Orientation Entanglement

A.Sone

更新日：2024 年 12 月 16 日

概要

数学と物理学において，**方位もつれ (orientation entaglement)** という概念は，スピノールの幾何学に関連する直観を発展させるために，あるいは，特殊直交群が単連結でないことの具体的な説明に使われることがある．

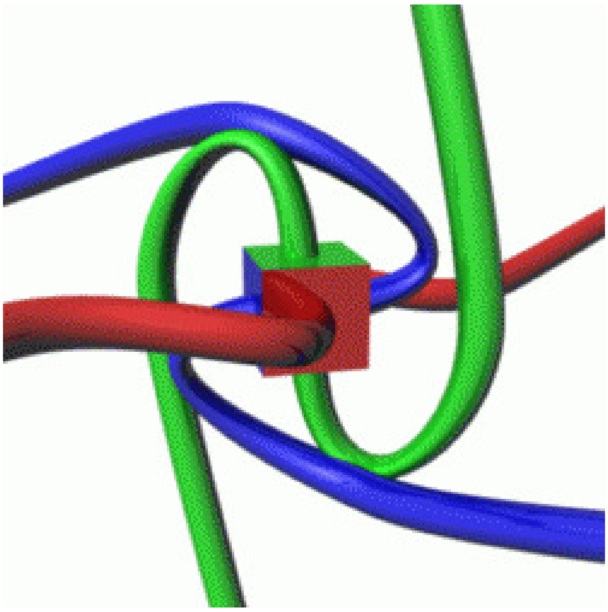

図 0.1: 空間内の 1 点は，もつれることなく回転し続けることができる．360 度回転した後，渦巻きが時計回りと反時計回りの間で反転することに注目してほしい．720 度回転すると元の形に戻る．(Ref.Wikipedia)

目次

1　概要

(1.0.1)　空間ベクトルだけでは，空間における回転の特性を完全に説明するには不十分である．

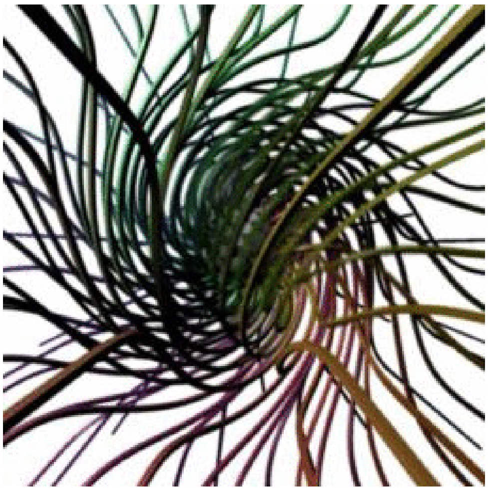

図 1.1: 1 組の 96 本の繊維は，一方が環境に固定され，もう一方が回転する球体に固定されている．球体は，繊維が絡まることなく連続的に回転することができる．(Ref.Wikipedia)

(1.0.2)　次の例を考えてみよう．部屋の壁に固定された 1 対の伸縮性のあるゴムバンドで，コーヒーカップが吊り下げられている．カップは取っ手によって 360 度回転させられ，取っ手はカップの中心縦軸を一周して元の位置に戻る (図 1.2 参照).

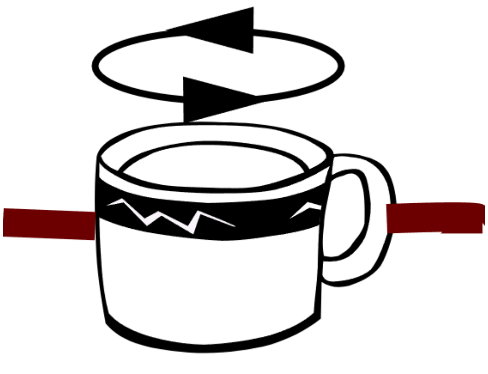

図 1.2: 持ち手と反対側にバンドが付いたコーヒーカップ．(Ref.Wikipedia)

(1.0.3)　この回転の後，カップは元の向きに戻ったが，壁に対する向きはねじれていることに注意してほしい．言い換えれば．コーヒーカップを部屋の床まで下げると，2 本のバンドは 2 重らせんの 1 回分のねじれで互いに巻きつくことになる．これは**方位もつれ (orientation entanglement)** の例である：部屋に埋め込ま

れたコーヒーカップの新しい向きは，輪ゴムのねじれからもわかるように，実は古い向きと同じではない．別の言い方をすれば，コーヒーカップの向きが周囲の壁の向きと絡み合ってしまったのである．

(1.0.4)　空間ベクトルの幾何学だけでは，方位もつれ (輪ゴムのねじれ) を表現するには不十分であることは明らかである．カップを横切るベクトルを描いてみよう (図 1.3 参照)．完全に回転させるとベクトルは移動し，ベクトルの新しい向きは古い向きと同じになる．ベクトルだけでは，コーヒーカップが部屋の壁に絡まっていることはわからない．

