



中国工业与应用数学学会
China Society for Industrial and Applied Mathematics



上海交通大学

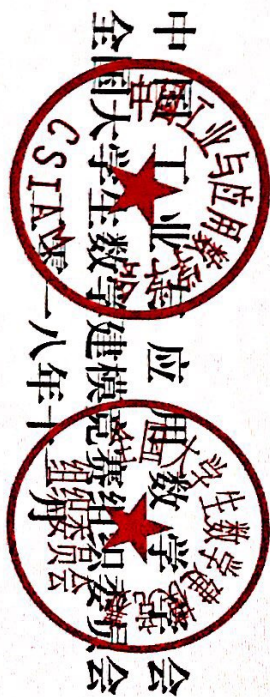
学 生：刘星雨

徐钰舒

郭文虎

指导老师：高晓枫

荣获二零一八年高教
社杯全国大学生数学建模
竞赛本科组二等奖。



基于有限差分法的高温作业专用服模型及其厚度最优决定

摘 要

本文意在结合热传导微分方程与衔接条件，利用专用服装材料织物层与空气层的比热容、厚度、密度、热传导率和两端温度条件建立户外作业专用服的热传导模型，并且利用实验测量数据进行模型的验证。同时，基于此模型，本文使用二分法和遗传算法分别解决了单个厚度和两个厚度决定的反问题，并且，本文的模型和算法可以推广到多个厚度决定的反问题中。

针对问题一 首先，以专用服外壳与环境接触面上的任意一点为原点，以垂直方向上为 x 轴，建立了“环境-三层织物-空气-皮肤”的一维系统。接着，将一维系统进行离散化处理，”建立时间-一维坐标”的网格模型。同时，将热传导微分方程转化为差分方程式，使用向前差分法，导出温度分布的显式向前差分公式，最后，结合题目两侧恒温条件，不断迭代，最终求得温度分布。与实际测量值对比，较为吻合。

针对问题二 使用问题一的模型，结合对衣物舒适度的相关研究，将问题转化为在约束条件下的单变量优化问题，优化目标为最小化厚度。通过二分法，得出最优厚度为 15.8mm。

针对问题三 在问题二的基础上，将有约束最优化问题转化为求解无约束最优化问题。选取第 II、IV 层的厚度之和与两个约束条件构成罚函数，运用多项式拟合与插值的方法，将离散的罚函数转化为连续的函数。最后，将罚函数作为个体的适应度函数，使用遗传算法寻找其在三维平面上的最小值，最终求得第 II、IV 层的最优厚度分别为 20.77mm 和 6.18mm。

关键词 一维系统 离散化 显式向前差分 罚函数 遗传算法 最优

1 问题重述

1.1 问题背景

为了避免皮肤烧伤, 高温环境下工作的人员常需要穿专用服装, 比如说由多层织物材料构成的热防护服。有关热防护服的热传递模型的研究早已开始。对于环境温度变化幅度不大的情况, Torvi[6] 于 1999 年提出了热防护服外层织物的传热模型, 其将显热容和热传导均近似看成常量。与 Torvi 等人的模型相似, Mell [4] 等在考虑了织物的热传导、热辐射后, 于 2000 年提出了多层织物层与层之间的反射模型。由于相变材料对热传递有一定影响, 2009 年, Mercer [5] 等提出了含有相变材料的多层织物的热传递模型。考虑到空气层对热防护服性能的影响, Ghazy[3] 于 2012 年提出了织物中包含了空气层的多层织物热传递模型。

对于热防护服的综合评价与最优参数决定问题, 范金土教授 [1] 建立了低温环境下的纺织材料的热湿传递数学模型, 为达到保暖的要求, 也提出了以热损失最小为目标的反问题, 最优决定材料的孔隙率。在范金土教授的基础上, 徐定华教授 [8] 等提出了纺织材料设计反问题。该反问题根据人体的舒适性要求, 合理给出附加的测量数据, 最优决定纺织材料的参数, 如最优决定纺织材料的热传导率, 厚度以及孔隙率等物理参数 [9]。

1.2 问题的提出

本题研究一种由三层织物材料构成的户外作业专用服, 其分为为 I、II、III 层, 其中 I 层与外界环境接触, III 层与皮肤之间还存在空隙, 将此空隙记为 IV 层。为设计此类服装, 本题将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中, 测量假人皮肤外侧的温度。现存在相关问题如下:

- 已知各层的参数值 (密度、比热、热传导率与厚度), 对环境温度为 75°C 、工作时间为 90 分钟的情形开展实验, 测量得到假人皮肤外侧的温度数据。根据以上条件, 建立数学模型, 计算温度分布。
- 已知除 II 层厚度外各层的参数值 (密度、比热、热传导率与厚度) 与环境温度 (65°C) 确定 II 层的最优厚度, 确保工作 60 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过 47°C , 且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。
- 已知除 II、IV 层厚度外各层的参数值 (密度、比热、热传导率与厚度) 与环境温度 (80°C), 确定 II、IV 层的最优厚度, 确保工作 30 分钟时, 假人皮肤外侧温度不超过 47°C , 且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

2 模型假设

1. 假定热传递沿垂直于皮肤方向进行, 故可以将热防护服-空气-皮肤的系统视为一维系统。
2. 假定在研究各介质之间的传热过程时, 热辐射的影响可以忽略。因为本题高温环境下的热源未确定, 而外壳又可阻挡大部分的辐射。
3. 假定材料界面接触良好, 可忽略热阻, 则满足温度连续条件。
4. 假定可以忽略环境湿度的影响。因为题目未提及相关参数。

5. 假定空气层的热传递以传导为主。因为当面料与皮肤之间空气层厚度小于 6.4 mm，由于空气层间隙太小，从而无法形成对流运动。
6. 假定热防护服的材料是各向同性的。
7. 假定“皮肤外侧”的温度并非严格地就是“皮肤外表皮”处的温度，而是指靠近皮肤外表皮的空气层中某点的温度。因为我们曾使用文献 [7] 中提供的人体皮肤参数进行计算，而在这种条件下，我们发现温度在皮肤两侧的差异并不大，即皮肤“外表皮”的温度远不能达到附件中的 48°C 而是接近 37°C。因此，我们忽略假人皮肤的影响，认为“皮肤外侧”的温度指的是靠近皮肤外表皮的空气层中某点的温度。

3 符号说明

表1列出了本文需要的符号。

表 1: 符号说明

符号	符号描述	单位
ρ	密度	kg/m^3
C	比热容	$J/(kg \cdot ^\circ C)$
T	温度	K
t	时间	s
x	水平坐标	mm
k	热传导率	$J/(m \cdot ^\circ C)$
L	织物厚度	mm
t_{44}	超过 44°C 的时间	min
T_{max}	最高温度	$^\circ C$
sgn	符号函数	

4 问题分析

4.1 问题一的分析

问题一要求根据假人所处外界环境温度、各层的参数和假人皮肤外侧数据建立数学模型，计算温度分布。对此，可将“环境-三层织物-空气-皮肤”视为一个一维系统，从而转化成一维非稳态复合介质热传导问题。

