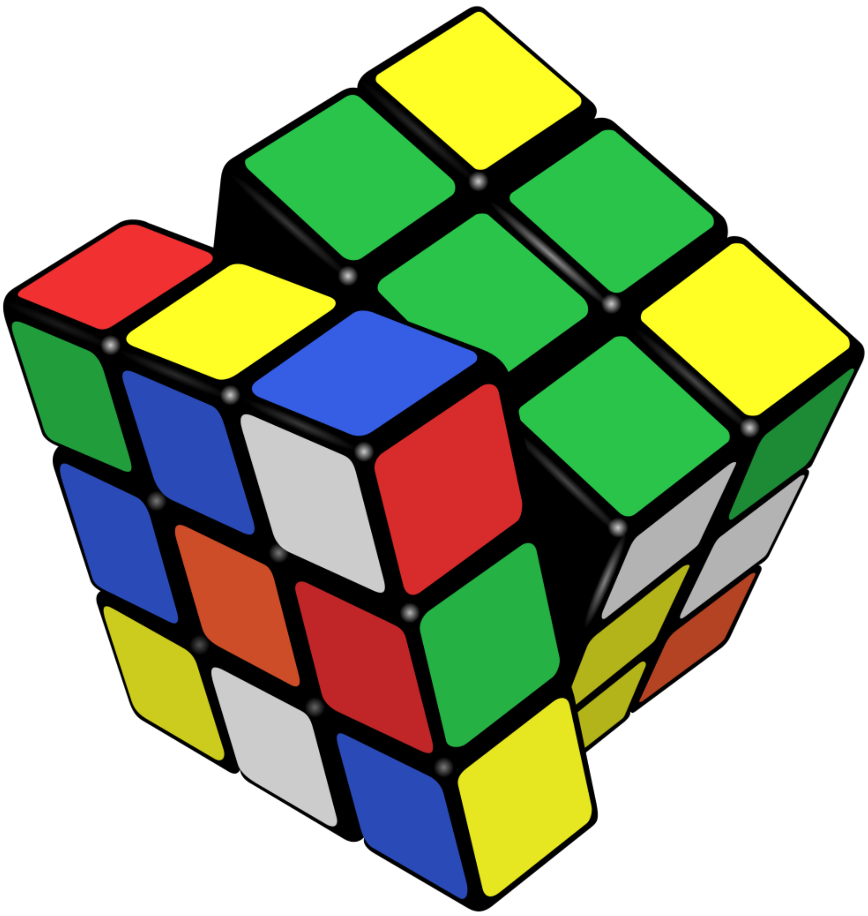
Note of Group Theory

https://charlotte1816.github.io/

更新日：2024 年 12 月 21 日

概要

本稿は，群論の物理学への応用を念頭に置いて執筆された，群論の基本的な内容をまとめたノートである．群を学ぶ動機として，しばしば 5 次方程式を冪根で解く公式が存在しないことを示せる「Garois 理論」を理解することが挙げられる．しかし，本稿では，群の「対称性を表現するもの」としての性質を主に考える．物理学において物理系の対称性を考えることは最も基本的なことであるから，群論は必修事項である．



目次

更新日：2024 年 12 月 21 日

1 基本事項

(1.0.1) このセクションでは，群の概念の基本的な部分について解説する．

1.1 群の定義と例

(1.1.1) X が集合であるとき，写像 $\phi : X \times X \to X$ のことを集合 X 上の**演算**と呼ぶ．以降は特に断らない限り，$\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く．

> **定義 1.1.1.** G を空集合ではない集合とする．G 上の**積 (product)** と呼ばれる演算が定義されていて，次の性質を満たすとき，G を**群 (group)** と呼ぶ：
>
> - **単位元 (identity** と呼ばれる元 $e \in G$ があり，すべての $a \in G$ に対し，$ae = ea = a$ となる．
> - すべての $a \in G$ に対し，$b \in G$ が存在し，$ab = ba = e$ となる．この元 b は a の**逆元 (inverse)** と呼ばれ，a^{-1} と書く．
> - すべての $a, b, c \in G$ に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ (結合法則)．

