TRAVAIL PRATIQUE

GESTION DU RISQUE FINANCIER II
ACT-2011

ÉQUIPE 9

Rapport
Travail pratique

Par	*Numéro d'identification*
Lorélie Gélinas	537 005 871
Charliane Larose	536 984 196
Émie Leclerc	536 994 919

Travail présenté à
Monsieur
THAI NGUYEN

22 AVRIL 2025

Table des Matières

1.Approximation des paramètres

Le premier paramètre à estimer est la volatilité. Celle-ci est définit par

$$\hat{\sigma} = \frac{Stdev(ln(S_{t+h}/S_t))}{h^{1/2}}.$$

Comme les données fournies avec l'énoncé sont mensuelles, on a que $h = 1/12$. La valeur finale de $\hat{\sigma}$ est 23.38%.

La valeur du taux sans risque est estimée grâce à la moyenne des taux d'intérêts effectifs annuels de chaque mois des cinq dernières années (2019-03 au 2024-02). L'estimation du taux sans risque a pour valeur $r =$ 2.16%. Comme le taux est utilisé sous forme continue dans les formules d'arbre binomial, r a une valeur de 2.14% de façon continue.

Pour construire les arbres binomiaux, les valeurs de u, d et p sont nécessaires. Les formules suivantes permettent d'obtenir ces valeurs

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}},$$
$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}},$$
$$p = \frac{e^{rh} - d}{u - d}.$$

Comme l'énoncé mentionne une absence de dividende, on suppose que $\delta = 0$.

Pour l'arbre binomial à 4 périodes, on obtient que $u = 1.13$, $d = 0.89$ et $p = 47.08\%$.

Pour l'arbre binomial à 52 périodes, on obtient que $u = 1.03$, $d = 0.97$ et $p = 49.19\%$.

2.Arbres binomiaux

La présente section montre la démarche et les graphiques des arbres binomiaux demandés. La fonction `binomopt` du paquetage `derivmkts` a été grandement utilisée.

Arbres binomiaux à 4 périodes

Les fonctions `binomplot` et `binomopt` du paquetage `derivmkts` permettent de construire les arbres binomiaux demandés et d'en faire les graphes.

L'évolution du prix du sous-jacent pour l'option de vente avec 4 périodes avec un prix d'exercice de 95$ est illustré ci-dessous.

