Sintesi di un filtro passa-basso alla Butterworth mediante circuito LC

NOME: Charlotte Ludovica

COGNOME: Primiceri

MATRICOLA: 521061

1.SPECIFICHE

-Filtro Passa-Basso alla Butterworth

-$f_0 = 1\ kHz$

-$f_s = 4\ kHz$

-$\alpha_{min} = 20\ dB$

-$\alpha_{max} = 0.5\ dB$

-$R_o = 1\ \Omega$

2.METODO

Per semplificare i calcoli lavoriamo su una rete normalizzata che presenta la stessa configurazione di quella data ma con gli elementi che subiscono una variazione di scale e una normalizzazione in frequenza.

Un filtro progettato con un approssimazione alla Butterworth presenta una risposta in frequenza massimamente piatta nella banda passante perché presenta una funzione di trasferimento del tipo:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2n}} = \frac{1}{1+|h(\Omega)|^2} \qquad (1)$$

Questa funzione, infatti, ha la caratteristica di avere tutte le derivate nulle fino all'ordine n-1, al contrario di filtri alla Chebyshev o alla Cauer che presentano del ripple in banda.

Definiamo l'attenuazione come:

$$\alpha(\Omega) = 10\log\left|\frac{1}{|H(\Omega)|^2}\right| \qquad (2)$$

Mentre i coefficienti del polinomio al denominatore definiscono le caratteristiche del filtro in termini di α_{max}, α_{min}, ω_0, e ω_s. α_{max} è la massima variazione dell'attenuazione in banda passante e ω_0 è la pulsazione in cui finisce il ripple e si passa alla banda di transizione. α_{min} è la minima attenuazione in banda di stop, la quale inizia a partire da una pulsazione ω_s. ε invece ci dà informazioni sulla larghezza della banda di transizione e si calcola in $\Omega = 1$, per cui $\alpha(\Omega) = \alpha_{max}$, con la seguente formula:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\cdot\alpha_{max}} - 1} \qquad (3)$$

Così possiamo calcolare l'ordine n del filtro che ci definisce la pendenza della retta asintotica della risposta in frequenza del modulo:

$$n \cdot 20\frac{dB}{dec} \qquad (4)$$

e considerando:

$$\Omega = \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_0} \qquad (5)$$

da cui $\alpha(\Omega_s) = \alpha_{min}$:

$$n \geqslant \frac{log(\frac{\sqrt{10^{0.1\cdot\alpha_{min}-1}}}{|\varepsilon|})}{\log(\Omega_s)} \qquad (6)$$

Maggiore è il valore dell'ordine migliore sarà la qualità della banda passante.
Conoscendo la funzione di trasferimento e la funzione generatrice del modulo nel dominio di Laplace

$$|t(j\Omega)|^2 = t(j\Omega)t(j\Omega)^* = t(s)t(-s)|_{s=j\Omega} \tag{7}$$

possiamo scrivere la funzione di trasferimento:

$$t(s) = H(s) = \frac{f(s)}{g(s)} \tag{8}$$

con $g(s)$ definito dai soli poli a parte reale negativi per garantire la stabilità del circuito.

Per trovare $g(s)$ si risolve l'equazione:

$$1 + (-1)^n \varepsilon^2 s^{2n} = 0 \tag{9}$$

Per scrivere il coefficiente di riflessione invece ci serviamo dell'equazione caratteristica derivante dal fatto che il doppio bipolo LC preso in considerazione è una rete senza perdite:

$$|t(j\Omega)|^2 + |\rho(j\Omega)|^2 = 1 \;\rightarrow\; t(s)t(-s) + \rho(s)\rho(s) = 1 \;\rightarrow\; \frac{f(s)f(-s)}{g(s)g(-s)} + \frac{h(s)h(-s)}{g(s)g(-s)} = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; f(s)f(-s) + h(s)h(-s) = g(s)g(-s) \tag{10}$$

Da cui si ricava $h(s)$ per calcolare:

$$p(s) = \frac{h(s)}{g(s)} \tag{11}$$

Quindi possiamo scrivere il valore dell'impedenza d'ingresso del doppio bipolo tramite la relazione:

$$Z(s) = \frac{1 - p(s)}{1 + p(s)} \tag{12}$$

Per sintetizzare la funzione di impedenza risolviamo questa frazione con il metodo delle divisioni successive ottenendo dei valori di capacità, induttori e resistenze:

$$Z(s) = k_\infty s + \cfrac{1}{k_\infty^{(1)} s + \cfrac{1}{k_\infty^{(2)} s + \cdots \cfrac{1}{k_\infty^{(2n+1)} s}}} \tag{13}$$

Bisogna infine denormalizzare le impedenze z ottenute rispetto alla resistenza caratteristiche R_0 ottenendo le impedenze Z della rete non normalizzata:

$$z = \frac{Z}{R_0} \tag{14}$$

3.PROCEDIMENTO

Procediamo a calcolare la pulsazione normalizzata: $\Omega_s = \frac{2\pi \cdot 4000}{2\pi \cdot 1000} = 4$