(1.1.2) 群とは要するに，

1 つの演算が定義されていて順当な性質を満たしている構造物

のことである．

(1.1.3) a, b が群 G の元で，$ab = ba$ なら a, b は**可換である (commutative)** という．G の任意の元 a, b が可換なら，G を**可換群**，あるいは**アーベル群 (abelian group)** と呼び，そうでない群を**非可換群**と呼ぶ[*1]．

Notation 1.1.1. 単位元は 1 と書いたり，より明示的に 1_G と書いたりすることも多い．可換群の場合は積のことを「和」と呼ぶこともある．またこの場合，群の積を ab ではなく $a + b$ と書いて，単位元を 0 とか 0_G と書くことも多い．

> **定義 1.1.2.** G が群であるとき，その元の個数 $|G|$ を G の**位数 (order)** と呼ぶ．位数が有限な群のことを**有限群 (finite group)** と呼ぶ．有限群でない群を**無限群 (infinite group)** と呼ぶ．

Notation 1.1.2. 群 G と $a \in G$，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$a^0 = 1, \quad \overbrace{a \cdots a}^{n} = a^n, \quad a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

と定義する．なお $n, m \in \mathbb{Z}$ なら，$a^{n+m} = a^n a^m$，$(a^n)^m = a^{nm}$ が成り立つ．

[*1] 可換群を commutative group と呼んでも良いとは思うが，実際そのように呼んでいる教科書は見たことがないので，論文を書くときなどは abelian group と呼ぶ方が良いだろう．

(1.1.4) 群の簡単な例を見て，上の定義を確認しておこう：

例 1.1.1. G を 2 つの元 a, b よりなる集合 $G = \{a, b\}$ とする．これらの元の積を

$$a \cdot a = a, \quad a \cdot b = b, \quad b \cdot a = b, \quad b \cdot b = a$$

と定義する．まとめると表 1.1 のようになる．なお 4 つの積を (行の元)×(列の元) と表す．このような表のことを**群表 (group table)** と呼ぶ．この G は明らかに位数 2 の有限群であることが分かる．また G は可換群でもある．

	a	b
a	a	$a \cdot b = b$
b	b	a

表 1.1: 群 $G = \{a, b\}$ の群表

(1.1.5) 群の定義から分かる性質というものは，当然すべての群に対しても成り立つ．具体的な群に特有の性質も重要だが，群一般に対して議論をすることで見通しがよくなる．

例 1.1.2. X を集合とするとき，X から X への全単射写像 $\sigma : X \to X$ のことを X の**置換 (permutation)** と呼ぶ．σ, τ を X の置換とするとき，その積 $\sigma\tau$ を写像としての合成 $\sigma \circ \tau$ と定義する．X の置換全体の集合は，この積により明らかに群になる．

定義 1.1.3. X の置換全体からなる群のことを X の**置換群 (permutation group)** と呼ぶ．$X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とするとき，X_n の置換のことを n **次の置換**という．n 次の置換全体からなる群のことを n **次対称群 (n-synmmetric group)** と呼び，S_n と書く．対称群 S_n は位数 $n!$ の有限群である．

Notation 1.1.3. 対称群 S_n の元を表すのに，$1, 2, \ldots, n$ の写像先を書いて，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書く．なお第 1 行の順序は $1, 2, \ldots, n$ でなくても構わない．

例 1.1.3. 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

は 4 次の置換である．さらに，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

と置くと，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．

(1.1.6) $1 \leq i < j \leq n$ のとき，$l \neq i, j$ なら $\sigma(l) = l$ であり，$\sigma(i) = j$，$\sigma(j) = i$ であるとき，置換 σ は i, j の**互換**と呼び (ij) と書く．より一般には，$1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n$ を全て異なる整数とするとき，

