EEE5062计算方法 作业三

习题P94：4(2)、8、13、15、17、18

作业提交DDL：2022/3/24 23:59前

姓名：江宇辰　　　学号：11812419　　　提交时间：2022.03.23

Q4（2）

4. 计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3$；

(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$；

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$，m 与 n 为正整数.

解：根据范数的定义：

$||f||_\infty = max_{a\le x\le b}|f(x)| = max_{0\le x\le 1}|f(x)| = 0.5$

$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx = \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|dx = 0.25$

$||f||_2 = (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Q8

8. 对权函数 $\rho(x)=1+x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x)$，$n=0,1,2,3$.

解：由题意得：内积 $(f,g)=\int_{-1}^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$

首项系数为1时，$\varphi_0(x)=1$

根据正交多项式的性质，$\alpha_0=(x\varphi_0,\varphi_0)/(\varphi_0,\varphi_0)=(\int_{-1}^1 x(1+x^2)dx)/(\int_{-1}^1 1+x^2dx)=0, \varphi_{-1}(x)=0$

故 $\varphi_1(x)=(x-\alpha_0)\varphi_0(x)-\beta_0\varphi_{-1}(x)=(x-0)*1-0=x$ 且同理可得 $\alpha_1=(x\varphi_1,\varphi_1)/(\varphi_1,\varphi_1)=0$
$\beta_1=(\varphi_1,\varphi_1)/(\varphi_0,\varphi_0)=\frac{2}{5}$

故 $\varphi_2(x)=(x-\alpha_1)\varphi_1(x)-\beta_1\varphi_0(x)=(x-0)*x-\frac{2}{5}=x^2-\frac{2}{5}$，且 $\alpha_2=(x\varphi_2,\varphi_2)/(\varphi_2,\varphi_2)=0$
$\beta_2=(\varphi_2,\varphi_2)/(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{17}{70}$

故 $\varphi_3(x)=(x-\alpha_2)\varphi_2(x)-\beta_2\varphi_1(x)=(x-0)*(x^2-\frac{2}{5})-\frac{17}{70}*x=x^3-\frac{9}{14}x$

综上，$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$，$\varphi_3(x)=x^3-\frac{9}{14}x$.

Q13

13. 求 $f(x)=x^3$ 在 $[-1,1]$ 上关于 $\rho(x)=1$ 的最佳平方逼近二次多项式.

解：取 $\Phi=span\{1,x,x^2\},[a,b]=[-1,1],\rho(x)=1$，则 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2$

$(f,g)=\int_{-1}^1 \rho(x)f(x)g(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

故 $(\varphi_0,\varphi_0)=2,(\varphi_0,\varphi_1)=0,(\varphi_0,\varphi_2)=\frac{2}{3}$

$(\varphi_1,\varphi_0)=0,(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{2}{3},(\varphi_1,\varphi_2)=0$

$(\varphi_2,\varphi_0)=\frac{2}{3},(\varphi_2,\varphi_1)=0,(\varphi_2,\varphi_2)=\frac{2}{5}$

$(f,\varphi_0)=0,(f,\varphi_1)=\frac{2}{5},(f,\varphi_2)=0$

设所求$p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$,得法方程

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a0\\a1\\a2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\(f,\varphi_2)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\0 & \frac{2}{3} & 0\\\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a0\\a1\\a2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{5}\\0\end{bmatrix}$$

解得：$a_0=0,\ a_1=\frac{3}{5},\ a_2=0$

故 最佳平方逼近二次多项式为 $p_2(x)=\frac{3}{5}x.$

Q15

15. $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，在$[-1,1]$上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式.

