = [1, 6]^2$$

3. Au jeu de la roulette qui contient 37 chiffres, 0, 1, 2, ..., 36. L'espace des éventualités est :

$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} / 0 \leq n \leq 36\}$$

4. L'espace des événements associé à l'épreuve " lancer d'une pièce de monnaie et d'un dé " est :

$$\Omega = \{P, F\} \times [1, 6]$$

Définition 2.2.3. *Soit Ω l'espace des éventualités associé à une épreuve et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. Chaque élément de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire chaque partie de Ω est appelé événement.*

Exemples

- Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois, l'événement " pile sort en premier " est $\{PPP, PPF, PFP, PFF\}$.
- Au jeu de dé l'événement " résultat pair " est $\{2, 4, 6\}$.

Événements particuliers

- \emptyset est dit événement impossible.
- Ω est dit événement certain.
- Deux événements A et B sont dits disjoints ou incompatibles si l'événement " A et B " est impossible, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.
- Chaque partie de Ω possédant un seul élément (un singleton) est appelé événement élémentaire, les événements élémentaires sont disjoints deux à deux.

Exemples

Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois :

- 1) L'événement caractérisé par " sortir cinq fois pile " est impossible. De même l'événement " obtenir une fois pile et deux fois pile " est impossible.
- 2) Les événements " obtenir une fois pile " et obtenir deux fois pile " sont incompatibles.

2.3 Probabilité

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 2.3.1. Une probabilité p est une application de $P(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie :

$$p(\emptyset) = 0, p(\Omega) = 1$$

et pour tout couple d'événements tels que $A \cap B = \emptyset$ on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, P(\Omega), p)$, si Ω est fini on dit que $(\Omega, P(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini.

Exemple

On lance une pièce de monnaie une fois.

Ici $\Omega = \{P, F\}$

L'application :

$$\begin{array}{ccc} p : P(\Omega) & \longmapsto & [0, 1] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2} \\ F & \longmapsto & \frac{1}{2} \end{array}$$

est une probabilité et $(\Omega, P(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini.

Proposition 2.3.1. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ est un espace probabilisé.

1. $\forall A, B \in P(\Omega), p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
2. $\forall A, B \in P(\Omega)$ tels que $A \subset B, p(A) \leq p(B)$.
3. $\forall A \in P(\Omega), p(\bar{A}) = 1 - p(A),$ avec $\bar{A} = \mathbb{C}_{\Omega}^A$

Démonstration :

1. $\forall A, B \in P(\Omega)$ on a :

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

et les trois parties $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ sont deux à deux disjointes .

On a donc :

$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B)$$

D'autre part :

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

On a alors :

$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$$

$$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B)$$

En portant les valeurs $p(A - B)$ et de $p(B - A)$ dans (1), on a :

$$p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B)$$

d'où :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2. Soit $A, B \in P(\Omega)$ tels que $A \subset B$.

On a : $B = A \cup \mathbb{C}_{\Omega}^A = A \cup (B - A)$ et A et $B - A$ sont disjoints, donc :

$$p(B) = p(A) + p(B - A) \geq p(A) \quad (\text{car } p(B - A) \geq 0)$$

3. $\Omega = A \cup \overline{A}$, donc

$$1 = p(\Omega) = p(A) + p(\overline{A})$$

□

Définition 2.3.2. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini, posons $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. On dit que les événements élémentaires sont équiprobables si tous les $p(\{a_i\})$ sont égaux.

Proposition 2.3.2. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini tel que les événements élémentaires soient équiprobables. On a alors :

- $\forall a \in \Omega, p(\{a\}) = \frac{1}{n}$
- Si $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\} \subset \Omega$, $p(A) = \frac{p}{n} = \frac{\text{card} A}{\text{card} \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Preuve :

· On a : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, donc :

$$1 = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \dots + p(\{a_n\}), \quad \text{d'où} \quad \forall i, p(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$$

· $p(A) = p(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ □

Exemples

1. L'exemple déjà étudié d'une partie de pile ou face trois lancers est un cas particulier où les événements élémentaires sont équiprobables.
2. Considérons le jet d'un dé à six faces numérotés de 1 à 6. Si le dé a une forme régulière (cube) et s'il est fait d'une matière homogène, chaque numéro a la même probabilité, c'est $\frac{1}{6}$. Ce pendant on peut fabriquer des dés où le centre de gravité n'est pas à la même distance de chaque face. Dans ce cas il faudra rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité.
3. Si on lance un dé truqué comporte les numéros 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, dans ce cas $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mais les événements élémentaires ne sont pas équiprobables : la probabilité de "sortir 6" est le double de celle "sortir 1".

2.3.2 Exercices résolus**Exercice 2.1.**

p est une probabilité définie sur l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Le tableau ci-dessous indique les probabilités des événements élémentaires :

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
p_i	$\frac{4}{15}$	x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	y

Calculer x et y , pour que :

$$p(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 2p(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}).$$

On a d'une part :

$$\frac{4}{15} + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + y = 1 \quad \text{ou} \quad x + y = \frac{19}{60}$$

d'autre part :

$$\frac{4}{15} + x + \frac{1}{4} = 2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + y\right) \quad \text{ou} \quad \frac{31}{60} + x = \frac{1}{3} + 2y$$

L'unique solution est $x = \frac{3}{20}$ et $y = \frac{1}{6}$

Exercice 2.2.

p est une probabilité sur l'univers Ω . A et B sont deux événements tels que :

$$p(A) = \frac{1}{3}, p(B) = \frac{2}{5} \text{ et } p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(B \cap \bar{A})$, $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.

· $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est A , donc :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}),$$

d'où :

$$p(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

· $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, d'où :

$$p(A \cup B) = \frac{17}{30}$$

· $p(B \cap \bar{A}) + p(B \cap A) = p(B)$, donc $p(B \cap \bar{A}) = \frac{7}{30}$
 · $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = \frac{13}{30}$.

Exercice 2.3.

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Déterminer l'ensemble Ω pour ce jeu, puis $\mathcal{P}(\Omega)$ et indiquer pour chaque partie de Ω la probabilité associée.

Il est clair que

$$\Omega = \{P, F\} \times \{P, F\} = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$$

et

$$\mathcal{P}(\Omega) = A \cup B \cup C \cup D$$

avec

$$A = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$B = \{\{(P, P)\}, \{(P, F)\}, \{(F, P)\}, \{(F, F)\}\}$$

$$C = \{\{(P, P), (P, F)\}, \{(P, P), (F, P)\}, \{(P, P), (F, F)\}, \{(P, F), (F, P)\}, \{(P, F), (F, F)\}, \{(F, P), (F, F)\}\}$$

$$D = \{\{(P, P), (P, F), (F, P)\}, \{(P, F), (F, P), (F, F)\}, \{(F, F), (P, P), (P, F)\}, \{(F, F), (P, P), (F, P)\}\}$$

On suppose que les deux dés ne sont pas truqués, donc, par équiprobabilité, on a :
 $\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), p(E) = \frac{\text{card}E}{2^4}$, d'où :

$$p(\emptyset) = 0 \text{ et } p(\Omega) = 1$$

$$\forall E \in B, p(E) = \frac{1}{16}$$

$$\forall E \in C, \quad p(E) = \frac{2}{16}$$

$$\forall E \in D, \quad p(E) = \frac{3}{16}$$

Exercice 2.4.

Une urne contient 1 boule noire, 2 boules rouges, 3 boules vertes.

