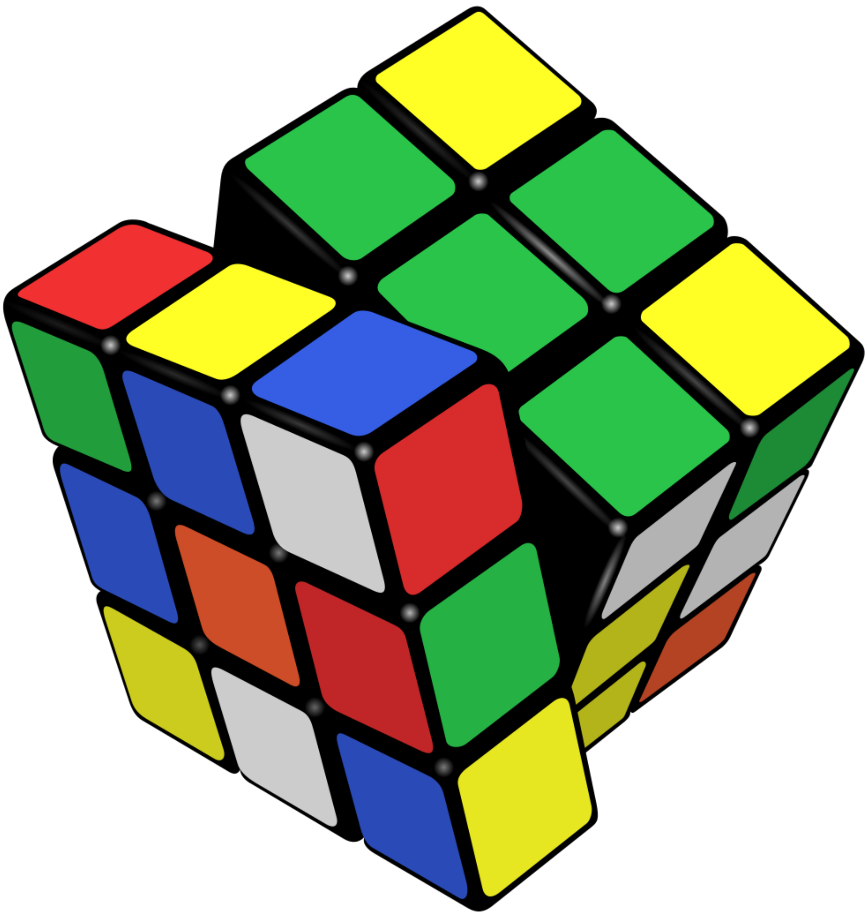
Note of Group Theory

https://charlotte1816.github.io/

更新日：2024 年 12 月 21 日

概要

本稿は，群論の物理学への応用を念頭に置いて執筆された，群論の基本的な内容をまとめたノートである．群を学ぶ動機として，しばしば 5 次方程式を冪根で解く公式が存在しないことを示せる「Garois 理論」を理解することが挙げられる．しかし，本稿では，群の「対称性を表現するもの」としての性質を主に考える．物理学において物理系の対称性を考えることは最も基本的なことであるから，群論は必修事項である．



目次

更新日：2024 年 12 月 21 日

1　基本事項

(1.0.1)　このセクションでは，群の概念の基本的な部分について解説する．

1.1　群の定義と例

(1.1.1)　X が集合であるとき，写像 $\phi : X \times X \to X$ のことを集合 X 上の**演算**と呼ぶ．以降は特に断らない限り，$\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く．

定義 1.1.1. G を空集合ではない集合とする．G 上の**積 (product)** と呼ばれる演算が定義されていて，次の性質を満たすとき，G を**群 (group)** と呼ぶ：

- **単位元 (identity** と呼ばれる元 $e \in G$ があり，すべての $a \in G$ に対し，$ae = ea = a$ となる．
- すべての $a \in G$ に対し，$b \in G$ が存在し，$ab = ba = e$ となる．この元 b は a の**逆元 (inverse)** と呼ばれ，a^{-1} と書く．
- すべての $a, b, c \in G$ に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ (結合法則)．

