EEE5062计算方法 作业二

习题P48：2、4、8、14、18、19(选做)

作业提交DDL：2022/3/17 23:59前

姓名：江宇辰   学号：11812419   提交时间：2022.03.16

Q2

2. 给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表：

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	−0.916 291	−0.693 147	−0.510 826	−0.356 675	−0.223 144

用线性插值及二次插值计算 ln 0.54 的近似值.

解：根据线性插值方法，选择区间内包含 $x=0.54$ 的区域进行线性插值，故选择[0.5, 0.6]，此时

$x1=0.5\ \ y1=-0.693147\ \ x2=0.6\ \ y2=-0.510826$ 代入线性插值公式后可得

$p(x)=1.82321*x-1.604752$, 故 $ln0.54\approx p(0.54)=-0.620219$

同理，根据二次插值，选择[0.5, 0.7]，此时

$x1=0.5\ \ y1=-0.693147\ \ x2=0.6\ \ y2=-0.510826\ x3=0.7\ \ y3=-0.356675$ 代入二次插值公式后可得

$p(x)=-1.408500*x^2+3.372560*x-2.027302$, 故 $ln0.54\approx p(0.54)=-0.616838$

Q4

4. 设 x_j 为互异节点($j=0,1,\cdots,n$)，求证：

(1) $\sum\limits_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k(k=0,1,\cdots,n)$;

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)\equiv 0(k=1,2,\cdots,n)$.

证：（1）根据余项定理，$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$, 当$f(x)=x^k(k\leq n)$时，$f^{n+1}(x)=0$

故 $R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0\rightarrow\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k(k=0,1,\dots,n)$

(2) 根据（1）$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k$ 与二项式定理可得

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x_j^r(-x)^{r-k}l_j(x)=(-x)^0\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{0}x_j^k l_j(x)+(-x)^1\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{1}x_j^{k-1}l_j(x)+\dots+(-x)^k\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{k}x_j^0 l_j$$

$=(-x)^0\binom{k}{0}x^k+(-x)^1\binom{k}{1}x^{k-1}+\dots+(-x)^k\binom{k}{k}x^0$ （使用（1)中结论）

$=[(-1)^0\binom{k}{0}+(-1)^1\binom{k}{1}+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}]x^k$

根据二项式系数的性质，$=[(-1)^0\binom{k}{0}+(-1)^1\binom{k}{1}+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}]\equiv 0$

故 $\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)=[(-1)^0\binom{k}{0}+(-1)^1\binom{k}{1}+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}]x^k\equiv 0$.

Q8

8. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

解：根据差商的性质5可知，其7阶差商与其7阶导数有如下关系：

$f[2^0,2^1,\dots,2^7]=f^{(7)}(\xi)/7!=7!/7!=1,\xi\in(min_{0\leq i\leq n}x_i,max_{0\leq i\leq n}x_i)$

又 $f(x)$ 为7次多项式，根据差商的性质，$f[2^0,2^1,\dots,2^8]$ 与其8阶导数相关，故$f[2^0,2^1,\dots,2^8]$ 恒为0。

所以，$f[2^0,2^1,\dots,2^7]=1,\ f[2^0,2^1,\dots,2^8]=0$

Q14

14. 求次数小于等于 3 的多项式 $P(x)$，使其满足条件

$$P(0)=0,\quad P'(0)=1,\quad P(1)=1,\quad P'(1)=2.$$

解：由题意，设多项式$P(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，$P'(x)=3a_1x^2+2a_2x+a_3$，代入题中给定的4个条件可得：

$P(0)=a_4=0$ $P'(0)=a_3=1$ $P(1)=a_1+a_2+a_3+a_4=1$ $P'(1)=3a_1+2a_2+a_3=2$

故 $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=0$，则 多项式$P(x)=x^3-x^2+x$.

Q18

18. 求 $f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差.

解：设已知节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 上的函数值$f_0,f_1,\ldots,f_n$，由定义可知，$I_h(x)$ 在每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$ 上可表示为

$$I_h(x)=f_k(x-x_{k+1})/(x_k-x_{k+1})+f_{k+1}(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)=[x_k^2(x-x_{k+1})-x_{k+1}^2(x-x_k)]/(x_k-x_{k+1})$$
$$=[(x_k^2-x_{k+1}^2)x-x_kx_{k+1}(x_k-x_{k+1})]/(x_k-x_{k+1})=(x_k+x_{k+1})x-x_kx_{k+1}$$

其中，$x_k\le x\le x_{k+1},k=0,1,\ldots,n-1$

对于分段线性插值误差，可利用插值余项得

$max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{M_2}{2}max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|=\frac{M_2}{8}h^2$, 其中$M_2=max_{a\le x\le b}|f''(x)|=2$

故 误差上限为$\frac{h^2}{4}$

Q19

19. 求 $f(x)=x^4$ 在$[a,b]$上的分段埃尔米特插值，并估计误差.

解：设已知节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 上的函数值$f_0,f_1,\ldots,f_n$，由定义可知，$I_h(x)$ 在每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$ 上可表示为

$$I_h(x)=[(x-x_{k+1})/(x_k-x_{k+1})]^2[1+2(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)]f_k+[(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)]^2[1+2(x-x_{k+1})/(x_k-x_{k+1})]f_{k+1}+$$
$$[(x-x_{k+1})/(x_k-x_{k+1})]^2(x-x_k)f'_k+[(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)]^2(x-x_{k+1})f'_{k+1}$$

其中$x_k\le x\le x_{k+1},k=0,1,\ldots,n-1$，将$f_k=x_k^4,f_{k+1}=x_{k+1}^4,f'_k=4x_k^3,f'_{k+1}=4x_{k+1}^3$ 代入可得分段插值。

根据插值余项，$max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{h^4}{384}max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$,故误差上限为$h^4*4!/384=\frac{h^4}{16}$