计算方法　　作业一　　习题 P19　 2,5,7,9

学号：11812419　姓名：江宇辰　 日期：2022.02.2

2. 设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差.

解：由题意得： x* - x / x = 0.02 或 x* - x / x* = 0.02，故 x* = 1.02x 或 x = 0.98x*

故对于 x^n, 其相对误差为
x*^n - x^n / x^n = 1.02^n - 1 = (1.02 - 1)(1.02^(n-1)+1.02^(n-2) +...+1.02^2+1.02+1) ≈0.02n

或
x*^n - x^n / x*^n = 1 - 0.98^n = (1 - 0.98)(1+0.98+0.98^2+...+0.98^n) ≈0.02n
故 x^n 的相对误差为 0.02n。

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：设半径 R 允许的相对误差限为 x，则|R* - R| / R <= x
故计算体积时，因为 V = (4/3)ΠR^3，
故 (4/3)ΠR^3 的相对误差限为 |(4/3)ΠR*^3 - (4/3)ΠR^3| / (4/3)ΠR^3 <= (1+x)^3 - 1=0.01, 求得 x = 0.0033
故度量半径 R 时允许的相对误差限是 0.33%

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}\approx 27.982$）.

解：根据二次方程求根公式，方程 x^2 - 56x + 1 = 0 的解为 x = (56±2√783) / 2 = 28±√783
故 要使得两个根至少具有 4 位有效数字，则√783 需精确到五位小数，即取√783 = 27.98213
此时，x = 55.98213 或 0.01786 以满足第二个根具有 4 位有效数字。

9. 正方形的边长大约为 100 cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm^2？

解：设正方形边长准确值为 x，近似值为 x*，设边长测量时允许的误差为 t cm(t >= 0)，则计算面积时，其误差为 | x*^2 - x^2 | <= 1 cm^2，其中根据题意，可视为 x* = 100cm
故 |100^2 - (100±t)^2| <= 1 -> t <= 0.005
即 测量正方形边长时误差不超过 0.005cm 时，其面积误差不超过 1 cm^2