解：设$\{P_n\}_0^\infty$ 为勒让德多项式，故根据勒让德多项式的正交性，$(P_n,P_n)=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1},n=0,1,2,\ldots$ (此时$\rho(x)=1$)

又根据勒让德多项式的的递推关系，$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-3x)$ 可知：

$(P_0,f)=\int_{-1}^{1}sin\frac{\pi}{2}xdx=0,(P_1,f)=\int_{-1}^{1}xsin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{8}{\pi^2}$

$(P_2,f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^2-1)sin\frac{\pi}{2}xdx=0,(P_3,f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(5x^2-3x)sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$

故 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为
$\sum_{j=0}^{3}\frac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}P_j=0+\frac{8}{\pi^2}*\frac{3}{2}*P_1(x)+0+\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}*\frac{7}{2}*P_3(x)=\frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3+\frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}x\approx-0.562x^3+1.553x$
.

Q17

17. 已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差.

解：由题意得：$\Phi=\{1,x^2\}$

故
$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{j=0}^{4}1^2=5,(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2=5327,(\varphi_1,\varphi_0)=(\varphi_0,\varphi_1)=5327,(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{j=0}^{4}x_j^4=7277699$

$(y,\varphi_0)=\sum_{j=0}^{4}y_j=271.4,\ (y,\varphi_1)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2y_j=369.5$

得法方程组 $\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5 & 5327\\5327 & 7277699\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}271.4\\369.5\end{bmatrix}$

解得：$a\approx0.9726,\ b\approx0.0500$，故经验公式为$y=0.9726+0.0500x^2$

均方误差为 $\delta=\{\sum_{j=0}^{4}[y(x_j)-y_j]^2\}\approx0.1226.$

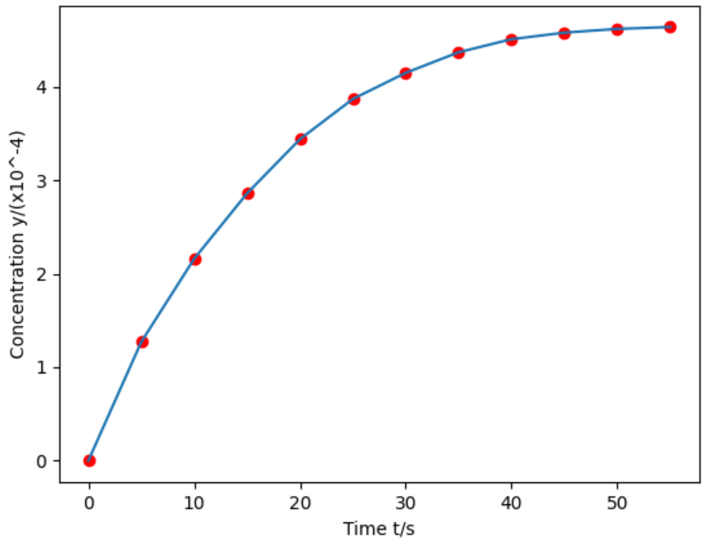
Q18

18. 在某化学反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t/s	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y/(\times10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y=f(t)$.

解:



根据绘制结果可知，无法直接使用线性模型拟合，观察图像可建立拟合模型$y = ae^{-\frac{b}{t}}$,取对数得 $lny = lna - \frac{b}{t}$

记$lna = A$，$\Phi = \{1, -\frac{1}{t}\}$，此时定义内积$(f, g) = \sum_{j=1}^{11} f(t_j)g(t_j)$

故

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{j=1}^{11} 1^2 = 11, (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{j=1}^{11} -\frac{1}{t_j} \approx -0.60398, (\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_0, \varphi_1) = -0.60398, (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{j=1}^{11} \frac{1}{t_j^2} \approx 5.03249$$

$$(lny, \varphi_0) = \sum_{j=1}^{11} lny_j \approx -87.67410,\ (y, \varphi_1) = \sum_{j=1}^{11} -\frac{lny_j}{t_j} \approx 5.03249$$

得法方程组 $\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 11 & -0.60398 \\ -0.60398 & 5.03249 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -87.67410 \\ 5.03249 \end{bmatrix}$

解得：$A \approx -7.55878,\ b \approx 7.49617$，故$a = e^A \approx 5.2151 * 10^{-4}$

综上，拟合模型为$y = 5.2151e^{-\frac{7.4962}{t}} * 10^{-4}$