**葵花药业集团12月期雪球期权定价及其对冲方式**



**目录**

[一、 雪球产品介绍 3](#_Toc19989)

[产品要素 3](#_Toc13796)

[二、 投资者的收益情况分析 4](#_Toc20109)

[三、 蒙特卡罗模拟定价 4](#_Toc14339)

[（一）方法论介绍 4](#_Toc13887)

[（二）定价过程 5](#_Toc19679)

[四、模拟运行结果 11](#_Toc20851)

[五、对冲方案 12](#_Toc13583)

[（一）对冲模型原理介绍 12](#_Toc5668)

[（二）具体对冲操作 13](#_Toc28503)

[六、收益分析 13](#_Toc5543)

[（一）投资者的最终收益 13](#_Toc28454)

[（二）券商的最终收益 14](#_Toc32564)

# 雪球产品介绍

雪球是一类典型的自动赎回结构化的产品，本质上是将赎回条款附加到结构化产品中（赎回条款指产品存续期间挂钩的标的资产满足提前赎回的条件）。

本次我们设计的雪球产品的期限为360天，选择挂钩的标的为葵花药业股票（002737.SZ）。通过对葵花药业往年股价波动情况的综合考量，我们将产品敲出水平设定为标的资产期初价格的105%，敲入水平设定为期初价格的80%，敲出票息设定为25%。

雪球结构将从第三个月开始每月观察期权是否敲出并每日观察期权是否敲入：

1. 若在任一敲出观察日，挂钩标的收盘价格大于或等于标的股票的期初价格\*105%，投资者可以获得100%本金+敲出票息；
2. 若在观察期限内既没发生敲出也没发生敲入，投资者获得100%本金+红利票息；
3. 若在观察期内敲入且未敲出，且标的资产的到期价格小于期初价格，投资者相当于将名义本金（100万）以期初价格买入标的并持有到期，此时投资者发生亏损；
4. 若在观察期内敲入且未敲出，且标的资产的到期价格处于期初价格和敲出价格间，投资者全额收回本金，无额外收益。

**具体产品要素见下表：**

|  |  |
| --- | --- |
| **雪球产品要素** | |
| **标的资产** | 葵花药业002737.SZ |
| **观察期限** | 360天，从第三个月开始每月观察敲出+每日观察敲入 |
| **期权结构** | 自动敲入敲出结构 |
| **名义本金** | 100万 |
| **敲出水平** | 期初价格\*105% |
| **敲入水平** | 期初价格\*80% |
| **敲出票息(同红利票息)** | 25%(年化) |
| **敲出事件(每月观察)** | 若在任一敲出观察日，挂钩标的收盘价格大于等于敲出水平 |
| **敲入事件(每日观察)** | 若在任一敲入观察日，挂钩标的收盘价格小于敲入水平 |
| **收益计算(不包括本金)** | 敲出(自动提前终止)：25%\*名义本金\*计息天数/365 |
| 未敲入未敲出：25%\*名义本金\*计息天数/365(在此计息天数为360天) |
| 敲入且未敲出(标的期末价格小于期初价格)：(期末价格/期初价格-1)\*本金 |
| 敲入且未敲出(标的期末价格处于期初价格与敲出价格之间)：0 |

# 投资者的收益情况分析

我们按照产品最终运行的三大状态（敲出、未敲入未敲出和敲入未敲出）对投资者的收益情景进行分析：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **情况** | **具体分析** | **合约实际结束时间** | **投资者收益(不包括本金)** | **是否获得正收益** |
| **敲出** | 从第3个月开始，10个敲出观察日中的任何一日标的资产价格大于或等于葵花药业初始股价的105%(Ｔ日敲出) | T日合约提前终止 | 25%\*T/365\*本金 | 是 |
| **未敲入且未敲出** | 标的价格每日都不低于初始价格的80%，且每个敲出观察日都小于初始价格的105% | 合约持有到期 | 25%\*360/365\*本金 | 是(此时收益最高) |
| **敲入且未敲出** | 任一交易日跌破初始价格的80%，且10个敲出观察日都小于初始价格的105%，标的资产的期末价格小于期初价格 | 合约持有到期 | (期末价格/期初价格-1)\*本金 | 否(发生亏损) |
| 任一交易日跌破初始价格的80%，且10个敲出观察日都不高于初始价格的105%，标的资产的期末价格处于期初价格与敲出价格之间 | 合约持有到期 | 0 | 否(保本) |