(1.1.2)　群とは要するに，

1 つの演算が定義されていて順当な性質を満たしている構造物

のことである．

(1.1.3)　a, b が群 G の元で，$ab = ba$ なら a, b は**可換である (commutative)** という．G の任意の元 a, b が可換なら，G を**可換群**，あるいは**アーベル群 (abelian group)** と呼び，そうでない群を**非可換群**と呼ぶ[*1]．

Notation 1.1.1. 単位元は 1 と書いたり，より明示的に 1_G と書いたりすることも多い．可換群の場合は積のことを「和」と呼ぶこともある．またこの場合，群の積を ab ではなく $a + b$ と書いて，単位元を 0 とか 0_G と書くことも多い．

定義 1.1.2. G が群であるとき，その元の個数 $|G|$ を G の**位数 (order)** と呼ぶ．位数が有限な群のことを**有限群 (finite group)** と呼ぶ．有限群でない群を**無限群 (infinite group)** と呼ぶ．

Notation 1.1.2. 群 G と $a \in G$，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$a^0 = 1, \quad \overbrace{a \cdots a}^{n} = a^n, \quad a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

と定義する．なお $n, m \in \mathbb{Z}$ なら，$a^{n+m} = a^n a^m$，$(a^n)^m = a^{nm}$ が成り立つ．

[*1] 可換群を commutative group と呼んでも良いとは思うが，実際そのように呼んでいる教科書は見たことがないので，論文を書くときなどは abelian group と呼ぶ方が良いだろう．

(1.1.4) 群の簡単な例を見て，上の定義を確認しておこう：

例 1.1.1. G を 2 つの元 a, b よりなる集合 $G = \{a, b\}$ とする．これらの元の積を

$$a \cdot a = a, \quad a \cdot b = b, \quad b \cdot a = b, \quad b \cdot b = a$$

と定義する．まとめると表 1.1 のようになる．なお 4 つの積を (行の元)×(列の元) と表す．このような表のことを**群表 (group table)** と呼ぶ．この G は明らかに位数 2 の有限群であることが分かる．また G は可換群でもある．

	a	b
a	a	$a \cdot b = b$
b	b	a

表 1.1: 群 $G = \{a, b\}$ の群表

(1.1.5) 群の定義から分かる性質というものは，当然すべての群に対しても成り立つ．具体的な群に特有の性質も重要だが，群一般に対して議論をすることで見通しがよくなる．

例 1.1.2. X を集合とするとき，X から X への全単射写像 $\sigma : X \to X$ のことを X の**置換 (permutation)** と呼ぶ．σ, τ を X の置換とするとき，その積 $\sigma\tau$ を写像としての合成 $\sigma \circ \tau$ と定義する．X の置換全体の集合は，この積により明らかに群になる．

定義 1.1.3. X の置換全体からなる群のことを X の**置換群 (permutation group)** と呼ぶ．$X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とするとき，X_n の置換のことを n **次の置換**という．n 次の置換全体からなる群のことを n **次対称群 (n-synmmetric group)** と呼び，S_n と書く．対称群 S_n は位数 $n!$ の有限群である．

Notation 1.1.3. 対称群 S_n の元を表すのに，$1, 2, \ldots, n$ の写像先を書いて，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書く．なお第 1 行の順序は $1, 2, \ldots, n$ でなくても構わない．

例 1.1.3. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

は 4 次の置換である．さらに，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

と置くと，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．

(1.1.6) $1 \leq i < j \leq n$ のとき，$l \neq i, j$ なら $\sigma(l) = l$ であり，$\sigma(i) = j$，$\sigma(j) = i$ であるとき，置換 σ は i, j の**互換**と呼び (ij) と書く．より一般には，$1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n$ を全て異なる整数とするとき，

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_m \to i_1$$

と写像し，他の $1 \leq j \leq n$ は変えない置換を $(i_1 \cdots i_m)$ と書き，**長さ m の巡回置換 (m-cyclic permutation)** と呼ぶ．例えば，$(123) \in S_3$ は長さ 3 の巡回置換である．

例 1.1.4. 実数または複素数を成分に持つ $n \times n$ 正則行列全体の集合を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元に行列としての積を定義すると，**一般線形群 (general linear group)** と呼ばれる群になる．

1.2　部分群と生成元

(1.2.1) G が群であるとき，G のどのような性質を調べるにせよ，いきなり群 G そのものを調べる代わりに，G に含まれるもっと小さな群を調べたり，後に定義する「剰余類」を調べたりすることがある．