1. On prélève successivement et sans remise deux boules de l'urne et on note leur couleur. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Quelle est la probabilité des événements suivants : A : " obtenir deux boules vertes " B : " obtenir au moins une boule rouge " C : " obtenir deux boules de couleurs différentes ".
2. Mêmes questions qu'au 1) On prélève successivement deux boules avec remise (la première est remise dans l'urne avant le tirage de la deuxième).
3. Mêmes questions, en supposant que l'on prélève deux boules simultanément.

Solution

Pour distinguer les boules de même couleur, on suppose que les boules sont numérotées

$$N_1, R_2, R_3, V_4, V_5, V_6.$$

1. Soit Ω l'univers associé à ce premier type de tirage, donc $\text{card}\Omega$ est le nombre d'arrangements de deux éléments (les deux boules tirées) d'un ensemble à six éléments (six boules dans l'urne) donc $\text{card}\Omega = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$.

· Pour que A soit réalisable il faut tirer deux boules vertes successivement et sans remise, l'urne contient trois boules vertes, donc $\text{card}A = 3 \times 2 = 6$.

D'où :

$$p(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

· De même $p(B) = 1 - p(\bar{B})$, \bar{B} : " aucune boule rouge ". Pour que \bar{B} soit réalisable il faut tirer les deux boules, successivement et sans remise, parmi les 4 boules N_1, V_4, V_5, V_6 . donc $\text{card}\bar{B} = 4 \times 3 = 12$

D'où

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{12}{30} = \frac{3}{5}$$

· $p(C) = 1 - p(\bar{C})$ avec \bar{C} : " deux boules de mêmes couleurs "

$\bar{C} = C_1 \cup C_2$ (réunion disjointe)

avec : C_1 : " obtenir deux boules vertes " C_2 : " obtenir deux boules rouge " donc $\text{card}\bar{C} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ et

$$p(C) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{11}{15}$$

2. Ici $\text{card}\Omega$ est le nombre d'application d'un ensemble de six éléments dans un ensemble à 2 éléments, donc $\text{card}\Omega = 6^2 = 36$.

De façon similaire, on trouve $\text{card}A = 3 \times 3 = 9$ et $\text{card}\bar{B} = 4 \times 4$

Pour \bar{C} , on a $\bar{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (réunion disjointe) avec :

C_1 : "obtenir deux boules vertes"

C_2 : "obtenir deux boules rouge"

C_3 "obtenir deux boules noires"

D'où

$$\text{card}\bar{C} = \text{card}C_1 + \text{card}C_2 + \text{card}C_3 = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 14$$

Ainsi

$$p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, p(B) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}, \text{ et } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{14}{36} = \frac{11}{18}.$$

3. On obtient exactement les mêmes résultats qu'à la question 1); l'ordre des boules tirées n'intervient pas; $\text{card}\Omega = \mathbb{C}_6^2 = 15$, donc il y a 15 issues possibles dont 3 réalisent A , 6 réalisant \bar{B} et 4 réalisant \bar{C} .

Exercice 2.5.

Est-il probable d'amener au moins une fois un six avec un dé en quatre coups que d'amener un double six au moins une fois avec deux dés en 24 coups? (On suppose que les dés ne sont pas truqués)

Solution

Avec un dé :

L'expérience consiste à lancer quatre fois un dé et à noter les numéros obtenus; Ω est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$, donc $\text{card}\Omega = 6^4$.

Soit A l'événement : "obtenir au moins une fois 6"; alors $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^4$

donc $\text{card}\bar{A} = 5^4$ et $p(A) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$

Avec deux dés (un bleu et un noir) :

L'expérience consiste à lancer 24 fois les deux dés et à noter les couples (b, n) obtenus; b désigne le numéro obtenu avec le dé bleu et n avec le dé noir. Il y a $6^2 = 36$ couples possibles et $\text{card}\Omega = 36^{24}$. Soit B l'événement : "obtenir au moins une fois un double 6"; $\text{card}\bar{B} = 35^{24}$ donc $p(B) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914$

Conclusion :

Il est plus probable d'amener au moins une fois un six avec un dé en quatre coups que d'amener un double six au moins une fois avec deux dés en 24 coups.

2.4 Probabilité conditionnelle

2.4.1 Définitions et propriétés

Proposition 2.4.1. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. la probabilité de A sachant que B est réalisé est le nombre noté $p(A/B)$ ou $p_B(A)$, donné par $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

L'application : $p_B : P(\Omega) \mapsto [0, 1]$ est une probabilité sur Ω : C'est la probabilité conditionnelle sachant B .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bullet p_B(\Omega) &= \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1 \\ \bullet \forall A, A' \subset \Omega, \text{ tels que } A \cap A' = \emptyset \text{ on a :} \\ p_B(A \cap A') &= \frac{p[(A \cap A') \cap B]}{p(B)} = \frac{p[(A \cap B) \cap (A' \cap B)]}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} + \frac{p(A' \cap B)}{p(B)} = p_B(A) + p_B(A') \quad \square \end{aligned}$$

Exemple

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes :

♠	1	R	D	V	10	9	8	7
♥	1	R	D	V	10	9	8	7
♦	1	R	D	V	10	9	8	7
♣	1	R	D	V	10	9	8	7

On considère les trois événements :

R : " tirer un roi "

T : " tirer un trèfle "

$R \cap T$: "tirer un roi de trèfle "

Ici $\text{card}\Omega = 32$ $p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $p(R \cap T) = \frac{1}{32}$ et $\frac{p(R \cap T)}{p(T)} = \frac{1}{8}$

On arrive maintenant à savoir, avant de découvrir la carte, qu'il s'agit d'un trèfle. Dans ce cas l'espace des événements est $\Omega' = \{1, R, D, V, 10, 9, 8, 7\}$ (les huit cartes de trèfle)

Donc tirer un roi dans ces conditions-là est un événement de Ω' . C'est tirer un roi sachant que l'on tiré un trèfle. Cet événement est noté R/T et $p(R/T) = \frac{1}{8}$

On a bien $p(R/T) = \frac{p(R \cap T)}{p(T)}$.

Remarques

· Il est parfois aisé de déterminer $p(A/B)$. On peut alors déduire $P(A \cap B)$ en écrivant $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

· De même, si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.

Proposition 2.4.2. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$ tels $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $P(A/B) = P(A)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
3. $P(B/A) = P(B)$.

2.4.2 Formule des probabilités totales

Définition 2.4.1. Soit A_1, A_2, \dots, A_n des événements d'un espace Ω . On dit que A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω si :

- 1) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, A_i \neq \emptyset$.
- 2) $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$
- 3) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Exemple

Dans une urne on dépose 7 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. On tire successivement deux boules sans les remettre dans l'urne. Pour $i = 1$ ou 2 , on note : R_i l'événement " tirer une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage " N_i l'événement " tirer une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage " V_i l'événement " tirer une boule verte au $i^{\text{ème}}$ tirage " On a :

- 1) $R_1 \neq \emptyset, N_1 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset$
- 2) $R_1 \cap N_1 = \emptyset, V_1 \cap R_1 = \emptyset, N_1 \cap V_1 = \emptyset$
- 3) $R_1 \cup N_1 \cup V_1 = \Omega$

N_1, V_1, R_1 forment une partition de Ω .

De même N_2, V_2, R_2 forment une partition de Ω .