# 蒙特卡罗模拟定价

下面我们将利用蒙特卡罗模拟法对上述预设的雪球产品进行定价。

**（一）方法论介绍**

蒙特卡罗是一种通过模拟标的资产价格随机运动路径得到定价产品期望价值，并将此期望价值贴现至现在时点来估计衍生品价格的数值方法。蒙特卡罗模拟进行衍生产品定价的核心在于生成标的价格的随机过程，如股价运动服从的伊藤过程，利率在Hull-White模型下服从的随机游走。

因此，我们先通过葵花药业2019年4月30日至2020年4月30日的股价数据计算出股价漂移率μ与波动率σ以及与股价变动路线相关的u和d，在以上数据的基础上利用蒙特卡罗方法对其股价未来的变动进行随机过程模拟，从而实现对产品的定价。

**（二）定价过程**

**1.根据股票价格的交易数据，计算出漂移率μ和波动率σ，并推导出u,d,p**

漂移率μ为单位时间内股价的平均变化幅度，股价与S计算如下：



波动率σ：相对回报率的不确定性。



u、d为股价第二天的价格与前一天价格的比率，其中上涨的比率为u，下跌的比率为d，p为股票上涨的概率。

于是，我们可以得到：



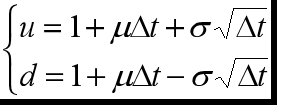
使用Hull-White算法

令：p=1/2

则：



解得：



根据2019年的数据，计算出μ=0.000726477,σ=0.015825192；

所以，我们预估出2020.4.30-2021.4.30的u,d分别为

u=0.984901285,d=1.016551669。[[1]](#footnote-1)。

1. **由雪球产品的定义，表示出各种情况下收益率S的输出值。**

设时间为x。由于本题的时间范围是从2020年4月30日至2021年4月31日，共有243个工作日，所以二叉树的节点共有243个，共观察敲入243天（因为在非节点观察，结果也会与只观察前一天一样）设敲出观察点为Bn,n∈[1,243]。从第三个月开始，每月2日观察是否敲出（若当月2日为周末，则提前一天），设敲出观察点为An,n∈[1,10]。这样下来，敲出观察点有10个，分别是在x=41,62,85,105,122,144,165，187，202，224时观察。因为计算收益使用的是持有到期的真实天数，而不是工作日的数量，所以需要计算期权的观察点对应的在一年中的天数。它们分别为64，93，126，154，187，217，246，279，307，338[[2]](#footnote-2)(记为Cn，即变化后的An)。设无风险收益率为3%。

根据市场情况，该股票增长大于1.05的概率为1.22%，大于1.1的概率为0。所以选取比率1.05作为敲出值上限。

设股价为y（单位：元），则y1=12.97（2020.4.30）,yn为2021年4月30日的股价。S为收益率，最终收益为S\*本金，券商给客户的年化收益率为R。

y上代表敲出比率的临界值，即y上=1.05\*15.02；y下代表敲入比率的临界值，即y下=0.8\*15.02；y终代表雪球产品到期日股票价格,即y终=y243。

那么，由雪球产品的定义，我们可以得到各种情形下的收益率S：

当x=Bn时:

若yx＜y下,输出S=-max(y0-y终,0)=-max(y1-y243,0)；

若y＞y下，则继续观察；

当x=An时：

若yx＞y上，则终止观察，输出S=R\*Cn/365；（Cn为变化后的An）

若y下＜y＜y上，则继续观察；

当x=A10时：

若yx＜y上，则输出S=R\*360/365。

**3.利用蒙特卡罗法，模拟标的资产价格随机运动路径，得到产品的期望收益率S**

使用Matlab，随机生成股价，计算收益率，并计算n次，计算最后S的平均值作为期望收益率。

以模拟次数为5000次为例：

|  |
| --- |
| function SE=Compute\_SE  day=243; %总天数  p=0.5; %增长概率  u=0.984901285; %u  d=1.016551669; %d  n=5000; %总模拟次数  ynmax=1.05; %敲出判定线  ynmin=0.8; %敲入判定线  R=0.25; %标准年化收益率  ob=[41,62,85,105,122,144,165,187,202,224,0]; %观察日  Switch=[64,93,126,154,187,217,246,279,307,338];%对应转化的敲出情况下的真实计息日期  y=zeros(n,day); %变量初赋值  Bx=1:1:day;  S=zeros(2,n);  y(:,1)=12.97;%初始股价，即2020/4/30日的股价  ymax=ynmax\*y(:,1);  ymin=ynmin\*y(:,1);  k1=0;  k2=0;  k3=0;  A=[];  B=[];  for j=1:n  m=1;  Case=1; %Case记录状态：1为未敲入且未敲出，2为敲入且未曾敲出，3为敲出  for i=1:day-1  q=rand(1);  if q<p  y(j,i+1)=y(j,i)\*u;%增长  else  y(j,i+1)=y(j,i)\*d;%跌落  end    if (y(j,i+1)<ymin)%判定是否敲入  Case=2;  end    %判定是否敲出  if i==ob(m)&&Case~=3&&Case~=2    if y(j,i+1)>ymax  An=Switch(m);  Case=3;  A=[A,An];  end  m=m+1;  end    end  %plot(Bx,y(j,:));%绘图  %hold on;  if Case==1  S(1,j)=R\*360/365;  S(2,j)=1;  k1=k1+1;  elseif Case==2  S(1,j)=-max(0,(y(1,1)-y(j,day))/y(1,1));  S(2,j)=2;  k2=k2+1;  B=[B,S(1,j)];  else  S(1,j)=An\*R/365;  S(2,j)=3;  k3=k3+1;  end  %xlabel('天');  %ylabel('股价');  end  %disp(S); %输出S状态矩阵  SE=mean(S(1,:)); %计算S期望  P1=k1/n;%未敲入敲出概率  P2=k2/n;%敲入概率  P3=k3/n;%敲出概率  averageAn=mean(A);%平均敲出天数  averageB=mean(B);%平均敲入收益（仅计算敲入的情况下的平均收益）  averagey243=mean(y(:,243));%最终股价均值  disp(P1);%输出未敲入且未敲出  disp(P2);%输出敲入概率  disp(P3);%输出敲出概率  disp(averageAn);%输出平均敲出天数  disp(averageB);%输出平均敲入收益  disp(averagey243);%输出最终股价均值  end  结果：  >> Compute\_SE9  0.0462  0.1828  0.7710  115.1367  -0.1539  15.4368  ans =  0.0446 |

在结果中，前三个数字代表case1,case2,case3的概率，ans代表总的期望收益率。

即当模拟次数为5000次时，发生未敲入且未敲出事件的概率为4.62%，发生敲入且未敲出事件的概率为18.28%，发生敲出事件的概率为77.1%，总期望收益率S为4.46%。