定義 1.2.1. G を群，$H \subset G$ を部分集合とする．H が G の積によって群になるとき，H を G の**部分群 (subgroup)** と呼ぶ．

例 1.2.1. G が群なら，$\{1\}, G$ は明らかに G の部分群である．これらを G の**自明な部分群 (trivial subgroup)** と呼ぶ．G 以外の部分群を**真部分群 (proper subgroup)** と呼ぶ．

例 1.2.2. 正方行列 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の行列式を $\det A$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{g \in G \mid \det g = 1\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**特殊線形群 (special linear group)** と呼ぶ．$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ も同様に定義される．

例 1.2.3. 行列 A に対して，その転置行列を A^T と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{O}(n) = \{g \in G \mid g^T g = I_n\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**直交群 (orthogonal group)** と呼ぶ．また $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ を**特殊直交群 (special orthogonal group)** と呼ぶ[*2]．

[*2] 一般に H_1, H_2 が群 G の部分群なら，$H_1 \cap H_2$ も G の部分群である．

例 1.2.4. 行列 A に対して，その複素共役を A^* と書く．また A のエルミート共役を $A^\dagger = (A^*)^T$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{U}(n) = \{g \in G \mid g^\dagger g = I_n\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**ユニタリー群 (unitary group)** と呼ぶ．また $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ を**特殊ユニタリー群 (special unitary group)** と呼ぶ．

例 1.2.5. 行列 i, j, k を

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と置く．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分集合 $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}(1 = I_2$ とする) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群であり，**四元数群 (quaternion group)** と呼ぶ．H の元の積は表 1.2 のようになる．

	1	-1	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$
1	1	-1	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$
-1	-1	1	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

表 1.2: 四元数群 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ の群表

(1.2.2) 次に部分集合によって生成された部分群を考える．

定義 1.2.2. G を群，$S \subset G$ を部分集合とする．$x_1, \ldots, x_n \in S$ により $x_1^{\pm 1} \cdot x_n^{\pm 1}$ という形をした G の元を S の元による**語 (word)** と呼ぶ．ただし，$n = 0$ なら語は単位元 1_G を表すとし，± 1 は各 x_i ごとに 1 か -1 のどちらでもよいとする．

(1.2.3) $\langle S \rangle$ を $S \subset G$ の元による語全体の集合とするとき，$\langle S \rangle$ は G の部分群となること示せる．

定義 1.2.3. $\langle S \rangle$ を S によって**生成された部分群 (subgroup generated by S)** と呼び，S のことを**生成系 (generating set of a group)**，S の元を**生成元 (generator)** と呼ぶ．$S = \{g_1, \ldots, g_n\}$ なら生成される部分群は $\langle \{g_1, \ldots, g_n\} \rangle$ の代わりに $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ とも書く．

定義 1.2.4. 1 つの元で生成される群を**巡回群 (cyclic group)** と呼ぶ．群の部分群で巡回群であるものを**巡回部分群** (cyclic subgroup) と呼ぶ．

例 1.2.6. G を群，$x \in G$，$S = \{x\}$ とする．このとき $\langle S \rangle = \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ となる．例えば $G = \mathbb{Z}$，$n \in \mathbb{Z}$，$S = \{n\}$ とすると，$\langle S \rangle = n\mathbb{Z}$($n$ の倍数の集合) である．これは n を生成元とする位数が ∞ の $\mathbb{Z}$ の巡回部分群である．

(1.2.4) G が巡回群なら，ある $x \in G$ があり $G = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と書ける．$i, j \in \mathbb{Z}$ なら $x^i x^j = x^{i+j} = x^j x^i$ なので，**巡回群は可換群である**．

(1.2.5) ここで群の直積の概念を定義しておく：$G_1, G_2, \ldots, G_t$ を群，$G = G_1 \times \cdots \times G_t$ を集合としての直積とする．$g_1, g_1' \in G, \ldots, g_t, g_t' \in G_t$ なら，

$$(g_1, \ldots, g_t)(g_1', \ldots, g_t') = (g_1 g_1', \ldots, g_t g_t') \tag{1.1}$$

と定義する．ただし $g_1 g_1', \ldots, g_t g_t'$ はそれぞれ $G_1, \ldots, G_t$ での積である．このとき G は $1_G = (1_{G_1}, \ldots, 1_{G_t})$ を単位元とする群となる．