Proposition 2.4.3. (Formule des probabilités totales)

Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$ et A_1, A_2, \dots, A_n des événements formant une partition de Ω . Alors :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A/A_i) \times p(A_i)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap \Omega) \text{ car } A \subset \Omega \\ &= p(A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) \\ &= p((A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_n)) \\ &= p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \dots + p(A \cap A_n) \text{ car } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ sont deux à deux disjoints} \\ &= p(A/A_1) \times p(A_1) + \dots + p(A/A_n) \times p(A_n) \text{ car } p(A \cap B) = p(A) \times p(B). \end{aligned}$$

□

Exemple

Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion $p \in]0, 1[$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes cet individu et on admet que si cet individu est un tricheur il est sur de retourner un as. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?

Soit T l'événement " l'individu choisi est un tricheur ", et A l'événement " l'individu retourne un as ".

On a :

$$\Omega = T \cup \bar{T},$$

ainsi :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(T)p(A/T) + p(\bar{T})p(A/\bar{T}) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{13} \\ &= \frac{1+12p}{13} \end{aligned}$$

($p(A/\bar{T}) = \frac{1}{13}$, si l'individu ne triche, il a 4 chances sur 52 de retourner un as)

Proposition 2.4.4. (Formule de Bayes)

Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, si de plus $p(B) > 0$, on a, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, l'identité :

$$p(A_k/B) = \frac{p(B/A_k) \times p(A_k)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B/A_i) \times p(A_i)}$$

Preuve :

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} p(A_k/B) &= \frac{p(B \cap A_k)}{p(B)} \\ &= \frac{p(B/A_k)p(A_k)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B/A_i) \times p(A_i)} \end{aligned}$$

□

Exemple

Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. La probabilité pour que l'arc aille à l'élève est 0.8 ; dans ce cas, la probabilité que la flèche aille au but est 0.5. Par contre, si la flèche est tirée par le maître, la probabilité de succès est 0.7. Une flèche part au but ; quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par le maître ?

Notons :

A " l'arc va au maître "

B " la flèche va au but "

Donc la probabilité demandée est la probabilité conditionnelle $p(A/B)$.

$$p(A/B) = \frac{p(B/A)p(A)}{p(B/A)p(A) + p(B/\bar{A})p(\bar{A})}$$

$$\text{d'où } p(A/B) = \frac{0.7 \times 0.2}{0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.8} = 0.2592$$

2.5 Indépendance

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

Remarquons que si la réalisation de l'événement B ($p(B) \neq 0$) n'agit pas sur la probabilité de la réalisation de l'événement A ($p(A) \neq 0$), c'est à dire $p(A/B) = p(A)$, alors la formule des probabilités composées devient :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition 2.5.1. Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$ sont dits *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarques

- L'indépendance est une relation symétrique entre les événements.
- Si $p(A) = 0$ ou $p(B) = 0$, les deux événements sont indépendants ($p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0$)

Exemples

1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois événements :

R : " tirer un roi "

T : " tirer un trèfle "

$R \cap T$: "tirer un roi de trèfle "

Les événements R : " tirer un roi " et T : " tirer un trèfle" sont indépendants, en effet :

$$p(R) = \frac{1}{8}, p(T) = \frac{1}{4} \text{ et } p(R \cap T) = \frac{1}{32},$$

donc

$$p(R \cap T) = p(R) \times p(T).$$

Autrement dit, savoir ou non que T est réalisé n'intervient pas dans la probabilité de R .

2. Considérons les différentes répartitions possibles des sexes des enfants d'une famille ayant n enfants.

Considérons l'événement M : " la famille a des enfants de deux sexes " et l'événement F : " la famille a au plus une fille ".

Notons F_n l'ensemble de ces répartitions. $\text{card} F_n = 2^n$.

Cas : $n = 2$

$$F_2 = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$$

Alors

$$M = \{(G, F), (F, G)\}, F = \{(G, G), (G, F), (F, G)\} \text{ et } M \cap F = M$$

d'où

$$p(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, p(F) = \frac{3}{4}, p(M \cap F) = \frac{1}{2}$$

d'où $p(M \cap F) \neq p(M).p(F)$, M et F ne sont pas indépendants dans ce cas.

Cas : $n = 3$

On a dans ce cas :

$$F_3 = \{(G, G, G), (G, G, F), (G, F, F), (F, G, F), (F, G, G), (F, F, G), (G, F, G), (F, F, F)\}$$

$$M = \{(G, G, F), (G, F, F), (F, G, F), (F, G, G), (F, F, G), (G, F, G)\}$$

$$F = \{(G, G, G), (G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)\}$$

et

$$M \cap F = \{(G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)\}$$

d'où

$$p(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, p(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, p(M \cap F) = \frac{3}{8}$$

Dans ce cas $p(M \cap F) = p(M).p(F)$. M et F sont indépendants.

Exercice 2.6.

Montrer que , pour $n > 3$, M et F ne sont pas indépendants.

Proposition 2.5.1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$. Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} sont indépendants. De même pour les événements \bar{A} et B et pour les événements \bar{A} et \bar{B} .

Preuve :

On a $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où

$$\begin{aligned} p(A \cap \bar{B}) &= p(A) - p(A \cap B) \\ &= p(A) - p(A).p(B) \\ &= p(A)(1 - p(B)) \\ &= p(A).p(\bar{B}) \end{aligned}$$

donc les événements A et \bar{B} sont indépendants, et par symétrie \bar{A} et B sont aussi indépendants. Comme \bar{B} et A sont indépendants. alors \bar{B} et \bar{A} sont indépendants. \square

Définition 2.5.2. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$. On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont mutuellement indépendants si pour toute suite finie $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ d'événements distincts, on a :

$$p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}).p(A_{i_2}).\dots.p(A_{i_k})$$

Remarque

Si les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fautive en général. Voici un contre exemple.

Exemple

On lance deux dés non truqués dont les résultats sont notés a et b . Considérons les événements suivants $A = \{a \text{ pair}\}$, $B = \{b \text{ impair}\}$ et $C = \{a \text{ et } b \text{ de même parité}\}$ On a : $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = p(A \cap C) = p(B \cap C) = \frac{1}{4}$ donc A, B et C sont deux à deux indépendants, mais $p(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8}$: A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

• • • • •

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles

Contents

3.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	28
3.2	Caractéristiques d'une variable aléatoire	30
3.3	Lois usuelles	36
3.4	Couple de variables aléatoires	41

3.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

3.1.1 variables aléatoires

Définition 3.1.1. On appelle *variable aléatoire réelle* (en abrégé *v.a.r*) toute application de Ω dans \mathbb{R} .

Notations

Soit X une variable aléatoire réelle de Ω dans \mathbb{R} :

1. $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$ se note $X = x$.
2. $X^{-1}(]a, +\infty[) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$.
3. $X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) < b\}$ se note $a \leq X < b$.
4. $X^{-1}(]-\infty, a]) \cap X^{-1}(]-\infty, b])$ se note $(X \leq a, X \leq b)$.

Exemples

1. On lance une pièce de monnaie, l'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{P, F\}$, soit X la variable définie par $X(\{P\}) = 1$ et $X(\{F\}) = 0$, alors

$$p(X = 0) = p(X = 1) = \frac{1}{2}$$

2. Soit une urne à deux catégories contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $1 - p$. On tire de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ des boules blanches obtenues. Dans ce cas on a $X(\Omega) = [0, n]$.

3. Un tournoi de football se joue entre quatre équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une fois seulement les trois autres. À chaque match, on attribue 2 points à l'équipe gagnante, 0 point à l'équipe perdante et 1 point à chaque équipe s'il y a match nul.

