



设实数 a, b 满足 $3(a^2 + b^2) = 2ab + 6$, 则 ab 的取值范围为 ()

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| A. $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ | B. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ | C. $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ | D. $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

已知函数 $f(x) = x^2 e^x$, 若关于 x 的方程 $2[f(x)]^2 - (2a+1)f(x) + a = 0$ 有且仅有 4 个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\{0\} \cup (e, +\infty)$
- B. $\{0\} \cup (\frac{4}{e^2}, +\infty)$
- C. $[0, \frac{4}{e^2}]$
- D. $(\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e})$

在极端刺激下, 物理刺激强度与人类心理感受之间的关系近似满足史蒂文斯幂定律: $S = k \cdot I^n$, 其中 k 为非零常数, n 为幂常数, S 为主观感觉强度, I 为物理刺激强度, $I > 0$. 现有如下 RPE (主观感觉强度) 表:

强度	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
自我感觉	6—8	9—11	12—14	15—17	18—20

已知在临床条件下 $k = \frac{1}{4}$, 在 RPE 强度为 S_i 时得到的实际物理刺激强度为 I_i , 则 ()

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| A. 当 $n=2$ 时, $I_3 > I_2$ | B. 当 $n=2$ 时, $2I_5 \geq 3I_1$ |
| C. 当 $n=3$ 时, $I_2 I_4 < I_3^2$ | D. 当 $n=4$ 时, $I_1 I_2 I_4 > I_3 I_5$ |

若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $F(x_0) = 0$, 且当 $x \neq x_0$ 时, $F(x) > 0$, 则称 $F(x)$ 为 x_0 正移函数. 定义符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - x, & x \geq 0, \\ f(x+1), & x < 0 \end{cases}, \text{ 则 ()}$$

- | | |
|---|--|
| A. $\operatorname{sgn}(x)$ 是奇函数 | B. $f(x)$ 是 1—正移函数 |
| C. 方程 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 有且仅有两解 | D. 函数 $g(x) = f(x) \cdot \operatorname{sgn}(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$ |

设第三象限角 θ 满足 $\cos(\frac{7\pi}{2} - \theta) = \frac{2}{3}$, 则 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

设 $\{a_n\}$ 为首项大于 0, 公差不为 0 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 a_2, a_1, a_4 成等比数列, 则使得不等式 $S_n + 4a_1 < 0$ 成立时对应最小整数 n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $n(S_{n+1}-1)=n(S_n+n)+S_n$.

(1) 证明: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 若 $a_1+a_2=6$.

① 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

② 求 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

设函数 $f(x)=\sin x-x \cos x+\frac{1}{2}ax^2+2\pi$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $(-2\pi, 2\pi)$ 上的极值;

(2) 证明: 存在 a , 使 $f(x)$ 在 $x=2\pi$ 处的切线经过原点.

记 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1$, $16S_nS_{n+1}=(a_n+1)^2(a_{n+1}+1)^2$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{S_n}{(a_n+1)^2}\right\}$ 是常数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 记数列 $\left\{\frac{a_n}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\ln(n+1) < T_n \leq n$.

已知函数 $f(x)=(x-2a)(2x\ln x-x+2a)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3$.

① 求 a 的取值范围;

② 当 $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, 证明: $x_3 < x_1+x_2 < 2x_3$.