定義 1.2.5. 上の積 (1.1) による群 $G = G_1 \times \cdots \times G_t$ を群 $G_1, \ldots, G_t$ の**直積 (direct product)**，$G_1, \ldots, G_t$ を G の**直積因子 (direct factor)** と呼ぶ．

(1.2.6) 上の状況で，$j = 1, \ldots, t$ に対し，

$$i_j : g_j (\in G) \mapsto (\overbrace{1_{G_1}, \ldots, 1_{G_{j-1}}}^{j-1}, g_j, \overbrace{1_{G_{j+1}}, \ldots, 1_{G_t}}^{t-j}) (\in G_1 \times \cdots \times G_t)$$

を考える．この写像は明らかに単射 (1 対 1) なので，この写像により G_j を $G_1 \times \cdots \times G_t$ の部分集合とみなすことができる．そうすると **G_j は $G_1 \times \cdots \times G_t$ の部分群となる**．

1.3 元の位数

(1.3.1) ここでは，群の元の位数の概念について解説する．

定義 1.3.1. G を群，$x \in G$ とする．もし $x^n = 1_G$ となる正の整数が存在すれば，その中で最小のものを x の**位数 (order)** と呼ぶ．もし $x^n = 1_G$ となる正の整数がなければ，x の位数は ∞ である，あるいは x は無限位数であるという．

例 1.3.1. G が群なら，その単位元の位数は 1 である．逆に x の位数が 1 なら，$x = x^1 = 1_G$ なので，$x = 1_G$ となる．よって，単位元は位数が 1 の唯一の元である．

例 1.3.2. $\mathbb{Z} \ni x \neq 0$ とする．$n \neq 0$ なら $nx \neq 0$ なので x の位数は ∞ である．

例 1.3.3. $G = S_3$，$\sigma = (123)$ とする．$\sigma^2 \neq 1_G$，$\sigma^3 = 1_G$ なので，σ の位数は 3 である．もっと一般に，S_n の巡回置換 $(i_1, \ldots, i_m)$ の位数は m である．

命題 1.3.1. G が有限群なら，G の任意の元の位数は有限である．

1.4 準同型と同型

(1.4.1) 2 つの群 G_1, G_2 が与えられたとき，G_1, G_2 が群として本質的に同じかどうかということを定式化するために準同型・同型の概念を導入する．群は単なる集合ではなく，積が定義された構造物なので，その積までもが対応するようなものを考えなければならない．

定義 1.4.1. G_1, G_2 を群，$\phi : G_1 \to G_2$ を写像とする．

- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ がすべての $x, y \in G_1$ に対して成り立つとき，ϕ を**準同型写像 (homomorphism)** と呼ぶ．
- ϕ が準同型写像で逆写像を持ち，逆写像も準同型写像であるとき，ϕ を**同型写像 (isomorphism)** と呼ぶ．このとき，G_1, G_2 は**同型である (isomorphic)** といい，$G_1 \cong G_2$ と書く．
- ϕ が準同型写像のとき，$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = 1_{G_2}\}$ を ϕ の**核 (kernel)** と呼ぶ．
- ϕ が準同型写像のとき，$\mathrm{Im}(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$ を ϕ の**像 (image)** と呼ぶ．

(1.4.2) 準同型写像の関して，次の 2 つの命題が基本的である：

命題 1.4.1. 全単射写像 $\phi : G_1 \to G_2$ が群の準同型写像なら，同型写像である．

命題 1.4.2. $\phi : G_1 \to G_2$ を群の準同型とするとき，次が成り立つ：

- $\phi(1_G) = 1_{G_2}$ である．
- 任意の $x \in G_1$ に対し，$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ である．
- $\mathrm{Ker}(\phi), \mathrm{Im}(\phi)$ はそれぞれ G_1, G_2 の部分群である．

例 1.4.1. H が群 G の部分群なら，包含写像 $H \hookrightarrow G$ は準同型写像である．例えば $\mathrm{O}(n)$ から $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{U}(n)$ から $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ への包含写像は準同型写像である．

例 1.4.2. $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を置換 σ の符号とすると，sgn は対称群 S_n から $\{\pm 1\}$ への準同型写像である．置換 σ は，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ なら**偶置換**，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ なら**奇置換**という．$A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sgn})$ を n **次交代群 (alternating group)** と呼ぶ．

(1.4.3) 準同型写像の合成について次のことが成り立つ：

命題 1.4.3.