在材料内部，温度的时空分布满足热传导微分方程；在不同材料交界面处，满足热传导衔接条件；在边界面处，满足第一类边界条件。研究对象的左右边界分别为温度为 75°C 的恒温环境和体温控制在 37°C 的假人，初始条件为材料与假人体温保持一致。这样，就构成了一个封闭的热传导定解问题。将整个一维系统进行离散化处理，同时将上述偏微分方程组转化为差分方程式，联立后可推导出温度分布的迭代公式，最终求得温度分布。

4.2 问题二的分析

问题二要求在已知除第 II 层的厚度的各层参数值 (密度、比热、热传导率与厚度)、假人所处外界环境温度和在工作时间的条件下，确定第 II 层的最优厚度，以满足外侧温度不超

过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟的约束条件。

通过分析，可以发现随着 II 层材料厚度的增加，皮肤外侧温度的稳态值不断减小，但达到稳态值所需的时间不断增加，因此 II 层厚度存在一个下界。根据许多研究表明，织物越厚储热能力越强，对皮肤造成的损伤越大，为尽量减少对皮肤的损伤，对于本题来说，最优厚度取下界。则此问题转化为单变量最优化问题，可采用二分法进行搜索求解，约束条件为温度不高于 47°C 且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

4.3 问题三的分析

与问题二对比，问题三在其的基础上增加了一个未知量——第 IV 层的厚度，故可以将此问题可以视为问题二的加强版，但由于这是一个二元目标函数的极值问题，不能像问题二中简单地使用二分法，而可采用遗传算法求解。

在使用遗传算法时，选取第二层和第四层的厚度之和与两个约束条件构成的惩罚项作为个体的适应度函数，寻找该函数在三维平面上的最小值，即织物的厚度最小，人体感觉最舒适。其中在构造适应度函数中的惩罚项时，运用了多项式拟合与插值拟合的方法将曲面平滑化，将离散的数据转化为连续的数据。

5 问题的解答

5.1 问题一的解答

由于热传递沿垂直于皮肤方向进行，故我们将由户外作业专用服与户外作业专用服-皮肤间的空气层中组成的系统视为一维，如图1所示。我们以第 I 层与空气的接触点为坐标原点，以垂直于接触面方向为 x 轴，建立一维坐标系。

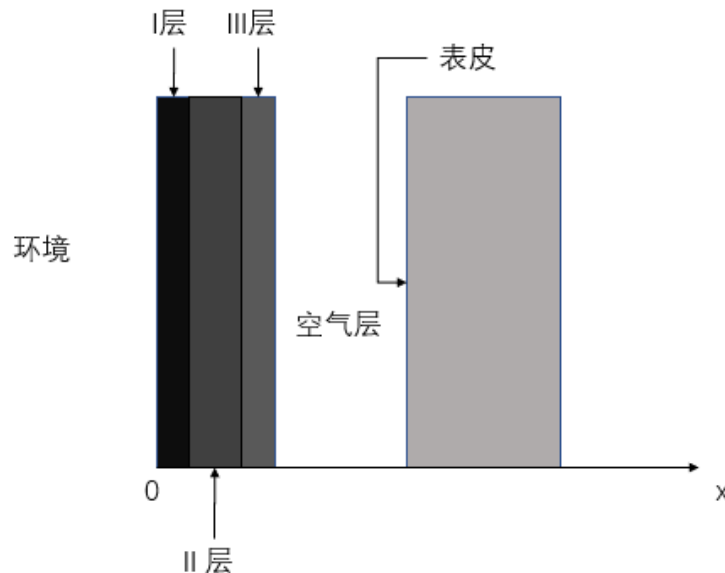


图 1: 专用服-空气层-皮肤系统

5.1.1 模型的建立：专用服内部的热传递

我们视每一层织物均为常物性的均匀各向同性物体，则根据热传导微分方程，可以得出温度分别在第 *I*、*II*、*III* 层内部（不含边界）的温度场控制方程，如公式1、2、3所示

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}), (x, t) \in (0, L_1) \times (0, t_{exp}) \quad (1)$$

$$\rho_2 C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}), (x, t) \in (L_1, L_1 + L_2) \times (0, t_{exp}) \quad (2)$$

$$\rho_3 C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}), (x, t) \in (L_1 + L_2, L_1 + L_2 + L_3) \times (0, t_{exp}) \quad (3)$$

其中， ρ_1, ρ_2, ρ_3 分别为第 *I*、*II*、*III* 层的密度； c_1, c_2, c_3 分别为第 *I*、*II*、*III* 层的比热容； T 为温度，K； t 为时间，s； x 为水平坐标； k_1, k_2, k_3 分别为第 *I*、*II*、*III* 层的热传导率， $W/(m \cdot K)$ ； t_{exp} 为暴露在高温环境中的时间，s； L_1, L_2, L_3 分别为第 *I*、*II*、*III* 层的厚度，mm。

由于在介质热物质跃变处热流必须连续，则在每一层接触面需满足衔接条件，如公式4、5、6、7所示。

$$T_1 |_{x=L_1} = T_2 |_{x=L_1} \quad (4)$$

$$T_2 |_{x=L_1+L_2} = T_3 |_{x=L_1+L_2} \quad (5)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=L_1} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_1} \quad (6)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} |_{x=L_1+L_2} = -k_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_1+L_2} \quad (7)$$

我们假设在 $t = 0_-$ 时刻时，也即将假人放入高温环境前的瞬间， $T(X, 0_-) = 37^\circ\text{C}$ ，而其放入高温空间后，专用服内部温度不发生突变，但左侧边界，即第 *I* 层与空气接触的地方，突变为 75°C 且保持不变。故初始条件为：

$$T(X, 0_+) = T(X, 0_-) = 37^\circ\text{C}, X \in (0_+, L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \quad (8)$$

$$T(0_-, t) = 75^\circ\text{C}, t \in (0_+, t_{exp}) \quad (9)$$

5.1.2 模型的建立：空气中的热传递

瑞利数 Ra 指自然对流和扩散热量、质量传递之比，如公式10所示。其中， g 为重力加速度， β 为热膨胀系数， T 为热力学温度， L 为特征长度， ν 为动粘滞系数， α 为热扩散率。当某种流体的瑞利数低于临界值时，热量传递的主要形式是热传导；当瑞利数超过临界值时热量传递的主要形式是对流。

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T\delta^3}{\alpha\nu} \quad (10)$$

Ra 值的大小与空气层的厚度呈正比，Torvi 利用流动可视化与数值模拟的方法推导出当空气层的厚度达到 6.4mm 时出现自然对流 [6]。根据附件参数可知，空气层的厚度为 0.6-6.4mm，此时，由于空气层间隙太小，从而无法形成对流运动。故这时空气中的热传递以传导为主，其内部传递与边界条件如公式11、12、13所示。

$$\rho_4 C_4 \frac{\partial T_4}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_4 \frac{\partial T_4}{\partial x}) \quad (11)$$

$$T_3 |_{x=L_1+L_2+L_3} = T_4 |_{x=L_1+L_2+L_3} \quad (12)$$

$$-k_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} |_{x=L_1+L_2+L_3} = -k_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=L_1+L_2+L_3} \quad (13)$$

