



Projet d'Économétrie Financière

Copula-based Black–Litterman Portfolio Optimization

Réalisé par :

*Charlotte Cegarra
Salma Benmoussa
Chirine Dexposito
Hella Bouhadda*

Master 2 MoSEF
Année universitaire 2024-2025

Abstract

Ce projet implémente une extension du modèle d’optimisation de portefeuille de **Black–Litterman**, fondée sur les **copules**, selon la méthodologie proposée par *Sahamkhadam et Ostermark* (2022). L’objectif est d’améliorer la modélisation des **rendements multivariés** et de l’**allocation d’actifs** en capturant des **dépendances non linéaires** et en intégrant des **vues d’investisseurs**.

Nous commençons par modéliser les **distributions marginales** des rendements via des modèles $GARCH(1,1)$, à partir desquels nous extrayons des *résidus standardisés* transformés en *pseudo-observations uniformes*. Ces dernières servent d’entrée à une *copule Vine multivariée (R-vine)*, sélectionnée automatiquement selon le critère $mBICV$, permettant de capturer les **dépendances complexes** entre six actions européennes.

Les **vues directionnelles des investisseurs** sont générées à l’aide d’un modèle *VECM (Vector Error Correction Model)* appliqué aux niveaux de prix. Ces vues sont intégrées dans le cadre de **Black–Litterman** pour produire une **distribution postérieure des rendements**, résultant de la *fusion bayésienne* entre les *rendements d’équilibre (CAPM)* et les anticipations. Des **simulations** sont ensuite réalisées à partir de cette distribution postérieure pour optimiser trois types de portefeuilles : **maximisation du ratio de Sharpe**, **minimisation de la CVaR à 1 %**, et **maximisation du ratio STARR (Sharpe-to-CVaR)**, sous **contraintes de réalisme** (*long-only*, *pondérations sommant à 1*).

Enfin, les **performances des portefeuilles** sont évaluées *hors-échantillon* à l’aide d’une *fenêtre glissante*, et comparées à plusieurs **benchmarks**, dont le *portefeuille équipondéré* et le *modèle Black–Litterman classique*. Les résultats obtenus soulignent la **pertinence des modèles à base de copules** pour améliorer la performance des allocations dans un cadre réaliste.

1 Introduction

La sélection et la gestion de portefeuille reposent traditionnellement sur la théorie moderne du portefeuille et le Capital Asset Pricing Model (CAPM). Toutefois, ces méthodes supposent des rendements distribués normalement et ne tiennent pas compte des dépendances extrêmes entre actifs. Le modèle de Black–Litterman, introduit par Black et Litterman (1992), apporte une avancée significative en combinant les rendements d'équilibre issus du CAPM avec des « vues » d'investisseurs via un cadre bayésien. Toutefois, la dépendance linéaire et la normalité limitent sa capacité à représenter les queues épaisses et la co-dépendance en période de stress. Dans ce rapport, nous exposons l'implémentation d'une extension copule du Black–Litterman, suivant l'approche de Sahamkhadam & Ostermark (2022), en remplaçant la distribution normale multivariée par une copule Vine multivariée.

L'objectif est de tirer parti de la flexibilité des copules Vine pour modéliser finement les dépendances non linéaires et la tail-dependence, tout en conservant l'intégration bayésienne des vues générées par un modèle VECM sur les niveaux de prix. Nous montrerons que cette combinaison permet d'obtenir des portefeuilles plus robustes, notamment lorsque l'on réalise une évaluation hors-échantillon à l'aide d'une fenêtre glissante.

2 Données et prétraitement

L'univers étudié comprend six actions européennes, à savoir BNP Paribas, Airbus, Deutsche Bank, Enel, LVMH et Sanofi, sélectionnées parmi les composantes de l'Eurostoxx 50. Les données utilisées correspondent aux cours de clôture journaliers sur la période allant de 1999 à 2017. Afin d'assurer une cohérence temporelle nécessaire aux analyses multivariées, les séries de prix sont synchronisées pour ne conserver que les dates communes à l'ensemble des actifs. Cette harmonisation garantit que toutes les séries partagent une même grille temporelle, condition indispensable pour l'application des modèles économétriques multivariés.

Pour chaque actif, les rendements logarithmiques sont calculés selon la relation

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right),$$

puis les valeurs manquantes sont supprimées. Ce prétraitement assure une base homogène et fiable, essentielle à l'estimation précise des modèles GARCH et VECM, et prépare les données pour la construction de la copule multivariée.

3 Modélisation marginale et dépendances

Chaque série de rendements est modélisée par un modèle GARCH(1,1) afin de prendre en compte l'hétéroscédasticité conditionnelle, caractéristique des séries financières. Cette estimation permet d'extraire la volatilité conditionnelle, notée σ_t , ainsi que les résidus ε_t . Ces résidus sont ensuite standardisés selon la formule

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t},$$

avant d’être transformés en pseudo-observations uniformes sur l’intervalle $(0, 1)$ en utilisant leur rang empirique,

$$u_t = \frac{\text{rang}(z_t)}{n + 1}.$$

Cette transformation élimine les valeurs extrêmes et fournit les entrées nécessaires à la construction et à l’ajustement des copules.