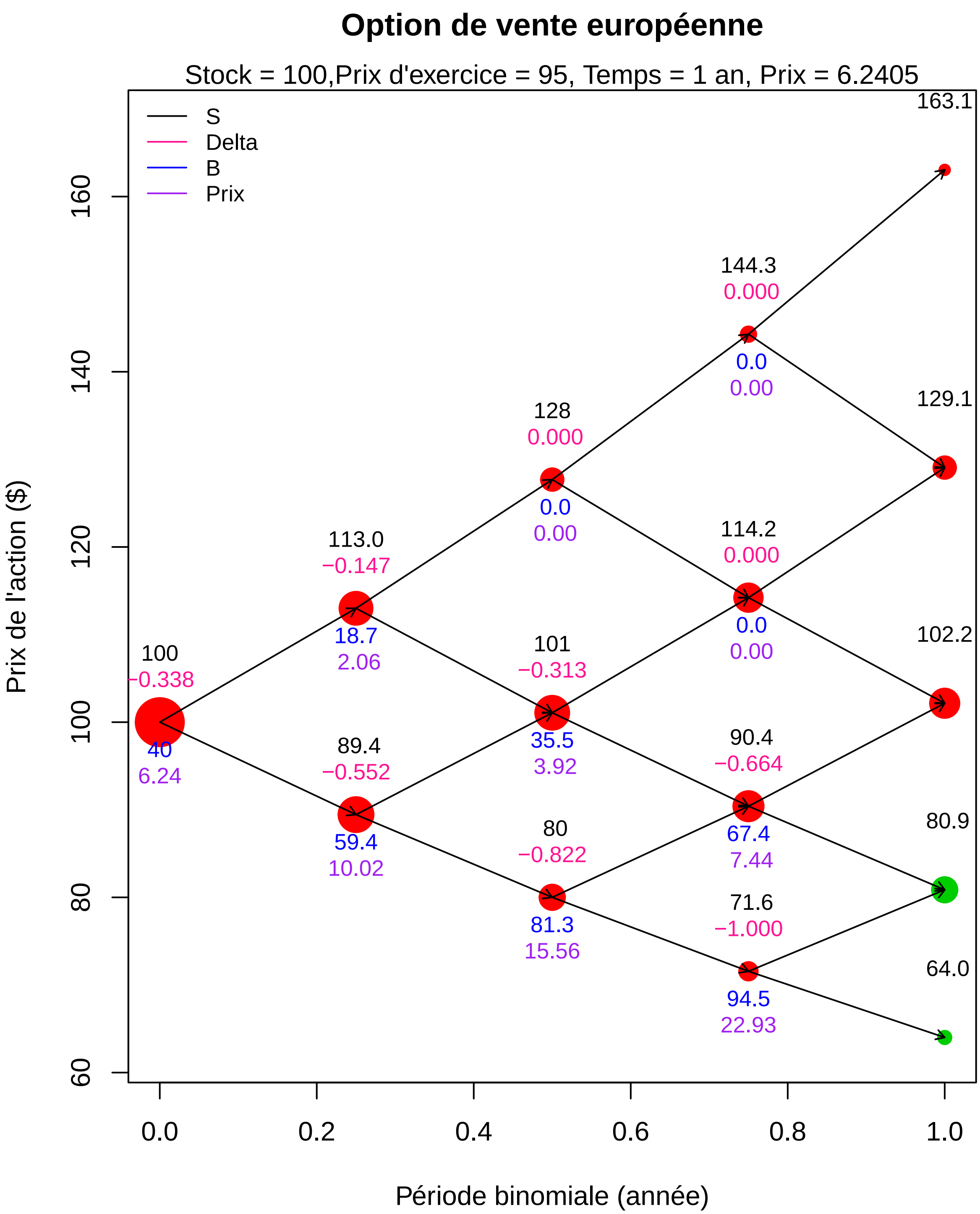

Figure 1 : Arbre binomial de l'option de vente européenne à 4 périodes

On relève que l'option de vente européenne est levée pour seulement deux prix du sous-jacent. Les points sont en vert. Les informations pertinentes à l'arbre binomial sont soulevées directement sur la figure ci-dessus.

L'évolution du prix du sous-jacent pour l'option d'achat européenne avec 4 périodes avec un prix d'exercice de 110$ est illustré ci-dessous.