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_m \to i_1$$

と写像し，他の $1 \leq j \leq n$ は変えない置換を $(i_1 \cdots i_m)$ と書き，**長さ m の巡回置換 (m-cyclic permutation)** と呼ぶ．例えば，$(123) \in S_3$ は長さ 3 の巡回置換である．

例 1.1.4. 実数または複素数を成分に持つ $n \times n$ 正則行列全体の集合を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元に行列としての積を定義すると，**一般線形群 (general linear group)** と呼ばれる群になる．

1.2 部分群と生成元

(1.2.1) G が群であるとき，G のどのような性質を調べるにせよ，いきなり群 G そのものを調べる代わりに，G に含まれるもっと小さな群を調べたり，後に定義する「剰余類」を調べたりすることがある．

定義 1.2.1. G を群，$H \subset G$ を部分集合とする．H が G の積によって群になるとき，H を G の**部分群 (subgroup)** と呼ぶ．

例 1.2.1. G が群なら，$\{1\}, G$ は明らかに G の部分群である．これらを G の**自明な部分群 (trivial subgroup)** と呼ぶ．G 以外の部分群を**真部分群 (proper subgroup)** と呼ぶ．

例 1.2.2. 正方行列 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の行列式を $\det A$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{g \in G \mid \det g = 1\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**特殊線形群 (special linear group)** と呼ぶ．$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ も同様に定義される．

例 1.2.3. 行列 A に対して，その転置行列を A^T と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{O}(n) = \{g \in G \mid g^T g = I_n\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**直交群 (orthogonal group)** と呼ぶ．また $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ を**特殊直交群 (special orthogonal group)** と呼ぶ[*2]．

[*2] 一般に H_1, H_2 が群 G の部分群なら，$H_1 \cap H_2$ も G の部分群である．

例 1.2.4. 行列 A に対して，その複素共役を A^* と書く．また A のエルミート共役を $A^\dagger = (A^*)^T$ と書く．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathrm{U}(n) = \{g \in G \mid g^\dagger g = I_n\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であり，**ユニタリー群 (unitary group)** と呼ぶ．また $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ を**特殊ユニタリー群 (special unitary group)** と呼ぶ.

例 1.2.5. 行列 i, j, k を

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と置く．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分集合 $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}(1 = I_2$ とする$)$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群であり，**四元数群 (quaternion group)** と呼ぶ．H の元の積は表 1.2 のようになる.

	1	-1	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$
1	1	-1	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$
-1	-1	1	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

表 1.2: 四元数群 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ の群表

(1.2.2) 次に部分集合によって生成された部分群を考える.

定義 1.2.2. G を群，$S \subset G$ を部分集合とする．$x_1, \ldots, x_n \in S$ により $x_1^{\pm 1} \cdot x_n^{\pm 1}$ という形をした G の元を S の元による**語 (word)** と呼ぶ．ただし，$n = 0$ なら語は単位元 1_G を表すとし，± 1 は各 x_i ごとに 1 か -1 のどちらでもよいとする.

(1.2.3) $\langle S \rangle$ を $S \subset G$ の元による語全体の集合とするとき，$\langle S \rangle$ は G の部分群となること示せる.

定義 1.2.3. $\langle S \rangle$ を S によって**生成された部分群 (subgroup generated by S)** と呼び，S のことを**生成系 (generating set of a group)**，S の元を**生成元 (generator)** と呼ぶ．$S = \{g_1, \ldots, g_n\}$ なら生成される部分群は $\langle \{g_1, \ldots, g_n\} \rangle$ の代わりに $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ とも書く.

定義 1.2.4. 1 つの元で生成される群を**巡回群 (cyclic group)** と呼ぶ．群の部分群で巡回群であるものを**巡回部分群** (cyclic subgroup) と呼ぶ.