由于假人体内温度恒定为 37°C , 故本文视皮肤表皮右侧温度恒为 37°C 。即:

$$T((L_1 + L_2 + L_3 + L_4)_+, t) \equiv 37^\circ\text{C}, t \in (0, t_{exp}) \quad (14)$$

5.1.3 模型计算

本文将一维系统进行离散化处理。以第 I 层为例, 我们构造一个矩形 $R = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L_1, 0 \leq t \leq t_{exp}\}$, 并将其分割成 $(n-1)*(m-1)$ 个小矩形, 长宽分别为 Δx 和 Δt , 如图2所示。从最下面的行开始, 其初始值为式8、9。

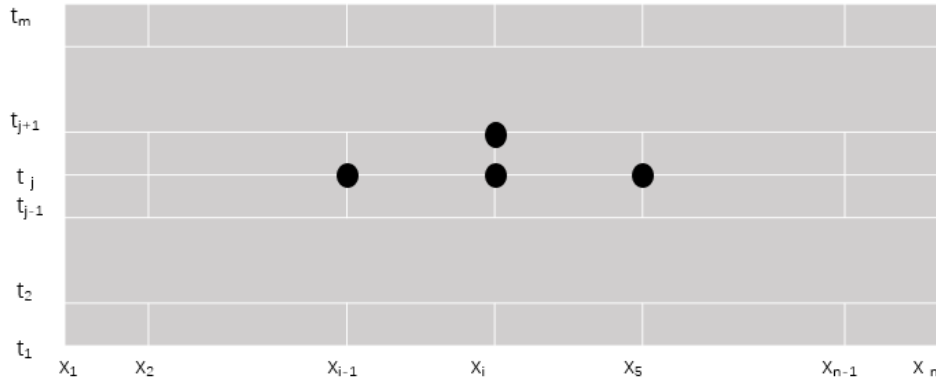


图 2: 求解网络

根据公式1、2、3, 在我们将系统进行离散化处理后, 也将微分方程转化为差分方程:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{k}{\rho C_p} \frac{T_{i+1}^j + T_{i-1}^j - 2T_i^j}{(\Delta x)^2} + O(\Delta^2 x) \quad (15)$$

接下来将 $O(\Delta t)$ 、 $O(\Delta^2 x)$ 去掉, 方程15可近似为:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + r(T_{i+1}^j + T_{i-1}^j - 2T_i^j) \quad (16)$$

$$r = \frac{k \Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2} \quad (17)$$

令 $s = 1 - 2r$, 则根据上述公式可解得:

$$T_i^j = sT_{i-1}^j + r(T_{i-1}^{j-1} + T_{i-1}^{j+1}) \quad (18)$$

在两种材料的交界处，使用边界条件计算：

$$T_i^j = \frac{k_1 T_{i-1}^j + k_2 T_{i+1}^j}{k_1 + k_2} \quad (19)$$

对于其他织物层和空气层，也采用同样的方法求解。

证明差分公式的稳定性是十分重要的。如果计算中某个阶段引入的误差不会扩大整个结果的误差，那么公式是稳定的。显式前向差分公式是稳定的当且仅当 r 满足 $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ ，即步长 Δt 必须满足 $\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 \rho C_p}{2k}$ 。因此，我们在实验中选择 $\Delta t = 0.0025s$, $\Delta x = 0.1mm$ 。

由于假人的皮肤厚度等参数不可知，故本文假设假人的皮肤为极薄的一层结构，其右侧恒为 37°C 。通过分析题目所给的“皮肤外侧”的测量值，我们认为其并非指“皮肤外表皮”，其 x 轴坐标还应比“皮肤外表皮”的坐标略小一些。否则，“皮肤外侧”将收敛到 37°C 而非 48°C 。

联立公式8、9、14、18、19，我们得出了 $(0,15.2mm) \times (0,5400s)$ 的矩阵，和题目附件数据对比后，根据假设7得出皮肤外侧的 x 轴坐标为 $13mm$ ，下图为计算值和实际值的对比图。可以看出，其收敛的温度完全一致，但速度有微小差别，在误差范围内。