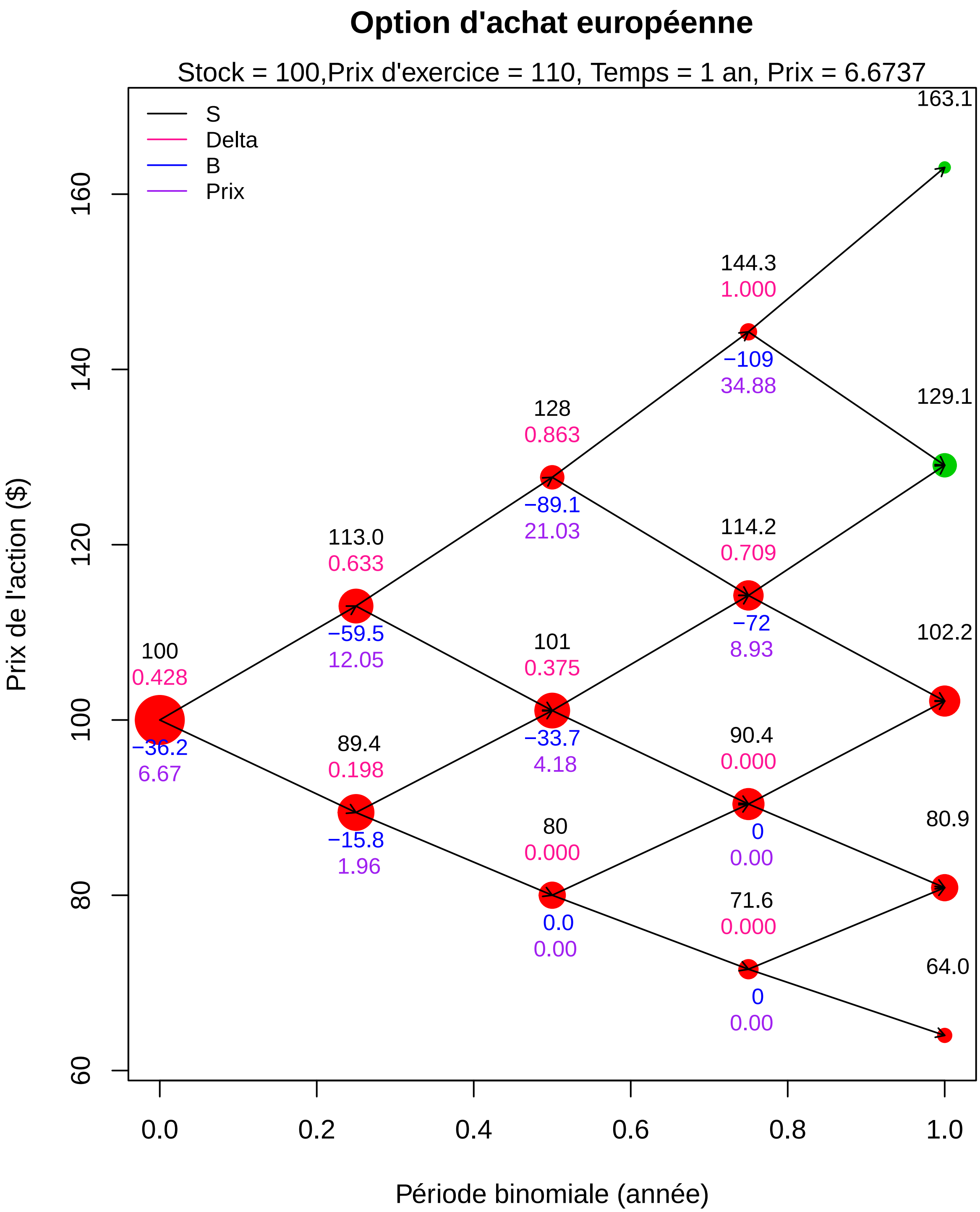

Figure 2 : Arbre binomial de l'option d'achat européenne à 52 périodes

On observe que l'option de d'achat européenne est levée pour seulement deux prix du sous-jacent. Les points où que l'option est levée sont en vert. Les informations pertinentes à l'arbre binomial sont soulevées directement sur le graphe ci-dessus.

Arbres binomiaux à 52 périodes

Le prix pour l'option de vente européenne avec un prix d'exercice de 95$, mais avec 52 périodes, est de 5.8938$. Le prix de l'option d'achat européenne avec prix d'exercice de 110$ est 6.2972$.

Les prix des options asiatiques ont été trouvés à l'aide de la fonction `AsianOption` du paquetage `RQuantLib`. Le prix de l'option d'achat arithmétique avec un prix d'exercice de 110$ est 2.27$. Le pris de l'option de vente à barrière désactivante de 105$ est 2.73$. Le prix d'exercice est 95$ pour cette option.

3.Relation du prix de l'option et du prix d'exercice

Option d'achat

On constate la relation du prix à payer pour l'option d'achat européenne présentée à la section 2, celle avec le modèle 52 périodes, grâce à la Figure 3 ci-dessous.