Soit X le nombre de points marqués par une équipe donnée à la fin du tournoi. Ici

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3.1.2 Loi d'une variable aléatoire

Proposition 3.1.1. (*et définition*) Soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, P(\Omega), p)$, alors l'application :

$$\begin{aligned} p_X : X(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ a &\longrightarrow p(X = a) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, s'appelle la loi de probabilité de X . On dit aussi que la v.a.r X suit la loi de probabilité p_X .

Démonstration :

- On a :

$$X(\Omega) = \bigcup_{a \in \Omega} (X = a)$$

donc

$$p_X(X(\Omega)) = \sum_{a \in \Omega} p(X = a) = 1$$

- Soient B et B' deux parties disjointes de $X(\Omega)$, donc ils existent deux parties disjointes A et A' de Ω tels que : $X(A) = B$ et $X(A') = B'$, donc :

$$\begin{aligned} p_X(B \cup B') &= p\left(\bigcup_{a \in B \cup B'} X = a\right) \\ &= p(A \cup A') \\ &= p(A) + p(A') \\ &= p(X^{-1}(A)) + p(X^{-1}(A')) \\ &= p_X(B) + p_X(B') \end{aligned}$$

□

Exemple

Un sac contient six jetons : deux jetons portent le numéro 1 ; trois portent le numéro 2 ; un jeton porte le numéro 3.

On suppose que les jetons ont même probabilité d'apparition.

On tire simultanément trois jetons du sac. Soit X la v.a.r associée à la somme des nombres portés par les jetons tirés.

Déterminer la loi de X .

L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des parties à trois éléments (jetons) parmi les six que contient le sac.

D'où :

$$\text{card}\Omega = \mathbb{C}_6^3 = 20$$

On peut avoir des types d'éventualités suivants :

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}$$

Donc X prend les valeurs : 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{4, 5, 6, 7\}$.

$$\begin{aligned} p(X=4) &= \frac{\mathbb{C}_2^2 \mathbb{C}_3^1}{20} = \frac{3}{20} \\ p(X=5) &= \frac{\mathbb{C}_2^1 \mathbb{C}_3^2 + \mathbb{C}_2^2 \mathbb{C}_1^1}{20} = \frac{7}{20} \\ p(X=6) &= \frac{\mathbb{C}_2^1 \mathbb{C}_3^1 \mathbb{C}_1^1 + \mathbb{C}_3^3}{20} = \frac{7}{20} \\ p(X=7) &= \frac{\mathbb{C}_3^2 \mathbb{C}_1^1}{20} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

La loi de probabilité de X se résume dans le tableau suivant :

$x_i \in X(\Omega)$	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

3.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire

3.2.1 Fonction de répartition

Définition 3.2.1. Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$, on appelle fonction de répartition de X la fonction numérique F_X définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p(X \leq x)$$

Exercice 3.1.

Un sac contient 3 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une à une les 6 boules du sac (sans remise)

Soit X la v.a.r qui à chaque tirage des six boules associe le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition, pour la première fois, d'une boule rouge.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - 2) Quelle est la loi de X ?
 - 3) Définir la fonction de répartition de X .
-

Solution

1. Le résultat de cette épreuve est une permutation des 6 boules et, si on désigne par Ω l'univers des éventualités, alors :

$$\text{card}\Omega = 6!$$

Il est évident que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ (car la première boule rouge peut apparaître au 1^{er} tirage (alors $X = 0$), ou au 2^{me} tirage (alors $X = 1$), ou au 3^{me} tirage (alors $X = 2$) ou au 4^{me} tirage (alors $X = 3$))

2. $p(X = 0) = p(E_0)$

E_0 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où une rouge figure en 1^{er} position, donc

$$\text{card}E_0 = \mathbb{C}_3^1 5!$$

(\mathbb{C}_3^1 est le nombre de choix de la boule rouge tiré la 1^o fois, $5!$ est le nombre de permutations des 5 autres boules), alors :

$$p(X = 0) = \frac{\mathbb{C}_3^1 5!}{6!} = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 1) = p(E_1)$$

E_1 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figure une verte en 1^{er} position, et une rouge en 2^o position, donc

$$\text{card}E_1 = \mathbb{C}_3^1 \mathbb{C}_3^1 4!$$

(\mathbb{C}_3^1 pour la verte tiré la 1^o fois, \mathbb{C}_3^1 pour la rouge tirée la 2^o fois, $4!$ est le nombre de permutations des quatre autres boules), donc :

$$p(X = 1) = \frac{\mathbb{C}_3^1 \mathbb{C}_3^1 4!}{6!} = \frac{3}{10}$$

$$p(X = 2) = p(E_2)$$

E_2 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figurant une verte en 1^{er} position, une verte en 2^o position et une rouge en 3^o position, donc

$$\text{card}E_2 = A_3^2 \mathbb{C}_3^1 3!$$

(A_3^2 correspondant aux arrangements des deux boules vertes figurant en 1 et 2 positions, \mathbb{C}_3^1 correspond à la rouge tirée la 3^o fois, $3!$ est le nombre de permutations des trois autres boules), donc :

$$p(X = 2) = \frac{A_3^2 \mathbb{C}_3^1 3!}{6!} = \frac{3}{20}$$

$$p(X = 3) = p(E_3)$$

E_3 étant l'événement constitué des permutations des 6 boules du sac où figurant les trois vertes suivies des trois rouges), donc $\text{card}E_3 = 3!3!$

(3! désignant le nombre de permutations des trois boules vertes ou des trois boules rouges), on a :

$$p(X = 2) = \frac{3!3!}{6!} = \frac{1}{20}$$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

$k \in X(\Omega)$	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. Fonction de répartition de X . Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x < 0$, $F_X(x) = 0$

Si $x \in [0, 1[$, $F_X(x) = p(X = 0) = \frac{1}{2}$

Si $x \in [1, 2[$, $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1)$ (réunion disjointe) donc :

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{8}{10}$$

Si $x \in [2, 3[$ $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)$ (réunion disjointe) donc :

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{19}{20}$$

Si $x \in [3, +\infty[$ $(X \leq x) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)$ (réunion disjointe) donc :

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{20}{20} = 1$$

D'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{8}{10} & \text{si } x \in [1, 2[\\ \frac{19}{20} & \text{si } x \in [2, 3[\\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Théorème 3.2.1. Soit X une v.a.r. et soit F_X sa fonction de répartition. Alors F_X possède les propriétés suivantes :

1) F est une fonction croissante (au sens large)

2) F est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Proposition 3.2.1. Soit X une v.a.r. et soit F_X sa fonction de répartition. On a :

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2) $\forall a \in \mathbb{R}, p(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$, $(F_X(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x))$

3.2.2 Espérance mathématiques (la moyenne)

Définition 3.2.2. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On appelle espérance mathématique de la v.a.r X le nombre noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p(X = x_i)$$

Proposition 3.2.2. Soit X une v.a.r et U une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie sur D_X . On a :

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} U(x_i) p(X = x_i)$$

avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

En particulier si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$.

Définition 3.2.3. Soit X une v.a.r, on pose $Y = X - E(X)$.

Y s'appelle la v.a.r centrée associée à X , on a $E(X) = 0$.

De manière générale si $E(X) = 0$, X est **dite centrée**.

3.2.3 Variance et Écart-type

Définition 3.2.4. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

· On appelle **variance** de la v.a.r X le réel noté $Var(X)$, défini par :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i)$$

· On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Remarque

1. La variance est un nombre positif car $Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i)$: C'est la somme de produits positifs $[x_i - E(X)]^2$ et $p(X = x_i)$.