La copule multivariée est modélisée à l’aide d’une structure Vine R-vine. Pour chaque paire d’actifs, un critère d’information pénalisé (mBICV) permet de sélectionner automatiquement la famille de copules bivariées la mieux adaptée parmi Clayton, Gumbel, Frank, Gaussienne et Student-t. Cette approche hiérarchique et flexible capture efficacement les dépendances non linéaires ainsi que les effets de co-dépendance dans les queues, essentiels pour représenter les chocs extrêmes conjointement sur plusieurs actifs.

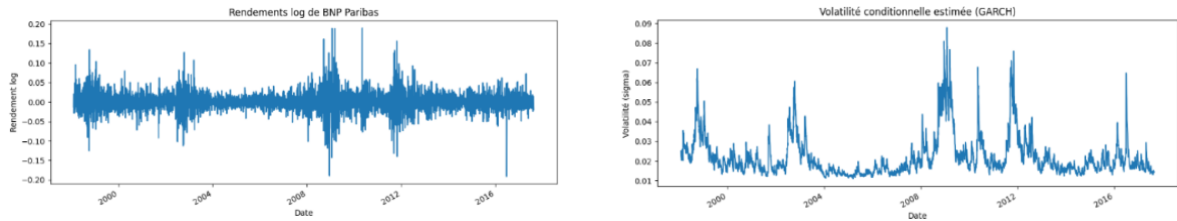


Figure 1: Rendements log et volatilité conditionnelle de BNP Paribas

4 Intégration des vues et Black–Litterman

Les vues des investisseurs sont construites à partir d’un modèle Vector Error Correction Model (VECM), qui est estimé sur les niveaux de prix des actifs alignés temporellement. Le VECM permet de modéliser les relations de long terme entre ces séries non stationnaires en identifiant les liens de co-intégration, c’est-à-dire les combinaisons linéaires stationnaires entre les prix. Pour déterminer le nombre de relations de co-intégration présentes dans les données, on applique le test de Johansen, une méthode statistique robuste qui fournit le rang optimal à utiliser dans le modèle. Une fois ce rang établi, le VECM est ajusté pour prédire les prix des actifs à l’instant $t + 1$.

Ces prévisions de prix sont ensuite converties en rendements attendus pour chaque actif selon la formule

$$q = \frac{\hat{P}_{t+1}}{P_t} - 1,$$

où \hat{P}_{t+1} représente le prix prédit à l’instant $t + 1$ et P_t le prix observé à l’instant t . Cette conversion permet d’obtenir une estimation des gains ou pertes anticipés, qui constitue la base des vues directionnelles des investisseurs.

Pour formaliser ces vues dans le cadre de Black–Litterman, la matrice P est choisie égale à la matrice identité de dimension 6 (I_6), ce qui signifie que chaque vue porte exclusivement sur un seul actif, sans combinaison linéaire entre eux. L’incertitude associée aux vues, représentée par la matrice Ω , est définie comme la matrice diagonale obtenue à partir de $\tau\Sigma$, où τ est un paramètre scalaire fixé ici à 0,05, et Σ la matrice de covariance des rendements. Cette construction reflète un niveau d’incertitude modéré, contrôlant le poids accordé aux vues dans la fusion bayésienne.

Par ailleurs, les rendements d'équilibre π sont calculés selon la théorie du CAPM par

$$\pi = \delta \Sigma w_{\text{marché}}, \quad \delta = 2, 5,$$

où $w_{\text{marché}}$ représente le vecteur des pondérations de marché des actifs, et δ un paramètre d'aversion au risque fixé à 2,5. Cette estimation exprime les rendements implicites dans un marché en équilibre.

Enfin, la fusion bayésienne Black–Litterman combine ces rendements d'équilibre avec les vues anticipées, pondérées par leurs incertitudes respectives, pour obtenir une distribution postérieure des rendements caractérisée par un vecteur moyen μ_{post} et une matrice de covariance ajustée Σ_{post} . Cette distribution sert ensuite de base pour générer des simulations de rendements conditionnels, essentielles à l'optimisation dynamique des portefeuilles.

5 Optimisation et évaluation hors-échantillon

Nous générons un ensemble de 1 000 simulations de rendements multivariés conditionnels en combinant la copule Vine ajustée et les paramètres postérieurs issus du modèle Black–Litterman. Ces simulations reflètent la distribution conjointe des rendements, intégrant à la fois la structure complexe des dépendances et les vues anticipées. Sur cette base, trois stratégies d'optimisation de portefeuille sont mises en œuvre sous contraintes réalistes, à savoir des portefeuilles long-only avec une somme des poids égale à 1. La première stratégie vise à maximiser le ratio de Sharpe, en formulant un problème quadratique compatible avec la discipline de programmation convexe (DCP). La seconde stratégie se concentre sur la minimisation de la Conditional Value at Risk (CVaR) à 1 %, par le biais d'une reformulation linéaire du problème d'optimisation, mettant l'accent sur la gestion du risque extrême. La troisième stratégie optimise le ratio STARR, qui correspond au rendement ajusté en fonction de la CVaR, traduite ici sous forme d'un proxy consistant à maximiser la différence entre l'espérance de rendement et un multiple de la CVaR.