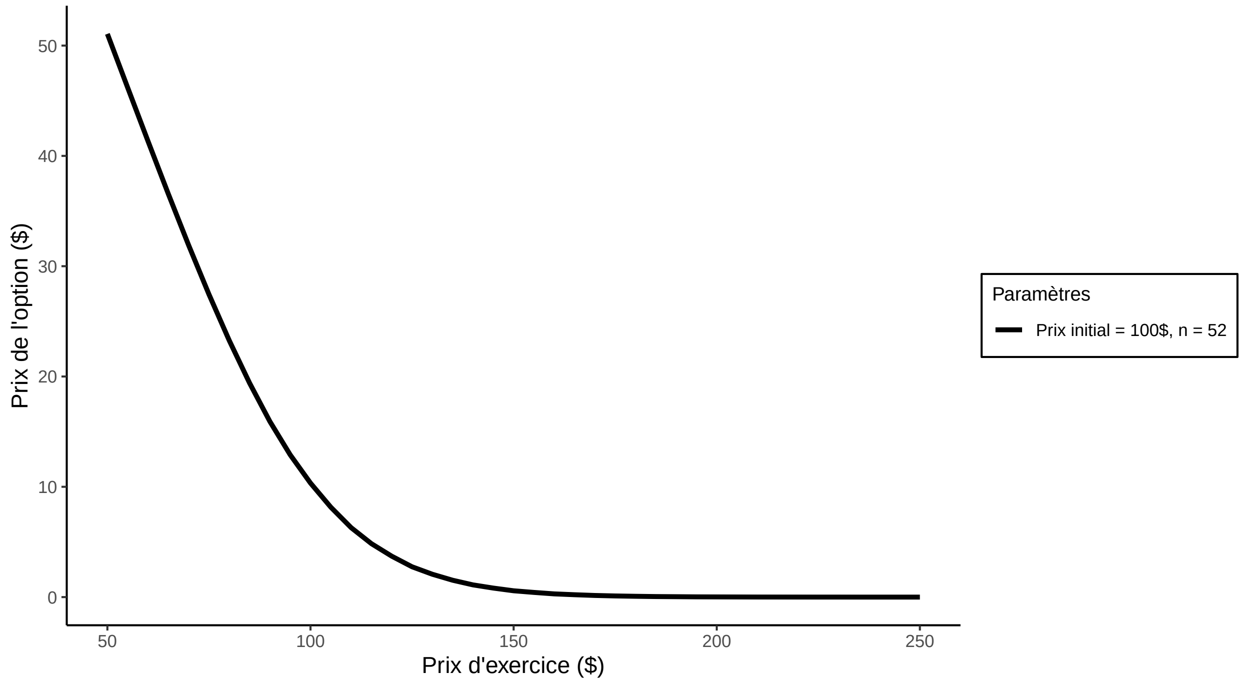

Figure 1: Graphique du prix d'une option d'achat européenne en fonction du prix d'exercice

Figure 3 : Coût de l'option d'achat en fonction du prix d'exercice

La Figure 3 illustre une relation inversement proportionnelle entre le prix à payer pour l'option d'achat et le prix d'exercice. Ce comportement est attendu : plus le prix d'exercice est faible, plus le prix à payer pour l'option sera élevé, car il est plus avantageux d'acheter l'actif sous-jacent à un prix inférieur que sa valeur actuelle. Donc, il a une augmentation des probabilités que l'option soit levée.
À l'inverse, un prix d'exercice élevé entraine une diminution du prix de l'option puisqu'il est moins probable qu'elle soit exercée, car il est moins avantageux d'acheter l'actif sous-jacent à un prix supérieur que sa valeur actuelle.

Option de vente

On constate la relation du prix à payer pour l'option de vente européenne présentée à la section 2, celle avec le modèle 52 périodes, grâce à la Figure 4 ci-dessous.