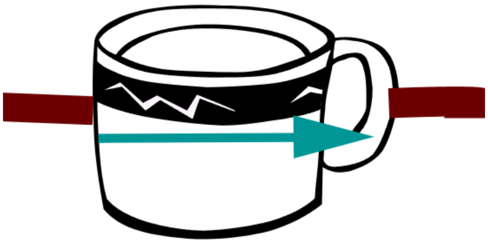

図 1.3: コーヒーカップのベクトル．1 回転してもベクトルは変化しない．(Ref.Wikipedia)

(1.0.5)　実際，コーヒーカップは表裏一体だ．カップを回転させなければ，バンドの絡まりを解くことはできない．しかし，カップを 360 度 1 回転させるのではなく，360 度 2 回転させ，合計 720 度回転させるとどうなるか考えてみよう．次にカップを床に下ろすと，2 本の輪ゴムは 2 重螺旋を描くように 2 回ねじれながら互いに巻きつく．次に，このらせんの片方の中心を通ってカップを持ち上げ，反対側に回すと，ねじれは消える．追加的な回転を行わなくても，バンドはもはや互いに巻き合っていない (この実験は，リボンやベルトを使うともっと簡単にできる (図 1.4 参照))．

図 1.4: リボンを回転させずにほどく．(Ref.Wikipedia)

(1.0.6)　したがって，360 度回転しただけでカップの向きが壁に対してねじれたのに対し，720 度回転した後はねじれなくなった．しかし，カップに付いているベクトルだけを考えても，この 2 つの場合を区別することはできない．ねじれた場合とねじれない場合を区別できるのは，カップに**スピノール**を付けた場合だけである．

(1.0.7)　この状況では，スピノールは一種の偏光ベクトルを表す．図 1.5 では，スピノールは，Möbius の帯の片側に横たわり，内側を向いた旗を頭とするベクトルとして表すことができる．最初に，旗が図 1.5 のようにストリップの上にあるとする．コーヒーカップを回転させると，スピノールと旗がストリップに沿って運ばれる．カップを 360 度回転させると，スピナーは最初の位置に戻るが，旗はストリップの下に入り，外側を向いている．旗を元の向きに戻すには，さらに 360 度回転する必要がある．

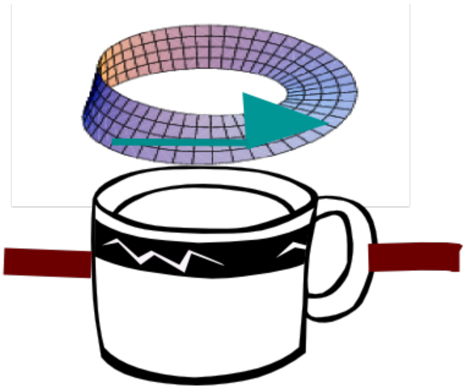

図 1.5: スピノール (Ref.Wikipedia)

(1.0.8)　上記と正式な数学との間の詳細な橋渡しは，**tangloid** という概念が担う．

2　詳細な議論

(2.0.1)　3 次元では，上記の問題は，Lie 群 SO(3) が単連結ではないという事実に対応する．数学的には，Euclid3 次元におけるスピン群でもある特殊ユニタリー群 SU(2) を SO(3) の二重被覆として示すことで，この問題に取り組むことができる．$X = (x_1, x_2, x_3)$ が $\mathbb{R}^3$ 内のベクトルである場合，X を複素エントリを持つ 2×2 行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

に同定できる．$-\det(X)$ はベクトルとみなされる X の Euclid 距離の 2 乗を与え，X はトレースのない，あるいはトレースゼロのエルミート行列であることに注意されたい．

(2.0.2)　ユニタリー群の X への作用は，

$$X \mapsto MXM^\dagger$$

と書ける．ここで $M \in \mathrm{SU}(2)$ である．ここで，M はユニタリーだから，$\det\left(MXM^\dagger\right) = \det(X)$ であり，$MXM^\dagger$ はトレースレスでエルミートである．したがって，SU(2) はベクトル X に回転を介して作用する．逆に，トレースゼロのエルミート行列をトレースゼロのエルミート行列に送る基底の変更はユニタリーでなけ

ればならないので，すべての回転も SU(2) に従うことになる．しかし，各回転は SU(2) の要素 M と $-M$ の組から得られる．したがって，SU(2) は SO(3) の二重被覆である．さらに，SU(2) は，3 次元球に同相な空間である単位**四元数 (quaternion)** の群として理解することで，それ自身が単連結であることが容易にわかる．

(2.0.3)　単位四元数は，回転角の半分の余弦をスカラーとし，回転軸 (ここでは固定する) に沿った単位ベクトルに回転角の半分の正弦を掛けたものをベクトルとする (虚部とも呼ばれる)．剛体の初期姿勢 (固定された周囲との接続がもつれない状態) を，ベクトルがゼロ，スカラーが $+1$ の単位四元数で表すと，1 回転するとベクトルはゼロに戻り，スカラーは -1(もつれた状態) になる．完全に 2 回転すると，ベクトルは再びゼロに戻り，スカラーは $+1$(絡み合わない) に戻り，サイクルが完了する．