2. La variance peut être calculer autrement : En effet :

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] p(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{i=n} x_i p(X = x_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i) = 1 \right) \\
&= E(X^2) - E^2(X)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

Proposition 3.2.3. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\Omega), p)$ et a, b des réels, alors :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

Démonstration :

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
Var(aX + b) &= E[(aX + b)^2] - E^2(aX + b) \\
&= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\
&= a^2 [E(X^2) - E^2(X)] \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sigma(aX + b) &= \sqrt{Var(aX + b)} \\
&= \sqrt{a^2 Var(X)} \\
&= |a| \sqrt{Var(X)} \\
&= |a| \sigma(X)
\end{aligned}$$

□

Définition 3.2.5. La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelé la variable **centrée-réduite** associée à X .

Proposition 3.2.4. La moyenne d'une v.a.r centrée-réduite Y est nulle et sa variance est égale à un, de même $E(Y^2) = 1$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \cdot E(Y) &= E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(E(X))] = \frac{1}{\sigma(X)}[E(X) - E(X)] = 0 \\
 \cdot Var(Y) &= \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 Var(X) = 1 \quad (\text{car } Var(X) = \sigma^2(X)) \\
 \cdot Var(Y) &= 1 \implies E(Y^2) - E^2(Y) = 1 \Rightarrow E(Y^2) = 1
 \end{aligned}$$

□

Exemple

Dans l'exemple précédent, Exercice 3.1, on a :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} kp(X = k) \\
 &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{1}{20} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 p(X = k) \\
 &= 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{1}{20} \\
 &= \frac{27}{20}
 \end{aligned}$$

Donc

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{27}{20} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{63}{80}$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 0.88741$$

La variable $Y = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)} = \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{4X-3}{3}$ est une v.a.r centrée réduite.

3.2.4 Inégalité de *Bienyamé-Tchebychev*

Proposition 3.2.5. Soient X une v.a.r sur un univers Ω fini, m sa moyenne et σ son écart-type. Alors, pour tout nombre réel strictement positif ε :

$$p(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

preuve :

Nous savons que :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= Var(X) \\
 &= \sum_{x_i \in \Omega} (X(x_i) - m)^2 p(X = x_i) \quad \text{avec } \Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\Omega' = |X - m| \geq \varepsilon = \{x_i \in \Omega / |X(x_i) - m| \geq \varepsilon\}$$

alors

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{x_i \in \Omega} (X(x_i) - m)^2 p(X = x_i) \\ &\geq \varepsilon^2 p(\Omega') p(X = x_i) \\ &\geq \varepsilon^2 p(\Omega') = \varepsilon^2 p(|X - m| \geq \varepsilon)\end{aligned}$$

d'où

$$p(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

□

Remarque

En considérant l'événement contraire Ω'^C , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$p(|X - m| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

En effet, $1 - p(\Omega') \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, c'est-à-dire $p(|X - m| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ ($\Omega'^C = |X - m| < \varepsilon$)

3.3 Lois usuelles

3.3.1 Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Définition 3.3.1. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur $X(\Omega)$ et on écrit $X \hookrightarrow U_n$ si $p(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

On a :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - E^2(X)$$

Cas particulier :

Si $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$, alors la loi de X peut être facilement résumée par :

- $P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$
- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$

3.3.2 Lois de tirage avec remise

Loi de Bernoulli

Définition 3.3.2. On dit qu'une variable aléatoire X est une v.a.r de **Bernoulli** si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles. On dit X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrit $X \hookrightarrow \beta(1, p)$

Exemple

On lance une pièce de monnaie où la probabilité d'amener pile est notée $p \in]0, 1[$. La v.a.r X définie par $X = 1$ si le résultat est pile et $X = 0$ sinon. X est une v.a.r de Bernoulli.

Proposition 3.3.1. Soit $X \hookrightarrow \beta(1, p)$, alors

$$E(X) = 0(1 - p) + 1.p = p \quad \text{et} \quad V(X) = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2p = p(1 - p) = pq$$

Loi binomiale (Schéma de Bernoulli)

On dispose d'une urne qui contient deux types de boules, des noires et des blanches par exemple.

Dans cette urne, la proportion des boules blanches est p , celle des noires est $q = 1 - p$.

Chaque fois que l'on tire une boule, on la remet dans l'urne. On a, à chaque tirage, la probabilité $p(B)$ de tirer une boule blanche est $p(B) = p$ et celle de tirer une boule noire est $p(N) = q = 1 - p$.

Cette situation illustre ce qui porte le nom de **schéma de Bernoulli** :

Définition 3.3.3. Une épreuve donne lieu à deux issues possibles B (succès) et N (échec). La probabilité du succès est p et celle d'échec est $q = 1 - p$ cette épreuve est exécuté n fois.

On dit qu'on a confronté à un schéma de Bernoulli caractérisé par les nombres n (nombre d'épreuves) et p (probabilité de succès à chaque épreuve)

Univers associé à un schéma de Bernoulli

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Chaque série de n tirages peut être résumée par une liste de n lettres, chacune étant B ou N .

Il y a donc 2^n listes possibles qui sont les événements élémentaires.

Proposition 3.3.2. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p donne lieu à un univers Ω_n ayant 2^n éléments.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues à la fin de ces n tirages. Nous avons :

$$X(\Omega_n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Théorème 3.3.1. Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , étant donné k entier compris entre 0 et n , la probabilité de l'événement $(X = k)$ est $\mathbb{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

Démonstration :

En effet : L'événement $(X = k)$ est formé de \mathbb{C}_n^k événements élémentaires. Étudions, par exemple, l'événement élémentaire $\underbrace{B \dots B}_{k \text{ fois}} \underbrace{N \dots N}_{n-k \text{ fois}}$. Chaque tirage d'une boule est indépendant

des autres, il vient alors $p(B \dots B N \dots N) = \underbrace{p \dots p}_{k \text{ fois}} \underbrace{q \dots q}_{n-k \text{ fois}} = p^k (1 - p)^{n-k}$

D'autres part les \mathbb{C}_n^k événements élémentaires qui constituent $(X = k)$ ont la même probabilité, car le nombre de lettres B est le même dans tous les cas. Seul l'ordre qui change, c'est-à-dire $P(X = k) = \mathbb{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ \square

Définition 3.3.4. *étant donné un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la probabilité, sur l'univers Ω_n qui lui est associé, définie par $p(X = k) = \mathbb{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ porte le nom de la **loi binomiale**. On la note $\mathcal{B}(n, p)$ et on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$*

Exemple

Supposons que dans des conditions normales de fonctionnement, la quantité de pièces défectueuses usinées par une machine est 1%.

En considérant que la machine est bien réglée, le nombre X de pièces défectueuses dans une caisse de 100 pièces, suit la loi $\mathbb{B}(100, 10^{-2})$.

La probabilité pour qu'il y ait moins de 2 pièces défectueuses dans la caisse est donc :

$$\begin{aligned} 1 - p(X < 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \\ &= 1 - \mathbb{C}_{100}^0 0.01^0 (1 - 0.01)^{100} - \mathbb{C}_{100}^1 0.01^1 (1 - 0.01)^{99} \\ &= 1 - 0.99^{100} - 0.99^{99} \\ &= 0.26424 \end{aligned}$$

Exercice 3.2.

Dans un groupe de 100 personnes, quelle est la probabilité pour que 2 personnes exactement soient nées le même jour ?