例 1.2.6. G を群，$x \in G$，$S = \{x\}$ とする．このとき $\langle S \rangle = \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ となる．例えば $G = \mathbb{Z}$，$n \in \mathbb{Z}$，$S = \{n\}$ とすると，$\langle S \rangle = n\mathbb{Z}$($n$ の倍数の集合) である．これは n を生成元とする位数が ∞ の $\mathbb{Z}$ の巡回部分群である．

(1.2.4) G が巡回群なら，ある $x \in G$ があり $G = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と書ける．$i, j \in \mathbb{Z}$ なら $x^i x^j = x^{i+j} = x^j x^i$ なので，**巡回群は可換群である．**

(1.2.5) ここで群の直積の概念を定義しておく：$G_1, G_2, \ldots, G_t$ を群，$G = G_1 \times \cdots \times G_t$ を集合としての直積とする．$g_1, g_1' \in G, \ldots, g_t, g_t' \in G_t$ なら，

$$(g_1, \ldots, g_t)(g_1', \ldots, g_t') = (g_1 g_1', \ldots, g_t g_t') \tag{1.1}$$

と定義する．ただし $g_1 g_1', \ldots, g_t g_t'$ はそれぞれ $G_1, \ldots, G_t$ での積である．このとき G は $1_G = (1_{G_1}, \ldots, 1_{G_t})$ を単位元とする群となる．

定義 1.2.5. 上の積 (1.1) による群 $G = G_1 \times \cdots \times G_t$ を群 $G_1, \ldots, G_t$ の**直積 (direct product)**，$G_1, \ldots, G_t$ を G の**直積因子 (direct factor)** と呼ぶ．

(1.2.6) 上の状況で，$j = 1, \ldots, t$ に対し，

$$i_j : g_j (\in G) \mapsto (\overbrace{1_{G_1}, \ldots, 1_{G_{j-1}}}^{j-1}, g_j, \overbrace{1_{G_{j+1}}, \ldots, 1_{G_t}}^{t-j}) (\in G_1 \times \cdots \times G_t)$$

を考える．この写像は明らかに単射 (1 対 1) なので，この写像により G_j を $G_1 \times \cdots \times G_t$ の部分集合とみなすことができる．そうすると **G_j は $G_1 \times \cdots \times G_t$ の部分群となる．**

1.3　準同型と同型

(1.3.1) 2 つの群 G_1, G_2 が与えられたとき，G_1, G_2 が群として本質的に同じかどうかということを定式化するために準同型・同型の概念を導入する．群は単なる集合ではなく，積が定義された構造物なので，その積までもが対応するようなものを考えなければならない．

定義 1.3.1. G_1, G_2 を群，$\phi : G_1 \to G_2$ を写像とする．

- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ がすべての $x, y \in G_1$ に対して成り立つとき，ϕ を**準同型写像 (homomorphism)** と呼ぶ．
- ϕ が準同型写像で逆写像を持ち, 逆写像も準同型写像であるとき, ϕ を**同型写像** (isomorphism) と呼ぶ．このとき，G_1, G_2 は**同型である (isomorphic)** といい，$G_1 \cong G_2$ と書く．
- ϕ が準同型写像のとき，$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = 1_{G_2}\}$ を ϕ の**核 (kernel)** と呼ぶ．
- ϕ が準同型写像のとき，$\mathrm{Im}(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$ を ϕ の**像 (image)** と呼ぶ．

(1.3.2) 準同型写像の関して，次の 2 つの命題が基本的である：

命題 1.3.1. 全単射写像 $\phi : G_1 \to G_2$ が群の準同型写像なら，同型写像である．

命題 1.3.2. $\phi : G_1 \to G_2$ を群の準同型とするとき，次が成り立つ：

- $\phi(1_G) = 1_{G_2}$ である．
- 任意の $x \in G_1$ に対し，$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ である．
- $\mathrm{Ker}(\phi), \mathrm{Im}(\phi)$ はそれぞれ G_1, G_2 の部分群である．

参考文献

[雪江明 22] 雪江明彦. **群論入門**. 日本評論社, 2022. URL: https://www.nippyo.co.jp/shop/book/5462.html.