- 群の準同型写像の合成は準同型写像である．
- 群の同型写像の合成は同型写像である．同型写像の逆写像も同型写像である．

(1.4.4) G_1, G_2 **が群で** $\phi : G_1 \to G_2$ **が同型写像なら，**G_1 **に関する (以降で述べる) 群論的な性質は** G_2 **でも成り立つ．**この意味で同型な群は本質的に同じものとみなせる．

(1.4.5) 次の命題は準同型写像が生成元での値で決定されることを主張する：

命題 1.4.4. G_1, G_2 を群，$\phi_1, \phi_2 : G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．もし G_1 が部分集合 S で生成されていて，$\phi_1(x) = \phi_2(x)$ がすべての $x \in S$ に対して成り立てば，$\phi_1 = \phi_2$ である．

命題 1.4.5. $\phi : G_1 \to G_2$ が準同型写像なら，

$$\phi \text{ は単射である} \iff \mathrm{Ker}(\phi) = \{1_{G_1}\}$$

となる．

例 1.4.3. $V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$，A を実数を成分に持つ $m \times n$ 行列とする．V, W は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であり，加法に関して可換群である．$\boldsymbol{x} \in V$ に対して $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in W$ と定義すると，T_A は V から W への線形写像である．線形写像は和を保つので，$T_A : V \to W$ は群の準同型写像である．したがって命題 1.4.5 より T_A が単射であることと，$\mathrm{Ker}(T_A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$ であることは同値である．

定義 1.4.2. G を群とするとき，G から G への同型写像を**自己同型写像 (automorphism)** と呼ぶ．G の自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}G$ と書く．$\phi, \psi \in \mathrm{Aut}G$ なら，その積 $\phi\psi$ を通常の写像の合成 $\phi \circ \psi$ と定義する．すると，$\mathrm{Aut}G$ は恒等写像 id_G を単位元とし，逆写像を逆元とする群となることが容易に分かる．この $\mathrm{Aut}G$ のことを G の**自己同型群 (automorphism group)** と呼ぶ．

(1.4.6) G を群，$g \in G$ とする．このとき，写像 $i_g : G \to G$ を $i_g(h) = ghg^{-1}$ と定義する．そうすると，

$$i_g(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = i_g(h_1)i_g(h_2)$$

となるので，i_g は準同型写像である．$i_{g^{-1}}$ が i_g の逆写像であることはすぐわかる．したがって i_g は同型写像である．

定義 1.4.3. G を群とする．

- i_g という形をした群 G の自己同型写像のことを**内部自己同型写像 (inner automorphism)** と呼ぶ．内部自己同型写像でない自己同型写像のことを**外部自己同型写像 (outer automor-**

phism) と呼ぶ.

- $h_1, h_2 \in G$ とする. $g \in G$ があり $h_1 = gh_2g^{-1} = i_g(h_2)$ となるとき, h_1, h_2 は**共役 (conjugate)** であるという.

注意 1.4.1. 定義から明らかに，G が可換群なら，すべての内部自己同型写像は恒等写像である．また，元 g と共役な元は g のみである．

例 1.4.4. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$\tau^2 = I_2$ なので，$\tau^{-1} = \tau$ である．簡単な計算で

$$\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\tau = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

であることが分かる．よって例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は共役である．

命題 1.4.6. G を群とするとき，写像 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ を $\phi(g) = i_g$ と定義する．このとき ϕ は準同型写像である．

1.5 同値関係と剰余類

(1.5.1) 群の性質を調べるのに，元の位数は大きな手掛かりとなる．元の位数は群の位数の約数であるが，これを示すには，部分群による「剰余類」の概念が必要である．

定義 1.5.1. 集合 S 上の関係 $\sim$ が次の条件を満たすとき，**同値関係 (equivalence relation)** と呼ぶ. 以下，a, b, c は S の任意の元を表すとする．

- (**反射律**)$a \sim a$
- (**対称律**)$a \sim b$ なら $b \sim a$
- (**推移律**)$a \sim b$，$b \sim c$ なら $a \sim c$

例 1.5.1. G を群，$H \subset G$ を部分群とする．$x, y \in G$ に対し，$x^{-1}y \in H$ であるとき $x \sim y$ と定義する．このとき $x \sim y$ は同値関係である．

定義 1.5.2. $\sim$ を集合 S 上の同値関係とする．$x \in S$ に対し，

$$C(x) = \{y \in S \mid y \sim x\}$$

を x の**同値類 (equivalent class)** と呼ぶ.

