EEE5062计算方法 作业五

习题P95：P135：1(1)、2(1)、6、8(1)、10、14、18

作业提交DDL：2022/4/19 16:20前

姓名：江宇辰　　学号：11812419　　提交时间：2022.04.19

Q1(1)

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

解：根据题意，将$f(x)=1,x,x^2$ 代入求积公式中，可得：

$$\begin{cases} 2h = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = -hA_{-1} + 0 + hA_1 \\ \frac{2}{3}h^3 = h^2A_{-1} + 0 + h^2A_1 \end{cases}$$

解得：待定参数为$A_{-1}=\frac{h}{3}, A_0=\frac{4h}{3}, A_1=\frac{h}{3}$.故求积公式具有2次代数精度。

验证更高次：$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3dx = 0$ 且 $A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h) = -\frac{h^4}{3}+0+\frac{h^4}{3}=0$

$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4dx = \frac{2}{5}h^5$ 但 $A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h) = \frac{h^5}{3}+0+\frac{h^5}{3}=\frac{2}{3}h^5 \neq \frac{2}{5}h^5$

故所构造的求积公式具有3次代数精度。

Q2(1)

2. 分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x, n=8$；

解：步长$h=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$

根据复化梯形公式：$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]=\frac{1}{16}[f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)]=0.1114$

根据复化辛普森公式：

$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]=\frac{1}{48}[f(0)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(1)]=0.1116$

Q6

6. 若用复合梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$，问区间$[0,1]$应分多少等份才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$？若改用复合辛普森公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应分多少等份？

解：设区间应分成n等分以满足条件，故步长$h=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

由复化梯形公式的余项可知：$R_T=-\frac{(b-a)}{12}h^2f''(\eta)\ \eta\in[a,b]$，又$f''(x)=e^x$, 故

$|R_T|\le|-\frac{(b-a)}{12}h^2f''(1)|=\frac{1}{12n^2}e\le\frac{1}{2}*10^{-5}$

解得：$n\ge 212.9$,取$n=213$, 故区间分成213等分时，使用复化梯形公式的截断误差不超过$\frac{1}{2}*10^{-5}$.

同理，由复化辛普森公式的余项可知$R_S=-\frac{(b-a)}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)\ \eta\in[a,b]$，又$f^{(4)}(x)=e^x$, 故

$|R_S|\le|-\frac{(b-a)}{2880}h^4f^{(4)}(1)|=\frac{1}{2880n^4}e\le\frac{1}{2}*10^{-5}$

解得：$n\ge 3.7$,取$n=4$, 故区间分成8等分时，使用复化辛普森公式的截断误差不超过$\frac{1}{2}*10^{-5}$.

Q8(1)

8. 用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过 10^{-5}.

(1) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

解：由题意得：$a=0,b=1,f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$

$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.771743$

$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0.728070$

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=0.716983$

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})]=0.714200$

$T_{16}=\frac{1}{2}T_8+\frac{1}{16}[f(\frac{1}{16})+f(\frac{3}{16})+f(\frac{5}{16})+f(\frac{7}{16})+f(\frac{9}{16})+f(\frac{11}{16})+f(\frac{13}{16})+f(\frac{15}{16})]=0.713504$

$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=0.713512$

$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=0.713287$

$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=0.713273$

$S_8=\frac{4}{3}T_{16}-\frac{1}{3}T_8=0.713272$

$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=0.713272$

$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2=0.713272$

$C_4=\frac{16}{15}S_8-\frac{1}{15}S_4=0.713272$

$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=0.713272$

$R_2=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=0.713272$

由于 $|R_1-R_2|\le 10^{-5}$, 故积分结果为0.713272。

Q10

10. 试构造高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1).$$

解：由题意得，高斯型求积公式其节点为关于权函数$\rho(x)=\sqrt{x}$的正交多项式零点x_0,x_1，设 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2+bx+c$, 由正交性知$\omega(x)$与1及x带权正交，即得

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\omega(x)dx=0,\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}x\omega(x)dx=0$$

于是得 $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}c=0$, $\frac{2}{7}+\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}c=0$

由此解得：$b=-\frac{9}{14},c=-\frac{3}{70}$，即 $\omega(x)=x^2-\frac{9}{14}x-\frac{3}{70}$

令$\omega(x)=0$, 则得 $x_0=0.703755,x_1=-0.060898$

由于两个节点的高斯型求积公式具有3次代数精度，故公式对$f(x)=1,x$ 精确成立，即

当$f(x)=1$时，$A_0+A_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=-\frac{2}{3}$

当$f(x)=x$时，$A_0x_0+A_1x_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}xdx=\frac{2}{3}$

由此解出 $A_0=-1.485428,A_1=0.818761.$

故高斯型求积公式为$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx\approx-1.485428f(0.703755)+0.818761f(-0.060898)$

Q14

14. 用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$,并比较结果.