**4.增加模拟次数，得出最终的预期收益率**

模拟次数（轨道数量）n=5000时，得出的结果（纵轴为股价y，横轴为时间x，单位为天，且仅计算工作日）：

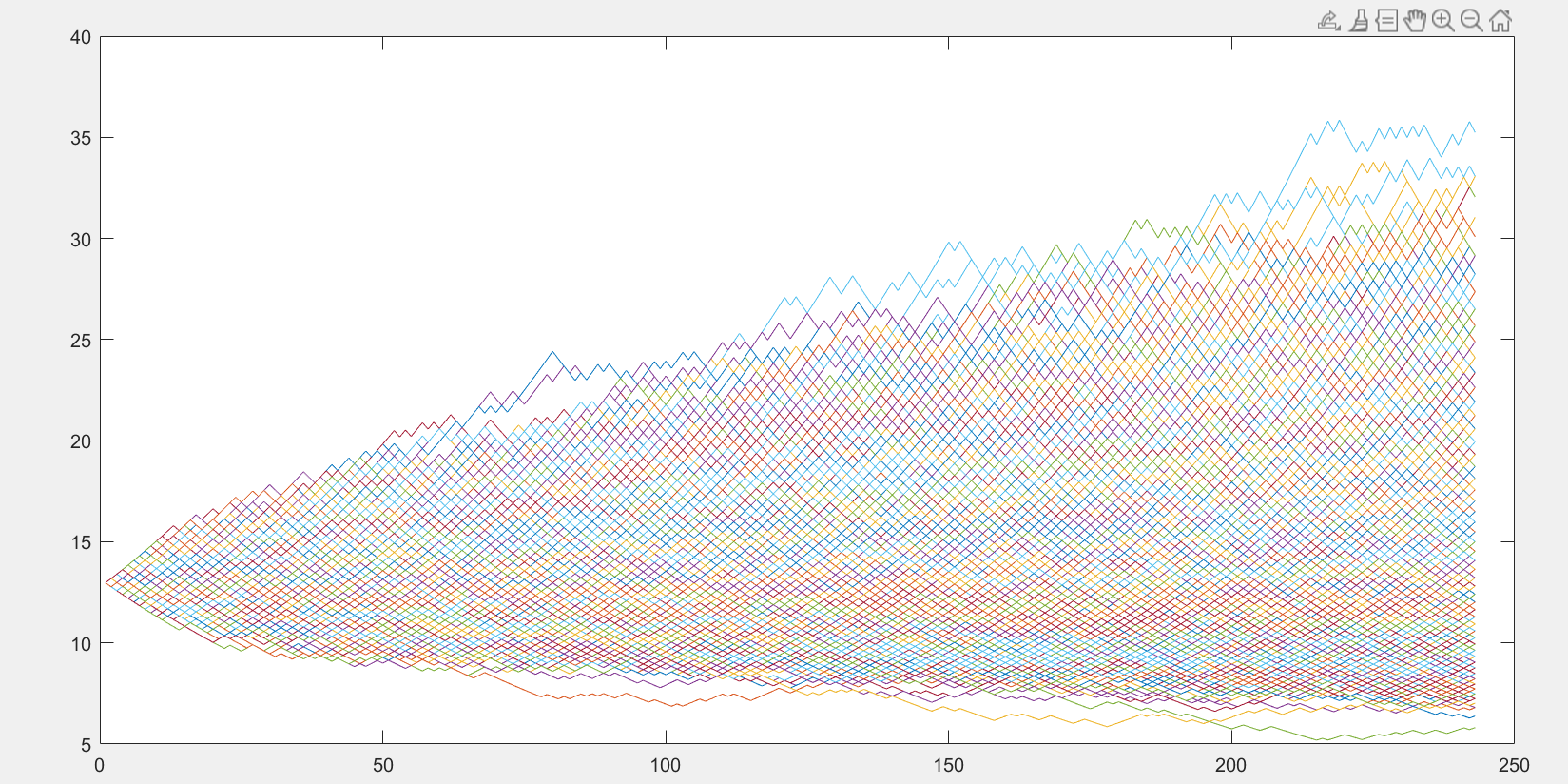


图 1 利用蒙特卡罗方法模拟出的股价变动情况

不断增加轨道数量，计算敲出、敲入的各情形轨道占比以及预期收益率S。

**方法一：**

将每次模拟所得到的所有收益率S求平均：

S=∑Si/n=∑每条模拟路线下的收益率/模拟次数n

即：（未敲入且未敲出轨道1的收益率+未敲入且未敲出轨道2的收益率+未敲入且未敲出轨道3的收益率+...未敲入且未敲出轨道k1的收益率+敲入且未敲出轨道1的收益率+...敲入且未敲出轨道k2的收益率+敲出轨道1的收益率+...+敲出轨道k3的收益率）/模拟次数n

k1+k2+k3=n，k1、k2、k3分别为三种情形的数量，由模拟的结果所决定，k1为未敲入且未敲出轨道的数量，k2为敲入且未敲出轨道的数量，k3为敲出轨道的数量。