Solution

On suppose que :

- La probabilité de naissance est la même toute l'année
- Il y a indépendance entre les naissances.
- Il n'y a pas d'anniversaire le 29 février (On ne tient pas compte des années bissextiles)

Pour un jour donné, à chaque individu, on associe une v.a.r de Bernoulli égale à 1 si son anniversaire, 0 sinon.

Le nombre de personnes nées ce jour là est donc une variable binomiale $X \hookrightarrow \mathbb{B}(100, p)$ avec $p = \frac{1}{365}$.

La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= \mathbb{C}_{100}^2 p^2 (1 - p)^{98} \\ &= \frac{100 \times 99}{2} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{98} \\ &= 0.0284 \end{aligned}$$

Proposition 3.3.3. *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq$*

Démonstration :

· Par définition, on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n kp(X=k) = \sum_{k=0}^n k\mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k\mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(le 1^{er} terme est nul) et

$$k\mathbb{C}_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

donc

$$\begin{aligned} E(X) &= n p \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} p^i (1-p)^{n-1-i} \\ &= np(p+1-p)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

· On peut écrire :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - E^2(X) \\ &= E(X(X-1)) + np - n^2 p^2 \end{aligned}$$

Calculons $E(X(X-1))$.

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)\mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1)\mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ (les deux premiers termes sont nuls)} \end{aligned}$$

mais

$$k(k-1)\mathbb{C}_n^k = n(n-1)\mathbb{C}_{n-2}^{k-2}$$

donc

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \mathbb{C}_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \mathbb{C}_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \mathbb{C}_{n-2}^i p^i (1-p)^{(n-2)-i} \quad (\text{avec } i = k-2) \\ &= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Var}(X) = E(X(X-1)) + np - n^2p^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$$

□

Exercice 3.3.

Un dé tétraédrique a ses quatre faces numérotées 1, 2, 3, 4. Soit p_i la probabilité pour que le dé repose sur la face numérotée i après un lancer ($i = 1, 2, 3, 4$). On donne :

$$p_1 = \frac{1}{12}, p_2 = \frac{7}{36}, p_3 = \frac{11}{36}, p_4 = \frac{5}{12}$$

Soit X la v.a.r qui associe à un jet de ce dé la somme des nombres portés sur les faces visibles. On lance le dé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité pour que l'événement A " X est pair " se réalise

- a) deux fois exactement ?
- b) au moins une fois ?
- c) au plus une fois ?

3.3.3 Loi hypergéométrique

On considère une urne qui contient N boules, N_p boules blanches et N_q boules noires, avec p la proportion des boules blanches et $1 - p$ celle des boules noires.

Définition 3.3.5. On considère l'urne précédente, on tire n boules de cette urne, sans remise, et on appelle X la v.a.r égale au nombre de boules blanches obtenues et on dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p . Nous écrivons $X \hookrightarrow \mathfrak{S}(N, n, p)$

Proposition 3.3.4. Si $X \hookrightarrow \mathfrak{S}(N, n, p)$, alors $X(\Omega) \subset [0, n]$ et $\forall k \in [0, n] \quad p(X = k) = \frac{\mathfrak{C}_{N_p}^k \times \mathfrak{C}_{N_q}^{n-k}}{\mathfrak{C}_N^n}$

Proposition 3.3.5. Soit $X \hookrightarrow \mathfrak{S}(N, n, p)$, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$

Remarque importante

On montre que $\frac{\mathfrak{C}_{N_p}^k \times \mathfrak{C}_{N_q}^{n-k}}{\mathfrak{C}_N^n}$ tend vers $\mathfrak{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ quand N tend vers $+\infty$. On dit que X converge en loi vers une variable binomiale de paramètres n et p .

Si N est assez grand, on peut, dans un calcul de probabilité, remplacer la loi hypergéométrique $\mathfrak{S}(N, n, p)$ dépendant de trois paramètres par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ qui ne dépend que de deux paramètres n et p . Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque $N > 10n$.

3.4 Couple de variables aléatoires

3.4.1 Lois marginales

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires, nous notons

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \\ p_{ij} &= p((X = x_i) \cap (Y = y_j)), \text{ pour } (i, j) \in [1, n] \times [1, m] \\ p_{i.} &= p((X = x_i)), \text{ pour } i \in [1, n] \\ p_{.j} &= p((Y = y_j)), \text{ pour } j \in [1, m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x = f(t) \end{aligned}$$

Définition 3.4.1. Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires.

1) L'application

$$\begin{aligned} p: X(\Omega) \times Y(\Omega) &\mapsto [0, 1] \\ (x_i, y_j) &\mapsto p_{ij} = p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

s'appelle la **loi conjointe** du couple $\vec{C} = (X, Y)$

2) L'application

$$\begin{aligned} p.: X(\Omega) &\mapsto [0, 1] \\ x_i &\mapsto p_{i.} = p((X = x_i)) \end{aligned}$$

s'appelle la **première loi marginale** du couple $\vec{C} = (X, Y)$ (c'est tout simplement la loi de X)

3) L'application

$$\begin{aligned} p.: Y(\Omega) &\mapsto [0, 1] \\ y_j &\mapsto p_{.j} = p((Y = y_j)) \end{aligned}$$

s'appelle la **deuxième loi marginale** du couple (c'est la loi de Y)

Représentation matricielle des lois de $\vec{C} = (X, Y)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\bullet	\bullet	\bullet	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}				p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}				p_{2m}	$p_{2\bullet}$
\bullet							
\bullet							
x_n	p_{n1}	p_{n2}				p_{nm}	$p_{n\bullet}$
Loi de Y	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$				$p_{\bullet m}$	1

Exemple

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne. Nous noterons X la v.a.r prenant la valeur 1 si la première boule tirée est blanche

et 0 sinon. Nous définissons de même la v.a.r Y concernant le tirage de la deuxième boule.
 $1^{er} cas$: Tirage avec remise $2^{e} cas$: Tirage sans remise

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{4}{7}$
Loi de Y	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Loi de Y	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

Théorème 3.4.1. Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. Alors les lois marginales du couple sont données par :

- $\forall x \in X(\Omega), p(X = x) = \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x, Y = y_j)$
- $\forall y \in Y(\Omega), p(Y = y) = \sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i, Y = y)$
- $\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x_i, Y = y_j) = 1$

Démonstration :

• $\forall x \in X(\Omega)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (X = x) &= (X = x) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{j=m} Y = y_j \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{j=m} (X = x_i, Y = y_j) \text{ (réunion disjointe)} \end{aligned}$$

d'où

$$p(X = x) = p\left(\bigcup_{j=1}^{j=m} (X = x_i, Y = y_j)\right) = \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x, Y = y_j)$$

• De même, on montre que :

$$\forall y \in Y(\Omega), p(Y = y) = \sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i, Y = y)$$

• On a : $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x, Y = y_j) \implies 1 = \sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} p(X = x, Y = y_j)$$

□

Remarque

Le théorème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \cdot \forall i \in [1, n], p_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{j=m} p_{ij} \\ \cdot \forall j \in [1, m], p_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} \\ \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} p_{ij} &= 1 \end{aligned}$$

3.4.2 Lois conditionnelles

Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires, avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

$$p_{ij} = p((X = x_i) \cap (Y = y_j)), \quad \text{pour } (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$$

$$p_{i\cdot} = p(X = x_i), \quad \text{pour } i \in [1, n]$$

$$p_{\cdot j} = p(Y = y_j), \quad \text{pour } j \in [1, m]$$

Si $p(Y = y_j) \neq 0$, on peut considérer les nombres

$$p(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{p(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