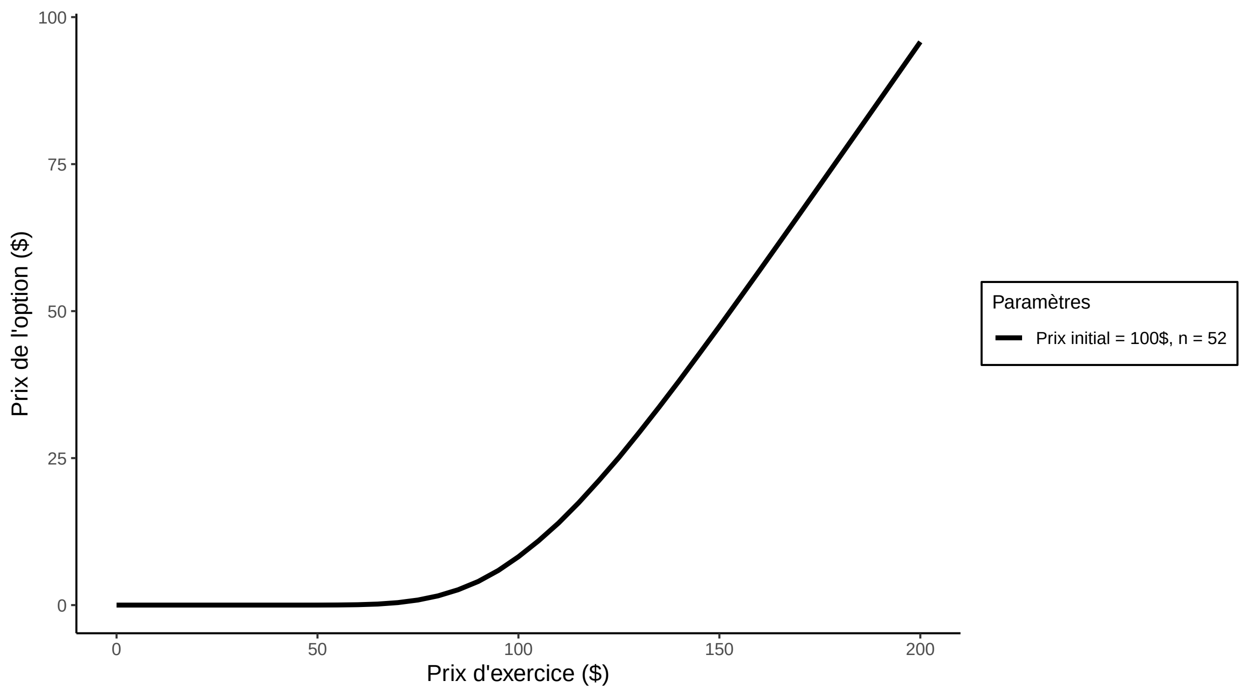

Figure 2: Graphique du prix d'une option de vente européenne en fonction du prix d'exercice

Figure 4 : Coût de l'option de vente en fonction du prix d'exercice

La Figure 4 illustre une relation directement proportionnelle entre le prix à payer pour l'option de vente et le prix d'exercice. Ce comportement est attendu : plus le prix d'exercice est élevé, plus il y a de chance que l'option soit exercée. En effet, il est plus avantageux de vendre l'actif à un prix supérieur que sa valeur actuelle, il y a donc plus de chance que l'option de vente soit exercée lorsque le prix d'exercice augmente. À l'inverse, il est moins avantageux de vendre l'actif à un prix inférieur que sa valeur actuelle. Donc, lorsque le prix d'exercice diminue, le prix de l'option diminue, car il y a moins de chance qu'elle soit exercée.

4. Arbre bionimal option vente américaine

Avec les mêmes fonctions utilisées pour construire les arbres binomiaux présentés à la section 2, un arbre binomial 4 périodes pour une option de vente américaine a été construit. La figure ci-dessous présente les détails de l'arbre :