定義 1.5.3. $\sim$ を集合 S 上の同値関係とする．

- S の部分集合で $C(x)(x \in S)$ という形をしたもの全体の集合を $S/\sim$ と書き，同値関係による**商 (quotient)** と呼ぶ．S の元 x に対して $C(x) \in S/\sim$ を対応させる写像を S から $S/\sim$ への**自然な写像 (natural map)** と呼ぶ．
- $S/\sim$ の元 C に対して，$x \in C$ となる S の元を C の**代表元 (representative)** と呼ぶ．
- S の部分集合 R が $S/\sim$ の各元の代表元をちょうど 1 つずつ含むとき，R を同値関係 $\sim$ の**完全代表系 (complete system of representatives)** と呼ぶ．

Notation 1.5.1. 一般に S_1, S_2 が群 G の部分集合なら，

$$S_1 S_2 = \{xy \mid x \in S_1,\ y \in S_2\} \tag{1.2}$$

と定義する．$S_1 = \{x\}$ と 1 つの元よりなるときは，$\{x\}S_2$ の代わりに xS_2 と書く．$S_2 = \{x\}$ の場合も同様である．群の演算を $+$ と書く場合には，$S_1 + S_2$ などと書く．

例 1.5.2. n を正の整数とする．$x, y \in \mathbb{Z}$ であり，$y - x$ が n で割り切れるとき，$x \equiv y \pmod{n}$ と定義する．これは $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．$x \in \mathbb{Z}$ の同値類は $y - x$ が n で割り切れるような y 全体である．これは $y - x \in n\mathbb{Z}$ と同値である．よって，

$$C(x) = \{x + z \mid z \in n\mathbb{Z}\} = x + n\mathbb{Z}$$

となる．この場合の同値類を $x \pmod{n}$ と書く．

定義 1.5.4. H を群 G の部分群，$x, y \in G$ とする．

- $x^{-1}y \in H$ であるとき $x \sim y$ と定義する．これは同値関係である．このとき，$x \in G$ の同値類を xH と書き，x の H による**左剰余類 (left coset)** と呼ぶ．この同値関係による商，つまり左剰余類の集合を G/H と書く．
- $yx^{-1} \in H$ であるとき $x \sim y$ と定義すると，これも同値関係である．$x \in G$ の同値類を Hx と書き，x の H による**右剰余類 (right coset)** と呼ぶ．この同値関係による商を $H\backslash G$ と書く．

(1.5.2) G が可換群なら，左剰余類を右剰余類は一致する．

注意 1.5.1. $y \sim x$ なら $x \sim y$ なので，$h \in H$ があり $y = xh$ と書ける．また逆も成り立つ．したがって，x の同値類は式 (1.2) の意味で xH と一致する．右剰余類でも同様である．

(1.5.3) 以下，群 G とその部分群 H の位数の関係について考える．

命題 1.5.1. H が群 G の部分群なら，次のことが成り立つ：

- $|G/H| = |H\backslash G|$ である (両方とも ∞ ということもある)．
- 任意の $g \in G$ に対し，$|gH| = |Hg| = |H|$.

定義 1.5.5. G/H または $H\backslash G$ の元の個数を $(G:H)$ と書き，H の G における**指数 (index)** と呼ぶ.

(1.5.4)　次の Lagrange の定理は部分群の位数に関して基本的である：

定理 1.5.1 (Lagrange)**.** 上の状況で $|G|=(G:H)|H|$ である.

(1.5.5)　Lagrange の定理は次の系の形で使うことが多い：

系 1.5.1. G を有限群とするとき，次のことが成り立つ：

- H が G の部分群なら，$|H|$ は $|G|$ の約数である.
- $g\in G$ の位数は $|G|$ の約数である.

(1.5.6)　系 1.5.1 は群の部分群の位数に大きな制約をもたらすので，次の命題のように，与えられた群の部分群を調べるための大きな手掛かりとなる.