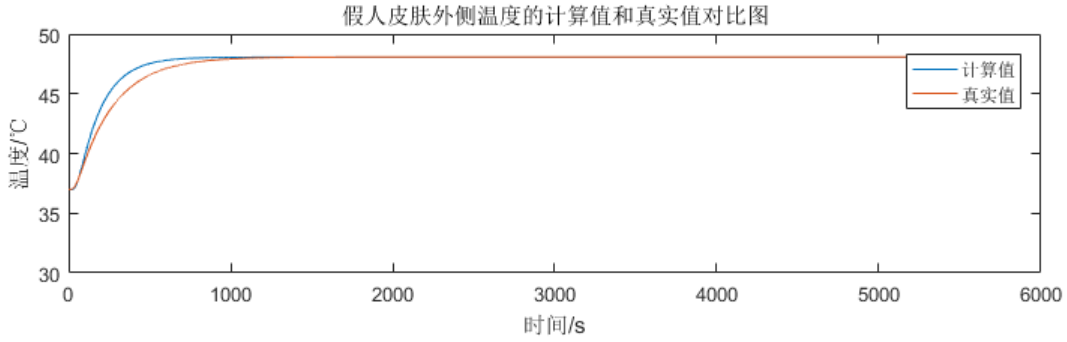


图 3: 计算值与实际值对比图

根据矩阵数据，我们得出 x 轴不同位置的温度-时间图像：

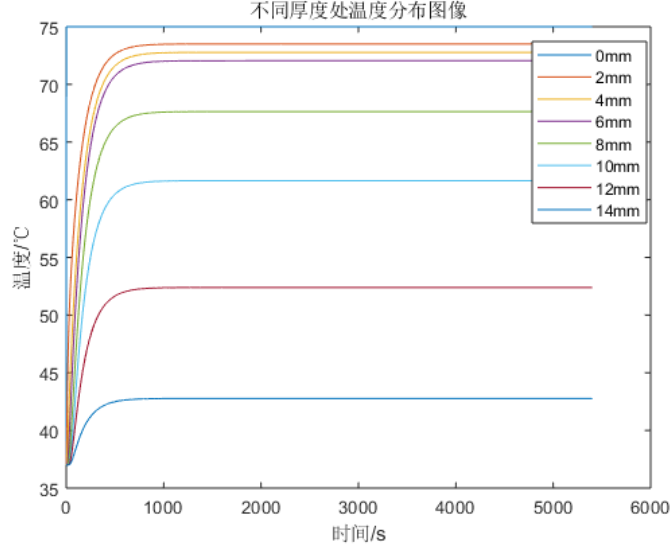


图 4: x 轴不同位置的温度-时间图像

三维可视化后如图5所示, 可认为模型的表现很好。

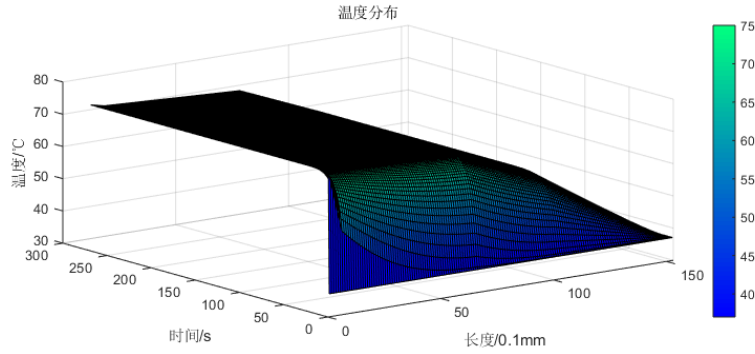


图 5: 温度分布三维图像

导出的 excel 文件位于支撑材料中。

5.2 问题二的解答

使用问题 1 的模型分析可知, II 层越厚, 则皮肤表面的温度越低, 根据 Henriques 提出的一阶阿伦尼乌斯皮肤烧伤方程 [2] 可知 (式20), II 层越厚, 皮肤损伤程度越低。但若其太厚, 则会使得服装过于沉重, 不易穿戴, 而且根据很多研究表明, 织物越厚储热能力更强, 在某种程度上也会对皮肤造成损伤, 且透气性与厚度成负相关。

$$\Psi = \int_0^t P e^{-\frac{\Delta E}{RT(x,\tau)}} d\tau \quad (20)$$

在题目的限定范围条件下, 皮肤的损伤程度 Ψ 维持在一个较低值, 则我们可以考虑在此条件下, 最小化衣物储热能力与最大化透气性, 也即最小化 II 层材料厚度 L_2 。

故问题二为一个最优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & L_2 \\ \text{s.t.} \quad & T_{max} \leq 47^\circ\text{C} \\ & t_{44} \leq 5\text{min} \end{aligned}$$

其中， L_2 为 II 层材料厚度， t_{44} 为皮肤外侧超过 44°C 的时间， T_{max} 为皮肤外侧所达到的最高温度。这是一个单变量优化问题，所求变量为 II 层厚度。

5.2.1 问题二模型分析

首先，我们对 II 层材料不同厚度下，皮肤外侧温度的变化作定性分析。我们选定 II 层厚度分别为 6mm, 11mm, 16mm，环境温度为 65°C ，工作时间为 60 分钟，代入问题一模型分析，可求得三种厚度下皮肤外侧温度变化曲线，如图6。

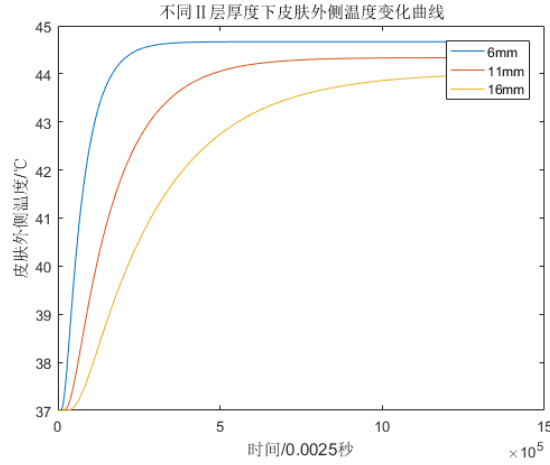


图 6: 不同 II 层厚度下皮肤外侧温度变化曲线

由图可以看出，当单层材料的厚度增加时，皮肤外侧温度的稳态最大值减小，但过渡到稳态值所需要的时间增加。不难理解由于厚度增加，热传导效应减弱，导致温度上升缓慢，稳态最大值降低。

由此，我们可以推断出， T_{max} 和 t_{44} 与 II 层厚度的关系应为一单调函数，II 层材料厚度一定存在一个下界，此时边界条件为皮肤外侧温度稳态值恰为 47°C 或皮肤外侧温度在 44°C 以上的时间不超过 5 分钟。

利用有限差分法，以 1mm 间隔为精度作出 T_{max} 和 t_{44} 与 II 层厚度的关系曲线如下图78：

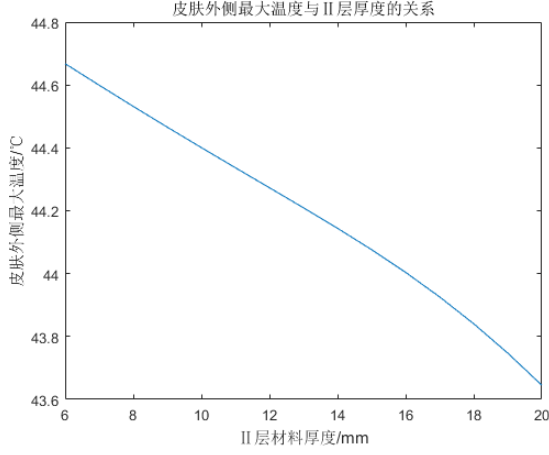


图 7: T_{max} 与 II 层厚度的关系

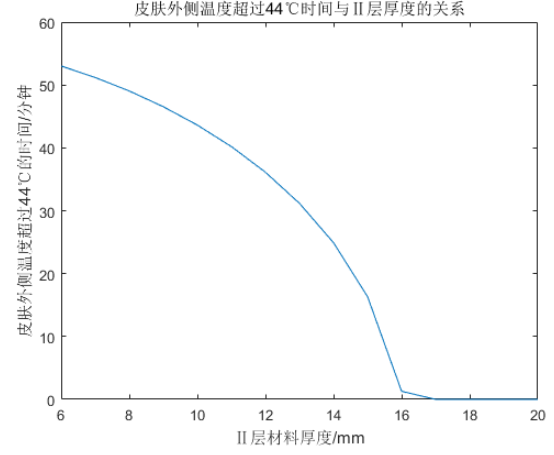


图 8: t_{44} 与 II 层厚度的关系

分析图像可知 T_{max} 和 t_{44} 与 II 层厚度的关系确为一单调函数，且单调递减。

5.2.2 问题二模型求解

为了快速求解出最优厚度，同时注意到 T_{max} 和 t_{44} 对厚度具有单调性，我们采用二分法加快求解速度。算法如下：

Algorithm 1 二分法

Input: 左边界，右边界，精度 $0.1mm$

Output: 满足约束条件下使得 L_2 最小

```

1: while  $|right - left| \geq 0.1$  do
2:   if  $T_{max}(x_0) < 47^\circ C$  且  $t_{44}(x_0) < 5min$  then
3:      $left \leftarrow x_0$ 
4:   else
5:      $right \leftarrow x_0$ 
6:   end if
7:    $X_0 \leftarrow (left + right)/2$ 
8: end while