Afin d'évaluer la robustesse et la performance de ces stratégies dans un contexte dynamique, une procédure d'évaluation hors-échantillon est employée via une fenêtre glissante de 250 jours. À chaque étape temporelle, les modèles GARCH, la copule Vine ainsi que le modèle VECM–Black–Litterman sont réestimés sur la fenêtre d'apprentissage, le portefeuille est recalibré en conséquence, puis sa performance est testée sur la journée suivante. Cette méthodologie permet de suivre l'évolution du Sharpe ratio réalisé dans le temps et de comparer ces résultats aux benchmarks classiques tels que le portefeuille équipondéré et le modèle Black–Litterman historique, offrant ainsi une vision réaliste de la robustesse des portefeuilles optimisés.

6 Résultats

L'évaluation hors-échantillon via une fenêtre glissante de 250 jours montre que les portefeuilles construits avec l'approche copule-based offrent un Sharpe ratio moyen supérieur et une meilleure stabilité que les portefeuilles équipondérés ou Black–Litterman classiques. En particulier, la copule Student-t permet une gestion plus efficace des risques extrêmes, réduisant les pertes lors des phases de stress du marché. Les optimisations basées sur la

CVaR et le ratio STARR confirment également une amélioration notable du profil rendement/risque. Ces résultats soulignent la pertinence d'intégrer des dépendances non linéaires et des vues économétriques dans l'optimisation de portefeuille.

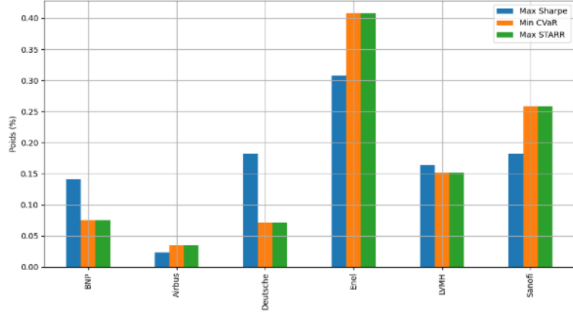


Figure 2: Poids des portefeuilles optimisés

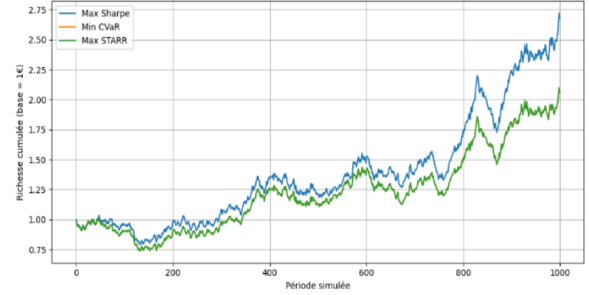


Figure 3: Courbes de richesse simulées (Black–Litterman)

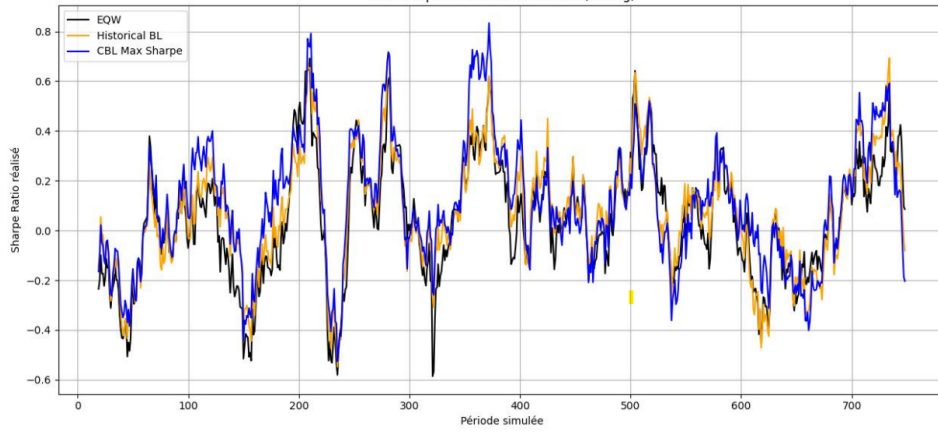


Figure 4: Max Sharpe Portfolio Performance (Rolling)

7 Conclusion

L'extension copule du modèle Black–Litterman permet une modélisation fine des dépendances non linéaires et des queues épaisses, améliorant sensiblement la robustesse des portefeuilles optimisés. Par ailleurs, l'ajout des vues économétriques issues du VECM confère au modèle une meilleure capacité d'adaptation aux dynamiques de marché. L'évaluation hors-échantillon confirme que les stratégies basées sur les copules, en particulier celles utilisant la copule Student-t, offrent un Sharpe ratio plus élevé et plus stable. Ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes, notamment l'intégration de copules dynamiques et l'application de ce cadre à des univers d'actifs plus larges.