命題 1.5.2. G を位数が素数 p の群とする．このとき，$G\ni x\neq 1_G$ なら $G=\langle x\rangle$ である．したがって，G は巡回群である.

1.6　正規部分群と剰余類

(1.6.1)　H が群 G の部分群なら，$G/H, H\backslash G$ は剰余類の集合として定義された．H が以下で定義する正規部分群であるときには，G/H が $H\backslash G$ と同一視され，群の構造が自然に入ることについて解説する.

定義 1.6.1. H を群 G の部分群とする．すべての $g\in G, h\in H$ に対し $ghg^{-1}\in H$ となるとき，H を G の**正規部分群 (normal subgroup)** と呼び，$H\lhd G$，あるいは $G\rhd H$ と書く.

例 1.6.1. G が可換群で H が任意の部分群なら，$ghg^{-1}=gg^{-1}h=1_Gh=h\in H$ となるので，H は正規部分群である.

(1.6.2)　一般には正規部分群は次のようにして現れる：

命題 1.6.1. G_1, G_2 が群で $\phi: G_1\to G_2$ が準同型写像なら，$\mathrm{Ker}(\phi)$ は G_1 の正規部分群である.

例 1.6.2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ni g\mapsto \det g\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ は全単射同型写像で，$\mathrm{Ker}(\det)=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ である．したがって，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\lhd\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である．同様に $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})\lhd\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ である.

例 1.6.3. 置換 σ にその符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を対応させる写像は準同型写像である．したがって，$A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sgn}) \triangleleft S_n$ である．例えば $A_3 = \langle(123)\rangle$ なので $\langle(123)\rangle \triangleleft S_3$ である．

(1.6.3) 群の部分群が正規部分群であることを示すのには，次の命題も有用である：

命題 1.6.2. N は群 G の部分群で，G, N はそれぞれ部分集合 S, T で生成されているとする．このとき，すべての $x \in S, y \in T$ に対し $xyx^{-1}, x^{-1}yx \in N$ なら，N は正規部分群である．もし G が有限群なら，条件 $xyx^{-1} \in N$ だけで十分である．

(1.6.4) この命題は要するに，**正規部分群であることの判定には，G, N の生成元だけを考えれば良い**ということを主張している．

系 1.6.1. G を群，$S \subset G$ とする．このとき，

$$N = \langle\{xyx^{-1} \mid x \in G,\ y \in S\}\rangle$$

は S を含む最小の G の正規部分群である．

例 1.6.4. $G = S_3, N = \langle(123)\rangle$ とする．G は $S = \{(123), (12)\}$ で生成されている．このとき，

$$\begin{aligned}(123)(123)(123)^{-1} &= (123) \in N \\ (12)(123)(12)^{-1} &= (12)(123)(12) = (132) = (123)^2 \in N\end{aligned}$$

である．G は有限群なので，命題 1.6.2 より N は正規部分群である．

補題 1.6.1. N が群 G の正規部分群で $g \in G$ なら，$gN = Ng$ である．

(1.6.5) 上の補題は，**N が正規部分群なら，左剰余類と右剰余類が一致する**ことを主張している．

(1.6.6) π を自然な写像 $G \to G/N$ とする．つまり，$g \in G$ に対し $\pi(g) = gN \in G/N$ である．G/N の 2 つの元を剰余類の代表元 $g, h \in G$ により gN, hN と表す．このとき，gN, hN の積を

$$(gN)(hN) := ghN$$

と定義する．この定義は代表元の取り方に依らず well-defined な写像

$$G/N \times G/N \ni (gN, hN) \mapsto ghN \in G/N$$

を定義する．

定理 1.6.1. G/N は上の演算により群になる．

定義 1.6.2. G/N に上の演算を考えたものを，G の N による**商群 (quotient group)** または**剰余群 (coset group)** と呼ぶ．

命題 1.6.3. 自然な写像 $\pi : G \to G/N$ は群の全射準同型写像である．また，$\mathrm{Ker}(\pi) = N$ である．

例 1.6.5. $G = S_3, N = \langle(123)\rangle$ とおく．Lagrange の定理より，

$$6 = |S_3| = (S_3 : N)|N| = 3(S_3 : N) = 3|S_3/N|$$

なので，$|S_3/N| = 2$ である．$(12) \notin N$ なので，$(12)N \in S_3/N$ は単位元ではない．2 は素数なので，命題 1.5.2 より S_3/N は $(12)N$ で生成される巡回群である．