```

取精度为 $0.1mm$ ，二分法搜索得到的 II 层厚度最优解为 $15.8mm$ 。

5.3 问题三的解答

问题三是一个二元目标函数的极值问题，本篇文章使用遗传算法在此较小范围内求出极小值。遗传算法的流程图如下图所示, 详细描述如算法2所示。

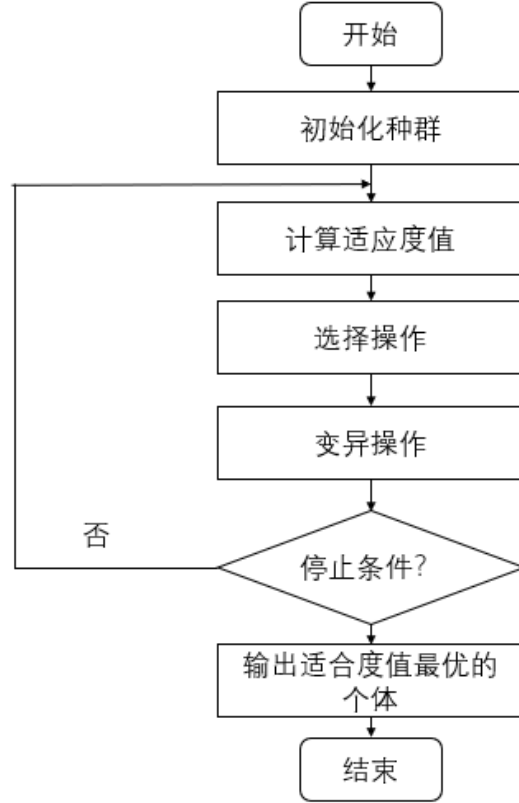


图 9: 遗传算法流程图

遗传算法中适应度函数定义为在满足约束条件下第 II 层厚度与第 IV 层厚度之和，关于温度的两个约束条件以惩罚项的形式添加到适应度函数中去。如式21所示：

$$\min \quad L_2 + L_4 + \alpha(\text{sgn}(T_{max} - 47) + 1) + \alpha(\text{sgn}(t_{44} - 5) + 1) \quad (21)$$

Algorithm 2 遗传算法求解最优参数

Input: 适应度函数

Output: 最优参数

- 1: 初始化 $cross_rate, mutate_rate$, 随机产生第一代种群
 - 2: **while** 子代数目未达到上限 **do**
 - 3: 根据适应度的大小选出优秀个体
 - 4: **if** $random(0, 1) \leq cross_rate$ **then**
 - 5: 对每对个体执行交叉操作
 - 6: **end if**
 - 7: **if** $random(0, 1) \leq mutate_rate$ **then**
 - 8: 对每对个体执行变异操作
 - 9: **end if**
 - 10: **end while**
-

其中约束条件一为 $T_{max} \leq 47^\circ C$ ，我们首先求出每组厚度对应情况下 30 分钟内假人皮肤外侧温度的最大值，记为 T_{max} ， T_{max} 是一个以第 II 层厚度为横坐标，以度 IV 层厚度为

纵坐标的二维矩阵。运用多项式拟合的方法拟合 T_{max} 所代表的曲面函数，经过多次实验后发现选取自变量 x 的阶次为 1，自变量 y 的阶数为 2 时的误差平方和近似为 0，决定系数与校正决定系数均为 1，因此可以用拟合得到的函数来近似表示 T_{max} ，从而实现 T_{max} 的连续化。

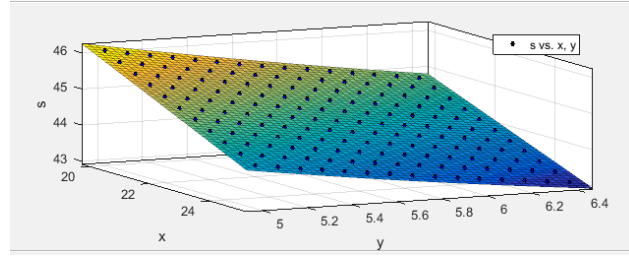


图 10: 不同厚度组合下最大温度的拟合曲面

拟合结果如式22所示：

$$T_{max}(x, y) = 65.61 - 0.5931 * x - 2.787 * y + 0.03942 * x * y + 0.09299 * y^2 \quad (22)$$

拟合结果的评价公式如下所示：

$$SSE = (Y_{predict} - Y_{accurate})^2; \quad (23)$$

$$R - square = R^2 = 1 - \frac{\sum (Y_{actual} - Y_{predict})^2}{\sum (Y_{actual} - Y_{mean})^2} \quad (24)$$

$$Adjusted \ R - square = R_{adjusted}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - p - 1} \quad (25)$$

其中 $Adjusted \ R - square$ 公式中的参数 n 为样本数量， p 为特征数量。

表 2: T_{max} 的拟合效果评价

SSE	$R - square$	$Adjusted R - square$	$RMSE$
0.002377	1	1	0.003854

约束条件二为假人皮肤外侧温度超过 $44^{\circ}C$ 的时间不超过 5 分钟。同样的，我们需要求出不同厚度组合下假人皮肤外侧温度超过 $44^{\circ}C$ 的时间，记为 t_{44}, t_{44} 也是一个以第 II 层厚度为横坐标，以度 IV 层厚度为纵坐标的二维矩阵。当运用多项式拟合的方法拟合 t_{44} 所代表的曲面函数时，发现即使我们选取自变量 x, y 的最高阶数进行拟合，拟合的效果仍然很差。因此，我们采取网格插值拟合的方法近似求解 t_{44} ，将第 II 层厚度等分为 500 格，将 IV 层厚度等分为 140 格，每一小格的长与宽均为 0.01mm。这表示对于网格上的每个点， $t_{44}(x, y)$ 都是已知的。由图11与图12对比可以看出，插值前后，网格的疏密程度对比的十分明显。虽然网格已经足够密集，但是 t_{44} 仍然是离散函数，为了使其能够用到适应度函数里，我们将遗传算法中将二进制染色体转换为十进制的转换函数的返回值改为原返回值四舍五入到小数点后两位，如此，便能够得到每一个个体的染色体所对应的适应度函数的值。

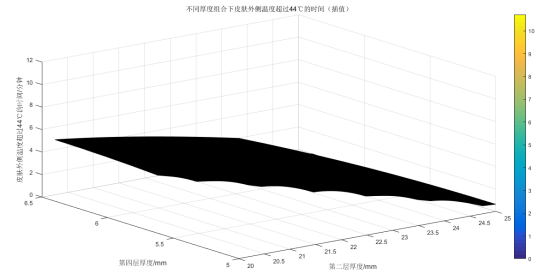
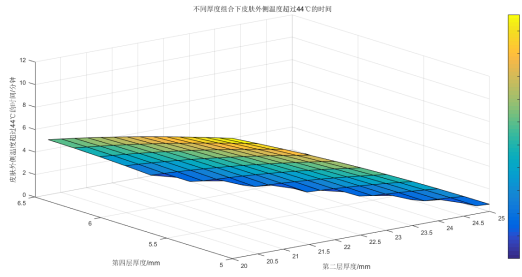