De même si $p(X = x_i) \neq 0$, on peut considérer les nombres

$$p(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{p(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

d'où la définition suivante :

Définition 3.4.2. Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. On appelle loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$, l'application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $[0, 1]$ par la relation :

$$x_i \rightarrow p(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

De même on appelle loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$, l'application définie sur $Y(\Omega)$, à valeurs dans $[0, 1]$ par la relation :

$$y_j \rightarrow p(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et déterminons toutes les lois conditionnelles :

a) Tirage avec remise

$X/Y = 0$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$X/Y = 1$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

par exemple : $p(X = 0/Y=1) = \frac{\frac{9}{49}}{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$

$Y/X = 0$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$Y/X = 1$	0	1
p	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

On remarque que le conditionnement de X (ou de Y) par n'importe quelle valeur de Y (ou de X) n'affecte pas la loi de X (ou Y), c'est-à-dire $X/Y=j = X$ et $Y/X=i = Y$

b) Tirage sans remise

$X/Y = 0$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X/Y = 1$	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

par exemple $p(X = 0/Y=1) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$

$Y/X = 0$	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$Y/X = 1$	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Dans ce cas, le conditionnement a eu un effet. Par exemple $X/Y=0 \neq X$ ou $Y/X=1 \neq Y$. Il est normal que dans un tirage sans remise, la connaissance du résultat de la première tirage influe sur la loi de la deuxième.

3.4.3 L'indépendance

Définition 3.4.3. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires, on dit les v.a.r X et Y sont indépendantes si :

$$p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j) \text{ pour } (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$$

ou encore :

$$p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j} \text{ pour } (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$$

Exemple

Les deux variables X et Y , considérés dans l'exemple précédent, sont indépendantes dans le cas de tirage avec remise et ne sont pas indépendantes dans le cas de tirage sans remise.

Exercice 3.4.

Une urne contient une boule porte le numéro 1, deux boules portent le numéro 2 et trois boules portent le numéro 3. On détermine un entier n à trois chiffres en tirant successivement et avec remise 3 boules de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables.

La première boule tirée fournit le chiffre des centaines de n , le deuxième tirage indique le chiffre des dizaines et le troisième tirage indique le chiffre des unités.

1. Calculer les probabilités des événements :

A " obtenir un entier constitué par trois chiffres impairs "

B " obtenir un nombre pair "

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre des chiffres pairs dans l'entier n et Y la v.a.r égale 0 si n pair et 1 si n impair.

a) Donner la loi du couple (X, Y) .

b) Les v.a.r X et Y sont-ils indépendantes ?

Solution

1. Puisque le tirage est avec remise alors $\text{card}\Omega = 6^3$.

· A est réalisé si on a tiré trois boules parmi les quatre qui portent les numéros impairs, donc $\text{card}A = 4 \times 4 \times 4$ et $p(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$

· B est réalisable si et seulement si on a obtenu, dans le troisième tirage, une boule portant un numéro pair, donc $\text{card}B = 6 \times 6 \times 2$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.

2. a) On a :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } Y(\Omega) = \{0, 1\}$$

L'événement $(X = 0, Y = 0)$ signifie qu'on obtient un nombre pair qui contient aucun chiffre pair, ceci est impossible donc $p_{00} = p(X = 0, Y = 0) = 0$

L'événement $(X = 0, Y = 1)$ signifie qu'on obtient un nombre impair qui contient aucun chiffre pair, c'est-à-dire $A = (X = 0, Y = 1)$, donc $p_{01} = p(A) = \frac{8}{27}$

L'événement $(X = 1, Y = 0)$ signifie qu'on obtient un nombre pair qui contient un seul chiffre pair,

$$\begin{aligned} p_{10} &= p(X = 1, Y = 0) \\ &= \frac{4 \times 4 \times 2}{6^3} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

De même on trouve :

$$p_{11} = \frac{8}{27}, p_{20} = \frac{4}{27}, p_{21} = \frac{2}{27}, p_{30} = \frac{1}{27}, p_{31} = 0$$

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$
2	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{27}$
Loi de Y	$\frac{9}{27}$	$\frac{18}{27}$	1

b) On a, par exemple, $p(X = 0, Y = 0) = 0$ et $p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{8}{27} \cdot \frac{9}{27}$, donc $p(X = 0, Y = 0) \neq p(X = 0) \times p(Y = 0)$ et les v.a.r X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3.5.

Montrer le résultat suivant :

Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si, le rang de la matrice associée A ($A = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$) est égal à 1.

3.4.4 Covariance, coefficient de corrélation linéaire**Espérance de $u(X, Y)$**

Soient X et Y deux v.a.r sur Ω .

L'espérance de $Z = u(X, Y)$ (u fonction réelle à deux variables) est donné par la formule suivante :

$$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} u(x, y) p(X = x, Y = y)$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x + y) p(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xp(X = x, Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} xp(X = x, Y = y) \right] \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} p(X = x, Y = y) \right] \end{aligned}$$

De plus

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} p(X = x, Y = y) = p(X = x)$$

D'où

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xp(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} xp(X = x) = E(X)$$

De même, on a :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} yp(X = x, Y = y) = E(Y)$$

Conclusion :

$$\boxed{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$$

$$\cdot E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyp(X = x, Y = y)$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyp(X=x, Y=y) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyp(X=x)p(Y=y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} xp(X=x) \sum_{y \in Y(\Omega)} yp(Y=y) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Donc si X et Y sont deux v.a.r **indépendantes**, alors

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

Covariance

Définition 3.4.4. Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et $\vec{C} = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. Le nombre :

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

est appelé **covariance** de X et Y et noté $Cov(X, Y)$.

Proposition 3.4.1. Soient X et Y deux v.a.r sur Ω , alors $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(X.Y) - E(X)E(Y)$

Preuve :

En effet : On a :

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)]$$

et l'espérance étant un application linéaire, il vient :

$$\begin{aligned}
E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(X.Y) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

□

Exemple

Soient X et Y de loi $\mathcal{B}(1, p)$, alors $Cov(X, Y) = p(X=1, Y=1) - p^2$.

En effet, $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyp(X=x, Y=y) = p(X=1, Y=1)$

Théorème 3.4.2. Soit X, Y, X', Y' des variables aléatoires sur $(\Omega, P(\Omega), p)$. Alors :

- 1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- 2) $Cov(X + X', Y) = Cov(X, Y) + Cov(X', Y)$ et $Cov(X, Y + Y') = Cov(X, Y) + Cov(X, Y')$
- 3) $Cov(\lambda X, Y) = Cov(X, \lambda Y) = \lambda Cov(X, Y)$
- 4) $Cov(X, X) = Var(X) \geq 0$
- 5) $Var(X + Y) = Var(X) + 2Cov(X, Y) + Var(Y)$
- 6) Si X et Y indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$

La preuve ne pose aucun problème.

Lemme

Soit X une v.a.r. Si $Var(X) = 0$ alors X est constante.