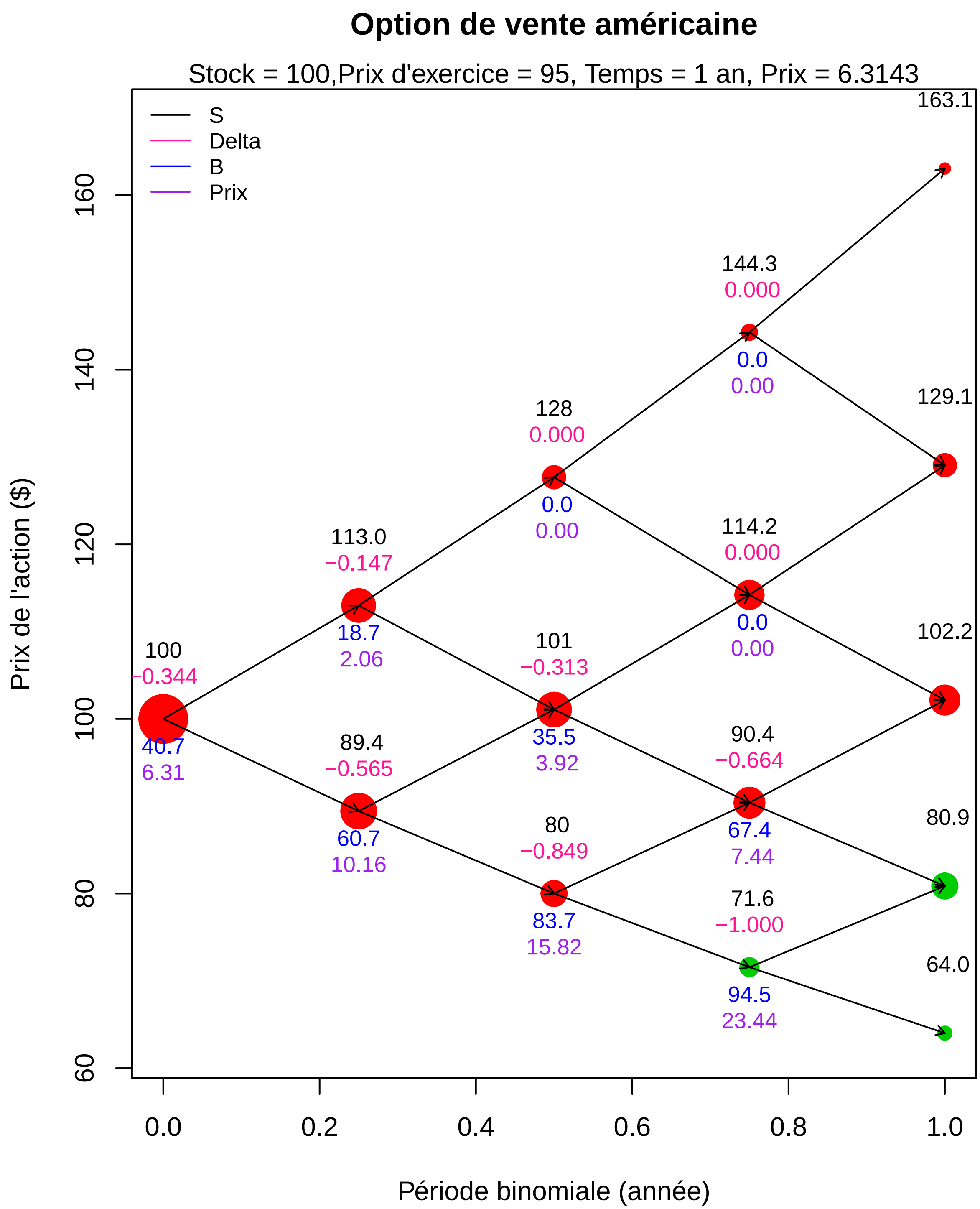

Figure 5 : Arbre binomial de l'option d'achat américaine à 4 périodes

Les paramètres de l'arbre sont les suivants :

Une première différence entre l'option de vente américaine et l'option de vente européenne (présentée à la section 2) est leur prix d'achat. L'option de vente américaine a un prix d'achat plus élevée que l'option de vente européenne, soit **afficher les valeurs**. Ceci est dû au fait qu'il y a plus de chance que l'option de vente américaine soit levée en raison de la possibilité d'exercer l'option avant l'échéance. Cette différence est refletée dans chacun des noeuds. En effet, comme les prix des options sont différents à chacun des noeuds, les portefeuilles réplicatifs sont aussi différents.