图 11: 网格插值前超过 44°C 的总时间分布 图 12: 网格插值后超过 44°C 的总时间分布

设定最多子代数为 200，初始种群个数为 100，进行计算。作出染色体的初始位置和最终位置如图13和图14所示。从图中可以看出染色体大致分布在高低两个平面上，不满足约束条件的个体由于惩罚项的存在而变得很大，分布在高的平面上；满足约束条件的个体分布在低的平面上。从满足约束条件的个体中选取总厚度最小的组合作为最优解。

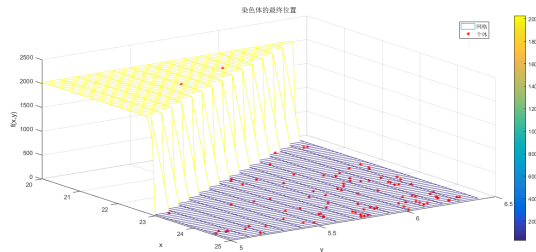
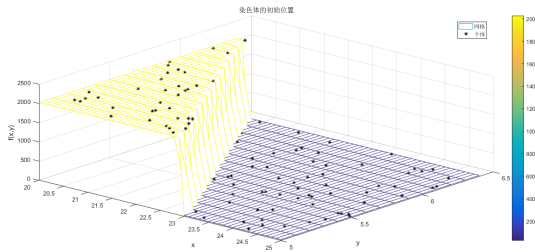


图 13: 染色体的初始位置

图 14: 染色体的最终位置

每一代个体的最优适应度和平均适应度的图像如图15所示。每一代的最优个体适应度上下波动，而适应度的平均值基本保持在相同水平。

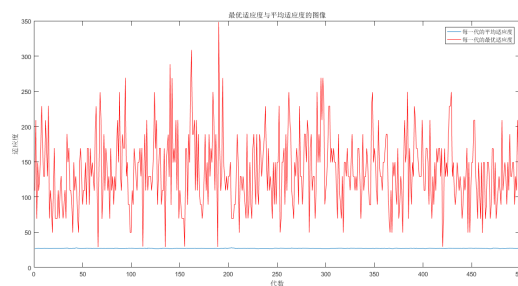


图 15: 每一代个体最优适应度和平均适应度的图像

最后计算所得最优解为：第 II 层的厚度为 20.77mm，第 IV 层的厚度为 6.18mm。

6 模型总结

6.1 模型优点

1. 对皮肤外表皮处的温度进行了详细地讨论，并给出了合理假设。而且，计算所得的皮肤外侧温度能够较好地与实际值相符；
2. 从已知条件出发，合理假设，将系统抽象为一维模型，简洁明了；
3. 巧妙使用罚函数，将有约束最优化问题转化为求解无约束的最优问题；
4. 使用遗传算法进行最优化，能够从双变量推广到多变量，有较好的推广性与实际意义；

6.2 模型缺点

1. 由于缺少 h 值，无法使用第三类边界条件，只能使用第一类边界条件，造成对左侧边界的考虑不够细致；
2. 由于题目所给信息有限，我们对于高温作业专用服的评价较为单一，仅考虑厚度影响，而未考虑湿度等因素。

参考文献

- [1] Du, N., Fan, J., Wu, H., Sun, W.: Optimal porosity distribution of fibrous insulation. *International Journal of Heat Mass Transfer* 52(19-20), 4350–4357 (2009)
- [2] FC, H.: Studies of thermal injury: Ii. the relative importance of time and surface temperature in the causation of cutaneous burns. *American Journal of Pathology* 23(5), 431–549 (1947)
- [3] Ghazy, A., Bergstrom, D.J.: Numerical simulation of heat transfer in firefighters' protective clothing with multiple air gaps during flash fire exposure. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications* 61(8), 569–593 (2012)
- [4] Mell, W.E., Lawson, J.R.: A heat transfer model for firefighters' protective clothing. *Fire Technology* 36(1), 39–68 (2000)
- [5] Mercer, G., Sidhu, H.: Mathematical modelling of the effect of fire exposure on a new type of protective clothing. *ANZIAM Journal* 49(0) (2008)
- [6] Torvi, D.A., Dale, J.D., Faulkner, B.: Influence of air gaps on bench-top test results of flame resistant fabrics. *Journal of Fire Protection Engineering* 10(1), 1–12 (1999)
- [7] 卢琳珍, 徐定华, 徐映红: 应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测. *纺织学报* (1), 111–118 (2018)
- [8] 徐定华: 纺织材料热湿传递数学模型及设计反问题. 科学出版社 (2014)
- [9] 潘斌: 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题. Ph.D. thesis, 浙江理工大学 (2017)

附录

A 模型求解代码

A.1 用差分法计算温度分布

```
1 %% I. 差分法计算温度分布
2 %长度单位统一为米
3 %时间单位统一为秒
4 L0 = 0.0152; %织物总厚度
5 total_time = 5400; %测试总时间
6 dt = 0.0025;
7 dx = 0.0001;
8 num1 = L0/dx;
9 num2 = total_time/dt;
10 %% II. 系数的计算
11 %系数: c = k/密度/比热
12 c1 = 1.98499*10^(-7);
13 c2 = 2.043973*10^(-7);
14 c3 = 1.761611*10^(-7);
15 c4 = 1.5478*10^(-6);
16 r1 = c1*dt/(dx^2);
17 r2 = c2*dt/(dx^2);
18 r3 = c3*dt/(dx^2);
19 r4 = c4*dt/(dx^2);
20 s1 = 1-2*r1;
21 s2 = 1-2*r2;
22 s3 = 1-2*r3;
23 s4 = 1-2*r4;
24 k1 = 0.082;
25 k2 = 0.37;
26 k3 = 0.045;
27 k4 = 0.028;
28 T = zeros(153,2160001); %下标从1开始
29 T(:,1) = 37;
30 T(153,:) = 37;
31 T(1,2:2160001) = 75;
32 %各种织物的边界
33 boundary1 = 7,boundary2 = 67,boundary3 = 103;
34 %% III. 迭代计算温度
35 for j=2:num2+1 %时间
36 for i=2:num1 %长度
37 if i<boundary1
38 T(i,j)=s1*T(i,j-1)+r1*(T(i-1,j-1)+T(i+1,j-1));
39 end
```

```

40 if i>boundary1 & i<boundary2
41 T(i,j)=s2*T(i,j-1)+r2*(T(i-1,j-1)+T(i+1,j-1));
42 end
43 if i>boundary2 & i<boundary3
44 T(i,j)=s3*T(i,j-1)+r3*(T(i-1,j-1)+T(i+1,j-1));
45 end
46 if i>boundary3
47 T(i,j)=s4*T(i,j-1)+r4*(T(i-1,j-1)+T(i+1,j-1));
48 end
49 end
50 %计算边界的数值
51 T(boundary1,j) = (k1*T(boundary1-1,j)+k2*T(boundary1+1,j))/(k1+k2
);
52 T(boundary2,j) = (k2*T(boundary2-1,j)+k3*T(boundary2+1,j))/(k3+k2
);
53 T(boundary3,j) = (k3*T(boundary3-1,j)+k4*T(boundary3+1,j))/(k3+k4
);
54 end
55 T=T';