这种计算方法最为精确。

表 1 风险中性测度下不同轨道数量下各情形占比及期望收益率

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 轨道数量 | 未敲入且未敲出轨道占比 | 敲入且未敲出轨道占比 | 未敲入且敲出轨道占比 | 总收益率期望 |
| 100条 | 0.05 | 0.14 | 0.81 | 4.92% |
| 1000条 | 0.051 | 0.198 | 0.751 | 4.51% |
| 5000条 | 0.0462 | 0.1828 | 0.771 | 4.46% |
| 10000条 | 0.0524 | 0.1825 | 0.7651 | 4.48% |
| 20000条 | 0.0513 | 0.1851 | 0.7635 | 4.40% |
| 50000条 | 0.051 | 0.1843 | 0.7647 | 4.42% |

**方法二：**

可以计算上述每一种情形的概率，以及对应情况的平均收益率，加权平均求得收益率。

S=每种情形下的收益率/模拟次数n=∑未敲入且未敲出轨道下的收益率\*未敲入且未敲出轨道出现的概率+∑敲入且未敲出轨道下的收益率\*敲入且未敲出轨道出现的概率+∑敲出轨道下的收益率\*敲出轨道的概率=∑Si1\*k1/n+∑Si2\*k2/n+∑Si3\*k3/n。

以模拟次数n=50000为例[[3]](#footnote-3)：

表 2 分类加权法计算总期望收益率

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 轨道数量 | 未敲入且未敲出轨道占比 | 敲入且未敲出轨道占比 | 未敲入且敲出轨道占比 |
| n=50000 | 5.10% | 18.43% | 76.47% |
| 各情形下的估计收益率 | 24.66% | -15.41% | 7.78% |
| 总期望收益率 | 4.37% | | |

与方法一的结果相近。

**5.计算出雪球产品价格**

根据定价原理，我们有：

雪球的产品价格=雪球产品的预期收益率S\*本金

本金=100万元，故

雪球的产品价格=雪球产品的预期收益率S\*100万

由于无风险利率为3%，故贴现率为3%：

雪球的产品价格贴现值=(雪球产品的预期收益率S\*100万)\*e^(-3%\*1)

由此我们计算出不同模拟次数下，雪球的产品价格。

下图展示了在不同的轨道数量下雪球产品的定价结果，随着模拟数量的增加，蒙特卡罗定价的结果逐渐收敛。当轨道数量为10000条时，该雪球产品收益部分的贴现价值为 43475.96元。大约在5万次模拟之后，结果收敛到误差范围内，雪球产品收益部分的贴现价值为42893.70元。

图 2 雪球的定价贴现值（单位：元）随着模拟次数的增多而收敛

故我们将雪球产品的价格定为42893.7元。

# 四、模拟运行结果



结合2020年4月30日至2021年4月30日的葵花药业股价变动数据对雪球期权一年的运行结果进行模拟。

2020年4月30日至2021年4月30日，葵花药业股票（002737.SZ）整体呈平稳状态，价格变化幅度不大。

图中蓝色竖线为每月敲出观察日，红色横线为敲出水平（105%），绿色横线为敲入水平（80%）。

雪球产品在整个运行过程中未发生敲入；在观察日9月2日敲出，合约提前终止。

# 五、对冲方案

## （一）对冲模型原理介绍

Delta对冲是期权产品最常使用而简洁易懂的对冲策略。Delta值(δ)，又称对冲值，指的是衡量标的资产价格变动时，期权价格的变化幅度。用公式表示为：Delta=期权价格变化/标的资产的价格变化。

因此，我们先借助BSM定价模型，确定期权价格与标的股票价格之间的关系，并对其关于股票价格的一阶导数，代入数据即可得到delta的值。

由B-S-M定价公式知：

C=S·N(d1)-X·exp(-r·T)·N(d2)

d1=[ln(S/X)+(r+0.5σ^2)T]/(σ√T)、

d2=d1-σ·√T

*C-期权初始合理价格；X-期权执行价格；S-所交易金融资产现价；T-期权有效期；r-连续复利计无风险利率；*

*σ-股票连续复利(对数)回报率的年度波动率(标准差)*

C(S,t)表示看涨期权的价格。但是由于雪球产品相当于看跌期权，结合售出-购进平价理论（Put-callparity)和原有BSM定价模型，可以得出看跌期权的的定价模型为：