Quindi possiamo ricavare i due parametri di progetto fondamentali:

$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,5} - 1} \simeq 0,35$ $\qquad$ $n = \frac{log(\frac{\sqrt{10^{0,1 \cdot 20} - 1}}{|0,35|})}{\log(\Omega_s)} \simeq 3$

La nostra funzione di trasferimento sarà quindi: $|H(s)|^2 = \frac{1}{1-(0,35)^2 s^6} = \frac{1}{1 - 0,1225 s^6}$

Utilizzando il comando 'pole' nel software Mathlab troviamo i poli (come vediamo in Figura 1):

$s_{1,2} = \pm 1,4190$
$s_{3,4} = -0,7095 \pm 1,2289i$
$s_{5,6} = 0,7095 \pm 1,2289i$

```
Command Window
>> pole(tf([1],[-0.1225,0,0,0,0,0,1]))

ans =

  -1.4190 + 0.0000i
  -0.7095 + 1.2289i
  -0.7095 - 1.2289i
   1.4190 + 0.0000i
   0.7095 + 1.2289i
   0.7095 - 1.2289i
```

Figura 1-Poli ottenuti tramite Mathlab

Scartando i poli a parte reale positive scriviamo il coefficiente di trasmissione:

$$t(s) = H(s) = \frac{1}{\varepsilon \prod i{=}1,\dots,n(s-s_i)} = \frac{1}{0.35(s+1{,}4190)(s+0{,}7095-1{,}2289i)(s+0{,}7095+1{,}2289i)} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{0{,}350s^3+0{,}993s^2+1{,}410s+1}$$

Sapendo dalla funzione di trasferimento che $f(s)f(-s)$ = 1 calcoliamo:

$$h(s)h(-s) = g(s)g(-s) - f(s)f(-s) = 1 - 0{,}1225s^6 - 1 = 0{,}1225s^6$$

Scegliendo la determinazione positiva otteniamo: $h(s) = +0{,}35s^3$

Per cui: $p(s) = \frac{0{,}350s^3}{0{,}350s^3+0{,}993s^2+1{,}410s+1}$

$$Z(s) = \frac{0{,}993s^2+1{,}410s+1}{0{,}700s^3+0{,}993s^2+1{,}410s+1}$$

È una funzione razionale reale positiva dispari con grado del denominatore maggiore di quello del denominatore per cui ha uno zero all'infinito. Eseguendo la divisione tra polinomi otteniamo:

$$Z(s) \simeq \frac{1}{0{,}705s+\frac{1}{1{,}410s+\frac{1}{0{,}705s+1}}}$$

I termini $K_\infty^{(2n)}$ sono i valori delle induttanze e I termini $K_\infty^{(2n+1)}$ sono quelli delle capacità:

$c_1 = 0{,}705\ F$
$l_1 = 1{,}410\ H$
$c_2 =$
$0{,}705\ F$
$r_i = 1{,}000\ \Omega$

Ora denormalizziamo il circuito tenendo conto che $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000 = 6280\ s^{-1}$ e $R_o = 1\ \Omega$:

$C_1 = \frac{c_1}{\omega_0 \cdot R_0} = 112{,}261\ \mu F$
$L_1 = \frac{R_0 \cdot l_1}{\omega_0} = 224{,}520\ \mu H$
$C_2 = \frac{c_2}{\omega_0 \cdot R_0} = 112{,}261\ \mu F$
$R_i = r_i \cdot R_o = 1\ \Omega$