Preuve :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = 0 \iff \forall i \in [1, n], [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = 0 \\ &\iff \forall i \in [1, n], x_i - E(X) = 0 \\ &\iff \forall i \in [1, n]; x_i = E(X) \end{aligned}$$

donc $X(\Omega) = \{E(X)\}$ et par suite X est la variable constante égale à $E(X)$. \square

Théorème 3.4.3. Soit X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, P(\Omega), p)$. Alors :

$$|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)(*)$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si $Y = aX + b$ (a, b des réels)

Preuve :

On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $T(\lambda) = Var(\lambda X + Y)$, alors :

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= Var(\lambda X + Y) \\ &= Var(\lambda X) + 2Cov(\lambda X, Y) + Var(Y) \\ &= \lambda^2 Var(X) + 2\lambda Cov(X, Y) + Var(Y) \end{aligned}$$

· Si $Var(X) \neq 0$, T est un trinôme du second degré en λ , trinôme ≥ 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
Ainsi

$$\Delta' = [Cov(X, Y)]^2 - Var(X)Var(Y) \leq 0$$

C'est-à-dire

$$|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) \quad (\sigma(X) = \sqrt{Var(X)})$$

· Si $Var(X) = 0$ dans ce cas X et Y sont indépendantes et $Cov(X, Y) = 0$, donc $(*)$ est vérifié.

Cas d'égalité :

Si $|Cov(X, Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$, $T(\lambda)$ admet une racine double c : $T(c) = Var(cX + Y) = 0$, $cX + Y$ est donc une v.a.r constante b (d'après le lemme).

On a donc $cX + Y = b \implies Y = -cX + b = aX + b$ ($c = -a$). \square

Coefficient de corrélation linéaire

Définition 3.4.5.

Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. On dit que X et Y sont corrélées lorsque $Cov(X, Y) \neq 0$.

On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y et on note $\rho(X, Y)$ le nombre $\frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Proposition 3.4.2. Soit X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. Alors :

- 1) $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$
- 2) X et Y sont indépendantes $\implies \varrho(X, Y) = 0$
- 3) Si $\varrho(X, Y) = 1$ (resp. -1), alors il existe $a > 0$ (resp. $a < 0$) et une constante b tel que $Y = aX + b$.

Exercice 3.6.

Soit X une variable uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{-1, 0, 1\} \quad \text{et} \quad p(X = -1) = p(X = 0) = p(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Calculer $\varrho(X^n, X^m)$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

Solution

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : Si k est pair :

$$E(X^k) = (-1)^k p(X = -1) + 0^k \cdot p(X = 0) + 1^k \cdot p(X = 1) = \frac{2}{3}$$

et

$$Var(X) = E(X^{2k}) - E^2(X^k) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Si k est impair

$$\begin{aligned} E(X^k) &= (-1)^k p(X = -1) + 0^k \cdot p(X = 0) + 1^k \cdot p(X = 1) \\ &= -p(X = -1) + p(X = 1) = 0 \end{aligned}$$

et

$$Var(X) = E(X^{2k}) - E^2(X^k) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Calculons $\varrho(X^n, X^m) = \frac{Cov(X^n, X^m)}{\sigma(X^n)\sigma(X^m)}$

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{E(X^{n+m}) - E(X^n)E(X^m)}{\sqrt{Var(X^n) \cdot Var(X^m)}}$$

· Si n et m sont pairs.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{9}}} = 1$$

· Si n est pair et m impair ou si n impair et m pair.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{0 - 0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{9}}} = 0$$

- Si n et m sont impairs.

$$\varrho(X^n, X^m) = \frac{\frac{2}{3} - 0 \times 0}{\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}} = 1$$

• • • • •

Annexe A

Problème I

Première partie

Une urne contient 7 boules : 5 blanches et 2 noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.
2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
 - (a) s'il tire deux boules blanches il gagne x francs ($x \geq 0$) ;
 - (b) s'il tire deux boules noires il perd $10x$ francs ;
 - (c) s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées : à l'issue de second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

On désigne par G la v.a.r dont les valeurs sont égales aux gains (**positifs** ou **négatifs**) du joueur.

3. Donner la loi de probabilité de la v.a.r G .
4. Calculer, en fonction de y , l'espérance mathématique de G . déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est à dire $E(G) = 0$.
5. s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées : à l'issue de second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

Pour cette valeur de y , calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x .

Deuxième partie

Soit la fonction f , définie pour tout réel x , par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$
Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?

2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1.5 cm).
3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.

• • • • •

Annexe B

Problème II

On considère le jeu électronique suivant :

Un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O , et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $-2; -1; 0; 1; 2$.

Lorsque le point L est en P_j , $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant t , la probabilité pour qu'il se positionne en P_k , $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ à l'instant $t + 1$ est fournie par le tableau ci-dessous :

instant $t \backslash$ instant $t+1$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	0.5	0	0.5	0	0
P_0	0	0.5	0	0.5	0
P_1	0	0	0.5	0	0.5
P_2	0	0	0	0	1

- On désigne par X_n la v.a.r qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$
 - Déterminer les lois de probabilité des v.a.r X_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Calculer l'espérance mathématique et la variance des v.a.r X_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4) .
- Déterminer la loi de probabilité de X_{n+1} en fonction de la loi de probabilité de X_n .
 - On désigne par a_n la probabilité de l'événement " $X_n = 0$ ". Établir une relation de récurrence de la forme :

$$\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$

- Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1.$$

(d) En déduire a_n . Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

• • • • •

Annexe C

Problème III

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.

L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :

H_1 : Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées 1, 2, 3.

H_2 : Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes les vacances d'été.

H_3 : Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année 1.

On note $A_i(n)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $n \geq 1$, l'événement : " choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n " et $\alpha_i(n) = p[A_i(n)]$, $i \in \{1, 2, 3\}$ la probabilité de choisir l'année n , la région i pour y passer ses vacances d'été.

H_4 : $\alpha_1(1) = 0.2$; $\alpha_2(1) = 0.45$; $\alpha_3(1) = 0.35$

H_5 : La probabilité de choisir la région i , $i \in \{1, 2, 3\}$, pour y passer ses vacances l'année $n+1$, ne dépend que du choix effectué l'année n .

On note $a_{ij} = p[A_i(n+1)/A_j(n)]$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, la probabilité de choisir la région i l'année $n+1$, sachant que l'année n , on choisit la région j .

On suppose que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, a_{ij} est indépendant de l'année considérée et que les a_{ij} sont les éléments de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

H_6 : On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.

Question préliminaire :

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une famille d'événements d'un univers Ω , avec $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i) \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Montrer que

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2) \dots p(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Partie A

1. (a) Soit B_n l'événement " choisir chaque année la région 2 durant toutes les n premières années "
 Calculer $p(B_3)$.
 Exprimer $p(B_n)$ en fonction de n .
- (b) Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?
- (c) Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

Partie B

2. (a) Exprimer, en le justifiant, une relation entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix}$$

puis entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$$

- (b) On montre le résultat suivant : Il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\lambda = -0.1 + i\sqrt{0.11}) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$\text{Montrer que } M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Définition C.0.6. On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n \geq 1}$ de type $(m \times q)$ à éléments de \mathbb{C} , $(U_n = [u_{ij}(n)]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q})$ converge vers une matrice $L = (l_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q}$ quand n tend vers l'infini si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{ij}(n) = l \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, q\}$

On note alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Proposition C.0.3. *Étant donné une suite de matrices $(U_n)_{n \geq 1}$ de type $(m \times q)$ à éléments de C , qui converge vers la matrice L , lorsque n tend vers l'infini et V, W deux matrices telles que les produits VL et LW soient définis, on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} VU_n = VL$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_nW = LW$.*

3. (a) Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.
- (b) Soient $U = (u_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ et $V = (v_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1. Montrer qu'il est de même pour la matrice UV .
- (c) Dédurre de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1} .
4. Montrer que les suites $[\alpha_1(n)]_{n \geq 1}, [\alpha_2(n)]_{n \geq 1}, [\alpha_3(n)]_{n \geq 1}$ convergent. Calculer leurs limites.

• • • • •