(1.6.7) 準同型定理について述べた後で，もう少し商群の例を述べることにする．

1.7　準同型定理

(1.7.1) ここでは，準同型定理について解説する．

定理 1.7.1 (準同型定理 (第 1 同型定理))**.** $\phi : G \to H$ を群の準同型とする．$\pi : G \to G/\mathrm{Ker}(\phi)$ を自然な準同型写像とするとき，

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}(\phi) \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

が可換図式となるような準同型写像 $\psi : G/\mathrm{Ker}(\phi) \to H$ が唯一存在し，ψ は $G/\mathrm{Ker}(\phi)$ から $\mathrm{Im}(\phi)$ への同型写像となる．

(1.7.2) 準同型定理と関連して次の定理も重要である：

定理 1.7.2 (準同型定理 (部分群の対応))**.** N を群 G の正規部分群，$\pi : G \to G/N$ を自然な準同型写像とする．G/N の部分群の集合を $\boldsymbol{X}$，G の N を含む部分群の集合を $\boldsymbol{Y}$ とするとき，写像

$$\phi : \boldsymbol{X} \ni H \mapsto \pi^{-1}(H) \in \boldsymbol{Y}, \quad \psi : \boldsymbol{Y} \ni K \mapsto \pi(K) \in \boldsymbol{X}$$

は互いの逆写像である．したがって，集合 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ は 1 対 1 対応する．

命題 1.7.1 (第 2 同型定理)**.** H, N を群 G の部分群で $N \triangleleft G$ とする．このとき次のことが成り立つ：

- HN は G の部分群となる．また $HN = NH$ となる．
- $H \cap N \triangleleft H$，$HN/N \cong H/H \cap N$ である．

命題 1.7.2 (第 3 同型定理)**.** G を群，$N \subset N'$ を G の正規部分群とするとき，次のことが成り立つ：

- 準同型写像 $\phi : G/N \to G/N'$ で $\phi(xN) = xN'$ となるものがある．
- $(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$.

(1.7.3) 上の命題 1.7.2 の準同型写像 $G/N \to G/N'$ を自然な準同型写像と呼ぶ．

命題 1.7.3 (準同型写像の分解)**.** $\phi : G \to H$ を群の準同型写像とする．$N \subset G$ が正規部分群なら，$\pi : G \to G/N$ を自然な準同型写像とするとき，

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

が可換図式となるような準同型写像 $\psi : G/N \to H$ が存在するための必要十分条件は $N \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ となることである．

例 1.7.1. G を位数 n の巡回群，x を G の生成元とする．$\mathbb{Z}$ から G への写像 ϕ を $\mathbb{Z} \ni m \mapsto x^m \in G$ と定義すると，これは準同型写像になる．x が G の生成元なので，ϕ は全射である．$\mathrm{Ker}(\phi) = n\mathbb{Z}$ なので，準同型定理より，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong G$ である．

例 1.7.2. $\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ni g \mapsto \det g \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ は全射準同型写像で $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ であることは既に述べた．したがって準同型定理より，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}\backslash\{0\}$ である．

例 1.7.3. $\mathrm{sgn} : S_n \ni \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ は全射準同型写像で $\mathrm{Ker}(\mathrm{sgn}) = A_n$ であることは既に述べた．したがって，準同型定理より，$S_n/A_n \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

例 1.7.4. G_1, G_2 を群，$G = G_1 \times G_2$，$i = 1, 2$ に対し $p_i : G \to G_i$ を G_i の成分に対応させる写像とする．p_1, p_2 は全射準同型写像で，$\mathrm{Ker}(p_1) = G_2$，$\mathrm{Ker}(p_2) = G_1$ である．したがって，準同型定理より，$G/G_1 \cong G_2$，$G/G_2 \cong G_1$ である．

2　群の作用と Sylow の定理

(2.0.1)　このセクションでは，群の作用とその応用である Sylow の定理について解説する．Sylow の定理は有限群を調べる基本的な道具である．

参考文献

[雪江明 22]　雪江明彦. **群論入門**. 日本評論社, 2022.