(1) 龙贝格方法；

(2) 三点及五点高斯公式；

(3) 将积分区间分为四等份,用复合两点高斯公式.

解：1) 由题意得：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_0^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333333				
1	1.166667	1.111111			
2	1.166667	1.100000	1.099259		
3	1.103211	1.098725	1.098640		
4	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613

故积分结果为1.098613.

2）使用高斯公式将区间变换至$[-1,1]$, 作变换 $y=t+2$, 当$1 \le y \le 3, -1 \le t \le 1$且$dy=dt$，故$\int_1^3 \frac{dy}{y} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+2}$

使用三点高斯公式：

$$\int_1^3 \frac{dy}{y} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+2} \approx 0.5555556*(\frac{1}{2-0.7745967}+\frac{1}{2+0.7745967})+0.8888889*\frac{1}{2+0} = 1.098039$$

使用五点高斯公式：

$$\int_1^3 \frac{dy}{y} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+2} \approx 0.2369269*(\frac{1}{2-0.9061798}+\frac{1}{2+0.9061798})+0.4786289*(\frac{1}{2-0.5384693}+\frac{1}{2+0.5384693})+0.5688889*\frac{1}{2+($$

3）将区间$[1,3]$分成四等分，在每个区间上使用两点高斯公式，得：

$$I = I_1+I_2+I_3+I_4 = \int_1^{1.5}\frac{dy}{y}+\int_{1.5}^2\frac{dy}{y}+\int_2^{2.5}\frac{dy}{y}+\int_{2.5}^3\frac{dy}{y} = \int_{-1}^1\frac{0.5}{2.5+0.5t}dt+\int_{-1}^1\frac{0.5}{3.5+0.5t}dt+\int_{-1}^1\frac{0.5}{4.5+0.5t}dt+\int_{-1}^1\frac{0.5}{5.5+0.5t}d$$

$$\approx 0.5*(\frac{1}{2.5+0.5*\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{2.5+0.5*(-\frac{1}{\sqrt{3}})})+0.5*(\frac{1}{3.5+0.5*\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{3.5+0.5*(-\frac{1}{\sqrt{3}})})+0.5*(\frac{1}{4.5+0.5*\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{4.5+0.5*(-\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

≈ 1.098538

真实值为$ln3 = 1.098612$，故龙贝格算法的精确度最高。

Q18

18. 用三点公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0, 1.1$ 和 1.2 处的导数值,并估计误差. $f(x)$的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2
$f(x)$	0.2500	0.2268	0.2066

解：(1) 由三点求导公式可得：

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$，$\xi_i \in (x_0,x_2), i=0,1,2$

又 $|f'''(\xi_i)| \le \underset{1.0\le x\le 1.2}{max}|f'''(x)| = \underset{1.0\le x\le 1.2}{max}|\frac{-24}{(1+x)^5}| = 0.75$

将$x_0=1.0, x_1=1.1, x_2=1.2$代入得：$f'(1.0)=-0.247, f'(1.1)=-0.217, f'(1.2)=-0.189$

再通过 $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$ 求得各项真实值分别为-0.250，-0.216和-0.188

故估计误差分别为0.003, 0.001和 0.001

(2) 根据数值积分公式，$f(x_{k+1}) = f(x_k)+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)dx$

对积分使用梯形公式可得：$f(x_{k+1}) = f(x_k)+\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f'(x_k)+f'(x_{k+1})]-\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}f'''(\eta_k)$, $\eta_k \in (x_k,x_{k+1})$

当$k=0,1$时，可得：

$$f'(x_0)+f'(x_1)\approx\frac{2}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$

$$f'(x_1)+f'(x_2)\approx\frac{2}{h}[f(x_2)-f(x_1)]$$

同理，对于$f(x_{k+1})=f(x_{k-1})+\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}f'(x)dx$ 可得：$f'(x_0)+f'(x_2)\approx\frac{1}{h}[f(x_2)-f(x_0)]$

将$x_0=1.0,x_1=1.1,x_2=1.2$代入得：$f'(1.0)=-0.248,f'(1.1)=-0.216,f'(1.2)=-0.188$

故估计误差分别为0.002,0.000,0.000