Cela introduit la deuxième différence, soit le nombre de possibilités où les options sont levées. En effet, l'option de vente américaine est levée hâtivement à $0,8$ année. Il y a donc une seule option d'exercice hâtif. Cependant, à l'échéance, les deux options sont exercées pour les mêmes valeurs, soient $80,9$ et 64.

Une ressemblance entre les deux options est représentée sur le haut du graphique. En effet, aucune des options n'est exercée pour les valeurs supérieures de l'actif, donc il n'y a aucun portefeuille réplicatif et aucune possibilité d'exercice hâtif. Ainsi, lorsque le sous-jacent augmente de valeur, aucune option n'est exercée.

5. Modèle de Black-Scholes

La présente section a pour but de montrer les prix des options européennes du numéro 2 mais sous l'équation du modèle de Black-Scholes.

Option d'achat

L'option d'achat du modèle de Black-Scholes se définit de la façon suivante

$$C(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),$$

Les valeurs de d_1 et d_2 sont

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Ainsi, la valeur de l'option d'achat $C(100, 110, 0.2338, 0.02137, 1, 0) = 6.3$.

Option de vente

L'option de vente du modèle de Black-Scholes se définit de la façon suivante

$$P(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Ke^{-rT} N(-d_2) - Se^{-\delta T} N(-d_1),$$

Les valeurs de d_1 et d_2 sont définies de la même façon que pour l'option d'achat.

Ainsi, la valeur de l'option de vente $C(100, 95, 0.2338, 0.02137, 1, 0) = 5.9$.

Comparaison entre le modèle d'arbre binomial et le modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes se veut l'équivalent continu du modèle de l'arbre binomial. C'est-à-dire, il s'agit de l'équivalent d'un arbre binomial avec un nombre infini de périodes dans un intervalle de temps fini.

Ainsi, à partir d'un certain nombre de périodes, le prix de l'option, obtenu avec l'arbre binomial, aura tendance à converger vers un prix qui est celui obtenu avec la formule de Black-Scholes.

Il est donc intéressant de comparer les valeurs des options européennes obtenues avec les arbres binomiales précedement avec ceux obtenus avec le modèle de Black-Shcoles.

Justement, il est possible de constater que la valeur de l'option d'achat européenne du modèle binomial à 4 périodes s'éloigne davantage de la valeur obtenue avec le modèle de Black-Scholes que celle obtenue avec l'arbre binomial à 52 périodes.

En effet, la valeur obtenu avec l'arbre à 4 périodes est 6.6737 tandis que celle obtenue avec l'arbre à 52 périodes est 6.2972. Cela s'explique par le fait qu'à mesure que le nombre de périodes augmente dans l'arbre binomial, le prix calculé de l'option tend à se rapprocher de celui obtenu avec le modèle de Black-Scholes.

Il est possible de voir que la valeur obtenue avec l'arbre à 52 périodes converge vers la valeur obtenue avec le modèle de Black-Scholes, soit 6.3013. Ce qui illustre bien la convergence mentionnée plus haut.

Des observations similaires peuvent être faites pour l'option de vente européenne. En effet, on remarque que la valeur obtenue à l'aide du modèle binomial à 4 périodes s'éloigne davantage de celle fournie par le modèle de Black-Scholes, comparativement à celle obtenue avec l'arbre à 52 périodes. Plus précisément, la valeur de l'arbre à 4 périodes est de 6.2405, tandis que celle calculée avec l'arbre à 52 périodes est de 5.8938.

Par ailleurs, la valeur obtenue avec l'arbre à 52 périodes tend à converger vers celle donnée par la formule de Black-Scholes, soit 5.9022, ce qui confirme à nouveau la convergence lorsque le nombre de périodes est suffisamment élevé.

Lien entre numéro 3 ???

Annexe

mettre le code, une fois toute fini