# EEE5062计算方法 作业七

习题P209：1、7、8、9(选做)

作业提交DDL：2022/5/11　16:00前

姓名：江宇辰　　　学号：11812419　　　提交时间：2022.05.09

## Q1

1. 设线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12, \\ -x_1+4x_2+2x_3=20, \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3. \end{cases}$$

(1) 考察用雅可比迭代法，高斯-塞德尔迭代法解此方程组的收敛性；

(2) 用雅可比迭代法及高斯-塞德尔迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止.

**解**：（1）由题意得：由于系数矩阵按行严格对角占优，故雅可比法与高斯-塞德尔迭代法均可收敛。

（2）雅可比法：

建立迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代18次时，满足精度要求，此时 $x^{(18)}=(-3.9999964,2.9999739,1.9999999)^T$

高斯-塞德尔法：

建立迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代8次时，满足精度要求，此时 $x^{(18)}=(-4.000036,2.999985,2.000003)^T$

## Q7

7. 用 SOR 方法解线性方程组(分别取松弛因子 $\omega=1.03$，$\omega=1$，$\omega=1.1$)

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

精确解 $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T$. 要求当 $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < 5\times10^{-6}$ 时迭代终止，并且对每一个 $\omega$ 值确定迭代次数.

**解**：由题意得：

SOR方法的迭代公式为

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega(\frac{1}{4} - x_1^{(k)} + \frac{1}{4}x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega(1 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \end{cases}$$

取初值$x^{(0)} = (0,0,0)^T$

当$\omega = 1.03$时，迭代次数为5次以满足精度要求，此时 $x^{(5)} = (0.5000043, 0.1000001, -0.4999999)^T$

当$\omega = 1$时，迭代次数为6次以满足精度要求，此时 $x^{(6)} = (0.5000038, 0.1000002, -0.4999995)^T$

当$\omega = 1.1$时，迭代次数为6次以满足精度要求，此时 $x^{(6)} = (0.5000035, 0.9999989, -0.5000003)^T$

# Q8

8. 用 SOR 方法解线性方程组(取 $\omega=0.9$)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

要求当 $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$ 时迭代终止.

**解**：由题意得：

SOR方法的迭代公式为

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega(-x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega(\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega(-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} + \frac{3}{10}) \end{cases}$$

取初值$x^{(0)} = (1,1,1)^T$

当$\omega = 0.9$时，迭代次数为8次以满足精度要求，此时
$x^{(8)} = (-4.000027, 0.2999989, 0.2000003)^T$

# Q9

9. 设有线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，迭代公式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

试证明当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时上述迭代法收敛(其中 $0<\alpha\leqslant\lambda(\boldsymbol{A})\leqslant\beta$).

**解**：由题意得：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}) = Ix^{(k)} + \omega b - \omega Ax^{(k)} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

故迭代矩阵为$I - \omega A$,特征值为$\lambda(B) = 1 - \omega\lambda(A)$

由$0 < \omega < \dfrac{2}{\beta}$ 且 $0 < \alpha \leq \lambda(A) \leq \beta$ 得：$0 < \omega\lambda(A) < \dfrac{2}{\beta} * \beta = 2$

故 $|\lambda(B)| = |1 - \omega\lambda(A)| < 1$, 则矩阵谱半径 $\rho(B) < 1$

故上述迭代法收敛。