4.RISULTATI E DISCUSSIONE

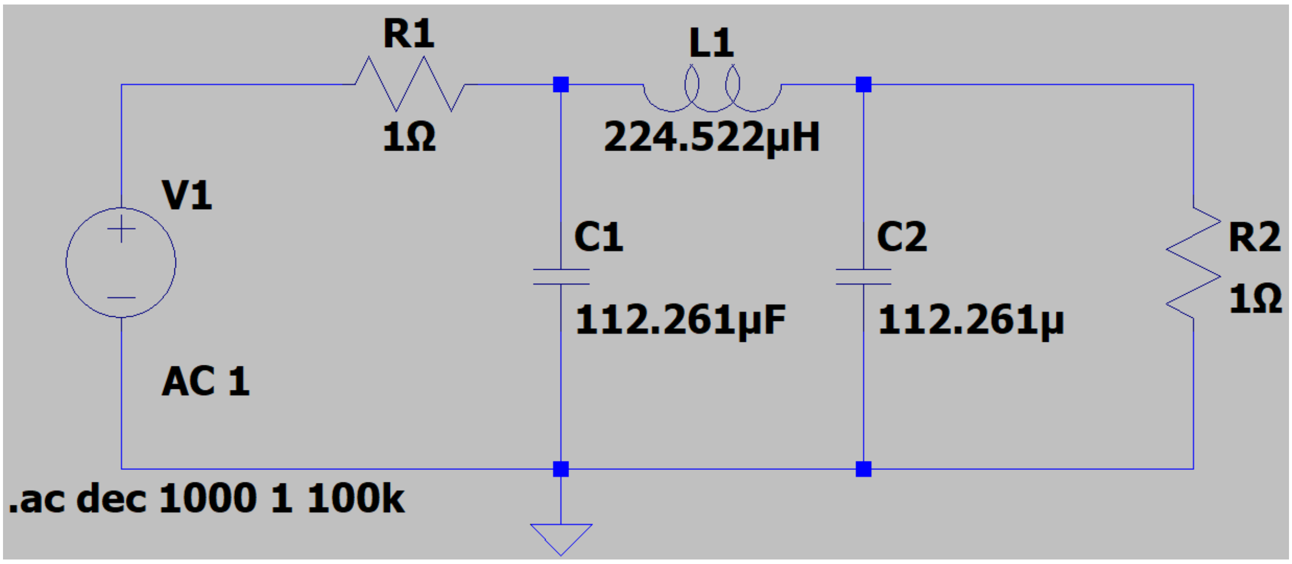

Figura 2-Schema circuitale su Ltspice

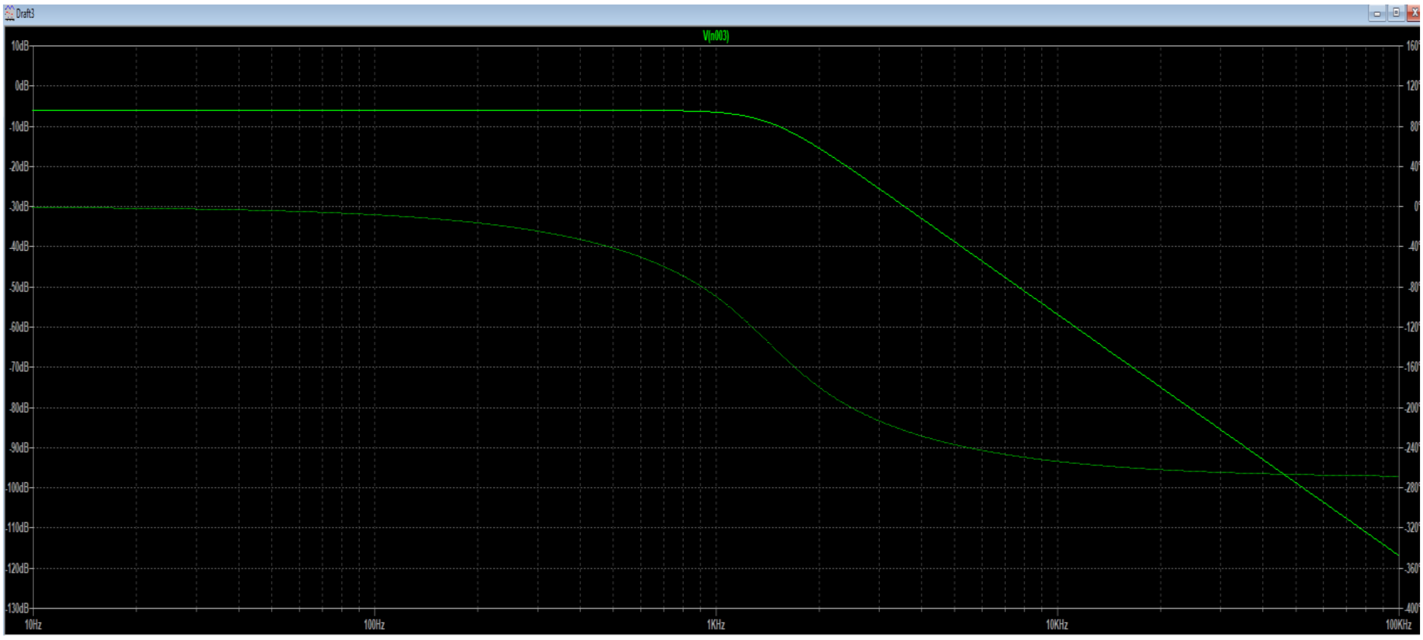

Figura 3-Diagramma della risposta in frequenza su LtSpice

In base ai valori degli elementi circuitali ottenuti abbiamo potuto costruire il nostro filtro di terzo ordine alla Butterworth sul programma LtSpice come in Figura 2 e poi simulare la risposta in frequenza come in Figura 3. Da quest’ultima notiamo innanzitutto che non partiamo da 0 dB ma da -6dB, il che è normale perché già di suo il partitore di tensione nel circuito ci dà un attenuazione di 6dB in continua. La pendenza è giustamente di -60 dB/dec . Dalla banda passante, che rispecchia la caratteristica di Butterworth per cui si ha risposta massimamente piatta, si passa alla banda di transizione proprio a 1 KHz. Poi vediamo che da 1 kHz a 4 kHz la pendenza è di circa 26 dB rispetto alla minima dei 20 dB richiesti, mentre l’attenuazione in banda passante è esattamente di 0,5 dB come da specifica.