C=X·exp(-r·T)·[1-N(d2)]-S·[1-N(d1)]

对C求关于S的一阶导数得[N(d1)-1]，因此看跌期权的delta值应为[N(d1)-1]。

我们在期初时利用delta值进行一次对冲操作，并在每月敲出观察日计算新的delta值来调整持股数量，具体操作如下所示。

## （二）具体对冲操作

**对冲操作计算及策略**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **对冲日期** | **2020/4/30** | **2020/6/2** | **2020/7/2** | **2020/7/31** |
| **S0** | 12.97 | 12.97 | 12.97 | 12.97 |
| **σ** | 0.0158 | 0.0158 | 0.0158 | 0.0158 |
| **K** | 12.97 | 12.97 | 12.97 | 12.97 |
| **St** | 12.97 | 13.58 | 14.61 | 15.67 |
| **T** | 1 | 0.916666667 | 0.833333333 | 0.75 |
| **r** | 3% | 3% | 3% | 3% |
| **d1** | 0.244952667 | 0.429421612 | 0.753179273 | 1.098722471 |
| **N(d1)-1=△** | -0.403246541 | -0.333808214 | -0.225671096 | -0.135944569 |
| **卖出的期权数**  (本金/期初股价) | 77101 | 77101 | 77101 | 77101 |
| **应持有股票数** | 31091 | 25737 | 17399 | 10481 |
| **股票数量变动** | 31091 | -5354 | -8337 | -6918 |
| **操作** | 期初买入31091股股票 | 卖出5354股股票 | 卖出8337股股票 | 卖出6918股股票 |

基于以上运行结果，期权在9月2日敲出，因此我们将在期权运行期间执行4次对冲，对冲日期分别为2020/4/30,2020/6/2,2020/7/2,2020/7/31.操作方法如表所示。

其中So为2020/4/30日葵花药业股票价格，σ为年化波动率，K为行权价格，St为对冲日期当日股价，r为无风险利率。根据delta，可以计算出需要购买的股票数量，以达成对冲平衡的目的。详细计算过程见《金融工程附件.xlsx》（对冲策略）。

# 六、收益分析

（一）投资者的最终收益

观察日9月2日雪球产品敲出，故合约提前终止，则：

T = 120

由此可得投资者收益为：

25%×T/365×本金 = 25%×120/365×100万 ≈ 82191.78元

由于雪球产品价格（期权费）为42893.7元，无风险利率r为3%,则合约结束时价格为：

42893.7×e^(3%×120/360） = 43324.79元

故投资者的最终收益为：

82191.78 - 43324.79= 38866.99元

（二）券商的最终收益

券商的最终损益可以看作包括三部分：

期权费-投资者收益+股票对冲交易过程产生的收益

以下为在不同对冲日期的现金流量表（具体计算公式详见《金融工程附件.xlsx》）：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **对冲日期** | **2020/4/30** | **2020/6/2** | **2020/7/2** | **2020/7/31** | **2020/9/2** |
| **期权费** | 42893.70 | - | - | - | - |
| **支付投资者收益** | - | - | - | - | -82191.78 |
| **St** | *12.97* | *13.58* | *14.61* | *15.67* | *18.84* |
| **对冲操作** | *买入31091股* | *卖出5354股* | *卖出8337股* | *卖出6918股* | *卖出10481股* |
| **对冲股票的收益** | -403246.54 | 72704.12 | 121810.59 | 108405.14 | 197994.83 |
| ***r*** | *3%* | *3%* | *3%* | *3%* | *3%* |
| **每期贴现值** | -363974.45 | 73251.45 | 122421.16 | 108676.49 | 115803.05 |
| **对冲前总收益** | **-38866.99** | | | | |
| **对冲后总收益** | **56177.71** | | | | |

由上表可知，通过进行对冲，券商的总收益变为正值，最终收益为56177.71元。

1. 详细计算见EXCEL（2019-2020） [↑](#footnote-ref-1)
2. 详细计算见EXCEL（2020-2021） [↑](#footnote-ref-2)
3. 详细过程见EXCEL（定价） [↑](#footnote-ref-3)