```

A.2 温度分布图像的绘制

```

1 %做不同厚度处温度的分布图像
2 new_one = zeros(5401,8);
3 a=[1 21 41 61 81 101 121 141]
4 for i=1:8
5 new_one(:,i)=result(:,a(i));
6 plot(0:5400,new_one(:,i))
7 hold on
8 end
9 %作出温度分布的三维图像
10 new = zeros(271,153);
11 for i=1:271
12 j=1+(i-1)*20;
13 new(i,:)=newT(j,:);
14 end
15 load('new.mat')
16 y=1:271;
17 x=1:153;
18 [X, Y] = meshgrid(x,y);
19 surf(X, Y, new)
20 title('温度分布')
21 xlabel('长度/0.1mm')
22 ylabel('时间/s')

```

```

23 xlabel('温度/摄氏度')
24 colorbar

```

A.3 求解二、四层厚度的最优解

A.3.1 差分法计算温度最大值及超过 44 摄氏度的时间

```

1 %% III、II、IV层厚度的最优化之求解Tmax和t_44
2 %环境温度 80 摄氏度
3 %总时间 30 分钟
4 %II 层: 0.6-25mm IV 层: 0.6-6.4mm I+III 层: 4.2mm
5 %% 初始条件设置
6 Te=80; %环境温度
7 total_time = 1800; %总时间
8 dt = 0.0025;
9 dx = 0.0001;
10 c1 = 1.98499*10^(-7);
11 c2 = 2.043973*10^(-7);
12 c3 = 1.761611*10^(-7);
13 c4 = 1.5478*10^(-6);
14 r1 = c1*dt/(dx^2);
15 r2 = c2*dt/(dx^2);
16 r3 = c3*dt/(dx^2);
17 r4 = c4*dt/(dx^2);
18 s1 = 1-2*r1;
19 s2=1-2*r2;
20 s3=1-2*r3;
21 s4=1-2*r4;
22 k1=0.082;
23 k2=0.37;
24 k3=0.045;
25 k4=0.028;
26 L1=1:20; %单位mm
27 L2=1:6; %单位mm
28 %结果
29 Tmax=zeros(20,6);
30 t_44=zeros(20,6);
31 %% a为间隔
32 for u=1:20
33 for v=1:6
34 L0 = 0.0042+(u+v)*0.001; %总的厚度, 单位m
35 num1 = L0/dx;
36 num2 = total_time/dt;
37 m = round(num1+1);

```

```

38 n = num2+1;
39 T = zeros(n,m);           %下标从 1 开始, 时间 * 长度
40 T(:,1) = Te;              %所有的时间, 初始位置温度
41 T(:,m) = 37;              %所有时间, 最左侧温度
42 T(1,2:m) = 37;           %时间为 0 时, 除 0 处所有点的温度
43 boundary1 = 7, boundary2 = (0.6+u)*10+1, boundary3 = (4.2+u)*10+1;
44 for j=2:n                  %时间
45     for i=2:(m-1)          %长度
46         if i<boundary1
47             T(j,i)=s1*T(j-1,i)+r1*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
48         end
49         if i>boundary1 & i<boundary2
50             T(j,i)=s2*T(j-1,i)+r2*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
51         end
52         if i>boundary2 & i<boundary3
53             T(j,i)=s3*T(j-1,i)+r3*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
54         end
55         if i>boundary3
56             T(j,i)=s4*T(j-1,i)+r4*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
57         end
58     end
59     %计算边界的数值
60     T(j,boundary1) = (k1*T(j,boundary1-1)+k2*T(j,boundary1+1))/(k1+k2);
61     T(j,boundary2) = (k2*T(j,boundary2-1)+k3*T(j,boundary2+1))/(k3+k2);
62     T(j,boundary3) = (k3*T(j,boundary3-1)+k4*T(j,boundary3+1))/(k3+k4);
63 end
64 %皮肤外侧的位置
65 skin_pos = round((L0-0.0022)/dx+1);
66 for k=1:n
67     if T(k,skin_pos)>=44
68         time=(n-k)/400/60;           %单位分钟
69         t_44(u,v)=time;
70         break;
71     end
72 end
73 Tmax(u,v)=T(n,skin_pos);
74 end
75 end

```

A.3.2 遗传算法求解二、四层的最优厚度


```

1 %% III. 遗传算法寻找最优厚度
2 % population_size: 输入种群大小
3 % chromosome_size: 输入染色体长度
4 % generation: 输入迭代次数
5 % cross_rate: 输入交叉概率
6 % mutate_rate: 输入变异概率
7 function ga()
8     population_size=100;
9     generation=500;
10    cross_rate=0.3;
11    mutate_rate=0.05;
12    chromosome_size=50;
13    iter=1;
14    %% 生成初始种群
15    population_ini=init(population_size,chromosome_size);
16    [m,n]=size(population_ini);
17    %% 画出网格图
18    %变量范围，此处为两个变量：II层和IV层的厚度
19    xmin=20;
20    xmax=25;
21    ymin=5;
22    ymax=6.4;
23    [x,y]=meshgrid(xmin:0.1:xmax,ymin:0.1:ymax);
24    x_mesh=x;
25    y_mesh=y;
26    z_mesh=target(x,y);
27    figure(1);
28    mesh(x_mesh,y_mesh,-z_mesh);%画出三维图形
29    hold on;
30    grid on;
31    %% 计算适应度，并画出初始种群图形
32    x=trans2to10(population_ini(:,1:25),xmin,xmax);
33    y=trans2to10(population_ini(:,26:50),ymin,ymax);
34    fit_func=target(x,y);
35    plot3(x,y,-fit_func,'k*');
36    title('染色体的初始位置');
37    xlabel('x');
38    ylabel('y');
39    zlabel('f(x,y)');
40
41    %循环操作
42    fitness_average=[];
43    vx=[];
44    while iter<=generation
45        iter=iter+1;

