EEE5062计算方法 作业六

习题P176：7、9、11、12、18

作业提交DDL：2022/5/6 16:20前

姓名：江宇辰　　　学号：11812419　　　提交时间：2022.05.04

Q7

7. 用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15, \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

并求出系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式(即 $\det\boldsymbol{A}$)的值.

解：由题意得：

对增广矩阵按列选主元后，再进行高斯消去过程，即

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow (\text{列主元}) \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow (\text{高斯消元}) \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{bmatrix} \rightarrow (\text{高斯消元, 列主元}) \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7} \end{bmatrix}$$

回代求解得：

$x_3 = 3, x_2 = 2$，$x_1 = 1$

系数矩阵A得行列式$detA = -18 * \dfrac{7}{6} * \dfrac{22}{7} = -66$

Q9

9. 用追赶法解三对角方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解：由题意得：

设LU分解为 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

根据公式

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1, c_1 = \alpha_1\beta_1 \\ b_i = \alpha_i\beta_{i-1} + \alpha_i, i = \{2,3,4,5\} \\ c_i = \alpha_i\beta_i, i = \{2,3,4\} \end{cases}$$

其中，b_i, a_i, c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及其下边和上边的次对角线元素，则有

$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \dfrac{3}{2}, \alpha_3 = \dfrac{4}{3}, \alpha_4 = \dfrac{5}{4}, \alpha_5 = \dfrac{6}{5}$ 且 $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}, \beta_2 = -\dfrac{2}{3}, \beta_3 = -\dfrac{3}{4}, \beta_4 = -\dfrac{4}{5}$

由Ly=f, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得 $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{4}, y_4 = \frac{1}{5}, y_5 = \frac{1}{6}$

由Ux=y $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$ 得 $x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{1}{6}$

故$x = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Q11

11. 下述矩阵能否分解为 LU(其中 L 为单位下三角矩阵,U 为上三角矩阵)?若能分解,那么分解是否唯一?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}.$$

解：由题意得：

对于A矩阵，$\Delta_2 = 0$，且经过高斯消去法矩阵无法变成上三角矩阵，故无法进行分解。

对于B矩阵，$\Delta_2 = \Delta_3 = 0$，但经过高斯消去法矩阵可以变成上三角矩阵，故可以进行分解，分解不唯一，可写为

$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$,其中k为任意常数

对于C矩阵，$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$均不为0，故C可分解且唯一。

Q12

12. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

计算 A 的行范数,列范数,2-范数及 F-范数.

解：由题意得:

行范数$||A||_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1.1$

列范数$||A||_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0.8$

2-范数 $A^T A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}$, 故 $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sqrt{0.6853} = 0.8279$

F-范数$||A||_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{0.71} = 0.8426$

Q18

18. 设

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix},$$

计算 A 的条件数 $\text{cond}(A)_v (v=2, \infty)$.

解：由题意得：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix}, ||A||_\infty = ||A^{-1}||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 199$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{bmatrix}$$

故 $cond(A)_2 = ||A^{-1}||_2 \, ||A||_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}} = \sqrt{\frac{39205.99997}{2.55063e-05}} = 39206.0010$

$$cond(A)_\infty = ||A^{-1}||_\infty \, ||A||_\infty = 199^2 = 39601$$