EEE5062计算方法 作业十

习题P316：1、2、5(1)

作业提交DDL：2022/5/31 16:20前

姓名：江宇辰　　　学号：11812419　　　提交时间：2022.05.30

Q1

1. 用欧拉法解初值问题

$$y' = x^2 + 100y^2, \quad y(0) = 0.$$

取步长 $h=0.1$，计算到 $x=0.3$（保留到小数点后 4 位）.

解：由题意得：

欧拉法公式为$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n^2 + 100y_n^2)$，$n = 0, 1, 2$，将$y_0 = 0$代入得：

$y(0.1) \approx y_1 = 0$

$y(0.2) \approx y_2 = 0.0010$

$y(0.3) \approx y_3 = 0.0050$

Q2

2. 用改进欧拉法和梯形法解初值问题

$$y' = x^2 + x - y, \quad y(0) = 0.$$

取步长 $h=0.1$，计算到 $x=0.5$，并与准确解 $y=-e^{-x}+x^2-x+1$ 相比较.

解：改进的欧拉法为 $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$，将$f(x,y) = x^2 + x - y$代入得：

$$y_{n+1} = (1 - h + \frac{h^2}{2})y_n + \frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n) + (1+x_{n+1})x_{n+1})]$$

同理，梯形法的公式为 $y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{h}{2+h}[x_n(1+x_n) + x_{n+1}(1+x_{n+1})]$

将y_0, h代入得：

x_n	**改进欧拉法**y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	**梯形法**y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
0.1	0.0055	3.37418036e-4	0.005238095	7.55132781e-4
0.2	0.021927500	6.58253078e-4	0.021405896	1.36648778e-4
0.3	0.050144388	9.62608182e-4	0.049367239	1.85459653e-4
0.4	0.090930671	1.25071672e-3	0.089903692	2.23738443e-4
0.5	0.144992257	1.52291668e-3	0.143722388	2.53048087e-4

由表可知，梯形法较改进的欧拉法更加精确。

Q5（1）

5. 取 $h=0.2$，用四阶经典的龙格—库塔方法求解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} y'=x+y, & 0<x<1, \\ y(0)=1. \end{cases}$

解：四阶经典龙格-库塔方法公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \quad (n=0,1,2,\dots) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases}$$

由题意得，$f(x,y)=x+y$，将$h=0.2,y_0=y(0)=1$代入得：

x_n	y_n
0.2	1.242800000
0.4	1.583635920
0.6	2.044212913
0.8	2.651041652
1.0	3.436502273