```

```

46 pop_temp=roulette(population_ini,fit_func);
47 % 交叉操作
48 population_ini=crossover(pop_temp,cross_rate);
49 % 变异操作
50 M=rand(m,n)<=mutate_rate;
51 population_ini=population_ini-2.*(population_ini.*M)+M;
52 x=trans2to10(population_ini(:,1:25),xmin,xmax);
53 y=trans2to10(population_ini(:,26:50),ymin,ymax);
54 fit_func=target(x,y);
55 [best_fitness,best_individual]=max(fit_func);
56 population_ini(1,:)=population_ini(best_individual,:);
57 fit_mean=mean(fit_func);
58 vx=[vx best_fitness];
59 fitness_average=[fitness_average fit_mean];
60 end
61 %% 结果的显示
62 disp(sprintf('最优解[x,f(x)]:[%.4f,%.4f,%.4f]',x(best_individual)
    ,y(best_individual),-best_fitness));
63 figure(2);
64 mesh(x_mesh,y_mesh,-z_mesh);
65 hold on;
66 grid on;
67 plot3(x,y,-fit_func,'r*');
68 title('染色体的最终位置');
69 xlabel('x');
70 ylabel('y');
71 zlabel('f(x,y)');
72
73 figure(3);
74 plot(-vx);
75 title('最优适应度与平均适应度的图像');
76 xlabel('代数');
77 ylabel('适应度');
78 hold on;
79 plot(-fitness_average,'r');
80 hold off;
81 end
82 %% 将染色体转换至十进制的数值
83 function x=trans2to10(v,xymin,xymax)
84 v=fliplr(v);
85 [s,c]=size(v);
86 aux=0:1:c-1;
87 aux=ones(s,1)*aux;
88 x1=sum((v.*2.^aux)');
89 x=xymin+(xymax-xymin)*x1./(2^c-1);

```

```

90 %由于数据是经过插值拟合得到的，因此四舍五入保留两位小数
91 for i=1:s
92 x(i)=roundn(x(i),-2);
93 end
94 end
95 %%
96 %% 初始化种群
97 % population_size: 输入种群大小
98 % chromosome_size: 输入染色体长度
99 function v=init(population_size,chromosome_size)
100 v=round(rand(population_size,chromosome_size));
101 end
102 %%
103 %% 转轮盘
104 function pop_temp=roulette(population_ini,fit)
105 N=size(population_ini);
106 fitmin=abs(min(fit));
107 fit=fitmin+fit;
108 S=sum(fit);
109 for i=1:N
110 SI=S*rand(1);
111 for j=1:N
112 if SI<=sum(fit(1:j))
113 pop_temp(i,:)=population_ini(j,:);
114 break
115 end
116 end
117 end
118 end
119 %% 适应度函数
120 function fun=target(x,y)
121 % 网格内插前
122 x1=20:0.5:25;
123 y1=5:0.1:6.4;
124 x_new=repmat(x1,15,1);
125 x_new=x_new';
126 y_new=repmat(y1',1,11);
127 y_new=y_new';
128 z=result;
129 % 网格内插后
130 F = griddedInterpolant(x_new,y_new,z);
131 X = linspace(min(x_new(:)),max(x_new(:)),501);
132 Y = linspace(min(y_new(:)),max(y_new(:)),141);
133 [X,Y] = meshgrid(X,Y);
134 Z = F(X,Y);

```

```

135 fun=-(x+y+1000*(sign(F(x,y)-5)+1)+1000*(sign(65.61-0.5931*x
      -2.787*y+0.03942*x.*y+0.09299 *y.^2-47)+1));
136 end
137 %% 交叉操作
138 function v=crossover(pop_temp,cross_rate)
139 [N,L]=size(pop_temp);
140 C(:,1)=rand(N,1)<=cross_rate;
141 I=find(C(:,1)==1);
142 %两两配对进行交叉操作
143 for i=1:2:size(I)
144 if i>=size(I)
145 break;
146 end
147 %找到交叉点
148 site=fix(1+L*rand(1));
149 temp=pop_temp(I(i,1),:);
150 pop_temp(I(i,1),site:end)=pop_temp(I(i+1,1),site:end);
151 pop_temp(I(i+1,1),site:end)=temp(:,site:end);
152 end
153 v=pop_temp;
154 end

```

A.4 二分法求解第 II 层的最优厚度

```

1 testvalue=zeros(1,10);%保存每次分划的数值
2 Tmax=zeros(1,10);      %保存每次循环时Tmax温度
3 t44=zeros(1,10);       %保存每次循环时t44时间
4 dt = 0.0025;
5 dx = 0.0001;
6 c1 = 1.98499*10^(-7);
7 c2 = 2.043973*10^(-7);
8 c3 = 1.761611*10^(-7);
9 c4 = 1.5478*10^(-6);
10 r1 = c1*dt/(dx^2);
11 r2 = c2*dt/(dx^2);
12 r3 = c3*dt/(dx^2);
13 r4 = c4*dt/(dx^2);
14 s1 = 1-2*r1;
15 s2=1-2*r2;
16 s3=1-2*r3;
17 s4=1-2*r4;
18 k1 = 0.082;
19 k2=0.37;
20 k3=0.045;

```



```

21 k4=0.028;
22 total_time = 3600;
23 flag=1;
24 amin=6;      %二分法区间下界，初始为0.6mm
25 amax=250;    %二分法区间上界，初始为25mm
26 count=1;
27
28 while flag==1
29     a=round((amin+amax)/2);    %取区间中值作为判断条件
30     L0 = 0.0097+a*0.0001;
31     num1 = L0/dx;
32     num2 = total_time/dt;
33
34     T = zeros(1440001,98+a);    %下标从1开始
35     T(:,1) = 65;
36     T(:,98+a) = 37;
37     T(1,2:(97+a)) = 37;
38
39     boundary1 = 7;boundary2 = 7+a,boundary3 = 43+a;
40     for j=2:num2+1            %时间
41         for i=2:(97+a)        %长度
42             %计算材料内温度分布
43             if i<boundary1
44                 T(j,i)=s1*T(j-1,i)+r1*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
45             end
46             if i>boundary1 & i<boundary2
47                 T(j,i)=s2*T(j-1,i)+r2*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
48             end
49             if i>boundary2 & i<boundary3
50                 T(j,i)=s3*T(j-1,i)+r3*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
51             end
52             if i>boundary3
53                 T(j,i)=s4*T(j-1,i)+r4*(T(j-1,i-1)+T(j-1,i+1));
54             end
55         end
56         %计算边界的温度分布
57         T(j,boundary1) = (k1*T(j,boundary1-1)+k2*T(j,boundary1+1))/(k1+k2);
58         T(j,boundary2) = (k2*T(j,boundary2-1)+k3*T(j,boundary2+1))/(k2+k3);
59         T(j,boundary3) = (k3*T(j,boundary3-1)+k4*T(j,boundary3+1))/(k3+k4);
60     end
61
62     testvalue(1,count)=a;

```

```

63
64 for k=1:1440001
65 if T(k,75+a)>=44
66 t44(1,count)=k;
67 break
68 end
69 end
70
71 if t44(1,count)==0
72 t44(1,count)=1440001;
73 end
74 Tmax(1,count)=T(1440001,75+a);
75 %更新分划区间
76 if (t44(1,count)>1320000)&(Tmax(1,count)<47)
77 amax=a;
78 else amin=a;
79 end
80 count=count+1;
81 %判断终止条件，跳出循环
82 if (amax-amin)==1
83 flag=0;
84 end
85
86 end

```